

ISSN 0351-6652

DRUŠTVO MATEMATIKOV, FIZIKOV IN ASTRONOMOV SLOVENIJE* 23(1995-1996)

6

**PRE
SEK**

list za mlade matematike, fizike, astronome in računalnikarje
23. letnik, leto 1995/96, številka 6, strani 321–384

VSEBINA

MATEMATIKA	Konstrukcija zaporedja $x^2, x^3, \dots$ (Matej Mencinger) 340-342
	Pozor, črne luknje! (M. Ecker, prev. in pir. D. Osredkar) 348-351
FIZIKA	Fizika letenja (Andrej Likar) 330-334
ASTRONOMIJA	Kaj bo videl komet Hyakutake, ki bo naslednjič prišel naokoli? (Mirjam Galičič) 326-329
	Mlečni voz (Marijan Prosén) 344-346
	Aprilskega Luninega mrka nismo videli (Gregor Bavdek in Klemen Bučar) 354-355
RAČUNALNIŠTVO	O koledarju, petkih in številu 13 (Martin Juvan) ... 334-337
NOVICE	René Descartes – Ob štiristoletnici rojstva velikega misleca in matematika (Marija Vencelj) 321-325
	Dve sporočili (Iz uredništva) 329
	Vodikovi antiatomi (Janez Strnad) 358-360
NALOGE	Praštevilska – reš. str. 365 (Boris Lavrič) 325
	Magično množenje celih števil za mlajše bralce – reš. str. 365 (Marija Vencelj) 333
	Naraščajoča in padajoča četa števk – reš. str. 364 (Marija Vencelj) 338
	Še enkrat sam sebe – reš. str. 367 (Martin Juvan, Matjaž Zaveršnik) 338
	Trikotniška števila in popolni kvadrati – reš. str. 366 (Ivan Lisac) 342
	Milni mehurčki na snegu (Alojz Kodre) III
REŠITVE NALOG	Konstrukcija brez uporabe podobnosti – s str. 269 (Dušan Modic) 347
	Križanka "Fiziki" – s str. 288 (Marko Bokalič) 361
	Nekaj zavitih za odvijanje – s str. 298 (Martin Juvan) 362-364
ZANIMIVOSTI	Živi poletni termometri (Marija Vencelj) 343
RAZVEDRILO	Križanka "Ob 400-letnici rojstva velikega misleca" – reš. str. 368 (Marko Bokalič) 352-353
	Veriga – reš. str. 369 (Vilko Domajnko) 355-357
PISMA BRALCEV	Nemogoči predmet za zdrave oči nikakor ni mogoč (Zvonimir Devidé) 337-338
	Pravili za deljivost s številoma 7 in 13 (Dušan Jan, Marija Vencelj) 360-361
NOVE KNJIGE	Omladič M. in Omladič V., Matematika in denar (Zvonimir Bohte) 339
	Bohte Z., Uvod v numerične metode (Bor Plestenjak) .. 351
TEKMOVANJA	17. mednarodno matematično tekmovanje mest – pomladanski krog (Matjaž Željko) 372-374
	17. mednarodno matematično tekmovanje mest – jesenski krog – rešitve s str. 318 (Matjaž Željko) 374-379
LETNO KAZALO	 380-384
NA OVITKU	Komet Hyakutake, posnet s CCD kamero 28. marca na Ob- servatoriju Črni vrh nad Idrijo (foto Herman Mikuž) I
	Dve fotografiji: kometa Hyakutake, ki smo ga videli, in Lu- ninega mrka, ki ga nismo videli. Glej tudi prispevka na stra- neh 326 in 354 IV

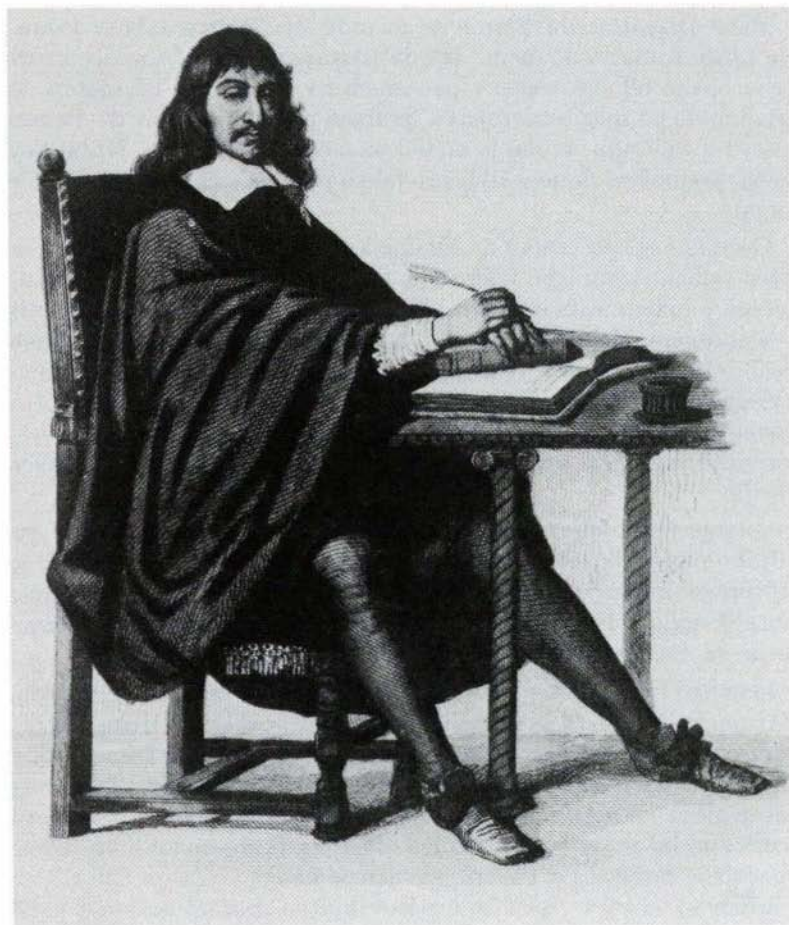
RENÉ DESCARTES

Ob štiristoletnici rojstva velikega misleca in matematika

Cogito, ergo sum.

Mislim, torej sem.

René Descartes



René Descartes, z latinskim imenom Cartesio, je bolj znan kot filozof in manj kot matematik, čeprav gre njegovi filozofiji oporekati in so ji tudi oporekali, njegova matematika pa je popolna in korektna.

Čas, v katerem je živel, je bil čas velikih verskih in političnih sprememb v Evropi. Po drugi strani pa je bilo to tudi eno največjih intelektualnih obdobij v zgodovini civilizacije: Fermat in Pascal sta bila Descartesova matematična sodobnika. Shakespeare je umrl, ko je bilo Descartesu dvajset let. Descartes je za osem let preživel Galilea in umrl, ko je bilo Newtonu osem let. V njegovem času sta živela tudi Gilbert, začetnik vede o elektromagnetizmu, in Harvey, ki je odkril krvni obtok.

René Descartes du Perron se je rodil 31. marca 1596 v kraju La Haye blizu Toursa v Franciji. Izhaja iz stare ugledne francoske družine. Njegov oče je bil svetovalec v parlamentu v Bretaniji. Po materi, ki je umrla kmalu po njegovem rojstvu, je René podedoval naziv du Perron in posestvo v Poitouju, ki mu je nudilo finančno neodvisnost. Ni bil bogat, a dovolj premožen, da je v življenju lahko počel stvari, ki so ga veselile in zanimale.

Osemletnega so poslali na šolanje k jezuitom v La Flèche, kjer je bil deležen odlične izobrazbe v filozofiji, latinščini, grščini in govorništvu ter moderne v matematiki in fiziki, vključujoč Galileova astronomska odkritja. Slabotnemu dečku so dovolili, da je ostajal zjutraj v postelji, dokler je želel. Razmišljanja v tistih dolgih mirnih jutranjih urah so bila zametki njegovih dognanj v filozofiji in matematiki. Navado, da je ostajal v postelji, kadar je želel razmišljati, je Descartes ohranil vse življenje. Za to razkošje je bil, žal s tragičnimi posledicami, prikrajšan šele ob koncu življenja.

Šolanje je nadaljeval v Poitiersu. Diplomiral je iz prava, ki ga je študiral brez posebnega navdušenja. Nato je, osemnajstleten, sklenil spoznati 'pravo' življenje iz prve roke. Sledilo je krajše obdobje veseljačenja in hazardiranja v Parizu, nakar se je, sit praznoglave družbe in jalovega početja, za dve leti zakopal v matematične raziskave.

Leta 1617 se je kot plemič odločil za vojaško kariero. V vojskujoči se Evropi je bilo za to obilo priložnosti. Služboval je v Holandiji in na Bavarskem, se leta 1620 udeležil velike bitke za Prago in kasneje sodeloval na francoski strani pri slavnem obleganju La Rochelle. Tam je tudi srečal svojega kasnejšega pokrovitelja kardinala Richelieua. Vendar pa Descartes ni bil pravi poklicni vojak. Med kratkimi obdobji vojskovanja je neodvisno potoval po Evropi, se 'učil iz knjige sveta' in užival v svetovljanskem življenju. Na svojih potovanjih je spoznal nekatere vodilne učenjake tistega časa, na primer Faulhaberja v Nemčiji in Desarguesa v Franciji. Ni pa mu uspelo, da bi na svojem potovanju v Italijo srečal Galilea. V Parizu se je Descartes udeleževal srečanj kroga znanstvenikov, ki so kritično razpravljali o Aristotelovi filozofski šoli. Tu je našel vzpodbudo,

da je predstavil svoj novi neavtoritativni pogled na svet. S tem je kot prvi kritični in sistematični mislec nove dobe postal 'oče moderne filozofije'.

Od vojske se je dokončno poslovil leta 1628. Zapustil je Francijo in se naselil na Nizozemskem, kjer naj bi bil varnejši pred morebitnim verskim preganjanjem, kot v domovini. Tam je preživel naslednjih dvajset let. To so bila njegova naplodovitejša leta.

Leta 1649 je sprejel povabilo švedske kraljice Kristine, naj pride v Stockholm, da bi jo poučeval v filozofiji in osnoval v Stockholmu akademijo znanosti. Descartes ni bil nikoli prav trdnega zdravja. Ostra skandinavska zima in špartanske navade mlade kraljice (za filozofska razpravljanja se ji je zdel primeren čas peta ura zjutraj v nezakurjeni knjižnici na dvoru, kamor se je moral Descartes še pripeljati iz mesta) so bile zanj prehud napor. Že prvo zimo je zbolel za pljučnico in umrl 11. februarja leta 1650.

- - -

Najbolj znano Descartesovo delo je *Discours de la méthode pour bien conduire sa raison et chercher la vérité dans les sciences* (Razprava o metodi za boljše vodenje razuma in iskanja resnice v znanosti). Delo je izšlo leta 1637, potem ko so Descartesovi prijatelji zlomili filozofovo vztrajanje, da ne bo objavljaj svojih del. Ko je namreč leta 1634 zvedel, v kakšno ponižanje je inkvizicija prisilila Galilea, je iz previdnosti ustavil tiskanje svojih fizikalnih razmišljanj o svetu z naslovom *Le monde, ou Traité de la lumière* (Svet ali Razprava o svetlobi) in to svojo odločitev razširil tudi na druga dela.

Razprava o metodi je temelj nove evropske filozofije. Descartes gradi na dveh osnovnih idejah. Prvič: če naj odkrije neko znanstveno resnico, se mora zanesti le na svoj zdravi razum in vso pot do resnice izpeljati sam. Drugič: načrtno mora dvomiti o vsem, kar je učila tedanja filozofija; sprejeti le jasne in tako očitne sklepe, da o njih ni mogoče dvomiti, in na njih ponovno zgraditi vso znanost.

Te ideje so bile prava revolucija v mišljenju in filozofiji tistega časa. Odziv na uspeh in popularnost novega antiavtoritativnega pogleda na svet je bil različen. Cerkev, ki se je je Descartes bal, čeprav ga ni nikoli preganjala, mu je priskočila na pomoč. Kardinal Richelieu je dal Descartesu dovoljenje, da sme tiskati v Franciji ali kje drugje, karkoli bo napisal. Nasprotno pa so ga v liberalni Holandiji protestantski teologi obsodili bogoskrunstva in ateizma.

Razpravi o metodi je Descartes priključil tri dodatke, s katerimi je želel ilustrirati svojo splošno metodo filozofije znanosti. To so Geometrija (*La géométrie*), Veda o lomu svetlobe (*La dioptrique*) in Pojavi

v zraku (*Les Météores*). Z znanstvenega vidika najpomembnejše delo je Geometrija. V njej so postavljeni temelji analitične geometrije. Uveden je koordinatni sistem, izvedena povezava geometrije z algebro. Descartes pokaže, kako lahko nekatere krivulje, na primer stožnice, predstavimo z enačbami, ki povezujejo koordinate točk na teh krivuljah. S tem prevedemo slabo pregledne probleme, ki so prej zahtevali veliko matematične iznajdljivosti, k rutinskemu reševanju.

Čeprav delo najpogosteje opisujejo kot uvedbo uporabe algebre v geometriji, bi ga lahko označili tudi kot način prevedbe algebrائيh operacij v geometrijski jezik. O tem pričata tudi naslova prvih dveh razdelkov: *Kako je aritmetično računanje povezano z geometrijskimi operacijami?* in *Kako lahko produkt, kvocient in kvadratni koren predstavimo geometrijsko?*

Geometrija je najzgodnejši matematični tekst nasploh, ki mu tudi dandanes lahko sledimo, ne da bi naleteli na težave z oznakami. Descartes uporablja črke z začetka abecede za parametre, tiste s konca abecede za neznanke. Nadalje uporablja eksponente pri označevanju potenc in nemška simbola $+$ in $-$ za seštevanje in odštevanje. Edino znak za enačaja je drugačen od današnjega.

Težko bi na kratko opisali pomen Geometrije za razvoj matematike. Namesto tega navedimo misel francoskega matematika Lagrangea, ki je živel poldrugo stoletje za svojim velikim rojakom:

Dokler sta se algebra in geometrija razvijali po ločenih poteh, je bil njun napredek počasen in njuna uporaba omejena. Ko pa sta se ti vedi združili, sta druga od druge prešli sveže vitalnosti. Odtlej stopata s hitrimi koraki popolnosti naproti.

Žal moramo z vidika matematike ugotoviti tudi tole: Po matematičnih sposobnostih je bil morda Descartes najgenialnejši mislec svoje dobe, toda po srcu ni bil pravi matematik. Njegovo ukvarjanje z geometrijo je le epizoda v življenju, posvečenem filozofiji znanosti. Če ne štejemo pisem, v katerih je svojim sodobnikom priložnostno pisal tudi o svojem delu v matematiki, ni na matematičnem področju zapustil poleg Geometrije nobenega drugega velikega dela.

— — —

Kot kažeta že naslova drugih dveh dodatkov k Razpravi o metodi, se Descartes ni posvečal samo matematiki in filozofiji. Ko je živel na Nizozemskem, se je ukvarjal z domala vsemi naravoslovnimi vedami. Zanimala ga je kemija; v fiziki predvsem optika in magnetizem; v medicini anatomija in embriologija; veliko časa je posvetil astronomskim opazovanjem in

meteorologiji. Dandanes bi vsakdo, ki bi trošil svoje moči in čas na tako različnih področjih, veljal za zmedenega šušmarja. V Descartesovem času pa je talentirani posameznik še lahko našel kaj nerazloženega in vredno razmišljanja v vsaki znanstveni veji, ki je pritegnila njegovo pozornost.

Navedimo posebej nekaj Descartesovih fizikalnih dosežkov:

Skupaj s Snellom velja za odkritelja lomnega zakona; prvi je razložil pojav primarne in sekundarne mavrice kot posledice loma in notranjega odboja sončnega žarka na okrogli dežni kapljici.

Ukvarjal se je z nihanjem strune. S poskusi je potrdil svojo domnevo o teži zraka. Odklanjal je Galilejeva zakona o prostem padu in nihanju nihala, ker sta opisovala pojava v brezračnem prostoru. Descartesov idealni svet je bil realni svet, v katerem vakuum ni imel mesta. Povsem upravičeno pa je s tem v zvezi kritiziral Galilejev izračun poti topovske krogle, ker v njem ni bil upoštevan zračni upor.

René Descartes je začetnik mehaničnega pogleda na svet. Zamislil si je univerzalni mehanični model, ki naj bi razložil dogajanje okrog nas. Predpostavljal je, da svet sestavlja zgoščena (povezana) snov, ki se ne prestando vrtinči. Vse pojave v njej je razlagal z mehanskimi vplivi med neposredno sodelujočimi telesi; ta naj bi medsebojno učinkovala le s prenosom gibanja. Njegova ideja je skoraj stoletje uživala veliko popularnost (kot del gibanja, imenovanega kartezijanstvo), nato pa se je nujno morala umakniti Newtonovim z matematiko podkrepljenim razlagam. Ironično je prav Descartesova matematika veliko prispevala k porazu te njegove ideje.

Več uspehov je Descartes želel v statiki. V enem njegovih pisem najdemo opis petih preprostih strojev za dvigovanje težkih tovorov, v njegovih zgodnjih spominih jasno razlaga pojava vezne posode.

Marija Vencelj

PRAŠTEVILSKA

Dokaži, da vsota kvadratov 1996 različnih praštevil ni kvadrat praštevila, in poišči najmanjše praštevilo p , ki ga lahko zapišemo v obliki

$$p^2 = p_1^2 + p_2^2 + \dots + p_{1996}^2,$$

kjer so $p_1, p_2, \dots, p_{1996}$ praštevila.

Boris Lavrič

KAJ BO VIDEL KOMET HYAKUTAKE, KO BO NASLEDNJIČ PRIŠEL NAOKOLI?

Letošnjo zgodnjo pomlad nas je prijetno presenetil komet Hyakutake. Konec januarja letos ga je v ozvezdju Vodne kače z daljnogledom odkril japonski ljubiteljski astronom Yuji Hyakutake. Kot je v navadi, je komet dobil ime po svojem odkritelju. Tedaj je bil komet še precej temen objekt, saj je imel magnitudo 10. Za primerjavo: s prostim očesom vidimo zvezde do 6. magnitude, najsvetlejša zvezda, Sirij v ozvezdju Velikega psa (Canis Major), pa ima navidezni vizualni sij magnitude -1.5.

Komet se je 25. marca najbolj približal Zemlji. Od nje je bil oddaljen le približno desetinko astronomske enote (oddaljenosti Zemlje od Sonca), v kilometrih je to 15 milijonov km. Po nekaterih ne preveč uspešnih napovedih o svetlosti in velikosti kometov v preteklosti, so astronomi zdaj previdnejši. Napovedali so sicer, da utegne biti komet Hyakutake zaradi svoje bližine Zemlji zelo svetel, vendar nas je prijetno presenetil. To je bil najsvetlejši komet v zadnjih dvajsetih letih!

Vreme v drugi polovici marca opazovalcem v naših krajih ni bilo preveč naklonjeno. Zaradi popolne oblačnosti je moralo Astronomsko društvo Javornik javno opazovanje, napovedano za soboto, 23. marca, preložiti na naslednji dan. Tudi v nedeljo so se oblaki vztrajno zadrževali na nočnem nebu, vendar so bili opazovalci vztrajnejši. Približno sredi noči se je pokazalo jasno nebo, na njem pa čudovit prizor: sam komet je bil svetel, imel je magnitudo okrog 0, tanka sled njegovega repa, jasno razdeljenega v plinasti in prašni del, pa se je raztezala čez tretjino nebesnega svoda! V naslednjih nočeh, ki so bile povečini oblačne, je komet počasi bledel, njegov rep pa je postajal vse krajši. Konec meseca je bil na severozahodnem nebu, pod Severnico, tako da ga je bilo prav lahko najti. Žal pa se je prav v teh dneh začela Luna "debeliti" in je ostajala vsak dan dlje na nočnem nebu. V noči z 28. na 29. marec smo tako s Toškega čela videli le še kakih 20 ločnih stopinj dolg plinasti rep, komet pa je bledel in je imel le še magnitudo okrog 1. Vsem, ki ste zamudili gledanje kometa v živo in ki imate dostop do Interneta, priporočam ogled posnetkov, ki jih je s CCD kamero posnel Herman Mikuž z AGO Golovec, in fotografij, ki sta jih posnela Herman Mikuž in Bojan Kambič (glej tudi slike na ovitku). Ustrezni naslov je <http://www.fiz.uni-lj.si/herman/hyakutak.html>, na zapisanih straneh pa boste našli tudi kazalce na druge, mednarodne strani o kometih. Tudi naslednjo sliko sta s širokokotno kamero posnela omenjena avtorja, in sicer v Slovenskih goricah 27. marca 1996 okrog 3^h zjutraj. Na sliki lahko na desnem robu prepoznamo Severnico.



Za opazovalce s severne polute je bil v aprilu Hyakutake viden vedno krajši čas. Ker se je oddaljeval od Zemlje, je njegov navidezni sij upadal. Komet je bil vedno nižje na severozahodnem nebu, dokler ni po 20. aprilu izginil v večerni zarji. Odtlej so ga lahko opazovali le še opazovalci na južni poluti. Pri nas naj bi bila ena zadnjih, za opazovanje še posebej primernih, priložnosti v noči s 3. na 4. april, med popolnim Luninim mrkom. Na žalost je opazovanje, tako komet kot Luninega mrka, preprečilo slabo vreme.

Najbližje Soncu je bil komet 1. maja, ko je bil od Sonca oddaljen 0.23 astronomske enote. Nato je nadaljeval svojo dolgo pot v temne in hladne predele Osončja. Dosedanja opazovanja kažejo, da je njegova pot okrog Sonca zares dolga, saj naj bi se vrnil šele čez dolgih 20000 let. To pomeni, da se bo od Sonca močno oddaljil, približno 18-krat bolj stran bo, kot je od Sonca oddaljen zadnji planet Sončnega sistema, Pluton. Če bo Hyakutake preživel to dolgo dobo, bo ob povratku na Zemlji zagotovo videl stvari, o katerih danes še sanjamo ne!

Poglejmo še nekaj profesionalnih opazovanj komet. Z ameriškega inštituta JPL (Jet Propulsion Laboratories) so proti kometu poslali radarski signal. Po 107 sekundah so sprejeli odmev na kometu odbitega radarskega pulza. Z njim so otipali kometovo jedro ter velikost in hitrost delcev v okolici jedra. Poleg tega so na ta način zelo natančno izmerili kometovo lego, kar je pripomoglo k boljši določitvi kometove orbite. Komet so posneli tudi s Hubblovim vesoljskim teleskopom. Z dobljenih slik

poskušajo natančneje določiti velikost in strukturo jedra. Še posebej zanimiva so opažanja francoskih astronomov z observatorija Pic du Midi. Opazili so namreč, da so se od jedra kometa ločili posamezni fragmenti. Vendar ne gre za pravi razpad kometa v dva večja dela, kot so novico objavili nekateri mediji, ampak so odlomljeni fragmenti bistveno manjši od jedra. Fragmentacijo so potrdila tudi opazovanja s Hubblovim vesoljskim teleskopom ter z italijanskim infrardečim teleskopom.

Za konec povejmo še nekaj besed o kometih in o našem astronomskem razumevanju teh objektov, ki so v zgodovino človeštva zanesli nemalo skrbi in hudih strahov.

V preteklosti, ko so tedanja ljudstva o naravi vedela precej manj, kot vemo danes, so nenadni pojavi na sicer nespremenljivem nebu, po katerem sta Sonce in Luna pravilno potovala vsak dan in vsak mesec znova in znova, pomenili hudo vznemirjenje. Prihod svetlega kometa, ki ni bil ponovljiv (praviloma vsaj za človeškega življenja ne), pa tudi sicer je bil komet drugačen od običajnih nebesnih luči – zvezd, so zato največkrat razumeli kot znamenje, raje česa slabega kot česa dobrega.

Danes vemo, da se nam kometov ni preveč bati. Posnetih je bilo že veliko spektrov kometov, zato vemo, iz česa so sestavljeni. Poenostavljeno si jih lahko predstavljamo kot umazane kepe ledu, ki so mu v manjših količinah primešane kovine, npr. natrij, železo itd. Njihovo vidno podobo, torej tisto, kar opazimo, ko gledamo komet na nebu, pa opišemo takole: jedro, glava in rep. Jedro kometa je omenjena umazana ledena kepa, torej samo telo kometa. Glava in rep se pojavita šele, ko se komet dovolj približa Soncu. Glava obdaja jedro kometa, sestavljajo jo prašni delci. Ravno zaradi glave vidimo komet nekako difuznega, "razpacanega" v primerjavi z zvezdami, in večjega. Tako ga ni težko ločiti od zvezd, če je le dovolj svetel. V repu so prašni in plinasti delci. Zaradi bližine Sonca in s tem povezane visoke temperature namreč delci in molekule iz kometove kepe izparevajo. Tako se v periheliju, ko je komet najbližje Soncu, lahko segreje tudi na tisoč in več stopinj Celzija. Prašni rep je krajši od plinastega in zakrivljen, saj so delci, ki ga tvorijo, težji in zato zaostajajo. Rep je obrnjen stran od Sonca, kar je najbrž posledica sončnega vetra, ki "piha" stran od Sonca. Ko se komet od Sonca zadosti oddalji, njegov rep izgine.

Kometi so del našega Osončja, torej ne prihajajo iz bolj oddaljenih predelov Galaksije ali celo iz medgalaktičnega prostora. Njihov nastanek še ni povsem raziskan. Nekateri se strinjajo z nemškim astronomom Oortom, ki meni, da je daleč stran od Sonca, onkraj planetov, velik oblak kometov, pravimo mu Oortov oblak, od koder včasih kakšen komet pobegne v notranjost Osončja.

Komete ločimo glede na velikost njihove orbite oziroma glede na obhodni čas, po katerem se vračajo. Nekateri prihajajo naokrog vsakih nekaj let, drugi pa na dolga tisočletja. Včasih kakega komet, ki ga pričakujemo, ni več na spregled. To je povezano z dvojim: Komet v bližini Sonca vsakokrat izpareva in ga je zato vedno manj. Včasih pa komet zmotijo gravitacijske sile objektov, mimo katerih potuje. Tako se lahko zgodi, da se komet raztrešči. Razbitine se nato lahko še naprej gibljejo po precej podobni tirnici, po kakršni se je pred tem gibal komet. Možno je, da je razbitje kometa povezano z nastankom meteorskega roja.

Kometi so torej predstavniki našega Sončnega sistema. Za astronome so sicer zanimivi, saj se z njihovim preučevanjem zagotovo lahko naučimo kaj o sestavi in morda celo o nastanku Osončja, ne predstavljajo pa velikih skrivnosti astronomije. S svojimi vznemirljivimi pojavitvami so lahko marsikomu zanimiv povod za sprehod v naravo in njihovo občudovanje na nočnem nebu.

Čez približno eno leto pričakujemo še en svetel komet po imenu Hale-Bopp.

Mirjam Galičič

DVE SPOROČILI

Naročnikom

Vse Presekove bralce, ki končujejo redno šolanje ali iz kakšnega drugega razloga ne bodo imeli priložnosti, da se priključijo skupinskemu naročilu na našo revijo, vabimo, da se nanjo **naročijo osebno**. To svojo željo (s polnim naslovom, na katerega želijo prejemati Presek) naj sporočijo na naslov: **Komisija za tisk DMFAS, Jadranska 19, 1001 Ljubljana, p.p. 2964** ali po telefonu (061) 1232-460.

Avtorjem

Avtorje, ki svoje prispevke pišejo z računalnikom, prosimo, da **po možnosti** pripravijo datoteke v $\text{T}_{\text{E}}\text{X}$ u ali $\text{IAT}_{\text{E}}\text{X}$ u, oziroma tudi v ASCII formatu, če v tekstu ni veliko formul. Ker Presek stavimo v $\text{T}_{\text{E}}\text{X}$ u, bi nam s tem zelo olajšali delo.

Seveda je to le prošnja tistim, ki to možnost imajo, so pa še vedno dobrodošli vsi prispevki, ne glede na format, v katerem so pripravljeni.

Iz uredništva

FIZIKA LETENJA

Let ptic gledamo z občudovanjem in zavistjo. Kaj bi morali narediti, da bi tudi sami lahko leteli? Na misel nam pridejo umetna krila, morda taka, ki sta jih v pravljici uporabila Dedal in Ikar. Kljub mnogim poskusom pa se tako še nikomur ni posrečilo dvigniti v zrak. S padali in zmaji jadrajo izurjeni letalci v doline, z vzgonskim vetrom se lahko tudi dvigajo. Z zelo lahkim letalom se je celo posrečil let preko Rokavskega preliva in to le z lastno močjo letalca. Kaže, da tako kot ptice človek ne more leteti.

Kaj pravi o letenju fizika? Omejili se bomo na lebdenje v zraku, ki ga je v približku lahko obravnavati. O lebdenju je Presek že pisal v sestavku Čebela na paši (Presek 20 (1992/1993), str. 322 - 324). Na kratko ponovimo tamkajšnje razmišljanje.

- - -

Pri lebdenju mora ptica s krili ustvariti curek zraka s hitrostjo v navzdol, nasprotna sila zraka na krila pa pri tem uravnovesi njeno težo. Silo izračunamo iz enačbe

$$F = \rho S v^2.$$

Tu je S presek curka, ρ gostota zraka, v pa hitrost zraka v curku. Sila je pri lebdenju enaka teži ptice mg

$$F = mg,$$

kjer smo z m označili maso ptice, g pa je pospešek prostega pada. Za hitrost zraka v curku dobimo

$$v = \sqrt{\frac{mg}{\rho S}}.$$

Mehanično moč, potrebno za lebdenje, dobimo tako, da izračunamo spremembo kinetične energije zraka v curku v danem času t . Zrak najprej miruje, na koncu pa se giblje s hitrostjo v . Kinetična energija zraka z maso m_z se torej spremeni za

$$\Delta W_{kin} = m_z \frac{v^2}{2}.$$

Maso zraka m_z dobimo tako, da pomnožimo prostornino zraka, ki jo je ptica v času t potisnila navzdol, z gostoto zraka ϱ

$$m_z = Svt\varrho.$$

Tako je

$$\Delta W_{kin} = Svt\varrho \frac{v^2}{2}$$

in iz tega mehanična moč $P = \frac{\Delta W_{kin}}{t}$:

$$P = \frac{1}{2}S\varrho v^3.$$

- - -

Človek lahko kratek čas dela z mehanično močjo 1 kW. Za ptice dobro velja ocena, da je mehanična moč sorazmerna z njihovo maso m , in sicer bomo privzeli:

$$P^* = \frac{P}{m} = 10 \text{ Wkg}^{-1}.$$

Količino P^* imenujemo specifična moč. Tako bomo človeka in ptice obravnavali hkrati. Pri dolgotrajnejšem delu je mehanična moč, ki jo zmore človek, manjša. Športnik z maso 80 kg zmore moč 300 W, če dela eno uro, pri celodnevem naporu pa pade moč pod 100 W.

V enačbo, ki povezuje moč P in hitrost v , vstavimo hitrost, ki omogoča lebdenje, $v = \sqrt{\frac{mg}{\varrho S}}$ in dobimo:

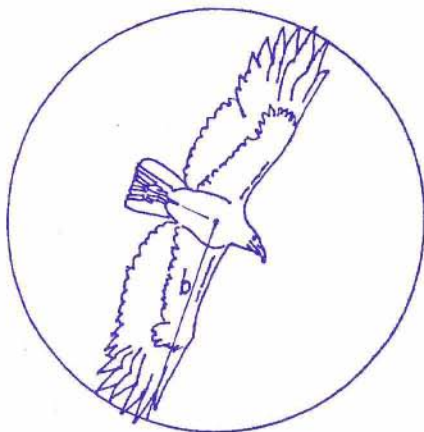
$$\frac{m}{S} = \frac{4P^{*2}\varrho}{g^3}.$$

Količino $\frac{m}{S}$ imenujemo specifična obremenitev kril. S privzeto vrednostjo za P^* velja:

$$\frac{m}{S} = 0,5 \text{ kgm}^{-2}.$$

V naslednji preglednici lahko vidimo nekaj izmerjenih vrednosti za specifično obremenitev kril. Presek curka S so izračunali po enačbi za ploščino kroga s polmerom, ki je enak dolžini krila b : $S = \pi b^2$ (glej sliko 1).

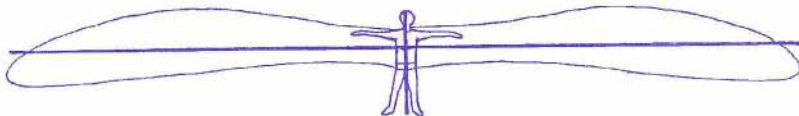
žival	$\frac{m}{S} [\text{kgm}^{-2}]$
netopir	0,15
čigra	0,21
kraljiček	0,43
kolibri	0,46
postovka	0,56
čmrlj	0,92
golob	1,0
divja raca	1,7
fazan	2,9



Slika 1. Presek zračnega curka je kar ploščina kroga, ki ima polmer z dolžino krila b .

Naš račun kar dobro oceni razmerje m/S . Rekord je fazan, ki kar 6 krat presega oceno. V izrazu za m/S nastopa kvadrat P^* . Vse kaže, da lahko nekatere vrste ptic za nekaj sekund razvijejo tudi več kot dvojno specifično moč od privzete 10 W/kg . Če prestrašimo fazana, se dvigne navpično v zrak s hitrostjo blizu 1 m/s , kar terja še dodatno moč. Vemo pa, da fazan ne more lebdeti dlje časa. Človek z maso 80 kg bi za lebdenje potreboval krila, ki bi ustvarila curek zraka s presekom 160 m^2 . Orjaška krila bi morala biti trdna in brez teže. Dolžino b enega krila izračunamo iz enačbe $\pi b^2 = 160 \text{ m}^2$ in dobimo $b = 7 \text{ m}$. Razpon kril, to je razdalja od konca enega krila do konca drugega je torej kar 14 m .

V primeri s pticami ali žuželkami bi bil obris letalca nesorazmeren (glej sliko 2). Krilo ptic je tako dolgo kot njihovo telo, pri letalcu pa je



Slika 2. Ptica in letalec nista sorazmerna, če pri obeh privzamemo enako specifično moč $P^* = 10 \text{ Wkg}^{-1}$.

to razmerje 1:4. Ker je velikost krila b obratno sorazmerna s specifično močjo, bi moral letalec, ki bi bil sorazmeren pticam, razviti 4 krat večjo moč od privzete, to je 4 kW. Te pa ne zmorejo niti najbolj trenirani športniki.

Ni verjetno, da bi kmalu izdelali krila takšnih razsežnosti. Lebdenje tudi ne bi bilo udobno, saj delati z močjo blizu 1 kW ni prijetno. Kril ne bi mogli pritrditi le na roke, ker z njimi takšne moči ne bi mogli razviti. Imeti bi morali nerodno napravo, ki bi jo nekako poganjali z rokami in nogami, neke vrste helikopter brez motorja. Poleg vseh nevšečnosti ne smemo pozabiti na nevarnosti, ki bi nam pretile v zraku, na primer na nevarne vrtnice in veter.

Andrej Likar

MAGIČNO MNOŽENJE CELIH ŠTEVIL ZA MLAJŠE BRALCE

- Položimo žeton (ali kaj podobnega) na poljubno število v spodnjem številskem kvadratu. Nato položimo drugi žeton na število, ki ni v isti vrsti ali v istem stolpcu kot prvi žeton. Tretji žeton položimo tako, da ne bo v isti vrsti in ne v istem stolpcu kot prvi ali drugi žeton.

12	3	-15
-24	-6	30
8	2	-10

- Poglejmo pod žetone in izračunajmo produkt prekritih števil.
- Postopek ponovimo, tako da začnemo s pokrivanjem drugje kot prvič.

Vprašanja:

1. Koliko različnih pokrivanj je možnih?
2. Kakšne produkte dobimo pri različnih pokrivanjih?
3. In še nekoliko težje vprašanje: Kje je razlog, da je odgovor na drugo vprašanje takšen, kot je?

Marija Vencelj

O KOLEDARJU, PETKIH IN ŠTEVILU 13

Petek, trinajstega. Saj veste, dan, ki ga je najbolje preležati v postelji. Pa še tam ne moremo biti povsem prepričani, da nas ne bo doletela nesreča. Se vam ne zdi, da je trinajsti v mesecu kar preveč pogosto petek? Da? Tudi mene že dolgo preganja ta občutek. Zato sem se odločil, da bom zadevo znanstveno raziskal.

Začnimo z opisom koledarja, ki velja v naših krajih. Gre za gregorijanski koledar, ki ga je leta 1582 v katoliških deželah vpeljal papež Gregor XIII. Danes ga uporabljajo v večini držav sveta. Po tem koledarju se leta delijo na običajna in prestopna. Vsako leto ima dvanajst mesecev. Meseči imajo po 30 ali 31 dni, izjema je le februar, ki ima v običajnih letih 28, v prestopnih pa 29 dni. Praviloma je leto, ki je deljivo s 4, prestopno. Izjema so le leta, ki so deljiva s 100, a ne s 400. Ta niso prestopna. Tako leta 1700, 1800 in 1900 niso bila prestopna, leto 2000 pa bo prestopno. Običajna leta imajo 365, prestopna pa 366 dni.

Vsi vemo, da je vsak sedmi dan petek. Med 400 zaporednimi leti je 97 prestopnih. Zato ima štiristoletno obdobje $400 \cdot 365 + 97 = 146097$ dni. To število pa je deljivo s 7, zato se naš koledar skupaj z dnevi, ob katerih nastopijo posamezni datumi, ponavlja s periodo 400 let.

Našo analizo lahko torej omejimo na obdobje 400 let. Prešteli bomo, kolikokrat v tem obdobju pride trinajsti v mesecu na posamezni dan v tednu. Seveda lahko to štetje opravimo s svinčnikom in papirjem, ampak z uporabo računalnika bo preprosteje, hitreje in bolj zanesljivo. Poznati moramo le Zellerjev obrazec, ki nam pove, na kateri dan v tednu pride izbrani datum. Nato za vseh $12 \cdot 400 = 4800$ trinajstih dni v mesecih izračunamo, na kateri dan v tednu nastopijo, seštejemo rezultate in že imamo odgovor.

Opišimo najprej, kako uporabljamo Zellerjev obrazec. Recimo, da nas zanima, kateri dan v tednu je izbrani datum $dd.mm.ll$, na primer 1. 3. 1996, pri čemer je dd dan, mm mesec in ll leto. Postavimo $d = dd$ ter $m = mm - 2$, če je $mm > 2$, in $m = mm + 10$ sicer. V zadnjem primeru tudi zmanjšamo ll za 1. Naj bo še $l = ll \bmod 100$ število, ki ga pomenita zadnji številki leta, in $s = ll \div 100$ število, ki ga dasta prvi dve številki leta, torej za 1 zmanjšano stoletje, v katerem leži izbrano leto. Nato izračunamo

$$obr = d + (13 \cdot m - 1) \div 5 + (5 \cdot l) \div 4 + (21 \cdot s) \div 4$$

in

$$dan = obr \bmod 7$$

ter ugotovimo, za kateri dan v tednu gre. Pri tem $dan = 0$ pomeni nedeljo, $dan = 1$ ponedeljek, ... in nazadnje $dan = 6$ soboto. Za naš poskusni datum 1. 3. 1996 imamo $d = 1$, $m = 1$, $l = 96$ in $s = 19$. Vstavimo v obrazec:

$$\begin{aligned} obr &= 1 + (13 \cdot 1 - 1) \text{ div } 5 + (5 \cdot 96) \text{ div } 4 + (21 \cdot 19) \text{ div } 4 \\ &= 1 + 2 + 120 + 99 = 222 \end{aligned}$$

in zatem še

$$dan = 5.$$

Prvega marca naj bi bil torej petek. Pogled na koledar in res, bil je petek!

Naslednji odstavek je nekoliko bolj zapleten in je namenjen tistim, ki jih moje zagotovilo o pravilnosti Zellerjevega obrazca ni povsem prepričalo. Ostali ga lahko brez škode preskočite.

Znanstveni pristop zahteva, da vse uporabljene prijeme natančno utemeljimo. Zato si oglejmo nekaj razlogov, zakaj Zellerjev obrazec vrne pravi dan v tednu. Takoj opazimo, da je pomemben le ostanek izraza obr pri deljenju s 7. Preverili smo že, da obrazec velja za 1. 3. 1996. Induktivno lahko pokažemo, da velja tudi za 1. marec poljubnega leta. Člen $(5 \cdot l) \text{ div } 4$ iz obrazca zapišimo kot $l + l \text{ div } 4$. Običajno leto ima 365 dni, to število pa ima ostanek 1 pri deljenju s 7. Za ustrezno povečanje števila obr za ena poskrbi člen l . Pri prestopnih letih dodatno enico prinese $l \text{ div } 4$. Bolj zapleteno je, ko prestopimo v novo stoletje. Spet lahko zapišemo $(21 \cdot s) \text{ div } 4 = 5 \cdot s + s \text{ div } 4$. Če je $l = 99$, potem je $(5 \cdot l) \text{ div } 4 = 123$. Število 123 ima pri deljenju s 7 ostanek 4. Leto kasneje je $l = 0$, zato je $(5 \cdot l) \text{ div } 4 = 0$. Vendar pa se pri spremembi leta za ena poveča tudi s , to pa poveča obr za 5. Celotna sprememba je torej v običajnih letih ravno prava: $-4 + 5 = 1$. Če pa je ustrezno leto tudi prestopno, dobimo še dodatno enico iz $s \text{ div } 4$. Podobno preverimo, da obrazec velja za prvi dan poljubnega meseca. Ker imajo meseci po 30 ali 31 dni, moramo pri prehodu v nov mesec obr povečati za 2 oziroma 3. To storimo s členom $(13 \cdot m - 1) \text{ div } 5$. Izjema je le februar, ki ima le 28 oziroma 29 dni. Zanj poskrbimo tako, da se pri računanju pretvarjamo, da je februar zadnji mesec v letu ($m = mm - 2$ oziroma $m = mm + 10$ in sprememba ll). Tako koncu februarja sledi sprememba leta. Za spremembo obr pri spreminjanju dni v posameznem mesecu skrbimo s členom d .

Zapišimo še program, s katerim preštejemo, ob katerih dnevih tedna nastopajo trinajsti dnevi v posameznih mesecih.

```

program Petek_13;
{ Prešteje, ob katerih dnevih v tednu nastopijo 13. v mesecu. }
var
  dan,mesec,leto: integer; { pomožne spremenljivke za hranjenje datumov }
  stevilo: array[0..6] of integer; { stevilo[5] je število petkov trinajstega }

function Zeller(dd,mm,ll: integer): integer;
{ Vrne, kateri dan v tednu je datum dd.mm.ll. }
{ Pri tem je 0 nedelja, 1 ponedeljek, ..., 6 pa sobota. }
var
  m,l,s,obr: integer;
begin
  if mm>2 then m := mm-2
  else
    begin m := mm+10; ll := ll-1; end;
  l := ll mod 100; s := ll div 100;
  obr := dd+(13*m-1) div 5+(5*l) div 4+(21*s) div 4;
  Zeller := obr mod 7;
end; { Zeller }

begin
  for dan:=0 to 6 do stevilo[dan] := 0; { inicializacija števecv }
  for leto:=1600 to 1999 do
    for mesec:=1 to 12 do begin
      dan := Zeller(13,mesec,leto);
      stevilo[dan] := stevilo[dan]+1;
    end;
  { Izpis rezultatov. }
  writeln(' Porazdelitev trinajstih dni v mesecu po dnevih tedna:');
  writeln(' ponedeljek',stevilo[1]:10);
  writeln(' torek      ',stevilo[2]:10);
  writeln(' sreda       ',stevilo[3]:10);
  writeln(' cetrtek     ',stevilo[4]:10);
  writeln(' petek      ',stevilo[5]:10);
  writeln(' sobota     ',stevilo[6]:10);
  writeln(' nedelja    ',stevilo[0]:10);
end.

```

Program izpiše naslednjo razpredelnico:

Porazdelitev trinajstih dni v mesecu po dnevih tedna:	
ponedeljek	685
torek	685
sreda	687
cetrtek	684
petek	688
sobota	684
nedelja	687

Občutek nas torej ni varal. Trinajsti v mesecu je res najpogostejše v petek. Res pa je tudi, da razlika do števila nastopov v ostalih dnevih tedna ni prav velika.

Z majhnimi spremembami gornjega programa lahko izračunamo še kopico zanimivih stvari. Tako sta v letu 1996 dva petka trinajstega: 13. september in 13. december. V letu 1997 bo en, v letu 1998 trije, v letu 1999 pa zopet le en tak petek. Preverimo tudi lahko, da je vsako leto vsaj en petek trinajstega, v nobenem letu pa niso več kot trije. Natančneje, med 400 zaporednimi leti je 171 let z enim, 170 let z dvema in 59 (nevarnih) let s po tremi petki trinajstega.

Martin Juvan

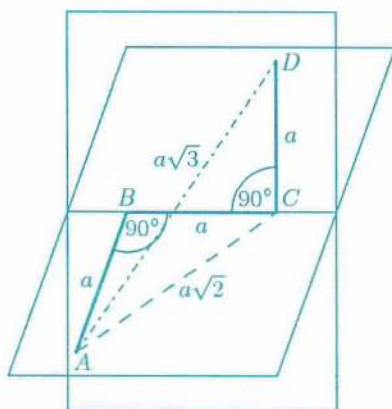
NEMOGOČI PREDMET ZA ZDRAVE OČI NIKAKOR NI MOGOČ¹

Nemogoči predmet se zdi 'mogoč', kadar se v optični ravnini slike predmeta dotikata liki dveh 'kritičnih' točk, ki sta v resnici na predmetu oddaljeni (pri Penrosovem trikotniku je ta oddaljenost enaka $a\sqrt{3}$ (slika 1)). Vsaka zbiralna leča preslika v ravnino slike ostro le tiste točke predmeta, ki leže v ustrezni optični ravnini predmeta. Večji je premer leče, večja je razlika med ostrinama slik dveh točk, ki ne ležita v isti optični ravnini predmeta.

Če pa premer take leče zmanjšujemo (npr. s pomočjo irisne zaslonke), se globina ostrine slike g_{os} večja, in ko postane večja od oddaljenosti 'kritičnih' točk, postaneta obe točki na sliki enako ostri. Za Penrosov trikotnik to pomeni

$$a\sqrt{3} < g_{os} = \frac{2Rfg(g-f)r}{R^2f^2 - r^2(g-f)^2}.$$

(R = polmer leče, f = goriščna razdalja leče, g = razdalja predmeta od leče, r = polmer raztresnega kroga, ki na zaslonu (mrežnici očesa) še daje vtis ostre slike.)



Slika 1.

¹ Odmev profesorja biologije iz Zagreba na prispevka v 1. in 3. številki letošnjega letnika Preseka.

Camera obscura, katere odprtina je zmanjšana na najmanjšo možno mero, je edina fotokamera, ki ne zmore razlikovati med dvema točkama, ki ne ležita v isti optični ravnini predmeta, njuni sliki pa sovpadata. Fotoaparati z lečo pa to zmore pri dovolj veliki 'kritični razdalji' točk na predmetu in dovolj veliki odprtini zaslonke. Isto velja za posamezno človeško oko!

V kolikor pa opazujemo nemogoči predmet z obema očesoma, je prostorski odnos še otipljivejši. Ni mogoče, da bi od dveh različnih točk ena ležala na obeh krakih kota, ki ga oklepata optični osi obeh oči, druga pa v njunem presečišču.

Nemogoči predmet za zdrave oči torej ni mogoč, razen če je premajhen, da bi oči razliko lahko še dojele. V ta namen bi bil model iz žice, ki so ga predlagali kamniški najstniki, izredno dober. V hipu se ga da tudi izdelati v vseh mogočih velikostih in se tako prepričati o resničnosti tukaj napisanega.

Zvonimir Davidé

NARAŠČAJOČA IN PADAJOČA ČETA ŠTEVK

Števila 136, 13578, 789 imajo skupno lastnost, da je v njihovem desetiškem zapisu vsaka naslednja številka večja od prejšnje. Kaj menite, koliko je naravnih števil s to lastnostjo?

Najprej rezultat ocenite, nato nalogo natančno rešite.

Koliko pa je naravnih števil z lastnostjo, da je v njihovem desetiškem zapisu vsaka naslednja številka manjša od prejšnje?

Marija Vencelj

ŠE ENKRAT SAM SEBE

Pravijo, da se dandanes spodobi, da poznamo osnove programskega jezika C. Zanimiv preizkus našega poznavanja tega programskega jezika in tudi naše splošne programerske razgledanosti je sestavljanje programa, ki izpiše sam sebe. Seveda brez uporabe datotek. Nekaj koristnih nasvetov lahko pod naslovom "Sam sebe" poiščete v lanskem letniku Preseka.

Martin Juvan, Matjaž Zaveršnik

Bohte Z., Uvod v NUMERIČNE METODE, Knjižnica Sigma, DMFA Slovenije, Ljubljana 1995, 138 str.

Verjetno se vam je že kdaj zgodilo, da ste z žepnim računalom nekaj računali, pa niste dobili ravno rezultata, ki ste ga pričakovali. Kdor misli, da se to ne more zgoditi, naj vzame v roke računalno in izračuna naslednji izraz:

$$(1000/3 - 333) * 1000 - 1000/3.$$

Izračunajte pravilno vrednost in jo primerjajte s tisto, ki jo izračuna vaše računalno! V resnici z vašim računalom ni nič narobe, problem je le v tem, da ne zna računati simbolno, temveč računa numerično.

Glavni problem numeričnega računanja pa je, da računalnik ne more predstaviti vseh števil, ampak le končno mnogo. Tako pri numeričnem računanju vedno računamo s približki, po vsaki računski operaciji pa se rezultat ponovno aproksimira s predstavljenim številom. Zaradi tega se pri računanju pojavijo zaokrožitvene napake, ki lahko na koncu pripeljejo do tega, da se rezultat popolnoma razlikuje od pričakovanega.

Če želimo z numeričnim računanjem priti do spodobnih rezultatov, moramo zato poznati ozadje nastanka zaokrožitvenih napak in račune preoblikovati tako, da ostanejo napake znotraj željenih mej. S tem se ukvarja analiza zaokrožitvenih napak, katere osnove so predstavljene v knjigi Uvod v numerične metode. Knjigo je napisal profesor Zvonimir Bohte, izdalo pa jo je Društvo matematikov, fizikov in astronomov Slovenije v Knjižnici Sigma.

V knjigi zremo vse o problemu predstavitve števil v računalniku. Predstavljena sta zapis s stalno piko in pa zapis s premično piko, ki se uporablja v veliki večini današnjih računalnikov.

S številnimi zgledi je predstavljeno, kako se lahko s preoblikovanjem računskih procesov izognemo numerični nestabilnosti. Glavna krivca za numerično nestabilnost sta deljenje z majhnimi števili in pa odštevanje približno enakih števil, zato se moramo temu po možnosti izogniti.

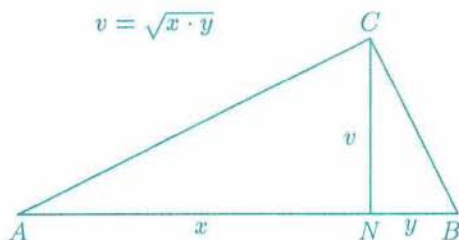
Knjiga je nastala kot razširitev razdelka Računanje s približki v učbeniku Petra Legiša, Matematika: Prvi letnik. Pojmi iz tega razdelka so v knjigi poglobljeni in posodobljeni, zato je knjiga med drugim dobrodošla tudi za srednješolske učitelje.

Bor Plestenjak

KONSTRUKCIJA ZAPOREDJA $x^2, x^3, \dots$

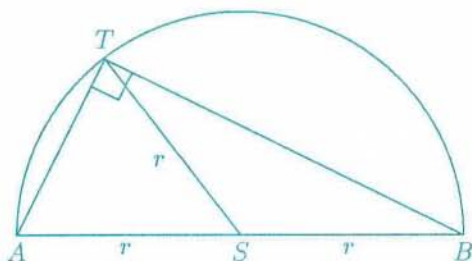
O konstrukciji geometrijske sredine števil je bilo v Preseku¹ že veliko napisanega. Najpreprostejša je konstrukcija s pomočjo *višinskega* in *Talesovega izreka*.

Višinski izrek pravi, da je v pravokotnem trikotniku kvadrat višine enak produktu pravokotnih projekcij katet na hipotenuzo (glej sliko 1).



Slika 1.

Talesov izrek pa nam pove, da je poljubni obodni kot nad premerom pravi (slika 2).

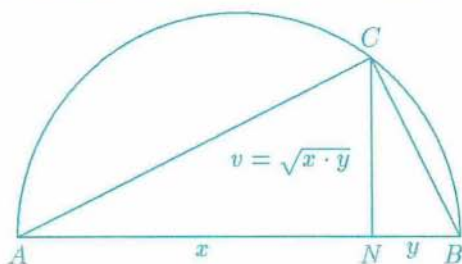


Slika 2.

Konstrukcija geometrijske sredine števil x in y je sledeča (glej sliko 3):

- Nad daljico AB dolžine $x + y$, ki jo točka N razdeli na daljici z dolžinama x in y ($\overline{AN} = x$ in $\overline{NB} = y$), narišemo krožnico s premerom $\overline{AB} = x + y$.
- Presečišče te krožnice s pravokotnico na daljico AB v točki N označimo s C .

¹ Glej Neža Mramor: Malo geometrijske sredine, Presek, letnik 22, št. 1, 54-61 in Uroš Milutinovič: Kaj so sredine in kako jih uporabljamo, Presek, letnik 20, št. 6, 332-342.



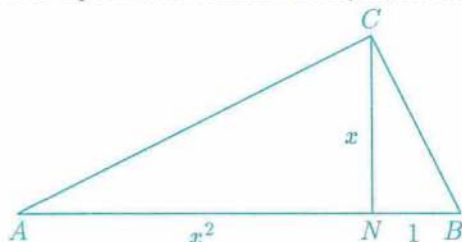
Slika 3.

Daljica NC je geometrijska sredina števil x in y . Posebni primer, ko je $y = 1$, nam da konstrukcijo števila $\sqrt{x} = \sqrt{x \cdot 1}$.

Kvadrat števila x konstruiramo še enostavneje; uporabimo le višinski izrek. Konstrukcija poteka v dveh korakih (glej sliko 4):

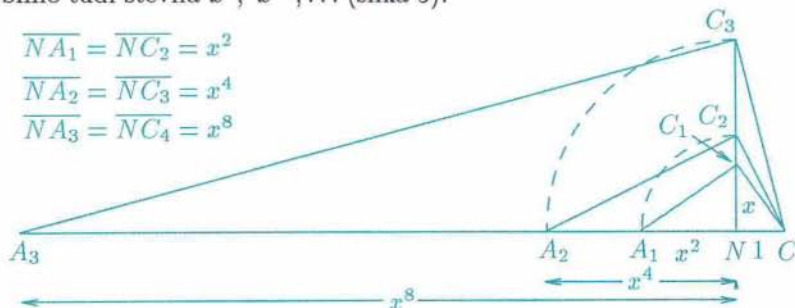
- Načrtamo pravokotni trikotnik s katetama NC in NB dolžine x in 1.
- Točka A naj bo presečišče nosilke daljice NB in pravokotnice na daljico CB v točki C .

Če za trikotnik ABC uporabimo višinski izrek, dobimo $\overline{AN} = x^2$.



Slika 4.

Konstrukcijo lahko ponovimo na daljici AN , tako da daljica AN prevzame vlogo daljice NC , in dobimo število $(x^2)^2 = x^4$. Na ta način lahko dobimo tudi števila $x^8, x^{16}, \dots$ (slika 5).



Slika 5.

Toda kako konstruirati število x^3 ? Rešitev je na dlani, saj je x^3 geometrijska sredina števil x^2 in x^4 ($\sqrt{x^2 \cdot x^4} = \sqrt{x^6} = x^3$). V naslovu smo obljubili konstrukcijo zaporedja $x^2, x^3, x^4, \dots$. Pa poglejmo, kako daleč smo že: narisati znamo že števila x^2, x^3, x^4 pa $x^8, x^{16}, x^{32}, \dots$ in, če dobro premislimo, tudi $x^6, x^{12}, \dots$, saj je $x^6 = (x^3)^2, x^{12} = (x^6)^2, \dots$. Prve tri (in nekatere nadaljnje) člene željenega zaporedja že imamo, razmislimo še splošno!

Recimo, da smo uspeli konstruirati števila $x^2, x^3, \dots, x^n$. Ali lahko konstruiramo število x^{n+1} ?

Če je n liho število, je $\frac{n+1}{2}$ naravno število; ustrezno potenco že imamo, zato lahko dobimo x^{n+1} s kvadriranjem števila $x^{\frac{n+1}{2}}$.

Če pa je n sodo, je $\frac{n+2}{2}$ naravno število, zato lahko x^{n+2} dobimo s kvadriranjem števila $x^{\frac{n+2}{2}}$, x^{n+1} pa nato konstruiramo kot geometrijsko sredino števil x^n in x^{n+2} .

Bralec naj sam ugotovi, kako bi konstruirali x^{-1} ! "Opremljen" še s to konstrukcijo bo znal konstruirati števila x^m , $m \in \mathbb{Z}$ (saj za vsako naravno število n velja $x^{-n} = (x^n)^{-1}$).

Matej Mencinger

TRIKOTNIŠKA ŠTEVILA IN POPOLNI KVADRATI

Na ravnino položimo nekaj kvadratov tako, da tvorijo trikotnik, kot kaže spodnja slika. V vsaki vrstici je en kvadrat več kot v prejšnji vrstici. Skupno število položenih kvadratov (lahko so tudi pike, krogi, $\dots$, da le oblikujejo trikotnik na opisani način) imenujemo *trikotniško število*. S spodnje slike sledi, da je npr. $21 = 1 + 2 + 3 + 4 + 5 + 6$ trikotniško število:



Trikotniška števila so torej vsote prvih nekaj zaporednih naravnih števil. Naj bo m naravno število. Dokaži: m je trikotniško število natanko takrat, ko je $8m + 1$ popolni kvadrat.

Ivan Lisac

ŽIVI POLETNI TERMOMETRI

Toplejša je poletna noč, hitreje se oglašajo črički. Iz hitrosti njihovega oglašanja lahko celo zelo natančno ugotovimo zunanjo temperaturo.

Američani poznajo takle preprost recept za njen izračun: Če deliš število čričkovih cvrketov v minuti s 4 in prišteješ 40, dobiš zunanjo temperaturo. V Fahrenheitovih stopinjah, seveda.

Nam bi bolj ustrezalo pravilo, ki bi podajalo temperaturo v Celzijevih stopinjah. Poiščimo ga!

Če z F označimo Fahrenheitovo temperaturo in z n število oglašanj črička v minuti, opisuje ameriško pravilo formula

$$F = \frac{n}{4} + 40.$$

Temperaturo T v $^{\circ}\text{C}$ dobimo iz Fahrenheitove z enačbo

$$T = \frac{5}{9}(F - 32),$$

kar skupaj z zgornjo formulo da

$$T = \frac{5}{36}n + \frac{40}{9}.$$

Vsekakor je ta formula prezapletena za poletne večere. Lahko jo poenostavimo, tako da vzamemo $\frac{5}{36} \approx \frac{1}{7}$ in $\frac{40}{9} \approx 4$. Tako dobimo dokaj preprosto pravilo tudi za izračun temperature v $^{\circ}\text{C}$:

$$T \approx \frac{n}{7} + 4.$$

Število čričkovih cvrketov v minuti delimo s sedem in prištejemo štiri. Rezultat je zunanja temperatura.

Razlike med rezultati, ki jih dajeta obe formuli, praktično ni. Za $n = 147$ dobimo po naši formuli 25°C , po ameriški pa 76.75°F , kar ustreza 24.86°C . Zaokrožena na cela mesta, sta rezultata enaka.

Pred nami so počitnice, ko bomo lahko formulo v živo preverili. Če le niso naši črički preveč različni od ameriških! V tem primeru pa poiščite njihovo formulo.

Marija Vencelj

MLEČNI VOZ

Sredi poletja se v večernih urah na naše nebo povzpne mlečni trak Rimske ceste tako, kot da bi opasal vse nebo, saj poteka od juga prek zenita do severa. Ne zamudite priložnosti in občudujte to lepo naravno znamenitost.



Slika 1. Rimska cesta – risba.

Nizko na južnem delu neba, tam, kjer se Rimska cesta skoraj navpično pogrezne v tla in se navidezno dotika obzorja, leži ozvezdje *Strelec*. Je nekoliko težje razpoznavno ozvezdje, vendar če si zapomnimo lego njegovih značilnih zvezd, ga ne moremo spregledati. V ozvezdju Strelac lahko opazujemo znameniti *Mlečni voz*, ki ga oblikuje sedem svetlih zvezd približno v osrednjem delu ozvezdja. To je eden izmed petih nebesnih voz, ki jih opazujemo na nebu. Pravijo mu tudi *Mlečna skleda* ali *Mlečna zajemalka*. To ime mu kar pristoja, saj leži v enem najbogatejših z vesoljskimi telesi napolnjenih delov Rimske ali Mlečne ceste.

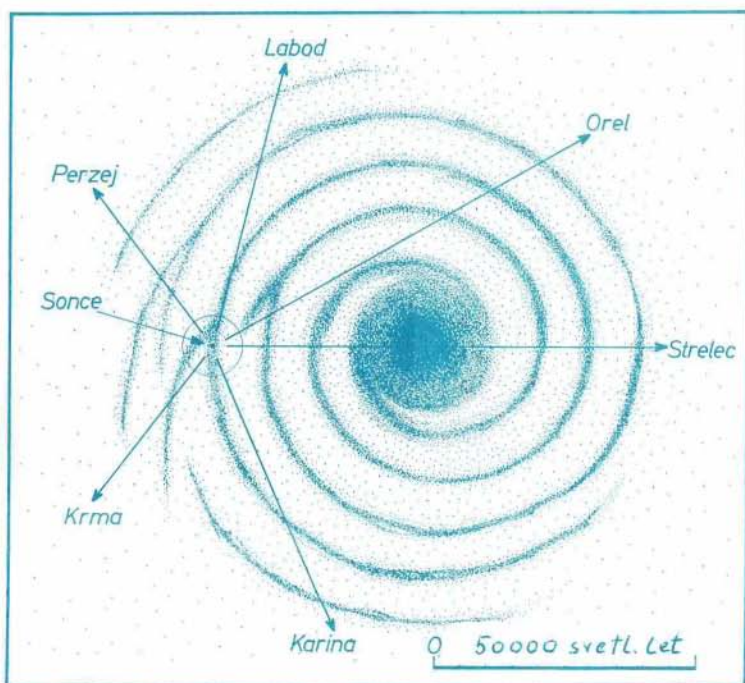
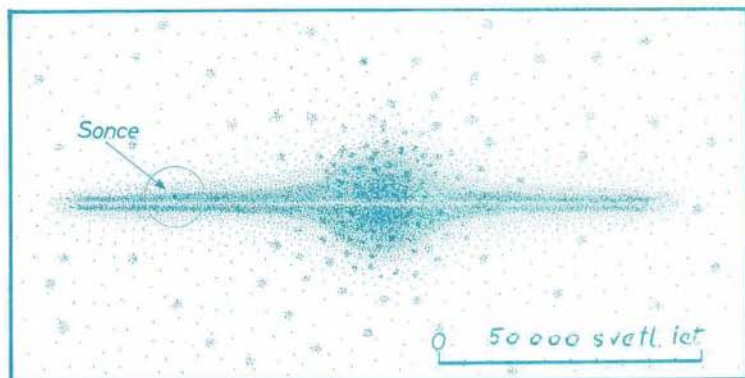
Predlagamo, da v poletnih večerih in nočeh opazujete in občudujete Rimsko cesto. Nato poskusite razpoznati ozvezdje Strelac in v njem ugotoviti zvezde, ki sestavljajo Mlečni voz.

Z daljnogledom manjše povečave pogledjte zvezde izven Rimske ceste, nato pa zvezde v Rimski cesti. Kaj opazite?

Z daljnogledom opazujte še druge vesoljske objekte: zvezdne kopice in meglice, ki ležijo v ozvezdju Strelac. Ko gledate proti ozvezdju Strelac, se morate zavedati, da je vaš pogled usmerjen proti središču naše Galaksije.



Slika 2. Ozvezdje Strelac – Sagittarius (lat.) in Mlečni voz v njem je pri nas zvečer najbolj vidno od junija do septembra. Mlečni voz je v najprimernejši legi za opazovanje poleti. Izsledimo ga nizko na južni strani neba.



Slika 3. Naša Galaksija. Zgoraj pogled z boka, spodaj pogled v smeri vrtilne osi.

Marijan Prosen

KONSTRUKCIJA BREZ UPORABE PODOBNOSTI – Rešitev s str. 269

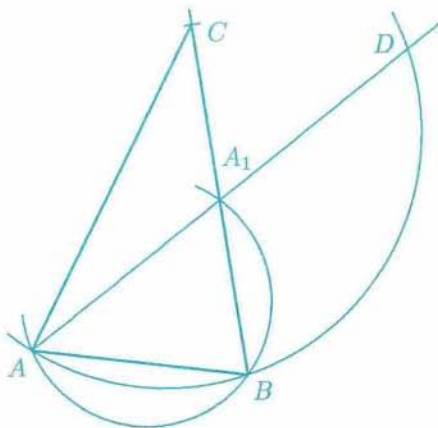
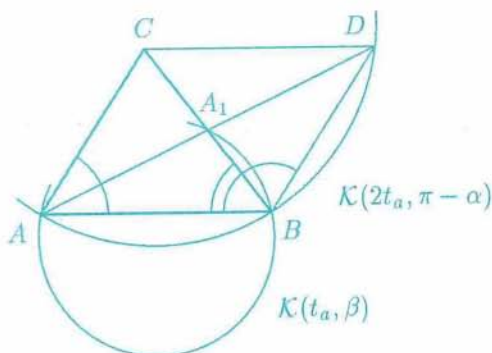
Pri konstruiranju tega trikotnika uporabimo konstrukcijo trikotniku očitane krožnice iz znane stranice a in kota nasproti njej α (obodni kot α nad tetivo a) $\mathcal{K}(a, \alpha)$.

Razčlenitev konstrukcije:

Načrtamo trikotnik ABC in ga čez stranico BC dopolnimo v paralelogram $ABCD$. Razpolovišče stranice BC označimo z A_1 . Diagonala paralelograma je $AD = 2t_a$, dvojna težiščnica t_a . Kot $\angle ABA_1 = \beta$ leži v trikotniku ABA_1 stranici $AA_1 = t_a$ nasproti. Njegov vrh B je na trikotniku ABA_1 očitani krožnici $\mathcal{K}(t_a, \beta)$. Kot $\angle ABD = \pi - \alpha$ leži v trikotniku ABD stranici $AD = 2t_a$ nasproti.

Zato je njegov vrh B na trikotniku ABD očitani krožnici $\mathcal{K}(2t_a, \pi - \alpha)$. Ogljišče B iskanega trikotnika je torej od A različno presečišče krožnic $\mathcal{K}(t_a, \beta)$ in $\mathcal{K}(2t_a, \pi - \alpha)$. Tretje oglišče C je na premici skozi B in A_1 , od A_1 oddaljeno za $A_1C = BA_1$.

Konstrukcija: Narišemo težiščnico $AA_1 = t_a$ in jo čez A_1 podaljšamo za $A_1D = AA_1$. Načrtamo krožnici nad t_a oziroma $2t_a$ kot tetivama z obodnima kotoma β oziroma $\pi - \alpha$, $\mathcal{K}(t_a, \beta)$ in $\mathcal{K}(2t_a, \pi - \alpha)$. Od A različna skupna točka je oglišče B . Premico skozi B in A_1 podaljšamo čez A_1 za $A_1C = BA_1$. Iskani trikotnik je trikotnik ABC .



POZOR, ČRNE LUKNJE!

Sizifov niz

V grškem mitu se je Sizifu ne glede na to, kako močno se je trudil, težka skala, ki jo je moral valiti na hrib, pod vrhom vedno izmuznila in se skotalila po hribu navzdol. Podobno se lahko zgodi tudi v matematiki: Začnite s katerim koli pozitivnim celim številom, zapisanim z nizom števk – na primer z 9288759. Preštejte število sodih števk, število lihih števk in število vseh števk v tem nizu. V danem primeru so 3 sode števke, 4 lihe števke, vseh števk pa je 7. Iz teh števil sestavite niz, 347. Če ponovite postopek s številom 347, dobite 1, 2 in 3. In če postopek ponovite s številom 123, zopet dobite število 123. V vesolju števil je število 123, glede na ta postopek, črna luknja!

Ali res vsako število konča v matematični črni luknji, številu 123? Vzemite zelo veliko število, na primer

12233344445555566666777777788888889999999999.

Če zapored zapišete število sodih števk (20), lihih števk (25) in vseh števk (45), dobite število 202545. Ponovitev postopka z 202545 dá 4, 2 in 6, naslednji korak z 462 dá 303 in zadnji s številom 303, dá 123.

Glavni lastnosti te črne luknje sta dve: prva – ko se enkrat znajdete pri številu 123, ne pridete več iz črne luknje – in, druga – vsak element, ki ga črna luknja privlači (vsako pozitivno celo število), potegne le-ta vase. Če le dovoljkrat ponovite postopek z nekim številom, pridete v končni fazi do števila 123. Druga lastnost potiska v črno luknjo, prva pa zagotovi, da se vanjo ujamete.

Kako deluje Sizifov niz? V primeru črne luknje 123 lahko sklepamo takole: če je začetno število večje od 999, potem je število, ki ga sestavimo s štetjem števk, manjše od začetnega števila. Če začnete s 1000 ali več, vas postopek prej ali slej privede pod 1000.

Z računalnikom se da enostavno preveriti, da vsako število, ki je manjše od 1000, vodi do 123, vendar je dokaz s "papirjem in svinčnikom" hitrejši in enostavnejši. Trimestno število ima naslednje možnosti za število sodih števk, število lihih števk in število vseh števk: (0, 3, 3), (1, 2, 3), (2, 1, 3) in (3, 0, 3). S katerim koli trimestnim številom začnete, dobite po enem koraku eno od teh štirih trojic. Uporabite pravilo za vsako teh trojic in videli boste, da vedno dobite (1, 2, 3) – Sizifovo število 123.

Besede v številke

Vzemite katero koli celo število in zapišite njeno ime v angleščini, recimo "five" za 5. Preštejte črke v imenu, v tem primeru so 4. Ponovite postopek s 4: ime števila "four" ima štiri črke, s čimer ste se ujeli v črno luknjo 4.

Poizkusite z drugim številom, recimo 163. Da se izognete nepreglednosti, vključite v štetje še presledke in pomišljaje: tako ima 163, z imenom "one hundred and sixty-three", seštevek 27. Ta dá 12, potem dobimo zapored 6, 3, 5 in končno 4. Jasno je, da je ta črna luknja odvisna od angleščine, vendar je možno, da imajo tudi drugi jeziki podobno lastnost. Ni pa nujno, da je črna luknja ravno število 4. Tudi slovenščina ima takšno črno luknjo, število 3. Preverite!

Narcisna števila

Edina cela števila, poleg 0 in 1, ki so enaka vsoti kubov svojih števk so 153, 370, 371 in 407. Ustvarimo si lahko lasten svet, v katerem eno teh števil postavimo za črno luknjo. Da postane število 153 črna luknja, začnete s katerim koli pozitivnim celim številom, ki je večkratnik števila 3. Vsako števko kubirate in seštejete kube, da dobite novo število. Začnete, na primer, s številom 432...

$$4^3 + 3^3 + 2^3 = 99$$

$$9^3 + 9^3 = 1458$$

$$1^3 + 4^3 + 5^3 + 8^3 = 702$$

$$7^3 + 0^3 + 2^3 = 351$$

$$3^3 + 5^3 + 1^3 = 153$$

$$1^3 + 5^3 + 3^3 = 153$$

...in padete v črno luknjo! To deluje, ker se dovolj velika števila med postopkom manjšajo, po drugi strani pa na vsakem koraku dobimo število, ki je tudi večkratnik števila 3 (zakaj?), in se tako ognemo ostalim črnim luknjam, ki niso večkratniki števila 3.

Trik s kartami

Ta primer je na prvi pogled precej drugačen od prejšnjih, vendar izpolnjuje zahtevi, ki sta značilni za črne luknje. Gre za klasični trik s kartami. Vzemite 21 kart in jih uredite s podobami navzgor v sedem

vodoravnih vrst, da dobite tri navpične stolpce. Prosite prijatelja naj si v mislih izbere karto, vendar naj vam ne pove, katero si je izbral. Pove naj le, v katerem stolpcu leži izbrana karta. Stolpce nato zberite v tri kupčke, pri čemer se vrstni red kart posameznega stolpca ne sme zmešati. Kupček kart, ki vsebuje izbrano karto, položite med preostala dva in karte znova razvrstite v sedem vrstic po tri karte. Ponovite proces – vprašajte, v katerem stolpcu je karta, zberite stolpce, postavite stolpec z izbrano karto med ostala dva in razvrstite karte. Nato ponovite proces še enkrat, zadnjič.

Izbrana karta bo od tod naprej vedno v sredini, karta v četrti vrstici v drugem stolpcu. Vsaj dve poti sta, s katerima to lahko dokažete, najlažje pa to storite tako, da si narišete diagram, ki prikazuje, na katerem mestu izbrana karta vsakič konča.

Kaprekarjeva konstanta

Kakorkoli že, v večino črnih lukenj so vpletena števila. Vzemite katero koli štirimestno število, da le nima vseh štirih števk enakih. Preuredite številke izbranega števila tako, da dobite največje in najmanjše število, ki ju iz teh števk lahko sestavite. Potem izračunajte razliko teh dveh števil. Postopek ponovite z razliko, ki ste jo pravkar izračunali.

Začnite na primer s številom 8028. Največje število, ki ga iz njegovih števk lahko sestavite, je 8820, najmanjše pa 0288. Njuna razlika je 8532. Ponovite postopek z 8532 in izračunate razliko: $8532 - 2358 = 6174$. V kakem drugem primeru boste morda potrebovali več korakov, vendar boste vedno v največ sedmih korakih prišli do Kaprekarjeve črne luknje – števila 6174.

Nerešeni problemi

Celo klasični nerešeni matematični problemi imajo opravka s števili, ki so črne luknje, ali pa se za njih domneva da so. Primer je Collatzova domneva. Izvira iz leta 1930 in je še vedno odprto vprašanje.

Proces je takšen: začnite z naravnim številom. Če je liho, ga potrojite in prištejte ena. Če je rezultat sodo število, ali če ste začeli s sodim številom, ga razpolovite. Nato postopek ponavljajte. Če začnete s 5, dobite 16, nato 8, 4, 2 in nazadnje 1, potem pa 4, 2, 1 in spet 4, 2, 1. Vsi poskusi kažejo, da vedno končate v ciklu 4, 2, 1 ne glede na to, s čim začnete – vendar to še nikoli ni bilo z dokazom potrjeno ali ovrženo.

Kakorkoli že, to je cikel z dolžino tri, nas pa zanimajo črne luknje, ki so cikli z dolžino ena. Do takega cikla pridete tako, da začetno število razstavite na prafaktorje. Na primer, $84 = 2 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 7$. Potem vzamete največji lihi faktor izbranega števila, v tem primeru je to $3 \cdot 7 = 21$. Potrojite ta največji lihi faktor in prištejte 1. Rezultat je začetno število za naslednji korak. Če postopek preizkusite z nekaj števili, boste ugotovili, da vedno pridete do števila 4. Ko pa enkrat pridete do števila 4, pri njem tudi ostanete, kajti največji lihi faktor števila 4 je 1, $3 \cdot 1 + 1$ pa je 4. Kdorkoli dokaže Collatzovo domnevo, bo hkrati dokazal, da je tudi ta varianta črna luknja. Vesel lov na črne luknje!

*Po članku Michaela Eckerja v New Scientistu
prevedel in priredil Damjan Osredkar*

Omladič M. in Omladič V.: MATEMATIKA IN DENAR, Knjižnica Sigma, DMFA Slovenije, Ljubljana 1995, 142 str.

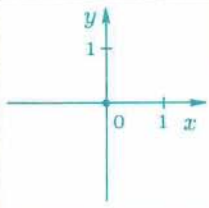
Ob koncu preteklega leta je izšla v Knjižnici Sigma kot 58. po vrsti zelo zanimiva knjižica MATEMATIKA IN DENAR. V to zbirko sodi zaradi nezahtevnega predznanja, dostopnosti podajanja in tudi zaradi zanimivosti za širši krog bralcev.

Knjižica obravnava snov, ki spada na široko področje uporabe matematike v ekonomiji, posebej pa na tisti del, ki je povezan z denarjem in ustreznimi poslovnimi odločitvami. Poleg očitne povezave matematike z denarjem prek obrestnega in obrestno obrestnega računa obsega vsebina tudi mnogo drugih problemov, kot so problemi ujemanja, optimizacije in odločanja. Pri tem spoznamo, kako so ti problemi rešljivi s sorazmerno preprostimi matematičnimi sredstvi.

Za razumevanje večine snovi zadošča predznanje v okviru srednješolske matematike. Podajanje je izredno živahno in zasnovano na mnogih primerih iz poslovnega življenja posameznikov ali majhnih podjetnikov. Posamezna poglavja so med seboj precej neodvisna in bralec lahko skoraj vsako preskoči brez škode za razumevanje drugih, če se mu zdi nezanimivo ali prezahtevno.

Vsem bralcem Preseka to knjižico toplo priporočamo v branje, saj bodo ob prebiranju spoznali, da matematika ni namenjena samo "kravžljanju možganov", ampak da se da tudi koristno uporabiti v življenju, ki se na žalost vse bolj vrti okoli denarja.

Zvonimir Bohte

	AVTOR MARKO BOKALIČ	NEKO. JUG. NOGOM. VRATAR (VLADIMIR)	TENORIST CARUSO	ORGANIZ. ENOTA STUDIA	DAN V MESECU RINASKEGA KOLEDARJA	ŠKOTSKO JEZERO S POŠASTJO (LOCH)	GORATA ARABSKA POKRAJINA	POJMA OSENCI POLJUH ...
	BARYA SNEGA							VRST ZITA
	RAY CHARLES							INDIJAN PANAJ
	JAPONSKI DROBIZ					GOZDNA ŽIVAL		
	ENOTA ZA MOC					OZIRISOVA MATI		
MARJAN MANČEK							SOLI DUSKASTE KISLINE	OČE, ATA
MESTO V SV ROMUNIJ				MAJHNA SLADKOV. RIBA				TRŽNICA
SLOG			SLOVENSKI IGRALEC (MIHA)	NAJBOLJŠI BOKSAR VSEH ČASOV (MUHAMMAD)	UREDNIK DELA DOBERSEK			VALO POJ. RAZLK
NEDELAV-NOST					BERILU	SLOVAŠKA REKA		
						DRŽ. USLU-ZBENKA		
ELSA MORANTE			VAS PRI SMLEDNIKU BIL JE TUDI...					
ITAL. MATEMATIK (BONAVENTURA)								NADZORNIK POLOPICA DOLGO PRISTEZ
	IT. FILM KOMIK				INDUSKO MESTO Z ZNANO GROBNICO	ZVEZDA V ORLU		
	STANE UREK					KRAJ PRI MEDVODAH		
RAZPRŠENA SVETLOBA			NEKO. POLIT. POZDERAC IT. NOGOM. VRATAR (DINO)					
POVELJE				DEL KROMOSOMA			ENICA	
				MAKED. KOLO			DEL TENISKE IGRE	
				NJEGOVA DOMOVINA				
				ITAL. DRAMATIK (DARIO)		ZELENICE V PUSCAVI		

NA IMJE	STALEN EKVATOR VETER	ROBERT REDFORD	NOVINAR GIACOMELLI	SPOLNOST	KAVKAŠKO LJUDSTVO	...NANAŠA- JO NA OSEBNOST NA SLIKI	ALJAŽ PEGAN	SL. ALPINIST IN PUBLI- CIST (ANTE)	NESNAGA, KI SE OBRISJE S KRPO	LJUBLJ. PIVOVARNA	KRAJ NJEGOVE PRVE SOLE	DRŽAVA V SV INDIJ
A						STEKLE- NIKA ZA ZDRAVILA						
CI V MI						GR. GORO- VJE SEDEZ PESNIKOV						
						SEV. JELEN						
		SLOHOV ZOB					IZRAELSKO PRISTAN.					
							BRAZ. ZVEZ. DRŽAVA					
		NEHŠKI SKLADAT. (WERNER)	MESTO, KJER JE UMRL									
			VZH. OBALA JADRANA V STAREM VEKU	JEZERO V SEV. ITAL.				NEON				RAČUNALN. POMILNIK
				NASPROTJE ZDRAVJA				VRZEL LURNJA				
	GESTA, KRETNJA				DEŽELA, KJER JE DUJE GASA ZIVEL	ETIOP. PLEMŠKI NASLOV				KROM		
	URSULA ANDRESS									ŽARA		
JNI V						GORA NAD SOLČAVO						
ICA						JUŽNOML. DRŽAVA						
		ANT. MESTO V ŠPANJI						KRAJ PRI ILIRSKI BISTRICI				
		BOŽIDAR VOLJC						STRINA				
	LUSTAVCI Z BELIM LUBJEM						RASTLIN. BODICA				NJEGOVA FORMALNA IZOBRAZBA	STARA DRŽAVNA ZVEZA
	ERBUJ											
							DEL DIRKE MAĐARSKI POLITIK NAGY					
		NJEG. PRVI VZGOJITELJ								RADON		
		GOROVJE NA KRIMU								ORODJE ZA DOLBENJE		
	IGRALKA FONDA					POOBLAST. POSILANCA						
	KAREL NOVY					NASIČEN OGLJIKOV.						
			SPANJE	ŽUPAN V ILIR. PROV.				THOMAS ... EDISON				
				OTOK SZ OD ZADRA				METOD PEVEC				
									AVSTR. SIMU- LAR (HANS)			
									EDI BERK			
	GRM. KI OBRODI LEŠNIKE						STOPNJA TISKARSKIH ČRK					
	MATEMATIK VAKSELJ							MOGOČEN SLAP PRI BOVCU				

APRILSKEGA LUNINEGA MRKA NISMO VIDELI

Letošnji prvi Lunin mrk je potekal v noči s 3. na 4. april. Luna se je Zemljine polsence dotaknila ob 23. uri in 16 minut, sence ob 24. uri in 21 minut, začetek popolnega mrka pa je nastopil ob 24. uri in 27 minut. Popolni mrk je trajal 1 uro in 27 minut.

Tudi Presekova ekipa je bila pripravljena na spremljanje dodatno zanimivega dogodka. Hkrati bi namreč lahko na severnem nebu opazovali še eno atrakcijo – komet Hyakutake (glej članek na str. 326). Nadejali smo se torej kar dveh muh na en mah, na koncu pa nam je vse pokvarila tretja: muhasto vreme. Že v ponedeljek, 1. aprila, je vremenska napoved močnega sneženja v naslednjih dneh dala vedeti, da z opazovanjem slabo kaže. Upali smo, da gre le za prvoaprilsko šalo, vendar žal ni bilo tako. V torek je snežilo, 3. april je bil v celoti oblačen in meglen, prav takšna pa je bila tudi noč na 4. april.

Slike, ki jo objavljamo na zadnji strani ovitka, torej ni posnela Presekova ekipa, ampak smo jo našli na Internetu.

Da razočaranje ne bo prehudo, velja omeniti, da bomo letos priča še enemu popolnemu Luninemu mrku, ki bo nastopil 27. septembra ob 2. uri in 12 minut, popolni mrk pa ob treh in 19 minut. Do takrat držimo pesti, da nas vreme ne bo spet pustilo na cedilu. Sestavljalcem letošnjih efemerid (Naše nebo 1996) se je za aprilski mrk pomotoma zapisalo, da pri nas ne bo viden. Prav so imeli.

Jeseni napovedujejo vidni mrk. Bomo videli. Upajmo, da bodo imeli tudi to pot prav!

Do takrat pa se zadovoljimo z nekaj splošnimi podatki o Luninih mrkih.

Lunina pot okrog Zemlje in Zemljina pot okrog Sonca ne ležita v isti ravnini, pač pa je ravnina ene glede na ravnino druge nagnjena za 5 stopinj in 9 minut. Zato Luna pri svojem kroženju okrog Zemlje včasih potuje nad Zemljino senco, drugič pod njo. Vsake toliko časa, tja do trikrat na leto, pa se zgodi, da Luna na svoji poti deloma ali v celoti zaide v Zemljino senco – takrat nastopi Lunin mrk. Ta se lahko pojavi na štiri možne načine. Če Luno prekrije (glavna) senca, govorimo o popolnem Luninem mrku; če jo pokrije le del sence, je to delni Lunin mrk; če pa Luna zaide le v Zemljino polsenco, potem gre za polsenčni Lunin mrk; in če v polsenco zaide le del Lunine površine, potem je to delni polsenčni mrk.

Če bi bile točke preseka Lunine poti okrog Zemlje in ekliptike stacionarne, bi se Lunin mrk pojavljal vsake pol leta v istih mesecih. Ker pa se te točke na ekliptiki gibljejo, se iz leta v leto spreminjajo tudi datumi

mrkov. Te datume zato delimo v skupine po približno pol leta. V enem letu nastopita najmanj 2 in največ 7 mrkov – 5 Sončevih in 2 Lunina ali 4 Sončevi in 3 Lunini, lahko tudi samo 2 Sončeva. Po ciklu 18 let 11 dni in 8 ur se Sonce, Luna in Zemlja spet pojavijo v približno enakem položaju, zato se zaporedje mrkov po tem obdobju ponovi. Ta cikel, ki se imenuje saros, je bil poznan že starim Egipčanom in jim je prav tako služil za napovedovanje mrkov.

Lunin mrk je za razliko od Sončevega precej lažje viden – vidijo ga vsi opazovalci, ki so ob času njegovega nastopa na senčni strani Zemlje – torej tisti, ki imajo takrat noč. Značilno zanj je, da Luna niti ob popolnem mrku ni povsem temna. Razlog za to je Zemljina atmosfera, ki lomi svetlobo in poskrbi za vidnost Lune tudi ob njenem mrku. Intenzivnost je torej odvisna predvsem od trenutnega onesnaženja Zemljine atmosfere, zato svetlosti sence ni moč napovedati. Ocenjujemo jo po Danjonovi lestvici, ki ima pet stopenj, uvedel pa jo je francoski astronom André Danjon na začetku tega stoletja. Če je torej v Zemljini atmosferi veliko prahu, je ponavadi mrk zelo temen, Zemljina senca pa ima razmeroma oster rob. To se je zgodilo v letih 1991 in 1992, ko je filipinski vulkan Pinatubo v atmosfero izbruhal tone in tone prahu. Lunini mrki so zato pomembni tudi za proučevanje gornjih plasti Zemljine atmosfere.

Gregor Bavdek in Klemen Bučar

VERIGA

V reviji *Mathematics in School* (maj, 1994) je angleški matematik Alan Parr opisal zanimivo matematično igro *veriga*. Na prvi pogled precej spominja na znani *mastermind*, ali pa na še bolj domače *potapljanje ladij*, vendar lahko rečemo, da je pravzaprav nekak matematizirani križanec med njima.

Igra je namenjena dvema igralcema. Na začetku ima vsak pred seboj svojo kvadratno tabelo velikosti 4×4 , kamor vpiše v obliki verige naravna števila od 1 do 16. Vsak izbere seveda svojo verigo, ki ostane skrivnost za nasprotnika. Veriga lahko teče po tabeli kakorkoli v vodoravni ali navpični smeri, le "zviža" se lahko samo pod pravim kotom.

Opozoriti je treba tudi, da morajo biti polja označena, tako kakor kaže risba na sliki 1, kjer vidimo tudi primer pravilne verige.

4	3	4	5	6
3	2	9	8	7
2	1	10	11	12
1	16	15	14	13
	a	b	c	d

Slika 1.

Po začetni razpostavitvi obeh verig v tabeli igralca izmenoma uganujeta razporeditev števil v nasprotnikovi tabeli. Zmaga tisti, ki jo uspe prvi uganiti. Igralec, ki je na vrsti, lahko ali napove celotno verigo v nasprotnikovi tabeli ali pa soigralca vpraša, kolikšen je produkt vseh števil v nekem kvadratu velikosti 2×2 , ki ga v nasprotnikovi tabeli po svojem preudarku sam izbere. Tako bi, na primer, igralec na vprašanje, kolikšen je na sliki 2 produkt v označenem kvadratu v zgornjem desnem kotu, moral odgovoriti 1680.

Oglejmo si potek igre na izbranem primeru. Denimo, da bi eden od igralcev verige po treh vprašanjih zvedel, da je produkt števil v zgornjem levem kvadratu nasprotnikove tabele 17160, v srednjem 720, v kvadratu na desni pa 160. Odgovore ponazarja slika 3. Izkaže se, da bi lahko z nekoliko računanja že v svoji naslednji, četrti "potezi" nasprotniku povedal pravičen razpored vseh 16 števil v njegovi razpredelnici in tako seveda tudi zmagal.

Poglejmo. Najprej je treba razstaviti vsa tri števila na vse možne produkte, v katerih nastopajo samo faktorji od 1 do 16, vsak samo enkrat:

$$17160 = 2^3 \cdot 3 \cdot 5 \cdot 11 \cdot 13 = 8 \cdot 11 \cdot 13 \cdot 15 = 10 \cdot 11 \cdot 12 \cdot 13$$

$$720 = 2^4 \cdot 3^2 \cdot 5 = 1 \cdot 8 \cdot 9 \cdot 10 = 2 \cdot 4 \cdot 9 \cdot 10 = 3 \cdot 4 \cdot 6 \cdot 10 = \dots$$

$$160 = 2^4 \cdot 5 = 1 \cdot 2 \cdot 5 \cdot 16 = 1 \cdot 2 \cdot 8 \cdot 10 = 1 \cdot 4 \cdot 5 \cdot 8$$

Iz razcepov števila 17160 sledi, da sta v zgornjem levem kvadratu tabele zagotovo števili 11 in 13, saj nastopata v obeh razcepih. Zaradi lastnosti številske verige ne moreta biti sosednji niti v vodoravni niti v navpični smeri, zato ležita v tem kvadratu diagonalno. V verigi ju povezuje število 12, kar pomeni, da sta v tem kvadratu tudi 12 in 10 (14 pač ne more biti, saj to število ni delitelj števila 17160).

S preverjanjem vseh možnih situacij brez težav ugotovimo, da je razporeditev na sliki 4 edina možna.

4	3	4	5	6
3	2	9	8	7
2	1	10	11	12
1	16	15	14	13
	a	b	c	d

Slika 2.

4	17160			
3		720	160	
2				
1				
	a	b	c	d

Slika 3.

4	12	11		
3	13	10	1	
2		9	8	
1				
	a	b	c	d

Slika 4.

Naprej sklepamo podobno. Uporabimo podatek o produktu v drugem kvadratu. Razcepov števila 720 na štiri naravne faktorje je kar petnajst, vendar zadošča, če med njimi poiščemo tiste, ki vsebujejo faktor 10, hkrati pa ne vsebujejo faktorja 12. Po preprosti poti, spet s pomočjo preverjanja različnih možnih leg verige v srednjem kvadratu tabele, nadalje ugotovimo, da so v njem števila 1, 8, 9 in 10. In tako naprej – dokler ne izpolnimo vse tabele oziroma sestavimo verige.

Poskusite za vajo dokončati verigo izbranega primera kar sami. Zares ni težko.

Če pa se vam zdi veriga le prezahtevna, jo lahko za začetek skrite tako, da jo igrate na manjših tabelah. Denimo na kvadratni tabeli 3×3 , ali pa na pravokotni 3×4 . Na kvadratni tabeli sestavljate verigo iz števil od 1 do 9 ali pa iz poljubno izbranih, vendar vnaprej dogovorjenih (ali pa tudi ne!) devetih zaporednih naravnih števil. Podobno velja tudi za verigo na tabeli 3×4 .

Morebiti pa se boste v igranju osnovne variante verige že toliko izurili, da se vam bo zazdela prelahka. Tedaj se lahko odločite za zahtevnejši nivo in jo igrate na večjih tabelah: 4×5 , 5×5 ali celo še večjih.

V vsakem primeru pa veliko zabave!

Vprašanja:

1. Koliko je vseh različnih verig v tabeli 3×3 ?
2. Ali obstaja veriga v tabeli 3×3 , ki se začne in konča v dveh sosednjih poljih a1 in b1?
3. Ali obstaja veriga v tabeli 4×4 , ki se začne in konča v diagonalno ogliščnih poljih a1 in d4?
4. Koliko je vseh različnih verig v tabeli 4×4 ?

5. Poskusite poiskati verigo, ki jo lahko nasprotni igralec z gotovostjo napove kar najhitreje. Z gotovostjo napovedati verigo naj pomeni, da igralec verige ne napove na slepo srečo, pač pa ima za svojo napoved trdne argumente.

Očitno je ni verige, ki bi jo lahko nasprotnik z gotovostjo napovedal že v svoji prvi potezi. Za tak sklep zadošča že kratek premislek. Podobno se prepričajte, da tudi veriga, ki bi jo lahko nasprotnik z gotovostjo napovedal že v svoji drugi potezi (torej z enim samim predhodnim vprašanjem o produktu), ne obstaja.

Ali obstaja veriga, ki jo lahko nasprotni igralec z gotovostjo napove že v svoji tretji potezi?

Vilko Domajnko

VODIKOVI ANTIATOMI

V naravi ima vsak *delec* svoj *antidelec* z enako maso, a nasprotnim električnim nabojem. Antidelec obstojnega delca je obstojen. Spoznanje povzame zakon, ki ga slikovito povemo takole: V nasprotnem svetu bi opazili natanko enake pojave kot v našem svetu. Namišljeni nasprotni svet dobimo iz našega sveta tako, da spremenimo znak vseh nabojev, zrcalimo vse pojave na izhodišču koordinatnega sistema in spremenimo smer časa.

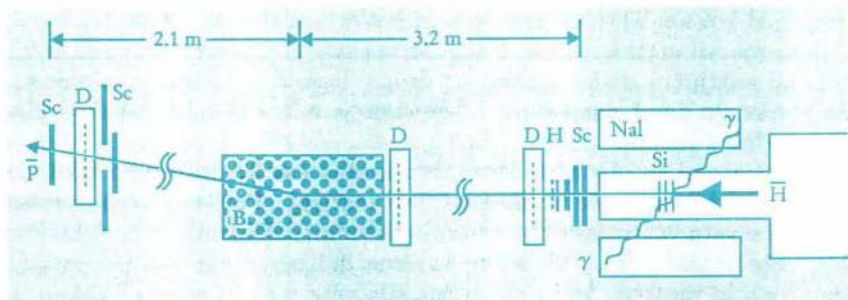
Na možnost, da obstaja elektron s pozitivnim nabojem, so namignili računi v okviru posebne teorije relativnosti. Leta 1932 so ta *pozitron* odkrili med delci, ki so jih rodili delci z veliko energijo iz vesolja v zemeljskem ozračju. Pozitroni so enako obstojni kot elektroni. Toda v navadnih razmerah pozitron hitro sreča elektron in se z njim pri *anihilaciji* spremeni v sevanje. Pozitron nastane v paru z elektronom pri trku delcev, če je na voljo dovolj energije.

Obstajajo tudi antidelci protonov, to je vodikovih jeder, *antiprotoni*. Antiproton nastane v paru s protonom pri trku delcev, če je na voljo dovolj energije, in to precej več kot pri pozitronu. O tem so se prepričali leta 1955, ko so zgradili velik pospeševalnik. Protone je pospešil do tolikšne kinetične energije kot napetost 6 milijard voltov.

Kot elektroni in protoni sestavljajo atome vodika, pozitroni in antiprotoni sestavljajo *antiatome* vodika. Te antiatome je zelo težko dobiti. V atom ali antiatom lahko zveže delca razmeroma šibka električna sila le, če skoraj mirujeta drug glede na drugega.

Antiprotoni se pri nastanku gibljejo skoraj s hitrostjo svetlobe. Najprej je treba doseči, da se gibljejo veliko počasneje, pravijo, da jih je treba "ohladiti". V ta namen so v ženevskem evropskem laboratoriju CERN leta 1984 dogradili LEAR – nizkoenergijski antiprotonski obroč – nekakšen "pojemalnik". Vanj so vbrizgali antiprotone s kolikor mogoče majhno energijo in jih še dalje "ohladili". Toda celo v skrajnem primeru so se še vedno gibali s hitrostjo več deset tisoč kilometrov na sekundo.

Na drugi strani se počasni pozitron hitro anihilira z elektronom v okolici in počasni antiproton s protonom. Rešitev je v pasteh za naelektrene delce, o katerih je Presek že pisal. Antiprotone spravijo v past tako, da postavijo past na pot gruč antiprotonov iz LEAR in jo potem z električnim poljem zaprejo. Nekateri od antiprotonov, ki predrejo plast snovi do srede pasti, se tam ujamejo. Pozitrone je lažje dobiti in spraviti v past, seva jih na primer umetni radioaktivni izotop natrija. Del naprave bi moral delovati kot past za pozitivne delce in drugi del kot past za negativne delce. Potem bi bilo treba oboje delce pripeljati skupaj in počakati,



Slika 1. Naprave, s katerimi so pri poskusu v CERN ugotavljali antiatome vodika. Antiatomi ($\bar{H}$) so prileteli iz vakuumске cevi LEAR in se v silicijevih števcih (Si) razdelili na pozitrone in antiprotone. Z merilnikom na natrijev jodid (NaI) so zaznali sevanje (γ, γ), ki je nastalo pri anihilaciji pozitrona z elektronom. Antiproton ($\bar{P}$) je nadaljeval pot skozi merilnike (scintilacijske merilnike Sc in H in žične komore D ter skozi magnet (B), ki je ukrivil njegovo pot). Po odzivu merilnikov se je bilo mogoče prepričati, da je šlo zares za delec z lastnostmi antiprotona.

da nastanejo antiatomi vodika. Antiatomov, ki so brez naboja, pa ne bo mogoče zadržati. Zamisli ne bo lako uresničiti. Vseeno upajo na uspeh v nekaj letih.

Ker bodo LEAR konec leta zaprli, je skupina fizikov iz Nemčije, Švice in Italije pod vodstvom Walterja Oelerta iz Jülicha pohitela in ustvarila in zaznala antiatome vodika. Na gruče antiprotonov v vakuumski cevi so iz drobne šobe usmerili curek atomov ksenona. Pri trkih med antiprotoni in jedri ksenona so nastali tudi pozitroni, od katerih so se nekateri zvezali z antiprotoni v vodikove antiatome. Teh je bilo malo, ker se je malo nastalih pozitronov gibalo vstric z antiprotoni s približno enako hitrostjo, ki je merila kar 270 tisoč kilometrov na sekundo. Nastali antiatomi so bili brez naboja, magnetno polje LEAR jih ni odklonilo kot naelektrene delce. Zato so odleteli naravnost. Na njihovo pot so na mestu, do katerega posamezni antiprotoni iz vakuumске cevi nikakor niso mogli priti, namestili zelo občutljive silicijeve merilnike. V njih so se antiatomi razdelili na antiprotone in pozitrone pri pojavu, čemur navadno pravimo ionizacija. Potem je prišlo do značilnih dogodkov. Pozitron se je v merilniku hitro zaustavil in se anihiliral z elektronom iz okolice. Na to so sklepali po značilnem sevanju, ki so ga zaznali merilniki iz natrijevega jodida z dodatkom talija okoli silicijevih merilnikov. Antiproton je odletel naprej. Z nekaj merilniki so se prepričali, da je šlo zares za delec z lastnostmi antiprotona. Po odzivu merilnikov so iz množice okoli tristo tisoč dogodkov

izluščili enajst takih, ki so zadovoljevali vse zahteve in jih je bilo mogoče pojasniti kot značilne za nastanek in konec antiatoma. Toda dva izmed njih so morali vzeti za lažna. S tem so upoštevali možnost, da so se merilniki po naključju enako odzvali na druge dogodke. Nazadnje so sklenili, da je nastalo devet antiatomov. Pomebno je bilo, da so jih nekako toliko napovedali z računi.

Antiatomi so obstajali samo zelo kratek čas 37 milijardin sekunde, tako da ni bilo mogoče z njimi izvajati merenj. Pozitron in antiproton namreč sevata valovanje z določenimi valovnimi dolžinami, ko ju električna sila veže v antiatom. Ali so te valovne dolžine enake kot pri sevanju elektrona in protona, ko ju električna sila veže v atom vodika? Zakon, ki smo ga omenili na začetku, zahteva, da so oboje valovne dolžine enake. Z merjenjem valovne dolžine bi bilo tedaj mogoče natančno preskusiti zakon. Takih merenj z majhnim številom atomov, ki obstajajo samo zelo kratek čas, ni bilo mogoče izvesti. Pač pa se nadejajo, da bo mogoče dobiti kakih tisoč antiatomov pri poskusu, ki ga načrtujejo v Fermijevem državnem laboratoriju blizu Chicaga v ZDA. Pri desetstisočih atomih bi bilo mogoče že meriti izsevane svetlobo, čeprav še nenatančno. Preden bodo zaprli LEAR, bodo izvedli ob njem še zadnji poskus z antiprotonsko pastjo, opisano v Preseku. Obetajo se zanimivi poskusi, a novih spoznanj najbrž še ne bodo prinesli tako kmalu.

Janez Strnad

PRAVILI ZA DELJIVOST S ŠTEVILOMA 7 IN 13

Pisal nam je Dušan Jan, ki hodi v prvi letnik tolminske gimnazije.

Poslal nam je sicer znani pravili za deljivost s številoma 7 in 13, vendar se je do njiju – resda nekoliko nerodno – prebil sam. Tole je ugotovil:

Naj bo $x = \overline{a_n a_{n-1} \dots a_5 a_4 a_3 a_2 a_1 a_0}$ desetiški zapis števila x . Pomnožimo njegove številke z desne zapored z 1, 3, 2, -1, -3, -2 itd., pri čemer se teh šest faktorjev periodično ponavlja. Produkte nato seštejmo. Dobimo število:

$$y = 1 \cdot a_0 + 3 \cdot a_1 + 2 \cdot a_2 - 1 \cdot a_3 - 3 \cdot a_4 - 2 \cdot a_5 + 1 \cdot a_6 + \dots$$

Trditev: Kadar je s 7 deljivo število y , je s 7 deljivo tudi število x .

Dušan je navedel še analogno pravilo za ugotavljanje deljivosti s številom 13. V tem primeru je treba številke z desne množiti zapored s števili 1, -3, -4, -1, 3, 4, ki se nato periodično ponavljajo. Če je dobljeno število deljivo s 13, je začetno število deljivo s 13.

Poskusite samostojno tudi vi dokazati pravilnost obeh trditev.

Dokažete pa lahko še več! Ne le, da sta števili x in y hkrati deljivi s 7, števili dajeta tudi *isti ostanek* pri deljenju s 7. Enako velja za števili iz kriterija za deljivost s 13.

Taka posplošitev velja tudi za tista tisočkrat prežuljena pravila za ugotavljanje deljivosti, ki ste jih srečali že v rosnih osnovnošolskih letih in nekoliko kasneje. Pobrskajte po spominu in preverite! Navedimo le eno, nikoli pozabljeno pravilo, a že v posplošeni obliki:

Pri deljenju poljubnega števila s 3 dobimo *isti ostanek*, kot če s 3 delimo vsoto njegovih števk v desetiškem zapisu.

In če boste vsemu temu kos, lahko nadaljujete. Spremenite osnovo (bazo) zapisa števil in poiščite kriterije deljivosti, sorodne tistim, ki jih poznate v desetiškem zapisu.

Vzorčni namig: Če število delimo s 6 (s 3, z 2), dobimo isti ostanek, kot če vsoto njegovih števk v *sedmiškem* zapisu delimo s 6 (s 3, z 2).

Marija Vencelj

KRIŽANKA "FIZIKI" – Rešitev s str. 288

fizik		1. fizika predmet 2. fizika predmet		3. fizika predmet	4. fizika predmet	5. fizika predmet	6. fizika predmet	7. fizika predmet	8. fizika predmet	9. fizika predmet	10. fizika predmet	11. fizika predmet	12. fizika predmet	13. fizika predmet	14. fizika predmet	15. fizika predmet	16. fizika predmet	17. fizika predmet	18. fizika predmet	19. fizika predmet	20. fizika predmet	21. fizika predmet	22. fizika predmet	23. fizika predmet	24. fizika predmet	25. fizika predmet	26. fizika predmet	27. fizika predmet	28. fizika predmet	29. fizika predmet	30. fizika predmet	31. fizika predmet	32. fizika predmet	33. fizika predmet	34. fizika predmet	35. fizika predmet	36. fizika predmet	37. fizika predmet	38. fizika predmet	39. fizika predmet	40. fizika predmet	41. fizika predmet	42. fizika predmet	43. fizika predmet	44. fizika predmet	45. fizika predmet	46. fizika predmet	47. fizika predmet	48. fizika predmet	49. fizika predmet	50. fizika predmet	51. fizika predmet	52. fizika predmet	53. fizika predmet	54. fizika predmet	55. fizika predmet	56. fizika predmet	57. fizika predmet	58. fizika predmet	59. fizika predmet	60. fizika predmet	61. fizika predmet	62. fizika predmet	63. fizika predmet	64. fizika predmet	65. fizika predmet	66. fizika predmet	67. fizika predmet	68. fizika predmet	69. fizika predmet	70. fizika predmet	71. fizika predmet	72. fizika predmet	73. fizika predmet	74. fizika predmet	75. fizika predmet	76. fizika predmet	77. fizika predmet	78. fizika predmet	79. fizika predmet	80. fizika predmet	81. fizika predmet	82. fizika predmet	83. fizika predmet	84. fizika predmet	85. fizika predmet	86. fizika predmet	87. fizika predmet	88. fizika predmet	89. fizika predmet	90. fizika predmet	91. fizika predmet	92. fizika predmet	93. fizika predmet	94. fizika predmet	95. fizika predmet	96. fizika predmet	97. fizika predmet	98. fizika predmet	99. fizika predmet	100. fizika predmet																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																												
fizika predmet		fizika predmet		fizika predmet		fizika predmet		fizika predmet		fizika predmet		fizika predmet		fizika predmet		fizika predmet		fizika predmet		fizika predmet		fizika predmet		fizika predmet		fizika predmet		fizika predmet		fizika predmet		fizika predmet		fizika predmet		fizika predmet		fizika predmet		fizika predmet		fizika predmet		fizika predmet		fizika predmet		fizika predmet		fizika predmet		fizika predmet		fizika predmet		fizika predmet		fizika predmet		fizika predmet		fizika predmet		fizika predmet		fizika predmet		fizika predmet		fizika predmet		fizika predmet		fizika predmet		fizika predmet		fizika predmet		fizika predmet		fizika predmet		fizika predmet		fizika predmet		fizika predmet		fizika predmet		fizika predmet		fizika predmet		fizika predmet		fizika predmet		fizika predmet		fizika predmet		fizika predmet		fizika predmet		fizika predmet		fizika predmet		fizika predmet		fizika predmet		fizika predmet		fizika predmet		fizika predmet		fizika predmet		fizika predmet		fizika predmet		fizika predmet		fizika predmet		fizika predmet		fizika predmet		fizika predmet		fizika predmet		fizika predmet		fizika predmet		fizika predmet		fizika predmet		fizika predmet		fizika predmet		fizika predmet		fizika predmet		fizika predmet		fizika predmet		fizika predmet		fizika predmet		fizika predmet		fizika predmet		fizika predmet		fizika predmet		fizika predmet		fizika predmet		fizika predmet		fizika predmet		fizika predmet		fizika predmet		fizika predmet		fizika predmet		fizika predmet		fizika predmet		fizika predmet		fizika predmet		fizika predmet		fizika predmet		fizika predmet		fizika predmet		fizika predmet		fizika predmet		fizika predmet		fizika predmet		fizika predmet		fizika predmet		fizika predmet		fizika predmet		fizika predmet		fizika predmet		fizika predmet		fizika predmet		fizika predmet		fizika predmet		fizika predmet		fizika predmet		fizika predmet		fizika predmet		fizika predmet		fizika predmet		fizika predmet		fizika predmet		fizika predmet		fizika predmet		fizika predmet		fizika predmet		fizika predmet		fizika predmet		fizika predmet		fizika predmet		fizika predmet		fizika predmet		fizika predmet		fizika predmet		fizika predmet		fizika predmet		fizika predmet		fizika predmet		fizika predmet		fizika predmet		fizika predmet		fizika predmet		fizika predmet		fizika predmet		fizika predmet		fizika predmet		fizika predmet		fizika predmet		fizika predmet		fizika predmet		fizika predmet		fizika predmet		fizika predmet		fizika predmet		fizika predmet		fizika predmet		fizika predmet		fizika predmet		fizika predmet		fizika predmet		fizika predmet		fizika predmet		fizika predmet		fizika predmet		fizika predmet		fizika predmet		fizika predmet		fizika predmet		fizika predmet		fizika predmet		fizika predmet		fizika predmet		fizika predmet		fizika predmet		fizika predmet		fizika predmet		fizika predmet		fizika predmet		fizika predmet		fizika predmet		fizika predmet		fizika predmet		fizika predmet		fizika predmet		fizika predmet		fizika predmet		fizika predmet		fizika predmet		fizika predmet		fizika predmet		fizika predmet		fizika predmet		fizika predmet		fizika predmet		fizika predmet		fizika predmet		fizika predmet		fizika predmet		fizika predmet		fizika predmet		fizika predmet		fizika predmet		fizika predmet		fizika predmet		fizika predmet		fizika predmet		fizika predmet		fizika predmet		fizika predmet		fizika predmet		fizika predmet		fizika predmet		fizika predmet		fizika predmet		fizika predmet		fizika predmet		fizika predmet		fizika predmet		fizika predmet		fizika predmet		fizika predmet		fizika predmet		fizika predmet		fizika predmet		fizika predmet		fizika predmet		fizika predmet		fizika predmet		fizika predmet		fizika predmet		fizika predmet		fizika predmet		fizika predmet		fizika predmet		fizika predmet		fizika predmet		fizika predmet		fizika predmet		fizika predmet		fizika predmet		fizika predmet		fizika predmet		fizika predmet		fizika predmet		fizika predmet		fizika predmet		fizika predmet		fizika predmet		fizika predmet		fizika predmet		fizika predmet		fizika predmet		fizika predmet		fizika predmet		fizika predmet		fizika predmet		fizika predmet		fizika predmet		fizika predmet		fizika predmet		fizika predmet		fizika predmet		fizika predmet		fizika predmet		fizika predmet		fizika predmet		fizika predmet		fizika predmet		fizika predmet		fizika predmet		fizika predmet	

NEKAJ ZAVITIH ZA ODVIJANJE –

Rešitev s str. 298

Predstavljene rešitve niso edine mogoče, so pa tiste, ki sem jih imel v mislih, ko sem sestavljal naloge. Takole sem si zamislil:

Skoraj kvadrati: Členi zaporedja so popolni kvadrati z alternirajočim predznakom. Naslednji člen je 25.

Zmanjšane potence: Elementi zaporedja so števila oblike $2^n - 1$. Naslednji števili sta 31 in 63.

Združitev: Število v zgornjem trikotniku je vsota števil v obeh spodnjih trikotnikih. Manjkajoče število je $731 + 682 = 1413$.

Več kot števila: Zaporedje sestavljajo praštevila. Naslednji praštevili sta 17 in 19.

Prepletanje: Člene zaporedja dobivamo tako, da izmenično prištevamo 3 in odštevamo 1. Naslednja člena sta 8 in 7.

Ulomki: Zaporedje je sestavljeno iz ulomkov oblike $\frac{n^2+1}{n}$. Nadaljnja ulomka sta $\frac{26}{5}$ in $\frac{37}{6}$.

Četrtna levo in desno: Srednje število dobimo tako, da vzamemo četrtno vsote levega in desnega števila. Manjkajoče število je 15.

Obrati in še kaj: Naslednje število v zaporedju dobimo tako, da prejšnjemu prištejemo ena in ga obrnemo. Naslednja tri števila v zaporedju so 6322, 3236 in 7323.

Plesoče številke: Število na levi dobimo tako, da vzamemo prvo in zadnjo, število na desni pa tako, da staknemo srednjo in prvo številko števila, ki je med oklepajema na sredini vrstice. Manjkajoči števili v zadnji vrstici sta 19 in 81.

Trojke: Ulomki v zaporedju so oblike $\frac{k}{(k+1)+(k+2)}$. Števec naslednjega ulomka je enak vsoti števil v imenovalcu prejšnjega. Naslednji ulomek je $\frac{29}{30+31}$.

Z nogami brez rok: Število na glavi figure dobimo, če od vsote števil, zapisanih pod nogama, odštejemo števili, zapisani poleg rok: $8 = (5 + 8) - (3 + 2)$. Manjkajoče število je 2.

Neznana osnova: Označimo z b osnovo, v kateri velja $12 + 12 = 101$. To nam da enačbo $(b + 2) + (b + 2) = b^2 + 1$ oziroma $b^2 - 2b - 3 = 0$, ki ima rešitvi $b = 3$ in $b = -1$. Iskana osnova je torej $b = 3$. V njej je $22 + 22 = 121$.

Lepljenje: Število na sredini trikotnika dobimo tako, da staknemo števke v vogalih. V sredino desnega trikotnika moramo vpisati število 316.

Dvojiški vzorci: Števila iz zaporedja 2, 11 in 47 imajo dvojiške zapise $10_{(2)}$, $1011_{(2)}$ in $101111_{(2)}$. Slediti jim mora število z dvojiškim zapisom $1011111_{(2)}$, to pa je število 191. Na elemente zaporedja lahko pogledamo tudi drugače; to so ravno števila oblike $3 \cdot 4^n - 1$.

Dvodelna torta: Število -28 je po absolutni vrednosti enako produktu števil 4 in 7. Ker je $-36 = -(6 \cdot 6)$, manjka število 6.

Vsote: Števila na desni strani so vsote števk števil na levi. Manjkajoče število je 9.

Prafaktorji: Števila na desni pomenijo število različnih prafaktorjev v praštevilskem razcepu števil z leve. Ker je $1996 = 2^2 \cdot 499$, manjka število 2.

Dodaj ali odvzemi: Rezultat dobimo tako, da števko, ki leži nižje od prejšnje, odštejemo, števko, ki leži višje, pa prištejemo. Začetna vrednost je enaka prvi števk. Iz $1^2 3^4$ po zgornjem navodilu dobimo $1+2-3+4=4$.

Vedno več: Števila v kvadratih so dobljena iz sheme

a	$a+1$
$a+6$	$a+3$

Drugi in tretji kvadrat sestavljajo števila

2	3
8	5

4	5
10	7

Koordinate: Število v razpredelnici izračunamo tako, da od številke vrstice, v kateri je zapisano, odštejemo številko stolpca, v katerem se nahaja. V drugi vrstici manjka število -2 , v tretji število 0, v zadnji pa število 3.

Druga na prvo: Števila v tretji vrstici dobimo, če elemente iz druge vrstice potenciramo z eksponentom, ki ga določa število iz prve vrstice. Tako je $(-1)^5 = -1$, $1^3 = 1$ in $3^2 = 9$. Manjka število 3, saj je $2^3 = 8$.

Stikanje tako in drugače: Če staknemo števke iz levega in desnega trikotnika, dobimo vsoto števil v zgornjem in spodnjem trikotniku. Manjkajoči števili v desnem kvadratu sta 3 in 7.

Omejeni prafaktorji: Zaporedje vsebuje natanko tista števila, ki v razcepu na prafaktorje vsebujejo kvečjemu praštevili 2 in 3. Naslednje tako število je $27 = 3^3$.

Stiska: Predpis, po katerem iz števila dobimo rezultat, je izračun produkta števk. Produkt števk števila 456 je 120.

Združeni kvadrati: Elementi tretje vrstice so vsote kvadratov števil iz zgornjih dveh vrstic. Ker je $25 = 4^2 + 3^2$, je manjkajoče število enako 3.

Nerodna pisava: Pravilno zapisana se prva enakost glasi $256 = 2^8$. Iskano število je $9 = 3^2$.

Martin Juvan

NARAŠČAJOČA IN PADAJOČA ČETA ŠTEVK – Rešitev s str. 338

Število 123 456 789 je največje število, ki ima v desetiškem zapisu vsako naslednjo števko večjo od prejšnje. To je tudi edino 9-mestno število s to lastnostjo. Vsa ostala taka števila dobimo iz zapisa števila 123 456 789 z opuščanjem ene, dveh, treh, ..., sedem števk, pri čemer ohranjene števke obdržijo svoj vrstni red. Če opustimo po eno števko, dobimo še $9 = \binom{9}{1}$

8-mestnih števil. Po dve števki lahko opustimo na toliko načinov, kolikor je kombinacij drugega reda v množici z devetimi elementi, torej dobimo $\binom{9}{2}$ 7-mestnih števil, itd. Nazadnje dobimo še $\binom{9}{7}$ 2-mestnih števil. Vseh je torej

$$\begin{aligned} & 1 + \binom{9}{1} + \binom{9}{2} + \binom{9}{3} + \binom{9}{4} + \binom{9}{5} + \binom{9}{6} + \binom{9}{7} = \\ & = 1 + \binom{9}{1} + 2 \left[\binom{9}{2} + \binom{9}{3} + \binom{9}{4} \right] = 1 + 9 + 2(36 + 84 + 126) = 502. \end{aligned}$$

Največje število, ki izpolnjuje pogoj drugega dela naloge, je 10-mestno število 9 876 543 210. Ostala števila dobimo spet z opuščanjem števk v tem številu. Število vseh daje to pot vsota

$$\begin{aligned} & 1 + \binom{10}{1} + \binom{10}{2} + \binom{10}{3} + \binom{10}{4} + \binom{10}{5} + \binom{10}{6} + \binom{10}{7} + \binom{10}{8} = \\ & = 1 + \binom{10}{1} + 2 \left[\binom{10}{2} + \binom{10}{3} + \binom{10}{4} \right] + \binom{10}{5} = \\ & = 1 + 10 + 2(45 + 120 + 210) + 252 = 1013. \end{aligned}$$

Marija Vencelj

MAGIČNO MNOŽENJE CELIH ŠTEVIL ZA MLAJŠE BRALCE – Rešitev s str. 333

1. Različnih pokrivanj je 36, če upoštevamo tudi vrstni red polaganja žetonov.
Če pa nas zanimajo le na koncu postopka pokrita števila, je možnih šest različnih trojk pokritih števil.
2. Vsi produkti so enaki 720, torej med seboj enaki.
3. Da bi videli, zakaj so vsi dobljeni produkti med seboj enaki, zapišimo števila številskega kvadrata nekoliko drugače:

12	3	-15		$3 \cdot 4$	$3 \cdot 1$	$3 \cdot (-5)$
-24	-6	30	=	$-6 \cdot 4$	$-6 \cdot 1$	$-6 \cdot (-5)$
8	2	-10		$2 \cdot 4$	$2 \cdot 1$	$2 \cdot (-5)$

Vsako število se je dalo zapisati kot produkt dveh faktorjev, pri čemer imajo vsa števila iz iste vrstice enak prvi faktor, vsa števila iz istega stolpca pa enak drugi faktor.

Posamezni dobljeni produkt je produkt treh števil, izbranih iz vsake vrstice po eno, pa takó, da je tudi iz vsakega stolpca natanko eno. To pomeni, da nastopajo v produktu vsi prvi (vrstični) faktorji 3, -6, 2, pa tudi vsi drugi faktorji (faktorji stolpcev) 4, 1, -5 natanko enkrat. Vsi produkti so torej enaki

$$3 \cdot (-6) \cdot 2 \cdot 4 \cdot 1 \cdot (-5) = 720.$$

Marija Vencelj

PRAŠTEVILSKA – Rešitev s str. 325

Kvadrat poljubnega lihega števila lahko zapišemo v obliki

$$(2k+1)^2 = 4k(k+1) + 1, \quad k \in \mathbb{Z},$$

od koder zaradi $2|k(k+1)$ takoj sledi, da je ostanek pri deljenju kvadrata lihega števila z 8 enak 1.

Denimo, da so $x_1, x_2, \dots, x_{1996}$ različna praštevila. Če so vsa liha, je vsota $x_1^2 + x_2^2 + \dots + x_{1996}^2$ soda in večja od 4, zato ne more biti kvadrat

praštevila. Če pa niso vsa liha, je eno enako 2, druga pa so liha. Tedaj po prvem delu rešitve vsota $x_1^2 + x_2^2 + \dots + x_{1996}^2$ pri deljenju z 8 da enak ostanek kot število $2^2 + 1995$. Ta ostanek je 7, zato vsota $x_1^2 + x_2^2 + \dots + x_{1996}^2$ ni popolni kvadrat.

Naj bo zdaj p praštevilo iz drugega dela naloge. Če so $p_1, p_2, \dots, p_{1996}$ praštevila in velja $p^2 = p_1^2 + p_2^2 + \dots + p_{1996}^2$, je $p^2 \geq 1996 \cdot 2^2 > 89^2$. Najmanjše praštevilo, ki presega 89, je 97, zato velja $p \geq 97$. Denimo, da je

$$p = 97, \quad p_1 = \dots = p_n = 2 \text{ in } p_{n+1} = \dots = p_{1996} = 3.$$

Potem je

$$4n + 9(1996 - n) = 97^2,$$

od tod pa že dobimo $n = 1711$ in tedaj $97^2 = 1711 \cdot 2^2 + 285 \cdot 3^2$. Iskano število p je torej enako 97.

Boris Lavrič

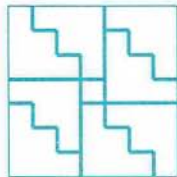
TRIKOTNIŠKA ŠTEVILA IN POPOLNI KVADRATI – Rešitev s str. 342

Število m je trikotniško natanko tedaj, ko je

$$m = 1 + 2 + \dots + n = \frac{n(n+1)}{2}$$

za neki naravni n . Iščemo torej naravno število n , ki reši enačbo $n^2 + n - 2m = 0$. Pozitivna rešitev te kvadratne enačbe je $n = \frac{1}{2}(-1 + \sqrt{8m+1})$ in je naravno število natanko takrat, ko je $8m+1$ popolni kvadrat. Trditev smo dokazali.

Veljavnost trditve pa lahko spoznamo tudi po geometrijski poti. Na sliki vidimo, kako lahko z osmimi 'trikotniki' in enim kvadratom zapolnimo veliki kvadrat. Prikazan je primer za $m = 6$:



$$8 \cdot (1 + 2 + 3) + 1 = 49 = 7^2,$$

idejo pa očitno lahko uporabimo za poljubno trikotniško število.

Ivan Lisac

ŠE ENKRAT SAM SEBE – Rešitev s str. 338

V programskem jeziku C želimo napisati program, ki bo izpisal sam sebe. Seveda bi radi to storili brez uporabe datotek. Ker sta C in pascal po svoji naravi zelo podobna programska jezika, je osnovna ideja enaka kot pri programu, ki isto nalogo reši v pascalu. Ogledate si ga lahko v 5. številki lanskega letnika Preseka na straneh 308 in 309. V C-ju tak program izgleda takole:

```
#include <stdio.h>

int main(void)
{
    int i, j;
    char *ukaz[] = {
        "#include <stdio.h>",
        "",
        "int main(void)",
        "{",
        "    int i, j;",
        "    char *ukaz[] = {",
        "    };",
        "",
        "    for (i = 0; i < 6; ++i) printf(!%s?n!, ukaz[i]);",
        "    for (i = 0; i < 17; ++i) printf(!    ?!%s?!,?n!, ukaz[i]);",
        "    for (i = 8; i < 15; ++i)",
        "        for (j = 0; ukaz[i][j]; ++j)",
        "            if (ukaz[i][j] == 33) ukaz[i][j] = '?!';",
        "            else if (ukaz[i][j] == 63) ukaz[i][j] = '??';",
        "    for (i = 6; i < 17; ++i) printf(!%s?n!, ukaz[i]);",
        "    return 0;",
        "};",
    };

    for (i = 0; i < 6; ++i) printf("%s\n", ukaz[i]);
    for (i = 0; i < 17; ++i) printf("    \"%s\\",\n", ukaz[i]);
    for (i = 8; i < 15; ++i)
        for (j = 0; ukaz[i][j]; ++j)
            if (ukaz[i][j] == 33) ukaz[i][j] = '\\';
            else if (ukaz[i][j] == 63) ukaz[i][j] = '\\';
    for (i = 6; i < 17; ++i) printf("%s\n", ukaz[i]);
    return 0;
}
```

Podobno kot pri rešitvi v pascalu tudi tokrat posamezne vrstice programa shranimo v tabelo nizov. Vendar tega ne storimo za vse vrstice, ampak le za tiste, ki se pojavijo pred ali za naštevanjem nizov v tabeli ukaz.

VERIGA – Odgovori na vprašanja s str. 355

0. Najprej na sliki 1 objavljamo celotno verigo, ki je ostala bralcu za vajo še iz primera v tekstu.
1. Obstajajo trije različni osnovni tipi verig v tabeli 3×3 :



a



b



c

4	12	11	2	3
3	13	10	1	4
2	14	9	8	5
1	15	16	7	6
	a	b	c	d

Slika 1.

Število sploh vseh verig

$$n = n_a + n_b + n_c = 4 \cdot 2 \cdot 2 + 4 \cdot 2 \cdot 2 + 2 \cdot 2 \cdot 2 = 40$$

dobimo, če upoštevamo vse njihove zasuke za večkratnike pravega kota okrog središča kvadrata, zrcaljenje čez eno od simetrijskih osi kvadrata (denimo – navpično) in dejstvo, da je vsaka od teh verig v resnici “orientirana”, saj lahko vpisujemo števila v tabelo vzdolž verige v dveh smereh.

2. Takšne verige ni. O tem se zlahka prepričaš tudi sam – lahko s preverjanjem vseh možnih verig v tabeli, oziroma z odgovorom na prejšnje vprašanje, lahko pa tudi s pomočjo odgovora na naslednje vprašanje.
3. Verige z začetkom in koncem v dveh diagonalno ogliščnih poljih ni. Da se o tem prepričamo, pobarvajmo najprej polja tabele tako kot šahovnico, torej črno-belo. Vsaka veriga v tabeli ima natanko 15 prehodov iz enega polja na drugo in vsak prehod veže polji različnih barv. Če začnemo šteti prehode od začetnega polja v verigi naprej, dobimo po vsakem lihem številu prehodov polje, ki je z izhodiščnim različno obarvano, po vsakem sodem številu prehodov pa polje z enako obarvanostjo. Končno polje dobimo na ta način po petnajstem prehodu, in ker je 15 liho število, se mora torej veriga v vsakem primeru končati na polju z drugačno barvo, kot jo ima njeno izhodiščno polje. Toda obe diagonalno ogliščni polji tabele sta obarvani enako! To pomeni, da iskane verige pač ni mogoče sestaviti.

Seveda lahko uporabimo ta dokaz tudi za potrditev splošnejše trditve, da ne obstaja veriga, ki bi se začela in končala na poljih, ki sta v smislu šahovnice enako obarvani.

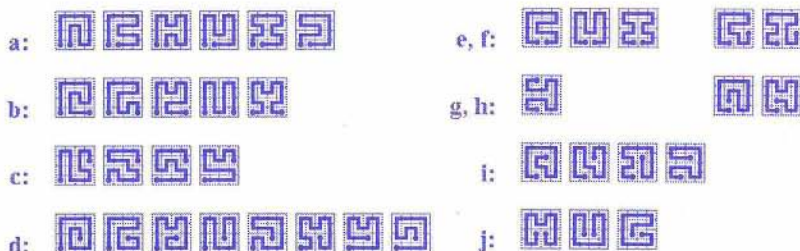
4. Vseh verig je 552. Preštevanja se lotimo podobno kakor pri verigah v tabeli 3×3 v prvem vprašanju. Vseh 10 osnovnih tipov verig prikazuje slika 2. V osnovi so razvrščeni z ozirom na različna začetna oziroma končna polja. Tedaj je:

$$\begin{aligned} n &= n_a + n_b + n_c + n_d + n_e + n_f + n_g + n_h + n_i + n_j = \\ &= 96 + 64 + 64 + 128 + 32 + 32 + 8 + 32 + 64 + 32 = \\ &= 552, \end{aligned}$$

kjer je, denimo:

$$n_b = 4 \cdot 2 \cdot 2 + 4 \cdot 2 \cdot 2 + 4 \cdot 2 \cdot 2 + 4 \cdot 1 \cdot 2 + 4 \cdot 1 \cdot 2 = 64.$$

Ostale delne vsote pa bo lahko bralec s pomočjo risbe in navedenega primera brez težav sestavil tudi sam.



Slika 2.

5. Omenjene verige bralcu ni treba ravno "pretirano" iskati, saj mu je na voljo kar uvodni primer v članku. V prvih dveh potezah je treba vprašati tako, kot kaže slika 3. Iz obeh odgovorov (1680 in 24024) je moč z gotovostjo sestaviti navedeno verigo in jo napovedati v naslednji potezi.

Podobnih verig, ki jih je mogoče z gotovostjo napovedati že v tretji potezi, je še precej. Vendar je potrebno kar precej igralške rutine, da se igralec nauči postavljati učinkovita vprašanja za hitro odkrivanje teh verig, dober nasprotnik pa najbrž tudi ne bo sestavil verige, ki se jo da zlahka uganiti.

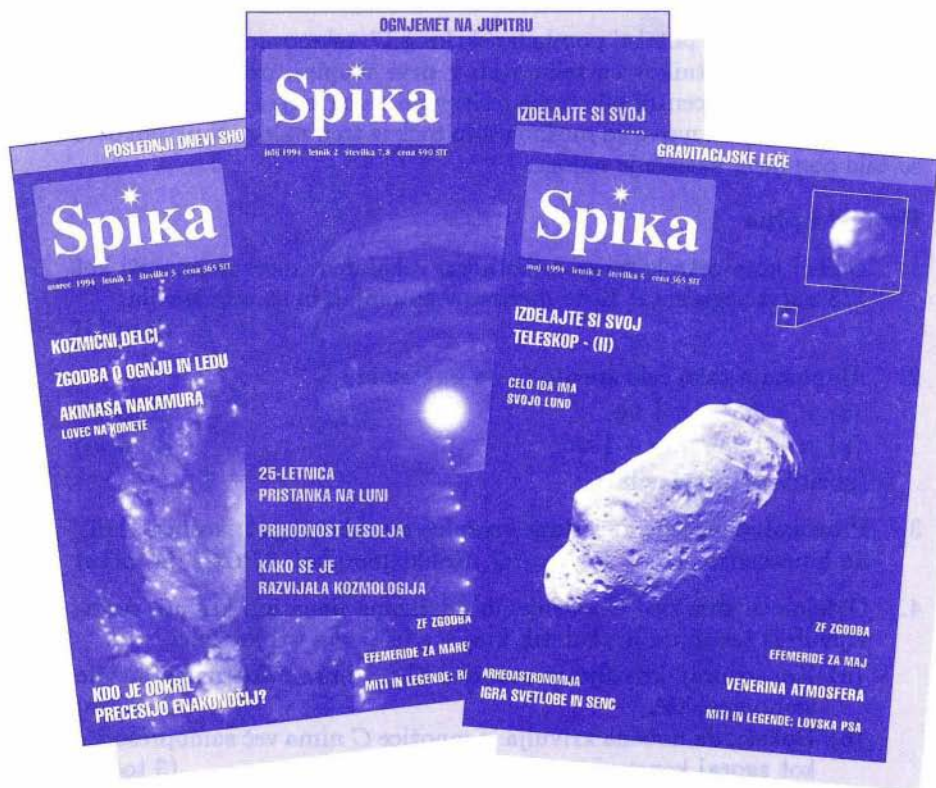
4	3	4	5	6
			1680	
3	2	9	8	7
2	1	10	11	12
			24024	
1	16	15	14	13
	a	b	c	d

Slika 3.

Vilko Domajnko

**PRVA
SLOVENSKA
ASTRONOMSKA
REVIJA**

Spika



**VSAK MESEC NOVA, BARVNA ŠTEVILKA REVİJE ZA LJUBITELJE ASTRONOMIJE,
KI PRINAŠA NOVICE, VSE O SONCU, PLANETIH, ZEMLJI, ZVEZDAH,
GALAKSIJAH, ASTROFIZIKI, KOZMOLOGIJI, ASTRONAVTIKI,
ASTROFOTOGRAFIJI, ARHEOASTRONOMIJI...
ZA AMATERJE MESEČNO SVEŽE EFEMERIDE IN ZVEZDNA KARTA,
O TELESKOPIH, UPORABNIH PROGRAMIH...
IN ŠE OSNOVE ZA ZAČETNIKE, RAZISKOVALNI KOTIČEK, TESTI,
ZNANSTVENA FANTASTIKA, MALI OGLASI TER NAGRADNA IGRA!**

Revijo naročajte na naslov: Spika, Poštni predal 9, 61109 Ljubljana. Četrtletna naročnina (15% popusta) je 1070,00 SIT, polletna naročnina (20% popusta) je 2015,00 SIT, celoletna naročnina (25% popusta) je 3780,00 SIT.

17. MEDNARODNO MATEMATIČNO TEKMOVANJE MEST – POMLADANSKI KROG

V začetku marca je potekal pomladanski krog 17. tekmovanja mest. Dijaki prvih in drugih letnikov so tekmovali v prvi skupini, ostali pa v drugi skupini. Tekmovalcem ni bilo treba rešiti vseh nalog, saj se izdelek vsakega tekmovalca oceni z največjo možno vsoto točk iz treh nalog. V prvem delu so bile ponujene naslednje naloge:

Prva skupina

1. Določi kote ostrokotnega trikotnika, v katerem meri najmanjši kot $1/5$ največjega kota. Kote merimo v stopinjah in so cela števila. (2 točki)
2. Ali obstaja tako celo število n , da so števila
 - (a) $n - 96$, n , $n + 96$, (2 točki)
 - (b) $n - 1996$, n , $n + 1996$ (2 točki)
 (pozitivna) praštevila?
3. Pravokotna projekcija včrtane krožnice pravokotnega trikotnika ABC na hipotenuzo AB je daljica PQ . Koliko meri kot $\angle PCQ$? (4 točke)
4. Oglejmo si množico C sklenjenih odsekoma linearnih krivulj, sestavljenih iz šestih daljic, katerih krajišča ležijo na isti krožnici.
 - (a) Konstruiraj krivuljo iz množice C , ki ima maksimalno število samopresečišč. (3 točke)
 - (b) Dokaži, da nobena krivulja iz množice C nima več samopresečišč kot zgoraj konstruirana krivulja. (3 točke)
5. Igralca zaporedoma označujeta neoznačena polja tabele 10×10 ; prvi z znakom $*$, drugi z znakom o . Ko so vsa polja označena, določita števili a in b . Naj število a pove, kolikokrat se pojavi pet zaporednih znakov $*$ v katerikoli vrstici, stolpcu ali diagonalni. (Šest zaporednih znakov štejemo kot dve peterki, sedem zaporednih znakov štejemo kot tri peterke, ...) Podobno naj število b pove, kolikokrat se pojavi pet zaporednih znakov o v katerikoli vrstici, stolpcu ali diagonalni. Prvi igralec zmaga, če je $a > b$, izgubi, če je $a < b$, in igra neodločeno, če je $a = b$. Ali ima prvi igralec strategijo, pri kateri ne glede na poteze drugega igralca
 - (a) nikoli ne izgubi; (3 točke)
 - (b) vedno zmaga? (3 točke)

Druga skupina

1. Pri raziskavi javnega mnenja so vprašali 100 oseb, ali mislijo, da bo novi predsednik boljši od sedanjega. Označimo število tistih oseb, ki so odgovorile "boljši" z a , "enak" z b in "slabši" s c . Indeks "družbenega optimizma" podajata števili $m = a + b/2$ in $n = a - c$. Določi število n , če je $m = 40$. (3 točke)
2. Zapišimo števke 1, 2, ..., 9 v poljubnem vrstnem redu. Vsake tri zaporedne števke določajo neko trimestno število. Kolikšna je največja možna vrednost vsote vseh sedmih, tako določenih trimestnih števil? (3 točke)
3. Oglejmo si produkt števil $1!, 2!, \dots, 100!$. Ali lahko iz tega produkta izpustimo tak faktor, da bo dobljeno število popolni kvadrat? ($n! = 1 \cdot 2 \cdot \dots \cdot n$, $1! = 1$) (4 točke)
4. Ali lahko razrežemo prostor na pravilne tetraedre in oktaedre? (Plašč tetraedra je sestavljen iz 4 enakostraničnih trikotnikov, plašč oktaedra pa iz 8 enakostraničnih trikotnikov.) (4 točke)
5. Nad stranicami trikotnika ABC so načrtani kvadrati $ABMN$, $BCKL$ in $ACPQ$, ki ležijo zunaj tega trikotnika. Nad daljicama NQ in PK sta načrtana kvadrata $NQZT$ in $PKXY$. Razlika ploščin kvadratov $ABMN$ in $BCKL$ je d . Koliko meri razlika ploščin kvadratov $NQZT$ in $PKXY$,
 (a) če je trikotnik ABC pravokoten; (3 točke)
 (b) pri poljubnem trikotniku ABC ? (2 točki)

V drugem delu spomladanskega kroga tekmovanja mest pa so tekmovalci izbirali med šestimi nalogami. Kot običajno, tudi letos objavljamo po dve nalogi za vsako skupino.

Prva skupina

1. V ravnini ležita disjunktni krožnici s središčema v O_1 in O_2 . Skupna tangenta se dotika krožnic zaporedoma v točkah A_1 in A_2 . Daljica O_1O_2 seka krožnici zaporedoma v točkah B_1 in B_2 . Presečišče premic A_1B_1 in A_2B_2 označimo s C . Izberimo še tako točko D na premici A_1A_2 , da sta premici CD in B_1B_2 pravokotni. Dokaži, da je $|A_1D| = |DA_2|$. (3 točke)
2. Igralca zaporedoma premikata trdnjavo po tabli dimenzij $m \times n$. Igralec, ki je na potezi, lahko premakne trdnjavo eno ali več polj bodisi vodoravno ali pa navpično. Vsako polje, preko katerega trdnjava gre ali pa se na njem ustavi, pobarvamo. Trdnjava ne sme prečkati ali se ustaviti na nobenem pobarvanem polju. Igralec, ki ne more več

narediti poteze, izgubi. Na začetku stoji trdnjava v kotu. Kdo lahko vedno zmaga, če oba igrata preudarno? Opiši zmagovalno strategijo! (5 točk)

Druga skupina

- Naj bo D taka točka na stranici AB enakokrakega trikotnika ABC s kotom α pri vrhu A , da je $|AD| = \frac{1}{n} |AB|$, kjer je n naravno število. Točke $P_1, P_2, \dots, P_{n-1}$ naj razdelijo stranico BC na n enakih delov. Izračunaj vsoto

$$\sphericalangle DP_1A + \sphericalangle DP_2A + \dots + \sphericalangle DP_{n-1}A$$

- pri $n = 3$; (3 točke)
 - za poljubno naravno število $n > 2$. (4 točke)
- V vsako polje tabele dimenzij $2^n \times n$ vpišimo število 1 ali -1 tako, da je vseh 2^n vrstic različnih, nato pa nekatera vpisana števila spremenimo v 0. Dokaži, da lahko izberemo eno ali več vrstic tako, da je
 - vsota vseh števil v izbranih vrsticah enaka 0; (4 točke)
 - vsota izbranih vrstic enaka ničelni vrstici (vrstice seštevamo kot vektorje). (5 točk)

Matjaž Željko

17. MEDNARODNO MATEMATIČNO TEKMOVANJE MEST – JESENSKI KROG – Rešitve s str. 318

Poročilo s tekmovanja in izbrane naloge smo objavili v prejšnji številki Preseka.

Rešitve nalog prvega dela

Prva skupina

- Dve vprašanji seveda ne zadoščata, ker dve premici ne določata omejenega območja v ravnini. Tri vprašanja zadoščajo: pri prvih dveh izberemo za "testni" premici diagonali kvadrata, pri tretjem pa nosilko tiste stranice, ki leži v istem kvadrantu, ki ga določata testni premici, kot točka P .
- Naj bo $n \in \mathbb{N}$. Oglejmo si števila $1, 2, 2^2, 2^3, \dots, 2^{2n+1}$ in $3, 3 \cdot 2, 3 \cdot 2^3, 3 \cdot 2^5, \dots, 3 \cdot 2^{2n-1}$; skupaj torej $3n + 3$ števil. Njihov najmanjši skupni večkratnik je očitno $3 \cdot 2^{2n+1}$, vsota pa

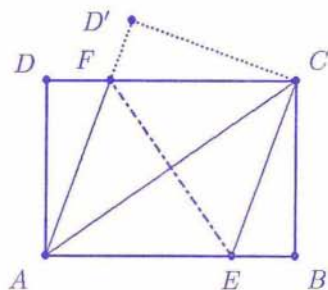
$$2^{2n+2} - 1 + 3 + 3 \cdot 2 \cdot \frac{2^{2n} - 1}{2^2 - 1} = 3 \cdot 2^{2n+1}.$$

Pri $n = 33$ imamo torej 102 števili: 1, 2, 4, 8, 16, 32, ..., 2^{67} in 3, 6, 24, 96, ..., $3 \cdot 2^{65}$. Ko v tem naboru števil zamenjamo 4 in 8 z 12, števili 16 in 32 pa s 48, dobimo iskanih 100 števil.

3. Ker pri prepogibanju vzdolž EF oglišče A sovpade z ogliščem C , je

$$|DF| < |AF| = |CF|$$

in zato ploščina trikotnika ADF ne doseže $1/4$. Ker poteka EF skozi središče pravokotnika, je ploščina štirikotnika $BEFC$ enaka $1/2$. Ploščina dobljenega petkotnika je res manjša od $3/4$.



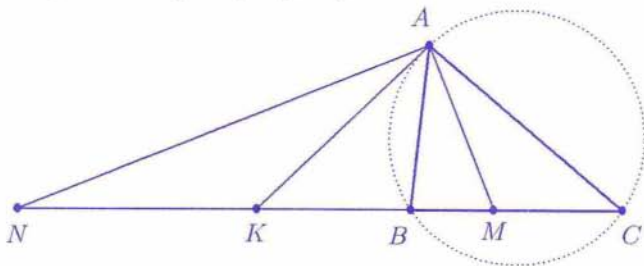
4. Kot $\angle KAB$ med tetivo AB in tangento AK je enak obodnemu kotu $\angle BCA$ nad to tetivo. Upoštevamo še, da je AM notranja simetrala kota pri A , pa imamo

$$\angle KAM = \angle KAB + \angle BAM = \angle BCA + \angle MAC = \angle KMA.$$

Zunanja in notranja simetrala pri A se sekata pravokotno, zato je

$$\angle KNA = \frac{\pi}{2} - \angle KMA = \frac{\pi}{2} - \angle KAM = \angle KAN.$$

Dokazali smo torej, da ležijo točke M , N in A na krožnici s središčem v K in polmerom $|KM| = |KN|$.



Druga skupina

- Enako kot prva naloga za prvo skupino.
- Števila 1, 3, 7 in 9 potrjujejo, da je odgovor na prvo vprašanje pritrilen.

Predpostavimo sedaj, da obstaja pet različnih pozitivnih celih števil z zahtevano lastnostjo. Če imajo tri števila izmed njih enak ostanek

pri deljenju s 3, bo vsota (ki po predpostavki naloge ne more biti enaka 3) teh treh števil deljiva s 3. Prišli smo do protislovja. Torej imata največ dve števili enak ostanek pri deljenju s 3. Ker je vseh števil pet, v tem primeru obstajajo tri izmed njih, ki imajo paroma različne ostanki pri deljenju s 3. Spet smo prišli do protislovja, saj je potem vsota teh treh števil deljiva s 3.

3. Šestmestnih števil, pri katerih je prva številka enaka 5, je 10^5 . Naj bo n naravno število, katerega kvadrat je dvanajstmestno število, ki se začne s 5. Ocenimo:

$$49 \cdot 10^{10} < 50 \cdot 10^{10} \leq n^2 < 60 \cdot 10^{10} < 64 \cdot 10^{10}.$$

Potem pa je

$$7 \cdot 10^5 < n < 8 \cdot 10^5.$$

Ker od tod sledi, da imamo za število n manj kot 10^5 možnosti, je odgovor na zastavljeno vprašanje nikalen.

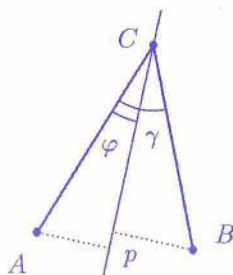
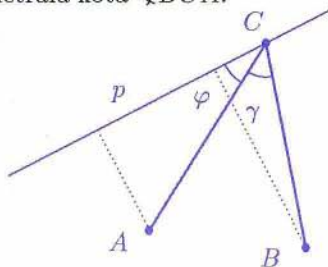
4. Če so točke A , B in C kolinearne, je očitno iskana premica tista premica m skozi C , ki je pravokotna na premico AB . Premica m je v tem primeru natančno določena.

Predpostavimo sedaj, da točke A , B in C niso kolinearne, ter označimo $a = |BC|$, $b = |AC|$ in $\sphericalangle BCA = \gamma \in (0, \pi)$. Potegnimo premico p skozi točko C in s φ označimo kot med njo in daljico AC .

Če točki A in B ležita na istem bregu premice p , je $d(A, p) = a \sin \varphi$ in $d(B, p) = a \sin(\gamma + \varphi)$. Sledi

$$d(A, p) \cdot d(B, p) = ab \sin \varphi \sin(\gamma + \varphi) = \frac{1}{2} ab (\cos \gamma - \cos(\gamma + 2\varphi)).$$

Gornji produkt bo zavzel svojo maksimalno vrednost $\frac{1}{2} ab (\cos \gamma + 1)$, če postavimo $\varphi = \frac{1}{2}(\pi - \gamma)$. Premica p je v tem primeru zunanja simetrala kota $\sphericalangle BCA$.



Če pa točki A in B ležita na različnih bregovih premice p , je

$$d(A, p) \cdot d(B, p) = ab \sin \varphi \sin(\gamma - \varphi) = \frac{1}{2} ab(\cos(2\varphi - \gamma) - \cos \gamma).$$

Gornji produkt bo zavzel svojo maksimalno vrednost $\frac{1}{2} ab(1 - \cos \gamma)$, če postavimo $\varphi = \frac{1}{2} \gamma$. Premica p je v tem primeru notranja simetrala kota $\sphericalangle BCA$.

Preostane nam še, da analiziramo, katera od simetral nam da večjo vrednost produkta $d(A, p) \cdot d(B, p)$. Če je kot γ ostri, je

$$\frac{1}{2} ab(\cos \gamma + 1) > \frac{1}{2} ab(1 - \cos \gamma)$$

in zato v tem primeru za premico m vzamemo zunanjo simetralo kota $\sphericalangle BCA$. Če je kot γ topi, za premico m vzamemo notranjo simetralo kota $\sphericalangle BCA$. V primeru $\gamma = \frac{1}{2} \pi$ pa zavzameta izraza $\frac{1}{2} ab(\cos \gamma + 1)$ in $\frac{1}{2} ab(1 - \cos \gamma)$ enaki vrednosti. Za premico m lahko sedaj vzamemo ali zunanjo ali pa notranjo simetralo kota $\sphericalangle BCA$. Premica m le v tem primeru ni določena enolično.

Rešitve nalog drugega dela

Prva skupina

- Označimo n -ti člen tega zaporedja z a_n . Iz besedila naloge izpeljemo

$$a_{n+1} = a_n a_{n-1} \cdots a_1 - 1 = a_n(a_n + 1) - 1$$

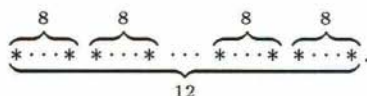
oziroma $a_n^2 = a_{n+1} - a_n + 1$. Sledi

$$\begin{aligned} \sum_{n=1}^{70} a_n^2 &= \sum_{n=1}^5 a_n^2 + \sum_{n=6}^{70} a_n^2 = 55 + \sum_{n=6}^{70} (a_{n+1} - a_n + 1) = \\ &= 55 + (a_{71} - a_6 + 65) = a_{71} + 1 = a_{70} a_{69} \cdots a_1, \end{aligned}$$

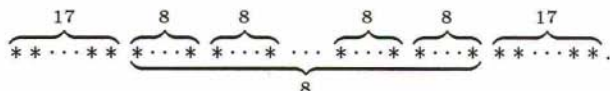
saj je $a_6 = 119$.

- Strnjeno zaporedje žetonov na tabli poimenujmo *blok*.
 - Očitno je, da lahko prvi igralec doseže poljubno postavitev k žetonov, ki ne vsebuje nobenega bloka dolžine 17 (ali več). (Res: uporabimo indukcijo. Pri $k = 1$ je trditev očitna. V dokazu indukcijskega koraka pa predpostavimo, da je $k - 1$ žetonov že na pravih mestih. Drugi igralec lahko odstrani največ 16 žetonov (v tej postavitvi namreč ni daljših blokov) in zato lahko prvi igralec v naslednji potezi doseže

željeno postavitvev.) Prvi igralec lahko torej postavi na tablo 12 blokov po 8 žetonov tako, da je med bloki natanko eno mesto prazno:



Ker lahko drugi igralec pri svoji potezi odstrani največ 8 žetonov, lahko pri naslednji potezi prvi igralec dobljeno postavitvev spremeni v



Če sedaj drugi igralec odstrani blok (ali del bloka) dolžine 8, ga lahko prvi igralec z žetoni iz škatle v celoti nadomesti, nato pa z 9-imi žetoni s konca bloka dolžine 17 napolni vrzeli med bloki. Če pa drugi igralec odstrani blok (ali del bloka) dolžine 17, prvi igralec najprej pobere preostale žetone iz tega bloka, nato pa skupaj z žetoni iz škatle (v roki ima sedaj 17 žetonov) napolni vrzeli med bloki, druge žetone pa postavi na konec dobljenega bloka.

- (b) Dokažimo s protislovjem, da pri nobenem $n > 98$ prvi igralec ne more zmagati. Predpostavimo torej, da je prvi igralec zmagal pri nekem $n \geq 99$. Analizirajmo zadnji dve potezi. Predpostavimo, da je bilo pri predzadnji potezi prvega igralca na tabli $a_1 + \cdots + a_k = m$, $n - 16 \leq m \leq n$ (zato je $k > 2$), žetonov in da so bili razporejeni takole:



(Med posameznimi bloki je lahko tudi več praznih mest.) Predpostavimo lahko tudi, da je ta postavitvev taka, da lahko prvi igralec zmaga pri poljubni potezi drugega. Potem pa za vsak $i = 1, \dots, k$ velja $a_i \leq 17 - (n - m)$, saj bi v nasprotnem po preudarni potezi drugega v škatli bilo več kot 17 žetonov in potem prvi v naslednji potezi ne bi bil zmagal. Ker je $a_1 + \cdots + a_k = m$, obstaja indeks i , $1 < i < k$, pri katerem je

$$a_i(k-2) \geq m - 2(17 - (n - m)) = 2n - m - 34 \geq n - 34 \geq 65.$$

Ker po predpostavki prvi igralec zmaga ne glede na potezo drugega, bo zmagal tudi, če drugi igralec vzame s table a_i žetov iz i -tega bloka.

Da bi potem prvi lahko zmagal, mora veljati $a_i + (k - 1) \leq 17$, saj mora pri naslednji zapolniti še vse vrzeli med bloki. Sledi

$$\frac{65}{k-2} + (k-1) \leq a_i + (k-1) \leq 17.$$

Po drugi strani pa z upoštevanjem neenakosti med aritmetično in geometrično sredino izpeljemo neenakost

$$\left(\frac{65}{k-2} + (k-2) \right) + 1 \geq 2\sqrt{65} + 1 > 17.$$

Protislovje dokazuje, da je bila predpostavka $n \geq 99$ napačna.

Druga skupina

1. Predpostavimo, da gledalec B , ki ima na vstopnici odtisnjeno število b , prispe na tekmo neposredno za gledalcem A , ki ima na vstopnici odtisnjeno število a , in dokažimo, da bi bilo število vzdihov enako tudi, če bi prispel B na tekmo neposredno pred gledalcem A . (Ker so sedeži vzdolž tekaške steze postavljeni krožno, je možno, da neki gledalec najde prost sedež šele pri drugem obhodu. Zato za poljubnega gledalca X definiramo: $\delta_X = 0$, če je ta gledalec našel nezasedeni sedež že na prvem obhodu, in $\delta_X = 1000$ v nasprotnem primeru.) Predpostavimo lahko, da je $a \leq b$.

Če je $a = b$, je trditev očitna. Naj bo sedaj $a < b$ in gledalec A naj se usede na sedež s številko a' , $a \leq a' + \delta_A$. Če je $a' + \delta_A < b + \delta_B$, se bosta gledalca A in B posedla na isti mesti, tudi če prispe B pred gledalcem A , in tako ostane število vzdihov pri obeh gledalcih enako. Če pa je $a' + \delta_A \geq b + \delta_B$, bosta pri obratnem vrstnem redu prihodov gledalca A in B zamenjala mesti, vendar bo ostalo skupno število vzdihov enako.

Vrstni red prihodov gledalcev opisuje neka permutacija števil $1, 2, \dots, n$. Ker lahko iz te permutacije dobimo poljubno drugo s končno mnogo transpozicijami (tj. zamenjavami sosednjih elementov), je naloga tako dokazana.

4. Postavimo koordinatno izhodišče v središče otoka. Če imajo palme krajevne vektorje $\vec{r}_A, \vec{r}_B, \vec{r}_C, \vec{r}_D, \vec{r}_E$ in $\vec{r}_F$, ima višinska točka trikotnika ABC krajevni vektor $\vec{r}_A + \vec{r}_B + \vec{r}_C$, višinska točka trikotnika DEF pa krajevni vektor $\vec{r}_D + \vec{r}_E + \vec{r}_F$. Na zaklad potemtakem kaže vektor $\frac{1}{2}(\vec{r}_A + \vec{r}_B + \vec{r}_C + \vec{r}_D + \vec{r}_E + \vec{r}_F)$. Pustolovcu zadošča izkopati le eno luknjo, saj je gornji izraz neodvisen od označevanja palm.

Matjaž Željko

PRESEK — list za mlade matematike, fizike, astronome in računalnikarje — 23. letnik, leto 1995/96, številka 1-6, strani 1-384

MATEMATIKA

Na obisku pri Barbari (Janez Žerovnik).....	2-4
Množenje za tiste, ki poznajo le poštevanko števila 2 (Mirko Dobovišek).....	30-31
Geometrijska in harmonična vrsta (Anton Cedilnik).....	40-45
Matrike – ali skladišča informacij (Olga Arnuš).....	65-69
Pregradimo trikotnik, 1. del (Boris Lavrič).....	86-88
Vsakdanje funkcije (Anton Cedilnik).....	100-104
O praštevilih (Borut Zalar).....	110-113
Obstojna praštevila (Jože Grasselli).....	134-136
Pregradimo trikotnik, 2. del (Boris Lavrič).....	148-154
Zgodba o pravokotnem tetraedru (Primož Potočnik).....	193-196
O delitvi dediščine (Ivan Vidav).....	270-276
Najmanjši krog (Stane Indihar).....	294-297
Konstrukcija zaporedja $x^2, x^3, \dots$ (Matej Mencinger).....	340-342
Pozor, črne luknje! (M. Ecker, prev. in prir. D. Osredkar).....	348-351

FIZIKA

Prvi parni stroji (Janez Strnad).....	5-11
Presenetljivi prikaz popolnega notranjega odboja (Tilka Jakob).....	26-29
Veter in zvok (Andrej Likar).....	72-75
Atwoodov škripec (Janez Strnad).....	90-94
Vibracijski transporterji (Milan Ambrožič).....	108-109
Naredimo škržata (Andrej Likar).....	129-132
Past za delce (Janez Strnad).....	142-146
Skrivnostni izbruhi vode (Zoran Arsov).....	200-205
Natančno merjenje s pastjo (Janez Strnad).....	220-221
Violina in lok (Andrej Likar).....	XIII, 226-228
Vožnja po bankini (Mitja Slavinec).....	264-267
Gibanje delca v pasti (Janez Strnad).....	302-307
Fizika letenja (Andrej Likar).....	330-334

ASTRONOMIJA

Nos (Marijan Prosén).....	20-22
Usta (Marijan Prosén).....	76-77
Koza (Marijan Prosén).....	138-139
Samotna (Marijan Prosén).....	208-209, XVI
Ptič (Marijan Prosén).....	268-269

Kaj bo videl komet Hyakutake, ko bo naslednjič prišel naokoli? (Mirjam Galičič)	XXI, 326-329, XXIV
Mlečni voz (Marijan Prosén)	344-346
Aprilskega Luninega mrka nismo videli (Gregor Bavdek in Klemen Bučar)	354-355, XXIV

RAČUNALNIŠTVO

O preslikavah ravnine, praproti in stiskanju podatkov (Matija Lokar)	34-38, V, VIII
Napake v prikazovanju števk (Darko Zupanič)	78-82
Saj ni res, pa je (Martin Juvan, Matjaž Zaveršnik)	140
Problem trdnih zakonov (Martin Juvan)	212-215
Iskanje širokih števil (Martin Juvan)	282-285
O koledarju, petkih in številu 13 (Martin Juvan)	334-337

ZANIMIVOSTI – RAZVEDRILO

Penrose – Escher – Reuteswärd (Vilko Domajnko)	I, 12-19
Moč – pesem Marka Budiše, študenta fizike	IV
Križanka Starogrški matematiki – reš. str. 77 (Marko Bokalič)	32-33
Križanka "Očetje fizikalnih enot" – reš. str. 163 (Marko Bokalič)	96-98
Sosonce in 22° halo (Jože Rakovec)	IX, 140-141
Križanka "Matematične krivulje" – reš. str. 230 (Marko Bokalič) ..	160-161
Kako si predstavljamo štiridimenzionalno kocko? (Olga Arnuš)	216-219
Prva znana astronomka (Marijan Prosén)	223
"Astro" križanka – reš. str. 293 (Marko Bokalič)	224-225
Neskončnost (David Bedrač)	XV
Tridimenzionalne težave gospoda Ploščaka (Marija Vencelj)	257-263
Računalo Rimljanov (Veselko Guštin)	XVII, 278-279
Križanka "Fiziki" – reš. str. 361 (Marko Bokalič)	288-289
Newtonova metoda in lepi fraktali (Milan Ambrožič)	290, XIX
Živi poletni termometri (Marija Vencelj)	343
Križanka "Ob 400-letnici rojstva velikega misleca" – reš. str. 368 (Marko Bokalič)	352-353
Veriga – reš. str. 369 (Vilko Domajnko)	355-357

REŠITVE NALOG

Na obisku pri Barbari – s str. 4 (Janez Žerovnik)	89
Penrosov trikotnik – s str. 18 (Vilko Domajnko)	98
Pregradimo trikotnik, 1. del – s str. 86 (Boris Lavrič)	162-163
Vsakdanje funkcije – s str. 100 (Anton Cedilnik)	165
Pregradimo trikotnik, 2. del – s str. 148 (Boris Lavrič)	205-207

TEKMOVANJA

Lepi uspehi slovenskih dijakov na olimpiadah iz matematike, fizike in računalništva	46
31. tekmovanje za Zlato Vegovo priznanje v šolskem letu 1994/95 (Aleksander Potočnik)	47-48
10. državno tekmovanje iz znanja računalništva za osnovnošolce (Ivan Gerlič)	48-50
Državno tekmovanje osnovnošolcev iz fizike za Zlata Stefanova priznanja 1994/1995 (Jelisava Sakelšek)	50-52
39. matematično tekmovanje srednješolcev Slovenije (Matjaž Željko) ..	52-54
33. tekmovanje iz srednješolske fizike (Ciril Dominko)	54-57
Tekmovanje iz računalništva za srednješolce (Marko Grobelnik)	57-59
16. mednarodno matematično tekmovanje mest – pomladanski krog – rešitve iz XXII, P-6, str. 374 (Matjaž Željko)	59-64
15. področno tekmovanje iz fizike za osnovnošolce – reš. str. 169-171 (Vesna Harej, Jelisava Sakelšek)	114-116
30. občinsko tekmovanje za srebrno Vegovo priznanje – reš. str. 171-172 (Aleksander Potočnik)	117-121
Izbirno tekmovanje iz matematike – reš. str. 173-177 (Matjaž Željko) ..	121-123
Naloge s predtekmovanja iz srednješolske fizike – reš. str. 177-182 (Ciril Dominko, Jure Bajc)	123-128
Urniki tekmovanj v letu 1996 (Darjo Felda)	167-169
15. državno tekmovanje iz fizike za osnovnošolce – reš. str. 234-242 (Mojca Čepič)	182-187
Naloge z državnega tekmovanja iz srednješolske fizike – reš. str. 243-245 in 309-311 (Ciril Dominko, Jure Bajc)	187-192
Rešitvi izbranih nalog s 36. matematične olimpiade (Matjaž Željko)	246-247
4. državno tekmovanje osnovnošolcev v znanju matematike – reš. str. 312-313 (Aleksander Potočnik)	247-248
10. državno tekmovanje iz znanja računalništva za osnovnošolce (Ivan Gerlič)	249-253
39. matematično tekmovanje srednješolcev Slovenije – reš. str. 313-318 (Darjo Felda)	254-256
17. mednarodno matematično tekmovanje mest – reš. str. 374 (Matjaž Željko)	318-320
17. mednarodno matematično tekmovanje mest – pomladanski krog (Matjaž Željko)	372-374

PISMA BRALCEV

Nemogoči predmet za zdrave oči nikakor ni mogoč (Zvonimir Devidé) ..	337-338
Pravici za deljivost s številoma 7 in 13 (Dušan Jan, Marija Vencelj) ..	360-361

NALOGE

Čakanje na avtobus – nagradna naloga – reš. str. 69-71 (Marija Vencelj) .	1
Deljivost – reš. str. 82 (Marija Vencelj)	4
Trikotniki s posebno lastnostjo – reš. str. 83-85 (Ivan Vidav)	19
Manjkajoče število – reš. str. 104-105 (Martin Juvan)	25
Iz družinske kronike – reš. str. 104 (Marija Vencelj)	29
Slamica reš. str. 94-95 (Matjaž Vencelj)	31
Devet vprašanj o širokih številih – reš. str. 106-107 (Martin Juvan)	39
Na koliko načinov se policist lahko zmoti – reš. str. 75 (Anton Suhadolc) ..	45
Pocenitev, podražitev – reš. str. 155 (Vinko Horvat)	85
Funkcijska enačba – reš. str. 141 (Roman Drnovšek)	88
Najdaljša četa – reš. str. 164-165 (Martin Juvan)	89
Poišči število – reš. str. 156 (Ivan Lisac)	95
Ena finančna – reš. str. 156-158 (Martin Juvan)	99
Manjkajoči števili – reš. str. 136-137 (Martin Juvan)	99
Nalogi o 1996 – reš. str. 199 (Roman Drnovšek)	133
Največji zorni kot – reš. str. 232-233 in 276-277 (Marija Vencelj)	158
Kdaj je lahko vsota zaporednih naravnih števil kvadrat? – reš. str. 280-281 (Jože Grasselli)	207
Pet razbojnikov – reš. str. 281 (Marija Vencelj)	209
Prevrtani krogli – reš. str. 279 (Vilko Domajnko)	210
Določi vloge – reš. str. 301 (Neža Mramor - Kosta)	210
Malo in veliko preprosto število – reš. str. 291-293 (Martin Juvan)	219
Nekaj nalog za mlade Vegovce – reš. str. 285-287 (Pavel Zajc)	221-222
Kaj kdo poučuje? – reš. str. 287 (Neža Mramor - Kosta)	231
Razreži tetraeder – reš. str. 307 (Vilko Domajnko)	231
Konstrukcija brez uporabe podobnosti – reš. str. 347 (Dušan Modic) ..	269
Nekaj zavitih za odvijanje – reš. str. 362 (Martin Juvan)	298-301
Praštevilska – reš. str. 365 (Boris Lavrič)	325
Magično množenje celih števil za mlajše bralce – reš. str. 365 (Marija Vencelj)	333
Naraščajoča in padajoča četa števk – reš. str. 364 (Marija Vencelj)	338
Še enkrat sam sebe – reš. str. 367 (Martin Juvan, Matjaž Zaveršnik) ..	338
Trikotniška števila in popolni kvadrati – reš. str. 366 (Ivan Lisac)	342
Milni mehurčki na snegu (Alojz Kodre)	XXIII

NOVICE

Quantum in Kvant (Janez Strnad)	22-25
Nemogoči predmet je mogoč (Marta Zabret)	132-133, XI
Poročilo s 36. mednarodne matematične olimpiade (Matjaž Željko) ..	147, XII
26. mednarodna fizikalna olimpiada (Ciril Dominko)	154-155, XII

Sto let radioaktivnosti – Odkritje Henrija Bequerela (Janez Strnad) 197-199	
Fizikalna olimpiada z netekmovalne plati (Martin Klanjšek)	228-230
René Descartes – Ob štiristoletnici rojstva velikega misleca in	
matematika (Marija Vencelj)	321-325
Dve sporočili (Iz uredništva)	329
Vodikovi antiatomi (Janez Strnad)	358-360

NOVE KNJIGE

Željko M. s sodelavci, Altius, citius, fortius (Marija Vencelj)	46
Strnad J., Fiziki (Andrej Likar)	159
Cedilnik A., Matematični priručnik (Anton Suhadolc)	297
Hladnik M., Moderna kvadratura kroga (Matjaž Željko)	308
Omladič M. in Omladič V., Matematika in denar (Zvonimir Bohte)	339
Bohte Z., Uvod v numerične metode (Bor Plestenjak)	351

PRESEK

list za mlade matematike, fizike, astronome in računalnikarje
23. letnik, šolsko leto 1995/96, številka 6, strani 321 – 384

UREDNIŠKI ODBOR: Vladimir Batagelj, Tanja Bečan (jezikovni pregled), Dušica Boben (oblikovanje teksta), Vilko Domajnko, Roman Drnovšek (novice), Darjo Felda (tekmovanja), Bojan Golli, Marjan Hribar, Boštjan Jaklič (tehnični urednik), Martin Juvan (računalništvo), Sandi Klavžar, Boris Lavrič, Andrej Likar (fizika), Matija Lokar, Bojan Magajna (glavni urednik), Franci Oblak, Peter Petek, Marijan Prosén (astronomija), Marjan Smerke (svetovalec za fotografijo), Miha Štalec, Marija Vencelj (matematika, odgovorna urednica).

Dopisi in naročnine: Društvo matematikov, fizikov in astronomov Slovenije – Podružnica Ljubljana – Komisija za tisk, Presek, Jadranska c. 19, 1001 Ljubljana, p.p. 2964, tel. (061) 1232-460, št. ŽR 50106-678-47233. Naročnina za šolsko leto 1995/96 je za posamezne naročnike 1.250 SIT, za skupinska naročila šol 1.000 SIT, posamezna številka 250 SIT, za tujino 25.000 LIT, devizna nakazila SKB banka d.d. Ljubljana, val-27621-42961/9, Ajdovščina 4, Ljubljana.

List sofinancirata MZT in MŠŠ
Ofset tisk DELO – Tiskarna, Ljubljana

Po mnenju MZT št. 415-52/92 z dne 5.2.1992 šteje revija med proizvode iz 13. točke tarife št. 3 zakona o prometnem davku, za katere se plačuje 5% davek od prometa proizvodov.

MILNI MEHURČKI NA SNegu

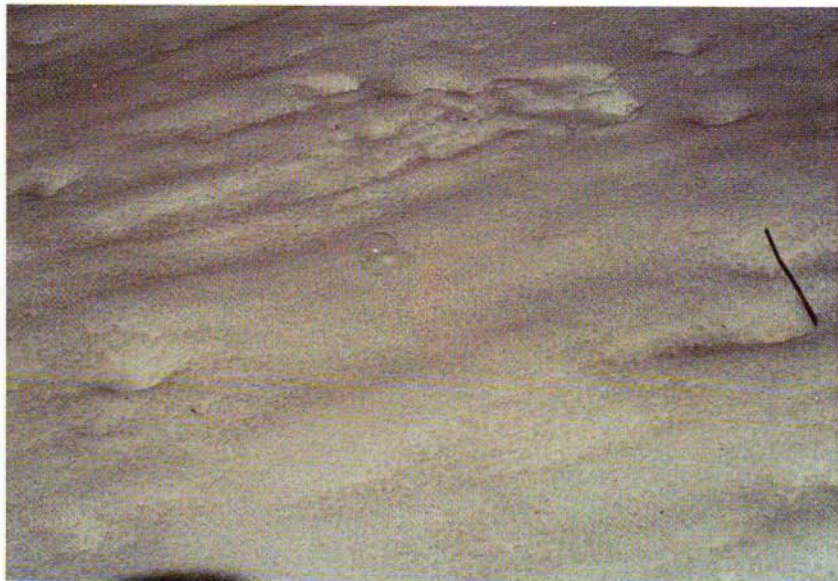
Zgodaj spomladi smo na nedeljskem izletu na Nanos opazili zanimiv naravni pojav. Bil je lep sončen dan, planota je bila pokrita z zasreženim snegom. Ko smo posedli k malici na klopi pred lovsko kočo, je Jure v žepu svojega nahrbtnika našel pozabljeno plastično posodico z milnico za piha-nje mehurčkov. Lesketajoči se mehurčki so veselo poplesavali v lahni sapi. Sem ter tja je kakšen pristal na snegu. Večina jih je takoj ob pristanku popokala, nekateri pa so obstali. Ti so začeli plahneti, sprva neopazno, potem pa vse hitreje, tako da je po nekaj sekundah ostala na snegu le še ploska mrenica milnice, ki je takoj nato izginila.

Poskus smo ponavljali naslednji teden, vendar se nikoli ni posrečil. Površina snega ni bila več čista, na njej je bilo polno drobcev, ki jih je veter nanesel iz gozda: ostankov iglic, listja in skorje. Vsi mehurčki so ob pristanku popokali.

Kako bi razložili, zakaj mehurčki na snegu splahnijo?

Spodnjo sliko smo posneli nekaj tednov kasneje v Ljubljani po obilnem sneženju na začetku aprila.

Alojz Kodre





Slika kometa Hyakutake, posneta v noči s 26. na 27. marec, ko je komet potoval mimo Severnice. S prenosno astrofotografsko opremo sta jo posnela Herman Mikuž in Bojan Kambič v Slovenskih goricah, kamor sta se odpravila za kometom, ker je bilo to tisto noč eno redkih jasnih območij v Sloveniji.



Eden redkih posnetkov Luninega mrka v noči s 3. na 4. april (foto Ken Fye). Večino Evrope je tisto noč prekrivala debela plast oblakov.