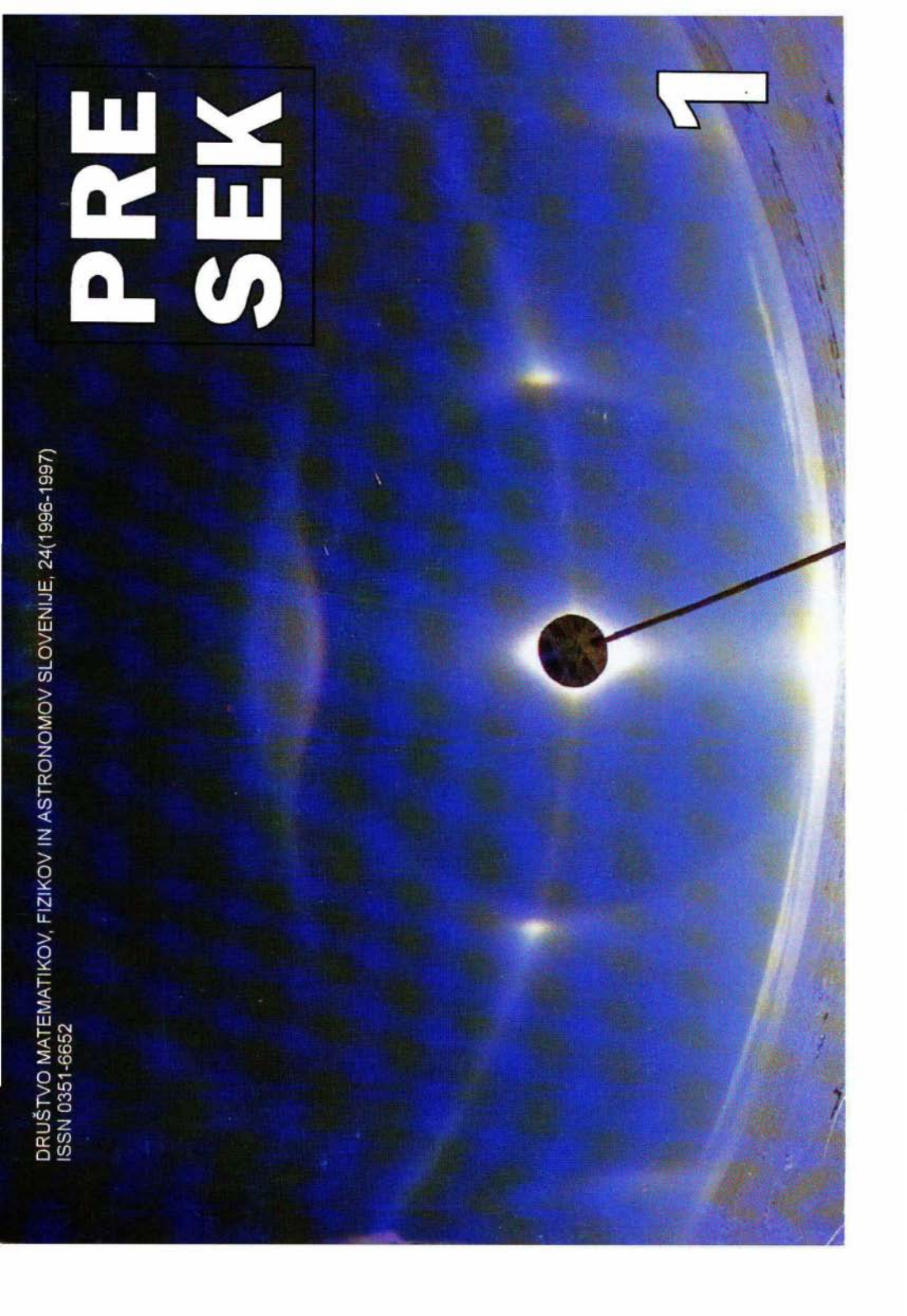


DRUŠTVO MATEMATIKOV, FIZIKOV IN ASTRONOMOV SLOVENIJE, 24(1996-1997)
ISSN 0351-6652

PRE SEK

1



PRESEK

list za mlade matematike, fizike, astronome in računalnikarje
24. letnik, leto 1996/97, številka 1, strani 1–64

	VSEBINA	
MATEMATIKA	Z matematiko nad pošto (Primož Potočnik).....	14-18
	Vsota potenc naravnih števil (Aleksander Turnšek)...	48-52
FIZIKA	Hálo, čudoviti naravni pojav – 1. del (Matej Rovšek) ..	6-13
	Raketa na vodo in stisnjen zrak (Goran Sabolič, Mirko Cvahte)	34-38
	Še o Mpembovem pojavu (Janez Strnad).....	42-46
ASTRONOMIJA	Odkritje rjavih pritlikavk (Mirjam Galičič)	2-4
	Opazujemo Venero (Marijan Prosén).....	39-41
RAČUNALNIŠTVO	O črtnih kodah (Bojan Mohar)	20-24
	Počistimo disk (Matija Lokar)	28-31
NOVICE	Znova blesteči uspehi naših dijakov na olimpiadah iz matematike in fizike (Iz uredništva)	5
NALOGE	Kako hitro hoditi? (Marija Vencelj).....	1
	Kolikokrat bo treba tehtati? – nagradna naloga (Marija Vencelj).....	5
	Ali je vsota kvadratov samih neničelnih števil lahko enaka nič? (Jurij Kovič).....	13
	Razpis na temo 1997 (Marija Vencelj).....	18-19
	Pisani krogi (Martin Juvan)	19
	Nekaj zanimivih nalog za najmlajše bralce (D. M. Milošević, prev. B. Japelj)	24-25
	Knjižni nakupi (Vilko Domajnko).....	25
	Zaporedna števila (Martin Juvan).....	27
	Tri naloge iz geometrije (Borut Zalar).....	52-53
	Skrit račun (Marija Vencelj)	53
	Podaljšana Langfordova zaporedja (Martin Juvan)	53
ZANIMIVOSTI	Zapeljivi radiolar (Vilko Domajnko)	26-27
RAZVEDRILO	Križanka "Računalniške povezave" (Marko Bokalič) ..	32-33
TEKMOVANJA	11. državno tekmovanje iz znanja računalništva za osnovnošolce (Tihomil Šlenc)	54-55
	32. tekmovanje za Zlato Vegovo priznanje (Aleksander Potočnik).....	56-57
	Državno tekmovanje iz fizike za Zlata Stefanova priznanja 1995/1996 (Jelisava Sakelšek).....	57-59
	40. matematično tekmovanje srednješolcev Slovenije (Matjaž Željko)	59-61
	34. tekmovanje iz srednješolske fizike (Ciril Dominko)	61-64
NA OVITKU	Hálo na severnem polu. Glej tudi članek na strani 6	I
	Slike k članku Odkritje rjavih pritlikavk na strani 2	III
	Raketa na vodo in stisnjen zrak. Glej tudi stran 34	IV

KAKO HITRO HODITI?

Zadnje čase so v svetu čedalje popularnejša popotovanja, ki vključujejo tudi veliko peš hoje.

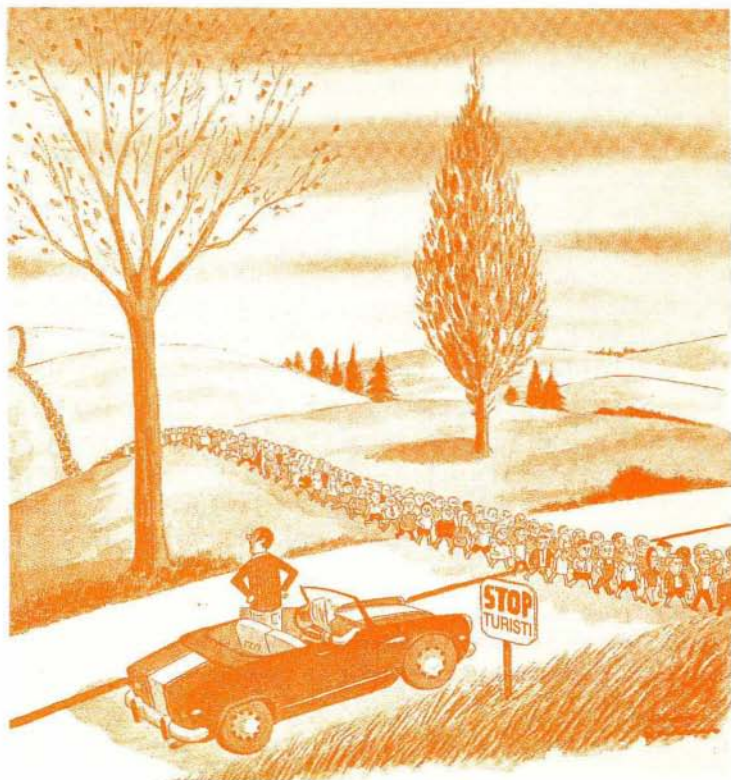
Na enem takih potovanj bi morali turisti določenega dne priti do rečnega pristanišča, kjer naj bi se vkrkali na ladjo redne rečne linije. Ker je ladja prevažala tudi večino njihove prtljage, so jo morali zanesljivo ujeti.

Zjutraj tistega dne je skupina s povprečno hitrostjo 3 km/h krenila proti reki. Po eni uri hoje je turistični vodič ugotovil, da bodo, če bodo nadaljevali s takšno hitrostjo, ladjo zamudili za 40 minut. Zato je pospešil tempo in preostalo pot so nadaljevali s povprečno hitrostjo 4 km/h. Tako so prišli na cilj 45 minut prezgodaj.

Kako hitro bi morali pot nadaljevati, da bi prišli v pristanišče hkrati z ladjo?

Poskusite nalogo rešiti tudi brez uporabe algebre, zgolj z aritmetičnim premislekom!

Marija Vencelj



ODKRITJE RJAVIH PRITLIKAVK

Poznamo več vrst zvezd. Naše Sonce je, na primer, precej povprečna in ne hudo masivna zvezda, ki preživi aktivna leta svojega življenja. To pomeni, da v Sončevi sredici potekajo reakcije jedrskega zlivanja, od katerih je najbolj pogosto zlivanje vodikovih atomov v atome helija. Obstajajo na primer tudi takšne zvezde, za katere pravimo, da so na koncu svojega življenja, saj so že pokurile svoje zaloge jedrskega goriva. Med temi so najbolj znane bele pritlikavke in nevtronske zvezde.

Po približno dvajsetih letih iskanja pa so astronomi sedaj končno uspeli odkriti posebno vrsto zvezd, ki se imenujejo *rjave pritlikavke*. Pravijo jim *objekti, ki so premajhni, da bi bili zvezde, in preveliki, da bi bili planeti*.

Kaj razlikuje planete od zvezd? Z besedo *zvezde* ponavadi mislimo na aktivne zvezde, torej take, ki svetijo, ker v njih potekajo jedrske reakcije. Tako je, kot smo na začetku že povedali, tudi Sonce. Pri reakcijah sproščena energija se nato širi iz središča navzven, dokler se končno s površine ne izseva kot svetloba. Da jedrske reakcije stečejo, mora biti snov v središču dovolj stisnjena in dovolj vroča. Zato mora imeti na kup zbrana snov – zvezda – dovolj veliko maso. Objekti, ki imajo premajhno maso, da bi v njih potekale jedrske reakcije, so na primer planeti našega Osončja. Ti sami ne proizvajajo svetlobe, ampak le odbijajo svetlobo Sonca in jih zato lahko vidimo. Pravzaprav ta trditev ne velja povsem za vse planete Osončja. Mejna masa, ki razlikuje med zvezdo in planetom, je namreč nekaj tisočink mase Sonca. To pa pomeni, da bi v notranjosti Jupitra utegnile v manjši meri že potekati jedrske reakcije. Meritve, ki jih pošilja sonda Galileo, kažejo kar nekaj znakov, da jedrske reakcije v Jupitru morda v manjši meri res potekajo, vendar bodo potrebne še dodatne potrditve. Toda vrnimo se nazaj k rjavim pritlikavkam.

Kakšni so parametri rjave pritlikavke? Njena masa naj bi bila okrog $1/50$ Sončeve mase ali približno $4 \cdot 10^{28}$ kilogramov, polmer pa okrog 70 tisoč kilometrov, kar je približno enako polmeru Jupitra ali kakih desetkrat manj kot Sončev polmer. Na površini rjave pritlikavke bi nam bilo precej vroče, saj bi termometer, če bi zdržal, nameril tja do 1000 stopinj Celzija.

Kako pa vemo, kolikšna je temperatura na površini rjave pritlikavke? Astronomi so uporabili metodo, kakršne se pogosto poslužujemo tudi v običajnem življenju: neznano primerjamo z znanim. Najprej seveda vemo,

da je ta temperatura zagotovo manjša od površinske temperature aktivne zvezde. Natančnejšo vrednost pa so astronomi določili iz spektra ene od znanih rjavih pritlikavk. V spektru so pri infrardečih valovnih dolžinah opazili zelo tipične metanove črte, ki jih ta plin seva, če je segret na določeno temperaturo. Podobne črte so opazili v spektru Jupitrove atmosfere; zanjo pa vemo, da ima temperaturo okrog tisoč stopinj Celzija.

Zakaj je od ideje, da rjave pritlikavke obstajajo, do njihovega odkritja minilo toliko časa? Prav gotovo je te zvezde težko opaziti. V svoji notranjosti nimajo jedrskih peči, kjer bi se sproščala tolikšna energija, da bi lahko videli njihovo površino razbeljeno vročo kot pri Soncu. V središču rjave pritlikavke se sicer za kratek čas morda prižgo jedrske reakcije, vendar hitro ugasnejo. V dvajsetih letih iskanja so odkrili številne kandidate za rjave pritlikavke, vendar se je na koncu za večino njih izkazalo, da gre za katero od že poznanih zvezd. Kje in kako so jih končno našli?

Kot poroča ameriška astronomska revija *Sky & Telescope*, sta dve od rjavih pritlikavk v znani razsuti kopici Plejade, ki leži v ozvezdju Bika. (To je skupina zvezd, od katerih jih s prostim očesom v povprečni noči vidimo vsaj pet, razporejene so pa podobno kot zvezde v Malem vozu. Zato jih ima mnogo ljudi – seveda zmotno! – za Mali voz. Starejše slovensko ime za Plejade je Gostosevci.) Tretjo rjavo pritlikavko pa so opazili kot objekt, ki kroži okrog nekoliko masivnejše zvezde v dvozvezdju. Objekt z imenom *Gliese 229* leži na meji med ozvezdjema Velikega psa in Zajca (slika 1 na III. strani ovitka).

Ocenjujejo, da je rjavih pritlikavk veliko. Zato sodijo med tako imenovane kandidate za napolnjevanje vreče manjkajoče mase v naši Galaksiji. Gibanja zvezd v Galaksiji namreč kažejo, da mora biti v njej več mase, kot je tiste, ki jo lahko vidimo. K vidni masi prispevajo zvezde, ki svetijo, in prah ter plini, ki jih te zvezde osvetljujejo, in jih zato vidimo. Ker je te mase premalo, iščejo astronomi različne oblike skrite mase. Ena od možnosti so objekti, ki so zelo temni in jih zato doslej še nismo opazili. Morda so med njimi tudi rjave pritlikavke.

Rjave pritlikavke so lahko same, ali pa so del dvojnic, kar pomeni, da krožijo okrog masivnejše zvezde. Astronomi so jih iskali v okolici bližnjih zvezd in na področjih, kjer se rojevajo zvezde. Čeprav so v osemdesetih letih našli ogromno kandidatov, pa dokončna potrditev nikoli ni bila prepričljiva. Za običajne zvezde, ki dovolj močno svetijo, lahko izmerimo spektre in njihov celotni izsev ter tako določimo njihovo starost, ki je pomembna lastnost pri razvrščanju. Kot smo že omenili, vir svetlenja (če se že pojavi) v rjavih pritlikavkah zelo hitro tudi ugasne. Torej ta možnost

odpade. Zato je nedvomna identifikacija ponavadi vprašljiva. Ker niso dobro vedeli, kakšne so njihove površinske temperature in koliko naj bi rjave pritlikavke sevale pri posameznih valovnih dolžinah, se na podlagi izmerjenih rezultatov niso mogli preprosto odločiti za ali proti. Zato so potrebovali nov kriterij, ki bo pomagal razločevati rjavo pritlikavko od drugih malo masivnih zvezd.

Eden zelo dobrih kriterijev je čim bolj natančno določena masa. Če bi našli temen objekt, ki bi imel maso manjšo od kakih osem odstotkov Sončeve mase, potem bi bili že precej gotovi, da gre za rjavo pritlikavko. Vendar pa je merjenje mas ena najtežjih reči v astronomiji. Pravzaprav lahko to dovolj natančno naredimo le, če je zvezda sestavni del dvojnega (ali večkratnega) sistema. Tedaj namreč lažja zvezda kroži okrog težje, podobno kot Zemlja kroži okrog Sonca. To gibanje je na podlagi dolgotrajnih opazovanj planetov pravilno opisal že Kepler (*Keplerjevi zakoni*), matematično-fizikalno pa ga je pojasnil in zapisal Newton. Da pa meritve zares lahko opravimo, moramo zvezdi razločiti preko njunega gibanja, kar pomeni, da ne smeta biti predaleč, preveč skupaj ali prešibki.

Ena od treh doslej identificiranih rjavih pritlikavk, omenjeni objekt Gliese 229, je del dvozvezdja. Da gre za rjavo pritlikavko, so se opredelili prav na podlagi njene mase. Na observatoriju Palomar so s posebno metodo, s katero nekoliko zastrejo bleščavo svetlejšo zvezdo, posneli tudi sliko, na kateri je, ob težji zvezdi, spremljevalka jasno vidna (slika 2 na III. strani ovitka).

Merjenje zvezdnih mas je torej težko opravilo, poleg tega pa niso vse rjave pritlikavke del dvojnih sistemov. Na srečo so astronomi nedavno našli še eno metodo, s pomočjo katere se da s precejšnjo gotovostjo trditi, da gre za rjavo pritlikavko. Izmerili so spekter rjave pritlikavke na področju valovnih dolžin, ki ustrezajo rdeči barvi. Opazili so črto, ki je v spektrih ostalih, bolj vročih zvezd, ni videti. Gre za črto, ki jo naredijo atomi lahkega elementa litija. Pri bolj vročih zvezdah se je namreč zaradi mnogo višje temperature litij z jedrskimi reakcijami pretvoril v druge elemente in ga zato ni. Litijevo črto so našli v spektru svetlobe z zvezde PPL 15, ki je ena od rjavih pritlikavk v Plejadah.

Astronomi, ki se ukvarjajo z iskanjem rjavih pritlikavk, so prepričani, da so jih zdaj zares odkrili. Dokončne potrditve pa si obetajo od Hubblovega vesoljskega teleskopa. Naslednje leto bodo namreč poslali nanj novo servisno misijo, ki bo namestila nekaj novih, natančnih instrumentov, s katerimi bomo tudi rjave pritlikavke videli ostreje kot kdajkoli doslej.

Mirjam Galičič

ZNOVA BLESTEČI USPEHI NAŠIH DIJAKOV NA OLIMPIADAH IZ MATEMATIKE IN FIZIKE

Slovenski dijaki so se na olimpiadah iz matematike in fizike letos spet imenitno odrezali.

Na 27. mednarodni fizikalni olimpiadi, ki je potekala v Oslu na Norveškem, je Klemen Žagar (Gimnazija Šentvid, Ljubljana) osvojil srebrno medaljo, Miha Vuk bronasto medaljo, Anže Slosar in Peter Jeglič (vsi trije so dijaki Gimnazije Bežigrad v Ljubljani) pa sta dobila pohvali.

S 37. mednarodne matematične olimpiade v Bombayu v Indiji pa je naša ekipa prinesla dve bronasti medalji. Osvojila sta ju Igor Klep s Srednješolskega centra Ptuj in Matjaž Konvalinka z Gimnazije Bežigrad.

ČESTITAMO!

Računalniška olimpiada je bila letos šele v avgustu in do zaključka urejanja te številke Preseka nismo dobili z nje še nobenih novic.

Več o vseh treh olimpiadah v eni od prihodnjih številčk Preseka.

Iz uredništva

KOLIKOKRAT BO TREBA TEHTATI? – nagradna naloga

Tri skodelice so polne samih drobnih kroglic. Vemo, da so v eni od skodelic samo kroglice po en gram, v drugi samo take po dva grama in v tretji samo trigramske kroglice. Ne vemo pa, v kateri od posod so katere od kroglic, in tega na oko tudi ni moč ugotoviti.

Na voljo je elektronska tehtnica, ki pokaže natančno težo tehtane količine. Z najmanj koliko tehtanji lahko ugotovimo, kje so katere od kroglic? Kako?

Odgovore pošljite najkasneje do 15. oktobra na Uredništvo Preseka, Jadranska 19, 1001 Ljubljana, p.p. 2964. Pripišite tudi šolo in razred, ki ju obiskujete.

Marija Vencelj

HÁLO, ČUDOVITI NARAVNI POJAV – 1. del

Optični pojavi nas nemalokrat presenetijo s svojo lepoto in obliko. Med njimi imajo posebno mesto tisti, ki nastanejo v zemeljskem ozračju – v atmosferi: mavrica, venec okoli sonca ali lune, irizacija, glorijska, zelena črta, polarni sij in pojavi hála.

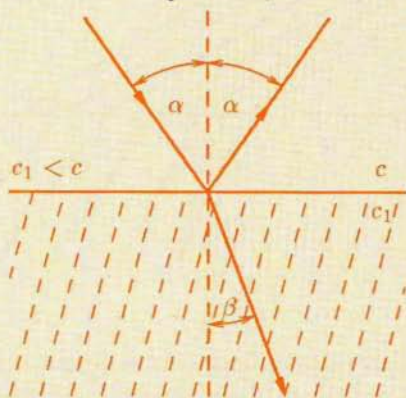
Ljudje so jih opazovali že od nekdaj. S svojim prvinskim znanjem so si njihov nastanek poskušali tudi razložiti, vendar je njihova razlaga često obtičala v slepi ulici. Povezovali so jih z naravnimi nesrečami in iz njih napovedovali vojne ter bolezni. Z napredovanjem ved, kot sta fizika in z njo meteorologija, smo dobili dovolj znanja in pripomočkov, da jih lahko zadovoljivo razložimo. V tem prispevku bomo podrobneje spoznali pojave hála. Ti niso tako poznani kot npr. mavrica, vendar so v svoji popolni pojavnosti vsaj tako zanimivi in privlačni. Vidimo jih v obliki barvnih krogov, lokov in peg okoli sonca ali lune, če svetita skozi tanke cirusne oblake.

Fotografija na naslovnici kaže nekatere sočasno nastale pojave hála. Manjši krog okoli z loparčkom zastrtega sonca se imenuje mali ali 22-stopinjski hálo. Na levi in desni strani njegovega oboda vidimo dve svetlejši pegi, imenovani sosonci. V družino malega hála spadajo še zgornji tangencialni lok in Parryjev lok, ki ju najdemo na temenu malega hála, ter Lowitzovi loki, ki se nahajajo v okolici sosonc, vendar na naši sliki niso izraziti. Večji krog okoli sonca se imenuje veliki ali 46-stopinjski hálo in je viden skupaj s svojimi tremi tangencialnimi loki. Žal pojave hála v tako veličastni podobi le redko opazimo. Pogosteje vidimo le enega ali sočasno dva. Dva hkrati je posnela tudi avtorica fotografije na naslovnici 3. številke Preseka v lanskem letu.

Kako nastanejo pojavi hála? Celovito odgovoriti na to vprašanje je za Presek prezahtevna naloga. Poglejmo razloge za njihov nastanek le v grobem.

Cirusni oblaki, predvsem cirostratusi, so sestavljeni iz mikroskopsko majhnih ledenih kristalčkov, ki imajo obliko šeststrane prizme in so v prostoru poljubno orientirani. Med počasnim padanjem se obračajo, vrtijo in nihajo. Hálo nastane zaradi loma in odboja sončne svetlobe na takih kristalčkih. Pri naključni smeri njihove glavne osi žarki kristalčke prebadajo pod različnimi koti skozi različne ploskve prizme.

Za nadaljne razumevanje ponovimo dve pomembni lastnosti svetlobe. Prva je lom svetlobe. Svetloba pri prehodu iz ene v drugo prozorno snov spremeni smer – pravimo, da se lomi (slika 1).



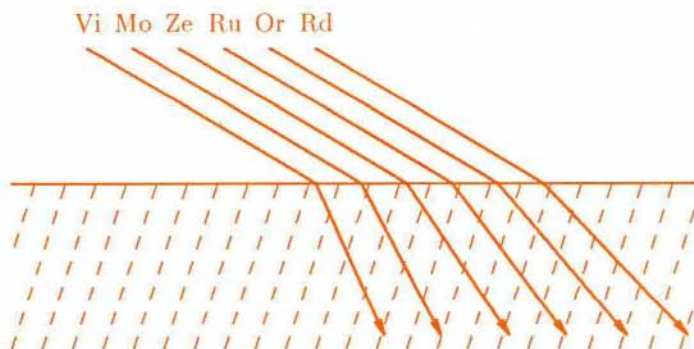
Slika 1. Žarek svetlobe se lomi na meji dveh različnih prozornih snovi. Kot α je vpadni kot, β lomni kot, c hitrost svetlobe v prvi, c_1 hitrost svetlobe v drugi snovi.

Lom nastane, ker potuje svetloba v različnih prozornih snoveh z različnimi hitrostmi. Velja lomni zakon, ki pravi: vpadni, lomljeni žarek in pravokotnica na mejno ploskev v vpadni točki leže v isti ravnini. Hitrost svetlobe v zraku je večja kot v vodi, ledu ali steklu. Zato pravimo, da so te snovi optično gostejše od zraka. Približno merilo za to gostoto je lomni kvocient snovi (označen z n). V katero smer in za kolikšen kot se bo žarek lomil ob prehodu iz ene snovi v drugo, je odvisno od razmerja lomnih kvocientov obeh snovi. Velja:

$$\frac{\sin \alpha}{\sin \beta} = \frac{c}{c_1} = \frac{n_1}{n}.$$

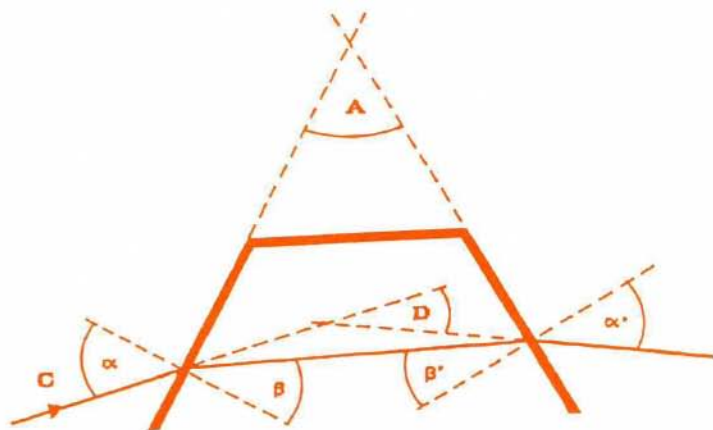
Lomni kvocient za zrak je približno 1, za vodo 1,33 in za led 1,31.

Druga lastnost svetlobe izhaja iz njene valovne narave. Belo svetlobo, kakršno sevajo sonce in nekatera umetna svetila, sestavlja več barv: rdeča, rumena, oranžna, zelena, modra in vijolična. Vsaka teh barv se nekoliko drugače lomi. Najmanj je od prvotne smeri odklonjena rdeča, najbolj vijolična barva (slika 2). Posledica tega je, da se curek bele svetlobe pri prehodu iz ene prozorne snovi v drugo razkloni. Pojav imenujemo disperzija.



Slika 2.

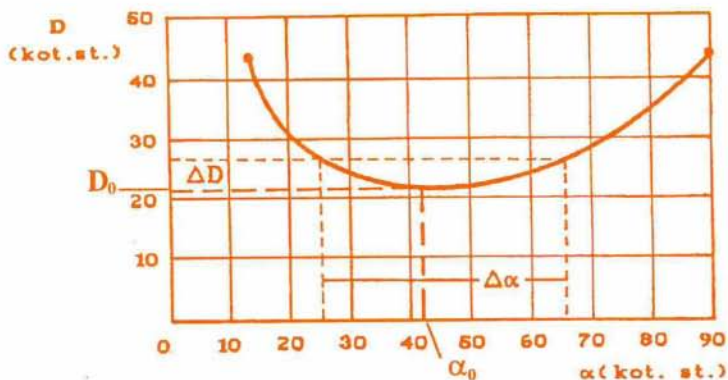
Sončni žarek se pri prehodu skozi ledeno prizmo dvakrat lomi. Prvič iz zraka v led, ko v prizmo vstopa, in drugič iz ledu v zrak, ko prizmo zapušča (slika 3). Pri tem se žarek odkloni od svoje prvotne smeri za kot D .



Slika 3. Odklon svetlobnega žarka zaradi loma skozi ledeni kristal. $Z A$ je označen kot med dvema nesosednjima stranskima ploskvama ledene prizme in je enak 60° .

Ker pada svetloba pod različnimi vpadnimi koti na različno orientirane kristale, bi pričakovali, da se po lomu odkloni na vse strani. Vendar to ne more biti res. Če bi se žarki odklanjali v vse smeri, bi bila sončna svetloba po lomu na kristalih razpršena po celotnem nebu! Torej se krogi in loki zgoščene svetlobe ne bi pojavili. Odgovor na to navidezno proti-

slovje daje pomembna lastnost prehoda svetlobnega žarka skozi prizmo. Izkaže se, da obstaja neki mejni vpadni kot α_0 , pri katerem je odklon žarka najmanjši. Ta odklon imenujemo minimalni odklon D_0 . Z odmikanjem kota α od α_0 narašča odklonski kot D , kot kaže slika 4.



Slika 4. Graf, ki kaže odvisnost odklona D od vpadnega kota α za ledni kristal z lomnim kvocientom 1,31.

Z grafa razberemo, da se žarki iz sorazmerno velikega razpona vpadnih kotov $\Delta\alpha$ odklanjajo v približno isto smer ΔD . Zato je gostota svetlobnega toka svetlobe, odklonjene blizu D_0 , precej večja kot v drugih smereh; svetlobna energija je veliko bolj skoncentrirana v smereh minimalnega odklona kot v ostalih smereh.

Iz pogojev za minimum:

$$\frac{dD}{d\alpha} = 0 \quad \text{in} \quad \frac{d^2D}{d\alpha^2} > 0$$

dobimo razširjen lomni zakon:

$$\sin \frac{D_0 + A}{2} n = n_1 \sin \frac{A}{2},$$

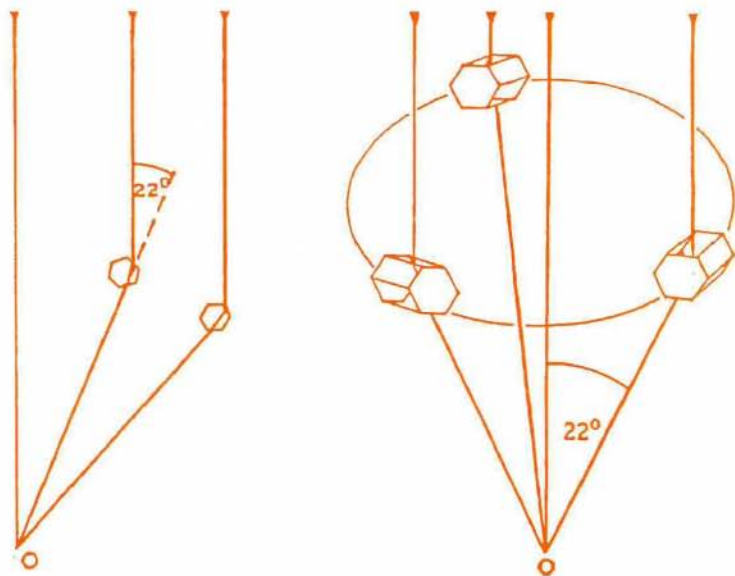
pri tem je n lomni kvocient zraka, ki je približno 1, in n_1 lomni kvocient ledu.

Iz enačbe vidimo, da je minimalni odklon odvisen le od medsebojnega kota obeh ploskev in lomnega kvocienta. Izračunamo lahko, da je za opisani prehod skozi prizmo približno enak 22° .

Pripravljeni smo, da posebej pogledamo nekatere pojave hála.

Mali ali 22-stopinjski háló

Če so cirusni oblaki enakomerno porazdeljeni po nebu, je mali háló viden v obliki zaključenega kroga okoli sonca ali lune, kot ga vidimo na naslovnici. K njegovemu nastanku prispeva tista svetloba, ki prebada prizmo tako, da so žarki vzporedni njeni osnovni ploskvi. Glavna os kristalov je v naključni legi, vendar pravokotna na smer žarkov (slika 5).



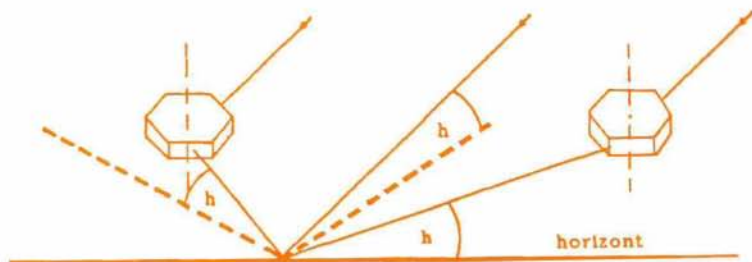
Slika 5. Nastanek malega ali 22-stopinjskega háló. Mesto opazovalca, kjer se zbere lomljena svetloba, je označen z O .

Svetloba se pri takem prehodu lomi v različne smeri, vendar se, kot smo videli, večji del svetlobe odkloni v smeri blizu kota minimalnega odklona, ki je približno enak 22° . Večina lomljenih žarkov, ki jih zazna opazovalčevo oko, torej prihaja iz smeri, ki oklepajo s smerjo proti soncu kot 22° . Zato je v teh smereh navidezna slika sonca najsvetlejša. Ker te smeri sovpadajo s tvorilkami stožca, ki ima vrh v opazovalčevem očesu in os v smeri proti soncu, vidimo navidezno sliko sonca v obliki kroga. Zaradi razklona svetlobe je notranji rob háló rdeč – rdeča svetloba se namreč najmanj lomi, proti vijoličnemu zunanjemu robu sledijo rumena, zelena in modra barva. Notranji rob je oster, ker je 22° kot minimalnega odklona in se torej v notranjost 22-stopinjskega kroga ne lomi noben žarek. To je

tudi razlog, da je notranjost kroga temnejša kot zunanost. Zunanji rob je delno razpršen in ga ne moremo natančno določiti.

Sosonci

Ob vzhajajočem ali zahajajočem soncu pogosto opazimo, da se na levi in desni strani malega hála pojavita dve svetlobni pegi. Podobno kot mali hálo, se tudi sosonci začneta z ostrim robom rdeče svetlobe – pri kotu minimalnega odklona – in končata z blago vijolično barvo pri večjih odklonih. Pojav nastopi, če vsebuje oblak zadostno število ledenih kristalov, ki lebdiijo tako, da je njihova osnovna ploskev vodoravna, oziroma je njihova glavna os v navpični legi. Do pretežno take orientacije kristalčkov pride, ker je hitrost njihovega padanja relativno majhna (pravimo, da lebdiijo) in se zaradi vpliva okoliškega vrtnčastega zraka postavijo v vodoravni položaj. Večji del kristalčkov je tako orientiran z osnovno ploskvijo vodoravno, manj je takih, ki so orientirani v ostale smeri in prispevajo k nastanku ostalega dela 22-stopinjskega hála. Ko je sonce natanko na horizontu, se sosonci pojavita na obodu 22-stopinjskega hála. Nastaneta na enak način, kot na tem mestu nastali lok malega hála. Žarki se lomijo v bližini poti minimalnega odklona v ravnini, vzporedni osnovni ploskvi. Lahko rečemo, da sta sosonci v tem primeru del 22-stopinjskega hála. Z naraščanjem višine sonca nad horizontom opazimo, da se sosonci oddaljujejo od malega hála. Kot minimalnega odklona žarkov skozi vodoravno ležeče kristalčke ni več 22° , pač pa narašča z višino sonca nad horizontom. Vzrok za nastanek sosonc so sedaj poševni žarki, ki ležijo pod nekim kotom h glede na vodoravno ležečo osnovno ploskev prizme (slika 6) in se lomijo po poti blizu minimalnega odklona. Tisti bralci, ki nosite očala z negativno dioptrijo, lahko to sami preizkusite. Očala rahlo nagnete, da leči očal nista več vzporedni z očesnimi lečami, in ugotovili boste, da se vam je ostrina slike oddaljenih predmetov nekoliko spremenila.



Slika 6. Nastanek sosonc – h je višina sonca nad horizontom.

Novo vrednost minimalnega odklona izračunamo po enačbi:

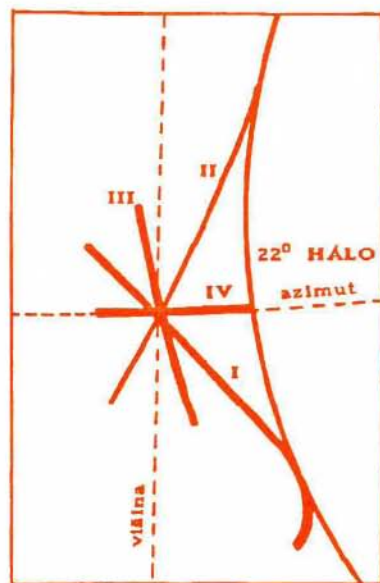
$$D_0 = 2\left(\arcsin \frac{\sqrt{n^2 - \sin^2 h}}{\sqrt{1 - \sin^2 h}} \sin \frac{A}{2}\right),$$

kjer je $\frac{\sqrt{n^2 - \sin^2 h}}{\sqrt{1 - \sin^2 h}}$ novi lomni kvocient in je odvisen od kota h , torej od višine sonca nad horizontom. Sicer ima enačba podobno obliko kot prejšnja.

Sosonci se pojavita v trenutku, ko sonce vzhaja, torej, ko je $h = 0$, ter zbledita skupaj z malim hálom pri višini sonca $h = 60^\circ 45'$. Pri tem kotu pride do totalnega odboja žarka v notranjosti kristalčka, zato se žarek v njem v celoti absorbira. Kot, ki ga sosonci medtem "prepotujeta", je približno 21° . To ustreza največji oddaljenosti sosonc od malega hála.

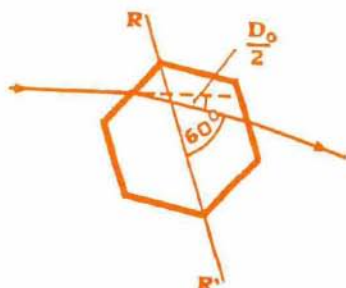
Lowitzovi loki

Loki, ki se imenujejo po astronomu Tobiasu Lowitzu, se pojavijo redkeje kot mali háló in sosonci. Nastanejo na podoben način kot sosonci, le da na njihov nastanek vpliva to, da med počasnim padanjem vodoravno ležeči kristali nihajo okoli ene izmed svojih vodoravnih osi. Notranji rob je rdeč, vendar loki niso tako barvno izraziti kot sosonce. Poznamo štiri vrste Lowitzovih lokov: spodnji (na sliki 7 označen z I), zgornji (7/II), poševni (7/III) in vodoravni (7/IV). Z izjemo poševnega loka ležijo tako, da povezujejo sosonce in mali háló. Največkrat se pojavi le en, redkeje pa sočasno dva ali trije. Vidimo jih lahko pri višjih legah sonca, ko je njegova višina približno 25° . Izginejo skupaj s sosonci in malim hálom pri višini sonca $60^\circ 45'$.



Slika 7. Štiri vrste Lowitzovih lokov. Zgornji lok je približno zrcalna podoba spodnjega Lowitzovega loka.

Vzroki za nastanek vseh štirih lokov so si na las podobni. Razlikujejo se samo v orientiranosti nihajne osi, glede na vpadni žarek. Tudi tu je pomembno, da se žarki lomijo v bližini minimalnega odklona. Na sliki 8 je narisana prehod žarka skozi kristal, ki niha okoli osi RR' in povzroči nastanek spodnjega Lowitzovega loka.



Slika 8. Orientiranost kristala v poziciji minimalnega odklona, ko smer sončnega žarka oklepa s smerjo nihajne osi RR' kot $60^\circ + D_0/2$.

Za lažje razumevanje nastanka lokov si mislimo, da so sestavljeni iz velikega števila majhnih svetlobnih peg. Vsako izmed peg, gledano v danem trenutku, povzročijo žarki, ki se lomijo skozi kristale enake orientiranosti nihajne osi in z enako fazo nihanja. V naslednjem trenutku isti kristali povzročijo pego nekoliko više ali nižje. Pego na prejšnjem mestu zdaj povzročijo kristali z isto orientiranostjo in drugo fazo nihanja. Vsaka izmed peg nastane na enak način kot sosonce. Vse pege, ki nastanejo skozi kristale iste orientiranosti nihajne osi, nastanejo vzdolž nekega loka – enega od Lowitzovih lokov.

V tem članku smo spoznali osnove nastanka hála ter opisali tri njegove pojavne oblike. V naslednji številki pa bomo predstavili poskus, v katerem bodo pojavi hála prikazani s pomočjo demonstracijskega modela v laboratoriju.

Matej Roušek

ALI JE VSOTA KVADRATOV SAMIH NENIČELNIH ŠTEVIL LAHKO ENAKA NIČ?

Kvadrat realnega števila, različnega od 0, je pozitivno število. Vsota kvadratov neničelnih realnih števil torej ne more biti nič.

V množici kompleksnih števil pa je vsota kvadratov dveh neničelnih števil lahko enaka 0, npr.

$$1^2 + i^2 = 1 + (-1) = 0.$$

Poskusite izraziti 0 kot vsoto kvadratov treh neničelnih kompleksnih števil!

Jurij Kovič

Z MATEMATIKO NAD POŠTO

Andraž, Barbara in Cene so prijatelji, ki živijo vsak na svojem koncu zemeljske oble: Andraž v Ameriki, Barbara v Belgiji in Cene na Cejlonu. Prejšnje poletje so preživel skupaj pri nas, na zelenem koščku Evrope. Večkrat so hodili na izlete, v gostilne in po nakupih, ker pa so vsi bolj raztresene sorte, je vsakokrat vsaj eden pozabil denar doma, tako da sta mu morala druga dva denar posojati. Vse dolgove so si pridno beležili, a poravnati so jih vselej pozabili. Tako je minilo poletje in odšli so vsak na svoj konec sveta, dolgovi pa so ostali nepoplačani. Ker pa se vsi trije strinjajo s starim pregovorom Čisti računi - dolgo prijateljstvo, so se odločili, da svoje finančne zadeve le uredijo, in sicer s pomočjo nakazil prek pošte. A glej ga zlomka, pošta nikjer na svetu ne dela zastoj, za vsako nakazilo zaračuna delež nakazanega zneska. To je Andraža, Barbaro in Ceneta tako motilo, da so se odločili svoje posle urediti tako, da bo pošta dobila čim manj.

Vsak od njih je razmišljal takole: Meni je povsem vseeno, koliko denarja mi pošljeta druga dva, oziroma jima ga pošljem jaz. Želim le, da bom na koncu dobil, oziroma dal res toliko denarja, kot bi ga dal, če bi poravnal z vsakim od drugih dveh svoj pravi dolg. Če bi na primer Andraž dolgoval Barbari tisoč tolarjev, Barbara Cenetu enako vsoto in Cene Andraž spet toliko, bi bili vsi zadovoljni tudi s tem, da nihče nikomur ne bi ničesar vračal, pa še pošta pri tem ne bi nič zaslužila. Žal pa njihova situacija ni bila tako preprosta. V resnici je Andraž dolgoval Barbari 9000 tolarjev, Cene Andražu 3000 tolarjev in Barbara Cenetu 5000 tolarjev. Kako naj uredijo svoje posle, da bo zaslužek pošte najmanjši?

Skupaj mora Andraž plačati 6000 tolarjev, Barbara mora dobiti 4000 tolarjev in Cene 2000 tolarjev. Barbara, ki je imela kot hči Gorenjke in Škota največ smisla za finančna vprašanja, je predlagala:

“Andraž naj pošlje meni namesto 9000 tolarjev le 4000 tolarjev, zato pa naj plača Cenetu 2000 tolarjev, namesto da bi jih od njega dobil 3000. Pri tem bo pošta od nas dobila le delež od 6000 tolarjev, namesto da bi ji plačali delež od 17000 tolarjev.”

Cene je Barbarinemu občutku neskončno zaupal in ni se mu zdelo vredno tuhtati, ali lahko pošti odščitneje še kakšen tolar. Andraž pa je bil po naravi bolj skeptičen in je iskal še druge možnosti. Po nekaj neprespanih nočeh je obupal in se odločil poiskati pomoč. Spomnil se je, da je prejšnje poletje govoril z nekim mladim bralcem Preseka, ki je takšne in podobne probleme reševal kot za šalo. Sedel je za računalnik

in mlademu znancu prek elektronske pošte pojasnil svoje težave ter ga prosil, naj najde rešitev, ki je boljša od Barbarine, ali pa naj dokaže, da boljše ni. Ni minil teden, ko ga je čakalo pisemce:

Dragi Andraž !

Le kdaj si boš zapomnil, da ima Barbara vedno prav. Tule ti pošiljam dokaz pravilnosti njenega nasveta in hkrati še recept, kako ravnati v drugih podobnih primerih.

Imejmo tri osebe A , B in C , ki si med sabo dolgujejo določene vsote denarja. Ker je vsem trem osebam vseeno, s kom si denar izmenjajo, je v resnici pomembno vedeti le, kolikšen je seštevke dolgov in terjatev posameznih oseb, kjer so terjatve predstavljene s pozitivnimi števili, dolgovi pa z negativnimi. Te seštevke označimo z $V(A)$, $V(B)$ in $V(C)$. Če je katera od teh količin negativna, tedaj ustrezna oseba dolguje drugima dvema več, kot pa ima do njiju terjatev. V tvojem primeru je torej

$$V(A) = -6000, \quad V(B) = 4000, \quad V(C) = 2000.$$

Ker so si osebe posojale denar le med seboj, mora biti vsota dolgov in terjatev med njimi enaka nič. Zapisano s simboli:

$$V(A) + V(B) + V(C) = 0. \quad (1)$$

Ta enačba nam pove, da je možno le dvoje:

- i) Ena od količin $V(A)$, $V(B)$ in $V(C)$, denimo $V(A)$, je nenegativna in drugi dve nepozitivni;
- ii) Ena od količin, denimo $V(A)$, je nepozitivna in drugi dve nenegativni.

Recept: Osebe A , B in C bodo dale pošti najmanjši zaslužek, če bo oseba A plačala osebi B znesek $V(B)$ in osebi C znesek $V(C)$. Pri tem naj to, da da nekdo komu negativen znesek, pomeni, da od njega dobi absolutno vrednost tega zneska. Očitno se bodo po teh nakazilih na računih oseb B in C res pojavili zneski $V(B)$ in $V(C)$, na računu osebe A pa bo pisalo $-V(B) - V(C)$, kar pa je zaradi enakosti (1) enako $V(A)$. To pa oseba A tudi pričakuje.

Dokažimo, da so to za naš problem res optimalna nakazila. Denimo, da je oseba A nakazala osebi B znesek $V(B) + x$ namesto $V(B)$, kjer je x poljubno neničelno realno število. Tedaj je morala nakazati osebi

C znesek $V(C) - x$, če naj bi skupaj nakazala znesek $-V(A)$. Da bodo računi čisti, mora še oseba B nakazati osebi C znesek x . Ker sta števili $V(B)$ in $V(C)$ po predpostavki enako predznačeni, velja:

$$|V(B) + V(C)| = |V(B)| + |V(C)|.$$

Sedaj lahko ocenimo vsoto vseh nakazil:

$$\begin{aligned} |V(B)| + |V(C)| &= |V(B) + V(C)| = |(V(B) + x) + (V(C) - x)| \leq \\ &\leq |V(B) + x| + |V(C) - x| < |V(B) + x| + |V(C) - x| + |x|. \end{aligned}$$

V oceni smo uporabili trikotniško neenakost, ki pravi, da za poljubni števili a in b velja $|a + b| \leq |a| + |b|$.

Zgornja ocena, prevedena v slovenščino, pove, da je vsota vseh nakazil, ki smo jih izvedli po receptu, res manjša od vsote nakazil pri katerikoli drugačni dopustni poravnavi. S tem smo dokazali, da je Barbara svetovala prav.

Pismo mladega presekovca je Andraža pomirilo. Čez nekaj dni pa je Andraž dobil novo pošto. Spet mu je pisal njegov prijatelj, ki je nadaljeval tam, kjer je v prejšnjem pismu končal. Takole je posplošil nalogo:

Denimo, da si denarja ne bi posojali le trije ljudje ampak več. Označimo število teh ljudi z n . Vsakemu paru oseb, recimo i -ti in j -ti osebi, priredimo dve števili a_{ij} in a_{ji} . Če i -ta oseba dolguje j -ti, je število a_{ij} enako temu dolgu, število a_{ji} pa negativni vrednosti tega dolga. Za poljubni števili i in j velja torej enačba $a_{ij} = -a_{ji}$. Ker i -ta oseba sama sebi nič ne dolguje, je smiselno določiti $a_{ii} = 0$.

Vsaki osebi pripada stanje njenih dolgov in terjatev - od vsote terjatev odštejemo vsoto dolgov - in to stanje označimo z V_i . Očitno velja

$$V_i = \sum_{j=1}^n a_{ji}.$$

Osebe razdelimo na dve skupini: na tiste z nenegativnim stanjem (te imajo vsaj toliko terjatev kot dolgov) in na tiste z negativnim stanjem (te so zadolžene bolj kot pa imajo terjatev). Ker velja

$$\sum_{i=1}^n V_i = \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n a_{ji} = \sum_{i=1}^n \sum_{j=i+1}^n (a_{ji} + a_{ij}) + \sum_{i=1}^n a_{ii} = 0 + 0 = 0, \quad (2)$$

sta obe skupini neprazni, če le niso vsa stanja V_i enaka nič. V slednjem primeru pač nihče nikomur ničesar ne nakaže in zaslužek pošte je ničelen. Če pa niso vsi V_i enaki nič, lahko privzamemo, da smo osebe označili tako, da stanja $V_1, V_2, V_3, \dots$ rastejo. Pri tem naj bo prvih $k_1 - 1$ stanj negativnih, stanja od V_{k_1} dalje pa naj bodo nenegativna.

Recept za optimalno poravnavo dolgov se glasi:

Prva oseba naj po vrsti poravnava terjatve oseb $k_1, k_1 + 1, \dots$, dokler ne porabi celotnega zneska $-V_1$. Denimo, da se ji to zgodi pri osebi k_2 . Tedaj je prvič res $\sum_{i=k_1}^{k_2} V_i \geq |V_1|$. Ko se to zgodi, nastopi oseba 2. S svojim dolgom poplača razliko do polne terjatve osebe k_2 in nato prične poravnovati terjatve oseb $k_2 + 1, k_2 + 2, \dots$. Postopek nadaljujejo, dokler niso vsi dolгови poplačani. Zaradi formule (2) se vse lepo izide in na koncu dobi ali plača vsak toliko, kot mu gre.

Pri opisanem postopku je vsota vseh nakazil enaka $\sum_{i=1}^{k_1-1} |V_i|$ in preprosto se lahko prepričamo, da pod ta znesek ne moremo, saj mora vsak, ki dolguje (ki ima $V_i < 0$) svoj dolg, hočeš nočeš, nekomu nakazati. Temu se ni moč izogniti. Zato je minimalna vsota nakazil res enaka vsoti vseh dolgov, ki je po drugi strani enaka vsoti vseh terjatev.

Za konec še primer:

Imejmo štiri osebe A, B, C in D . Oseba A dolguje 3000 tolarjev osebi B in 2000 tolarjev osebi C . Oseba B dolguje 2000 tolarjev osebi D , oseba C pa 1000 tolarjev osebi B . Hkrati oseba D dolguje 4000 tolarjev osebi A in 5000 tolarjev osebi C . Te podatke lahko nazorno predstavimo z matriko, kjer na presečišču i -te vrstice in j -tega stolpca stoji število a_{ij} , izraženo v enotah po tisoč tolarjev:

$$\begin{pmatrix} 0 & 3 & 2 & -4 \\ -3 & 0 & -1 & 2 \\ -2 & 1 & 0 & -5 \\ 4 & -2 & 5 & 0 \end{pmatrix}.$$

Če seštejemo stolpce v matriki, dobimo stanja posameznih oseb. Urejena po velikosti so enaka:

$$V_D = -7, \quad V_A = -1, \quad V_B = 2, \quad V_C = 6.$$

Najprej nakazuje oseba D (z največjim dolgom) osebi B . Ker je njen dolg večji od terjatve osebe B , ji nakaže poln znesek 2000 tolarjev. Osebi D ostane še 5000 tolarjev dolga in tega v celoti nakaže osebi C . Vendar oseba C še ni v celoti poplačana, oseba D pa je že poravnala ves svoj dolg. Zato priskoči na pomoč oseba A in nakaže osebi C preostanek dolga, torej 1000 tolarjev. S tem so poravnane vse terjatve in poplačani vsi dolгови. Optimalno rešitev lahko spet predstavimo z matriko, v kateri namesto dolgov zapišemo nakazila oseb pri optimalni poravnavi:

$$\begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -2 \\ -1 & 0 & 0 & -5 \\ 0 & 2 & 5 & 0 \end{pmatrix}.$$

Ta matrika ima s prejšnjo to skupno lastnost, da ima enake vsote vrstic in stolpcev, je pa vsota absolutnih vrednosti njenih elementov precej manjša kot pri prvi. To pa odloča o dajatvah pošti.

Primož Potočnik

RAZPIS NA TEMO 1997

V februarski in marčevski številki letošnjega letnika nemške matematične revije Alpha najdemo zanimivo predstavitev tekoče letnice 1996. Cela števila od 0 do 120 so, z izjemo nekaterih (65, 67, 68, 79, 83, 85, 107, 110, 111, 112, 116, 117 in 118), izražena s števili 1, 9, 9, 6 na način, ki ga prikazujejo naslednji primeri:

$$5 = \sqrt{1 + 9 + 9 + 6}$$

$$27 = 1 \cdot 9 \cdot (9 - 6)$$

$$35 = -19 + 9 \cdot 6$$

$$63 = 1 \cdot 9 + 9 \cdot 6$$

$$97 = 1^9 + 96$$

$$115 = 19 + 96$$

$$119 = -1 + (-9 : 9 + 6)!$$

Ob bližajočem se letu 1997 objavlja Presek naslednji

RAZPIS:

Vabimo vas, da na podoben način izrazite števila od 0 do 128 s števili 1, 9, 9, 7, ki jih v tem vrstnem redu in tako, da nastopa vsako natanko enkrat, povezujejo elementarne operacije. Števila lahko uporabimo tudi kot števke pri sestavljanju novih števil. Dopolniti je torej treba naslednji seznam:

$$0 = 1 + \sqrt{9} + \sqrt{9} - 7$$

$$\dots = \dots$$

$$\dots = \dots$$

$$128 = (1 + 9 : 9)^7$$

Razpis velja za vse bralce Preseka do konca šolskega leta oziroma do popolnitve seznama.

Števila, ki jih boste znali ustrezno zapisati, in njihove zapise pošljite na Uredništvo Preseka, Jadranska 19, 1001 Ljubljana, p.p. 2964. Ne pozabite pripisati svojega imena in priimka ter od kod ste doma. Učenci in dijaki pa pripišite še šolo in razred.

Zapise in imena njihovih avtorjev bomo sproti objavljali v naši reviji, in sicer po načelu: Kdor prej pride, prej melje. Isti zapis bomo priznali tistemu, katerega pošto bomo prej prejeli! Dva različna zapisa istega števila, ki bosta prispela za isto številko Preseka, bosta obravnavana enakovredno.

V vsaki številki bomo tudi objavili seznam tistih števil, ki bodo do zaključka priprave posamezne številke Preseka še brez ustreznega zapisa in bodo s tem ostala v konkurenci. Le izjemoma bomo objavili tudi kasneje kakšen posebno duhovit zapis števila, ki je že bilo v kakšni prejšnji številki drugače predstavljeno.

Marija Vencelj

PISANI KROGI

V programskem jeziku logo sestavi ukaz **krogi :n :r**, ki bo narisal :n koncentričnih krogov, pri čemer je polmer najmanjšega kroga enak :r, vsak naslednji krog pa ima polmer večji za :r. Polmer največjega kroga je torej :r · :n. Ukaz naj dobljene krožne kolobarje pobarva z naključnimi barvami.

Martin Juvan

O ČRTNIH KODAH

Marsikateri bralec Preseka se je gotovo že vprašal, kaj pomenijo črte naslednjih oblik



ki jih vidimo na večini izdelkov na policah trgovin. Takim črtam pravimo *črtna koda*, ker je z njimi zakodiran določen podatek o izdelku. V modernejših trgovinah opazimo, da prodajalka pri blagajni s posebno napravo "osvetli" črtno kodo. Na ta način blagajna, ki je nekakšen računalnik, ugotovi, za kateri izdelek gre in kakšna je njegova cena. V nadaljevanju bomo opisali, na kakšen način je v taki črtni kodi zapisana informacija o izdelku.

Črtnne kode so prvič množično uporabili pri ameriških železnica. Leta 1967 so na železniške vagonne namestili 13-mestno črtno kodo. Z njeno pomočjo in z uporabo posebnih optičnih čitalcev ob najprometnejših progah so lahko sledili, kje potujejo in kje se nahajajo posamezni vagoni. Da je takšno avtomatično sledenje prometa smiselno, nam pove že podatek, da danes po ameriških tirih potuje okrog 1.800.000 vagonov. V trgovine pa so črtnne kode prišle okrog leta 1973 – najprej v ZDA, kasneje pa tudi drugod po svetu.

Črtna koda je sestavljena iz zaporedja (navpičnih) črt in vmesnih presledkov. Črte in presledki so različnih širin in tako jih lahko razumemo kot različne številke ali črke, odvisno od dogovora. Recimo, da takšno kodo preberemo s svetlobnim peresom. Žarek peresa pomaknemo preko črtnne kode, pero preko odbitega žarka razbere vzorec ožjih in širših črt ter vmesnih presledkov in ga pošlje procesorju, ki ta vzorec spremeni v zaporedje števk. Pri tem je pomembno, da svetlobno pero pomaknemo preko črtnne kode kar se da enakomerno hitro, saj bi na primer krajša upočasnitev za prejeti signal v peresu pomenila isto, kot da je trenutno osvetljena črta ali presledek malo širši, kot je v resnici. Zaradi možnosti napake pri branju črtnne kode so danes na voljo vse boljše in boljše, a tudi

dražje, priprave za branje. Na primer pri laserski pripravi s pomičnim žarkom laserski žarek večkrat (tudi po stokrat v eni sekundi) prečeše črtno kodo in tako lahko s primerjavo rezultatov dosežemo večjo natančnost in manjšo možnost napake.

Drugi način, ki tudi zmanjšuje možnost napake pri branju, pa je skrit v sami kodi. Pravimo, da je koda sestavljena tako, da je možno zaznati napake pri branju, ki se najpogosteje ponavljajo.¹

Zgradbo črtne kode si bomo ogledali na primeru, ki je najbolj razširjen. To je koda EAN13 (European Article Number), ki ji v ZDA iz razumljivih razlogov pravijo UPC (Universal Product Code). Ta koda se uporablja za živila, revije in drugo potrošno blago. Sestavljena je iz trinajstih števk $s_1, s_2, \dots, s_{13}$, kjer je $s_i \in \{0, 1, \dots, 9\}$, $i = 1, 2, \dots, 13$. Števki s_1 in s_2 navadno določata državo (ali skupino držav), kjer je bil izdelek napravljen. Števke $s_3, \dots, s_7$ določajo proizvajalca. Kode proizvajalcev določi državna agencija, ki skrbi za standardizacijo kod. Kode za $s_8, \dots, s_{12}$ določi proizvajalec sam in jih le posreduje agenciji za kode. Z njimi opiše, za kateri izdelek gre. Zadnja številka s_{13} pa skrbi za zaznavanje napak. Izbrana je tako, da je število

$$s = s_1 + 3s_2 + s_3 + 3s_4 + s_5 + \dots + 3s_{12} + s_{13} \quad (1)$$

deljivo z 10. Kot je razvidno iz zgledov črtnih kod, prva številka nima črtnega ekvivalenta. Tako trinajsta številka pravzaprav služi identifikaciji prve.

Kot zgled si oglejmo črtno kodo, ki jo najdemo na škatli z Alpskim mlekom Ljubljanskih mlekar



¹ Tudi to lahko opazimo v trgovini, kjer mora prodajalka včasih tudi dvakrat ali trikrat prebrati isto kodo.

Takoj opazimo, da je koda Slovenije 38. Bralca vabim, da pogleda v domači hladilnik ali na polico s hrano in ugotovi, kakšna je koda Republike Hrvaške. Da razočaranje ne bo preveliko, se spomnimo, da so bile kode državam dodeljene že mnogo pred obstojem naše države ter da je možno ločevanje držav tudi preko izbire kod proizvajalcev, ki se za slovenske začnejo s števk 3, za hrvaške pa drugače.

Najpogostejša napaka pri branju črtne kode je, ko pride do napake pri branju natanko ene izmed števk. Koda EAN13 odkrije takšne napake, v kar se bo bralec zlahka prepričal. Druga najpogostejša napaka pri branju je, da se dve sosednji števki, recimo s_i in s_{i+1} , zamenjata. Recimo, da je prava koda $s_1, \dots, s_{13}$, prebrana pa $s'_1, \dots, s'_{13}$. Naj bosta s in s' ustrezni kontrolni vsoti, določeni z (1). Tedaj je:

$$s - s' = s_i + 3s_{i+1} - s_{i+1} - 3s_i = 2s_{i+1} - 2s_i,$$

kadar je i lih. Če pa je i sod, je

$$s - s' = 2s_i - 2s_{i+1}.$$

To pomeni, da koda odkrije takšno zamenjavo natanko tedaj, ko je

$$|s_i - s_{i+1}| \neq 5.$$

Obstaja še mnogo drugih načinov zapisovanja in dekodiranja črtnih kod. Pri prehrambenih in drugih drobnih izdelkih je precej razširjena tudi krajša oblika kode EAN, ki ima le osem števk. Na hitro si oglejmo še standard kode ISBN (International Standard Book Number), ki ga najdemo na vseh novejših knjigah. Ta koda je sestavljena iz desetih števk in jo določi založnik knjige. Prva številka ustreza jeziku, v katerem je knjiga napisana. Naslednjih nekaj števk določa založnika, sledi pa številka knjige pri tem založniku. Kode velikih založnikov so krajše, da jim ostane več mest za številko knjige. Zadnja številka kode ISBN je zopet namenjena zaznavanju napak. Izbrana je tako, da je število

$$s_1 + 2s_2 + 3s_3 + \dots + 10s_{10}$$

deljivo z 11. Pri tem se lahko zgodi, da mora biti $s_{10} = 10$. V numeričnem zapisu pod črtno kodo je ta možnost označena z 'X'. Bralec se bo hitro lahko prepričal, da je koda ISBN sestavljena tako, da opazi vsako napako na enem samem mestu in vsako napako, ki je posledica zamenjave dveh sosednjih števk.

Za konec pa si oglejmo še, kako iz črt in vmesnih presledkov določimo, za katero zaporedje števk gre. Ogledali si bomo le kodiranje pri EAN13. Za določitev začetka, konca in sredine črtne kode imamo tri pare (nekoliko daljših) navpičnih črt, ki služijo le kontroli pri branju. Širina presledka med črtama v vsakem od teh parov določa osnovno širino h kode. Isto širino h imata tudi obe črti. Vmesni prostor je razdeljen na ustrezno število intervalov širine $7h$, vsak tak interval pa na 7 pasov širine h . Če je tak pas bel, to pomeni bit 0, črn pas pa ustreza bitu 1. Vsaka številka ima 7-bitno kodo, ki je odvisna od tega, na katerem mestu se nahaja. Številke iz prve polovice so kodirane tako, kot kažeta prvi in drugi stolpec v tabeli 1,

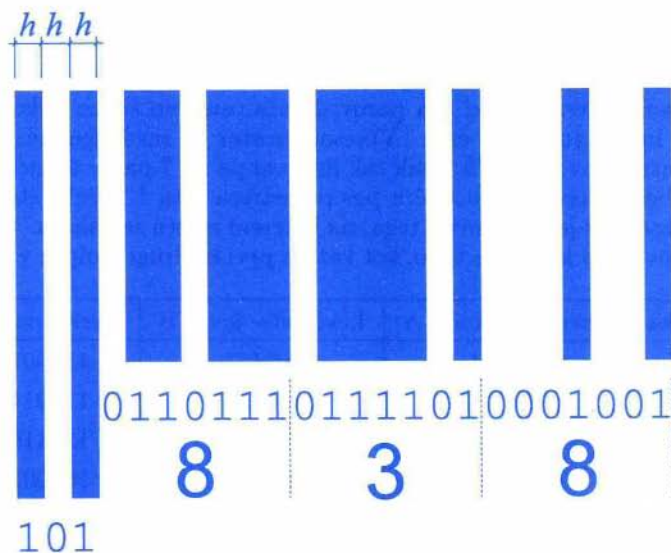
Številka	Levi del – koda A	Levi del – koda B	Desna polovica
0	0001101	0100111	1110010
1	0011001	0110011	1100110
2	0010011	0011011	1101100
3	0111101	0100001	1000010
4	0100011	0011101	1011100
5	0110001	0111001	1001110
6	0101111	0000101	1010000
7	0111011	0010001	1000100
8	0110111	0001001	1001000
9	0001011	0010111	1110100

Tabela 1. Bitno kodiranje števk v kodi EAN13.

števke iz druge polovice črtne kode pa tako, kot prikazuje tretji stolpec tabele. Za števke iz prve polovice ni natanko določeno, kdaj uporabimo kodo A in kdaj kodo B. Podroben pregled črtne kode alpskega mleka, katere začetni del je močno povečan na sliki 1, pokaže, da črtna koda ustreza zaporedju bitov:

$$\begin{array}{cccccccc}
 \underbrace{101}_{A} & \underbrace{0110111}_{8} & \underbrace{0111101}_{3} & \underbrace{0001001}_{8} & \underbrace{0001001}_{8} & \underbrace{0100111}_{0} & \underbrace{0001101}_{0} & \underbrace{01010}_{B} \\
 \underbrace{1110010}_{0} & \underbrace{1110010}_{0} & \underbrace{1110010}_{0} & \underbrace{1000100}_{7} & \underbrace{1001110}_{5} & \underbrace{1010000}_{6} & \underbrace{101}_{C}
 \end{array}$$

Pri tem zaporedju bitov A, B in C ustrezajo levemu robu, sredini in desnemu robu.



Slika 1. Povečava začetka črtne kode.

Ker iz sedmih bitov lahko sestavimo kar 128 različnih kod, v EAN13 pa je porabljenih le deset izmed njih, nam takšno kodiranje omogoča dodatno preverjanje napak. Bralec sam lahko razmisli, ali koda EAN13 omogoča, da čitalnik črtne kode ugotovi, ali bere z leve proti desni ali z desne proti levi.

Bojan Mohar

NEKAJ ZANIMIVIH NALOG ZA NAJMLAJŠE BRALCE

Bankovci

Maja je imela pri sebi samo bankovce v vrednosti 200 in 500 tolarjev. Sedmino denarja je potrošila za kruh in mleko, kar je plačala z dvema bankovcema. Polovico ostalega denarja je dala za darilo, namenjeno prijateljici za rojstni dan. To je plačala s tremi bankovci. Koliko denarja je imela Maja na začetku?

Kroglice v škatli

V škatli je 10 modrih, 12 belih in 15 rdečih frnikol. Najmanj koliko kroglic moramo izvleči, da bi zanesljivo izvlekli vsaj dve frnikoli:

- a) različnih barv,
- b) enakih barv,
- c) modre barve ?

Mojstrova domislica

Otroci so na podstrešju našli staro navodilo za izdelavo igre. Za igro bi potrebovali veliko število lesenih kock, na katere naj bi nalepili številke in črke. Niso pa imeli dovolj kock. Izdelovalcu igračk so prinesli vse kocke, kar so jih mogli najti, in ga vprašali, če lahko podvoji skupno površino vseh kock. Po kratkem premišljanju je mojster pritrdil. Kakšna je bila mojstrova domislica?

Peščena ura in rokometna tekma

Dijaki sedmega in osmega razreda so se dogovorili, da odigrajo med seboj rokometno tekmo (2 krat 20 minut). Za merjenje časa so imeli na razpolago samo dve peščeni uri. V prvi napravi je stekel ves pesek iz ene polovice v drugo v 12 minutah, v drugi pa v 16 minutah. Za merilca časa so določili Jureta, prijatelja s šole, nadarjenega matematika. Kako je Jure meril čas?

Dragoljub M. Milošević – prev. in prir. Barbara Japelj

KNJIŽNI NAKUPI

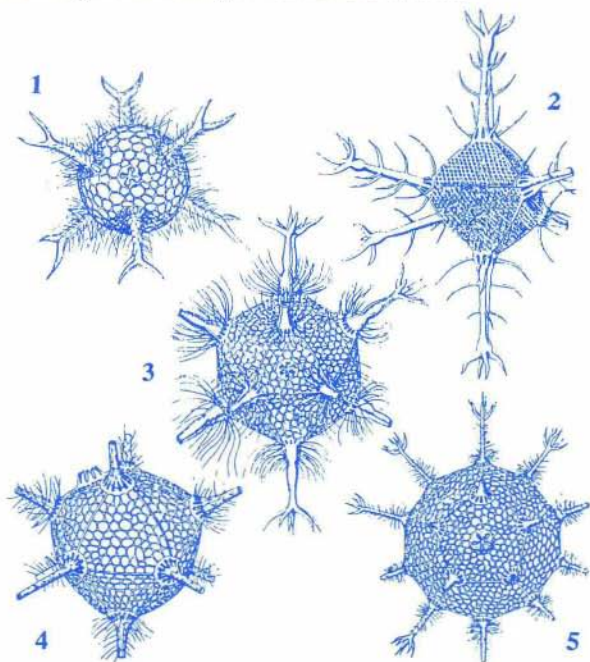
Na popoldanskem sprehodu skozi mesto so Žiga, Zlatko in njuni hčeri Vlasta ter Urša zavili tudi v antikvariat in si nakupili knjig. Pri tem je vsak plačal za vsako svojo knjigo natanko dvestokrat toliko tolarjev, kolikor knjig je kupil, vsaka družina (oče in hči) pa je porabila za nakup knjig 13 000 tolarjev. Znano je tudi, da je Žiga kupil eno knjigo več kakor Vlasta in da Urša ni kupila več kakor ene knjige.

Kako je ime Uršinemu očetu?

Vilko Domajnko

ZAPELJIVI RADIOLAR

Radiolarji (Radiolaria) so majhni enocelični morski organizmi, ki jih lahko opazujemo samo pod mikroskopom. Med matematiki so še posebej znani po tem, da oblike ogrodi nekaterih med njimi skorajda neverjetno spominjajo na simetrijsko bogata geometrijska telesa. Nekaj v tem smislu morda najzanimivejših radiolarjev vidimo na sliki 1.



Slika 1. (1) *Circoporus sexfurcus*, (2) *C. octahedrus*, *Aulonia hexagona*, (3) *Circogonia icosahedra*, (4) *Circospathis novena*, (5) *Circorhegma dodecahedra*.

Ogrodje prvega radiolarja je v osnovi še najbolj podobno krogli, vendar pa šest njegovih izrastkov določa oglišča oktaedra. Oktaeder brez težav prepoznamo tudi v ogrodju drugega radiolarja. Tretji radiolar je s svojimi dvajsetimi pravnimi trikotnimi celicami na površju podoben ikosaedru. Peti ima celice v obliki pravnih petkotnikov, s čimer spominja na zgradbo dodekaedra. Četrty radiolar pa je podoben petstranemu deltaedru. To telo spada med polpravilne poliedre in ga dobimo, če zlepimo med seboj dve petstrani enakorobni piramidi.

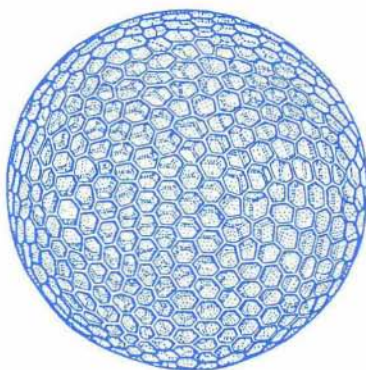
Na sliki 2 je radiolar *Aulonia hexagona*. Na prvi pogled se zdi, da so vse celice na njegovem površju šestkotne oblike, nenazadnje k temu napeljuje že njegovo ime. Toda nekoliko pozornejši opazovalec bo zagotovo opazil na površju tudi drugačne celice.

V zvezi s tem radiolarjem obstaja zanimiva zgodba. Pravi, da se je neki mladi biolog nekoč v družbi hvalil, da je našel *Aulonio hexagono*, ki je bila pokrita s samimi šestkotnimi celicami. Neverjetno, do takrat je namreč ni še nihče odkril! Seveda je s tem požel absolutno pozornost prisotnih, še posebej ženski del družbe je bil takorekoč povsem ob sapo. . .

Le neki matematik v tej družbi se nikakor ni mogel pridružiti vseh splošnemu vzhičenju. In najbrž ga je tudi pogled na zamaknjeno prijateljico ob sebi tako razkačil, da je naposled povsem izgubil potrpljenje in za začetek povprašal biologa: "Ali so se pri tem tvojem radiolarju stikali tudi povsod samo po trije robovi celic tako kot v primeru *Aulonie hexagone*?" Biolog se ni dal zmešati in je samo prizanesljivo pritrdil: "Ph, seveda." Tedaj je matematik zarjul, ves iz sebe: "Lažeš, prav nizkotno lažeš, kolega moj! Nikdar nisi videl takšnega radiolarja, ti že ne. Ta namreč sploh ne more obstajati. In to se celo zelo preprosto vidi."

Zatem je še govoril o Eulerjevi poliederski formuli, a kaj ko ga ni hotel nihče več niti poslušati, kaj šele da bi ga poskušal razumeti.

Na kak način je matematik poskušal dokazati laž prenapetega biologa?



Slika 2. *Aulonia hexagona*.

Vilko Domajnko

ZAPOREDNA ŠTEVILA

Nekatera naravna števila lahko zapišemo kot vsoto nekaj zaporednih naravnih števil. Tako lahko vsako liho od 1 večje naravno število n zapišemo kot vsoto dveh zaporednih naravnih števil: $n = \frac{n-1}{2} + \frac{n+1}{2}$. Ugotovi, katera naravna števila lahko zapišemo kot vsoto dveh ali več zaporednih naravnih števil.

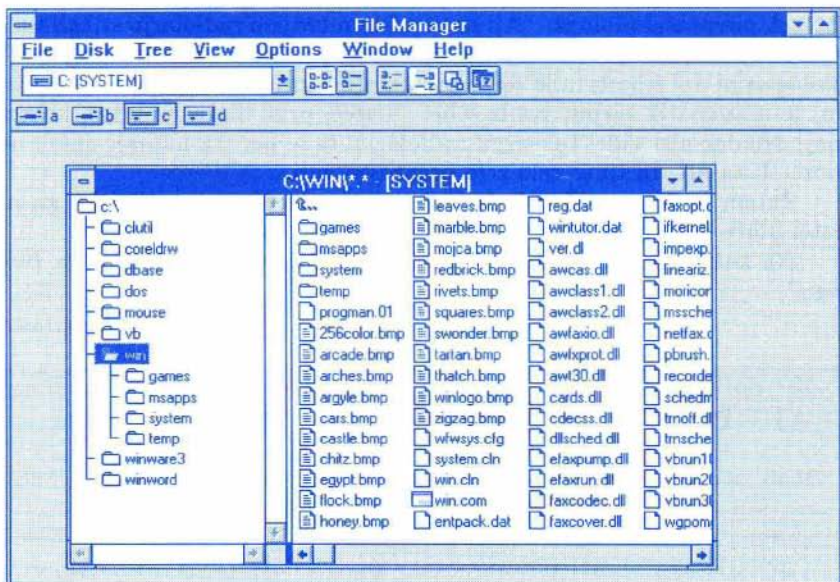
Martin Juvan

POČISTIMO DISK

Čeprav imajo naši računalniki vse večje in večje diske, pa je vendarle res, da nam slej ko prej prične na njih primanjkovati prostora. Oglejmo si, kako se lahko hitro in enostavno znebimo nekaterih odvečnih datotek. Pri tem bomo seveda zelo previdni, da ne bi pomotoma pobrisali kakšne napačne datoteke.

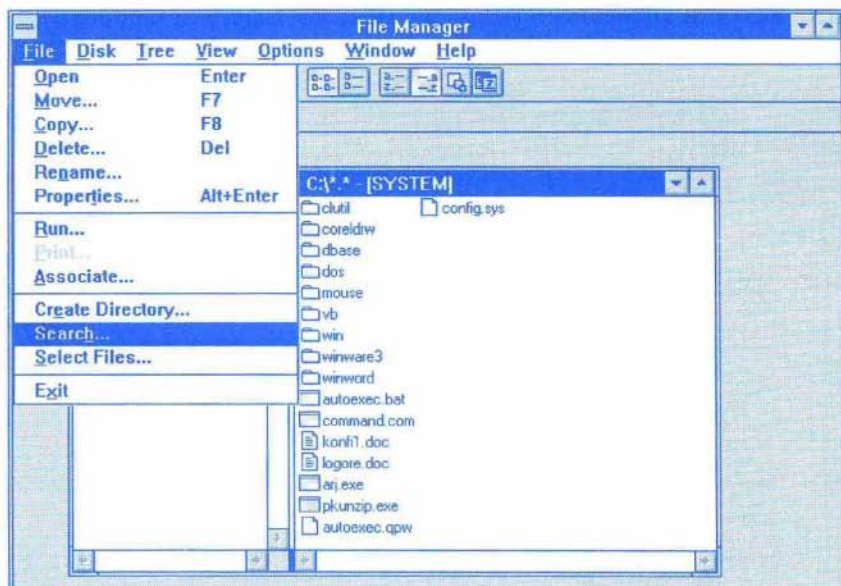


Pomagali si bomo s programom **File Manager**, ki ga najdemo v programski skupini **Main**. Ko ga poženemo, zagledamo okno, podobno tistemu na sliki 1. Izberemo enoto, ki bi jo radi počistili, recimo disk **C**. Kliknemo na ikono, tako da ta enota dobi okvirček, v glavnem oknu pa zagledamo seznam datotek na izbrani enoti. Postaviti se moramo še na koren – vrhnje področje te enote. To storimo tako, da z miško kliknemo na vrhšnjo rumeno mapico, ob kateri piše **C:**. Če zgornje mape ne vidimo, si pomagamo z drsnikom, ki je ob seznamu področij, in seznam premaknemo, tako da je vidna gornja mapa.

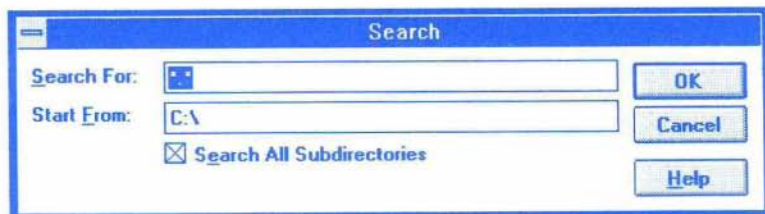


Slika 1. Okno programa **File Manager**.

Izberemo ukaz **File** in v njem **Search** (slika 2). Odpre se pogovorno okno, kamor moramo vpisati podatke o datotekah, ki jih iščemo (slika 3).



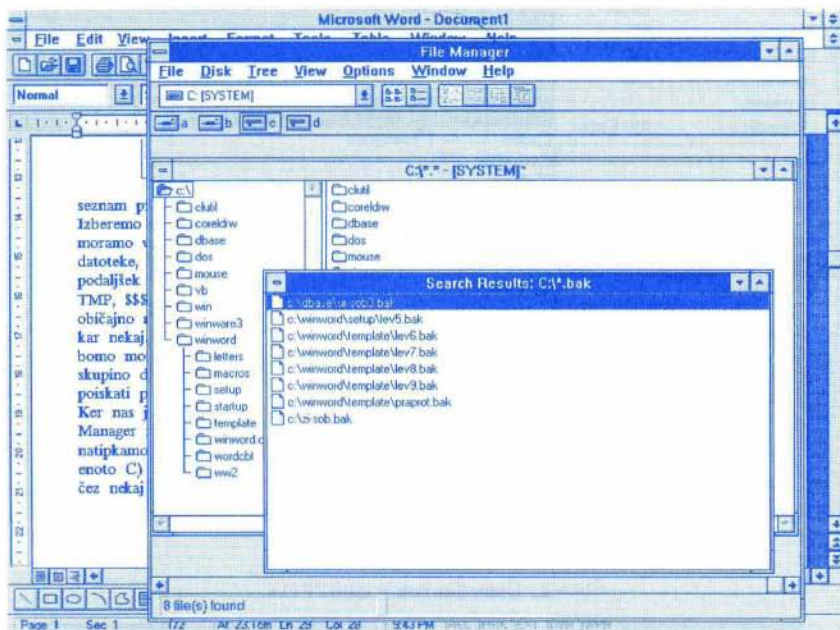
Slika 2. Ukaz Search v izbiri File.



Slika 3. Iskanje datotek.

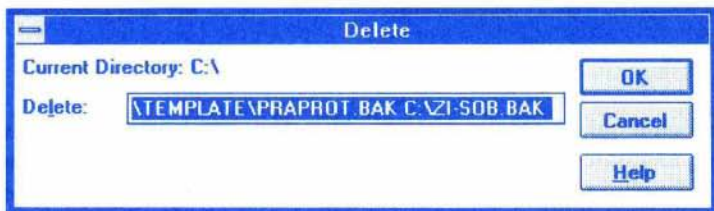
Poiskali bomo tiste datoteke, ki se jih lahko brez škode znebimo. To so vse datoteke, ki imajo podaljške BAK, TMP, \$\$\$ in jih je na disku običajno kar nekaj. Žal bomo morali vsako skupino datotek poiskati posebej. Ker nas je File Manager že postavil v polje, kamor moramo vpisati opis iskanih datotek, le natipkamo *.BAK. Preverimo še, ali v polju Start From res

piše C:\ in ali je v polju pred Search All Subdirectories križec. Kliknemo na OK in čez nekaj časa nam program v posebno okno izpiše seznam vseh datotek, ki ustrezajo podanemu pogoju (slika 4). Držimo pritisnjeno tipko Shift in kliknemo na zadnjo datoteko v seznamu. S tem obarvamo (označimo) vse datoteke v iskalnem oknu.



Slika 4. Okno z najdenimi datotekami.

Pritisnemo na tipko Delete. Program še enkrat preveri, ali datoteke res nameravamo pobrisati (slika 5). Kliknemo na OK in potem še na Yes to All ter s tem odstranimo z diska vse datoteke s podaljškom BAK.



Slika 5. Brisanje datotek.

Ker seveda teh datotek ni več, nas **File Manager** opozori, da bi bilo dobro obnoviti vsebino iskalnega okna. Za vsak primer kliknemo na **Yes** in s tem programu naročimo, naj ponovno pregleda disk, če se le ni v kakšen kotiček še zatekla datoteka s podaljškom **BAK**. Po nekaj trenutkih zagledamo sporočilo, da takih datotek ni več (slika 6). Sedaj postopek ponovimo še za datoteke s podaljškom **TMP** (v **Search For** vpišemo ***.TMP**) in podaljškom **\$\$\$**. Seveda je še nekaj takih skupin datotek, ki jih lahko brez skrbi brišete. Če npr. uporabljate **TeX**, se lahko znebite vseh datotek s podaljškom **DVI** in **AUX**. Pri datotekah s podaljškom **LOG** pa velja biti previden, saj tak podaljšek uporablja še vrsta drugih programov. Postopek ponovite še na drugih enotah, na katere je morebiti razdeljen vaš disk. Če vam bo na disku še vedno primanjkovalo prostora, pa boste morali poseči po bolj drastičnih potezah in morda odstraniti kakšen program ali pa celo kupiti novi, večji disk.



Slika 6. Brisanje je uspešno opravljeno.

Povzemimo, kako smo se znebili nezaželenih datotek s podaljškom **BAK**:

- 1) pognali smo program **File Manager**,
- 2) kliknili smo na ikono z oznako enote,
- 3) postavili smo se na vrhnje področje,
- 4) v izbiri **File** smo izbrali **Search**,
- 5) v polje **Search For** smo napisali ***.BAK** in kliknili na **OK**,
- 6) z držanjem tipke **Shift** in klikom na zadnjo datoteko seznama najdenih datotek smo vse datoteke označili,
- 7) s tipko **Delete** in dvojno potrditvijo (**OK**, **Yes to all**) smo zbrisali vse datoteke.

Postopek iskanja datotek lahko učinkovito uporabite tudi v druge namene. Tako denimo poiščete datoteko **SEMINAR.DOC**, ki je namesto na vaše običajno delovno področje zatacala nekam čisto drugam, odkrijete vse zvočne datoteke (***.WAV**), ki jih še niste slišali, ugotovite število datotek s podaljškom **INI** na vašem disku in podobno.

Matija Lokar

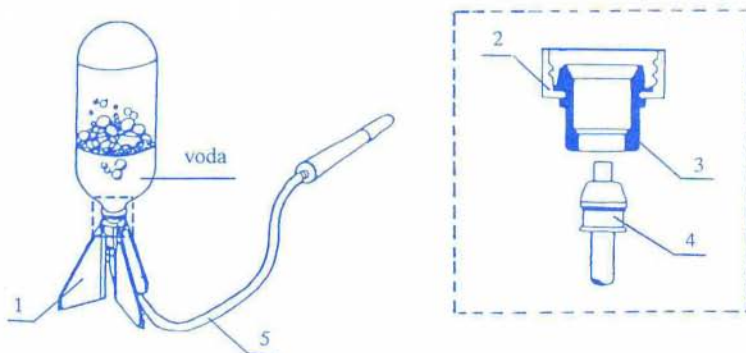
AVTOR MARKO BOKALIČ	PRIPADNIK EVANGEL. CEKIVE	DANES ŽE NEPOGRES. ELEKTRON. NAPRAVA	GORA NAD ZELEZNO KAPLO	DRUGI NAJVEČJI OTOK KORNATOV	SODOBNA ELEKTRON. POVEZAVA	IGRALKA JUVAN	JANEZ STRNAD	NAD- STROPJE		RAZLIKA MED ŽENSKO IN MOŠKIM	MOR- FIB BIAL
SPRAVLJANJE V DELOVANJE Z DOTIKOM									RAČUNAL- NIK ZA DOLOČEN TIP OPRAVIL		
SPRETE INTERPRE- TATOR ZAKONOV									VRZEL		
									PEČENJE		
OPOZORILO NA KAJ SLABEGA PRI KOM							TIP AMER. RAKET				
							SL. ZOOLOG (IVAN)				
IŽUMIRLO EVROPSKO GOVEDO				REDKA UZITNA GOBA							
				MASAKER							
EDEN			PLATINA			SODNIK V HADU				ANDREJ OCVIRK	
			PISATELJ DOLENC			OLIVER MLAKAR				OSREDNJA SLOV. REKA	
MITOLOŠKA ŽIVAL Z ROGOM								ARZEN			SL. P (HEL)
								NEKD. POLJ. POLITIK (KARL)			NEVI ZEN
MANO- METER									SVIC. DIRIG. (ERNEST)		
									RIBJA KOŠČICA		
FIZIKA MOLJKIN PETERLIN						NAPOTEK, NAMIG					
FIZIK BOHR						3 OSEBA ŽENSKEGA SPOLA	ŠTAJERSKA REKA				
							MURSKA SOBOTA				
TONE KUNTNER			DRŽAVNI SIMBOL	ZVEZDA REPATICA						LATINSKI PENSIK	
				UDAREC PRI BOKSU						VPITJE, VREŠČANJE	
SLOVENSKO RAZISKOVALNO RAČUNALNIŠKO OMREŽJE		POLJ. LUKA							VGRADNJA DELA V CELOTO		
		NAČIN ZAŠČITE PODATKOV							LISTAVEC		
RIMSKI VOJSKO- VODJA							ZVOČNI POJAV MED NEVIHTO	GASILEC IZ "TEATRA PARADIŽNIK"			
								MEMBRANA			
KOST PRSNEGA KOŠA						RUSKI PISATELJ (MAKSIM)					
						100 M ²					
NACE SIMONČIČ			SVILEN TRAK OKOLI PASU							CIRIL KOSMAČ	
			ERBIJ							OZIRALNI ZAMEK	
BBS (PO NAŠE)											
RAZLIČICA, VRSTA						MAMA					STA ME DR

SKA A JAC	ORNICA	GRŠKI BASNO- PISEC	RAZLIČNA SOGLAS- NIKA	OČESNA TRZAVICA	MEDNAR. RAČUNAL. OMREŽJE	PISEC MAY		MANUŠANJE	INSTINKT	KRIVULJE RAVNOVES. STANJ V TERMODI- NAMIKI	NOSILO DEDNEGA ZAPISA	GLAVNO MESTO JORDANIJE
							ŽGOŠ OBČUTEK V POŽIRAL- NIKU					
							POVEZAVA RAČUNAL. S TEL. LINIJO GUSTAV IPAVEC					
			RAZTRGANO MESTO									
			PRAVOSL. SKOPLJA									
	KOKOŠJI SAMEC								PRITOK RONE			
	OBSTOJ								ZMOGLJIV KOMUNIKAC. VOD			
		DVOJICA				ZAHTEVNE INSTRUM. SKLADBE ZA VAJO	PRILOŽ- NOSTNO DELO (ANG.)				ATLANTSKI VOJASKI PAKT	REŽISER "MORANE" VERBIČ
EVKA ENA)		LEON EPP										
EDNA SKA							NAMIZNA IGRA, MLIN					
							BENEDIKT. SAMOSTAN NA BAVAR- SKEM					
		VEČINSKO BANTU LJUDSTVO					FRANC. MATEMATIK (FRANCOIS)					
							RADIJ					
		IVAN SUPEK			ALBAN. PRI- STANIŠČE					OSNOVNA SOLA		
		HRV. KRAJ OB DONAVI			PUBLIKA, OBČINSTVO					SLOŽNOST		
			IGRALKA MOREAU								PERZIJA	ŠABAC
			VOZAČ Z VLAKOM									
						ŽIDOVSKA OBLIKA NEMŠČINE						
						PLAHA GOZDNA ŽIVAL						
			LOJZE VODOVNIK			DRVARSKO ORODJE						
			ZVITEK PAPIRJA			PESNICA MUSER						
	SL. PEVKA (BRANKA)											
	POSODA ZA ODPADKE											
		SL. IGRALEC (MARKO)										
		GRADBENO PODJETJE										
ROGR. STNA ZAVA							DARITVENA MIZA V CERKVI					

RAKETA NA VODO IN STISNjen ZRAK

Rakete poganjajo motorji, v katerih izgorevajo eksplozijske snovi. Pri tem nastajajo plini, ki z veliko hitrostjo iztekajo iz rakete, in jo potiskajo. Raketa, ki jo sestavimo sami, uporablja za pogon stisnjen zrak in vodo. Ob izstrelitvi smo presenečeni, saj raketa leti zelo visoko, do 40 m. Taka raketa je vabljava igrača, saj jo lahko po nekaj minutah ponovno izstrelimo, pogonsko gorivo pa je zastonj. Seveda bi želeli izmeriti, kako visoko raketa zares leti, hkrati pa nas zanima, če bi lahko z znanjem, ki smo si ga pridobili v šoli, približno napovedali, kako visoko bo letela.

Najprej si oglejmo sestavo take rakete. Njen trup je enainpollitrška plastenka (Bibita, Stil, ...). Ostale sestavne dele lahko kupimo¹ ali pa si jih sposodimo pri učitelju fizike na šoli, saj mnogo šol to didaktično igračo že ima. Raketo pripravimo tako, kot kaže slika 1.



Slika 1. Sestavni deli rakete: 1 smerna krilca, 2 zamašek z odprtino, 3 gumijasto tesnilo, 4 ventil, 5 plastična cev. Na desni so deli 2, 3 in 4 povečani.

Najprej v plastenko nalijemo približno četrt litra vode in nanjo pri-
vijemo zamašek z odprtino (2), v katerem je gumjasto tesnilo (3). V
odprtino vtaknemo ventil (4) s cevjo (5). Skozi cev z navadno kolesarsko
tlačilko tlačimo zrak. Ko je v plastenki dovolj velik tlak, ta izrine ventil
iz tesnila, voda začne iztekati in raketa se prične dvigati.

¹ Pooblaščen distributer: ATRAKTOR, Tržaška 2, Ljubljana, tel. 061-1251259

Dobro je, če raketi nekoliko preoblikujemo sprednji del. Od druge plastenke odrežemo zgornji del in ga z lepilnim trakom prilepimo na vrh rakete ter privijemo še zamašek ali pokrov od razpršilke (slika na zadnji strani ovitka). S tem zmanjšamo koeficient upora, raketa pa je tudi bolj odporna pri padcih na tla. Pri merjenjih dodamo še merilnik tlaka.

Če želimo izračunati, kako visoko bo raketa letela, moramo najprej ugotoviti hitrost, ki jo doseže med pospeševanjem, nato pa izračunati še dvižno višino.

Pospeševanje rakete

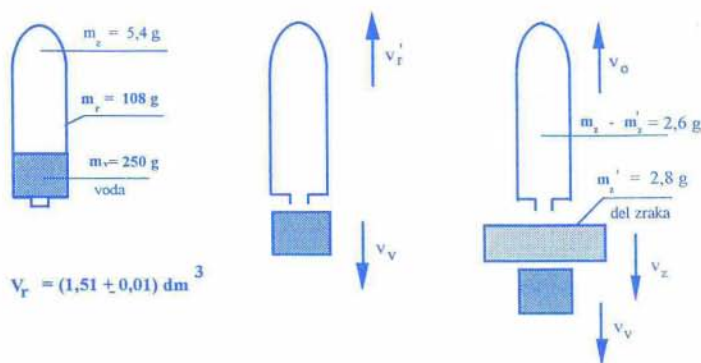
Raketa se pospešuje tako dolgo, dokler iz nje ne iztečeta vsa voda in zrak. Upočasnjeni videoposnetek je pokazal, da voda izteče v približno 0,1 sekunde, raketa pa se pri tem dvigne le za slab meter. Zrak nato izteče še v krajšem času in raketa ima na višini približno 1 meter že največjo hitrost v_0 .

Pred izstrelitvijo sta v raketi voda in zrak pri povišanem tlaku. Ko nadtlak izrine ventil iz rakete, iz nje najprej izteče voda, nato pa še nekaj zraka. Zrak se pri tem adiabatno razpenja, zato se mu temperatura zniža. Notranja energija zraka se zmanjša, zato pa se povečajo kinetična energija vode, zraka in rakete.

Pri našem poskusu sta bila pred izstrelitvijo v raketi z maso $m_r = (0,108 \pm 0,001)$ kg in prostornino $V_r = (1,510 \pm 0,001)$ l zrak s temperaturo $T_1 = (15 \pm 1)^\circ\text{C}$ in tlakom $p_1 = (3,55 \pm 0,01)$ bara ter voda z maso $m_v = (0,250 \pm 0,001)$ kg (slika 2a).

Ko je nadtlak izrinil ventil iz rakete, je najprej iztekla voda, zrak pa se je adiabatno razpel (slika 2b). Tlak za trenutek, ko je iztekla vsa voda, izračunamo z enačbo za adiabatno spremembo $p_1 V_1^k = p_2 V_2^k$, pri čemer je $k = c_p/c_v$. Za zrak je $k = 1,40$. Iz zgornje enačbe dobimo tlak $p_2 = 2,76$ bara. Za adiabatno spremembo velja tudi plinska enačba $\frac{p_1 V_1}{T_1} = \frac{p_2 V_2}{T_2}$. Iz obeh enačb dobimo temperaturo, na katero se ohladi zrak $T_2 = T_1 \left(\frac{p_1}{p_2}\right)^{\frac{1-k}{k}}$; v našem primeru je $T_2 = 268$ K. Izračunamo še končno temperaturo zraka, ko se zrak v raketi z 2,76 bara razpne na končni tlak 1 bar (slika 2c). Končna temperatura je $T_3 = T_1 \left(\frac{p_1}{p_3}\right)^{\frac{1-k}{k}} = 201$ K. Zrak se je tako ohladil za (87 ± 3) K. Spremembo notranje energije izračunamo iz enačbe $\Delta W_n = m_z \cdot c_{vz} \cdot (T_3 - T_1) = -(340 \pm 20)$ J. Maso zraka v raketi m_z smo izračunali iz plinske enačbe $p_1 V_1 = m_z R T_1 / M_z$, specifična toplota zraka pa je $c_{vz} = 720$ J/kgK.

Pred izstrelitvijo: Potem, ko izteče samo voda: Potem, ko izteče tudi del zraka:



Podatki za zrak v plastenki:

$p_1 = 3,55 \text{ bar}$	$p_2 = 2,76 \text{ bar}$	$p_3 = 1,00 \text{ bar}$
$V_1 = V_r - V_v = 1,26 \text{ dm}^3$	$V_2 = V_r = 1,51 \text{ dm}^3$	
$T_1 = 288 \text{ K}$	$T_2 = 268 \text{ K}$	$T_3 = 201 \text{ K}$
(a)	(b)	(c)

Slika 2. Tri faze pospeševanja rakete: na sliki 2a raketa še miruje, slika 2b prikazuje trenutek, ko je iz rakete iztekla ravno vsa voda, slika 2c pa prikazuje konec pospeševanja, ko je iz plastenke iztekel že del zraka. Indeks r se nanaša na raketo, v na vodo in z na zrak. Vse izmerjene vrednosti so zapisane v povdarjenem tisku, izračunane pa v navadnem.

Naš sistem so raketa in voda ter zrak v njej. Hitrost rakete po pospeševanju izračunamo iz energijskega zakona $\Delta W_n + \Delta W_k + \Delta W_p = A + Q$. Izkaže se, da lahko pri nadaljnjem računu zanemarimo ΔW_p . Upočasnjeni videoposnetek leta rakete je pokazal, da se raketa pospešuje le do višine približno 1 m in tako sprememba potencialne energije sistema ne predstavlja niti 1% spremembe notranje energije. Podrobnejši račun pokaže, da lahko zanemarimo tudi delo sile upora zraka med pospeševanjem. Sprememba je adiabatna, ker poteka tako hitro, da je $Q \approx 0 \text{ J}$ dober približek. Tako dobimo, da je $\Delta W_k = -\Delta W_n = (340 \pm 20) \text{ J}$.

Raketa, zrak in voda pridobijo med pospeševanjem toliko kinetične energije, kot je zmanjšanje notranje energije zraka

$$\frac{m_r \cdot v_0^2}{2} + \frac{m'_z \cdot v_z^2}{2} + \frac{m_v \cdot v_v^2}{2} = \Delta W_k. \quad (1)$$

Tudi sunka sile teže in upora zraka sta zanemarljivo majhna in se zato ohranja gibalna količina (slika 2c)

$$m_r \cdot v_0 = m'_z \cdot v_z = m_v \cdot v_v. \quad (2)$$

V enačbah (1) in (2) so neznane vse tri hitrosti. Če jih hočemo izračunati, potrebujemo še eno enačbo. To dobimo za prehod iz stanja 1 v stanje 2 (slika 2). Zopet zapišemo enačbi za ohranitev kinetične energije in gibalne količine:

$$\frac{(m_r + m_z) \cdot v_r'^2}{2} + \frac{m_v \cdot v_v^2}{2} = \Delta W'_k, \quad (3)$$

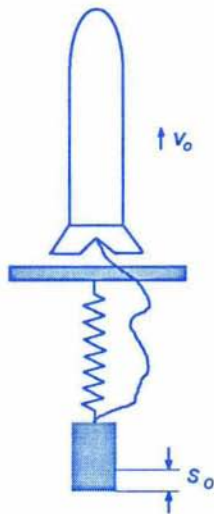
$$(m_r + m_z) \cdot v_r' = m_v \cdot v_v, \quad (4)$$

kjer je $\Delta W'_k = -\Delta W'_n = m_z \cdot c_{vz} \cdot (T_2 - T_1) = (78 \pm 8) \text{ J}$.

Reševanje sistema enačb (1) do (4) je zamudno. Nazadnje dobimo kvadratno enačbo za hitrost rakete v_0 , katere rešitev je $v_0 = (42 \pm 4) \text{ m/s}$. Hitrost vode je $v_v = (14 \pm 1) \text{ m/s}$ in hitrost zraka $v_z = (390 \pm 20) \text{ m/s}$.

Ker zaradi nekaterih predpostavk in približkov izračunani hitrosti v_0 nisva povsem zaupala, sva jo tudi izmerila, podobno kot merimo hitrosti izstrelkov z baliističnim nihalom, kjer je odmik klade sorazmeren s hitrostjo izstrelka, ki se zarije v kladu.

Na močno vzmet sva obesila 5 kg utež (slika 3), med raketo in utež privezala 1,5 m dolgo vrvico in raketo izstrelila. Izmeriti je bilo potrebno amplitudo s_0 , za kolikor



Slika 3. Merjenje začetne hitrosti z baliističnim nihalom.

je raketa izmaknila utež iz ravnovesne lege. Hitrost rakete sva izračunala podobno, kot izračunamo hitrost izstrelka pri merjenju z balističnim nihalom, kjer je hitrost premosorazmena odmiku nihala in krožni frekvenci nihala $v_0 = s_0 \omega$. Tako izmerjena hitrost rakete je bila $v_0 = (44 \pm 4)$ m/s, kar se, v mejah natančnosti pri merjenjih, ujema z izračunano vrednostjo.

Izračun dvižne višine rakete

Po pospeševanju se raketa začne gibati pojemajoče, saj nanjo delujeta zaviralni sili: teža in upor zraka. Za raketo zapišemo Newtonov zakon $ma = -F_g - F_u$ ali

$$m\Delta v/\Delta t = -mg - c\rho v^2 S/2, \quad (5)$$

pri čemer je m masa rakete, c koeficient upora, S prečni presek rakete in ρ gostota zraka.

S preprostim računalniškim programom lahko dvižno višino izračunamo numerično. Na začetku je hitrost v enaka hitrosti v_0 , ki jo že poznamo. Iz enačbe (5) izračunamo spremembo hitrosti Δv v časovnem intervalu Δt , ki si ga določimo sami (npr. 0,1 s). Tako dobimo hitrost po prvi desetinki sekunde $v_1 = v_0 - \Delta v$, pot v prvi desetinki pa izračunamo iz $\Delta h_1 = (v_0 + v_1)/2 \cdot \Delta t$. Postopek nadaljujemo, dokler hitrost ni enaka nič, celotno dvižno višino pa dobimo kot vsoto majhnih poti $h = \Delta h_1 + \Delta h_2 + \dots$. V našem primeru smo dobili $h = (43 \pm 4)$ m.

Pri zgornjem računu smo upoštevali koeficient upora rakete $c = 0,43 \pm 0,04$. Izmerili smo ga tako, da smo raketo spuščali s 25 m visokega mostu in pri tem natančno merili čas padanja.

Seveda smo hoteli tudi izmeriti, če raketa zares leti tako visoko, kot smo teoretično izračunali, namreč do višine $h = (43 \pm 4)$ m. Merjenje dvižne višine ni preprosto. Merili smo tako, da smo raketo izstreljevali v brezvetrju. Za njen rep smo privezali lahek sukanec, ki je ležal na tleh, navit v zankah s premerom nekaj decimetrov. Dvižna višina je bila kar enaka dolžini odvitnega sukanca, pri čemer smo upoštevali le rezultate poskusov, ko je raketa padla na tla blizu izstrelišča. Povprečna vrednost dvižnih višin iz 14 poskusov je bila $h = (38 \pm 3)$ m. Iz rezultatov se vidi, da se izračunana in izmerjena višina v mejah natančnosti pri merjenjih ujemata.

Goran Sabolič, Mirko Cvahte

OPAZUJEMO VENERO

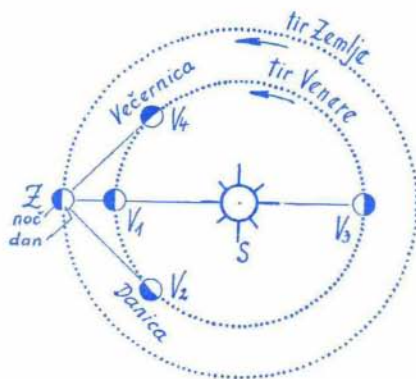
V astronomskih efemeridah *Naše nebo 1996*, ki jih izdaja Društvo matematikov, fizikov in astronomov Slovenije, lahko preberemo, kdaj je Venera vidna, da je bila do junija Večernica, od julija dalje pa se pojavlja na jutranjem nebu kot Danica in da takšna ostane do konca leta.

Poglejmo, kako je s to rečjo, da je namreč *Venera* enkrat *Večernica*, drugič pa sveti kot *Danica*.

Planeti krožijo v napredni smeri okrog Sonca. So vesoljska telesa brez lastne svetlobe. Na nočnem nebu jih vidimo zato, ker odbijajo svetlobo, ki pada nanje s Sonca.

Venera kroži okrog Sonca bliže kot naša Zemlja. Pravimo, da je *notranji planet*. Ker je Venera vedno blizu Sonca, se tudi na nebu ne more dosti oddaljiti od njega. Navidezno ali kotno razdaljo planeta od Sonca imenujemo *elongacija* (iz lat. besede *elongo* – oddaljiti). Venera se lahko od Sonca navidezno oddalji največ za 48° .

Predno se lotimo opazovanja, spoznajmo štiri značilne lege Venere glede na Sonce, če jo gledamo z Zemlje (slika 1).



Slika 1. Štiri značilne lege Venere glede na Sonce, gledano z Zemlje. Z – Zemlja, S – Sonce, V_1 – notranja konjunkcija (Venera je pred S oziroma med Z in S in nevidna), V_2 – največja navidezna (kotna) razdalja Venere desno od Sonca (največja zahodna elongacija – Venera je največ časa Danica), V_3 – zunanja konjunkcija (Venera je za Soncem in nevidna), V_4 – največja navidezna razdalja Venere levo od Sonca (največja vzhodna elongacija – Venera je najdalj časa Večernica).

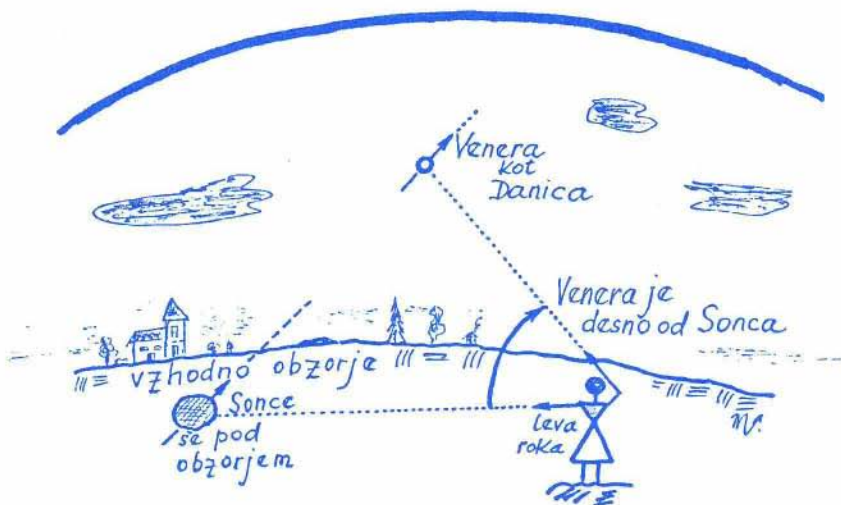
Kadar je Zemlja v legi Z, lahko Venera zasede različne lege na svojem tiru. Če leži na primer v legi V_1 med Zemljo in Soncem, nam kaže temno stran in je nevidna, saj je na nebu hkrati s Soncem. V tej legi Venerina mena ustreza Luninemu mlaju. Tej legi rečemo *notranja konjunkcija* (navidezni stik) s Soncem.

Ko se Venera na svoji poti premika naprej, nam najprej kaže ozek srpek. Ko pride v lego V_2 , nam kaže že polovico od Sonca osvetljene polkrogle. Tedaj je v največji navidezni razdalji (desno) od Sonca in njena mena ustreza nekakšnemu prvemu kraju pri Luni.

V legi V_3 je v *zunanj*i konjunkciji s Soncem. Planet nam kaže sicer vso osvetljeno polkroglo, vendar je Venera za nas spet nevidna, ker je s Soncem podnevi na nebu. Ta mena ustreza polni luni.

V legi V_4 pride v največjo navidezno razdaljo (levo) od Sonca. Ko se giblje med V_4 in V_1 spet lahko opazujemo Venerin srp in končno se Venera izgubi v Sončevi svetlobi, ko pride ponovno v lego V_1 .

Če je Venera levo od Sonca, zahaja za Soncem in je vidna zvečer – torej je Večernica. Če pa je Venera desno od Sonca, vzhaja pred Soncem in je vidna zjutraj – torej je Danica (slika 2).

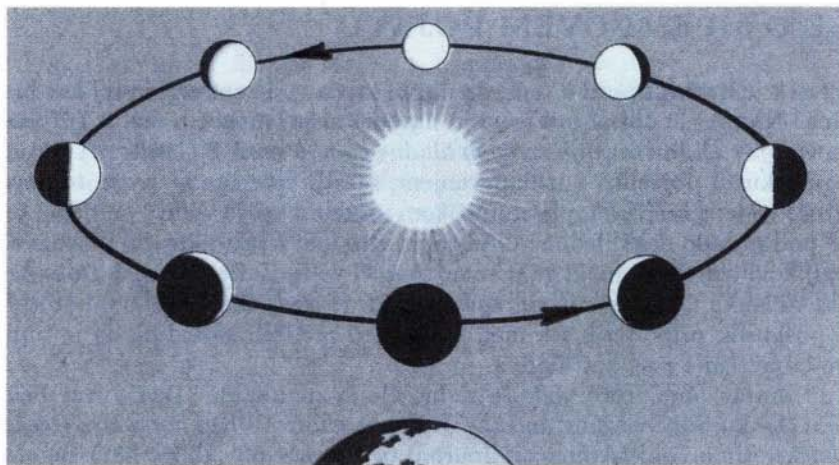


Slika 2. Takole z Zemlje opazujemo (doživljamo) Venero kot Danico (geocentrično gledanje). Venera vzhaja pred Soncem.

Ker se planeti gibljejo, se njihove medsebojne lege stalno spreminjajo. Zato se tudi pogoji vidnosti planetov z Zemlje kar naprej spreminjajo. Kdaj in kje so vidni, lahko preberemo na primer v zanesljivem koledarju ali astronomskih efemeridah.

Najprej s prostim očesom opazujemo Venero. Že v enem ali dveh dneh opazimo premik planeta glede na zvezde. Tako ugotovimo *navidezno gibanje* Venere. Nato pa jo pogledamo še z zmogljivejšim daljnogledom – morda opazimo meno.

O Veneri bi lahko še dosti razpredali, vendar lahko podrobnosti o tem planetu najdete v učbenikih, enciklopedijah in v računalniških programih.



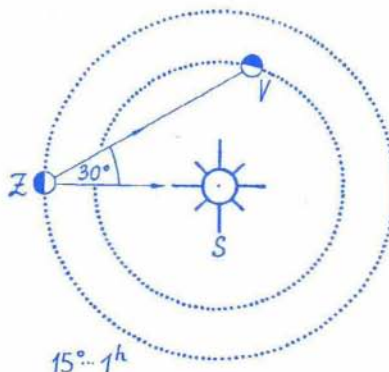
Slika 3. Mene in navidezne velikosti (zorni koti) notranjega planeta od zunanje do notranje konjunkcije.

Naš namen je le, da vas opozorimo na zanimivo opazovanje, iz katerega se lahko marsikaj naučite. Predvsem pa – pojdite ven pod jasno nočno nebo in vsaj za kratek čas občudujete ta prekrasni planet!

Seveda lahko Venero opazujete tudi na zaslonu računalnika, če imate ustrezní program. Vendar ga čez opazovanje v naravi ni.

Nalogi

1. Z iztegnjenima rokama prikažite, kako z Zemlje opazujemo Venero kot Večernico (geocentrično gledanje). Venera zahaja za Soncem.
2. Naj bo Zemlja v legi Z, Venera pa v legi V kot na sliki 4. Ali je Venera vidna? Če je, ali je Danica ali Večernica? Kdaj vzhaja oziroma zahaja?



Slika 4.

Odgovor: Da. Večernica. Zahaja dve uri za Soncem ($30^\circ = 2$ uri).

Marijan Prosén

ŠE O MPEMBOVEM POJAVU

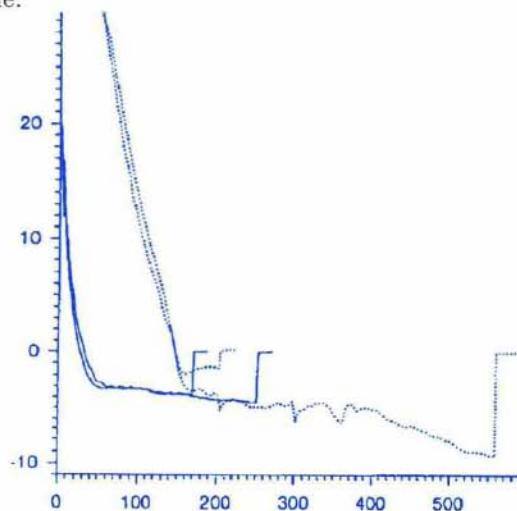
Presek je dvakrat pisal o tem, da naj bi vroča voda zmrznila prej kot hladna. Najprej je opisal merjenja in navedel nekaj mogočih razlag (*Mpembov pojav ali zmrzovanje vroče in hladne vode*, Presek 8 (1980) 24). Pojav so poskusili pojasniti z izhlapevanjem, zaradi katerega se zmanjša masa vroče vode; z boljšim toplotnim stikom posode z vročo vodo s podlago, ker se pod posodo nekaj ledu stali in zopet zmrzne; z raztopljenim zrakom ali ogljikovim dioksidom, ki ga je manj v vroči vodi. Z. Bradač in J. Dobnikar sta v članku *Ohlajanje in zmrzovanje vode* (Presek 20 (1992) 98) poročala o poskusih, pri katerih sta med 21 primeri pri treh zasledila, da je topla voda zmrznila prej kot hladna.

Zmrzovanje vroče vode še vedno zbuja zanimanje. David Auerbach je v članku *Supercooling and the Mpemba effect: When hot water freezes quicker than cold* (American Journal of Physics 63 (1995) 882) zagotovil, da nobena od dosedanjih razlag ne ustreza. Po njegovem mnenju je mogoče pojav pojasniti le s podhladitvijo vode. Podhlajena voda je v metastabilnem kapljevinskem stanju pri temperaturi pod 0°C pri navadnem zračnem tlaku. Motnja iz okolice, na primer tresljaj ob izklopu motorja v hladilniku, povzroči, da voda preide v ravnovesno stanje s tem, da se je del strdi in naraste temperatura na 0°C . Ob Mpembovem pojavu so že omenili podhladitev, tudi Bradač in Dobnikar sta jo, vendar je niso imeli za odločilno. V strokovni literaturi pa je veliko poročil o pomembnosti podhladitve. Podhladitev pod -5°C je nekaj običajnega, celo pri velikih prostorninah, na primer 75 litrov. Manjše prostornine se podhladijo precej bolj, na primer v cevkah do -35°C . Na podhladitev vplivajo poleg prostornine in temperature okolice hrapavost sten, vrtinci, čistoča in koncentracija raztopljenega plina. Bistveno je, da v teh primerih ni mogoče z gotovostjo napovedati temperature, do katere se kapljevina podhladi, preden se začne strjevati, ali časa, po katerem se to primeri.

Auerbach je Južnoafričan, zaposlen na göttingenskem Planckovem inštitutu za dinamiko tekočin, poskuse pa je delal v Perthu v Avstraliji, kjer je leto dni gostoval na inštitutu za raziskovanje vode. Pri poskusih je navadne posodice s prostornino 100 cm^3 iz stekla pireks postavil v termostat s prostornino 10 litrov. V vsako posodico je dal 50 cm^3 dvojno destilirane vode, iz katere je izgnal pline. Za začetno temperaturo je izbral 90°C za "vročo" vodo in 18°C za "hladno". Voda se je začela strjevati ob steni. Zato je na steno nalepil *termistor*, to je polprevodniški element z veliko temperaturno odvisnostjo upora, in z njim zasledoval časovni potek temperature. Izvedel je 52 poskusov z "vročo" vodo in 51 poskusov s "hladno".

Najprej je spreminjal temperaturo termostata. Pri temperaturi termostata med 0°C in -6°C se voda po 12 minutah še ni začela strjevati, pri temperaturi pod -18°C pa se je temperatura vode v posodici ob steni močno spreminjala v odvisnosti od razdalje od stene in se je podhladila le tanka plast ob steni, preden se je voda tam strdila. V nobenem primeru pri tem ni padla temperatura "vroče" vode pod temperaturo "hladne".

To se je včasih primerilo le pri temperaturi termostata med -6°C in -18°C . Na tem intervalu temperature termostata je zasledoval časovni potek temperature vode ob steni posodice. V njem je opazil več območij (slika 1). Na prvem se je temperatura vode ob steni hitro nižala. Na drugem območju je bilo nižanje temperature ob steni precej počasnejše. Pojavil se je namreč tok s hitrostjo nekaj milimetrov na sekundo zaradi odvisnosti gostote vode od temperature, ki je posebno izrazita okoli 4°C , ko je voda najgostejša. V krožnem toku se je hladna voda ob steni dvigala in na sredi posodice spuščala. Upoštevati je treba, da zadeva podatek za temperaturo vodo ob steni posodice in je drugod temperatura vode višja. Na tretjem območju se je temperatura vode ob steni zopet nekoliko hitreje nižala. Tedaj je krožni tok zamrl, ker voda nikjer ni imela več temperature nad 4°C . Nazadnje je temperatura strmo zrasla na 0°C , ko je zmrznil del podhlajene vode.



Slika 1. Auerbachov časovni potek temperature ob steni posodice pri ohlajanju vroče vode (pikčasto) in hladne vode (sklenjeno) za primera, v katerih se je voda začela strjevati najprej in najpozneje. Pri najdaljšem poskusu z vročo vodo je mogoče opaziti tri območja: od 0 do 160 s, od 160 do 400 s in od 400 do 560 s, ko se je voda začela strjevati.

Pri največjem delu poskusov z "vročo" vodo je bila ob steni temperatura T_s , pri kateri se je začela voda strjevati, na intervalu od 0 do -2°C . Pri največjem delu poskusov s "hladno" vodo se je začela voda strjevati na intervalu od -4 do -6°C .

Po časovnem poteku temperature opazovanih pojavov ni bilo mogoče pojasniti, še posebno ne zadnjega podatka za "vročo" vodo. Ali bi lahko vplivalo na izid poskusa, kar se je z vodo dogajalo pred poskusom? Zares s segrevanjem izženemo iz vode pline. Toda potem bi se naj vroča voda z manj absorbiranega plina začela strjevati pri nižji temperaturi. Ali bi lahko voda ponovno absorbirala pline, ko se ohladi? Poskus je pokazal, da se niti voda, v katero so uvajali ogljikov dioksid, ni vedla drugače. To so ugotovili tudi za manj čisto rečno vodo. Ali lahko vpliva na izid, to da postajajo posodice od poskusa do poskusa "čistejše"? Ni bilo mogoče ugotoviti, da bi pomivanje posodic vplivalo na izid.

Relativno število poskusov z "vročo" in s "hladno" vodo glede na temperaturo, pri kateri se je začela voda strjevati

temperatura strjevanja T_s	poskusi z vročo vodo	poskusi s hladno vodo
0 do -2°C	0,41	0,03
-2 do -4°C	0,15	0,22
-4 do -6°C	0,13	0,56
-6 do -8°C	0,10	0,19
-8 do -10°C	0,21	0,00

Odgovore na nekatera od Auerbachovih vprašanj je že pred časom ponudil N. E. Dorsey. Kot vodja državnega urada za standarde ZDA je dolga leta zbiral podatke o lastnostih vode, ki jih je izdal v zajetni knjigi leta 1940. Pri tem je naletel tudi na več nenavadnih trditev, med njimi na to, da segreta voda zmrzne prej kot hladna. Da bi jih pojasnil, je več kot deset let delal poskuse zunaj delovnega časa. Nekateri od njih so primerni za srednješolske laboratorije. O poskusih je poročal v obsežnem članku leta 1948 v manj razširjeni reviji.

Opazoval je zmrzovanje vode v cevkah, ki so bile napolnjene do polovice samo s 3 do 4 cm^3 vode iz različnih virov. Izmeril je temperaturo T_s , pri kateri so se pojavili kristalčki, in ugotovil, da je ležala med -3°C in -20°C . Pri ponavljanju se je znižala po več desetih zaporednih poskusih tudi za deset stopinj. Enak učinek je dalo segrevanje vode pred zmrzovanjem. Domneval je, da so tega krivi praški, mikroskopsko majhni

trdni drobci v vodi. Čim večkrat je voda zmrznila, tem manj učinkovito je postalo površje najučinkovitejših praškov kot jedro, na katerem so se izločili kristalčki. Površinska učinkovitost najučinkovitejših praškov se je zmanjšala tudi ob segrevanju vode. Dorsey je tako že pred Auerbachom opozoril na pomembnost podhladitve, zaradi katere ni mogoče z gotovostjo napovedati izida pri Mpembovem pojavu.

Pri strjevanju je Auerbach opazil dve vrsti pojavov: hitro strjevanje je trajalo le kako sekundo. Pri vodi sta talilna toplota in specifična toplota v takem razmerju, da bi dobili samo led pri tališču, če bi vodo podhladili do -80°C . Pri podhladitvi do -5°C se potemtakem hitro strdi šestnajstina mase vode. Led, ki nastane pri hitrem strjevanju, sestavlja *dendrite* (slika 2). Dendrite ledu obdaja kapljevinska voda in oboje tvori *kašo*.



Slika 2. Dendriti ledu v pohlajeni vodi. Za dendrite je značilno, da so *podobni sami sebi*. Če sliko povečamo v določenem razmerju, dobimo domala enako sliko. Ta lastnost in to, da izidov ne moremo z gotovostjo napovedati, namigujejo na kaos.

V primeru, da se voda začne strjevati pri razmeroma visoki temperaturi, nastane tanka kašasta plast ob steni posodice in tudi ob gladini. Čim nižja je temperatura, pri kateri se začne led strjevati, tem debelejša je kašasta plast. Pozneje se začne premikati meja med ledom in vodo in se strdi še preostala voda v veliko daljšem času več deset minut. Hitrost, s katero se debeli plast ledu na vodi, je prvi računsko obdelal Jožef Stefan, zato govorijo o *Stefanovem strjevanju* in mejo med ledom in vodo imenujejo *Stefanova meja*.

Auerbach je opazil razliko pri potovanju Stefanove meje. Iz vode, ki se je začela ohlajati kot "hladna", so se pred mejo izločali mehurčki plina, zaradi katerih je postal tam led moten in nekako siv. Raztopljeni plin ima torej le neko vlogo, čeprav samo stransko. Iz vode, ki se je začela ohlajati kot "vroča", pa je nastal bel, skoraj prozoren led. Če se je začela strjevati pri nižji temperaturi, je bila plast kašastega ledu debela, a je bila Stefanova meja še blizu stene. V "hladni" vodi, ki se je začela strjevati pri višji temperaturi, pa je bila kašasta plast tanjša, a je bila Stefanova meja dlje od stene. Ker Stefanove meje ni lahko opaziti, so morda nekateri opazovalci napak mislili, da so opazovali Mpembov pojav.

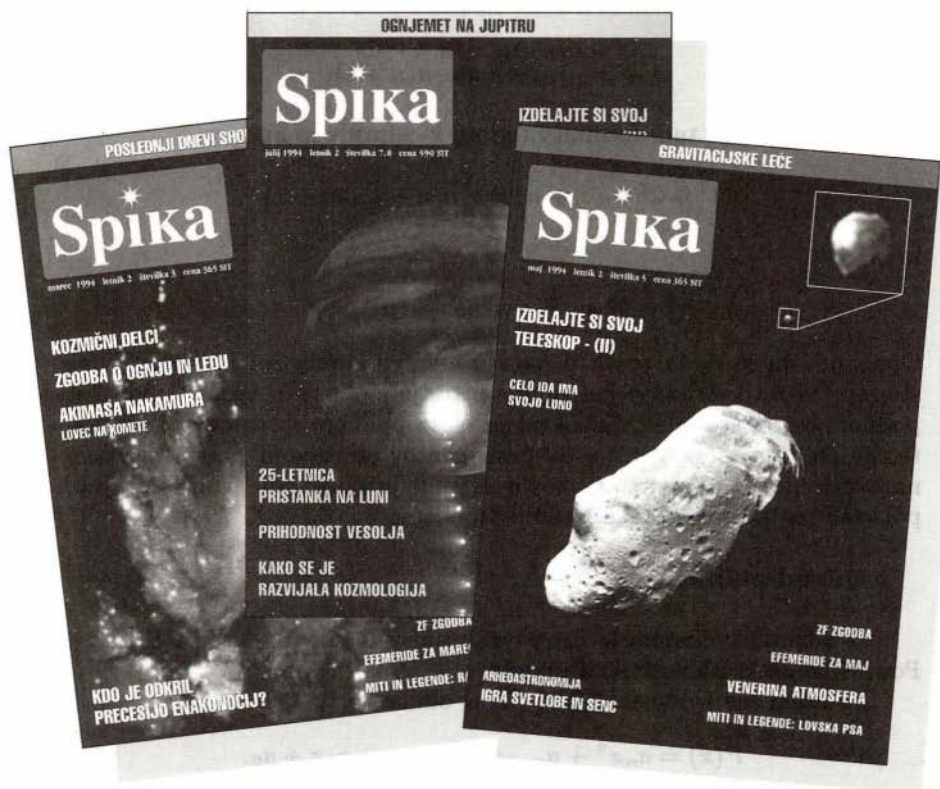
Auerbach je Mpembov pojav opazil pri polovici poskusov pri temperaturi termostata med -8 in -5° (19 poskusov od 36) in pri četrtini poskusov pri temperaturi med -11 in -8°C (7 poskusov od 29) pri prostornini vode 50 cm^3 . Bradač in Dobnikar, ki sta delala poskuse z dvakrat in trikrat večjo maso vode, sta naletela na Mpembov pojav pri dobri desetini poskusov (3 poskusi od 21). Večja masa vode se manj podhladi kot manjša. Pri veliki masi vode ni znatne podhladitve, torej pri jezeru ne bomo opazili tega pojava.

Ob tem, ko vemo vse več o Mpembovem pojavu, vse bolj ugotavljamo, kako je zapleten. Ali se ponuja še en pojav podobne vrste? V ameriških šolah poskušajo ugotoviti, ali se zares v mikrovalovni pečici segreta voda hitreje ohlaja kot voda, segreta na štedilniku. Do zdaj tega z merjenjem ni bilo mogoče podpreti, v okviru napak pa so dobili majhna odstopanja (P. Le Maire, C. Waiveris, *New folklore about water* (Physics Teacher **33** (1995) 432)). Zamisliti bi si bilo mogoče, da v obeh primerih vpliva na ohlajanje to, kar se je dogajalo z vodo pred poskusom. Šibki tokovi v vodi vztrajajo tudi po ves dan in še več.

Janez Strnad

**PRVA
SLOVENSKA
ASTRONOMSKA
REVIJA**

Spika



**VSAK MESEC NOVA, BARVNA ŠTEVILKA REVIE ZA LJUBITELJE ASTRONOMIJE,
KI PRINAŠA NOVICE, VSE O SONCU, PLANETIH, ZEMLJI, ZVEZDAH,
GALAKSIJAH, ASTROFIZIKI, KOZMOLOGIJI, ASTRONAVTIKI,
ASTROFOTOGRAFIJI, ARHEOASTRONOMIJI...
ZA AMATERJE MESEČNO SVEŽE EFEMERIDE IN ZVEZDNA KARTA,
O TELESKOPIH, UPORABNIH PROGRAMIH...
IN ŠE OSNOVE ZA ZAČETNIKE, RAZISKOVALNI KOTIČEK, TESTI,
ZNANSTVENA FANTASTIKA, MALI OGLASI TER NAGRADNA IGRA!**

Revijo naročajte na naslov: Spika, Poštni predal 9, 61109 Ljubljana. Četrtletna naročnina (15% popusta) je 1070,00 SIT, polletna naročnina (20% popusta) je 2015,00 SIT, celoletna naročnina (25% popusta) je 3780,00 SIT.

VSOTA POTENC NARAVNIH ŠTEVIL

Bralcem je verjetno znana formula za vsoto prvih n naravnih števil:

$$1 + 2 + \dots + n = \frac{1}{2}n(n+1).$$

Dostikrat srečamo tudi formuli za vsoto kvadratov in kubov:

$$1^2 + 2^2 + \dots + n^2 = \frac{1}{6}n(n+1)(2n+1)$$

in

$$1^3 + 2^3 + \dots + n^3 = \frac{1}{4}n^2(n+1)^2.$$

Opazimo, da se vsota prvih n naravnih števil izraža kot polinom druge stopnje, vsota kvadratov kot polinom tretje stopnje in vsota kubov kot polinom četrte stopnje. Vsakokrat je vsota polinom spremenljivke n , katerega stopnja je za 1 večja od eksponentov seštevanih potenc prvih n naravnih števil. V tem prispevku bi radi pokazali, da to ni slučajno, pokazali pa tudi, kako take formule izpeljemo.

Odvod polinoma

O odvodu polinoma je Presek že pisal v 6. številki letnika 1993-94. Ponovimo na kratko osnovna pravila.

Polinom ene spremenljivke je izraz oblike

$$P(x) = a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \dots + a_1 x + a_0.$$

Če privzamemo, da je prvi koeficient a_n različen od nič, potem število n imenujemo stopnja polinoma P .

Odvod polinoma P je polinom P' , ki ima za ena nižjo stopnjo kot polinom P . Pravila za odvajanje so naslednja:

- (1) Odvod konstantnega polinoma je enak nič.
- (2) Odvod potence x^k je enak kx^{k-1} .
- (3) Odvod vsote polinomov je vsota odvodov. Torej $(P_1 + P_2)' = P_1' + P_2'$.
- (4) Odvod s konstanto c pomnoženega polinoma je s to isto konstanto pomnožen odvod prvotnega polinoma. Torej $(cP)' = cP'$.

Naj bo d realno število in k naravno število. Potem je izraz $(x+d)^k$ polinom stopnje k . Postavimo še peto pravilo.

- (5) Odvod polinoma $(x+d)^k$ je enak $k(x+d)^{k-1}$.

Poglejmo si zgled računanja odvoda: Naj bo $P(x) = x^2 + 2x - 3$. Z uporabo zgornjih pravil izračunajmo odvod polinoma

$$P(x+d) = (x+d)^2 + 2(x+d) - 3.$$

Dobimo:

$$\begin{aligned} P'(x+d) &= ((x+d)^2)' + (2(x+d))' - (3)' = \\ &= 2(x+d) + 2((x+d))' - 0 = \\ &= 2(x+d) + 2(x+d)^0 = 2(x+d) + 2. \end{aligned}$$

Sedaj si postavimo tole vprašanje: Kaj lahko povemo o polinomih $P(x) = a_n x^n + \dots + a_1 x + a_0$ in $Q(x) = b_m x^m + \dots + b_1 x + b_0$, če sta njuna odvoda enaka? Po pravilih za odvajanje dobimo

$$na_n x^{n-1} + \dots + a_1 = mb_m x^{m-1} + \dots + b_1.$$

Iz primerjave stopenj in koeficientov dobimo $m = n$ in $a_j = b_j$ za vsak j med 1 in n . Edino za koeficienta a_0 in b_0 ne moremo trditi, da sta enaka. Torej, če sta odvoda dveh polinomov enaka, se ta dva polinoma razlikujeta kvečjemu pri konstantnem členu. Pokažimo sedaj izrek:

Izrek. *Naj bo d realno število različno od nič in k naravno število. Potem obstaja polinom P stopnje $k+1$, tako da velja*

$$P(x+d) - P(x) = (x+d)^k.$$

Dokaz. Dokazovali bomo z indukcijo. Najprej naj bo $k = 1$. Vzemimo polinom $p(x) = \frac{1}{2d}x^2 + \frac{1}{2}x + a_0$, kjer je število a_0 poljubno. Potem izračunamo

$$p(x+d) - p(x) = \frac{1}{2d}(x+d)^2 + \frac{1}{2}(x+d) - \frac{1}{2d}x^2 - \frac{1}{2}x = x + d.$$

Torej smo za $k = 1$ tak polinom že našli. Denimo, da smo našli polinom $p(x) = a_k x^k + \dots + a_1 x + a_0$ stopnje k , tako da velja

$$p(x+d) - p(x) = (x+d)^{k-1}.$$

Potem je a_0 spet poljuben, saj se v izrazu $p(x+d) - p(x)$ odšteje. Vzemimo polinom

$$P(x) = \frac{1}{k+1}a_k x^{k+1} + \frac{1}{k}a_{k-1}x^k + \dots + \frac{1}{2}a_1x^2 + a_0x.$$

Polinom P je izbran tako, da je njegov odvod enak polinomu p . Potem je $P(x+d) - P(x)$ polinom, katerega odvod je enak $p(x+d) - p(x) = (x+d)^{k-1}$. Toda tudi odvod polinoma $\frac{1}{k}(x+d)^k$ je enak $(x+d)^{k-1}$.

Torej se polinoma $P(x+d) - P(x)$ in $\frac{1}{k}(x+d)^k$ razlikujeta kvečjemu za konstantni člen. Tedaj lahko zapišemo

$$P(x+d) - P(x) = \frac{1}{k}(x+d)^k + c.$$

V dobljeni izraz vstavimo $x = -d$ in dobimo $P(0) - P(-d) = c$. Nadalje je $P(0) = 0$ in

$$P(-d) = \frac{1}{k+1}a_k(-d)^{k+1} + \frac{1}{k}a_{k-1}(-d)^k + \dots + \frac{1}{2}a_1d^2 - a_0d.$$

Toda a_0 imamo še na razpolago, zato ga določimo tako, da bo $P(-d) = 0$. Potem pa je $c = 0$. Polinom kP je stopnje $k+1$ in zanj velja

$$kP(x+d) - kP(x) = (x+d)^k.$$

Indukcijski korak je narejen in dokaz je končan.

V enačbo $P(x+d) - P(x) = (x+d)^k$ vstavimo po vrsti $x = a - d, a, a+d, \dots, a+(n-2)d$. Dobimo

$$P(a) - P(a-d) = a^k$$

$$P(a+d) - P(a) = (a+d)^k$$

$$P(a+2d) - P(a+d) = (a+2d)^k$$

$$\vdots$$

$$P(a+(n-1)d) - P(a+(n-2)d) = (a+(n-1)d)^k.$$

Zgornje enačbe seštejemo in dobimo

$$P(a+(n-1)d) - P(a-d) = a^k + (a+d)^k + \dots + (a+(n-1)d)^k,$$

kjer je polinom P stopnje $k + 1$. Povejmo še drugače. Formula za vsoto

$$a^k + (a + d)^k + \dots + (a + (n - 1)d)^k$$

k -tih potenc aritmetičnega zaporedja je oblike $P(a + (n - 1)d) - P(a - d)$, kjer je P polinom stopnje $k + 1$. Kako formulo res izpeljemo, si pogledjmo na nekaj primerih.

Izpeljimo formulo za vsoto $1^2 + 3^2 + \dots + (2n - 1)^2$. Tukaj je $a = 1$ in $d = 2$. Vzemimo polinom $P(x) = a_3x^3 + a_2x^2 + a_1x + a_0$ stopnje 3 in zapišimo

$$\begin{aligned} 1^2 + 3^2 + \dots + (2n - 1)^2 &= P(2n - 1) - P(-1) = \\ &= a_3(2n - 1)^3 + a_2(2n - 1)^2 + a_1(2n - 1) + a_0 + a_3 - a_2 + a_1 - a_0. \end{aligned}$$

V zgornjo enačbo vstavimo $n = 1, 2, 3$ in dobimo sistem enačb

$$\begin{aligned} 2a_3 + 2a_1 &= 1 \\ 28a_3 + 8a_2 + 4a_1 &= 10 \\ 126a_3 + 24a_2 + 6a_1 &= 35. \end{aligned}$$

Iz prve enačbe izrazimo $a_1 = \frac{1}{2}(1 - 2a_3)$ in ga vstavimo v preostali dve enačbi. Dobimo enačbi

$$\begin{aligned} 24a_3 + 8a_2 &= 8 \\ 120a_3 + 24a_2 &= 32. \end{aligned}$$

Postopamo enako kot prej. Iz prve enačbe izrazimo $a_2 = 1 - 3a_3$ in vstavimo v drugo. Dobimo enačbo $48a_3 = 8$. Torej je $a_3 = \frac{1}{6}$. Nadalje je $a_2 = \frac{1}{2}$ in $a_1 = \frac{1}{3}$. Tako smo izpeljali formulo

$$\begin{aligned} 1^2 + 3^2 + \dots + (2n - 1)^2 &= \frac{1}{6}(2n - 1)^3 + \frac{1}{2}(2n - 1)^2 + \frac{1}{3}(2n - 1) + \frac{1}{6} - \frac{1}{2} + \frac{1}{3} = \\ &= \frac{4}{3}n^3 - \frac{1}{3}n = \frac{1}{3}n(2n - 1)(2n + 1). \end{aligned}$$

Tudi formulo za vsoto potenc naravnih števil izpeljemo enako. Po zgornjih ugotovitvah je

$$1^k + 2^k + \dots + n^k = P(n) - P(0),$$

saj je $a = d = 1$, stopnja polinoma P pa je enaka $k + 1$. Če zapišemo $P(x) = a_{k+1}x^{k+1} + \dots + a_1x + a_0$, je

$$1^k + 2^k + \dots + n^k = a_{k+1}n^{k+1} + \dots + a_1n.$$

V enačbo vstavimo po vrsti $n = 1, 2, \dots, k + 1$ in dobimo $k + 1$ enačb za $k + 1$ neznank.

Za primer $k = 1$ dobimo enačbi

$$a_2 + a_1 = 1 \quad \text{in} \quad 4a_2 + 2a_1 = 3.$$

Iz prve enačbe dobimo $a_1 = 1 - a_2$. Vstavimo v drugo enačbo in dobimo $2a_2 = 1$. Torej je $a_2 = a_1 = \frac{1}{2}$ in

$$\frac{1}{2}n^2 + \frac{1}{2}n = \frac{1}{2}n(n + 1)$$

dobro znana formula za vsoto prvih n naravnih števil.

Enako izračunamo formule za vsote višjih potenc naravnih števil. Formuli za vsoto kvadratov in kubov smo navedli že na začetku prispevka. Formuli za vsoto četrtih in petih potenc pa se glasita

$$1^4 + 2^4 + \dots + n^4 = \frac{1}{30}n(n + 1)(2n + 1)(3n^2 + 3n - 1)$$

in

$$1^5 + 2^5 + \dots + n^5 = \frac{1}{12}n^2(n + 1)^2(2n^2 + 2n - 1).$$

Aleksej Turnšek

TRI NALOGE IZ GEOMETRIJE

Za reševanje naslednjih nalog ne potrebujete nobenega posebnega predznanja iz matematike. Potrebujete pa dobro voljo in nekaj trmaste vztrajnosti, ki je osnovna lastnost dobrega matematika.

1. naloga.

Če stojimo kjerkoli v kvadratni sobi, potem lahko vidimo vse štiri stene v celoti. Vaša naloga je konstruirati prostor s takim tlorisom, da se bo znotraj te sobe možno postaviti tako, da *nobene* stene tega prostora ne bo moč videti v celoti.

2. naloga.

Denimo, da imamo na papirju narisano krožnico in točko, ki je središče te krožnice. S pomočjo ravnila in šestila je mogoče brez težav konstruirati oglišča kvadrata, ki je krožnici vrtan. To naredimo tako, da potegnemo najprej poljubno premico, ki gre skozi središče krožnice, in potem še pravokotnico na to premico, tudi skozi središče krožnice.

Ponujam vam podobno, a težjo nalogo. Poizkusite konstruirati oglišča krožnici vrtanega kvadrata *samo* s šestilom!

3. naloga.

Denimo, da imamo na papirju narisani konveksni štirikotnik (to je tak, ki ni nikjer vdrt). Kako bi s pomočjo šestila in ravnila narisali premico, ki bi ta štirikotnik razdelila na dva plosčinsko enaka dela?

Borut Zalar

SKRIT RAČUN

V izrazu

$$\frac{*}{6} - \frac{9 \quad * \quad *}{* \quad * \quad * \quad *} = 0$$

nadomesti zvezdice s števki tako, da bo dobljeni račun pravilen in da bodo v njem nastopale vse desetiške številke.

Marija Vencelj

PODALJŠANA LANGFORDOVA ZAPOREDJA

Zaporedju $2n$ števil, ki je sestavljeno iz dveh 1, dveh 2, ..., dveh števil $n - 1$ in dveh števil n , pri čemer je za vsak i od 1 do n med obema pojavitvama števila i natanko i drugih členov zaporedja, pravimo *Langfordovo zaporedje*. Primera takih zaporedij sta zaporedji 2, 3, 1, 2, 1, 3 in 2, 3, 4, 2, 1, 3, 1, 4. Znano je, da Langfordova zaporedja obstajajo le za tista števila n , ki imajo pri deljenju s 4 ostanek 0 ali 3.

Zaporedju $3n$ števil, v katerem vsako od števil med 1 in n nastopa natanko trikrat, pri čemer je med vsakima zaporednima pojavitvama števila i natanko i drugih členov zaporedja, bomo rekli *podaljšano Langfordovo zaporedje*. Trdim, da tudi taka zaporedja obstajajo. Vaša naloga pa je, da poiščete najkrajše podaljšano Langfordovo zaporedje. Seveda si pri tem lahko pomagate tudi z računalnikom.

Martin Juvan

11. DRŽAVNO TEKMOVANJE IZ ZNANJA RAČUNALNIŠTVA ZA OSNOVNOŠOLCE

Državno tekmovanje osnovnošolcev je potekalo v soboto 11. maja 1996 v Ljubljani na Fakulteti za računalništvo. Tako kot v prejšnjem letu je bilo tudi tokrat tekmovanje učencev osnovnih šol del tridnevnega festivala računalništva, ki ga skupaj organizirata Gibanje znanost mladini in Komisija za računalništvo pri ZOTKS. Glavni pokrovitelj 2. festivala računalništva je bilo ponovno podjetje Hermes SoftLab iz Ljubljane.

Mladi tekmovalci so se pred tem že izkazali na izbirnih šolskih in regionalnih tekmovanjih. Po podatkih komisije za računalništvo se je tekmovanje v celoti udeležilo preko tisoč petsto tekmovalcev.

Tekmovalci so v šestih starostnih skupinah reševali naloge iz znanja programiranja v programskih jezikih LOGO (učenci do vključno 5. razreda) in pascal (od 6. do 8. razreda). Učenci, ki so tekmovali v LOGU, so imeli na razpolago osebne računalnike, odločili pa so se lahko za uporabo programa LOGO-S v okolju DOS ali pa za uporabo programa MSW LOGO v okolju Windows. Za reševanje nalog so imeli na razpolago dve šolski uri časa. Reševanje nalog iz pascala je potekalo "klasično" – učenci so rešitve nalog zapisali na papir. V 7. tekmovalni skupini so učenci posamično ali v skupinah predstavili svoj program, izdelan v programskem jeziku VISUAL BASIC.

Rezultati so bili dobri. Najboljši učenci so večinoma dosegli preko 80% točk. Manj uspešni so bili le učenci 5. razreda, kjer je v primerjavi s prejšnjimi leti prišlo do precejšnje spremembe. Učenci 5. razreda ne tekmujejo več v znanju pascala, pač pa v poznavanju programiranja v LOGU. Ta sprememba je s seboj prinesla nov tip nalog: učenci se v LOGU ne ukvarjajo več samo z risanjem ("želvja grafika"), temveč tudi v poznavanju ukazov za delo v tekstnem načinu (aritmetični problemi, delo s seznami,...). Komisija za računalništvo pričakuje, da se bodo v prihodnjih letih rezultati tudi v tej skupini izboljšali.

Razvrstitev učencev, ki so tekmovali v programskem jeziku LOGO:

1. skupina (učenci do tretjega razreda osnovne šole):

1. mesto: Grega Kešpret, OŠ Polje, Ljubljana.
2. mesto: Matevž Bokal, OŠ Polhov Gradec, Polhov Gradec.
3. – 4. mesto: Žiga Hacin, OŠ Selnica ob Dravi, Selnica ob Dravi in Darko Pevec, OŠ Miška Kranjca, Ljubljana.

2. skupina (učenci četrtega razreda osnovne šole):

1. mesto: Mitja Trampuž, OŠ Majde Vrhovnik, Ljubljana.
2. mesto: Rok Mejač, OŠ Martina Krpana, Ljubljana.
3. mesto: Urban Čuješ, OŠ Ob Dravinji, Slovenske Konjice.

3. skupina (učenci petega razreda osnovne šole):

1. mesto: Andrej Veber, OŠ Oskarja Kovačiča, Ljubljana.
2. mesto: Borut Likar, OŠ Ledina, Ljubljana.
3. mesto: Andrej Osterman, OŠ Mengeš, Mengeš.

Razvrstitev najboljših učencev, ki so tekmovali v programskem jeziku pascal:

4. skupina (učenci šestega razreda osnovne šole):

1. mesto: Marko Dolenc, OŠ Polhov Gradec, Polhov Gradec.
2. mesto: Jure Merčun, OŠ Maksa Pečarja, Ljubljana.
3. mesto: Igor Vizec, OŠ Šentjernej, Šentjernej.

5. skupina (učenci sedmega razreda osnovne šole):

1. mesto: Aleš Zamuda, OŠ Velika Nedelja, Velika Nedelja.
2. mesto: Matjaž Janežič, OŠ Šmartno pri Litiji, Šmartno pri Litiji.
3. mesto: Andrej Košmrlj, OŠ Franca Rozmana-Staneta, Ljubljana.

6. skupina (učenci osmega razreda osnovne šole):

1. mesto: Andraž Tori, OŠ Oskarja Kovačiča, Ljubljana.
2. mesto: David Krmpotič, OŠ Ormož, Ormož.
3. mesto: Miha Pirnat, IV. OŠ Celje, Celje.

V 7. skupini so učenci predstavili dvanajst izdelkov – programov. Najbolje so bili ocenjeni programi naslednjih učencev:

1. mesto: Simon Žajdela, OŠ Videm ob Ščavnici, Videm ob Ščavnici.
2. mesto: Egon Kocjan, OŠ Jurija Dalmatina, Krško.
3. mesto: Silvester Markovič, OŠ Bršljin, Novo mesto.

Vsi naštetih tekmovalci so dobili praktične nagrade, ki so jih prispevala slovenska podjetja, sponzorji tega tekmovanja. Čestitke učencem, ki so uspešno zastopali svoje šole in pokazali zavidljivo znanje programiranja. Organizatorjem, članom tekmovalnih komisij in sponzorjem pa gre zahvala za njihov trud.

Tihomil Šlenc

32. TEKMOVANJE ZA ZLATO VEGOVO PRIZNANJE

Najboljši sedmošolci in osmošolci s področnih tekmovanj so se v soboto, 25. maja 1996, pomerili v šestih regijah na državnem tekmovanju za zlato Vegovo priznanje. Nanj se po veljavnem pravilniku uvrsti do 0,5% vseh sedmošolcev in do 1% vseh osmošolcev s posameznega področja.

REGIJA	7. razred	8. razred
Ljubljana	80	138
Maribor	34	68
Celje	29	39
Koper	17	27
Nova Gorica	9	18
Novo mesto	18	28
SKUPAJ	187	318

Zlato Vegovo priznanje so prejeli učenci, ki so osvojili vsaj 13 od 25 možnih točk.

Vsem učencem, ki so osvojili zlato Vegovo priznanje, je Društvo matematikov, fizikov in astronomov Slovenije poklonilo knjigo *Številske križanke*.

Nagrade najuspešnejšim tekmovalcem:

7. razred:

I. nagrada:

Tomaž Kuzma, OŠ Loka, Črnomelj.

Mojca Miklavc, OŠ Srečka Kosovela, Sežana.

II. nagrada:

Franja Pajk, OŠ Petra Kavčiča, Škofja Loka.

III. nagrada:

Miha Papler, OŠ Antona Tomaža Linhart, Radovljica.

Matija Pretnar, OŠ Narodnega heroja Maksa Pečarja, Ljubljana – Črnuče.

8. razred:**I. nagrada:**

Miha Jukić, OŠ Center, Novo mesto.
Pika Založnik, OŠ Ledina, Ljubljana.
Jure Bezgovšek, OŠ Mihe Pintarja Toleda, Velenje.
Mojca Gaser, OŠ Železniki, Železniki.
Alenka Ropret, OŠ Žirovnica, Žirovnica.

II. nagrada:

Jure Željko, OŠ Bratov Polančičev, Maribor.

III. nagrada:

Črto Kreft, OŠ Mladika, Ptuj.

Aleksander Potočnik

DRŽAVNO TEKMOVANJE IZ FIZIKE ZA ZLATA STEFANOVA PRIZNANJA 1995/96

Društvo matematikov, fizikov in astronomov Slovenije in Oddelek za fiziko na Pedagoški fakulteti v Ljubljani sta bila organizatorja 16. državnega tekmovanja iz fizike za osnovnošolce. V predavalnicah in laboratorijih Pedagoške fakultete v Ljubljani se je v soboto 11. 5. 1996 pomerilo v znanju fizike 40 ekip iz sedmih in 31 ekip iz osmih razredov.

Na državnem tekmovanju so sodelovali najboljše uvrščeni učenci s področnih tekmovanj, ki so bila 30. 3. 1996 v devetih mestih Slovenije. Na njih je sodelovalo 376 ekip sedmih in 385 ekip osmih razredov. Na področna tekmovanja so šole prijavljale ekipe po dva učenca. Šole, ki imajo do tri razrede v paralelki, so imele pravico do prijave ene ekipe, šole z štirimi paralelkami in več pa do dve ekipi. Podružnične šole so se prijavljale samostojno. Na šolskih tekmovanjih tekmujejo učenci samostojno, na področnih in državnem pa ekipno. Učenci tekmujejo ekipno, ker so na državnem tekmovanju tudi eksperimentalne naloge.

Seznam tekmovalcev, ki so dosegli najboljše rezultate na državnem tekmovanju za zlata Stefanova priznanja (maksimalno število točk je bilo 16), je na naslednji strani.

Osnovna šola	Prvi tekmovalac	Drugi tekmovalac	Točke
--------------	-----------------	------------------	-------

7. razred**1. nagrada**

OŠ Antona Tomaža Linhart, Radovljica	Viktor Vrhunec	Nina Marinšek	14,5
--------------------------------------	----------------	---------------	------

2. nagrada

OŠ Polje, Ljubljana	Uroš Zupančič	Boris Matič	14
OŠ Bistrica pri Trziču	Aleš Papler	Klemen Perko	14

Pohvale

OŠ Toneta Čufarja, Ljubljana	Tomaž Šolc	Maša Kovič	13,75
OŠ Tabor II, Maribor	Marko Petovar	Vesna Božič	13,75
OŠ Mirna Peč	Andrej Muhič	Damjan Golob	13,5
OŠ Ledina, Ljubljana	Jure Žumer	Gregor Tavčar	13,25
OŠ Loka, Črnomelj	Peter Skube	Tomaž Kuzman	13
OŠ Jakoba Aljaža, Kranj	Adrian Ostovič	Peter Köckl	12,25
OŠ Dobravlje	Jana Šatej	Marko Ošaj	12,25
OŠ Bratov Polančič, Maribor	Mojca Babič-Kurbus	Matjaž Aleš	12
OŠ Nade Cilenšek, Griže	Tanja Robič	Aljaž Kajtna	11,5
OŠ Brežice	Amir Tokič	Rok Piltavar	11,5
OŠ Kolezija, Ljubljana	Igor Drobnak	Jurij Klučar	11,5

8. razred**1. nagrada**

OŠ Ledina, Ljubljana	Črtomir Prešeren	Nejc Faganel	16
----------------------	------------------	--------------	----

2. nagrada

OŠ Simona Jenka, Kranj	Grega Hribar	Dejan Dolenc	14
OŠ Lenart v Slov. Goricah	Marko Firbas	Jure Brumec	14

Priznanja

OŠ Frana Roša, Celje	Luka Crnič	Jure Maglica	13
OŠ Miroslava Vilharja, Postojna	Boris Pavčič	Marko Novak	12,5
I. OŠ Rogaška Slatina	Jaka Hajnšek	Hrvoje Ratkajec	11,5
OŠ Majde Vrhovnik, Ljubljana	Matej Spiler	Lan Umek	10
OŠ Gustava Šiliha, Velenje	Urša Tavner	Klemen Jelen	9,75
OŠ Sladki Vrh	Petra Poredoš	Patricija Šveincer	9,75
OŠ Dobravlje	Svetlana Kodrič	Natalija Brecelj	9,5

Zahvaljujemo se vsem, ki so s svojim delom prispevali k dobri izvedbi področnih tekmovanj in državnega tekmovanja. Čeprav se nismo mogli in znali izogniti vsem pomanjkljivostim in napakam, menimo, da so bila tekmovanja uspešna in koristna, ter upamo, da so pri učencih vzbudila še več zanimanja za fiziko.

Mentorjem se zahvaljujemo za njihov trud in požrtvovalnost pri pripravi učencev na tekmovanje. Vsem tekmovalcem pa čestitamo za dosežene uspehe in jim želimo, da bi še naprej pridno delali na tem področju in našli v fiziki tudi mnogo zadovoljstva in veselja.

Prvih deset ekip osmih razredov se bo za nagrado udeležilo fizikalnega raziskovalnega tabora, ki bo na Bledu od 30.9. do 4.10. 1996. Nagrado podeljuje DMFA Slovenije v sodelovanju in pod pokroviteljstvom Ministrstva za šolstvo in šport Republike Slovenije.

Knjižne nagrade za nagrajence so prispevali Društvo matematikov, fizikov in astronomov Slovenije, Komisija za tisk pri Društvu matematikov, fizikov in astronomov Slovenije, Založba Math in Založniško podjetje Razvedrilo. Uredništvo Spike pa je vsem prvouvrščenim poklonilo letno naročnino na revijo Spika.

Jelislava Sakelšek

40. MATEMATIČNO TEKMOVANJE SREDNJEŠOLCEV SLOVENIJE

V sobotnem dopoldnevu 25. maja 1996 se je 168 dijakov iz 51 gimnazij in srednjih šol v prostorih Srednje šole Nova Gorica spopadlo z nalogami na 40. matematičnem tekmovanju srednješolcev Slovenije, popoldan pa so si lahko ogledali baziliko na Sveti gori ali pa Kostanjevico in Brda.

Za uspešno reševanje nalog je državna tekmovalna komisija podelila naslednje nagrade in pohvale:

PRVI LETNIK:

3. nagrada:

Ajda Skarlovnik, Gimnazija Bežigrad, Ljubljana; Gorazd Karer, Srednja šola Nova Gorica.

Pohvala:

Jure Kališnik, Šolski center Celje, Gimnazija Lava; Justin Činkelj, Gimnazija Želimlje; Luka Devjak, Gimnazija Ledina, Ljubljana; Igor Jaušovec, Prva gimnazija Maribor; Primož Lukšič, Gimnazija in ESS Trbovlje; Borut Mrak, SKŠ in gimnazija, Ljubljana; Nataša Tiegl, Gimnazija Bežigrad, Ljubljana; Filip Šramel, Šolski center Celje, Gimnazija Lava; Meta Dolenec, Gimnazija Škofja Loka; Katja Šturm, Gimnazija Novo mesto; Luka Strniša, Gimnazija Bežigrad, Ljubljana; Peter Ahčin, SZŠ in gimnazija, Ljubljana; Maja Ulčnik, Gimnazija Poljane, Ljubljana; Manca Vuk, Gimnazija Bežigrad, Ljubljana; Samo Juretič, Srednja šola Nova Gorica; Rok Škufca, Gimnazija Škofja Loka; Simon Repek, Gimnazija Koper; Bogdan Fürst, Šolski center Celje, Gimnazija Lava; Miha Kadunc, Škofijska klasična gimnazija, Ljubljana.

DRUGI LETNIK:**2. nagrada:**

Tadej Starčič, Gimnazija Bežigrad, Ljubljana; Primož Berlič, Gimnazija Ledina, Ljubljana.

Pohvala:

Andrej Pukšič, Šolski center Celje, Gimnazija Lava; Matej Rizman, Druga gimnazija Maribor; Tomaž Kosem, Šolski center Celje, Gimnazija Lava; Matija Mazi, Gimnazija Bežigrad, Ljubljana; Matjaž Titan, Gimnazija Murska Sobota; Martin Milanič, Gimnazija Koper; Miha Bartolič, Srednja šola Nova Gorica.

TRETJI LETNIK:**1. nagrada:**

Gorazd Bizjak, Gimnazija Bežigrad, Ljubljana.

Pohvala:

Matjaž Konvalinka, Gimnazija Bežigrad, Ljubljana; Dejan Kolarič, Tretja gimnazija Maribor; Mitja Luštrek, SŠ R. Maistra, Kamnik; Saša Fratina, Gimnazija Bežigrad, Ljubljana; Igor Locatelli, Srednja šola Nova Gorica; David Maroševič, Gimnazija Jesenice; Mitja Šlenc, Gimnazija Bežigrad, Ljubljana.

ČETRTE LETNIK:**1. nagrada:**

Sašo Živanovič, Šolski center Celje, Gimnazija Lava.

3. nagrada:

Drago Bokal, Gimnazija Bežigrad, Ljubljana; Miha Vuk, Gimnazija Bežigrad, Ljubljana.

Pohvala:

Igor Klep, SŠC, Gimnazija Ptuj; Andrej Zorko, Gimnazija in ESŠ Brežice; Polona Grešak, Gimnazija in ESŠ Trbovlje; Matjaž Košak, Gimnazija Novo mesto; Jernej Tonejc, SŠC, Gimnazija Ptuj.

Po določilih *Pravilnika o tekmovanju srednješolcev v znanju matematike* je državna tekmovalna komisija izbrala ekipo, ki je zastopala Slovenijo na Mednarodni matematični olimpiadi v Indiji. V ekipo so se uvrstili: Sašo Živanovič, Igor Klep, Andrej Zorko, Polona Grešak, Matjaž Konvalinka in Tadej Starčič.

Matjaž Željko

34. TEKMOVANJE IZ SREDNJEŠOLSKE FIZIKE

Tekmovanje iz srednješolske fizike poteka v štirih skupinah A, B, C in D, razdeljenih po snovi, in v treh stopnjah.

Prva stopnja je regijsko tekmovanje, ki se ga lahko udeležijo vsi dijaki. Tekmovanje poteka istočasno na osmih srednjih šolah po vsej Sloveniji. Komisija na državnem nivoju zbere rezultate iz vseh regij in okrog 30 najboljših iz vsake skupine se potem udeleži državnega tekmovanja.

Na državnem tekmovanju se iz skupine D, ki zajema celotno snov srednješolske fizike, uvrsti 10 najboljših na izbirno tekmovanje za olimpijsko ekipo. Pet tekmovalcev z največjo vsoto točk z državnega tekmovanja (največje možno število točk je 25) in izbirnega tekmovanja (največje možno število točk je 20) se uvrsti v slovensko olimpijsko ekipo.

Krog tekmovanj se je letos začel 30. marca z regijskim tekmovanjem. Udeležilo se ga je 800 tekmovalcev iz 52 srednjih šol. Tekmovanje je potekalo na naslednjih srednjih šolah: na Gimnaziji Šentvid Ljubljana, Srednji šoli za elektrotehniko in računalništvo Ljubljana, II. gimnaziji Maribor, Srednji tehniški šoli Celje, Gimnaziji Jesenice, Srednji šoli Nova Gorica, Gimnaziji Piran in Gimnaziji in ekonomski srednji šoli Brežice.

Državno tekmovanje je bilo 20. aprila. V skupini A je tekmovalo 26 tekmovalcev, v skupini B 31, v skupini C 31 in v skupini D 27. Skupaj 115 tekmovalcev iz 27 srednjih šol.

Organizator državnega tekmovanja je bila Srednja elektro in strojna šola Kranj. Medtem ko so tekmovalci reševali naloge, so si njihovi mentorji ogledali tovarno Elan v Begunjah. Po koncu reševanja nalog pa so si tekmovalci ogledali Alpski letalski center Lesce-Bled in si z letali s ptičje perspektive ogledali Gorenjsko.

Tekmovalna komisija DMFA Slovenije, ki so ji pri izvedbi tekmovanja in ocenitvi izdelkov pomagali študenti Fakultete za matematiko in fiziko, je na razglasitvi rezultatov podelila 8 prvih nagrad, 13 drugih, 22 tretjih in 20 pohval.

Podeljene nagrade in pohvale:

Skupina A

I. nagrada:

Miha Erjavec, Gimnazija Ravne na Koroškem; Dušan Jan, Gimnazija Tolmin.

II. nagrada:

Gasper Fele-Žorž, Gimnazija Kranj; Marko Kežmah, II. gimnazija Maribor; Marko Štucin, Srednja šola Nova Gorica.

III. nagrada:

Andrej Eržen, Srednja elektro in strojna šola Kranj; Peter Gregorčič, Srednja šola Srečka Kosovega Sežana; Gregor Jerše, Gimnazija Kranj; Gorazd Karer, Srednja šola Nova Gorica; Nenad Kos, I. gimnazija Maribor.

Pohvala:

Aleš Slanič, II. gimnazija Maribor; Mateja Škrlec, Gimnazija Franca Miklošiča Ljutomer; Luka Strniša, Gimnazija Bežigrad Ljubljana; Robert Kulovec, Gimnazija Bežigrad Ljubljana; Igor Jaušovec, I. gimnazija Maribor; Jure Potočnik, Gimnazija Kranj.

Skupina B

I. nagrada:

Matej Horvat, II. Gimnazija Maribor; Matej Reberšek, SŠ za elektrotehniko in rač. Ljubljana; Martin Knapič, Gimnazija Šentvid Ljubljana.

II. nagrada:

Jernej Slanovec, Srednja šola Rudolfa Maistra Kamnik; Aleš Vodičar, Gimnazija Bežigrad Ljubljana; Matija Mazi, Gimnazija Bežigrad Ljubljana; Urban Bitenc, Škofijska klasična gimnazija Ljubljana; Marko Benje, Gimnazija in ekonomska SŠ Brežice.

III. nagrada:

Jurij Štalc, Gimnazija Bežigrad Ljubljana; Matija Gams, Gimnazija Bežigrad Ljubljana; Martin Zadnik, SŠ za elektrotehniko in rač. Ljubljana; Andrej Kocan, II. Gimnazija Maribor; Primož Šparl, Srednješolski center Ptuj; Matjaž Titan, Gimnazija Murska Sobota; Marko Obradović, Gimnazija in ekonomska SŠ Brežice; Tadej Starčič, Gimnazija Bežigrad Ljubljana.

Pohvala:

Miha Bartolič, Srednja šola Nova Gorica; Simon Rankel, Gimnazija Škofja Loka; Dejan Beznec, Gimnazija Murska Sobota.

Skupina C**I. nagrada:**

Boštjan Glažar, SŠ za elektrotehniko in rač. Ljubljana.

II. nagrada:

Gašper Tkačik, Gimnazija Bežigrad Ljubljana.

III. nagrada:

Miloš Jeftič, Gimnazija Bežigrad Ljubljana; Gorazd Bizjak, Gimnazija Bežigrad Ljubljana; Jan Szilagyi, Gimnazija Bežigrad Ljubljana; Jože Rihlarski, Srednja elektro in strojna šola Kranj; Aleksander Slemenšek, Srednja tehniška šola Celje; Rudolf Sušnik, Srednja elektro in strojna šola Kranj.

Pohvala:

Matej Marinč, Gimnazija Bežigrad Ljubljana; Matevž Klanjšek, Gimnazija Bežigrad Ljubljana; Rok Šabjan, Gimnazija Bežigrad Ljubljana; Primož Kajdič, Gimnazija Murska Sobota; Gregor Skok, Gimnazija in ekonomska šola Trbovlje; Dejan Kolarič, III. gimnazija Maribor.

Skupina D**I. nagrada:**

Andrija Lebar, Gimnazija Bežigrad Ljubljana; Klemen Žagar, Gimnazija Šentvid Ljubljana.

II. nagrada:

Vjekoslav Pavlinić, Gimnazija Bežigrad Ljubljana; Anže Slosar, Gimnazija Bežigrad Ljubljana; Igor Klep, Srednješolski center Ptuj; Miha Vuk, Gimnazija Bežigrad Ljubljana.

III. nagrada:

Samir El Shawish, Gimnazija Bežigrad Ljubljana; Peter Jeglič, Gimnazija Bežigrad Ljubljana; Emil Polajnar, Gimnazija Kranj.

Pohvala:

Matej Špindler, Gimnazija Bežigrad Ljubljana; Mario Medved, Gimnazija Bežigrad Ljubljana; Andrej Zorko, Gimnazija in ekonomska SŠ Brežice; Anita Prapotnik, II. gimnazija Maribor; Darko Škerl, Srednja tehniška in zdrav. šola Novo mesto.

Po izbirnem tekmovanju za olimpijsko ekipo so se na letošnjo XXVII. mednarodno olimpiado iz fizike, ki je potekala med 30. junijem in 7. julijem v Oslu, Norveška, uvrstili: Miha Vuk, Andrija Lebar, Peter Jeglič in Anže Slosar, vsi z Gimnazije Bežigrad Ljubljana, ter Klemen Žagar z Gimnazije Šentvid Ljubljana.

Ciril Dominko

PRESEK

list za mlade matematike, fizike, astronome in računalnikarje
24. letnik, šolsko leto 1996/97, številka 1, strani 1 – 64

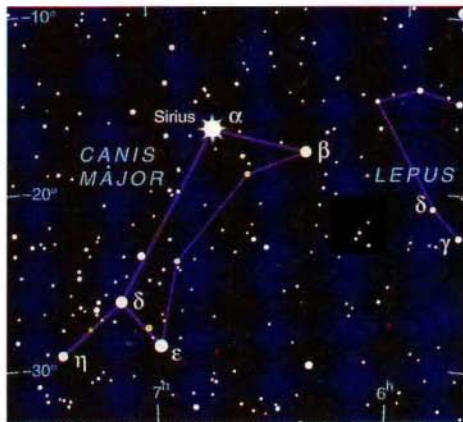
UREDNIŠKI ODBOR: Vladimir Batagelj, Tanja Bečan (jezikovni pregled), Dušica Boben (oblikovanje teksta), Vilko Domajnko, Roman Drnovšek (novice), Darjo Felda (tekmovanja), Bojan Golli, Marjan Hribar, Boštjan Jaklič (tehnični urednik), Martin Juvan (računalništvo), Sandi Klavžar, Boris Lavrič, Andrej Likar (fizika), Matija Lokar, Bojan Magajna (glavni urednik), Franci Oblak, Peter Petek, Marjan Prosén (astronomija), Marjan Smerke (svetovalec za fotografijo), Miha Štalec, Marija Vencelj (matematika, odgovorna urednica).

Dopisi in naročnine: Društvo matematikov, fizikov in astronomov Slovenije – Podružnica Ljubljana – Komisija za tisk, Presek, Jadranska c. 19, 1001 Ljubljana, p.p. 2964, tel. (061) 1232-460, št. ŽR 50106-678-47233. Naročnina za šolsko leto 1996/97 je za posamezne naročnike 1.500 SIT, za skupinska naročila šol 1.200 SIT, posamezna številka 300 SIT, za tujino 30.000 LIT, devizna nakazila SKB banka d.d. Ljubljana, val-27621-42961/9, Ajdovščina 4, Ljubljana.

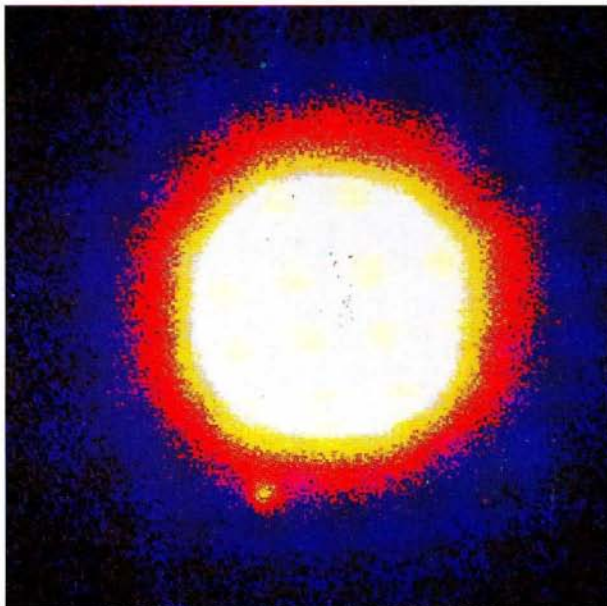
List sofinancirata MZT in MŠŠ
Ofset tisk DELO – Tiskarna, Ljubljana

Po mnenju MZT št. 415-52/92 z dne 5.2.1992 šteje revija med proizvode iz 13. točke tarife št. 3 zakona o prometnem davku, za katere se plačuje 5% davek od prometa proizvodov.

© 1996 Društvo matematikov, fizikov in astronomov Slovenije – 1284



Slika 1. Leva slika prikazuje ozvezdje Velikega psa (Canis Major) in del ozvezdja Zajca (Lepus). Področje med obema ozvezdjema, kjer leži rjava pritlikavka Gliese 229B, označuje črn kvadrateg. Na desni sliki je to področje povečano prikazano še enkrat.



Slika 2. Na posnetku, ki je bil narejen na observatoriju Palomar v ZDA, vidimo obe zvezdi iz dvojnega sistema, od katerih je ena rjava pritlikavka Gliese 229B. Posnetek so naredili tako, da so bleščavo svetle večje zvezde (z navidezno magnitudo 8) zastrli. Tako lahko na sliki razločimo rjavo pritlikavko spodaj pod večjo zvezdo.

