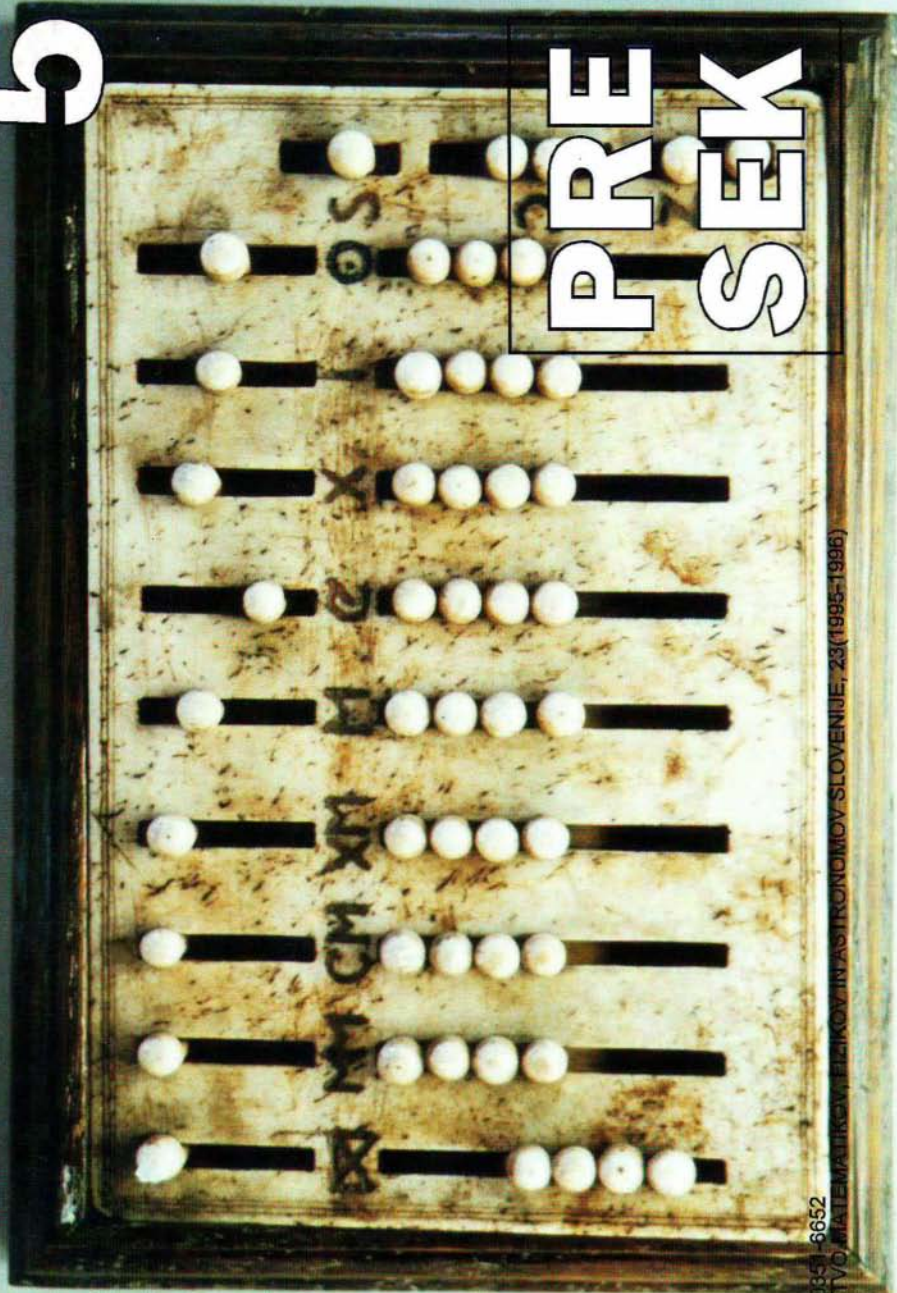


5

PRESEK



ISSN 0351-6652
DRUŠTVO MATEMATIKOV, FIZIKOV IN ASTRONOMOV SLOVENIJE, 23 (1995-1996)

PRESEK

list za mlade matematike, fizike, astronome in računalnikarje
23. letnik, leto 1995/96, številka 5, strani 257–320

VSEBINA

MATEMATIKA	O delitvi dediščine (Ivan Vidav)	270-276
	Najmanjši krog (Stane Indihar)	294-297
FIZIKA	Vožnja po bankini (Mitja Slavinec)	264-267
	Gibanje delca v pasti (Janez Strnad)	302-307
ASTRONOMIJA	Ptič (Marijan Prosén)	268-269
RAČUNALNIŠTVO	Iskanje širokih števil (Martin Juvan)	282-285
NALOGE	Konstrukcija brez uporabe podobnosti (Dušan Modic) ..	269
	Nekaj zavitih za odvijanje (Martin Juvan)	298-301
REŠITVE NALOG	Največji zorni kot – z iskustvene plati s str. 158 (Jože Rakovec)	276-277
	Prevrtani krogi – s str. 210 (Vilko Domajnko)	279
	Kdaj je lahko vsota zaporednih naravnih števil kvadrat? – s str. 207 (Jože Grasselli)	280-281
	Pet razbojnikov – s str. 209 (Marija Vencelj)	281
	Nekaj nalog za mlade Vegovce – s str. 221 (Pavle Zajc)	285-287
	Kaj kdo poučuje? – s str. 231 (Neža Mramor - Kosta)	287
	Malo in veliko preprosto število – s str. 219 (Martin Juvan)	291-293
	“Astro” križanka – str. 224 (Marko Bokalič)	293
	Določi vloge – s str. 210 (Neža Mramor - Kosta)	301
	Razreži tetraeder – str. 231 (Vilko Domajnko)	307
ZANIMIVOSTI	Tridimenzionalne težave gospoda Ploščaka (Marija Vencelj)	257-263
	Računalo Rimljanov (Veselko Guštin)	278-279
	Newtonova metoda in lepi fraktali (Milan Ambrožič) ...	290
RAZVEDRILO	Križanka “Fiziki” (Marko Bokalič)	288-289
NOVE KNJIGE	Cedilnik A., Matematični priročnik (Anton Suhadolc)	297
	Hladnik M., Moderna kvadratura kroga (Matjaž Željko)	308
TEKMOVANJA	Rešitve nalog z državnega tekmovanja iz srednješolske fizike, 2. del – s str. 187 (Jure Bajc)	309-311
	4. državno tekmovanje osnovnošolcev v znanju matema- tike – rešitve s str. 247 (Aleksander Potočnik) ..	312-313
	39. matematično tekmovanje srednješolcev Slovenije – rešitve s str. 254 (Darjo Felda)	313-318
	17. mednarodno matematično tekmovanje mest (Matjaž Željko)	318-320
NA OVITKU	Računalo Rimljanov (foto Veselko Guštin). Glej tudi prispe- vek s tem naslovom na strani 278.	I
	Lepi fraktali (avtor Milan Ambrožič). Glej tudi prispevek s tem naslovom na strani 290.	IV

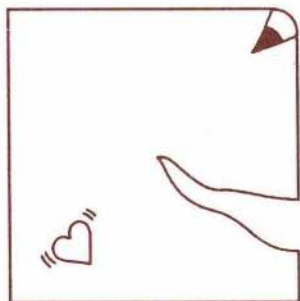
TRIDIMENZIONALNE TEŽAVE GOSPODA PLOŠČAKA

Živimo v tridimenzionalnem prostoru. To pomeni, da ima gibanje in opazovanje v našem prostoru tri prostostne stopnje. Poenostavljeno bi rekli, če govorimo le o gibanju, da lahko pridemo iz vsake točke našega prostora do poljubne druge njegove točke s kombinacijo treh gibanj v treh smereh, ki jih lahko vzamemo tudi kot medsebojno pravokotne. (No, če smo pošteni, je gibanje gor-dol za nas včasih rahlo problematično; svet je nekoliko bolj tridimenzionalen za ptice in ribe kot za nas.)

V prejšnji številki Preseka smo objavili prispevek o tem, kako si lahko predstavljamo štiridimenzionalno kocko. Kaj pa predstava o četrti dimenziji nasploh, to je o smeri, pravokotni na vse smeri, ki jih zaznavamo v našem tridimenzionalnem svetu? Je sploh možna njena mentalna slika?

Eden najboljših načinov za predstavljanje četrte dimenzije je analogija. Pri poskusu, kako naj bi izgledali štiridimenzionalni predmeti, si pomagamo s predstavo o podobnih naporih, ki bi jih imela dvodimenzionalna bitja, če bi si hotela predstavljati tridimenzionalne predmete. Dvodimenzionalnemu bitju, čigar napore bomo opazovali, bomo rekli Ploščak. Živi v Ploski deželi.

Ploska dežela je ravnina, čudna dvodimenzionalna dežela, naseljena z geometrijskimi liki, ki mislijo, govorijo in imajo človeške občutke. Vse njihovo gibanje in **opazovanje** je omejeno na ravnino.



Ploščak se je prvič pojavil z imenom A. Square v knjigi Flatland, angleškega šolnika in teologa Edwina A. Abbotta okrog leta 1884. Ne vemo, ali je Abbott res začetnik ideje o tovrstnem razvoju predstave o četrti dimenziji. Morda je dobil navdih v Platonovi alegoriji o votlini, v kateri poznajo jetniki tridimenzionalni svet le po senčnih slikah.

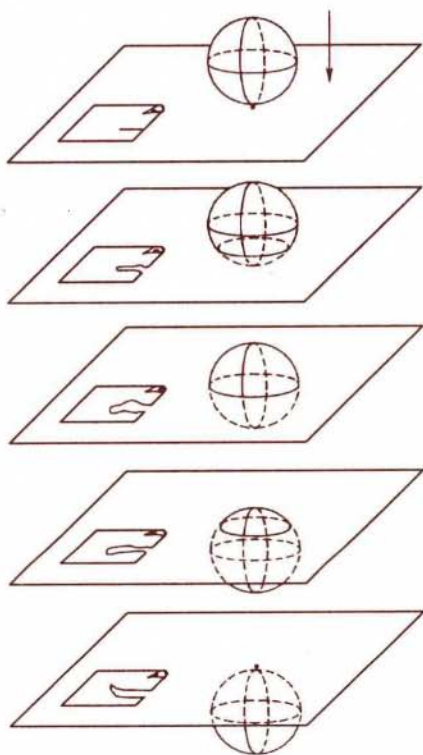
Abbottov Flatland, s podnaslovom Romanca o več dimenzijah, je tudi imenitna satira na viktorijansko Britanijo. Položaj prebivalca Ploske dežele je določen z njegovo obliko, začeniš z najvišjo – svečenikom kot krogom, nato pa preko večkotnikov (več oglišč imaš, več veljaš!) tja dol do daljic, ki predstavljajo ženske. Knjiga – takih danes ne pišejo več – ki jo je vredno prebrati!

Pa se vrnimo k našemu Ploščaku. Zamislimo si, da je Ploska dežela velik list papirja. Po njem se Ploščak lahko giblje naprej-nazaj in levo-desno ter opravi poljubno kombinacijo teh dveh gibanj.

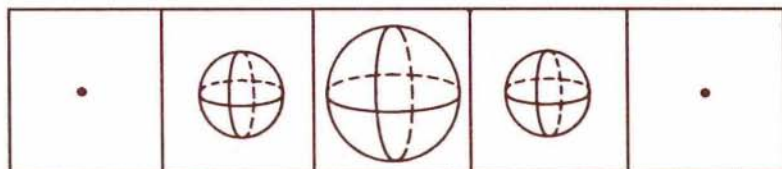
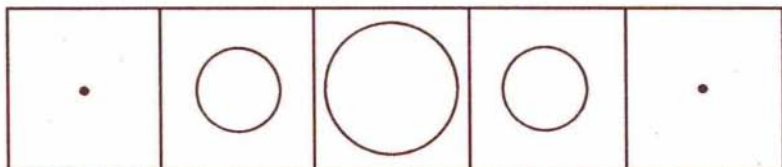
Pri sodeželanu lahko loči število oglišč (ne pozabimo, da vidi le v dveh dimenzijah, torej le projekcijo na premico, ki je pravokotna na smer gledanja), ker vsepovsod prisotna meglica povzroča, da so bližnje točke svetlejšje, kar pomaga pri razpoznavanju oblik. Ne more pa z lista papirja, še več, popolnoma je tudi prikrajsan za vedenje o katerikoli drugi dimenziji, razen o tistih dveh, ki ju pozna.

Ko se je neke noči Obla (površje tridimenzionalne krogle) odločila, da ga pouči o tretji dimenziji, je imela zelo trdo delo.

Prva stvar, ki jo je Obla poskusila, je bilo preprosto gibanje naravnost skozi Ploščakovo delovno sobo. Ko je Obla prvič prišla v stik s tistim dvodimenzionalnim območjem svojega tridimenzionalnega prostora, ki je bil Ploska dežela, je Ploščak zagledal točko. Ko je Obla nadaljevala svojo pot, je točka prerasla v majhno krožnico, ki se je najprej večala, nato pa manjšala, se stisnila v točko in na koncu izginila.



Ploščakova reakcija na ta čudni pojav je bila: "To že ne bo krožnica, ampak najbrž zelo spreten žongler." In kaj bi rekli mi, če bi naenkrat zaslišali skrivnostni glas iz nedoločljive smeri, ki bi oznanil: "Sem hipersfera. Rada bi vas poučila o četrti dimenziji in v ta namen bom sedaj prešla vaš prostor." In nato bi se pojavila pika, ki bi počasi naraščala do velike oble, se nato spet počasi skrčila v točko in poniknila. Ploščakovo in naše doživetje prikazuje naslednja slika.



Z našega vidika je razlika med obema izkušnjama ta, da zlahka vidimo, kako se nakladajo krožnice v tretjo dimenzijo, da dobimo oblo, ni pa jasno, kako naložiti oble v četrto dimenzijo, da bi dobili hipersfero.

Pojdimo spet v Plosko deželo k gospodu Ploščaku. S tem, da se je Obla Ploščaku prikazala, ga ni prepričala. Tako se je odločila za nove trike. Najprej je izmaknila iz Ploščakove zidne omare neki predmet, ne da bi omaro odprla ali podrli kakšno steno. Kako je bilo to mogoče? Omara je v Ploski deželi le zaprta dvodimenzionalna figura kot npr. pravokotnik. Vendar lahko v tridimenzionalnem prostoru sežemo vanjo, ne da bi vdrli njene dvodimenzionalne stene.



Analogija s tem trikom je, da bi lahko štiridimenzionalno bitje, na primer, izmaknilo rumenjaka iz jajca, ne da bi strlo lupino. Lahko bi pobralo denar iz sefa, ne da bi odprlo sef ali zato moralo iti skozi katero od njegovih sten. Ali bi se, denimo, pojavilo ta hip tu med nami, ne da bi prišlo skozi vrata, okna, stene, strop ali tla. Ideja analogije ni v tem, da bi se štiridimenzionalno bitje dematerializiralo ali nehalo eksistirati, da bi lahko šlo skozi zaprta vrata. Našemu prstu ni potrebno, da preneha eksistirati, če naj ga postavimo v notranjost kvadrata, narisane na papirju. Gre za to, da je četrta dimenzija pravokotna na vse naše normalne tridimenzionalne smeri in da zaprte množice v tridimenzionalnem svetu nimajo mej v tej smeri. Sleherna stvar na Zemlji leži odprta pred očmi štiridimenzionalnega opazovalca, celo naše srce.

Edini način, da je Obla lahko prepričala Ploščaka o realnosti tretje dimenzije, je bil, da ga je dejansko dvignila iz Ploske dežele in mu prikazala gibanje v treh dimenzijah. Imamo mi kakšno možnost, da kaj podobnega doživimo? Kot podobno doživetje bi si lahko predstavljali, da so nekje štiridimenzionalna bitja, ki bi nas z nekim zaporedjem dejanj dvignila iz naših stlačenih treh dimenzij in nam pokazala "resnični prostor". Tisti pravi!

Veliko ljudi je v nekaj takega verjelo v času spiritističnega gibanja okrog leta 1900. Osrednja misel tega gibanja je bila, da so duhovi štiridimenzionalna bitja, ki se lahko pojavijo ali izginejo na vsakem kraju, bitja, ki vse vidijo ... Zelo ugleden astronom, profesor Zöllner, je celo napisal knjigo z naslovom *Transcendentna fizika*, v kateri je opisal številne seanse, ki jim je prisostoval s pričakovanjem, da bo dokazal, da so "duhovi" res štiridimenzionalna bitja. Videti je, da je bil Zöllner brezupen lahkovernež in njegova knjiga je povsem neprepričljiva. (Nekaj protislovij, ki jih najdemo v njegovi knjigi, je v eni svojih knjig uporabil za zglede tudi pri nas znani Martin Gardner in jih seveda ovrge). V splošnem je videti, da so avtorji idejo o četrti dimenziji ponižali na nivo okultnih ved, namesto, da bi jih ta ideja vodila k razjasnitvi matematičnih vprašanj. Dejstvo, da je nekaj težko, še ne pomeni, da je zmedeno. Najboljša knjiga o četrti dimenziji, napisana z mističnega vidika, je *Tertium Organum* astronoma Ouspenskega, ki je napisal tudi zelo dobro poglavje o četrti dimenziji v svoji knjigi *Novi model vesolja*.

— — —

Kakorkoli, Abbottova Ploska dežela se konča kmalu po Ploščakovem izletu v tretjo dimenzijo. Ko jih je hotel prepričati o obstoju tretje dimenzije, so ga Ploskodeželani zaprli (in vrgli ključ stran).

Najdemo pa posrečeno nadaljevanje Ploščakove zgodbe v knjižici ameriškega matematika Rudolfa Ruckerja *Geometrija, relativnost in četrta dimenzija*, ki je izšla leta 1977 pri založbi Dover. Avtor takole naveže svojo zgodbo:

Imel sem veliko srečo, da mi je prišla v roke resnična kronika ostanka Ploščakovega življenja.

Ploščak je bil že kakih deset let zaprt, ko se je pojavila v njegovi borni celici Obla spet kot krožnica spreminjajoče se velikosti. "Kaj se ti je pripetilo, dete?"

"O, presvetla Obla, ko bi te le ne bil nikoli videl; ko bi bil vsaj zaradi premalo oglišč nesposoben dojeti tvoj dokaz!"

"Pa saj še nisi kaj dosti videl. Bi rad, da te dvignem iz te celice in postavim nazaj v ženino sobo? Veš, bojim se ti povedati, da živi sedaj v tvoji hiši velik oster enakokraki trikotnik."

"Obla, Obla, ko bi mi vsaj verjeli! Nobenega smisla nima, spraviti me ven. Takoj bi me spet zaprli, morda celo giljotinirali. Toda tu si in jaz imam načrt. Obrni me, obrni me in moje lastno telo bo dokaz, da tretja dimenzija obstaja!"

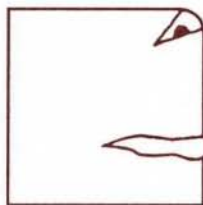
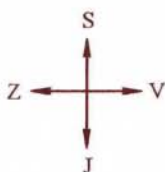
Nato je Ploščak razložil svojo idejo. V ječi je nekaj več premišljeval o Premi deželi. Premo deželo je videl v sanjah predavnimi leti. To je bila premica, po kateri so sem in tja drsele daljice - Premščaki, prebivalci te dežele, s čutili na obeh krajiščih.

Ploščak je premišljal o Premi deželi podobno kot mi o Ploski deželi. Svoje težave s tretjo dimenzijo je premagal, ko si je predstavljal težave Premščakov z drugo dimenzijo.

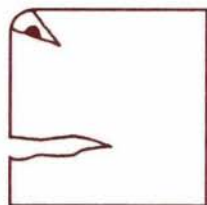
Prišel mu je na um način trajne spremembe, ki jo je bil sposoben napraviti v Premi deželi. (Seveda bi lahko izmaknil kako daljico, toda to bi lahko proglasili za nenavadno izginotje.) Dopustil je, da ima vsaka daljica na levem koncu bas, na desnem tenor. Če bi eno od daljic obrnil, bi vsakdo v Premi deželi lahko opazil to spremembo.



Če bi torej Ploščak lahko obrnil daljico okrog točke, mar ne bi mogla Obla obrniti Ploščaka okoli daljice? Obla bi lahko obrnila Ploščaka v njegovo zrcalno sliko! In vsakdo v Ploski deželi bi to spremembo lahko dojel, saj ima vsak, ki ima oko na severu, usta na vzhodu.



Ploščak



Ploščak

Rečeno, storjeno. Ploščak (ali bolje ~~Ploščak~~ Ploščak) je poklical stražo: "Glejte, vi tepci omejeni, zavrteli so me skozi tretjo dimenzijo. Postal sem svoja lastna zrcalna slika. Ho, ho, ho, ho! Pokažite me svečeniku! Sedaj bo, ne, sedaj bo **moral** verjeti!"

No, na Ploskodeželane je naredil velik vtis. Tako velik, da so ga obsodili na smrt.

Preden nadaljujemo s to srh vzbujajočo zgodbo, premislimo analogno svojo situacijo.

Videti je, da bi nas lahko štiridimenzionalno bitje obrnilo v našo lastno zrcalno sliko z rotacijo skozi četrto dimenzijo okrog ravnine, ki bi sekala naše telo, recimo da bi šla skozi nos, popek in hrbtenico. In kaj bi čutili, če bi nas takole obrnili? Ne vem. Dokaj neokusna misel je, da bi bilo vse, kar bi ostalo v tridimenzionalnem prostoru, če bi bil zasuk površno izveden, ravnina, okrog katere bi nas zasukali. Bili bi torej plosk človekov presek. Podobno, kot bi od Ploščaka ostala le presečna daljica, če bi Obla odnehala na pol poti.

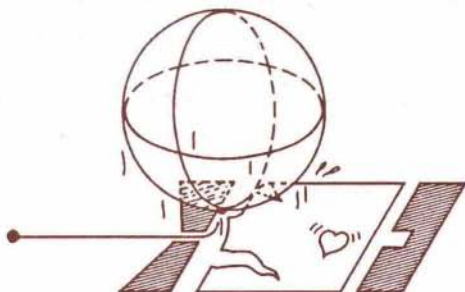
Pa še enkrat obiščimo ubogega Ploščaka. Ploskodeželani so ga poimenovali "predmet gnusa za ljudstvo" in ga sklenili takoj giljotinirati. (Naša tridimenzionalna giljotina deluje tako, da pride ravninski segment med dva dela žrtvinega telesa. Giljotina v Ploski deželi pa je daljica, ki pride med dva dela obsojenčevega poligonskega telesa.)

Ploščak se je potil od groze. Bil je tako prestrašen, da ni niti malo zmogel uživati v svoji zrcalni sliki – pišoč nazaj in podobne stvari. Klical je Oblo na pomoč, a nič se ni zgodilo.

Nekega sivega mračnega jutra so ga odpeljali na Polje groze, kjer je bila pripravljena giljotina. Videl je veliko starih prijateljev, a nobeden ga ni gledal v oči. Obsodbo so prebrali in dva ostra enakokraka trikotnika sta začela potiskati strašni inštrument proti njemu. In tedaj ...



Tedaj se je pojavila Obla. Pohitela je do točke med Ploščakom in rezilom giljotine in začela vleči navzgor. Začela je raztegovati Plosko deželo v smeri tretje dimenzije in jo je raztegovala, dokler ni bil prostor med obsojencem in rezilom tako velik, da rezilo Ploščaka ni moglo doseči.



Ploskodeželani so bili zelo prevzeti. Ko je nato vzela Obla še srce iz svečenika, pa tudi močno prestrašeni. Zahtevali so pomilostitev za Ploščaka.

Nekoč obsojeni večkotnik je postal vodilni raziskovalec na Univerzi v Ploski deželi. Poglavitni cilj njegovih raziskav je bila ukrivljenost Ploske dežele in razlaga tretje dimenzije.

Analogija Ploščakove rešitve v našem prostoru pa je že težja matematična zgodba. Reče se ji neevklidska geometrija.

Marija Vencelj

VOŽNJA PO BANKINI

Pri prehitri vožnji z avtomobilom lahko v ovinku kaj hitro z zunanjimi kolesi zavozimo na bankino in težave, v katere tako zaidemo, potem le še naraščajo. Vožnja se dostikrat konča v obcestnem jarku, zato si oglejmo, kaj nas uči o tem fizika.

Avtomobil naj enakomerno vozi s hitrostjo v skozi ovinek s krivinskim radijem r . Opazovali ga bomo v koordinatnem sistemu, ki je pripet nanj. V tem vrtečem se koordinatnem sistemu avtomobil v radialni smeri navzven vleče centrifugalna sila F_c :

$$F_c = \frac{mv^2}{r}, \quad (1)$$

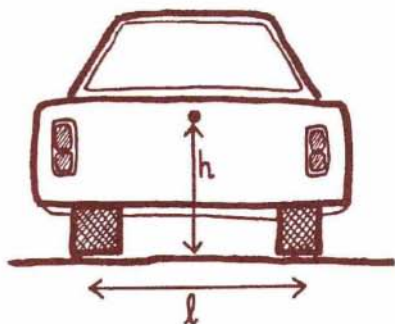
ki ji nasprotuje sila lepenja:

$$F_l = mgk, \quad (2)$$

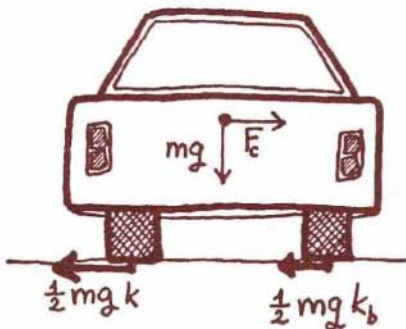
kjer je k koeficient lepenja, m masa avtomobila in g težni pospešek. Avtomobil, ki je širok l (razdalja med kolesi), naj ima težišče na sredini na višini h (slika 1). Vsako kolo na cesto pritiska s četrtno teže avtomobila in zato polovica celotne sile lepenja (2) deluje na levi, polovica pa na desni par koles. Dokler centrifugalna sila ni večja od sile lepenja, avto lepo sledi ukazom volana in brez drsenja pelje skozi ovinek. Največjo hitrost v_m , s katero še lahko varno prevozimo ovinek, dobimo z izenačitvijo centrifugalne sile (1) in sile lepenja (2):

$$v_m = \sqrt{mgk}. \quad (3)$$

Vidimo, da je v_m enaka kot največja hitrost, s katero pri enakem koeficientu lepenja lahko ovinek prevozi motorist, o čemer smo v Preseku že lahko brali. Če v ovinek pripeljemo hitreje, kot je v_m , je centrifugalna sila večja od sile lepenja in avtomobil bo začel drseti proti zunanjemu robu ceste. Ko avtomobil začne drseti, centrifugalni sili ne nasprotuje več sila lepenja ampak manjša sila trenja, saj je koeficient trenja manjši od koeficienta lepenja. Avto bo zato še bolj drsel proti bankini. Zaviranje v takem primeru ni uspešno. Drsenje lahko zaustavimo tako, da skozi ovinek zavijamo manj ostro – vozimo po ovinku z večjim krivinskim radijem in centrifugalna sila se zato zmanjša. To lahko naredimo le, če je cesta dovolj široka. Drugače z zunanjimi kolesi zavozimo na bankino, kar je



Slika 1.



Slika 2.

lahko že zelo kritično. Na bankini je koeficient lepenja (k_b) manjši kot na cesti. Sila lepenja je tedaj enaka:

$$F_l = \frac{mg}{2}k + \frac{mg}{2}k_b, \quad (4)$$

in ko upoštevamo, da je k_b približno polovico manjši kot k , vidimo, da se sila lepenja zmanjša za četrtno, saj se tista polovica sile lepenja, ki deluje na zunanjih kolesih, razpolovi (slika 2):

$$F_l = \frac{1}{2}F_l + \frac{1}{4}F_l = \frac{3}{4}F_l. \quad (5)$$

Največja hitrost v_m se zaradi tega zmanjša za približno 15 %.

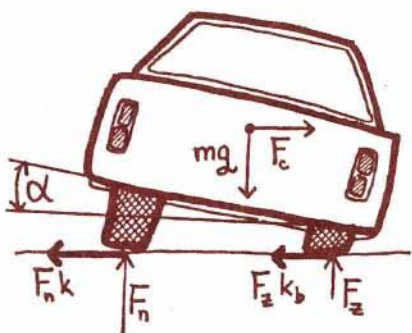
V resnici je sila lepenja še manjša, saj so vsa kolesa enako obremenjena le med enakomerno vožnjo naravnost. Med vožnjo skozi ovinek sta zunanji kolesi bolj obremenjeni kot notranji, saj se avtomobil nagne navzven (slika 3). Vsota vseh sil, s katerimi cesta v navpični smeri deluje na kolesa, je enaka sili teže avtomobila, tako da dobimo enačbo:

$$mg = F_n + F_z, \quad (6)$$

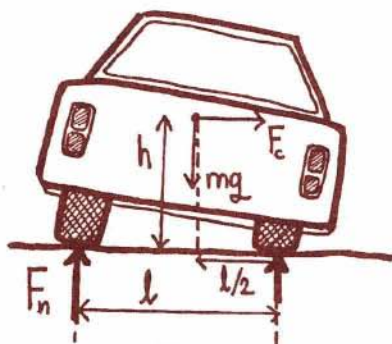
kjer je F_n sila ceste na notranji in F_z na zunanji par koles. Celotna sila lepenja je:

$$F_l = kF_n + k_bF_z. \quad (7)$$

Na avtomobil deluje navor zaradi sile teže in centrifugalne sile, ki prijemljeta v težišču, in navor sile podlage na notranji kolesi F_n . V ravnovesju



Slika 3.



Slika 4.

mora biti vsota vseh navorov, ki delujejo na avtomobil, enaka nič. Če vrtilišče postavimo v zunanji kolesi (slika 4), dobimo enačbo:

$$\frac{1}{2}F_g l = F_c h + F_a l. \quad (8)$$

Iz enačb (7) in (8) izračunamo sili podlage na notranji in zunanji par koles:

$$F_a = \frac{1}{2}mg - F_c \frac{h}{l} \quad \text{in} \quad (9a)$$

$$F_b = \frac{1}{2}mg + F_c \frac{h}{l}. \quad (9b)$$

Podobno kot sta pri zaviranju prednji kolesi bolj obremenjeni od zadnjih, sta pri vožnji skozi ovinek zaradi navora centrifugalne sile zunanji kolesi bolj obremenjeni kot notranji. Ko to upoštevamo, dobimo enačbo za maksimalno hitrost v_m , s katero lahko prevozimo ovinek, če sta zunanji kolesi na bankini:

$$v_m = \sqrt{\frac{rg(k_a + k_b)}{2 \left(1 + \left(\frac{h}{l}(k_a - k_b)\right)\right)}}. \quad (10)$$

Iz enačbe (10) lahko ocenimo, da se v_m zmanjša za 25 % (odvisno tudi od višine in širine avtomobila).

Različno obremenjenost zunanjih in notranjih koles upoštevajo tudi pri dirkah na ovalnih dirkališčih (Formula Indy), popularnih predvsem v Ameriki. Tam vozijo po dirkališču, ki ima dva dolga ovinka, vmes pa sta ravnini. Ves čas torej zavijajo le v isto smer in zunanji kolesi sta skozi vso dirko bolj obremenjeni od notranjih. Na zunanja kolesa zato namestijo

bolj trde gume, saj je obraba teh dosti večja od notranjih. Prav tako imajo na zunanji strani dirkalnikov vgrajene bolj trde vzmeti in ostale dele podvozja.

Na koncu ocenimo še, za koliko se pri vožnji skozi ovinek avto nagne v bočni smeri (slika 5). Iz enačb (9a) in (9b) vidimo, da je dodatna sila, s katero sta obremenjeni ali razbremenjeni zunanji in notranji kolesi, enaka $F_c h/l$. Zaradi tega se zunanje vzmeti stisnejo, notranje pa raztegnejo za Δy , kar izračunamo iz enačbe:



Slika 5.

$$\Delta y = \frac{F_c h}{2lk_v}, \quad (11)$$

kjer smo s k_v označili koeficient vzmeti. Kot, za katerega se v ovinku avtomobil nagne, je podan s trigonometrijsko enačbo:

$$\operatorname{tg}(\varphi) = \frac{2\Delta y}{l} = \frac{mv^2 h}{k_v r l^2}. \quad (12)$$

Pri hitri vožnji skozi ovinke se mora avtomobil čim manj nagibati. Vidimo tudi, da je za športno vožnjo ugodno imeti čim nižji in čim širši avtomobil (čim manjše razmerje h/l) ter čim trše vzmeti (velik koeficient vzmeti). Preveč trdih vzmeti pa avtomobil spet ne sme imeti, ker se neravnine na cesti preveč čutijo in je vožnja neudobna. Druga skrajnost pa je naprimer Citroenov "spaček", ki ima izrazito mehko vzmetenje in se pri hitri vožnji že kar grozljivo nagiba.

Ugotovili smo, s kolikšno hitrostjo lahko z avtomobilom še varno prevozimo ovinek. Če to hitrost prekoračimo, se kot verižna reakcija začnejo težave. Avto začne najprej drseti in silo lepenja, s katero je "pripet" v ovinek, nadomesti sila trenja, ki je manjša, zato še bolj drsi proti jarku. Če začnemo voziti bolj naravnost, avto več ne drsi, vendar takrat lahko zavozimo na bankino, kjer je koeficient lepenja manjši kot na cesti. Neugodno pri tem je še to, da so pri hitri vožnji skozi ovinek notranja kolesa zelo razbremenjena. Večino teže prenašajo zunanja kolesa, s katerimi pa vozimo po bankini, ki je veliko bolj spolzka od asfalta, Velja torej previdnost in ne prehitro v ovinek, vsekakor pa ne hitreje, kot je v_m iz enačbe (10).

Mitja Slavinec

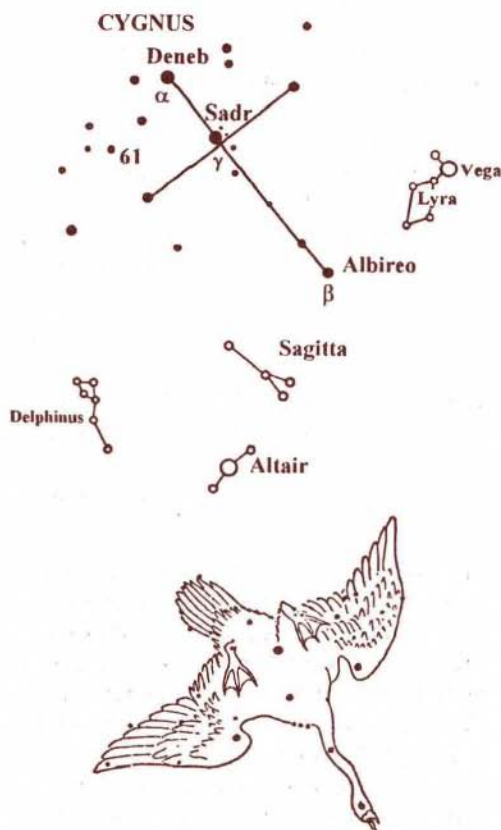
PTIČ

Ko se bo pomlad začela prevešati v poletje, se bodo vse više začele vzpenjati zvezde poletnega neba. Pozno zvečer in ponoči lahko tedaj opazujemo tipično poletno ozvezdje *Labod* (slika 2). Ozvezdje ima obliko križa. Zato mu rečemo tudi *Severni križ*.

V ozvezdju Laboda lahko opazujemo več zanimivih nebesnih teles. Eno med njimi je prav gotovo druga najsvetlejša zvezda tega ozvezdja, to je β *Laboda*, imenovana *Albireo*. Albireo je arabska beseda in pomeni *Ptič*. Ta zvezda leži v podnožju Križa. Ni preveč svetla, vendar jo z lahkoto izsledimo (slika 1).

Ozvezdje Labod po grškem bajeslovju upodablja na nebu Fetonovega zvestega prijatelja. Ta se je potapljal in potapljal v reko, v katero je strmoglavil Feton, ko je vozil čez nebo sončni voz svojega očeta Helija, in se pri tem smrtno ponesrečil. Ko je vrhovni bog Zevs videl, kolikšno vdanost in ljubezen je prijatelj izkazoval Fetonu, ga je spremenil v laboda, da bi se lažje potapljal

in našel prijatelja. Ko je omagal pri iskanju prijateljevega trupla, so ga bogovi odnesli na nebo in tam pripeli ter ovekovečili kot ozvezdje Labod.



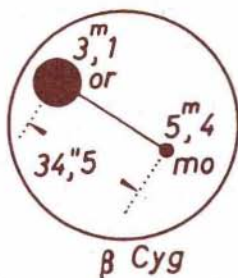
Slika 1. Ozvezdje Labod (lat. Cygnus) je pri nas zvečer vidno od junija do decembra. Poleti ga opazujemo skoraj nad glavo. Najsvetlejša zvezda je α Laboda – Deneb; β Laboda je Albireo – Ptič.



Slika 2. Takole po Velikem vozu najdemo tri tipična poletna ozvezdja: Labod, Lira in Orel. Najsvetlejšje zvezde teh ozvezdij sestavljajo značilen poletni nebesni trikotnik, ki je ponoči visoko na nebu in ga ne moremo prezreti.

Predlagam, da v jasni brezlunini noči najdete Ptico in ga opazujete. Nato vzemite lovski daljnogled, ga postavite na trdno stojalo in opazujete Ptico z daljnogledom. Z lahkoto boste opazili, da je dvojna zvezda.

Marijan Prosén



Slika 3. Albireo je dvojna zvezda: or – oranžna, mo – modra. Podan je sij posamezne zvezde in kot med njima.

KONSTRUKCIJA BREZ UPORABE PODOBNOSTI

Kadar sta v trikotniku znana dva kota in ena od daljic (npr. stranica, težiščnica, kotna simetrala, višina), običajno konstruiramo podobni trikotnik in ga nato z ustreznim raztegom povečamo ali pomanjšamo, da dobi znana daljica potrebno dolžino.

Naloga: Brez uporabe podobnosti nariši trikotnik z danima dvema kotoma (s tem je seveda podan tudi tretji kot) in z dano težiščnico, npr. t_a .

Dušan Modic

O DELITVI DEDIŠČINE

Začnimo s staro zgodbo o kamelah. Bogat trgovec z Bližnjega vzhoda je zapustil svojim trem sinovom 17 kamel. V oporoki je določil, naj dobi najstarejši polovico, srednji tretjino in najmlajši devetino teh kamel. Sinovi niso vedeli, kako naj si razdelijo dediščino, saj bi radi vsi imeli samo žive živali, posamezni kosi jim ni bi dosti koristili. Srednjemu bi na primer pripadalo pet kamel in še dve tretjini. Zato so se za nasvet obrnili na kadija. Ta jim je naročil, naj čredo privedejo na njegovo dvorišče. Ko je bilo to storjeno, je dodal k trgovčevim še eno svojo kamelo, tako da jih je bilo zdaj 18. Nato je razsodil takole: najstarejši naj vzame polovico črede 18 kamel, torej 9, srednji tretjino, to je 6, in najmlajši devetino, se pravi 2. Sinovi so odpeljali $9 + 6 + 2 = 17$ kamel. Ena kamela, namreč kadijeva, pa je ostala. Bratje so bili z razdelitvijo zelo zadovoljni, saj so vsi dobili samo žive živali in vsak celo nekaj več, kakor bi mu pripadalo po oporoki: najstarejši pol kamele več, srednji tretjino in najmlajši devetino kamele več.

Kako je kadi našel tako imenitno rešitev naloge? Tega seveda ne vemo. Danes pa bi lahko razmišljali takole: Ker je vsota ene polovice, ene tretjine in ene devetine enaka $17/18$, torej manj kakor 1, sinovi ne dobijo vse zapuščine, če se dobesedno držimo oporoke. So pa njihovi deleži v razmerju $\frac{1}{2} : \frac{1}{3} : \frac{1}{9}$. Zato bo povsem v skladu z očetovo voljo, če se celotna čreda razdeli v tem razmerju. Ker je prvi sin dobil $18/2$, drugi $18/3$ in tretji $18/9$ kamel, je kadi res razdelil zapuščino v razmerju $\frac{1}{2} : \frac{1}{3} : \frac{1}{9}$. Povrh se je delitev izšla s celimi živalmi.

Oglejmo si zdaj splošni primer. Denimo, da znaša dediščina k kamel in da dobi najstarejši sin m -ti del, srednji n -ti del in najmlajši p -ti del teh kamel. Tu so m, n in p naravna števila. Če število k ni deljivo z m, n in p , ne bodo dobili vsi sinovi samo živih živali. Nadalje ni rečeno, da je vsota vseh deležev enaka dediščini, lahko je manjša, lahko tudi večja. Zato spet razdelimo kamele v ustreznem razmerju, se pravi v razmerju $\frac{1}{m} : \frac{1}{n} : \frac{1}{p}$. Torej bo dobil prvi sin $\frac{r}{m}$, drugi $\frac{r}{n}$ in tretji $\frac{r}{p}$ kamel, kjer je r sorazmernostni faktor, ki ga moramo tako izbrati, da bodo vse kamele razdeljene, da bo torej

$$\frac{r}{m} + \frac{r}{n} + \frac{r}{p} = k. \quad (1)$$

Denimo, da pripada pri tej delitvi vsakemu dediču celo število živali. Potem so kvocienti $r/m, r/n$ in r/p cela števila. To pa pomeni, da je tudi r celo število, in sicer je r skupni večkratnik m, n in p , saj je z vsemi temi števili deljiv.

Če so naravna števila m, n, p dana, lahko vzamemo za r poljuben njihov skupni večkratnik in nato izračunamo k iz enačbe (1). Pri tem številu kamel se delitev med dediči izide z živimi živalmi. Zgled: Naj bo $m = 2, n = 3$ in $p = 4$. Za r vzamemo najmanjši skupni večkratnik, torej $r = 12$. Iz enačbe (1) izračunamo $k = 13$. Prvi sin dobi $r/m = 12/2 = 6$, drugi $r/n = 12/3 = 4$ in tretji $r/p = 12/4 = 3$ kamele, skupaj 13 kamel.

Zapišimo enačbo (1) v teje ekvivalentni obliki

$$\frac{1}{m} + \frac{1}{n} + \frac{1}{p} = \frac{k}{r}. \quad (1^*)$$

Imamo tri možnosti: ali je $r = k$, ali $r > k$, ali pa $r < k$. V prvem primeru zadoščajo naravna števila m, n, p enačbi

$$\frac{1}{m} + \frac{1}{n} + \frac{1}{p} = 1, \quad (2)$$

v drugih dveh primerih pa eni izmed neenačb

$$\frac{1}{m} + \frac{1}{n} + \frac{1}{p} < 1, \quad r > k, \quad (3)$$

oziroma

$$\frac{1}{m} + \frac{1}{n} + \frac{1}{p} > 1, \quad r < k. \quad (4)$$

Enačba (2) velja, kadar je vsota deležev enaka dediščini, neenačba (3), kadar je manjša, in neenačba (4), kadar je večja od dediščine.

Poiščimo najprej rešitve enačbe (2). Smemo vzeti – to bomo v nadaljnjem vselej storili – da so naravna števila m, n, p takole urejena po velikosti: $m \leq n \leq p$ (to pomeni, da mlajši brat ne dobi več kakor starejši). V enačbi (2) mora biti m večji od 1, ker je pri $m = 1$ leva stran večja od 1. Ne more pa biti m večji od 3, saj je pri $m > 3$ leva stran manjša od 1. Zato sta samo dve možnosti: ali je $m = 2$ ali $m = 3$. Pri $m = 2$ dobimo iz (2)

$$\frac{1}{n} + \frac{1}{p} = \frac{1}{2}.$$

Očitno mora biti tu n večji od 2 in manjši od 5. Pri $n = 3$ imamo $p = 6$, pri $n = 4$ pa $p = 4$. Ostane še možnost $m = 3$. Tedaj sta tudi n in p enaka 3, sicer bi bila leva stran v (2) manjša od 1. Tako smo ugotovili, da

premore enačba (2) v bistvu samo tri rešitve v naravnih številih m, n, p . Te rešitve kaže razpredelnica I:

m	n	p
2	3	6
2	4	4
3	3	3

Razpredelnica I.

Če torej razdelimo dediščino med tri osebe tako, da dobi prva m -ti del, druga n -ti del in tretja p -ti del, kjer so m, n, p naravna števila, pri tem pa je vsa dediščina razdeljena, imamo samo tri možnosti: (a) ena oseba dobi polovico, ena tretjino in ena šestino, (b) ena oseba dobi polovico, ostali dve obe po četrtnino in (c) vsaka oseba dobi tretjino. Denimo, da je dediščina čreda kamel. Ker obravnavamo primer $k = r$ in je r večkratnik števil m, n in p , se delitev izide s celim številom živali, če je pri prvi rešitvi število kamel k večkratnik števila 6, pri drugi večkratnik 4 in pri tretji večkratnik števila 3.

Oglejmo si zdaj neenačbo (3). Ta je očitno izpolnjena, če so vsa tri števila m, n in p večja od 3. Zato je rešitev nešteto.

Neenačba (3) velja tedaj, ko je $k < r$, in je zato večkratnik r večji od števila kamel. V tem primeru dodamo k čredi, ki je dediščina, še $r - k$ kamel, tako da jih imamo potem r . Najstarejšemu pripada m -ti del, srednjemu n -ti del in najmlajšemu p -ti del od črede r kamel. Vsi trije bratje dobijo skupaj k kamel (to pove enačba (1)), dodanih $r - k$ kamel pa ostane.

V zgodbi, ki smo jo navedli v začetku, je kadi dodal eno samo kamelo. Kdaj to gre, se pravi, kdaj je enačba (1*) rešljiva pri $r - k = 1$? Če je $k = r - 1$, jo lahko zapišemo v obliki

$$\frac{1}{m} + \frac{1}{n} + \frac{1}{p} + \frac{1}{r} = 1. \quad (5)$$

Iščemo rešitve v naravnih številih m, n, p in r . Tudi tu bomo privzeli, da je $m \leq n \leq p \leq r$ (zadnja neenakost velja zato, ker je r večkratnik m, n, p). Hitro vidimo, da je m najmanj enak 2 in največ 4 (pri $m = 1$ je namreč leva stran v (5) večja od 1, pri $m > 4$ pa manjša od 1). Začnimo torej z $m = 2$. Potem je očitno n najmanj 3. Če je $n = 3$, dobimo iz (5)

enačbo

$$\frac{1}{p} + \frac{1}{r} = \frac{1}{6}.$$

Vidimo, da je p večji od 6, toda manjši od 13 zaradi pogoja $p \leq r$. Cele rešitve dobimo pri $p = 7, 8, 9, 10$ in 12. Nadaljujemo z $n = 4$, nato za $n = 5$ itd. Tako najdemo brez težave vse rešitve enačbe (5) v naravnih številih. Štirinajst jih je, kaže pa jih razpredelnica II.

Pogoj, da je r večkratnik m, n in p , je izpolnjen pri vseh rešitvah razen pri dveh, namreč pri rešitvi $m = 2, n = 3, p = 10, r = 15$ in pri $m = 3, n = p = 4, r = 6$.

Število kamel je tu enako $k = r - 1$, torej $k = 41$ pri prvi rešitvi iz razpredelnice. Ker je v tem primeru $m = 2, n = 3$ in $p = 7$, dobi prvi sin polovico, drugi tretjino in tretji sedmino. Delitev napravimo tako, da dodamo 41 kamelam še eno. Prvemu pripada potem polovica od 42 kamel, se pravi 21, drugemu tretjina od 42, to je 14, in tretjemu sedmina od 42, torej 6. Vsi sinovi skupaj dobijo $21 + 14 + 6 = 41$ kamel, dodana kamela pa seveda ostane.

Kako je z rešitvami neenačbe (4) v naravnih številih? Takoj vidimo, da mora biti m manjši od 3, ker je leva stran manjša ali enaka 1, če je $m \geq 3$. (Tudi tu privzamemo, da je $m \leq n \leq p$.) Pri $m = 1$ sta lahko n in p poljubni naravni števili. Pri $m = 2$ pa so te možnosti: $n = 2, p$ je poljuben, nadalje $n = 3, p = 3$, potem $n = 3, p = 4$ in končno $n = 3, p = 5$. Spet sestavimo razpredelnico rešitev:

m	n	p	r
2	3	7	42
2	3	8	24
2	3	9	18
2	3	10	15
2	3	12	12
2	4	5	20
2	4	6	12
2	4	8	8
2	5	5	10
2	6	6	6
3	3	4	12
3	3	6	6
3	4	4	6
4	4	4	4

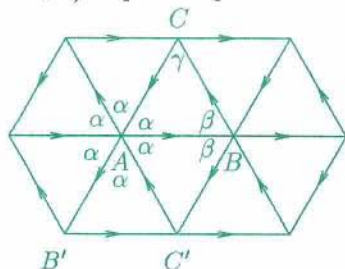
Razpredelnica II.

m	n	p
1	poljuben	poljuben
2	2	poljuben
2	3	3
2	3	4
2	3	5

Razpredelnica III.

Delitev kamel med dediče v tem primeru ni tako preprosta, ker moramo najprej nekaj živali odvzeti (zaradi $r < k$) in potem spet dodati.

Enačbe (2) ne srečamo smo pri delitvi dediščine med tremi osebam, temveč tudi drugod. Oglejmo si primer iz geometrije. Radi bi pokrili ravnino s trikotnimi ploščami, in sicer tako, da sta dva trikotnika tega pokritja zrcalni sliki drug drugega, če imata skupno stranico. S kakšnimi trikotniki to gre? Imejmo torej trikotnik ABC s koti α, β, γ .



Slika 1.

Če ga zrcalimo čez stranico AB , dobimo skladen trikotnik ABC' , ki pa je nasprotno orientiran kakor ABC (slika 1). Zrcalimo zdaj trikotnik ABC' prek stranice AC' . Novi trikotnik $AB'C'$ je nasprotno orientiran kakor ABC' , torej enako orientiran kakor prvotni ABC . Trikotnik $AB'C'$ nastane tudi z vrtenjem prvotnega trikotnika ABC okoli oglišča A za kot 2α . Nadaljujmo z zrcaljenji, in sicer vedno prek stranic, ki imajo eno krajišče v točki A . Po $2m$ korakih pridemo do trikotika, ki ga dobimo tudi tako, da prvotni trikotnik zavrtimo za kot $2m\alpha$ okoli oglišča A . Ali se lahko zgodi, da ta trikotnik pri primerno izbranem m natančno pokrije prvotni trikotnik ABC ? Očitno je to res tedaj, kadar smo trikotnik ABC z $2m$ zrcaljenji zavrteli za 360° , se pravi, kadar je $2m\alpha = 360^\circ$. Od tod dobimo $\alpha = 180/m$. Tudi obratno velja: če je α m -ti del iztegnjenega kota, pridemo po $2m$ zrcaljenjih do trikotnika, ki se ujema z danim trikotnikom ABC (z orientacijo vred). Z $2m$ trikotniki pokrijemo natanko enkrat neko okolico oglišča A . Pri tem sta dva sosednja trikotnika vedno zrcalni sliki drug drugega.

Kar smo povedali za oglišče A in kot α , velja seveda tudi za oglišče B in kot β , oziroma za C in kot γ . Zdaj zrcalimo čez stranice, ki imajo eno krajišče v točki B . Če je $\beta = 180/n$, kjer je n naravno število, bomo z $2n$ trikotniki natanko enkrat prekrili neko okolico oglišča B . In če je $\gamma = 180/p$, zrcalimo pa čez stranice, ki imajo eno krajišče v točki C , pokrije $2p$ trikotnikov neko okolico oglišča C . Denimo, da so ti pogoji izpolnjeni pri vseh treh ogliščih, da se torej koti trikotnika izražajo takole

$$\alpha = \frac{180}{m}, \quad \beta = \frac{180}{n}, \quad \gamma = \frac{180}{p}. \quad (6)$$

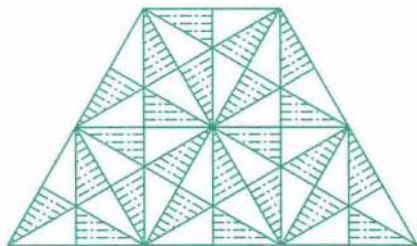
Tedaj pokrijemo z zrcalnimi trikotniki okolice vseh treh oglišč A, B in C , z nadaljnimi zrcaljenji pa tudi okolice na novo dobljenih oglišč C', B' itd. Sčasoma bodo torej trikotniki prekrili vso ravnino natanko enkrat. Lahko

rečemo, da smo na ravnino položili parket, kjer so parketne plošče trikotniki. Dve plošči, ki imata skupno stranico, sta vselej zrcalni sliki druga druge.

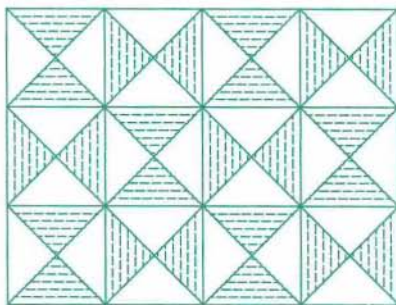
Če seštejemo kote (6) in upoštevamo, da je vsota trikotniških kotov 180° , dobimo enačbo, ki se po krajšanju s faktorjem 180 glasi

$$\frac{1}{m} + \frac{1}{n} + \frac{1}{p} = 1. \quad (*)$$

To pa je enačba (2). Ugotovili smo, da ima enačba (2) v bistvu le tri rešitve v naravnih številih m, n in p . Če namreč privzamemo, da je $m \leq n \leq p$, je bodisi $m = 2, n = 3, p = 6$ bodisi $m = 2, n = p = 4$ bodisi $m = n = p = 3$. V prvem primeru imamo kote $\alpha = 180/2 = 90^\circ$, $\beta = 180/3 = 60^\circ$, $\gamma = 180/6 = 30^\circ$; pripadajoči trikotnik je polovica enakostraničnega trikotnika. V drugem primeru so koti $\alpha = 180/2 = 90^\circ$, $\beta = \gamma = 180/4 = 45^\circ$; trikotnik je polovica kvadrata. V tretjem primeru pa je $\alpha = \beta = \gamma = 180/3 = 60^\circ$; trikotnik je enakostraničen (slika 1). Pokritje ravnine s prvimi trikotniki kaže slika 2, z drugimi slika 3.



Slika 2. Pokritje ravnine s skladnimi trikotniki s koti $\alpha = 90^\circ$, $\beta = 60^\circ$, $\gamma = 30^\circ$. Osenčeni in neosenčeni trikotnik sta vedno zrcalni sliki drug drugega.



Slika 3. Pokritje ravnine s skladnimi trikotniki s koti $\alpha = 90^\circ$, $\beta = \gamma = 45^\circ$. Osenčeni in neosenčeni trikotnik sta vedno zrcalni sliki drug drugega.

Kaj pa neenačbi (3) in (4)? Zvezo (*) med števili m, n in p smo izpeljali iz dejstva, da je vsota notranjih kotov v trikotniku 180° . To velja za našo običajno evklidsko geometrijo. V neevklidski geometriji pa je vsota kotov manjša od 180° . Če hočemo pokriti neevklidsko ravnino na podoben način s skladnimi trikotniki, ugotovimo kakor prej, da se morajo koti α, β, γ teh trikotnikov izražati v obliki (6), kjer so m, n in p naravna števila. Ker je vsota kotov zdaj manjša od 180° , zadoščajo m, n in p neenačbi (3). Ta pa ima nešteto rešitev v naravnih številih. Zato lahko neevklidsko ravnino pokrijemo na neskončno različnih načinov s skladnimi trikotnimi ploščami.

Sferični trikotnik je trikotnik na sferi (površini krogle). Njegove stranice so loki glavnih krogelnih krogov, glavni krogelni krog pa dobimo, če prerežemo sfero z ravnino, ki gre skozi središče sfere. Vsota notranjih kotov sferičnega trikotnika je večja od 180° . Če si spet zastavimo nalogo pokriti sfero s trikotniki tako, da sta dva trikotnika, ki imata skupno stranico, zrcalni slike drug drugega, ugotovimo, da se koti α, β, γ trikotnikov izražajo v obliki (6). Ker je vsota kotov večja od 180° , velja zdaj med m, n in p neenačba (4). Rešitve v naravnih številih kaže razpredelnica III. Vendar rešitve, pri katerih je $m = 1$, ne pridejo v poštev, ker so koti v trikotniku manjši od 180° . V evklidski in neevklidski geometriji je število skladnih trikotnikov, ki pokrivajo ravnino, neskončno. Sfera pa ima končno površino, zato je število trikotnikov, ki jo prekrivajo, končno.

Povejmo še to, da je razdelitev sfere na skladne oziroma zrcalne trikotnike povezana s pravilnimi poliedri.

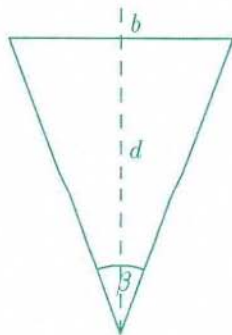
Ivan Vidav

NAJVEČJI ZORNI KOT – Z ISKUSTVENE PLATI

V Preseku 4 je bila objavljena geometrijska rešitev naloge o zornem kotu, zastavljene v Preseku 3.

Nalogo se lahko lotimo tudi na osnovi vsakdanjih izkušenj. Ko si npr. v družbi ogledujemo fotografije, si jih podajamo iz rok v roke. Fotografijo želimo imeti ne samo na primerni razdalji od oči, ampak tudi naravnost pred seboj, pravokotno na smer opazovanja. Podobno je z gledanjem televizije. Večina ljudi sede nasproti ekrana. Tudi v kinu sedemo, če je le mogoče, na sredino vrste. (Zanimivo: Kratkovidneži gremo raje v sprednje vrste, četudi imamo na nosu optimalna očala. Razpršilne korekcijske leče očal zmanjšajo sliko in s tem v osrednje vidno polje preslikajo več slike, kot jo dobe v ta del ljudje, ki očal ne potrebujejo. Zato kratkovidni očalarji tudi v prvih vrstah kinematografov vidimo vse platno, drugi gledalci pa bi tam morali obračati glavo.)

Zorni kot β , pod katerim vidimo neki objekt, je tem večji, čim bliže je ta objekt in čim širši je (slika 1).



Slika 1.

To, da želimo imeti opazovane objekte vzporedno z očmi, opozori še na nekaj: Zorni kot ni odvisen od širine objekta, ampak od njegove projekcije na smer, pravokotno na smer gledanja. Če kot zasuka α ni prevelik, je projekcija približno enaka $b \cos \alpha$ in za zorni kot velja (slika 2):

$$\operatorname{tg} \frac{\beta}{2} \doteq \frac{b}{2d} \cos \alpha.$$

Jaka naj torej svoj napis obesi tako, da bo $\frac{\cos \alpha}{d}$ največji. Najboljši je torej položaj, ki ga kaže slika 3. Slika stoji pravokotno na smer opazovanja ($\cos \alpha = 1$), razdalja d pa je pravokotna oddaljenost točke T od zidu, torej najmanjša možna.

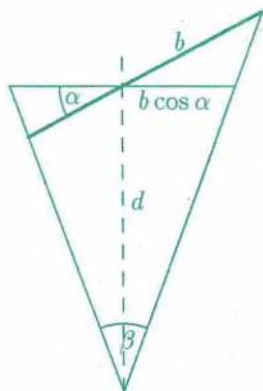
Kakšna naj bo torej oddaljenost napisa od vogala trga? Za ostre kote δ (glej sliko 3) je

$$x = a \cos \delta - \frac{b}{2},$$

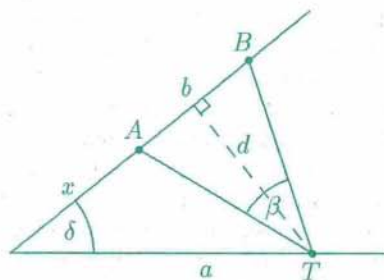
če je ta vrednost pozitivna. Če je ta vrednost negativna, moramo vzeti $x = 0$, saj bi se sicer napis skrnil za vogal. Isto velja za tope kote δ .

Razdalja x torej je odvisna od oblike trga, to je od kota δ .

Jože Rakovec



Slika 2.



Slika 3.

Naš dopisnik profesor Jože Rakovec ima seveda prav in se mu za opozorilo na napako v rešitvi naloge lepo zahvaljujem. Če Jaka svoj napis šele postavlja, mora ravnati, kot je razvidno iz zgornjega napotka. Če pa napis že stoji, je zveza med oddaljenostjo x napisa od vogala trga, njegovo širino b in Jakovo oddaljenostjo a od vogala trga takšna, kot je izpeljana v rešitvi v 4. številki Preseka, to je $x(x + b) = a^2$. Kam naj se Jaka postavi, če napis že visi, pa torej res ni odvisno od oblike trga.

Marija Vencelj

RAČUNALO RIMLJANOV

Znano je, da so tudi Rimljani poznali in uporabljali računalna. Njihovo računalno vidite na naslovnici. Sliko smo posneli na razstavi ročnih računskih strojev v Sofia Antipolisu, v Franciji.

Računalno naj bi Rimljani povzeli od Grkov (le-ti pa po vsej verjetnosti od Kitajcev), katerih števna deska je imela položaje za enice, desetice, stotice itd. Bolj komplicirane števne naprave so imele tudi uture za štetje vmesnih vrednosti: petic, petdesetic, petstotic itd, glede na zapisano vrednost denarja (drahme), ki so ga uporabljali. Poznejša rimska priročnejša računalna so imela na zgornjem krajšem utoru en čep, ki je lahko drsel gor in dol po utoru. Spodnji utor je bil daljši in je hranil 4 čepke. Spodnji čepki so predstavljali enice, desetice, stotice, ..., enojni zgornji čepki pa petice, petdesetice, petstotice, ... Tako, na primer, pomaknjen čep nad enico navzgor in spodnja dva od štirih prav tako dvignjena za dve mesti nam skupaj pomenijo $(1 \cdot 5 + 2 \cdot 1 =) 7$, oziroma VII. Predvideno je bilo več stolpcev za več desetiških mest. To lepo vidimo tudi na sliki, kjer so znaki za rimska števila vgravirani med spodnjo in zgornjo režo: I (1), X (10), C (100), M (1.000), XM (10.000), CM (100.000), MM (1.000.000) in $\overline{X}$ (10.000.000?) ter $\odot$ (1/10?). Slednji simbol naj bi pomenil ulomljene vrednosti do ene petine (desetine). Največja vrednost, ki jo računalno lahko zabeleži, je 10.000.000. V učbeniku latinščine bomo sicer našli za oznako $\overline{X}$ pomen *decies centena millia* (deset stotic tisočev), kar naj bi pomenilo milijon. Vidimo pa, da se po desetiških mestih vrednost ne ujema s tem pojmom. Prav tako bomo za znak $\overline{D}$ prebrali vrednost 50.000.000. Tudi to se povsem ne sklada s sistematiko označb na računalu, kjer bi ji dali vrednost 500.000.000. Vprašamo se lahko tudi, zakaj niso za vrednosti 10.000, 100.000, 500.000 uporabljali že znanih oznak $\overline{X}$, $\overline{C}$, $\overline{D}$. Tako, na primer, je pomenilo $\overline{XX}$ vrednost 20.000, $\overline{CC}$ pa 200.000. Pogrešamo tudi oznake V (5), L (50) in D (500), ki jih poznamo iz zapisov rimskih števil in ki jih pri ročnem računalu predstavljamo s položajem zgornjih čepov.

Kot zanimivost povejmo še, kako so nastali simboli za vrednosti modula pet: V (5) naj bi simbolično predstavljal roko s petimi prsti. Za 50 so najprej uporabljali simbol $\downarrow$, zatem so ga poenostavili v $\perp$, ki so ga kasneje zamenjali z L-jem. Za 500 so najprej uporabljali dva simbola IO (apostrophos ali narobe C). Tako je pomenilo IO vrednost 5.000, medtem ko je IOO simboliziralo 50.000. Pozneje so simbol IO zamenjali z D. Najprej so uporabljali zapis za 1000, ki so ga povzeli od Grkov, in sicer Φ . Zato tudi simbolika za tisoč, ki so jo izpeljali iz 500. C na levi je pomenil večkratnik vrednosti, zato je simbol CIO (Φ ?) pomenil 1000,

tisti z dvojnimi CC na levi, torej CCIOO pa $2 \cdot 5000 = 10.000$! Zapletena aritmetika, kajne? Pozneje so za 1000 uporabili simbol M (mille). Za 100 so najprej uporabljali grški Θ , zatem šele svoj C (centum).

Uganka ostajajo simboli S, C in Z, ki jih prav preberemo le z druge strani. Kaj so pomenili? Morda gre za označevanje polovice, četrtine in osmine zadnje ulomljene vrednosti, podobno kot pri grškem abaku, kjer so dodatni čepki označevali $1/2$, $1/4$ in $1/8$ drahme!

Omeniti moramo, da je v antiki uporaba petic kot posebnega stolpca pri večjih (namiznih) računalih in štirih čepov ter enega za petice pri ročnih računalih vseskozi vplivala na razvoj tovrstne naprave. Zaradi tega so Rimljani uporabljali sistem zapisa števil, ki je sicer navidez zapleten, vendar omogoča hiter zapis števila z abaka. Ko pa želimo množiti ali deliti, se šele pokaže vsa zamotanost tega sistema. To očitno starih Grkov in Rimljanov ni motilo, saj so za znanstvene izračune uporabljali šestdesetiški sistem iz Babilona, njihove tablice za množenje in njihovo ničlo ter zapis števil s položajem števk, podoben desetiškem.

Veselko Guštin

PREVRTANI KROGLI – Rešitev s str. 210

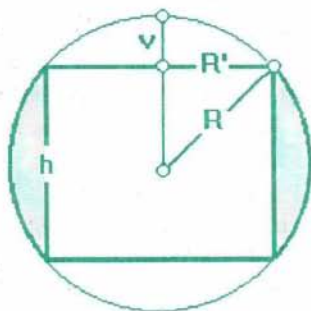
Prostornino prstana V_p izračunamo tako, da od prostornine krogle odštejemo prostornino valja v sredini in prostornini obeh krogelnih kapic na vsaki strani valja. Za večjo kroglo s polmerom R je npr.:

$$V_p = V_{kr} - (V_v + 2V_{ka}) = \frac{4\pi R^3}{3} - (\pi R'^2 h + 2 \cdot \frac{\pi v^2}{3} (3R - v)),$$

kjer smo z R' označili polmer valja, z v pa višino krogelne kapice. Če v tem izrazu upoštevamo, da je $v = \frac{2R-h}{2}$ in $R'^2 = R^2 - (\frac{h}{2})^2$, dobimo:

$$V_p = \frac{\pi h^3}{6}.$$

Prostornina prstana je, nekoliko presenetljivo, neodvisna od polmera krogle. Torej sta prostornini obeh prstanov enaki.



Vilko Domajnko

KDAJ JE LAHKO VSOTA ZAPOREDNIH NARAVNIH ŠTEVIL KVADRAT – Rešitev s str. 207

a) Vsota dveh zaporednih naravnih števil $n, n+1$ je liho število $2n+1$. Kvadrat sodega števila je sodo, kvadrat lihega števila liho število. Ker naj bo $2n+1$ kvadrat, mora biti $2n+1 = (2s+1)^2$ pri naravnem številu s in dobimo $n = 2s^2 + 2s$. Za vsak takšen n je vsota $n + (n+1) = (2s^2 + 2s) + (2s^2 + 2s + 1) = (2s+1)^2$ zmeraj kvadrat. Ustrezajo vsi $n = 2s^2 + 2s, s = 1, 2, 3, \dots$ in nobeno drugo število.

b) Sedaj je $j = t$ in t liho naravno število. Pri $t = 1$ ima vsota en sumand, ki je kvadrat. Kvadratov $1^2, 2^2, 3^2, \dots$ pa je neskončno. Če je t večji od 1, je $t = 2s+1$ pri naravnem številu s . Vsoto $2s+1$ zaporednih naravnih števil lahko zmeraj zapišemo v obliki

$$(n-s) + (n-(s-1)) + \dots + (n-1) + n + (n+1) + \dots + (n+(s-1)) + (n+s) \quad (1)$$

in $n > s$. Člen n je v sredini, simetrična člena glede na sredino dajeta seštetu $2n$. Na vsako stran od n je s členov, zato vsota znaša $2ns + n = (2s+1)n = tn$. Število tn je gotovo kvadrat, če je $n = tb^2$, b pa naravno število.

c) Pri $j = 2^{2a+1}t$, kjer je a nič ali naravno in t liho naravno število, ravnamo podobno kot v primeru b). Vsoto (1) nadomesti vsota

$$\left(n - \left(\frac{j}{2} - 1\right)\right) + \dots + (n-1) + n + (n+1) + \dots + \left(n + \left(\frac{j}{2} - 1\right)\right) + \left(n + \frac{j}{2}\right). \quad (2)$$

Na levo od n je $\frac{j}{2} - 1$, na desno $\frac{j}{2}$ sumandov, vsota znaša $2n(\frac{j}{2} - 1) + n + (n + \frac{j}{2}) = \frac{j}{2}(2n+1) = 2^{2a}t(2n+1)$. To število je gotovo kvadrat, če je $2n+1 = tb^2$. Pri tem mora biti b lih, ker je $2n+1$ lih, in $b > 2^a\sqrt{2}$, da bo $n - (\frac{j}{2} - 1)$ naravno število. Takšnih naravnih b je neskončno.

d) Za $j = 2^{2a}t$, ko je a naravno in t liho naravno število, spet uporabimo vsoto (2). Njena vrednost $\frac{j}{2}(2n+1) = 2^{2a-1}t(2n+1)$ je sodo število, ki pa ne more biti kvadrat. V tem sodem številu nastopa namreč praštevilo 2 v lihi stopnji $2a-1$, ker sta faktorja $t, 2n+1$ liha. Sodo število, ki je kvadrat, pa vsebuje prafaktor 2 v sodi stopnji.

Pripomba: V primeru c) za $a = 0, t = 1$ velja $j = 2$ in imamo primer a), ko so navedene vse rešitve. Sicer pri b) in c) niso zajete vse rešitve. Do vseh rešitev pripelje natančnejši premislek, ki ga tu opuščamo. Naj

bo r naravno število večje od 2. Če se bralec zgleduje po zgoraj opisanem reševanju, mu ne bo težko ugotoviti, pri kakšnih naravnih številih j je vsota j zaporednih naravnih števil neskončnokrat enaka r -ti potenci naravnega števila.

Jože Grasselli

PET RAZBOJNIKOV – Rešitev s str. 209

Nalogo lahko uženemo npr. tako, da poiščemo in rešimo sistem enačb za neznane deleže drugega, tretjega, četrtega in petega razbojnika. Sistem je sicer linearen in ga ni težko rešiti, vendar že sam njegov zapis zahteva nekaj časa in potrpljenja.

Hitreje pridemo do rešitve, če začnemo razmišljati od zadnje podvojitve proti prvi.

Da bo pregledneje, zapišimo deleže razbojnikov na posameznih korakih delitve v tabelo:

	prvi raz- bojnik	drugi raz- bojnik	tretji raz- bojnik	četrty raz- bojnik	peti raz- bojnik
po končani delitvi	$\frac{1}{5}$	$\frac{1}{5}$	$\frac{1}{5}$	$\frac{1}{5}$	$\frac{1}{5}$
pred peto podvojitvijo	$\frac{1}{10}$	$\frac{1}{10}$	$\frac{1}{10}$	$\frac{1}{10}$	$\frac{6}{10}$
pred četrto podvojitvijo	$\frac{1}{20}$	$\frac{1}{20}$	$\frac{1}{20}$	$\frac{11}{20}$	$\frac{6}{20}$
pred tretjo podvojitvijo	$\frac{1}{40}$	$\frac{1}{40}$	$\frac{21}{40}$	$\frac{11}{40}$	$\frac{6}{40}$
pred drugo podvojitvijo	$\frac{1}{80}$	$\frac{41}{80}$	$\frac{21}{80}$	$\frac{11}{80}$	$\frac{6}{80}$
pred prvo podvojitvijo	$\frac{81}{160}$	$\frac{41}{160}$	$\frac{21}{160}$	$\frac{11}{160}$	$\frac{6}{160}$

Ker je imel prvi razbojnik na začetku 81 cekinov, je moralo biti v mošnji 160 cekinov. Ostali so jih imeli zapored 41, 21, 11, 6.

Marija Vencelj

ISKANJE ŠIROKIH ŠTEVIL

Pred časom sem obljubil, da bom napisal nekaj o štetju širokih števil. Predno pa se poglobimo v programiranje, se spomnimo, da je število široko, če je vsota njegovih števk enaka njihovemu produktu.

Ugotoviti sem želel, koliko je širokih števil, ki so manjša od milijarde. Ker ugotavljanje, ali je število široko, ni zapleteno, današnji osebni računalniki pa so že zelo hitri, sem se problema lotil z metodo grobe sile. Sestavil sem spodnji program, ki za vsako število od 1 do izbrane zgornje meje po definiciji preveri, ali je široko.

```

program SirokaStevila1;
{ Poišče vsa široka števila do 10n z zaporednim preverjanjem po definiciji. }
const
  maxN=9;
var
  n: integer;                                { Iščemo široka števila do 10n. }
  n10: longint;                             { n10 = 10n }
  maxVsota: integer;                        { največja možna vsota števk }
  vsota,produkt: integer;                  { vsota in produkt števk }
  S: longint;                              { števec najdenih širokih števil }
  ij: longint;
  ost: integer;
begin
  writeln('Iskanje širokih števil do 10↑n. ');                                { vnos }
  write(' Vpisi n (n<',maxN+1,') : '); readln(n);
  n10 := 1; for i:=1 to n do n10 := 10*n10;                                { Izračunamo 10n. }
  maxVsota := 9*n;                                                            { največja možna vsota števk }
  S := 0;
  for i := 1 to n10 do begin
    j := i; vsota := 0; produkt := 1;
    while j>0 do begin                                                        { Določi vsoto in produkt števk. }
      ost := j mod 10; j := j div 10;
      vsota := vsota+ost; produkt := produkt*ost;
      if produkt>maxVsota then break;
    end; { while }
    if vsota=produkt then S := S+1;                                           { Ali je število široko? }
  end; { for }
  write('Širokih števil do ',n10,' je ',S,'. '); readln;
end.

```

V zanko **while**, ki preverja, ali je število široko, sem dodal pogojni stavek **if**, ki z ukazom **break** prekine zanko, če produkt števk prekorači največjo možno vsoto števk. Žal tudi ta majhna izboljšava ni pomagala. Že ko sem gornji program preizkusil pri vrednosti $n = 6$, sem na odgovor čakal dobrih dvajset sekund. Hitro sem ocenil, da bi pri $n = 9$ na rezultat čakal vsaj šest ur, odločno preveč za tako preprosto nalogo.

Nekoliko razočaran zaradi neuspeha sem tako ugotovil, da reševanje naloge zahteva korenite spremembe v pristopu. Za nekaj nasvetov sem poprosil še kolego Marka Petkovška, ki ima vedno na zalogi kakšno uporabno idejo. Tako sem se odločil za reševanje s sestopanjem, ki pa sem ga dopolnil z učinkovitim testom, ki pove, kdaj je nadaljevanje poskušanja še smiselno. Zaradi lažjega programiranja sem uporabil rekurzivni zapis glavnega podprograma. Nastal je naslednji program.

```

program SirokaStevila2;
{ Poišče vsa široka števila do  $10^n$  s sestopanjem. }
const
  maxN=64;
var
  n: integer; { Iščemo široka števila do  $10^n$ . }
  stevke: array[0..maxN] of 1..9; { 0. mesto je pomožno. }
  S: longint; { števec najdenih širokih števil }
  m: integer;

procedure Razsiri(i,m: integer; vsota,produkt: integer);
{ Določamo i-to števko, skupaj z njo jih moramo določiti še m;
  vsota je vsota, produkt pa produkt prvih i-1 števk. }
var
  j,k: integer;
  p: longint;
begin
  if m>0 then
    for j:=stevke[i-1] downto 1 do begin
      stevke[i] := j;
      if produkt*j<=vsota+m*j then Razsiri(i+1,m-1,vsota+j,produkt*j);
    end
  else if vsota=produkt then begin { Izračuna, koliko števil smo našli. }
    p := 1; k := 1;
    for j:=2 to i-1 do begin
      p := p*j;
      if stevke[j]<>stevke[j-1] then
        k := 1
      else
        begin k := k+1; p := p div k; end;
    end; { for }
    S := S+p; { Zgrajeno široko število predstavlja p širokih števil. }
  end; { else if }
end; { Razsiri }

begin
  writeln('Iskanje širokih števil do  $10^{\uparrow n}$ .'); { vnos }
  write(' Vpiši n (n<',maxN+1,') : '); readln(n);
  S := 0; stevke[0] := 9; { začetni vrednosti }
  for m:=1 to n do Razsiri(1,m,0,1);
  write('Širokih števil do  $10^{\uparrow n}$ , ' je ',S,'.'); readln;
end.
```


S podprogramom **Razsiri** postopno, števko po števko, v globalni spremenljivki **števke** gradimo kandidate za široka števila. Podprogram ima štiri parametre: prvi nam pove, na katero mesto moramo postaviti naslednjo števko, drugi šteje, koliko števk moramo še izbrati, in nam služi v pogoju, s katerim končamo rekurzijo, tretji in četrti pa sta vsota in produkt že izbranih števk. Široka števila, ki so manjša od 10^n , imajo lahko od 1 do n števk. Zato v glavnem programu podprogram **Razsiri** kličemo n -krat. Vrednosti parametrov pri teh klicih so 1, m , 0 in 1, kjer m zavzame vrednosti med 1 in n . Tako začetno števko postavimo na prvo mesto v tabeli **števke**, iščemo široka števila z m števki, začetna vsota števk je enaka 0, začetni produkt števk pa je enak 1.

Nobeno široko število ne vsebuje števk 0, zato pri gradnji kandidatov za široka števila uporabljamo le števke od 1 do 9. Da zmanjšamo potrebno delo in omogočimo učinkovito preverjanje, ali je nadaljevanje poskušanja smiselno, gradimo le števila, katerih števke tvorijo nenaraščajoče zaporedje. Tako naslednja števka ne sme biti večja od prejšnje. Če nam manjka še m števk, vemo pa, da nobena ne bo večja od j , se vsota števk lahko poveča kvečjemu za $m \cdot j$. Hkrati vemo, da se produkt števk pri dodajanju neničelnih števk ne more zmanjšati. Tako dobimo pogoj, ki ga preverimo, preden naredimo rekurzivni klic.

Ker gradimo le števila z nenaraščajočim zaporedjem števk, nam vsako široko število, ki ga najdemo, če ima vsaj dve različni števki, pravzaprav predstavlja več širokih števil. Tako moramo, na primer, ko najdemo število 4211, šteti še števila 4121, 4112, 1421, 1412 in 1142 ter še šest števil, ki jih dobimo iz naštetih, če zamenjamo števki 2 in 4. Recimo, da ima dobljeno široko število n števk. Vseh različnih permutacij teh števk je $n(n-1) \cdot \dots \cdot 1$. To število označimo z $n!$ in ga imenujemo fakulteta števila n . Vendar pa nekatere permutacije dajo enako število, saj medsebojne zamenjave enakih števk števila ne spremenijo. Da dobimo dejansko število različnih števil, moramo $n!$ deliti še s fakultetami števil tistih števk, ki v dobljenem širokem številu nastopijo večkrat. V zgornjem primeru imamo štirimestno široko število 4211. Ker v njem le števka 1 nastopa večkrat, in sicer dvakrat, nam to število predstavlja $\frac{4!}{2!} = 12$ različnih širokih števil. Ta smo že opisali.

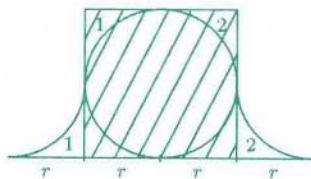
Ko sem preizkusil gornji program, sem bil prijetno presenečen. Naslednjo tabelo je izračunal že v nekaj sekundah.

n	široka števila do n	bistveno različna široka števila do n
10^{10}	595	23
10^{20}	31017	39
10^{30}	401783	55
10^{40}	1155831	67
10^{50}	8415630	80
10^{60}	77309547	92

5. a) Število mora biti deljivo s 3 in 4. Torej: 4212, 4512, 4812, 4116, 4416, 4716.
 b) Ker je v produktu šest zaporednih števil, mora biti število deljivo s 5 in z 2, torej z 10; zadnja cifra je torej 0. Podobno ugotovimo, da sta v produktu dve števili, deljivi s 3, torej je produkt deljiv z 9. Produkt je 665280.

7. razred

- Kvadrat produkta je deljiv z 9, ker je $3^2 = 9$; sledi, da mora biti tudi desna stran enakosti deljiva z 9. Desno število je 492804. Kvadrat neznanega faktorja na levi je $492804 : 9 = 54756$ in $\sqrt{54756} = 234$. Torej: $(3 \cdot 234)^2 = 492804$.
- $o = 2r(2 + \pi)$, $p = 4r^2$.
- $ab = \frac{4}{5} a \cdot x \Rightarrow x = \frac{5}{4}b$. Stranico b moramo povečati za 25%.
- Število (1000^{1000}) lahko zapišemo kot $1000 \dots 0$, s 3000 ničlami; tudi število $1000^{1000} - 1$ zapišemo $999 \dots 9$ s 3000 devetkami. Če to število delimo z 9, dobimo količnik $111 \dots 1$ s 3000 enkami. Količnik je deljiv s 3. Dani izraz $(1000^{1000} - 1)$ lahko delimo z 9 in še s 3, kar pomeni, da je deljiv s 27.
- $o = 2 \cdot 2\pi \cdot \frac{r}{2} + \pi r = 3\pi r = 30\pi$, sledi $r = 10$ cm.
 $p = 2r^2 + 2 \cdot \pi \cdot \left(\frac{r}{2}\right)^2 - \frac{1}{2} \cdot \pi \cdot r^2$
 $p = 2r^2 = 200 \text{ cm}^2$
 Ploščina figure je tudi enaka ploščini pravokotnika.



8. razred

- Naj bo znani ulomek $\frac{a}{b}$.

$$\frac{a+b}{2b} = \frac{a}{b} + \frac{1}{9},$$

$$\frac{a}{2b} + \frac{b}{2b} = \frac{a}{b} + \frac{1}{9},$$

$$\frac{1}{2} \cdot \frac{a}{b} + \frac{1}{2} = \frac{a}{b} + \frac{1}{9}.$$

Če zapišemo $x = \frac{a}{b}$, dobimo

$$\frac{1}{2} \cdot x + \frac{1}{2} = x + \frac{1}{9} \quad \text{in} \quad x = \frac{7}{9}.$$

Iskani ulomek je $\frac{7}{9}$.

2. $(4x+1)^2 + 15 = 16x^2 + 8x + 16 = 8(2x^2 + x + 2)$. Izraz je deljiv z 8.

3. a) $x = \frac{4m-9}{21}$.

b) $m = 3$.

c) $0 < \frac{4m-9}{21}$. Ulomek je pozitiven, če je $4m > 9$, torej $m > 2\frac{1}{4}$.

$\frac{4m-9}{21} < 1$ ali $4m - 9 < 21$ ali $4m < 30$, torej $m < 7\frac{1}{2}$.

Veljati mora $2\frac{1}{4} < m < 7\frac{1}{2}$, torej so iskana števila 3, 4, 5 in 6.

4. $(n-1) \cdot n \cdot (n+1) + n = n^3$.

5. $3x + 4y - 12 = 0$, $y = -\frac{3}{4}x + 3$. Koordinati presečišč sta:

$T_x(4, 0)$, $T_y(0, 3)$ in ploščina $p = \frac{1}{2} \cdot 4 \cdot 3 = 6$.

Iskana razdalja q je višina na hipotenuzo trikotnika $T_x T_y O$. $\overline{T_x T_y}^2 = 3^2 + 4^2$, $\overline{T_x T_y} = 5$ in $q = \frac{2p}{\overline{T_x T_y}} = \frac{12}{5} = 2,4$.

Pavel Zajc

KAJ KDO POUČUJE? – Rešitev s str. 231

Nalogo najlažje rešimo s pomočjo razpredelnice:

	Pleterski	Kopriva	Prijatelj	Godnič	Merhar	Novak
ekon.	X	X	X	X	X	P
slov.	X	X	X	P	X	X
franc.	P	X	X	X	X	X
zgod.	X	X	X	X	P	X
lat.	X	P	X	X	X	X
mat.	X	X	P	X	X	X

Upoštevati moramo, da sta osebi, ki učita matematiko in latinščino, istega spola in iste starosti, torej ne moreta biti Merhar in Novak. Od tod in iz ostalih podatkov sklepamo, da mora Merhar poučevati zgodovino, Novak pa ekonomijo. Nadaljni sklep je, da uči slovenščino gospa Pleterski. Od preostalih treh je lahko le Prijateljeva skupaj z Merharjem hodila v srednjo šolo, zato mora ona biti učiteljica matematike.

Neža Mramor - Kosta

fiziki 				13 PREDSTAVLJENIH V STRANADOLNI KNJIGI	LOUIS DE (FRANC.)	LEV (RUS.)	ALENKA ZOR	NAPRAVA V CERKV. STOLPU	ŠKOTSKO JEZERO Z DOMNEVNO POSASTJO (LOCH)	EGON ZAKRAJSEK	
				UMSKO BOLAN CLOVEK							
				LOČITEV ZAKONA							
				OSEBNI ZAMEK			DEL KOLESA LEVI PRITOK RENA			AM. PISAT. ZID. ROGU (PHILIP)	
				POLJSKO PRISTANISCE						KOPER	
				SL. JAHAC (ALOJZ)							
				NEKD. TV. NAPOVED. (ANDREJA)				UČENJE	DVOJICA		
PRIMKI FIZIKOV NA OSENCENIH POLJAH	VSOTA VSEH NA TELQ DELUJOCIH SIL	WERNER (NEM.)	FIN. TRIAT-LONEC (PAULI) GOR. NIMFA						OBČUTLJIV DEL OBRAZA	SL. PREVAJ. (ANTON) ANG. PLEM. NASLOV	
FR. REKA RONA (ORIG.)							ŠKRAT, KI VARUJE ZAKLADE V ZEMLJI	POLJSKA POT ANDREJ (RUS.)			
FINSKI ARHITEKT SAARINEN					GOSPIČ ZNESEK ODPALČILA				VRTAČA V GORAH SL. IGRALEC (SIMON)		
MESTO V ZAHODNI POLJSKI											
ZDA (ORIG.)				NIELS (DAN.) EVA LONGYKA						TLA POD MORJEM	
LEON (AMER.)										BARVNI LIKOVNI IZDELEK	HRVAŠKI SAHIST (OGNJEJ)
KLADA ZA SEKANJE DRV							GOZDNA ZVER ZAVITEK PAPIRJA				REKA V ŠVICI
ADAM BOHORČ			BUKOV PLOD	SL. IGRALEC (SANDI) KARENIHA							SUNKOVIT POTEGLJAJ
PESNICA MAURER					KODRAST OBLACEK KONSTANTIN FEDIN						
AVSTRILJ. SMUKAČ (HANNES)								NAUK O ZVOKU			
OKRASNA SPONKA								KAKTUS			

HUDA ROČINA	IME (DRŽAVA)	IGRAKA NIELSEN	NEM. MENH. IZUMITELJ CRNEGA SMODNIKA	PETER HANDKE	PESNIK FRITZ	VELIKO NEMŠKO MESTO	TED DANSON	AVTOR MARKO BOKALIČ	SKUPEK	MADŽARI	RICHARD (AMER.)	STOCK- HOLMSKO LETALIŠČE
	VIDIK POGLED							BLAZINJAK				
	ERWIN (AVTRIJJA)							IZTOK MLAKAR				
	ZELJU POD. ZELENJAVA											
				VLADIMIR LAMUT			IGRAKA STREEP					
				SL. PESNICA (MAJDA)			NOGOMETAŠ MÜLLER					
TEPHEN (ANG.)								GOROVJE SINAJ (ARAB.)				
MOGLAS. STIK								STIH				
		IGRAKA BLYTH				ELDA VILER				MANGAN		
		TANČICA, PAJČOLAN				TRPNI GLAG. NAČIN			MESTO NA HAVAJIH	DRŽAVA V INDOKINI		
					LAŽJE OBOLENJE DIHAL							
				BRUSNI KAMEN	SLIKARKA MARAŽ							
					MAX (NEM.)							
			SATURNOVA ŽENA				HUDOBILJA				ALBERT (NEM.)	RUSKI AVTO
			NAUK O LEPEM				IZPIJE NA DUŠEK DO DNA					
	IGRAKA CARION							KONJU POD. ŽIVAL				
	ELIPŠAST KROČNIK							EST. PEVEC (GEORGIJ)				
		MINISTER GABER							OSTANEK IZ PREJSNIH ČASOV	IVO ANDRIČ		
		PLATINSKA KOVINA								TIP AMER. VES. LADU		
						SMUČAR NIELSEN						
						SMRT ŽIVALI						
				CHARLIE PARKER			ZASTRUP. KRM					
							IGRALEC ULAGA					
LITOVSKI DENAR				ŠIFRIRAN ZAPIS				KOVINSKO VEZVO				IVAN SUPEK
NEM. FILOZOF (GEORG)				MAKARSKA				ANDREW BONAR				
	DUŠLJIV PLIN PRI GORENJIU											
	TELUR											
						KOŠARK. KLUB IZ SOLUNA						
						ISAAC (ANG.)						

NEWTONOVA METODA IN LEPI FRAKTALI

Enačba $z^n = 1$, kjer je n naravno število, ima n kompleksnih rešitev. Za vsak n je ena od rešitev $z = 1$. Vse rešitve leže na enotski krožnici v kompleksni ravnini in so razporejene tako, da dele krožnico na enake dele.

Rešitve torej poznamo, zanimivo pa je vprašanje, h kateri izmed n rešitev nas pripelje kakšna iteracijska metoda, če začnemo iteracijo s poljubnim kompleksnim začetnim približkom.

Izbrali smo si Newtonovo metodo, ki jo na kratko opišimo. Če iščemo rešitve enačbe $f(z) = 0$ in je z_0 začetni približek, dobimo naslednje približke s formulo:

$$z_{r+1} = z_r - \frac{f(z_r)}{f'(z_r)},$$

kjer je f' odvod funkcije f po spremenljivki z . V našem primeru je $f(z) = z^n - 1$, od koder dobimo:

$$z_{r+1} = z_r - \frac{z_r^n - 1}{nz_r^{n-1}}.$$

Če je začetni približek dovolj blizu kakšni od rešitev, potem se naslednji približki k njej hitro bližajo. V splošnem pa ne moremo vnaprej vedeti, h kateri od rešitev se bodo stekali.

Lahko pa začetne približke sortiramo glede na to, h kateri od rešitev nas je pripeljala Newtonova metoda. Če v kompleksni ravnini z enako barvo pobarvamo točke, ki kot začetni približki vodijo k isti rešitvi, in z različnimi barvami tiste, ki vodijo k različnim rešitvam, dobimo čudovit vzorec. Ta ima fraktalno strukturo, kar pomeni, da se njegova razvejanost ne neha pri še tako majhnih merilih. Če vzamemo pod drobnogled del vzorca z veliko barvno raznolikostjo in ga povečamo, se raznolikost ohrani pri poljubni povečavi.

Na zadnji strani ovitka so prikazani vzorci za $n = 3, 4, 5$ in 6 . Sami jih lahko dobite tako, da napišete program in ga poženete na svojem računalniku. Še podatek o približni zahtevnosti: Na računalniku PC 386 (40 MHz) z matematičnim koprocesorjem nariše program v turbopascalu celotno sliko v približno petnajstih minutah.

Milan Ambrožič

MALO IN VELIKO PREPROSTO ŠTEVILO – Rešitev s str. 219

V nalogi smo najprej spraševali po najmanjšem preprostem številu, ki je večje od 1995. Število $2048 = 2^{11}$ je preprosto, tako da iskano število ne bo večje od njega. Ker je $3 \cdot 2^9 = 1536 < 1995$ in $3 \cdot 2^{10} > 2^{11}$, bi moralo biti morebitno manjše preprosto število deljivo z 9. Zlahka pa se prepričamo, da nobeno od števil 1998, 2007, 2016, 2025, 2034 in 2043 ni preprosto. Najmanjše preprosto število, ki je večje od 1995, je število 2048.

Bolj zanimivo pa je drugo vprašanje, ki sprašuje po 1995. preprostem številu. Teorija pravi, da je n -to preprosto število nekje med številoma $\frac{1}{6}2\sqrt{2n \log_2 3}$ in $2\sqrt{2n \log_2 3}$. Če vstavimo $n = 1995$ in rezultat zaokrožimo, dobimo oceno, da bo iskano število med 10^{23} in $9 \cdot 10^{23}$. Imelo bo torej štiriindvajset mest.

Iskanje pa vendarle ni tako brezupno, kot se zdi na prvi pogled. Čeprav je iskano število zelo veliko, ga lahko izračunamo šele čisto na koncu, v samem programu pa ga hranimo v obliki para eksponentov, s katerima v njegovem razcepu nastopata praštevili 2 in 3. Če že poznamo nekaj prvih preprostih števil, tudi iskanje naslednjega ni zelo zamudno, le na problem moramo pogledati s prave strani. Naslednje preprosto število bo namreč dvakratnik ali trikratnik enega od prejšnjih, že znanih števil. Poiskati moramo le najmanjši preprosti števili, katerih dvakratnik oziroma trikratnik je večji od zadnjega najdenega števila, in izbrati manjšega. Ker bomo vsa odkrita preprosta števila hranili v tabeli, gornjih operacij ne bo težko izvesti. Vsako preprosto število je ene od naslednjih oblik: potenca števila 2, potenca števila 3 ali pa večkratnik števila 6. Hitro se lahko prepričamo, da sta kandidata za naslednje preprosto število enaka, če in samo če je naslednje preprosto število večkratnik števila 6. Tako sestavimo naslednji program.

```
program PreprostaStevila;
{ Poišče po velikosti 1995. preprosto število. }
const
  N=1995;
  eps=0.001;                                     { meja natančnosti }
var
  PS: array[1..N] of array[2..3] of integer;    { tabela preprostih števil }
  dva, tri: integer;                             { oznaki kandidatov }
  i: integer;
  razlika: real;
```

```

begin
  PS[1][2] := 0; PS[1][3] := 0;
  dva := 1; tri := 1;
  for i:=2 to N do
    { določamo i-to preprosto število }
    if (PS[dva][3]<>0) and (PS[tri][2]<>0) then { enaka kandidata }
    begin
      PS[i][2] := PS[dva][2]+1; PS[i][3] := PS[dva][3];
      dva := dva+1; tri := tri+1;
    end
  else { različna kandidata; potence imajo prednost }
  if (PS[dva][3]=0) and (PS[tri][2]<>0) then
    begin PS[i][2] := PS[dva][2]+1; PS[i][3] := 0; dva := dva+1; end
  else if (PS[tri][2]=0) and (PS[dva][3]<>0) then
    begin PS[i][2] := 0; PS[i][3] := PS[tri][3]+1; tri := tri+1; end
  else begin { dve potenci; primerjamo ju s pomočjo logaritmov }
    razlika := (PS[dva][2]+1)/(PS[tri][3]+1)-ln(3)/ln(2);
    if abs(razlika)<eps then
      begin write(chr(7),'Blizu skupaj!',i:5); readln; end;
    if razlika<0 then
      begin PS[i][2] := PS[dva][2]+1; PS[i][3] := 0; dva := dva+1; end
    else
      begin PS[i][2] := 0; PS[i][3] := PS[tri][3]+1; tri := tri+1; end;
    end;
  write('Po velikosti ',N,'. preprosto število je 2↑',PS[N][2],',3↑',PS[N][3],'.');
  readln;
end.

```

Program v hipu kot odgovor vrne število $2^{37} \cdot 3^{26}$. Po krajšem računu dobimo

$$2^{37} \cdot 3^{26} = 349351379311776170508288,$$

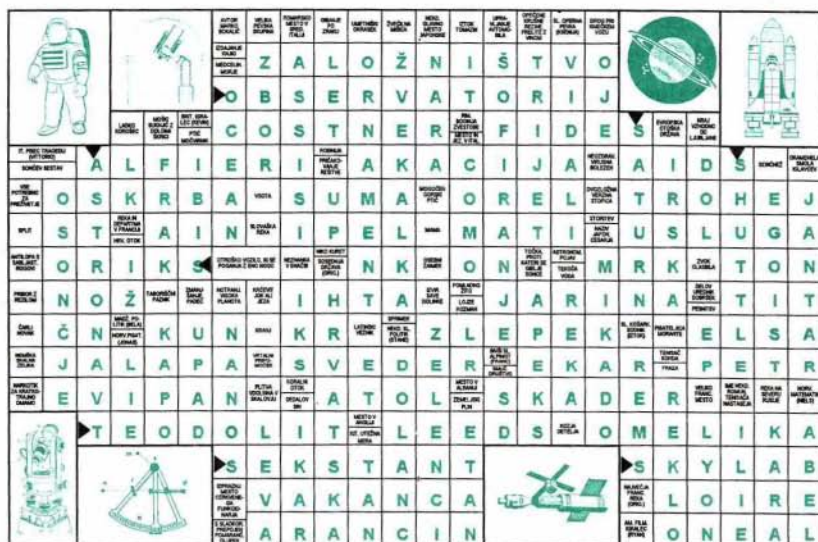
to pa je res v mejah, ki smo jih napovedali.

Števca *dva* in *tri* v programu označujeta najmanjši preprosti števili, katerih dvakratnik oziroma trikratnik je strogo večji od zadnjega najdenega preprostega števila. Dvakratnik števila *PS[dva]* in trikratnik števila *PS[tri]* sta torej edina kandidata za naslednje preprosto število. Če *PS[dva]* ni potenca števila 2 in *PS[tri]* ni potenca števila 3, potem sta oba kandidata enaka. Tako vzamemo kar prvo število in povečamo oba števca. Sicer pa ločimo več možnosti. Če je prvi kandidat potenca števila 2, drugi pa ni potenca števila 3 ali pa je drugi potenca števila 3, prvi pa ni potenca števila 2, je manjši tisti, ki je potenca. Če bi bil namreč manjši tisti, ki je večkratnik števila 6, potem bi morala biti oba kandidata enaka. Toda kandidata nista enaka. Ostane še možnost, ko je prvi kandidat potenca števila 2, drugi pa je potenca števila 3. V tem primeru se brez računa ne moremo odločiti, kateri kandidat je manjši. Primerjati moramo torej števili oblike 2^i in 3^j . Ker ne želimo računati s prevelikimi

števíli, raje primerjamo njuna logaritma $i \ln 2$ in $j \ln 3$. Še bolje pa je, če pogledamo predznak razlike $\frac{i}{j} - \frac{\ln 3}{\ln 2}$. V program je dodan še izpis opozorila, kadar je ta razlika manjša od predpisane konstante eps . Pri zelo majhni razliki bi se namreč lahko zgodilo, da bi bil predznak rezultata zaradi zaokrožitvenih napak napačen, tako da bi se odločili za napačno število. Gornji program nas na majhno razliko opozori pri $i = 1386$. Pri tej vrednosti sta kandidata za naslednje preprosto število potenci 2^{65} in 3^{41} . Količnik eksponentov $\frac{65}{41} \doteq 1.58537$ je kar dober približek za $\frac{\ln 3}{\ln 2} = \log_2 3 \doteq 1.58496$. Ker je količnik eksponentov večji od količnika logaritmov, je 1386. preprosto število 3^{41} , naslednje pa je 2^{65} . Seveda gornji program kljub opozorilu deluje pravilno, saj je v turbo pascalu količnik dveh realnih vrednosti natančen vsaj na deset mest. Pravilnost delovanja lahko preverimo tudi tako, da program izvedemo pri zmanjšani konstanti $\text{eps} = 0.0001$, kjer se izvede brez opozoril.

Martin Juvan

“ASTRO” KRIŽANKA – Rešitev s str. 224



NAJMANJŠI KROG

1. Uvod

V lanskim 4. številki Preseka je na strani 213 Martin Juvan zastavil naslednjo nalogo:

Opiši algoritem, ki za dano končno množico točk v ravnini poišče krog z najmanjšim polmerom, ki vsebuje vse točke iz množice. Algoritem naj bo čim učinkovitejši (in tudi dovolj preprost, da ga je mogoče brez prevelikih težav sprogramirati).

V naslednji številki Preseka pa je bil na straneh 296, 297 objavljen Juvanov algoritem, kako takšen krog poiskati.

Ker ima omenjena naloga kar precejšnjo zgodovino in tudi posplošitve, spregovorimo o njej nekoliko obširneje.

V literaturi najdemo podatek, da je nalogo v letu 1857 zastavil J. J. Sylvester. Tri leta zatem je konstrukcijsko rešitev podal B. Peirce, v letu 1885 pa je do enakega postopka kot Peirce prišel tudi G. Chrystal. Njun pristop k reševanju naloge je sedaj znan pod imenom Chrystal – Peirceov algoritem (C-P algoritem). Ogledali si ga bomo pozneje.

Zanimanje za nalogo se je spet pojavilo po drugi svetovni vojni z razvojem operacijskega raziskovanja in matematičnega programiranja. V prvo področje sodi npr. naslednja praktična naloga:

Kje naj postavimo urgentno helikoptersko reševalno postajo, da bo razdalja do najbolj oddaljenega kraja čim manjša?

Pri tej nalogi imajo vsi kraji enako "težo". Če pa upoštevamo, da so kraji lahko različno "obteženi", dobimo splošnejšo nalogo. Kot kriterij za različne obtežitve je npr. število prebivalcev.

Posplošitev Sylvestrove naloge dobimo tudi, če namesto množice točk v ravnini vzamemo končno množico točk v 3-razsežnem ali pa kar n -razsežnem prostoru ($n \geq 3$). V tem primeru iščemo n -razsežno kroglo z najmanjšim polmerom, ki vsebuje vse točke dane množice. To nalogo sta J. Elzinga in D. W. Hearn prevedla v posebni problem nelinearnega programiranja, ki je rešljiv v končno mnogo korakov.

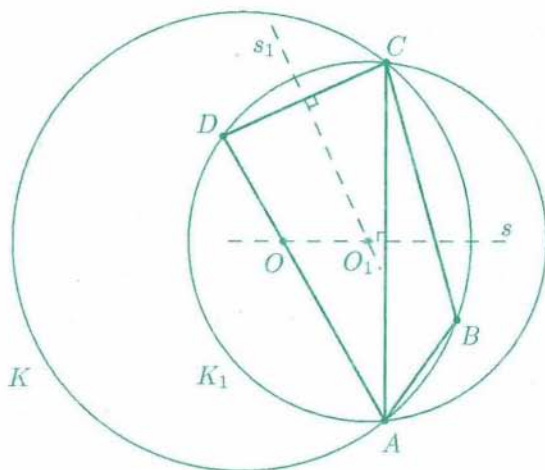
2. C-P algoritem

Osnovan je na naslednji očitni lastnosti trikotnika:

- za *topokotni* (ali *pravokotni*) trikotnik je najdaljša stranica hkrati premer najmanjšega kroga, ki trikotnik vsebuje;
- za *ostrokotni* (ali *pravokotni*) trikotnik je najmanjši krog, ki vsebuje ta trikotnik, kar njemu očrtani krog;

in na izreku:

Naj bo ABC topokotni trikotnik s topim kotom pri oglišču B in točka D znotraj trikotniku ABC očrtanega kroga K . Če je kot $\angle ADC < \angle ABC$, potem ima trikotniku ADC očrtani krog K_1 manjši polmer, kot je polmer kroga K , in v K_1 se nahaja tudi točka B .



Dokaz izreka. Na sliki je točka O središče kroga K , točka O_1 pa središče kroga K_1 . Središči obeh krogov sta na simetrali s daljice AC . Ker je točka D znotraj kroga K , seka simetrala s_1 daljice CD (na tej simetrali je središče kroga K_1) simetralo s v točki O_1 , ki se nahaja med točko O in razpoloviščem daljice AC . Krog K_1 ima zato manjši polmer, kot je polmer kroga K , in celotni lok ABC brez krajnih točk je znotraj kroga K_1 , torej tudi točka B .

Preidimo sedaj na prikaz C-P algoritma.

Naj bo S končna množica točk v ravnini. Iščemo najmanjši krog, ki to množico vsebuje.

Korak 0 (začetni korak). Narišemo krog, ki poteka skozi dve točki A, B množice S in vsebuje vse točke te množice.

Korak 1. Med točkami množice $S - \{A, B\}$ poiščemo točko, pri kateri je kot $\angle ADB$ najmanjši. Najdeno točko (ki morda ni enolično določena) označimo s C .

- Če je $\angle ACB \geq \frac{\pi}{2}$ je naloga rešena. Daljica AB je premer najmanjšega kroga, ki vsebuje množico S .
- Če je $\angle ACB < \frac{\pi}{2}$ preidemo na naslednji korak.

Korak 2. Trikotniku ABC očrtamo krog.

- a) Če trikotnik ABC ni topokoten, je naloga rešena. Njegov očrtani krog je najmanjši krog, ki vsebuje množico S .
- b) Če je ABC topokotni trikotnik, odstranimo izmed točk A, B tisto, pri kateri je topi kot – naj bo to npr. točka B – in preidemo na korak 1, pri katerem točko B zamenja točka C .

Skladno z izrekom bo vsak naslednji krog, ki ga konstruiramo, manjši od predhodnega in bo vseboval vse točke množice S . Pri iskanju najmanjšega kota v prvem koraku pa ni treba več upoštevati točk, ki jih odstranimo v drugem koraku. Ker je točk množice S končno mnogo in se pri vsaki ponovitvi iskanja manjšega kroga, ki vsebuje množico S , polmer zmanjša, je algoritem končen.

V zvezi z začetnim korakom, ki je nekako nedorečen, sta R. K. Chakraborty in P. K. Chaudhuri (1981) predlagala poseben postopek, po katerem najdemo začetni par točk A, B . Prav tako sta opazila, da v drugem koraku lahko poleg točke B odstranimo iz nadaljnjih računov oziroma konstrukcij tudi vse tiste točke $D \in S - \{A, C\}$, pri katerih je $\angle ADC$ topi kot.

Računske izkušnje, do katerih sta pri preskušanju algoritma prišla avtorja članka, ki je naveden v uvodu, so zelo ugodne. Število točk v množici S je bilo med 100 in 1100. Število operacij je bilo sorazmerno s številom točk v množici S .

3. Zaključek

Da bi bil prikaz reševanja Sylvestrove naloge popolnejši, navedimo še naslednje.

V delu B. J. Oommen, *An Efficient Geometric Solution to the Minimum Spanning Circle Problem*, *Operations Research* 35(1987)1, 80-86, je prikazan algoritem, ki izboljša tudi korak 2b v P-C algoritmu. Pri vseh računskih poskusih, razen v zelo redkih izjemah, je bil s tem algoritmom najmanjši krog najden v natanko dveh iteracijah. Oommen navaja, poleg drugih dosežkov, tudi metodo, ki jo je razvil N. Megiddo (1982). Problem najmanjšega kroga Megiddo prevede v dvorazsežni problem linearnega programiranja in ga reši v času, ki je linearno odvisen od števila točk.

Zanimivo je omeniti, da je Oommen svoj algoritem preskušal tudi pri iskanju najmanjših krogov, ki objemajo Velika jezera Severne Amerike.

Za bralce bosta morda zanimivi naslednji nalogi:

1. Kje je središče najmanjšega kroga, ki vsebuje Slovenijo (brez morja) in kolišen je njegov polmer?
2. Kako bi poiskali največji krog, ki ga lahko vrišemo v Slovenijo?

Pripomočki: Uvodna karta v Atlasu Slovenije, prozorni papir, da nanj prerišemo slovensko mejo, ravnilo, šestilo.

Pri reševanju 1. naloge dobimo točko, ki je blizu Čemšenika. Od geometričnega središča Slovenije (GEOSS) je oddaljena približno 12 km. Točka GEOSS, ki se nahaja pri Spodnji Slivni zahodno od Vač, pomeni namreč težišče lika, ki ima obliko Slovenije.

Stane Indihar

Cedilnik A.: MATEMATIČNI PRIROČNIK, Didakta, Radovljica 1995, 462 str.

Po svetu izhajajo mnogi matematični priročniki na različnih nivojih, v slovenščini pa matematičnih priročnikov ni kaj dosti. Poleg prevoda priročnika, ki je namenjen v prvi vrsti študentom na univerzi, imamo še priročnik Aleksandra Cokana, ki je izšel pred nekaj leti in se precej zvesto drži takratnih učnih načrtov v srednji šoli.

Priročnik Antona Cedilnika je nastajal skoraj istočasno z omenjenim, je pa trajalo res dolgo, da je zagledal luč sveta. Po izboru snovi je obširnejši od prvega, saj delno presega srednješolsko snov. S pridomo ga bodo uporabljali srednješolci, pa tudi študenti na univerzi, ki si bodo želeli osvežiti srednješolsko znanje ali poiskati pozabljene formule. Kot navaja avtor v predgovoru, priročnik nikakor ni namenjen učenju. Koristi le, če snov vsaj okvirno že poznamo.

V priročniku je mnogo primerov, ki ilustrirajo teorijo ali posredujejo kakšno dodatno ugotovitev k navedeni teoriji. Zelo pomemben del priročnika je obširno stvarno kazalo. Napisan je zelo skrbno. Posebna odlika priročnika je natančno matematično izražanje in moderna korektna uporaba matematične simbolike, čeprav je ta, žal, včasih v razkoraku z manj korektno tradicionalno simboliko, ki je v rabi v šolah.

Za najmlajše Presekove bralce je v njem bolj malo dostopnega; znatni deli priročnika pa že bodo razumljivi učencem zadnjih dveh razredov osnovne šole.

Anton Suhadolc

NEKAJ ZAVITIH ZA ODVIJANJE

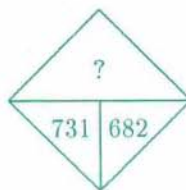
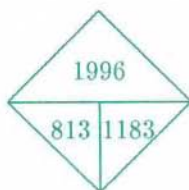
Skoraj kvadrati: Poišči naslednji člen v zaporedju

$$1, -4, 9, -16, ?$$

Zmanjšane potence: Določi naslednja člena zaporedja

$$0, 1, 3, 7, 15, ?, ?$$

Združitev: Vstavi manjkajoče število:



Več kot števila: Poišči naslednja člena zaporedja

$$2, 3, 5, 7, 11, 13, ?, ?$$

Prepletanje: Poišči naslednja člena v zaporedju

$$1, 4, 3, 6, 5, ?, ?$$

Ulomki: Nadaljuj zaporedje ulomkov vsaj še z dvema členoma:

$$\frac{2}{1}, \frac{5}{2}, \frac{10}{3}, \frac{17}{4}, \dots$$

Četrtnina levo in desno: Določi manjkajoče število:

$$\begin{array}{ccc} 3 & (6) & 21 \\ 7 & (7) & 21 \\ 10 & (?) & 50 \end{array}$$

Obrati in še kaj: Nadaljuj zaporedje vsaj še s tremi členi:

$$1234, 5321, 2235, ?, ?, ?$$

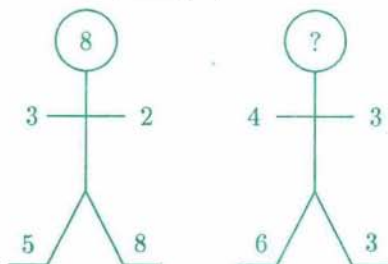
Plesoče števke: Dopolni shemo z manjkajočima številoma:

$$\begin{array}{ccc} 53 & (523) & 25 \\ 64 & (674) & 76 \\ ? & (189) & ? \end{array}$$

Trojke: Poišči naslednji ulomek v zaporedju

$$\frac{1}{2+3}, \frac{5}{6+7}, \frac{13}{14+15}, ?$$

Z nogami brez rok: Izračunaj manjkajoče število:



Neznana osnova: Če velja $12 + 12 = 101$, koliko je potem $22 + 22$?

Lepljenje: Katero število mora biti vpisano v sredino desnega trikotnika?



Dvojiški vzorci: Nadaljuj zaporedje

2, 11, 47, ...

Dvodielna torta: Vstavi manjkajoče število:



Vsote: Ugotovi, katero število manjka:

$$123 \rightarrow 6$$

$$134 \rightarrow 8$$

$$234 \rightarrow ?$$

Prafaktorji: Izračunaj manjkajoče število:

$$15 \rightarrow 2$$

$$30 \rightarrow 3$$

$$64 \rightarrow 1$$

$$1996 \rightarrow ?$$

Dodaj ali odvzemi: Če je 1_23^4 enako 6 in je 1^23_4 enako -4 , koliko je potem 1^23^4 ?

Vedno več: Vstavi manjkajoča števila v zadnja kvadrata:

1	2
7	4

2	3
8	?

?	?
10	?

Koordinate: Zapolni kvadrat z manjkajočimi števili:

0	-1	-2	-3
1	0	-1	?
2	1	?	-1
?	2	1	0

Druga na prvo: Ugotovi manjkajoče število:

5	3	?	2
-1	1	2	3
-1	1	8	9

Stikanje tako in drugače: Pozorno si oglej levi kvadrat in nato določi manjkajoči števili v desnem:

	11	
4		3
	32	

	13	
?		?
	24	

Omejeni prafaktorji: Ugotovi pravilo, po katerem dobivamo člene naslednjega zaporedja:

1, 2, 3, 4, 6, 8, 9, 12, 16, 18, 24, ...

Stiska: Če iz 281 dobimo 16, iz 532 pa 30, koliko nam da 456?

Združeni kvadrati: Ugotovi manjkajoče število:

1	3	4
2	2	?
5	13	25

Nerodna pisava: Razreši enakosti:

$$256 = 28$$

$$? = 32$$

Martin Juvan

DOLOČI VLOGE – Rešitev s str. 210

Pomagajmo si s tabelo. McBride nastopa v vlogi morilca, ali pa žrtve. Pa recimo, da je bil morilec, Russel pa je bil rabelj:

	<i>Johnson</i>	<i>McBride</i>	<i>Ford</i>	<i>Newton</i>	<i>Saunders</i>	<i>Russel</i>
<i>žrtev</i>	<i>X</i>	<i>X</i>	<i>X</i>	<i>P</i>	<i>X</i>	<i>X</i>
<i>morilec</i>	<i>X</i>	<i>P</i>	<i>X</i>	<i>X</i>	<i>X</i>	<i>X</i>
<i>priča</i>	<i>X</i>	<i>X</i>	<i>P</i>	<i>X</i>	<i>X</i>	<i>X</i>
<i>policist</i>	<i>P</i>	<i>X</i>	<i>X</i>	<i>X</i>	<i>X</i>	<i>X</i>
<i>sodnik</i>	<i>X</i>	<i>X</i>	<i>X</i>	<i>X</i>	<i>P</i>	<i>X</i>
<i>rabelj</i>	<i>X</i>	<i>X</i>	<i>X</i>	<i>X</i>	<i>X</i>	<i>P</i>

Izbira je bila dobra – dobili smo rešitev. Pokazati moramo še to, da je edina. Torej recimo, da je bil McBride žrtev in Russel morilec.

	<i>Johnson</i>	<i>McBride</i>	<i>Ford</i>	<i>Newton</i>	<i>Saunders</i>	<i>Russel</i>
<i>žrtev</i>	<i>X</i>	<i>P</i>	<i>X</i>	<i>X</i>	<i>X</i>	<i>X</i>
<i>morilec</i>	<i>X</i>	<i>X</i>	<i>X</i>	<i>X</i>	<i>X</i>	<i>P</i>
<i>priča</i>	<i>X</i>	<i>X</i>	<i>X</i>	<i>P</i>	<i>X</i>	<i>X</i>
<i>policist</i>	<i>P</i>	<i>X</i>	<i>X</i>	<i>X</i>	<i>X</i>	<i>X</i>
<i>sodnik</i>	<i>X</i>	<i>X</i>		<i>X</i>		<i>X</i>
<i>rabelj</i>	<i>X</i>	<i>X</i>		<i>X</i>		<i>X</i>

Ford bi moral biti sodnik ali rabelj, to pa nima nobenega smisla, saj je bil Ford v zvezi z umorom aretiran.

Neža Mramor - Kosta

GIBANJE DELCA V PASTI

V prejšnji številki Preseka smo na kratko opisali zanimiva merjenja s pastmi za naelektrene delce. Ali ne bi kazalo nekoliko podrobneje obdelati električnega in magnetnega polja ter gibanja naelektrenega delca v njiju? Tako bi tudi najbolje izpodbili očitek, da je Presek mačehovski do električnih in magnetnih poglavij iz fizike.

V pasti je električno polje. Najpreprostejše je homogeno polje med elektrodama ploščatega kondenzatorja dovolj daleč od robov. Kako močno je, pove njegova jakost E . V homogenem polju je jakost povsod enaka in ima isto smer. Zato je tudi sila polja $F = eE$ na delec z nabojem e povsod enaka in kaže v isto smer. Ion se v takem polju giblje podobno kot utež, ki jo spustimo, da pade. Pozitivni ion se enakomerno pospešeno giblje proti negativni elektrodi kondenzatorja (glej članek G. Planinšiča, *Dogodek v ploščatem kondenzatorju*, Presek 16 (1988) 90). Ploščati kondenzator ne deluje kot past.

Ali bi lahko uporabili dva nasprotno obrnjena ploščata kondenzatorja? Srednja, dvojna elektroda bi motila, a misel ni slaba. Pa vseeno raje uporabimo električno polje, ki nad vodoravno srednjo ravnino narašča v eno smer, pod njo pa v drugo. Za jakost električnega polja v smeri osi z , ki jo izberemo pravokotno na to ravnino, velja v tem primeru:

$$E_z = -Kz. \quad (1)$$

Minus opozarja, da električno polje nad srednjo ravnino pri $z = 0$ vleče ion navzdol, pod to ravnino pa navzgor. K je konstanten sorazmernostni koeficient.

Ne moremo pričakovati, da bi ion miroval v ravnini pri $z = 0$, kjer električno polje nanj ne deluje. Kako se giblje ion z majhno hitrostjo v navpični smeri, povprašajmo Newtonov zakon za gibanje v tej smeri: $F_z = ma_z = eE_z = -eKz$. Pospešek je sorazmeren z odmikom od ravnovesne lege in kaže proti tej legi. To je značilno za sinusno nihanje. *Osno frekvenco* ν_z , s katero niha ion v smeri osi z in ki je enaka obratni vrednosti nihajnega časa t_{z0} , preberemo iz zapisane enačbe $a_z = (2\pi/t_{z0})^2 z$:

$$\nu_z = \frac{1}{t_{z0}} = \frac{1}{2\pi} \sqrt{\frac{eK}{m}}.$$

Ion z dovolj majhno energijo niha v navpični smeri okoli ravnine pri $z = 0$ in se ne oddalji znatno od nje. V smeri osi z past deluje.

Toda električno polje z edino komponento jakosti električnega polja (1) v smeri osi z ne more obstajati. Imeti mora še drugo komponento.

Zanima nas le osno simetrično polje, v katerem so vse smeri v ravnini, pravokotni na os z , enakopravne in je komponenta v tej ravnini odvisna samo od razdalje r od osi z . Električno polje izvira od nabojev. V delu prostora, v katerem se giblje ion, ni drugih nabojev, zato tam ne more biti izvirov polja. V tisti del prostora mora vstopati enak električni pretok, kot iz njega izstopa. Vedeti moramo samo, da je električni pretok skozi določeno ploskev sorazmeren s površino ploskve in pravokotno komponento jakosti električnega polja. Polje si lahko ponazorimo s silnicami: v opazovani del prostora mora teči toliko silnic, kot jih teče iz njega, nobena silnica ne more izvirati iz tega dela prostora ali se v njem končati, saj v tem delu prostora ni naelektrenih delcev.

V homogenem polju v valj, ki ima z elektrodama vzporedni osnovni ploskvi z radijem r , vstopa skozi zgornjo električni pretok, sorazmeren s $\pi r^2 E_z$, in enak pretok skozi spodnjo ploskev izstopa. V polju (1) pa skozi zgornjo osnovno ploskev pri z vstopa pretok, sorazmeren z $2\pi r^2 E_z$, skozi spodnjo osnovno ploskev pri $z = 0$ pa ga nič ne izstopa. Ta pretok mora izstopati skozi plašč. Pretok skozi plašč je sorazmeren z $2\pi r z E_r$, če je E_r radialna komponenta jakosti električnega polja. Iz zahteve, da sta pretoka nasprotno enaka, sledi:

$$E_r = -\frac{r E_z}{2z} = \frac{1}{2} K r. \quad (2)$$

Radialna komponenta električnega polja na pozitivni ion deluje z radialno silo $F_r = e E_r$ od osi z navzven. Električno polje – zadnjič smo mu rekli *kvadrupolno polje* – sicer zadržuje ione v smeri osi z , a jih v radialni smeri razpršuje. Zaradi tega naprava s samim električnim poljem še ne deluje kot past. Električnemu polju dodamo homogeno magnetno polje v smeri osi z . Kako gosto je polje, določa gostota magnetnega polja $B = B_z$. V homogenem polju je gostota povsod enako velika in kaže v isto smer. Na naelektren delec magnetno polje deluje samo, če se delec giblje, in sicer je sila pravokotna na smer polja in na smer hitrosti. Na ion, ki se giblje v smeri magnetnega polja, to je v smeri osi z , magnetno polje ne deluje. Kar smo ugotovili o nihanju, zato velja kljub magnetnemu polju.

Obravnavajmo zdaj gibanje iona v ravnini, ki je pravokotna na magnetno polje. Na ion s hitrostjo v deluje tako polje s silo $e v B$, ki je vselej pravokotna na smer gibanja. To je značilno za centripetalno silo $m v^2 / r$. Izraza izenačimo in izračunamo hitrost $v = e r B / m$, ki jo izrazimo kot produkt poti pri enem obhodu $2\pi r$ in obhodnega časa t_{0c} . Za obratno vrednost tega časa, za frekvenco kroženja dobimo:

$$\nu_c = \frac{1}{t_{0c}} = \frac{e B}{2\pi m}. \quad (3)$$

To je *ciklotronska frekvenca*, ki ni odvisna ne od hitrosti ne od radija tira. Ime ima po krožnem pospeševalniku *ciklotronu*, ki izkorišča tako gibanje ionov.

Z magnetnim poljem smo rešili težavo odbojne radialne komponente električnega polja. Zapišimo Newtonov zakon za ion, ki se v ravnini $z = 0$ s hitrostjo v_m giblje po krogu z radijem r_m : $F_m = ma_m = e(E_r - v_mB)$. Hitrost v_m smo usmerili tako, da ima sila magnetnega polja na ion nasprotno smer kot sila električnega polja. Vse te sile delujejo v radialni smeri in pospešek a_m krožečega iona kaže proti izhodišču in je po velikosti enak v_m^2/r_m . V enačbo $-mv_m^2/r_m = eE_r - ev_mB = \frac{1}{2}eKr_m - ev_mB$ postavimo $v_m = 2\pi r_m/t_{0m} = 2\pi r_m\nu$ in upoštevamo enačbi za ν_z in ν_c . Nastane kvadratna enačba za frekvenco ν :

$$\nu^2 - \nu_c\nu + \frac{1}{2}\nu_z^2 = 0.$$

Radialno električno polje, katerega sila ima nasprotno smer od sile magnetnega polja, zmanjša frekvenco ciklotronskega kroženja na $\nu'_c = \nu_c - \delta$. To je prvi od dveh korenov enačbe. Iz prve Vietove enačbe izhaja, da je potem drugi koren enak δ . Iz kvadratne enačbe preberemo, da je drugi koren $\nu_m = \delta$ približno enak

$$\nu_m = \frac{\nu_z^2}{2\nu_c},$$

če je frekvenca ν_m veliko manjša kot frekvenca ν_c . Za elektrone je približek zelo dober, za ione pa je nekoliko slabši. Enakomernemu kroženju naelektrenega delca s frekvenco ν_m pravimo *magnetronska gibanje*. Ime izvira iz besede *magnetron*, elektronke, ki jo uporabljajo na primer pri radarjih in v mikrovalovnih pečicah in v kateri se gruče elektronov gibljejo na opisani način.

Močno homogeno magnetno polje okoli srednje ravnine ustvari superprevodna tuljava. Obliko elektrod, ki dajo polje s komponentama jakosti (1) in (2), ugotovimo tako, da izračunamo delo, ki ga opravimo, ko premaknemo ion zelo počasi iz izhodišča v smeri osi z in v radialni smeri:

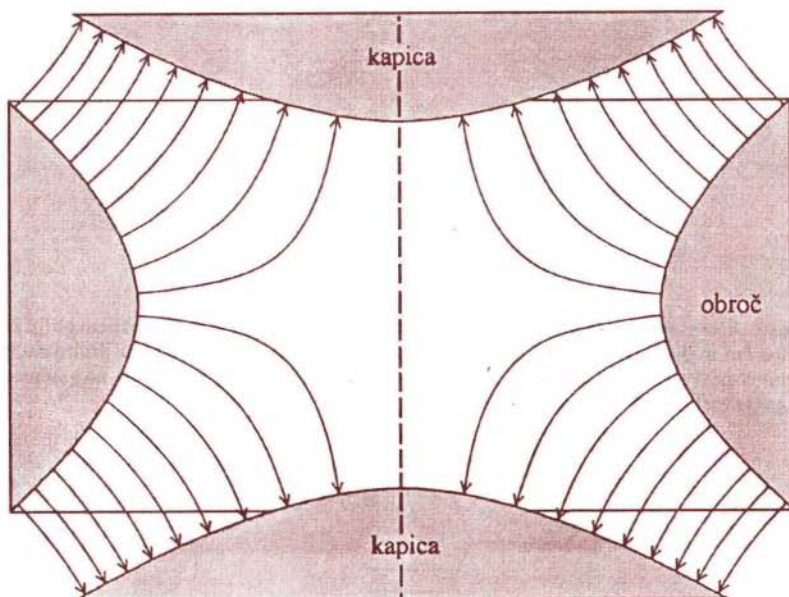
$$e \int_0^z E_z dz + e \int_0^r E_r dr = -eK \cdot \frac{1}{2}z^2 + \frac{1}{2}eK \cdot \frac{1}{2}r^2 = -\frac{1}{2}eK(z^2 - \frac{1}{2}r^2). \quad (4)$$

Pri premikanju elektrona po površju elektrode ne opravimo nobenega dela, površje elektrode je *ekvipotencialna ploskev*. Zaradi tega je izračunano

delo enako za vse točke na površju določene elektrode. Obstajata dve rešitvi:

$$z^2 - \frac{1}{2}r^2 = z_0^2 \quad \text{in} \quad z^2 - \frac{1}{2}r^2 = -\frac{1}{2}r_0^2.$$

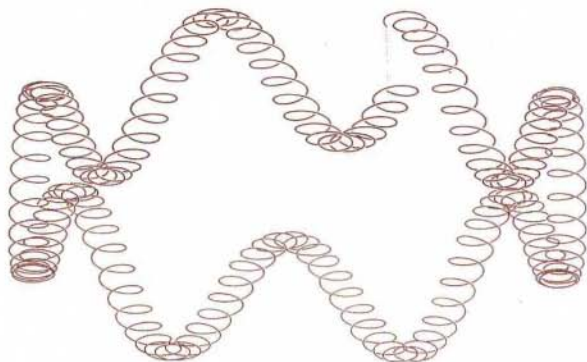
Prva ustreza kopicama rotacijskega hiperboloida z najmanjšo razdaljo med njima $2z_0$ in druga obročastemu rotacijskemu hiperboloidu z notranjim premerom $2r_0 = 2\sqrt{2}z_0$ (slika 1).



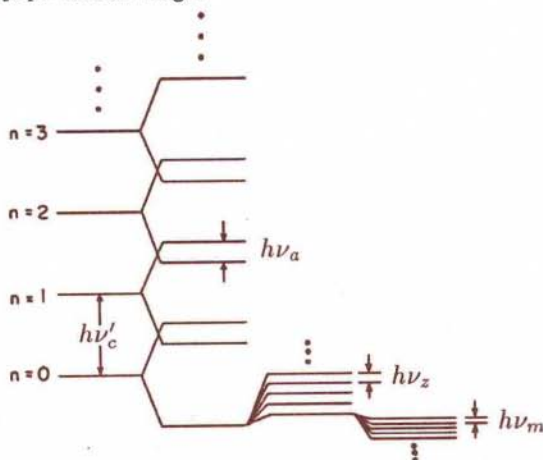
Slika 1. Električne silnice in presek skozi elektrode v pasti. Tangenta na silnico kaže v vsaki točki polja v smeri vektorja jakosti električnega polja s komponentama E_z in E_r : $\tan \varphi = dz/dr = E_z/E_r = -2z/r$. Enačba $dz/z = -2dr/r$ ima rešitev $z = \text{konst}/r^2$. V vsaki točki polja je ekvipotencialna ploskev pravokotna na silnico. Površja elektrod so ekvipotencialne ploskve. Če ne bi bila sila električnega polja pravokotna na površje elektrode, bi povzročala tok elektronov po kovini prečno na površje.

Tako znamo narisati načrt za past. V njej je med kapico in obročem napetost $U_0 = \frac{1}{2}Kz_0^2$. V pasti za pozitivne delce priključimo kapici na negativni priključek enosmernega izvira napetosti in obroč na pozitivni priključek. V pasti za negativne delce pa priključimo kapici na pozitivni priključek in obroč na negativnega. V pasti za vodikove ione, protone, s pozitivnim osnovnim nabojem e_0 so uporabili magnetno polje z gostoto 5,05 T in električno napetost 53,1 V ob razdalji $z_0 = r_0/\sqrt{2} = 1,12$ mm. Magnetronska, osna in ciklotronska frekvenca so bile po vrsti

enake 0,6628 MHz, 10,01 MHz in 76,34 MHz ($1 \text{ MHz} = 10^6 \text{ s}^{-1}$). V pasti za elektrone so uporabili magnetno polje z gostoto 5,872 T in električno napetost 10,22 V ob razdalji $z_0 = r_0/\sqrt{2} = 3,35 \text{ mm}$. Magnetronska, osna in ciklotronska frekvenca so merile po vrsti 0,01185 MHz, 64,42 MHz in $1,644 \cdot 10^5 \text{ MHz}$.



Slika 2. Sestavljeno gibanje naelektrnega delca v električnem in magnetnem polju pasti v klasični mehaniki. Najhitreje je ciklotronsko kroženje po krogu z majhnim radijem v smeri pravokotno na magnetno polje, srednje hitro osno nihanje in najpočasnejše magnetronsko kroženje po velikem krogu.



Slika 3. Stanja geonija. Levi stolpec vsebuje stanja, ki zadevajo ciklotronsko gibanje, če elektron ne bi imel "vrtenja" – fiziki ga opišejo s *spinom*. Drugi stolpec z leve upošteva, da so ciklotronska stanja zaradi delovanja magnetnega polja razcepljena. Nastaneta po dve stanji, katerih frekvenci se razlikujeta za $\nu_a = a\nu_c$, če meri koeficient a okoli 0,001. Tretji stolpec kaže nadaljnjo razcepitev stanj zaradi osnega nihanja in četrti zaradi magnetronskega gibanja. Energijske razlike med stanji niso narisane v merilu.

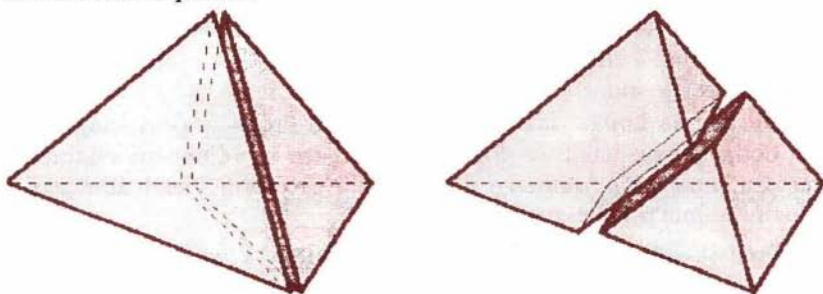
Gibanje naelektrenega delca v pasti potemtakem sestavljajo počasno magnetronsko kroženje, hitrejše nihanje v smeri osi z in zelo hitro ciklotronsko kroženje (slika 2). Taka predstava je le zasilna, ker moramo gibanje elektrona opisati v kvantni mehaniki. Zdaj lahko povemo nekaj o energijskih stanjih geonija. Energijsko razliko med sosednjima stanjema, to je energijo, ki jo izseva ali absorbira geonij, dobimo, če *klasično frekvenco* – dobimo jo po starem, ne da bi upoštevali kvantno mehaniko – pomnožimo s Planckovo konstanto $h = 6,6 \cdot 10^{-34}$ Js, značilno za kvantno mehaniko. Prehodom med ciklotronskima stanjema ustreza energija $h\nu_c$, prehodom med nihajnim stanjema $h\nu_z$ in prehodom med magnetronskima stanjema $h\nu_m$ (slika 3).

Ta prispevek je zahtevnejši, kot je bil prvi prispevek o pasteh za naelektrene delce, ker so v njem trditve izpeljane iz osnovnih zakonov ali druga iz druge. Tako jih fizik razume in si jih laže zapomni. Brez računanja fizik ne pride daleč. Vendar ne smemo misliti, da je to njegova najpomembnejša ali celo edina dejavnost.

Janez Strnad

RAZREŽI TETRAEDER – Rešitev s str. 231

Spodnja risba na levi predstavlja enega od šestih med seboj podobnih razrezov. Bralcu ga najbrž ni bilo težko najti. Določa ga ravnina, ki gre skozi enega od robov tetraedra in skozi razpolovišče "nasprotnega" roba in razdeli tetraeder na dve skladni trikotni piramidi. Nekoliko težje je najti razrez na desni strani. Ravnina, vzporedna s parom nesosednjih robov, ki gre skozi razpolovišča preostalih robov, razdeli tetraeder na dve skladni poševni trikotni prizmi.



Poskusite izdelati papirnata modela obeh prizm. Preprosta tetraederska sestavljanka, ki jo boste dobili na ta način, bo za marsikoga, ki ne pozna razreza, presenetljivo trd oreh.

Vilko Domajnko

Hladnik M.: MODERNA KVADRATURA KROGA,
Knjižnica Sigma, DMFA Slovenije, Ljubljana 1995,
156 str.

Pred kratkim je pri DMFA Slovenije izšla knjiga, katere naslov izhaja iz enega klasičnih problemov starogrške matematike – kako z ravnilom in šestilom konstruirati kvadrat, ki je ploščinsko enak danemu krogu. Že od prejšnjega stoletja dalje je znano, da ta problem ni rešljiv. Pri *modernej kvadraturi kroga* opustimo zahtevo o konstrukciji s šestilom in ravnilom in se vprašamo le, ali je mogoče dani krog razdeliti na končno manjših delov in iz teh delov sestaviti kvadrat. Avtor v pričujoči knjigi obravnava dva pristopa k rešitvi zastavljenega problema:

- V smislu elementarne geometrije lahko dani lik razdelimo z daljicami (ali krožnimi loki) na končno manjših, kjer postane delilna daljica (ali lok) rob dveh novih, ne nujno sosednjih likov.
- V smislu teorije množic lahko dani lik razbijemo na končno mnogo poljubnih, vendar paroma disjunktnih množic.

Knjiga je razdeljena na devet razdelkov. Po prvem razdelku, v katerem avtor podrobno predstavi problem, sta drugi in tretji razdelek posvečena konstruktivni in aksiomatični definiciji ploščine. Četrty razdelek je posvečen klasičnemu Bolyai-Gerwienovemu izreku, ki pravi, da lahko iz danega poligonskega lika z razdelitvijo na manjše dele sestavimo drug poligonski lik natanko tedaj, ko imata oba lika enako ploščino. Naslednja dva razdelka obravnavata problem nekoliko bolj splošno: lik lahko razrežemo tudi vzdolž krivulje ali pa dopustimo samo nekatere izometrije. V sedmem razdelku dobi problem novo razsežnost. Bralec bo v tem razdelku zasledil, da v trirazsežnem prostoru analogija Bolyai-Gerwienovega izreka ne velja. Zadnja dva razdelka pa sta posvečena problemu v smislu moderne teorije množic.

Da bi bila knjiga dostopna čim širšemu krogu bralcev, najdemo v treh dodatnih razdelkih še dokaz obstoja baze v poljubnem vektorskem prostoru, opis grup izometrij v evklidskih prostorih nizkih dimenzij in osnovne pojme o Lebesguovi meri.

Predstavitev knjige zaključimo s povabilom, ki ga je v uvodu zapisal avtor: "...obravnavana tematika lahko primerno prispeva k splošni matematični izobrazbi srednješolskega učitelja. Če pa bo po knjižici posegel tudi kakšen dijak, bo njen (vzgojni) namen v celoti dosežen, moj trud pa poplačan."

Matjaž Željko

REŠITVE NALOG Z DRŽAVNEGA TEKMOVANJA IZ SREDNJEŠOLSKE FIZIKE, 2. del – s str. 187

Skupina A

- Gibanje prve klade od trenutka, ko naleti na vdolbino, do trenutka, ko izstopi iz nje, razdelimo na tri dele. Na klancu se giblje enakomerno pospešeno in ji v času $t_0 = (v_1 - v_0)/a$ hitrost naraste na v_1 ; $v_1^2 = v_0^2 + 2al$, če je $l = 2h$ dolžina klanca in h globina vdolbine. Vodoravni del predrsi s hitrostjo $v_1 = \sqrt{v_0^2 + 4ah} = 1,8 \text{ m/s}$ v času $t'_0 = l/v_1$. Za dvig iz vdolbine potrebuje enak čas kot za spust vanjo, torej je celotni čas potovanja prve klade enak $2t_0 + t'_0 = 0,68 \text{ s}$. Druga klada se giblje vseskozi enakomerno s hitrostjo v_0 in za pot $s_2 = 2\sqrt{3}h + l$ porabi čas $t_2 = s_2/v_0 = 0,78 \text{ s}$. Prehiteva torej prva klada. Mejno dolžino x vodoravnega dela dobimo iz pogoja, da sta časa enaka $t'_1 = 2t_0 + x/v_1 = t'_2 = (2\sqrt{3}h + x)/v_0$. Rešitev enačbe je $x = 5,0 \text{ cm}$.

Opomba: Strogo geometrijsko obravnavanje stika klanec–vodoravna podlaga vodi do zaključka, da prva klada skoči, ko naleti na vstopni klanec v vdolbino. Ker v tekstu naloge ni bilo posebej poudarjeno, da je stik primerno zaobljen, tako da klada ne izgubi stika s podlago, je upravičeno tudi tako razmišljanje. V tem primeru klada celo preskoči klanec. Vodoravna komponenta hitrosti se med skokom ohrani in zato drsita kladi vstric do vznožja izstopnega klanca vdolbine, kjer začne prva zaradi dviganja zaostajati. Sledi, da bo prva klada zaostajala ne glede na dolžino vodoravnega dela vdolbine.

- Sile, ki delujejo na palico, so teža F_g , sila vrvice F_v , sila podlage N , sila lepenja F_l in vlečna sila F . Iz ravnovesja sil na palico dobimo $F = F_l + F_v/2$ in $N = F_g + F_v\sqrt{3}/2$, iz ravnovesja navorov pa v prvem primeru še $F_l/2 = F_l l/2$. Največjo silo F , pri kateri palica še ne zdrsne, dobimo iz pogoja $F_l \leq kN$, kjer je k koeficient lepenja med palico in tlemi. Zadnjo neenačbo poenostavimo v

$$F \leq F_g \frac{2k}{2 - (1 + k\sqrt{3})} = 3,6 \cdot 10^2 \text{ N}.$$

V drugem primeru sila F prijemlje na višini $3l/4$. Ravnovesje navorov je $F l/4 = 3F_l l/4$ in od tu sila $F = -3,4 \cdot 10^2 \text{ N}$, kar je fizikalno nesmiselno, saj palice ne potiskamo, ampak vlečemo; palica ne zdrsne pri še tako veliki sili.

3. Označimo z x višino dela zgornje (lažje) klade, ki gleda iz vode. Tedaj je dolžina dela spodnje klade, ki je v vodi, enaka $y = h_0 - l_0 - (h - x)$, kjer h_0 pomeni višino vodne plasti, l_0 dolžino vrvice in h višino klade. Vzgon vode in živega srebra uravnovesi težo obeh klad:

$$\begin{aligned} Sh\sigma_z + F_v &= S(h - x)\sigma_0, \\ Sh\sigma_s &= F_v + S(y\sigma_0 + (h - y)\sigma_{Hg}), \end{aligned}$$

kjer pomeni S osnovno ploskev klade, F_v silo v vrivici, σ_z , σ_s , σ_0 in σ_{Hg} pa po vrsti specifično težo zgornje in spodnje klade, vode ter živega srebra. Dobimo

$$x = 2h + l_0 - h_0 + (h_0 - l_0) \frac{\sigma_0}{\sigma_{Hg}} - h \frac{\sigma_z + \sigma_s}{\sigma_{Hg}} = 6,3 \text{ mm.}$$

Za silo v vrivici dobimo $F_v = S(\sigma_v(h - x) - \sigma_z h) = 19 \text{ N}$.

Skupina B

1. Za spodnjo klado bo najbolj neugodno, če je dolžina vodoravnega dela vdolbine enaka nič. V tem primeru je čas potovanja druge klade $t_2 = 2h/(\text{tg } \alpha v_0)$. Hitrost prve klade na dnu je $v_1^2 = v_0^2 + 2gh$, čas potovanja po klancu navzdol pa $t_0 = (v_1 - v_0)/(g \sin \alpha)$. Enak čas porabi za gibanje po klancu navzgor; $t_1 = 2t_0$. Da bo prva klada po izstopu iz vdolbine prehitevala, mora veljati $t_1 < t_2$, kar nam da

$$v_0 < \cos \alpha \sqrt{\frac{gh}{2(1 - \cos \alpha)}} = 3,7 \text{ m/s.}$$

Opomba: Glej opombo pri rešitvi prve naloge A skupine.

2. Maso vlaka dobimo iz Newtonovega zakona $m = F/a_0 = 100 \text{ t}$. Z dolžinskima gostotama (masa na dolžinsko enoto) μ_1 na začetku in μ_2 na koncu maso lahko zapišemo tudi kot $m = (\mu_1 + \mu_2)l/2$, torej $\mu_2 = 1500 \text{ kg/m}$. Gostota vlaka se z razdaljo x spreminja; $\mu(x) = \mu_1 + (\mu_2 - \mu_1)x/l$. Da se del vlaka od točke x do konca vlaka pospešuje s pospeškom a , mora nanj delovati sila

$$F_v = a \frac{\mu(x) + \mu_2}{2} (l - x).$$

Pretrganje droga je odvisno le od napetosti v njem, $p_m = F_m/(\pi d_m^2/4) = F/(\pi d^2/4)$, kjer je $F_m = 100$ kN največja sila, ki jo zdrži drog premera $d_m = 1,0$ cm. Zahtevam ustreza drog premera najmanj 1,9 cm.

3. V prvem primeru se voda ne segreva in velja $Nh\pi(R^2 - r^2) = h\pi R^2$, kjer je R polmer posode, r polmer diska in h debelina diska oziroma začetna višina vode. Dobimo $N = 5,3$ cm, kar pomeni, da gleda iz vode šesti disk. V drugem primeru se naloge lotimo korakoma. Ko v vodo položimo prvi disk, je končna temperatura sistema

$$T_1 = \frac{C_d T_d + (C_v + C) T_v}{C + C_v + C_d} = 87^\circ \text{C},$$

kjer je $C_d = 0,89$ kJ/K toplotna kapaciteta enega diska, C toplotna kapaciteta posode in $C_v = 1,3$ kJ/K toplotna kapaciteta vode v loncu. S $T_d = 200^\circ \text{C}$ je označena začetna temperatura diskov, s $T_v = 20^\circ \text{C}$ pa začetna temperatura lonca in vode v njem. Ker že en disk precej dvigne temperaturo sistema, predvidevamo, da bo del vode povrel. Dovedena toplota je $Q_1 = nC_d(T_d - T_0)$, kjer je $T_0 = 100^\circ \text{C}$ temperatura vrelišča vode. Toplota se porabi za segretje lonca z vodo do T_0 in za vretje vode: $Q_2 = (T_0 - T_v)(C + C_v) + \Delta m q_i$, kjer je Δm izpareli del vode in q_i izparilna toplota vode. Da bo n -ti disk še potopljen, mora veljati

$$nh \leq \frac{m_v - \Delta m}{\rho_v \pi (R^2 - r^2)},$$

kjer je m_v začetna masa vode v loncu in ρ_v gostota vode. Dobimo $n \leq 3,7$, kar pomeni, da iz vode pogleda 4 disk.

4. Na klancu razdelimo težni pospešek na komponento $g \sin \alpha$, vzporedno s klancem, in komponento $g \cos \alpha$, pravokotno na klanec. Čas enega poskoka dobimo iz gibanja v pravokotni smeri in je enak $t_0 = 2v_0 \sin \varphi / (g \cos \alpha)$, kjer je α naklon klanca, φ pa naklon začetne hitrosti gléde na klanec. Poskoki so prožni, zato trajajo vsi enako dolgo, to je čas t_0 . Dinamična komponenta sile teže zavira gibanje kroglice navzgor po klancu. Kroglica se začne vračati po času $t_1 = v_0 \cos \varphi / (g \sin \alpha)$. Število poskokov je $N < t_1/t_0 = 14,3$, torej napravi kroglica med dviganjem po klancu največ 14 poskokov.

4. DRŽAVNO TEKMOVANJE OSNOVNOŠOLCEV V ZNANJU MATEMATIKE – Rešitve s str. 247

7. razred

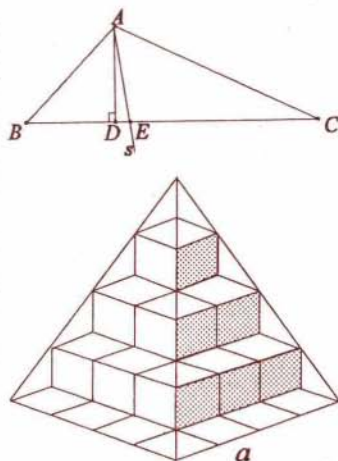
- Zaradi $\frac{2x+35}{x} = 2 + \frac{35}{x}$ in $35 = 1 \cdot 35 = 5 \cdot 7$ je $x \in \{-35, -7, -5, -1, 1, 5, 7, 35\}$.
- $v(2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 10) = 2^3 \cdot 3 \cdot 5 \cdot 7 = 840$.
 - Ker je $17436 = 20 \cdot 840 + 636$, moramo število 17436 zmanjšati za najmanj 636.
 - Ker je $17436 = 21 \cdot 840 - 204$, moramo število 17436 povečati za najmanj 204.
 - Iskano število je 17640.
- $81^7 - 27^9 - 9^{13} = (3^4)^7 - (3^3)^9 - (3^2)^{13} = 3^{28} - 3^{27} - 3^{26} = 3^{26} \cdot (3^2 - 3 - 1) = 3^{26} \cdot 5 = 3^{24} \cdot 9 \cdot 5 = 3^{24} \cdot 45$.
- Rob večje kocke je $\frac{6}{5}a$, površina pa $P_1 = 6 \cdot (\frac{6}{5}a)^2 = \frac{216}{25}a^2$. Od tod dobimo $\frac{P_1}{P} = \frac{216a^2}{25 \cdot 6a^2} = \frac{216}{150} = \frac{144}{100}$. Površina kocke se je tedaj povečala za 44 %.
- $r_1 = 1 \text{ m}, r_2 = 3 \text{ m}, r_3 = 5 \text{ m}, r_4 = 7 \text{ m}, r_5 = 9 \text{ m}$ in $P_{\text{tlak}} = \pi r_4^2 - \pi r_3^2 + \pi r_2^2 - \pi r_1^2 = \pi(49 - 25 + 9 - 1) = 32\pi \doteq 100,48 \text{ m}^2$. Od tod dobimo $1004800:64=15700$. Porabili bodo približno 15700 kock.



8. razred

- Iz besedila naloge dobimo enačbo $\sqrt{\left(\frac{3}{4} \cdot (2x - \frac{2}{3} \cdot 2x)\right)^2 - 21 : 5 + 2} = 4$, ki ima rešitev $x = 22$. Iskano število je 22.
- Pred tekmovanjem: $\frac{a_1+a_2+\dots+a_n}{n} = 2,5$ in $a_1+a_2+\dots+a_n = 2,5 \cdot n$. Po tekmovanju: $\frac{a_1+a_2+\dots+a_n+5}{n+1} = 3$, zato $a_1+a_2+\dots+a_n+5 = 3 \cdot (n+1)$. Od tod dobimo $\frac{2,5n+5}{n+1} = 3$ in $n = 4$. Töne je imel v redovalnici 4 ocene.

3. Izraz $\frac{1}{4m^2+12m+10} = \frac{1}{(2m+3)^2+1}$ ima največjo vrednost za $m = -\frac{3}{2}$. Premica $y = \frac{3}{4}x + \frac{9}{10}$ seka koordinatni osi v točkah $N(0, \frac{9}{10})$, $M(-\frac{6}{5}, 0)$. $p_{\triangle OMN} = 0,54$, $d(M, N) = 1,5$, razdalja premice od koordinatnega izhodišča pa $0,72$.
4. Ker je $\alpha_1 + \beta_1 + \gamma_1 = 360^\circ$, dobimo enačbo $9t + 16t + 20t = 360$, ki ima rešitev $t = 8$. Zunanji koti merijo $\alpha_1 = 72^\circ$, $\beta_1 = 128^\circ$ in $\gamma_1 = 160^\circ$, notranji pa $\alpha = 108^\circ$, $\beta = 52^\circ$ in $\gamma = 20^\circ$. $\sphericalangle BEA = \frac{\alpha}{2} + \gamma = 54^\circ + 20^\circ = 74^\circ$ in $\sphericalangle DAE = 90^\circ - \sphericalangle BEA = 90^\circ - 74^\circ = 16^\circ$.
5. Prostornina sestavljenega telesa je $V_T = 14a^3$, prostornina očrtane piramide pa $V_p = \frac{64a^3}{3}$. Razmerje prostornin je $V_T : V_p = 21 : 32$. $\frac{V_p - V_T}{V_T} = \frac{11}{21} \approx 0,524$. Prostornina piramide je večja za 52,4 %.



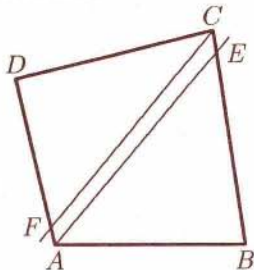
Aleksander Potočnik

39. MATEMATIČNO TEKMOVANJE SREDNJE-ŠOLCEV SLOVENIJE – Rešitve s str. 254

Prvi letnik

1. Preverimo najprej deljivost produkta s štiri. Če sta dve števili sodi (denimo a in b) in dve lihi (denimo c in d), potem 4 deli $(a-b)(c-d)$. Če pa so vsaj tri števila soda oziroma liha (denimo a, b in c), potem je $(a-b)(a-c)(b-c)$ deljiv celo z 8. V obeh primerih 4 deli $(a-b)(a-c)(a-d)(b-c)(b-d)(c-d)$. Preverimo še deljivost produkta s tri. Od štirih števil a, b, c in d imata vedno vsaj dve števili (denimo a in b) enak ostanek pri deljenju s 3, zato 3 deli $(a-b)$. Števili 4 in 3 sta tuji, zato 12 deli $(a-b)(a-c)(a-d)(b-c)(b-d)(c-d)$.
2. Ker je $a \geq b \geq c > 0$, je $\frac{a+b}{c} \geq 2$, $0 < \frac{b+c}{a} \leq 2$ in $\frac{a+c}{b} \geq 1$. Torej je $\frac{a^2-b^2}{c} \geq 2(a-b)$, $\frac{c^2-b^2}{a} \geq 2(c-b)$, saj je $c \leq b$, in $\frac{a^2-c^2}{b} \geq a-c$. Seštejemo leve in desne strani neenakosti in dobimo prvotno neenakost.

3. Naj bo n število ovc v krdelu. Potem je njun zaslužek enak $n^2 = (2k+1)10 + s$, kjer za končni ostanek s velja $0 \leq s < 10$. Če pišemo $n = 10a + b$, kjer je $0 \leq b < 10$, dobimo $2(5a^2 + ab)10 + b^2 = (2k+1)10 + s$. Ker ima desna stran lihe desetice, mora to veljati tudi za levo stran. Prvi člen ima sode desetice, zato ima b^2 lihe desetice. Tako je b^2 lahko le 16 ali 36, torej je $s = 6$, saj so enice v prvem členu na levi strani enake 0. Da poravnata račune, mora starejši brat dati mlajšemu 2 zlatnika, zato je pipec vreden 2 zlatnika.
4. Recimo, da sta simetrali vzporedni. Zaradi simetrije lahko predpostavimo, da simetrala kota pri DAB seka BC v točki E in simetrala kota pri BCD seka AD v F . Zaradi vzporednosti je $\sphericalangle DFC = \sphericalangle DAE = \sphericalangle EAB$ in $\sphericalangle BEA = \sphericalangle BCF = \sphericalangle FCD$. Torej sta si trikotnika FCD in AEB podobna in je $\sphericalangle ABC = \sphericalangle CDA$.

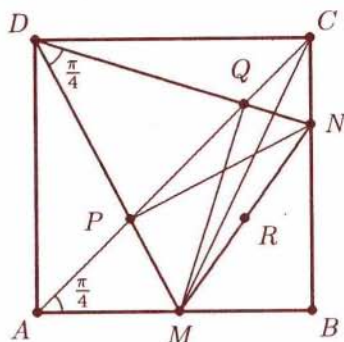


Še v drugo smer: če bi se simetrali sekali v notranji točki G štirikotnika $ABCD$, bi imela štirikotnika $ABCG$ in $AGCD$ po tri enake kote in bi morala imeti enak tudi četrti kot pri G : $\sphericalangle AGC = 180^\circ$. To bi pomenilo, da se simetrali ujemata. Če se simetrali ne sekata v notranji točki štirikotnika, pa pogledjmo spet na sliko in označimo $\sphericalangle EAB = x$, $\sphericalangle ABC = z$ in $\sphericalangle BCF = y$. Potem je $\sphericalangle CFD = 180^\circ - y - z$ in je $\sphericalangle AFC = y + z$. Analogno dobimo $\sphericalangle AEC = x + z$. Ker je vsota kotov v štirikotniku $AECF$ enaka 360° , je $x + (z + x) + y + (z + y) = 360^\circ$ in $x + y + z = 180^\circ$, kar pomeni $\sphericalangle CFD = x$.

Drugi letnik

1. Naj bo $b - a = x$. Potem so $b - x$, b , $b + x$ in $3b + x^2$ praštevila. Iz slednjega razberemo, da število x ni deljivo s 3. Torej je eno izmed praštevil $b - x$, b in $b + x$ enako 3. Očitno to število ni niti $b + x$ niti b (iz $b = 3$ sledi $a = 2$ in $c = 4$), torej je $a = 3$. Seveda $x \neq 1$. Ker pa je $x \leq a$, mora biti $x = 2$. Tako imamo $a = 3$, $b = 5$, $c = 7$, $d = 19$ in $abcd = 1995$.
2. Enakost $f(n) = n$ pomeni, da je $a + b + c + ab + ac + bc + abc = 100a + 10b + c$. Potem je $c = \frac{99a - ab + 9b}{a + b + ab}$. Ker pa je $c \leq 9$, sledi $99a - ab + 9b \leq 9a + 9b + 9ab$ in od tod $90a \leq 10ab$. Število n je trimesno, zato $a \neq 0$, torej je $9 \leq b$ in mora biti $b = 9$. Sledi $c = \frac{99a - 9a + 81}{a + 9 + 9a} = 9$. Vidimo, da je števka a poljubna, torej so vse rešitve 199, 299, 399, 499, 599, 699, 799, 899 in 999.

3. Ker je $\angle MDQ = \frac{\pi}{4} = \angle MAQ$, je štirikotnik $AMQD$ tetivni. Kot MQD je zato pravi. Analogno je tudi štirikotnik $NCDP$ tetivni in je kot DPN pravi. Ker pa je tudi $\angle MBN = \frac{\pi}{2}$, je $MBNQP$ tetivni petkotnik in središče njemu očrtane krožnice je v točki R . Sledi $|PR| = |RQ|$.



4. Vsak od produktov je lahko enak 1 ali -1 . Ker je vrstic (in stolpcev) liho, sta števili števil 1 in -1 med vrstičnimi produkti različne parnosti. Če naj bi bila vsota vseh produktov enaka 0, bi morale biti število stolpcev, katerih elementi imajo produkt -1 , enako številu vrstic, katerih elementi imajo produkt 1. To pa pomeni, da je število števil -1 med vrstičnimi produkti različne parnosti kot število števil -1 med stolpčnimi produkti. Če torej zmnožimo vse produkte po vrsticah, dobimo različno število, kot če zmnožimo vse produkte po stolpcih (eno je 1, drugo -1). Toda obe števili sta enaki produktu vseh elementov v tabeli in ne moreta biti različni. Vsota torej res ne more biti enaka 0.

Tretji letnik

1. Naj bo polinom $p(x) = a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \dots + a_1 x + a_0$ s celimi koeficienti in naj bosta r in s celi števili. Potem velja $p(r) - p(s) = (r - s) \cdot q$, kjer je tudi q celo število. V našem primeru zapišemo

$$b - c = p(a) - p(b) = (a - b) \cdot q_1$$

$$c - a = p(b) - p(c) = (b - c) \cdot q_2$$

$$a - b = p(c) - p(a) = (c - a) \cdot q_3.$$

Ker je produkt levih strani teh enakosti enak produktu desnih, velja $1 = q_1 q_2 q_3$, zato je tudi $|a - b| = |a - c| = |b - c|$. Od tod sklepamo, da je bodisi $a - b = b - c$ ali pa $a - b = -b + c$. Iz zadnje enakosti sledi protislovje $a = c$, saj so a , b in c med seboj različna cela števila. Po drugi poti pa pridemo do $a - b = b - c = c - a$, od koder sledi $2a = c + b$, $4b - 2c = c + b$ in končno $b = c$, ki ne more veljati. Podobno bi prišli do protislovja, če bi postavili $a - b = b - c = -c + a$, saj bi dobili $a = b$.

2. Ker je $f(n) = \frac{1}{n^2 - 1}(f(1) + f(2) + \dots + f(n-1))$, je

$$\begin{aligned} f(1) + f(2) + \dots + f(n) &= \\ &= f(1) + \dots + f(n-1) + \frac{1}{n^2 - 1}(f(1) + \dots + f(n-1)) = \\ &= \frac{n^2}{(n-1)(n+1)}(f(1) + f(2) + \dots + f(n-1)) = \\ &= \frac{n^2}{(n-1)(n+1)} \cdot \frac{(n-1)^2}{(n-2)n} \cdot \frac{(n-2)^2}{(n-3)(n-1)} \cdots \frac{2^2}{1 \cdot 3} \cdot f(1) = \\ &= 2 \frac{n}{n+1} f(1). \end{aligned}$$

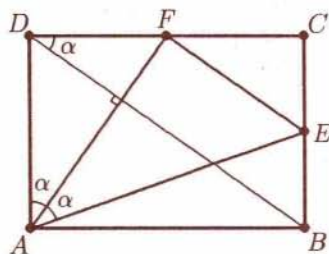
Torej je

$$f(n) = \frac{2n}{(n+1)n^2} f(1) \quad \text{in} \quad f(1995) = \frac{1}{998}.$$

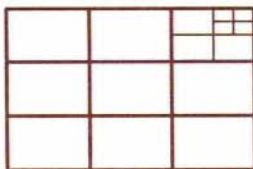
3. Privzamemo lahko, da je $|BC| = 1$. Označimo kot FAD z α . Potem je $\operatorname{tg} \alpha = \frac{\sqrt{2}}{2}$ in sta zato kota α in $\angle CDB$ enaka. Torej je $AF \perp BD$. Računajmo

$$|EB| = |AB| \operatorname{tg} \left(\frac{\pi}{2} - 2\alpha \right) = \frac{\sqrt{2}}{\operatorname{tg} 2\alpha} = \frac{1}{2}.$$

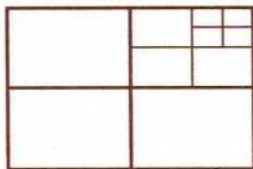
Točka E je tako razpolovišče stranice BC in sta zato daljci EF in BD vzporedni. Sledi $AF \perp EF$.



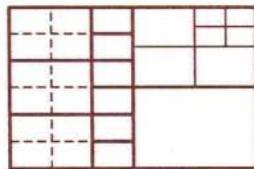
- 4.



$3k$ pravokotnikov
($k \geq 3$)



$3k + 1$ pravokotnikov
($k \geq 0$)

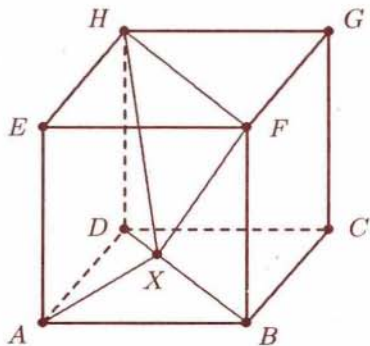


$3k + 2$ pravokotnikov
($k \geq 3$)

S slik razberemo, kako pravokotnik razrežemo na 9, 4 ali 11 pravokotnikov. Z rezanjem enega od manjših pravokotnikov na štiri enake dele povečamo število pravokotnikov za 3. Tako opazimo, da naloga ne bi bila rešljiva za $n = 2, 3, 5, 6$ in 8.

Četrty letnik

- Denimo, da bi tako aritmetično zaporedje obstajalo. Označimo $\sqrt[3]{p} = a$, $\sqrt[3]{q} = a + md$ in $\sqrt[3]{r} = a + nd$, kjer so p, q in r različna praštevila, m in n pa različni naravni števili. Velja seveda $\frac{\sqrt[3]{q} - \sqrt[3]{p}}{\sqrt[3]{r} - \sqrt[3]{p}} = \frac{m}{n}$ in od tod $m\sqrt[3]{r} - n\sqrt[3]{q} = (m - n)\sqrt[3]{p}$. Zadnjo enakost kubirajmo: $m^3r - n^3q - 3mn\sqrt[3]{r}q(m\sqrt[3]{r} - n\sqrt[3]{q}) = (m - n)^3p$, izraz v oklepaju zamenjajmo (uporabimo isto enakost), pa pridemo po preureditvi do $3mn(m - n)\sqrt[3]{pqr} = m^3r - n^3q - (m - n)^3p$. Ker je leva stran zadnje enakosti iracionalno število, desna pa racionalno, smo prišli do protislovja, zato takega zaporedja ni.
- Ker je $p(x) = \frac{x^5 - 1}{x - 1}$, so $\varepsilon_k = \cos \frac{2k\pi}{5} + i \sin \frac{2k\pi}{5}$ ($k = 1, 2, 3, 4$) ničle polinoma p . Delimo: $p(x^5) = k(x) \cdot p(x) + r(x)$. Potem je $5 = p(1) = p(\varepsilon_k^5) = k(\varepsilon_k) \cdot p(\varepsilon_k) + r(\varepsilon_k) = r(\varepsilon_k)$ za $k = 1, 2, 3, 4$. Stopnja polinoma $r(x) - 5$ je kvečjemu 3 in ima 4 različne ničle $\varepsilon_1, \varepsilon_2, \varepsilon_3$ ter ε_4 . Torej je $r(x) \equiv 5$.
- Najprej opazimo, da je funkcija injektivna (če je $f(x) = f(y)$, je očitno tudi $x = y$), in je zato dovolj pokazati enakost $f(0) = 0$. Vstavimo v pogoj $x = 0$ in nato še $x = f(0)$ ter dobimo $4f(f(0)) = 2f(0) + 0$ oziroma $2f(f(0)) = f(0)$ in $4f(f(f(0))) = 2f(f(0)) + f(0) = f(0) + f(0) = 2f(0)$. Pridemo torej do $f(f(f(0))) = f(f(0))$ in zaradi injektivnosti sledi $f(0) = 0$.
- Ker je rob BF pravokoten na ravnino osnovne ploskve in je kot AXF pravi, je $\angle AXB = \frac{\pi}{2}$. Analogno je tudi $\angle AXD = \frac{\pi}{2}$ in zato leži točka X na diagonali BD . Opazimo tudi, da je AX višina na hipotenuzo BD pravokotnega trikotnika ABD . Ker je $\angle BAD = \frac{\pi}{2}$, leži točka A na krožnici s premerom BD . Ker je $\angle FXH = \frac{\pi}{2}$, leži točka X na krožnici s premerom FH . Ker je $|FH| = |BD|$, sta višini



na hipotenuzo pravokotnih trikotnikov BDA in FHX enako dolgi. Ker je rob AE pravokoten na ravnino ploskve $EFGH$, je dolžina višine na hipotenuzo FH pravokotnega trikotnika FHX enaka $|AE|$. Torej je $|AX| = |AE|$ in zato je $\angle AXE = \frac{\pi}{4}$.

Darjo Felda

17. MEDNARODNO MATEMATIČNO TEKMOVANJE MEST

Na lanskoletnem mednarodnem tekmovanju mest so se naši tekmovalci izvrstno odrezali. Za uspešno reševanje nalog so prejeli pohvale: Jernej BARBIČ (Gimn. Tolmin), Mitja PIRC (Gimn. Brežice), Sašo ŽIVANOVIČ in Andrej VODOPIVEC (oba Gimn. Celje) ter Martin KLANJŠEK, Miha VUK, Anže SLOSAR, Mitja ŠLENC in Gorazd BIZJAK (vsi Gimn. Bežigrad).

Z novim šolskim letom se je začel tudi nov cikel tekmovanja mest. Na jesenskem krogu letošnjega tekmovanja mest so se tekmovalci zbrali dvakrat. V prvem delu so reševali naslednje naloge:

Prva skupina

1. Na ravnini leži kvadrat in oseba A si izbere točko P v ravnini tega kvadrata. Če oseba B potegne premico v ravnini, ji oseba A pove, ali leži točka P na tej premici oziroma na katerem bregu premice leži. Z najmanj koliko vprašanji lahko oseba B ugotovi, ali leži točka P v notranjosti kvadrata?
2. Ali obstaja 100 pozitivnih celih števil, da je njihova vsota enaka njihovemu najmanjšemu skupnemu večkratniku?
3. Papirnat pravokotnik $ABCD$ ploščine 1 prepognemo tako, da oglišči A in C sovpadeta. Dokaži, da je ploščina dobljenega petkotnika manjša od $3/4$.
4. Na nosilki stranice BC trikotnika ABC ležijo točke K , M in N tako, da je AK tangenta na trikotniku očrtano krožnico, AM in AN pa simetrala notranjega in zunanega kota pri A . Dokaži, da je $|MK| = |KN|$.

Druga skupina

1. Na ravnini leži kvadrat in oseba A si izbere točko P v ravnini tega kvadrata. Če oseba B potegne premico v ravnini, ji oseba A pove, ali leži točka P na tej premici oziroma na katerem bregu premice leži. Z najmanj koliko vprašanji lahko oseba B ugotovi, ali leži točka P v notranjosti kvadrata?
2. Ali obstaja
(a) 4, (b) 5
različnih pozitivnih celih števil, da je vsota poljubnih treh izmed njih praštevilo?
3. Prva števka 6-mestnega števila je 5. Ali lahko vedno k temu številu z desne pripišemo še 6 števk, da bo tako dobljeno 12-mestno število popolni kvadrat?
4. Na ravnini ležijo različne točke A , B in C . Konstruiraj premico m skozi C , da bo produkt razdalj od točk A in B do te premice maksimalen. Ali je premica m s točkami A , B in C enolično določena?

V drugem delu jesenskega kroga so tekmovalci izbirali med šestimi nalogami. Objavljamo po dve za vsako skupino:

Prva skupina

1. Prvih pet členov nekega zaporedja je 1, 2, 3, 4 in 5. Od šestega člena dalje je vsak člen za 1 manjši od produkta vseh predhodnih. Dokaži, da je produkt prvih 70 členov enak vsoti njihovih kvadratov.
2. Na mizi imamo tablo 1×1000 in n žetonov v škatli poleg nje. Igralca zaporedoma prestavljata žetone. Prvi igralec lahko vzame vsakič, ko je na vrsti, največ 17 žetonov iz škatle ali pa s table in jih postavi na tablo tako, da v nobenem polju ne leži več kot en žeton. (Prvi igralec lahko vzame nekaj žetonov iz škatle, nekaj pa s table.) Drugi igralec pa lahko vzame s table poljubno mnogo žetonov, ki zasedajo zaporedna polja, in jih položi v škatlo. Prvi igralec zmaga, če zapolni nekih n zaporednih polj table.
 - (a) Dokaži, da lahko prvi igralec zmaga pri $n = 98$.
 - (a) Določi največji n , pri katerem lahko zmaga prvi igralec.

Druga skupina

1. Vzdolž tekaške steze je postavljenih 1000 sedežev, zaporedoma oštevilčenih s števili od 1 do 1000. Organizator je pomotoma prodal n ($100 < n < 1000$) vstopnic. Na vsaki vstopnici je bilo odtisnjeno število med vključno 1 in vključno 100. Seveda je bilo lahko za nek sedež prodanih več kart.
Teh n gledalcev prispe na tekmo zaporedoma. Vsakdo najprej poišče svoj sedež in sede, če je sedež prost. Če pa sedež ni prost, vzdihne "oh" in se premakne do prvega naslednjega prostega sedeža, pri čemer vzdihne "oh" vsakič, ko gre mimo zasedenega sedeža. Dokaži, da je število vzdihov "oh" neodvisno od vrstnega reda prispelih gledalcev, čeprav je seveda odvisno od odtisnjenih števil na vstopnicah.
2. Pustolovec je prispel na *Otok zakladov* krožne oblike, ob obali katerega raste šest palm: A, B, C, D, E, F , ne nujno v tem vrstem redu. Zaklad se nahaja na razpolovišču daljice, ki povezuje višinski točki trikotnikov ABC in DEF . Najmanj koliko lukenj mora izkopati pustolovec, če ne ve, s katero črko je označena posamezna palma?

Matjaž Željko

PRESEK

list za mlade matematike, fizike, astronome in računalnikarje
23. letnik, šolsko leto 1995/96, številka 5, strani 257 – 320

UREDNIŠKI ODBOR: Vladimir Batagelj, Tanja Bečan (jezikovni pregled), Dušica Boben (oblikovanje teksta), Vilko Domajnko, Roman Drnovšek (novice), Darjo Felda (tekmovanja), Bojan Golli, Marjan Hribar, Boštjan Jaklič (tehnični urednik), Martin Juvan (računalništvo), Sandi Klavžar, Boris Lavrič, Andrej Likar (fizika), Matija Lokar, Bojan Magajna (glavni urednik), Franci Oblak, Peter Petek, Marijan Prosén (astronomija), Marjan Smerke (svetovalec za fotografijo), Miha Štalec, Marija Vencelj (matematika, odgovorna urednica).

Dopisi in naročnine: Društvo matematikov, fizikov in astronomov Slovenije – Podružnica Ljubljana – Komisija za tisk, Presek, Jadranska c. 19, 1001 Ljubljana, p.p. 2964, tel. (061) 1232-460, št. ŽR 50106-678-47233. Naročnina za šolsko leto 1995/96 je za posamezne naročnike 1.250 SIT, za skupinska naročila šol 1.000 SIT, posamezna številka 250 SIT, za tujino 25.000 LIT, devizna nakazila SKB banka d.d. Ljubljana, val-27621-42961/9, Ajdovščina 4, Ljubljana.

List sofinancirata MZT in MŠŠ
Ofset tisk DELO – Tiskarna, Ljubljana

Po mnenju MZT št. 415-52/92 z dne 5.2.1992 šteje revija med proizvode iz 13. točke tarifne št. 3 zakona o prometnem davku, za katere se plačuje 5% davek od prometa proizvodov.

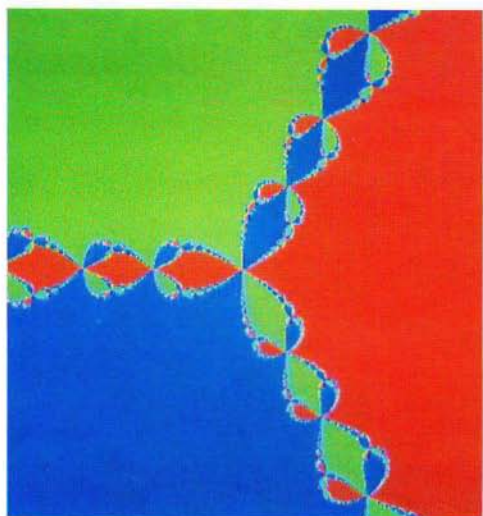
**PRVA
SLOVENSKA
ASTRONOMSKA
REVIJA**

Spika



**VSAK MESEC NOVA, BARVNA ŠTEVILKA REVIJE ZA LJUBITELJE ASTRONOMIJE,
KI PRINAŠA NOVICE, VSE O SONCU, PLANETIH, ZEMLJI, ZVEZDAH,
GALAKSIJAH, ASTROFIZIKI, KOZMOLOGIJI, ASTRONAVTIKI,
ASTROFOTOGRAFIJI, ARHEOASTRONOMIJI...
ZA AMATERJE MESEČNO SVEŽE EFEMERIDE IN ZVEZDNA KARTA,
O TELESKOPIH, UPORABNIH PROGRAMIH...
IN ŠE OSNOVE ZA ZAČETNIKE, RAZISKOVALNI KOTIČEK, TESTI,
ZNANSTVENA FANTASTIKA, MALI OGLASI TER NAGRADNA IGRA!**

Revijo naročajte na naslov: Spika, Poštni predal 9, 61109 Ljubljana. Četrtnetna naročnina (15% popusta) je 1070,00 SIT, polletna naročnina (20% popusta) je 2015,00 SIT, celoletna naročnina (25% popusta) je 3780,00 SIT.



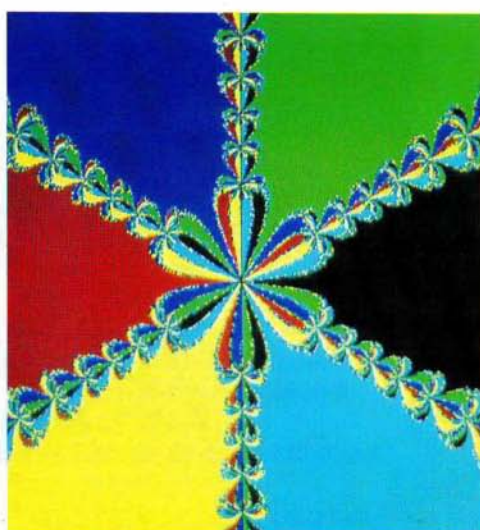
$n = 3$



$n = 4$



$n = 5$



$n = 6$