

Bitte nicht berühren
Please do not touch
Ne pas toucher s.v.p.

PRE
SEK

4



Violoncelle N. 1. Stradivari, inventeur du
Violoncelle Stradivari, le plus ancien
instrument de la collection.
Violoncelle N. 1. Stradivari, inventeur du
Violoncelle Stradivari, le plus ancien
instrument de la collection.
Violoncelle N. 1. Stradivari, inventeur du
Violoncelle Stradivari, le plus ancien
instrument de la collection.

ISSN 0351-6652

DRUŠTVO MATEMATIKOV, FIZIKOV IN ASTRONOMOV SLOVENIJE, 23(1995-1996)

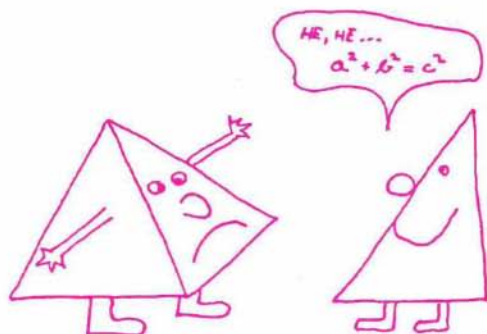
list za mlade matematike, fizike, astronome in računalnikarje
23. letnik, leto 1995/96, številka 4, strani 193–256

VSEBINA

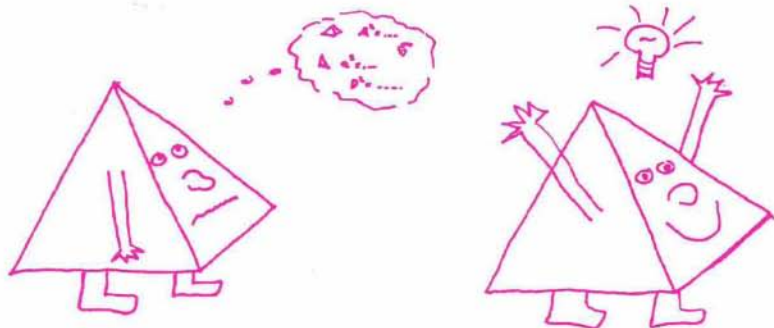
MATEMATIKA	Zgodba o pravokotnem tetraedru (Primož Potočnik) 193-196
FIZIKA	Skrivnostni izbruhi vode (Zoran Arsov) 200-205
	Natančno merjenje s pastjo (Janez Strnad) 220-221
	Violina in lok (Andrej Likar) 226-228
ASTRONOMIJA	Samotna (Marijan Prosén) 208-209
RAČUNALNIŠTVO	Problem trdnih zakonov (Martin Juvan) 212-215
NOVICE	Sto let radioaktivnosti – Odkritje Henrija Bequerela (Janez Strnad) 197-199
	Fizikalna olimpiada z netekmovalne plati (Martin Klanjšek) 228-230
NALOGE	Kdaj je lahko vsota zaporednih naravnih števil kvadrat? (Jože Grasselli) 207
	Pet razbojnikov (Marija Vencelj) 209
	Prevrtani krogli (Vilko Domajnko) 210
	Doloci vloge (Neža Mramor - Kosta) 210
	Malo in veliko preprosto število (Martin Juvan) 219
	Nekaj nalog za mlade Vegovce (Pavel Zajc) 221-222
	Kaj kdo poučuje? (Neža Mramor - Kosta) 231
	Razreži tetraeder (Vilko Domajnko) 231
REŠITVE NALOG	Nalogi o 1996 – s str. 133 (Roman Drnovšek) 199
	Pregradimo trikotnik, 2. del – s str. 148 (Boris Lavrič) 205-207
	Križanka "Matematične krivulje" – s str. 160 (Marko Bokalič) 230
	Največji zorni kot – s str. 158 (Marija Vencelj) 232-233
ZANIMIVOSTI	Kako si predstavljamo štiridimenzionalno kocko? (Olga Arnuš) 216-219
RAZVEDRILO	Prva znana astronomka (Marijan Prosén) 223
	"Astro" križanka (Marko Bokalič) 224-225
	Neskončnost (David Bedrač) III
TEKMOVANJA	15. državno tekmovanje iz fizike za osnovnošolce – rešitve s str. 182 (Mojca Čepič) 234-242
	Rešitve nalog z državnega tekmovanja iz srednješolske fizike, 1. del – s str. 187 (Jure Bajc) 243-245
	Rešitvi izbranih nalog s 36. matematične olimpiade (Matjaž Željko) 246-247
	4. državno tekmovanje osnovnošolcev v znanju matematike (Aleksander Potočnik) 247-248
	10. državno tekmovanje iz znanja računalništva za osnovnošolce (Ivan Gerlič) 249-253
	39. matematično tekmovanje srednješolcev Slovenije (Darjo Felda) 254-256
NA OVITKU	Mozartova prva violina, shranjena v njegovi rojstni hiši v Salzburgu (foto Urška Demšar). Glej tudi prispevek na strani 226 I
	Del ozvezdja Vodna kača ali Hidra iz zvezdnega atlasa Urano- grafija poljskega astronoma Jana Heveliusa. Glej tudi članek Samotna na strani 208 IV

ZGODBA O PRAVOKOTNEM TETRAEDRU

Za devetimi gorami in devetimi vodami leži mesto likov in teles. V njem živijo krogi, trikotniki, kvadrati, kocke, tetraedri, razne prizme, ikozaedri in še mnoga druga čuda najrazličnejših oblik in velikosti. Nekateri so okrogli, drugi koničasti, tretji bolj podolgovati, četrti bolj stisnjeni. Vsi pa se strinjajo, da je med njimi najimenitnejši trikotnik, ki ima en kot pravi. Med vsemi trikotniki so le njegove stranice takšne, da zadoščajo slavni Pitagorovi enačbi $a^2 + b^2 = c^2$.



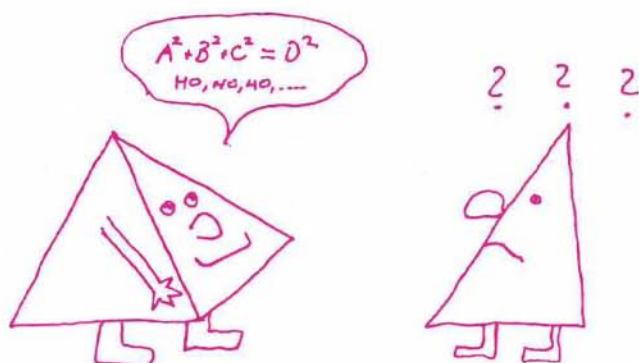
Med prebivalci mesta pa je tudi debelušček pravokotni tetraeder. Zanj se nihče ne zmeni in zato je zelo nesrečen. Pa vendar, si pravi, mora biti tudi na meni kaj imenitnega in zanimivega. Konec koncev nisem čisto navaden tetraeder. Moje stranske ploskve so pravokotni trikotniki (in sem zato lep vsaj za tri pravokotne trikotnike). Njihove katete se elegantno dvigujejo proti vrhu, hipotenuze pa obdajajo prav mično osnovno ploskev.



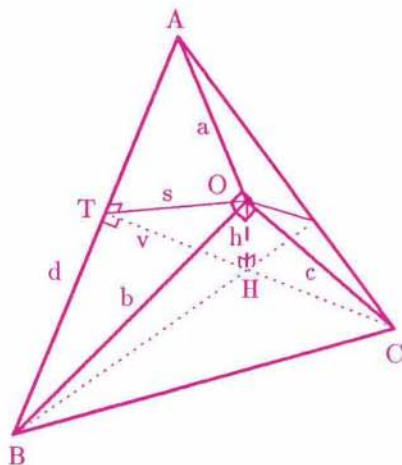
Gotovo tudi zame velja kakšen izrek. Tako razmišlja pravokotni tetraeder, se gleda v ogledalu in meri ter računa. Na koncu pa le odkrije nekaj čudovitega. Steče na ulico in pove vsakemu, ki ga sreča:

Če seštejem kvadrate ploščin svojih stranskih ploskev, dobim kvadrat ploščine osnovne ploskve. Torej:

$$A^2 + B^2 + C^2 = D^2.$$



To je prišlo na uho tudi mestnemu matematiku. Novica o takšni skladnosti tetraedrovih ploskev ga je zelo presenetila. Kar je naš tetraeder zmeril, je hotel strokovnjak preveriti s svinčnikom in papirjem. Narisal je poljuben pravokotni tetraeder in razmišljal takole: Označimo vrh tetraedra z O in oglišča osnovne ploskve z A, B, C . Koti $\sphericalangle AOB$, $\sphericalangle BOC$, $\sphericalangle COA$ pravokotnega tetraedra so pravi. Narišimo višino trikotnika ABO na AB in nožišče označimo s T . Narišimo še višino osnovne ploskve (ABC) skozi C . Zdi se nam, da ima ta višina isto nožišče T kot višina OT . Preverimo:



$$\begin{aligned}\overrightarrow{TC} \cdot \overrightarrow{AB} &= (\overrightarrow{OC} - \overrightarrow{OT})(\overrightarrow{OB} - \overrightarrow{OA}) = \\ &= \overrightarrow{OB} \cdot \overrightarrow{OC} - \overrightarrow{OA} \cdot \overrightarrow{OC} - \overrightarrow{OT} \cdot (\overrightarrow{OB} - \overrightarrow{OA}) = 0.\end{aligned}$$

TC je pravokotna na stranico AB in ima krajišče v C in je zato res višina osnovne ploskve. Podobno bi se lahko prepričali še za druge višine in ugotovili:

Višine stranskih ploskev imajo z višinami osnovne ploskve skupna nožišča.

Projicirajmo sedaj vrh tetraedra O pravokotno na osnovnico ABC . Kaj je projekcija? Iz skice lahko domnevamo, da je to višinska točka H osnovne ploskve. Dokažimo:

$$\overrightarrow{OH} = \overrightarrow{OT} + \overrightarrow{TH} = \overrightarrow{OT} + k\overrightarrow{TC}, \quad \overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{OH} = \overrightarrow{OT} \cdot \overrightarrow{AB} + k\overrightarrow{TC} \cdot \overrightarrow{AB} = 0.$$

Daljica OH je torej pravokotna na stranico AB in enako bi se prepričali, da je pravokotna tudi na stranico AC . Ker se da vsak vektor v ravnini osnovne ploskve zapisati kot linearna kombinacija vektorjev $\overrightarrow{AB}$ in $\overrightarrow{AC}$, je OH pravokotna na vso ploskev ABC . To pa že pomeni, da je točka H res pravokotna projekcija vrha O na osnovno ploskev. Povedano drugače:

Višinska točka osnovne ploskve je hkrati nožišče telesne višine pravokotnega tetraedra.

Sedaj, ko smo opravičili privzetke, ki smo jih naredili ob risanju skice, lahko preverimo trditev našega tetraedra. Z A, B, C označimo ploščine stranskih ploskev OAB, OBC, OCA in z D ploščino osnovne ploskve ABC . Z a, b, c označimo dolžine stranic stranskih ploskev in z d dolžino stranice AB . V računu bomo potrebovali še dolžini višin OT in CT , ki ju bomo označili z s in v . Iz skice lahko preberemo:

$$A = \frac{ab}{2}, \quad B = \frac{bc}{2}, \quad C = \frac{ca}{2}.$$

Nekaj več težav je z računanjem ploščine osnovne ploskve:

$$D = \frac{dv}{2}, \quad v^2 = s^2 + c^2.$$

Trikotnika ATO in AOB sta si podobna, saj imata en kot skupen, drugi pa je pri obeh kar pravi. Zato velja

$$s : a = b : d.$$

Od tod dobimo:

$$D^2 = \frac{a^2b^2 + d^2c^2}{4}.$$

In ker je $d^2 = a^2 + b^2$, sledi:

$$D^2 = \frac{a^2b^2 + b^2c^2 + c^2a^2}{4} = A^2 + B^2 + C^2.$$

Matematik, ki je bil v mestu likov in teles zelo cenjena oseba (ko bi vsaj bilo tudi kje druge tako...), se je tako prepričal v pravilnost tetraedrove trditve. Rezultat mu je bil všeč in je zato računal dalje. Spomnil se je Evklidovega izreka, ki pravi, da je v pravokotnem trikotniku produkt osnovnice in projekcije katete na osnovnico enak kvadratu katete. Analogno je v pravokotnem tetraedru označil projekcijo stranske ploskve na osnovno z $\mathcal{A}'$ in daljico TH z s' . Sedaj je prebral s skice:

$$\mathcal{A}'\mathcal{D} = \frac{ds'}{2} \frac{dv}{2} = \frac{d^2 s'v}{4}.$$

Trikotnik TOC je pravokoten in zato velja

$$s'v = s^2, \\ \mathcal{A}'\mathcal{D} = \left(\frac{ds}{2}\right)^2 = \mathcal{A}^2.$$

Se pravi, da se tudi pravokotni tetraeder lahko ponaša z Evklidovim izrekom.

Matematik je računal še in še ter odkril še mnogo zanimivih lastnosti. Vse to je nato objavil meščanom in ti so sedaj postali ponosni, da živi med njimi poleg pravokotnega trikotnika še en tak lepoteč. Tetraeder se jim ni zdel več dolgočasen in nezanimiv in vsi so ga vabili v svojo družbo.

Ugibanje, kaj vse zanimivega je matematik še odkril o pravokotnem tetraedru, pa prepuščamo nadobudnim bralcem. Naj le še namignemo, da se da do neke mere posplošiti tudi višinski izrek. Vprašamo pa se lahko tudi, ali so pravokotni tetraedri edini takšni tetraedri, ki zadoščajo posplošenemu Pitagorovemu izreku. Opazimo, da ne (najdi primer!), če pa poleg Pitagorove formule zahtevamo še nekaj dodatnih omejitev, res dobimo tudi zadostni pogoj za pravokotnost tetraedra.

Naloge:

1. Naj bosta a in b kateti, c pa hipotenuza pravokotnega trikotnika. Z v označimo višino na hipotenuzo. Dokaži, da velja

$$\frac{1}{v^2} = \frac{1}{a^2} + \frac{1}{b^2} + \frac{1}{c^2}.$$

Izpelji analogno formulo za pravokotni tetraeder.

2. Ali je lahko osnovna ploskev pravokotnega tetraedra topokotna?

3. V kakšnem odnosu so si nasprotni robovi pravokotnega tetraedra?

Primož Potočnik

STO LET RADIOAKTIVNOSTI

Odkritje Henrija Becquerela

Proti koncu leta 1895 je Conrad Wilhelm Röntgen odkril rentgensko svetlobo in na začetku leta 1896 odkritje objavil. Vest se je hitro razširila po svetu. O žarkih X, kakor so neznano predirno sevanje spočetka imenovali, so se pogovarjali učeni možje in drugi ljudje. 20. januarja 1896, tri dni pred Röntgenovim edinim predavanjem, je o odkritju v francoski akademiji znanosti v Parizu poročal matematik in fizik Henri Poincaré. Pogovor je nanese tudi na mesto v katodni cevi, kjer katodni žarki, to je elektroni, zadenejo steno in kjer se steklo zelenkasto sveti. Tam najizdatneje nastane rentgenska svetloba. Na zasedanju je bil tudi Henri Becquerel, ki ga je to svetenje še posebej zanimalo. Njegov oče Edmond Becquerel je vneto raziskoval luminiscenco. Tako imenujemo pojav, da snov seva svetlobo, ki je značilna za snov. Če povzroča luminiscenco svetloba, govorimo o fluorescenci. Edmond Becquerel je zbral in raziskal veliko snovi, ki fluorescirajo. Brž ko je Henri Becquerel slišal, da v Röntgenovi cevi izhaja rentgenska svetloba iz fluorescirajočega dela cevi, se mu je porodila misel, "da bi kazalo pogledati, ali lastnost sevanja žarkov ni tesno povezana s fluorescenco".

Slika 1. Antoine Henri Becquerel (1852 do 1908) je izvir iz znane naravoslovne družine. Njegov oče Alexandre Edmond je raziskoval svetlobo, posebej fluorescenco, in magnetizem, njegov ded Antoine Cesar pa fluorescenco in električne in magnetne pojave. Izmeril je kvocient naboja in mase delcev, ki jih oddajajo radioaktivne snovi, in ugotovil, da je za nekatere delce približno tolikšen kot za elektrone. Te delce so pozneje imenovali *delci β* . Opazil je, da sevanje iz radioaktivnih snovi ionizira zrak, in neodvisno od Pierra Curieja ugotovil, da to sevanje poškoduje tkivo.



Poskuse je začel februarja s skorjastimi prozornimi kristali kalijevega uranil sulfata, ki se svetlikajo, ko jih osvetlimo z vidno svetlobo. Fotografsko ploščo je zavil v dvojen črn papir, ki je zadržal vidno svetlobo. Na papir je dal kristal in postavil vse skupaj za nekaj časa na sonce. Nato je ploščo razvil in glej: na njej se je pokazal počrtnjen obris kristala. Zdelo se je, da je s fluorescenco zares povezano sevanje predirne svetlobe, podobne Röntgenovemu sevanju. Becquerel je objavil odkritje 24. februarja 1896.

V naslednjih dneh ni bilo sonca, tako da je ploščo s kristalom, ki jo je mislil uporabiti pri nadaljnjih poskusih, pustil v predalu. 1. marca je ploščo vseeno razvil. Mislil si je pač, da je morda na plošči kristal zapustil šibke sledi, saj je nekaj vidne svetlobe vendarle dospelo do njega. Presenečen je na plošči opazil zelo jasen obris kristala. Tako je Becquerel ugotovil, da kristal uranil sulfata oddaja predirno sevanje, tudi če ga prej ni osvetlil s sončno svetlobo. Preklical je prejšnje odkritje in 2. marca sporočil novo: uranove soli, ne glede na to, ali fluorescirajo, če jih osvetlimo z vidno svetlobo, ali ne, oddajajo same od sebe, ne da bi jih motili od zunaj, predirno sevanje.



Slika 2. Prva počrtnitev na fotografiji, ki je marca 1896 pokazala, da kristali uranove soli sami od sebe oddajajo predirno sevanje.

Pozneje so uvideli, da so ta pojav opazili že prej. Abel Niépce de St. Victor je leta 1847 iz srebrovega jodida, jajčnega beljaka in škroba zmešal prvo fotografsko emulzijo. Dvajset let pozneje je ugotovil, da so kristali neke uranove soli povzročili šibko počrtnitev, ko je ploščo razvil, čeprav je bil med njimi in ploščo papir. Vendar pojava ni dalje raziskoval.

Ob koncu prejšnjega stoletja se je pojava lotilo več raziskovalcev, med njimi fizik Pierre Curie in njegova žena Marie. Ugotovili so, da oddajajo sevanje tudi torijeve spojine. Gospa Curie je predlagala, da bi nenavadne žarke imenovali po Becquerelu, a predlog ni obveljal. Pač pa se je pojava prijel ime *radioaktivnost*, brž ko je leta 1898 predlagala to ime. Pozneje sta z možem odkrila nova radioaktivna elementa polonij in radij. Leta 1903 so dobili Nobelovo nagrado za fiziko Henri Becquerel "za odkritje spontane radioaktivnosti", drugo polovico pa Pierre Curie in Marie Curie "za skupna raziskovanja sevalnih pojavov, ki jih je odkril profesor Becquerel". Gospa Curie je leta 1911 dobila še Nobelovo nagrado za kemijo "za odkritje elementov radija in polonija, za izločitev radija in za raziskovanje narave in spojin tega znamenitega elementa". Radioaktivnost je spravila fizike v zagato, ker najprej niso vedeli, od kod izvira energija sevanja. Nazadnje so ugotovili, da atomi niso nespremenljivi. S tem se je začela spreminjati stara slika o svetu.

Becquerelovo odkritje štejejo med osem odkritij v zadnjih dvesto letih fizike, za katera ob njihovem času ni bilo nobenega teoretičnega namiga in nobene znane razlage. Dandanes se pogosto sprašujemo, v kolikšni meri je bilo odkritje naključno. Raziskovanje v fiziki – kot vsako človeško dejavnost – spremljajo seveda tudi naključne sestavine. Kako to, da radioaktivnosti niso odkrili pred Becquerelom? Kako to, da je začel Becquerel poskuse prav z uranovo soljo? Kako to, da je Becquerel razvil plošče, čeprav jih ni izpostavil sončni svetlobi? Ne kaže na silo iskati odgovorov na ta in podobna vprašanja. Pomembno je, da nas je odkritje radioaktivnosti pripeljalo precejšen korak dalje v znanju o naravi.

Janez Strnad

NALOGI O 1996 – Rešitev s str. 133

1. naloga: Ker je $|1 + 9^2 - 96^1| = 14$, je $k \leq 14$. Dokažimo, da je $k = 14$. Zadnja števka števila 9^n je enaka 9, če je število $n \in \mathbb{N}$ liho, in je enaka 1, če je sodo. Zadnja števka števila 96^n pa je enaka 6. To nas pripelje do ugotovitve, da je zadnja števka števila $|1 + 9^m - 96^n|$ enaka 4 ali 6. Dokaz bo torej končan, če se prepričamo, da k ni enako 4 ali 6. Torej želimo dokazati, da za poljubni naravni števili m in n velja $9^m - 96^n \notin \{-7, -5, 3, 5\}$. Ker je število $9^m - 96^n$ deljivo s 3, med vsemi primeri ostane samo možnost $9^m - 96^n = 3$. Če je $n \geq 2$, je število $9^m - 96^n$ deljivo z 9 in zato ne more biti enako 3, pri $n = 1$ pa dobimo enačbo $9^m = 99$, ki tudi ni rešljiva v naravnih številih. Torej je $k = 14$.

2. naloga: Naj bo k število števk (v desetiškem zapisu) števila 1996^n . Torej je $10^{k-1} \leq 1996^n < 10^k$. Ker je $10^3 < 1996$, je $10^{3n} < 1996^n < 10^k$ in zato $k \geq 3n + 1$. Predpostavimo, da število $1996^n + 4^n$ nima k števk, torej je $1996^n + 4^n \geq 10^k = 2^k \cdot 5^k > 1996^n$. Ker je $1996 = 4 \cdot 499$, dobimo (po krajsanju s 4^n) neenakost $499^n + 1 \geq 2^{k-2n} \cdot 5^k > 499^n$. Od tod sledi, da je

$$499^n + 1 = 2^{k-2n} \cdot 5^k.$$

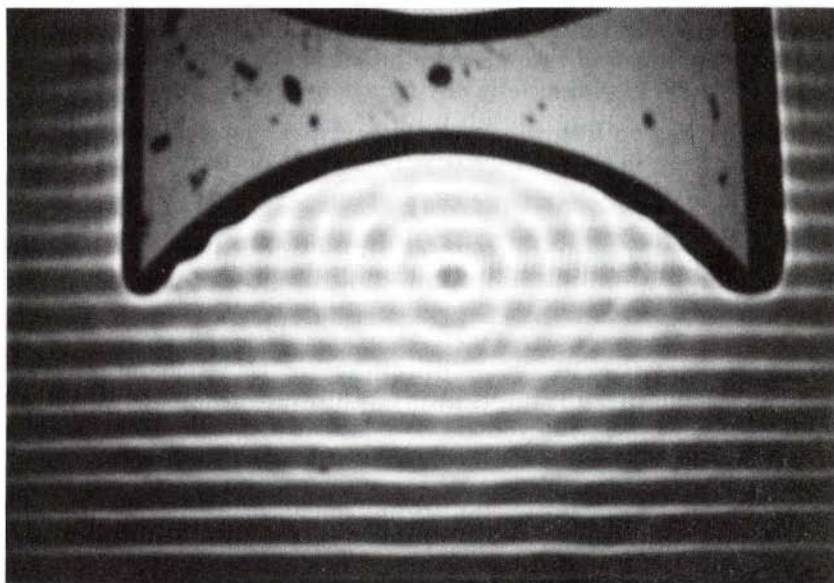
Očitno pri $n = 1$ ta enačba ni rešljiva. Pokažimo, da enačba ni rešljiva v naravnih številih tudi v primeru, ko je $n \geq 2$. Ker je tedaj $k \geq 3n + 1 \geq 7$ in $k - 2n \geq n + 1 \geq 3$, je število $2^{k-2n} \cdot 5^k$ deljivo z $2^3 \cdot 5^3 = 1000$, medtem ko ima število $499^n + 1$ pri deljenju s 1000 ostanek 2 ali 500. Res! S pomočjo dejstva, da je število $499^2 - 1 = (499 - 1)(499 + 1) = 498 \cdot 500$ deljivo s 1000, se hitro prepričamo, da ima število 499^n pri deljenju s 1000 ostanek 1, kadar je število n sodo, in 499, kadar je število n liho. Naloga je tako rešena.

Roman Drnovšek

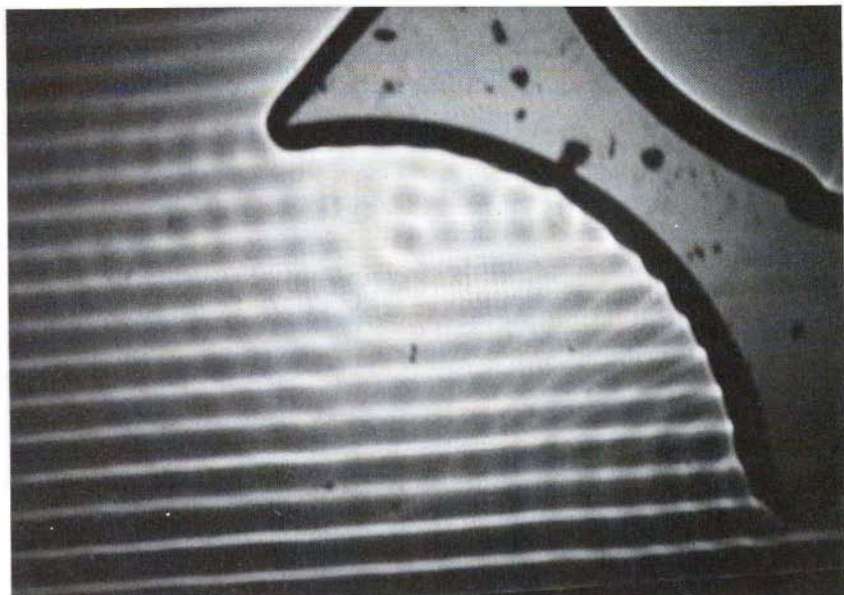
SKRIVNOSTNI IZBRUHI VODE

Zaradi lepšega izgleda velikokrat izdelamo stvari, ki fizikalno niso bolj smotrne. Tako je na primer z okroglimi bazeni za otroke na urejenih morskih plažah (Bazen-burkalnik?; Presek, 22. letnik, št. 5). Voda je v njih na določenih mestih zelo nemirna, tako da otroci niso povsod na varnem, zaradi oblike lagune pa bazeni lepo dopolnjujejo izgled plaže.

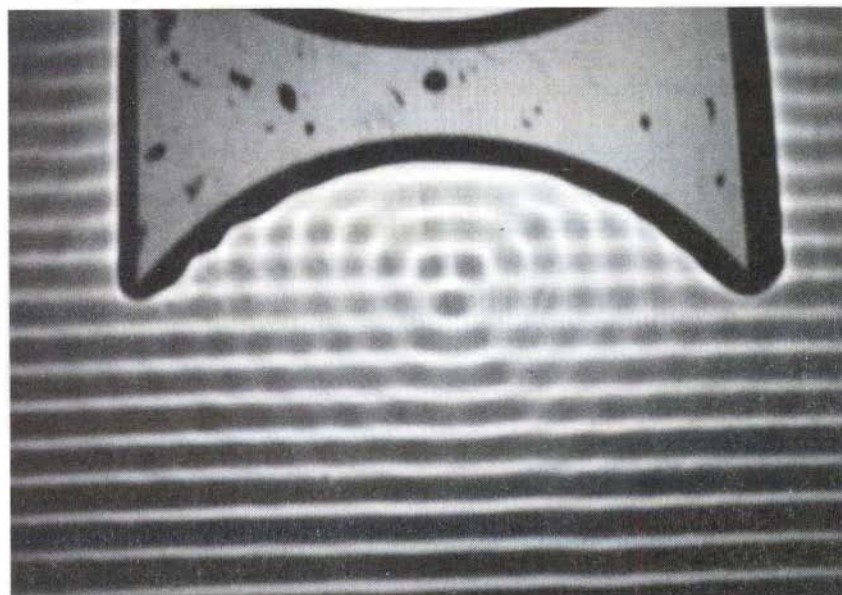
Okrogli bazeni se obnašajo kot krogelna konkavna zrcala, ki jih postavimo na pot vodnim valom. Valovi na gladini vode so kombinacija longitudinalnih in transverzalnih valov, zaradi poenostavitve pa jih obravnavajmo kot transverzalno valovanje. V bazen prihaja ravno valovanje, saj je oddaljenost izvira valovanja ponavadi velika. Vzporedni žarki, ki predstavljajo ravne valove, pa se združijo v gorišču (slika 1). Zaradi združitve žarkov nastane pljus v razdalji polovice krivinskega radija od temena zrcala. Tolikšna je ravno goriščna razdalja. V primeru, da vpadajoči žarki niso vzporedni z optično osjo, nastane izbruh nekje v goriščni ravnini (slika 2). Ker se izbruhi vode ne pojavljajo po celem bazenu, so otroci v njem lahko na varnem, če se izogibajo območja okoli goriščne ravnine.



Slika 1. Žarki vpadajo na zrcalo vzporedno z optično osjo (črn maksimum).



Slika 2. Poševno vpadajoči žarki.



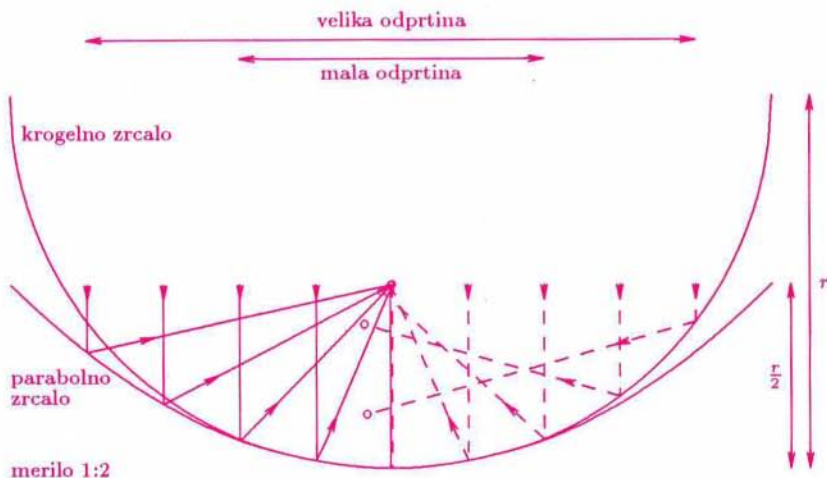
Slika 3. Vzporedno vpadajoči žarki (bel maksimum).

Pljusk je posebej izrazit, kadar se vrh odbitega vala sestavi z vrhom vpadajočega vala. Če se tvori stoječe valovanje tako, da je v gorišču hrbet valovanja, je lahko namesto pljuska v gorišču gladina vode mirna, ali pa imamo dolino (slika 3) namesto vrha valovanja (slika 1). Pri različnih valovnih dolžinah (sliki 6 in 7) je razporejenost hrbtov stoječega valovanja različna. Zato ni nujno, da nastane izrazit pljusk v gorišču. Lahko se pojavi tudi na kakem drugem mestu (slika 7).

Zanima nas še, zakaj se valovi konstruktivno sestavijo v pljusk, kako je to odvisno od velikosti odprtine ter od razmerja med krivinskim radijem in valovno dolžino. Reševanja teh problemov smo se lotili eksperimentalno. Iz pleksi stekla smo izdelali primerne ovire ter nato opazovali obnašanje vodnega valovanja na vzpodbujevalniku valov. Valovanje smo vzpodbujali z izvirom ravnih valov (vzporednih žarkov).

Vprašanja interference se bomo lažje lotili, če predpostavimo, da so vsi odbiti žarki vzporedni. V resnici nekaj žarkov zaradi uklona vpada na zrcalo poševno glede na optično os. V bazenu z manjšo odprtino je uklon lepo viden (slika 5), saj je velikost odprtine primerljiva z valovno dolžino.

V pomoč pri razmišljanju o superpoziciji je shema poteka žarkov pri odboju na zrcalu (slika 4).



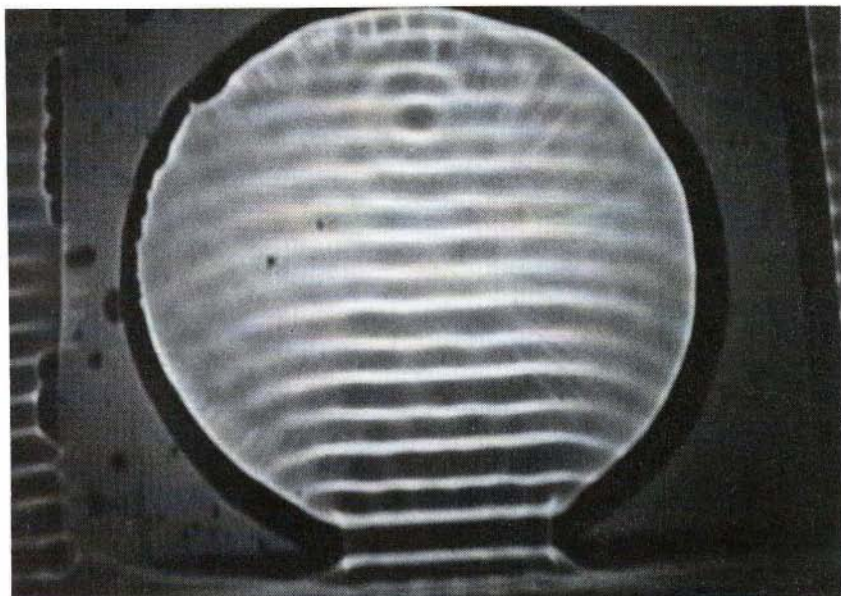
- v krožcih ima odbito valovanje na krog v zrcalu isto fazo (vsi žarki opravijo isto pot 10 cm)
- žarki, ki se odbijajo na krogelnem zrcalu
- žarki, ki se odbijajo na paraboličnem zrcalu

Slika 4. Potek žarkov pri odboju na paraboličnem oz. krogelnem zrcalu.

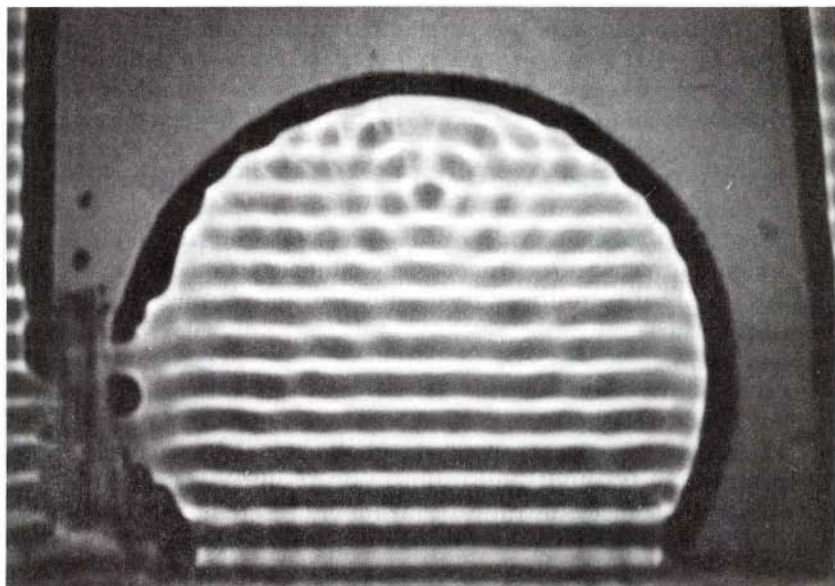
Največjo zbiralno moč ima parabolično zrcalo. Žarki, ki so v fazi pred odbojem, so v fazi tudi po združitvi v gorišču. Parabola je namreč taka krivulja, da se žarki iz vseh smeri odbijejo natančno v gorišče in pri tem opravijo isto dolžino poti. Ker se krožnica ne razlikuje dosti od parabole, se tudi pri krogelnem zrcalu zberejo valovi v pljusk. Čeprav se žarki v isti fazi ne srečajo natančno v gorišču (glej krožce na sliki 4), pa se jih večina le zbere blizu gorišča, zato pričakujemo pljusk.

Seveda pa valovna dolžina v primerjavi z razsežnostjo zrcala ne sme biti majhna, sicer bi bile razlike poti že v majhnem območju okoli gorišča tolikšne, da bi začelo prihajati do destruktivne interference. Razlika poti mora biti manjša od četrte valovne dolžine, da se valovi le seštevajo. V našem primeru sta res valovni dolžini v ($v_1 \approx 1.2$ cm, $v_2 \approx 2.0$ cm) v primerjavi s krivinskim radijem r ($r = 10$ cm) veliki. Drugače bi bilo, če bi obravnavali svetlobo.

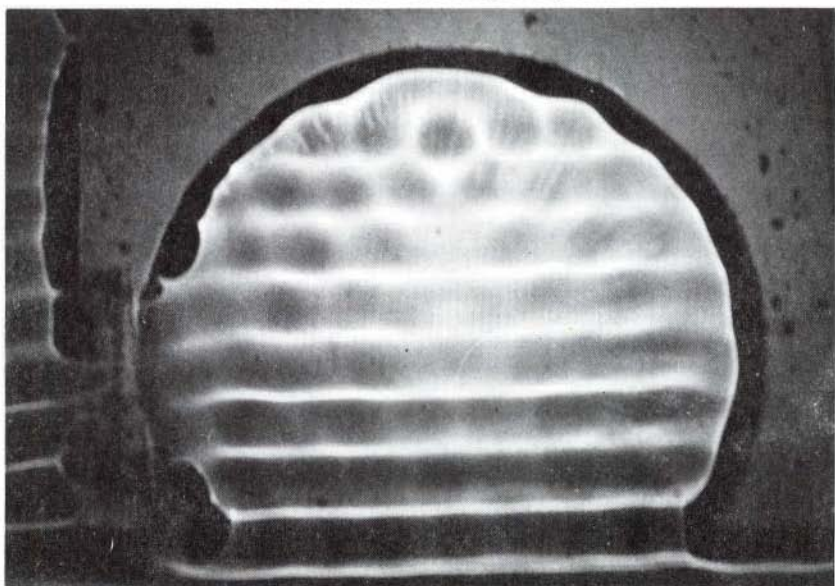
Pri majhni odprtini pljusk nastane bolj natančno blizu gorišča, saj je del stene, kjer se žarki odbijajo, ožji in se zato bolj prilega paraboli. Razliko opazimo s pomočjo merila na slikah 5 in 6. Zaradi različnih odprtin je razlika med bazenom poleg uklona še v valovitosti vode ob robovih.



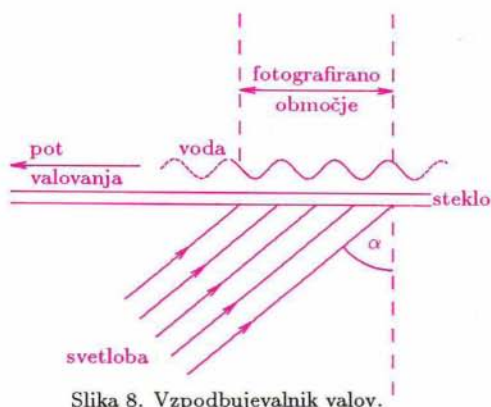
Slika 5. Bazen z malo odprtino. Lepo je viden odklon. Ob robovih bazena ni valov.



Slika 6. Bazen z veliko odprtino pri večji frekvenci.



Slika 7. Bazen z veliko odprtino pri manjši frekvenci.



Slika 8. Vzpodbujevalnik valov.

Kot zanimivost pa še dve vprašanji za bralce: Kako merimo valovno dolžino na vzpodbujevalniku valov (slika 8)? Zakaj nastanejo temne in svetle proge na fotografijah in kako se njihova širina spreminja s kotom, pod katerim, glede na pot valovanja, pade svetloba?

Zoran Arsov

PREGRADIMO TRIKOTNIK, 2. del – Rešitve nalog s str. 148

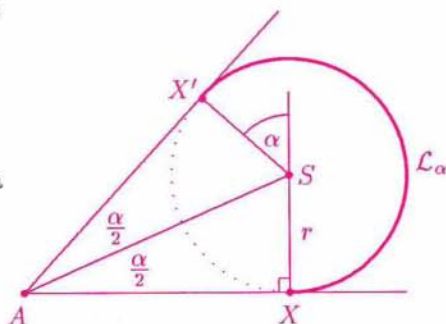
1. Predpostavimo, da se nosilna krožnica $\mathcal{K}$ loka $\mathcal{L}_X$ dotika kraka AX , saj prav takrat razdalja $|AX|$ doseže iskano (najmanjšo) vrednost.

S slike 1 vidimo, da središčni kot loka $\mathcal{L}_X$ meri $\pi + \alpha$. Od tod izračunamo polmer

$$r = l / (\pi + \alpha)$$

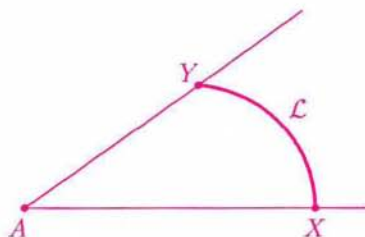
krožnice $\mathcal{K}$. Ker poleg tega velja enakost $|AX| = r \operatorname{ctg} \frac{\alpha}{2}$, je

$$|AX| = \frac{l}{\pi + \alpha} \operatorname{ctg} \frac{\alpha}{2}.$$

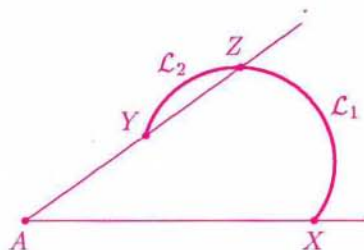


Slika 1.

2. Vzemimo poljubno krivuljo $\mathcal{K}$ dolžine l , ki veže točko X s točko $Y \neq A$ na drugem kraku kota, in jo nadomestimo s krožnim lokom $\mathcal{L} = \mathcal{L}_{XY}$ iz trditve 1. Lok $\mathcal{L}$ lahko leži ves na enem bregu premice AY (slika 2a), lahko pa ga ta premica s točko $Z \neq Y$ razdeli na lok $\mathcal{L}_1$ s krajiščema X in Z ter lok $\mathcal{L}_2$ s krajiščema Z in Y (slika 2b).

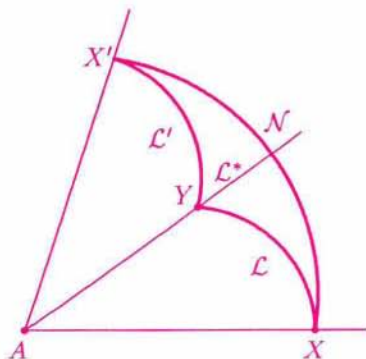


Slika 2a.

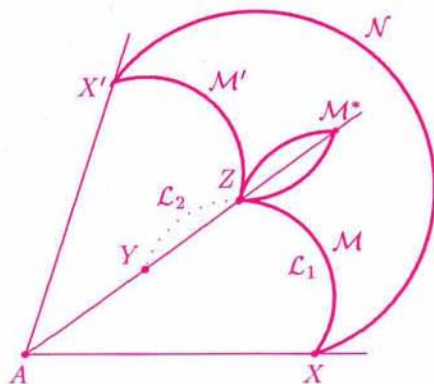


Slika 2b.

V prvem primeru prezrcalimo $\mathcal{L}$ prek premice AY na $\mathcal{L}'$ in s tem X na X' (slika 3a), v drugem pa lok $\mathcal{L}_2$ prezrcalimo prek točke Z , njegovo zrcalno sliko združimo z $\mathcal{L}_1$ v krivuljo $\mathcal{M}$ (dolžine l), ki jo nato prezrcalimo preko premice AY na $\mathcal{M}'$ (slika 3b).



Slika 3a.



Slika 3b.

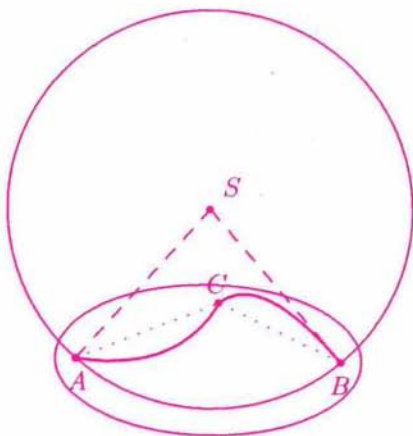
Krivulji $\mathcal{L}$ in $\mathcal{L}'$ oziroma $\mathcal{M}$ in $\mathcal{M}'$ se združita v krivuljo $\mathcal{L}^*$ oziroma $\mathcal{M}^*$ dolžine $2l$ s krajiščema X in X' . Skozi točki X in X' poteka natanko ena krožnica s središčem na premici AY , katere lok $\mathcal{N}$ s krajiščema X

in X' , ki leži na nasprotnem bregu premice XX' kot A , meri $2l$. Po trditvi 1 ima lik, ograjen z lokom $\mathcal{N}$ in daljicama AX in AY , vsaj tolikšno ploščino kot lik, ki ga ograjujeta daljici AX in AY ter krivulja $\mathcal{L}^*$ oziroma krivulja $\mathcal{M}^*$. Od tod zaradi simetričnosti likov sledi, da je iskana krivulja lok krožnice s središčem na premici AY in z dolžino l .

3. Kadar sta krajišči krivulje $\mathcal{K}$ na nasprotnih stranicah kvadrata, je očitno njena dolžina vsaj 1, kadar pa sta na sosednjih stranicah kvadrata, uporabimo trditev 2 in upoštevamo naslednje: Pri pogoju $m \leq n \leq (\pi - 1)m$ ima krožni izsek s ploščino $m/(m+n)$, ki pripada pravemu kotu, lok dolg vsaj 1.

4. Naj bo $\mathcal{K}$ krivulja, ki razdeli krog s premerom 1 in s središčem S na ploščinsko enaka dela, A in B pa različni točki s $\mathcal{K}$, ki ležita na obodu kroga.

Če je dolžina k krivulje $\mathcal{K}$ manjša od 1, potem za vsako točko C na krivulji $\mathcal{K}$ velja $|AC| + |CB| \leq k$, zato $\mathcal{K}$ leži v elipsi z goriščema A in B in veliko osjo k . Ker je $|AS| + |BS| = 1$, ta elipsa ne more vsebovati središča kroga. Od tod hitro sledi, da $\mathcal{K}$ ne more razpolajati ploščine kroga.



Slika 4.

Boris Lavrič

KDAJ JE LAHKO VSOTA ZAPOREDNIH NARAVNIH ŠTEVIL KVADRAT?

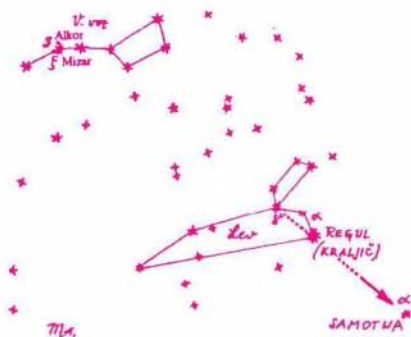
Na zgledih $4 + 5 = 3^2$, $12 + 13 = 5^2$, $24 + 25 = 7^2$, $40 + 41 = 9^2$ vidimo, da je vsota dveh zaporednih naravnih števil včasih kvadrat (naravnega števila). Poišči vse take primere. Naj bo t liho naravno število, a naravno število. Ugotovi: Če je $j = t$ ali $j = 2^{2a-1}t$, je vsota j zaporednih naravnih števil neskončnokrat kvadrat. (Npr. za $j = 3$ je $2 + 3 + 4 = 3^2$, $11 + 12 + 13 = 6^2$, $26 + 27 + 28 = 9^2$ itd.) Nadalje: Če je $j = 2^{2a}t$, vsota j zaporednih naravnih števil nikoli ni kvadrat.

Jože Grasselli

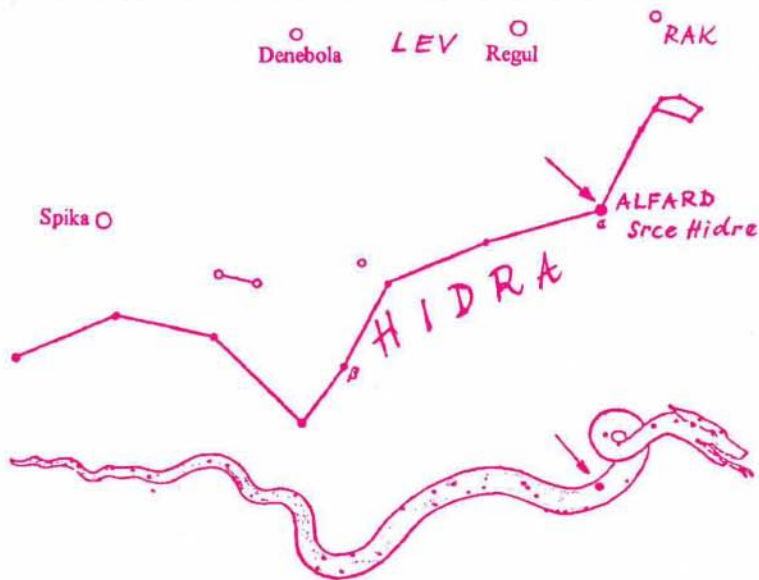
SAMOTNA

Samotna je ime najsvetlejšje zvezde v ozvezdju *Vodna kača* ali *Hidra*. To prekrasno zvezdo sem občudoval vso lansko pomlad (slika 1). Delček svojega občudovanja bi rad prenesel tudi na vas. Zato predlagam, da letošnje pomlad to zvezdo opazujete kar sami.

Ozvezdje *Vodna kača* štejemo med pomladanska ozvezdja, saj je najbolj vidno od februarja do maja. Je zelo razpotegnjeno ozvezdje. Vije se v številnih zvezdnih vijugah (serpentinah) skoraj po četrtini neba. V tem ozvezdju opazujemo veliko število šibkih zvezd.

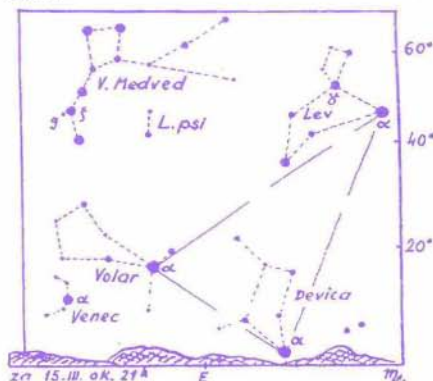


Slika 1. Takole s pomočjo ozvezdja *Lev* najlaže najdemo *Samotno*.



Slika 2. Ozvezdje *Vodna kača* je vidno spomladi nizko na južnem delu neba. Je zelo dolgo ozvezdje in sega od Malega psa do Tehtnice. Meji kar na trinajst ozvezdij. Je razmeroma zamotano ozvezdje. Za vas bi bil že uspeh, če ga izsledite. Vendar zvezde *Alfard* – *Samotne* ni prav nič težko najti. Zvezdi *Alfard* so nekdanje rekli *Srce vodne kače*. Prav z vbodljajem v srce je *Herkul* zadel *Vodni kači* smrtni udarec.

Edina svetla zvezda v tem razvlečenem ozvezdju je oranžna zvezda *Alfard* – *Samotna* (iz besedne zveze al fard al šija, kar v arabščini pomeni samotna v vijugah, osamljena v serpentinah). Ime ji res ustreza, saj je edina svetlejša zvezda na vsem pustem predelu neba, po katerem se vije Vodna kača.



Slika 3. Skica pomembnejših spomladanskih ozvezdij naj vas vodi pri opazovanju spomladanskega zvezdnega neba.

Po grški legendi je Vodna kača postavljena na nebo kot spomin na pošastno vodno kačo ali hidro, ki je strašila v nekem močvirju v Grčiji in ki jo je šele po dolgotrajnem boju premagal največji grški pravljicni junak Herkul.

Poskusite najti Samotno in jo opazovati. Ker pa so tedaj na nebu še Lev, Volar, Devica, opazujte še zvezde teh, in seveda tudi drugih ozvezdij. V pomoč vam je lahko priložena skica.

Marijan Prosén

PET RAZBOJNIKOV

Mladim Presekovim bralcem predlagam, da poskušajo s čim manj računanja ugnati naslednjo, že kar zgodovinsko nalogo.

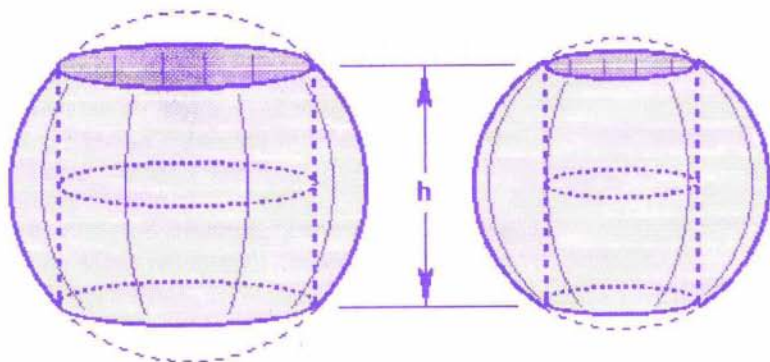
Pet razbojnikov je ukradlo mošnjo s cekini. Pri delitvi plena je najmočnejši pograbil 81 cekinov; ostali manj, toda tudi ti med seboj neenake količine. Seveda so se sprli. Mimo je prišel razbojniški poglavar in posegel v spor. Ukazal je, naj najprej tisti, ki je vzel največ, podvoji število cekinov ostalim. Ko je bilo to opravljeno, je moral isto ponoviti tisti, ki je na začetku prigrabil drugi največji znesek, nato razbojnik s tretjim največjim začetnim zneskom in tako naprej do petega razbojnika. Na koncu se je izkazalo, da ima vsak od petih razbojnikov enako število cekinov.

Koliko je bilo cekinov v mošnji in koliko je na začetku pograbil vsak?

Marija Vencelj

PREVRTANI KROGLI

Leseni krogli različnih polmerov R in r prevrtamo s svedroma ustreznih velikosti tako, da gre simetrijska os obeh vrtenin skozi središči krogel, obenem pa je višina preostalih krogelnih "prstanov" enaka. Kateri prstan ima večjo prostornino?



Vilko Domajnko

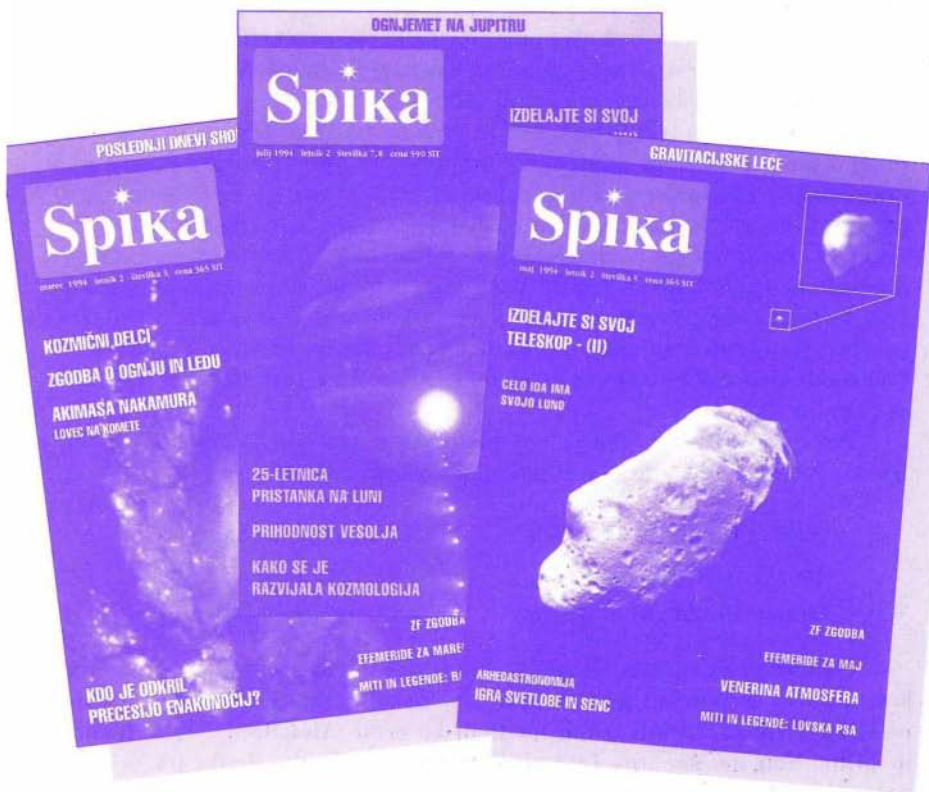
DOLOČI VLOGE

Preiskava o zločinu, ki je dolge mesece buril domišljijo meščanov, se je osredotočila okrog šestih mož, ki so v tej zgodbi odigrali vlogo žrtve, morilca, priče, policista, sodnika in rablja. Imenovali so se Johnson, McBride, Ford, Newton, Saunders in Russel. Dejstva so bila preprosta. Žrtev je umrla v hipu, vzrok smrti pa je bil strel iz neposredne bližine. Priča zločina sicer ni videla, toda prisegla je, da je slišala glasen prepir, ki mu je sledil strel. Po dolgotrajnem sojenju so morilca obsodili na smrt in ga obesili.

- Saunders je poznal tako žrtev kot morilca.
- Na sodišču je sodnik zaprosil Johnsona, da po svoje opiše streljanje.
- Russel je bil med vsemi šestimi zadnji, ki je videl McBridea živega.
- Policist je na sodišču izjavil, da je aretiral Forda blizu mesta zločina.
- Newton in Russel se nikoli nista srečala.

Kako so se pisali posamezni udeleženci te črne zgodbe?

Neža Mramor - Kosta



**VSAK MESEC NOVA, BARVNA ŠTEVILKA REVIIJE ZA LJUBITELJE ASTRONOMIJE,
KI PRINAŠA NOVICE, VSE O SONCU, PLANETIH, ZEMLJI, ZVEZDAH,
GALAKSIJAH, ASTROFIZIKI, KOZMOLOGIJI, ASTRONAVTIKI,
ASTROFOTOGRAFIJI, ARHEOASTRONOMIJI...
ZA AMATERJE MESEČNO SVEŽE EFEMERIDE IN ZVEZDNA KARTA,
O TELESKOPIH, UPORABNIH PROGRAMIH...
IN ŠE OSNOVE ZA ZAČETNIKE, RAZISKOVALNI KOTIČEK, TESTI,
ZNANSTVENA FANTASTIKA, MALI OGLASI TER NAGRADNA IGRA!**

Revijo naročajte na naslov: Spika, Poštni predal 9, 61109 Ljubljana. Četrletna naročnina (15% popusta) je 1070,00 SIT, polletna naročnina (20% popusta) je 2015,00 SIT, celoletna naročnina (25% popusta) je 3780,00 SIT.

PROBLEM TRDNIH ZAKONOV

Obstaja nekaj problemov, ki jih na začetku poskuša rešiti vsak zagnan programer. Kdo še ni poskušal poiskati prvih sto praštevil, postaviti kraljic na šahovsko desko tako, da se ne napadajo, izpisati vseh permutacij ali pa s skakačem obiskati vseh polj šahovnice?

Tudi naloga o trdnih zakonih je podobne vrste. Morda je nekoliko manj znana, čeprav jo najdemo v mnogih knjigah, ki obravnavajo programiranje. Opisana je tudi v prvem delu Wirthovega Računalniškega programiranja¹. Naloga zahteva naslednje: Dani sta skupini n fantov in n deklet. Naša naloga je, da sestavimo n (zakonskih) parov, in sicer tako, da bodo sklenjeni zakoni trdni. Vsak fant in vsako dekle namreč sestavi svoj seznam naklonjenosti do oseb nasprotnega spola. Zakoni so trdni, če ne obstajata fant F in dekle D , ki med seboj nista poročena, a je fant F bolj naklonjen dekletu D kot svoji ženi, dekle D pa ima fanta F raje od svojega moža.

Poglejmo primer: Fantje naj bodo Aleš, Igor in Miha, dekleta pa Breda, Karin in Neli. Sezname naklonjenosti so naslednji:

Aleš : Breda, Karin, Neli	Breda : Igor, Miha, Aleš
Igor : Neli, Breda, Karin	Karin : Aleš, Igor, Miha
Miha : Breda, Neli, Karin	Neli : Miha, Aleš, Igor

Pri tem je na začetku seznama oseba, ki jo imajo najrajši, z osebo na koncu pa bi se poročili le v skrajni sili. Zakoni Aleš-Karin, Igor-Breda in Miha-Neli naj bi bili trdni, medtem ko zveze Aleš-Breda, Igor-Karin in Miha-Neli ne, saj ima Igor raje Bredo kot Karin, Breda pa je bolj naklonjena Igorju kot Alešu.

Če imamo n fantov in n deklet, jih lahko med seboj poročimo na $n(n-1) \cdot \dots \cdot 1 = n!$ različnih načinov. Nekatere izbire bodo trdnejše od drugih. Ni pa takoj jasno, da pri poljubnih seznamih naklonjenosti vedno obstajajo trdni zakoni.

V nadaljevanju prispevka bomo opisali postopek, ki bo kot vhod dobil sezname naklonjenosti za fante in dekleta ter vrnil trdne zakonske zveze. Pri tem bomo tudi dokazali, da trdni zakoni vedno obstajajo.

Iskanje trdnih zvez poteka takole: Na začetku nobena oseba ni zaročena. Dokler niso vsi fantje zaročeni, ponavljamo. Izberemo nezaročenega fanta. Ta med dekleti, ki jih še ni zaprosil, zaprosi tisto, ki ji je najbolj

¹ N. Wirth, *Računalniško programiranje*, 1. del, DMFAS, Ljubljana, 1989.

naklonjen. Če dekle ni zaročeno ali pa ima prosilca raje od svojega trenutnega zaročenca, razdre morebitno zaroko in se zaroči s prosilcem. Ko so vsi fantje zaročeni, so pari sestavljeni, zato le še sklenemo zakone.

Gornji postopek bomo zapisali v obliki podprograma v pascalu. Glavni program, ki poskrbi za vnos podatkov in privlačen izpis (ter tolažbo za nesrečno, čeprav trdno poročene), pa bomo izpustili. Predno se lotimo programiranja, se moramo domeniti, kako bomo v podprogramu predstavili podatke. Kot običajno, bomo fante in dekleta predstavili s števili od 1 do n . Podprogram **TrdniZakoni**, s katerim sestavljamo pare, bo imel štiri parametre: tri vhodne in enega izhodnega, v katerem bomo vrnili sestavljene pare. Vhodni podatki so število fantov oziroma deklet n ter tabele f in d , s katerima podamo sezname naklonjenosti fantov in deklet. Tako bo $f[i][j]$ število, ki predstavlja dekle, ki je v seznamu naklonjenosti fanta i na mestu j . Podobno bo $d[i][j]$ fant, ki ga ima i -to dekle na j -tem mestu v svojem seznamu naklonjenosti. Pare bomo vrnili v tabeli z . Pri tem bo $z[i]$ fant, s katerim poročimo i -to dekle.

[illegible]

```

procedure TrdniZakoni(n: integer; vzr f,d: tabela; var z: seznam);
{ Sklene trdne zakone glede na seznam naklonjenosti f in d }
var
    nasl: seznam;           { Fant i bo naslednjič zaprosil dekle f[i][nasl[i]]. }
    stp: integer;           { število trenutno nezaročenih fantov }
    prosti: seznam;         { seznam trenutno nezaročenih fantov }
    i,j,k: integer;         { pomožni števeci }

begin
    stp := n;               { Na začetku noben fant ni zaročen. }
    for i:=1 to n do begin
        prost[i] := 1;      { Na začetku noben fant ni zaročen. }
        z[i] := 0;          { Tudi nobeno dekle ni zaročeno. }
        nasl[i] := 1;       { Fantje najprej zaprosijo dekleta, ki jih imajo najraje. }
    end;
    while stp>0 do begin    { Dokler ne zaročimo vseh fantov, ponavljamo. }
        i := prosti[stp];   { Izberemo nezaročenega fanta. }
        j := f[i][nasl[i]]; { Fant i zaprosi dekle j. }
        k := 1;             { Ali ima dekle j raje fanta i kot svojega zaročenca z[j]? }
        while (d[j][k]>i) and (d[j][k]<=z[j]) do k := k+1;
        { Opomba: lahko je z[j]=0 }
    end;
end;

```

```

if d[j][k]=1 then begin
  if z[j]<>0 then
    prost[stp] := z[j]
    { razdremo zaroko }
    { Fant, ki je bil zaročen z j-tim dekletom, }
    { ni več zaročen. }
  else
    stp := stp-1;
    z[j] := i;
    { še en srečen par več }
    { zaroka }
  end; { if }
  nasl[i] := nasl[i]+1;
  { Naslednjič bo fant i zaprosil naslednje dekle }
  { s seznama. }
end; { while stp>0 }
end; { TrdniZakoni }

```

Gornji podprogram je kar kratek in tudi programersko ne prezahteven, še vedno pa nismo utemeljili, da se izteče, da se torej zunanja zanka **while** konča in da so sklenjeni zakoni res trdni.

Prepričajmo se najprej, da podprogram ne obtiči v neskončni zanki. Ves čas postopka je število nezaročenih fantov enako številu nezaročenih deklet, saj vsako dekle in vsakega fanta zaročimo kvečjemu z eno osebo nasprotnega spola. Nobeno zaročeno dekle tudi ne postane nezaročeno, morda le zamenja zaročenca z novim fantom, ki mu je bolj naklonjena. Ker pa vsak nezaročen fant po vrsti zaprosi vsa dekleta, se vsako dekle slej ko prej zaroči. Torej se zaročijo in končno tudi poročijo vsa dekleta in vsi fantje.

Nekoliko težje se je prepričati, da so sklenjeni zakoni res trdni. Običajno za vsako pomembno zanko v programu poiščemo invarianto, ki se pri ponovitvah zanke ohranja. To je lastnost ali skupina lastnosti, ki nam pomaga, da pokažemo pravilnost delovanja. V našem primeru je invarianta zunanje zanke **while** lastnost, da so ves čas izvajanja zanke sklenjene zaroke trdne pri pogoju, da nezaročenih oseb ne upoštevamo. Na začetku to gotovo drži, saj nimamo nobenega zaročenega para. Preveriti moramo še, da se v vsaki ponovitvi zanke ta lastnost ohrani. Recimo, da v zanki spremenimo zaročene pare. Naj bosta fant F in dekle D novo zaročeni par. Ker so vsi ostali zaročeni pari ostali nespremenjeni, mora biti med morebitnima nesrečnima osebama, ki porušita trdnost zarok, bodisi fant F bodisi dekle D . Ločimo dve možnosti:

- a) Recimo, da ima fant F rajši dekle D_1 , ki je poročena s fantom F_1 , kot svojo zaročenko D . Potem je fant F nekoč že zaprosil dekle D_1 in ta ga je zavrnila. Torej je takrat imela zaročenca, ki ga je imela rajši od fanta F . Ker dekleta zamenjajo zaročence le s fanti, ki jih imajo še rajši, ima dekle D_1 tudi svojega trenutnega zaročenca F_1 rajši od fanta F . Fant F torej ne pokvari trdnosti zarok.

- b) Naj ima dekle D rajši fanta F_1 , ki je zaročen z dekletom D_1 , kot pa svojega zaročenca F . Potem fant F_1 še ni zaprosil dekleta D . Ker pa je že zaprosil dekle D_1 , saj je z njo zaročen, jo ima rajši kot dekle D . Torej tudi dekle D ne more porušiti trdnosti zarok.

Vse zaroke so torej trdne tudi po koncu zunanje zanke **while**. Potem pa so trdni tudi zakoni, ki nastanejo iz njih.

Če vas zgornji argumenti niso prepričali, lahko trdnost sklenjenih zakonov preverite tudi s spodnjim funkcijskim podprogramom. Seveda bi bilo treba tudi tokrat pokazati, da podprogram deluje pravilno, a tako pikolovski vendarle ne bomo.

```
function Preveri(n: integer; var f,d: tabela; var z: seznam): boolean;
{ Preveri, ali so zakoni, podani s tabelo z, trdni. Če so, vrne TRUE, }
{ sicer pa FALSE. }
var
  trdni: boolean;
  i,j,k,l: integer;
begin
  trdni := true;
  i := 1;      { Za vsakega fanta z[i] preverimo, ali bi zapustil svojo ženo i. }
  while trdni and (i<=n) do begin
    j := 1;    { Za vsa dekleta, ki jih ima fant z[i] rajši kot svojo ženo, }
    while trdni and (f[z[i]][j]<>i) do begin { preverimo, ali bi tudi deklet }
      l := f[z[i]][j]; { zapustilo svojega moža zaradi fanta z[i]. }
      k := 1;        { Ali ima dekle l rajši fanta z[i] kot svojega moža z[l]? }
      while (d[l][k]<>z[i]) and (d[l][k]<>z[l]) do k := k+1;
      trdni := d[l][k]=z[l];
      j := j+1;
    end;
    i := i+1;
  end;
  Preveri := trdni;
end; { Preveri }
```

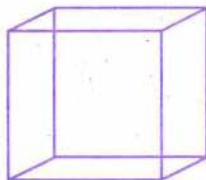
Zgodbe pa tu še ni konec. Podprogram **TrdniZakoni** lahko uporabimo tudi za drugačne naloge in ne le za sestavljanje trdnih zakonov. Tako lahko na primer z njim sestavimo pare za ples, športno ekipo, pri čemer igralci navedejo svoja priljubljena igralna mesta, hkrati pa poznamo njihovo uspešnost na posameznih položajih, opravimo razdelitev daril (ali pa domačih nalog) in še bi lahko naštevali.

Seveda pa ima reševanje z opisanim postopkom tudi svojo slabo stran. Opisani pristop namreč zahteva, da seznamov naklonjenosti potem, ko jih določimo, ne smemo več spreminjati. To pa je pri nalogah iz vsakdanjega življenja zelo redko.

Martin Juvan

KAKO SI PREDSTAVLJAMO ŠTIRIDIMENZIONALNO KOCKO?

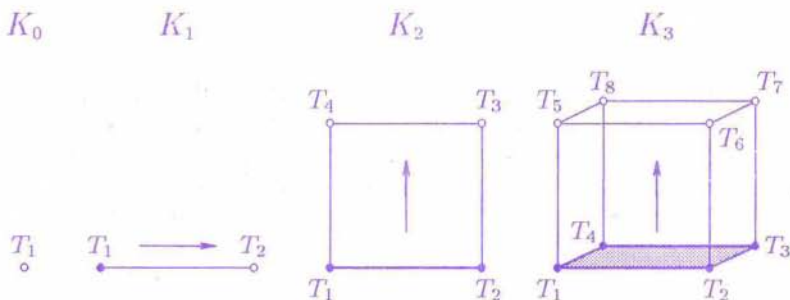
Beseda *kocka* nam običajno pomeni geometrijsko telo, ki ga narišemo takole (slika 1):



Slika 1.

S sliko smo ponazorili tridimenzionalno kocko. Kako pa izgledajo kocke nižjih dimenzij?

Začnimo s točko T_1 . Ta lahko predstavlja ničdimenzionalno kocko K_0 . Enodimenzionalno kocko K_1 dobimo, če točko T_1 premaknemo za neko razdaljo po premici. Odločimo se lahko kar za razdaljo 1. Enodimenzionalna kocka je daljica T_1T_2 . Omejujeta jo dve točki, dve ničdimenzionalni kocki. Če to daljico premaknemo v smeri pravokotno nanjo za enoto, dobimo kvadrat $T_1T_2T_3T_4$, ki nam predstavlja dvodimenzionalno kocko K_2 . Njen rob vsebuje štiri enodimenzionalne kocke (stranice). Če kvadrat premaknemo za enoto pravokotno na oba prejšnja premika, dobimo tridimenzionalno kocko $T_1T_2T_3T_4T_5T_6T_7T_8$. To pokriva šest dvodimenzionalnih kock (slika 2).

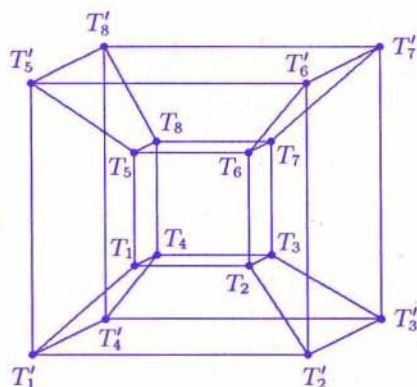


Slika 2.

Kako pa naprej? Sposobnost naše prostorske predstave nam ne dovoljuje, da bi našli še eno smer, pravokotno na prejšnje tri. Pa kaj zato!

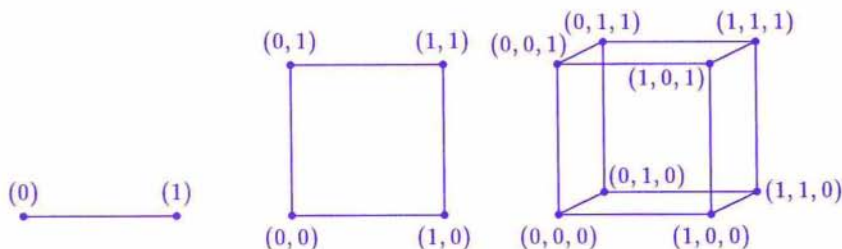
Recimo, da se to da vseeno narediti. Četrty “premik” naj na sliki izgleda tako, kot da bi kocko K_3 “napihnili” ali “skrčili”. Temu, kar dobimo, recimo štirikidimensionalna kocka K_4 (slika 3).

K_4 vsebuje osem tridimensionalnih kock (Katere so to?). K_4
Za našo prostorsko predstavo sicer $T_1T_2T_3T_4T'_1T'_2T'_3T'_4$ ne izgleda kot prava kocka. Ampak, roko na srce, tudi pri risanju tridimensionalne kocke ne rišemo samih kvadratov ($T_1T_4T_8T_5$ je paralelogram), pa nas to nič ne moti.



Slika 3.

V matematiki so včasih stvari bolj preproste, če si jih ne skušamo za vsako ceno nazorno predstavljati, ampak poiščemo ustrezeni model. Ena najbolj uporabnih iznajdb v matematiki je uvedba koordinatnega sistema ali določitev točk s števili. V enodimenzionalnem prostoru (na premici) lahko vsako točko določimo z enim številom (koordinato), če smo premico seveda ustrezno opremili s koordinatnim začetkom in enoto. Vzemimo, da začetna točka T_1 predstavlja koordinatno izhodišče, torej število 0, T_2 pa naj predstavlja število 1. Predstavitev kock K_1 , K_2 in K_3 s koordinatami prikazuje slika 4.



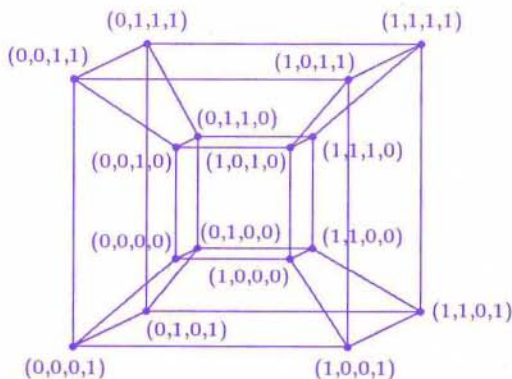
Slika 4.

Pri K_4 pa dobijo oglišča še četrto koordinato (slika 5).

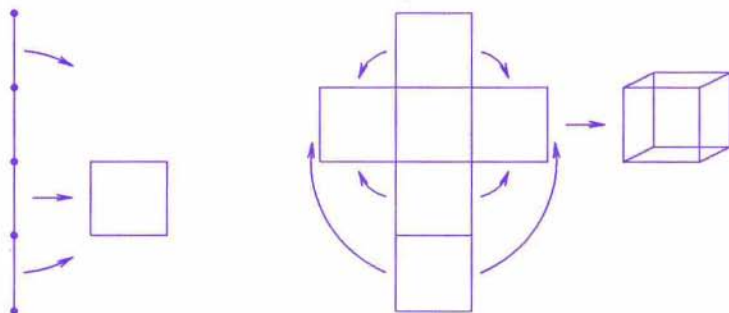
Ta model lepo pokaže, zakaj uvedba nove dimenzije število oglišč podvoji (vsem prejšnjim ogliščem dodamo novo koordinato z vrednostma 0 in 1). Število kock K_3 v kocki K_4 dobimo z naslednjim razmislekom: eno koordinato je treba fiksirati (postavimo vrednost bodisi 0 ali pa 1). Ker smo to naredili s katerokoli od štirih koordinat, je vseh možnosti skupno $4 \cdot 2 = 8$. Če je na primer četrta koordinata 0, na ostalih mestih pa upoštevamo vse možne

razvrstitve ničel in enic, dobimo kar prvotno kocko K_3 (notranjo na sliki).

Spomnimo se še, kako naredimo mehanski model kocke iz kock nižje dimenzije. Začnimo z enodimenzionalno kocko - daljico, ki jo lahko predstavimo s palico. Iz štirih takih palic lahko oblikujemo kvadrat. Za tridimenzionalno kocko potrebujemo šest kvadratov (mreža kocke). Zlepiti moramo ustrezne robove (slika 6).

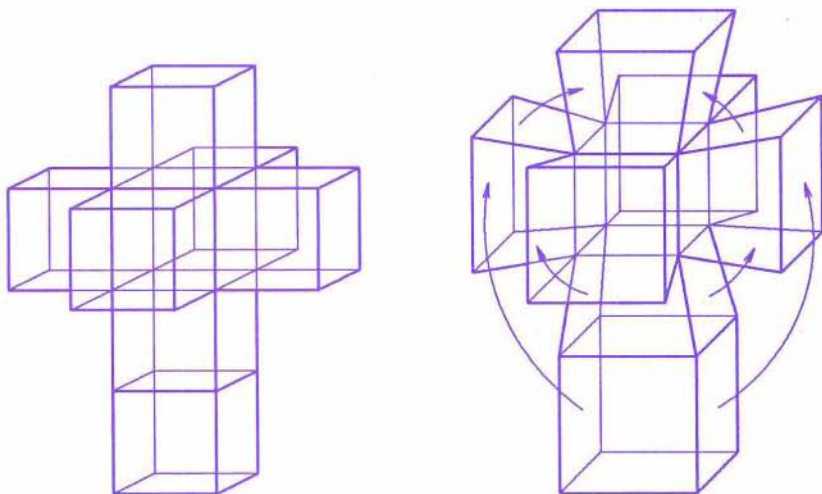


Slika 5.



Slika 6.

Štiridimenzionalno kocko bi bilo po analogiji mogoče oblikovati iz osmih tridimenzionalnih kock, če zlepimo ustrezne mejne ploskve. Analogijo ponazarja slika 7.



Slika 7.

Zaključimo s sliko slikarja Salvadora Dalija, ki je upodobil Kristusa na križu, ki predstavlja mrežo štiridimenzionalne kocke. S četrto dimenzijo je verjetno skušal doseči bolj nezemeljski učinek. Slika je na notranji strani ovitka, zadaj.

Olga Arnuš

MALO IN VELIKO PREPROSTO ŠTEVILO

Naravno število bomo imenovali *preprosto*, če v njegovem razcepu na prafaktorje nastopata le praštevili 2 in 3. Tako so števila $1 = 2^0 \cdot 3^0$, $8 = 2^3$ in $24 = 2^3 \cdot 3$ preprosta, število 15 pa ne, saj v njegovem razcepu nastopa tudi praštevilo 5. Zastavimo si dve nalogi, lahko in nekoliko težjo:

- Poišči najmanjše preprosto število, ki je večje od 1995.
- Poišči po velikosti 1995. preprosto število.

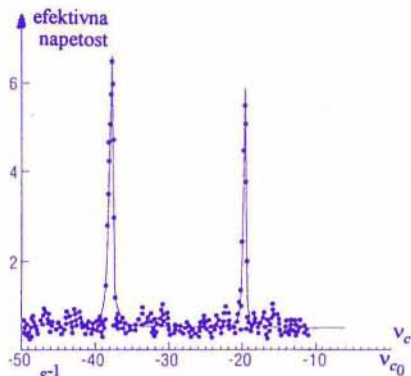
Prvo nalogo se da rešiti samo s svinčnikom in papirjem, medtem ko se pri reševanju druge uporabi računalnika skoraj ni mogoče izogniti.

Martin Juvan

NATANČNO MERJENJE S PASTJO

S kratkim zgledom pokažimo presentljivo natančnost, ki jo dosežejo pri merjenju z antiprotoni v pasti. Na izhodu ojačevalnika so opazovali efektivno napetost med elektrodama pasti v odvisnosti od frekvence zunanje izmenične napetosti v bližini ciklotronske frekvence (slika 1). Dva vrhova

Slika 1. Efektivna napetost na izhodu ojačevalnika pri antiprotonski pasti v odvisnosti od frekvence zunanje izmenične napetosti. Poskus je naredila raziskovalna skupina Geralda Gabrielseja leta 1990. Po Gabrielsejevem mnenju je ta poskus primeren tudi za šolsko fiziko: *Relativistic mass increase at low speeds*, American Journal of Physics 63 (1995) 568.



sta pokazala, da sta v pasti dva antiprotona z različnimi lastnostmi. Za ciklotronsko frekvenco smo izpeljali enačbo $\nu_{c0} = e_0 B / 2\pi m$. Enačba velja, če smemo antiprotone obravnavati v okviru Newtonove mehanike. Pri zelo natančnem merjenju moramo uporabiti mehaniko posebne teorije relativnosti. Ne da bi to posebej utemeljili, povejmo samo, da marsikatero staro enačbo prevedemo v novo, če maso m nadomestimo z $m/(1 - v^2/c^2)^{1/2}$. Pri tem je v hitrost delca in c hitrost svetlobe. To velja tudi v našem primeru, tako da je ciklotronska frekvenca :

$$\nu_c = (e_0 B / 2\pi m)(1 - v^2/c^2)^{1/2} = \nu_{c0}(1 - \frac{1}{2}v^2/c^2) = \nu_{c0}(1 - W_k/W_0).$$

Najprej smo uporabili kot približek samo prva člena binomske formule $(1 - x)^n = 1 - nx + \dots$ in nato vpeljali kinetično energijo v Newtonovi mehaniki $W_k = \frac{1}{2}mv^2$ in lastno energijo $W_0 = mc^2$. ν_{c0} je pri tem ciklotronska frekvenca za antiproton s kinetično energijo 0, ki meri v našem primeru 89258426 s^{-1} in ji ustreza ničla na abscisni osi v diagramu. Iz enačbe za ν_{c0} izračunamo, da je gostota magnetnega polja 5,85 T. Z diagrama razberemo, da je prvemu antiprotonu ustrezala za $19,6 \text{ s}^{-1}$ nižja frekvenca in drugemu za $37,9 \text{ s}^{-1}$ nižja frekvenca. Iz enačbe

$$W_k = mc^2 \frac{\nu_{c0} - \nu_c}{\nu_{c0}}$$

dobimo za kinetično energijo prvega antiprotona 206 eV in za drugega 398 eV, če upoštevamo, da je lastna energija protona ali antiprotona $938 \cdot 10^6$ eV. Antiprotona imata zelo majhno kinetično energijo, pa je vseeno treba upoštevati posebno teorijo relativnosti. To bi težko verjeli, če ne bi naredili računa. Vzrok za to tiči v zelo natančnem merjenju ciklotronske frekvence.

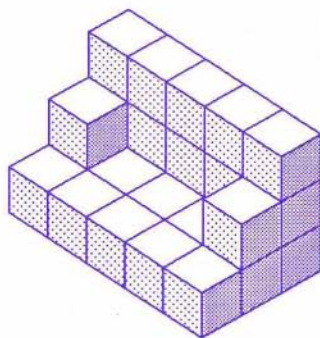
Janez Strnad

NEKAJ NALOG ZA MLADE VEGOVCE

6. razred

1. Koliko časa bi šteli od 1 do milijarde, če preštejemo povprečno 125 števil v 1 minuti in bi šteli neprekinjeno. Pokaži, da bi potrebovali več časa, kot je povprečna starost šestošolca.
2. Na čim krajši način pokaži, da je vsota ulomkov $\frac{1}{16}, \frac{1}{17}, \frac{1}{18}, \frac{1}{19}, \frac{1}{20}$ večja od ulomka $\frac{1}{4}$.

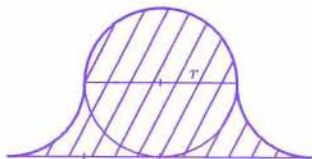
3. a) Koliko kock z robom 1 dm je zloženih v telesu, ki ga vidiš na sliki? Izračunaj prostornino telesa in jo izrazi v m^3 .



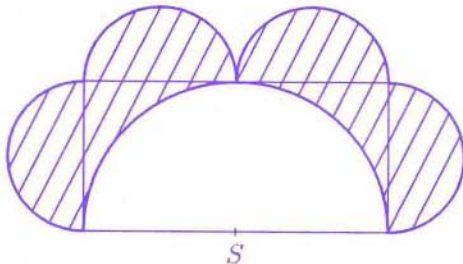
- b) Ali lahko iz vseh kock sestaviš kocko, in če jo, koliko meri njen rob?
 - c) Izračunaj površino danega telesa in površino kocke, sestavljene iz manjših kock. Izračunaj razliko obeh površin.
4. V pravokotnem trikotniku merita ostru kota 2α in 3α .
 - Koliko stopinj merita ostru kota?
 - Kolikšen del pravega kota je 2α in kolikšen del 3α ? Količnika izrazi v odstotkih.
 5. a) Namesto črk a in b zapiši taki števki, da bo $4a1b$ deljivo z 12.
b) Produkt šestih zaporednih naravnih števil je $66a28b$. Poišči neznane števke, označene z a in b .

7. razred

1. V zvezi $(3 \cdot * \cdot 4)^2 = 492 * 04$ nadomesti zvezdice s takimi števki, da bo to enakost.
2. Izrazi obseg in ploščino dane figure z r .



3. Pravokotnemu igrišču s stranicama a in b so stranico a skrajšali za $\frac{1}{5}$ njene dolžine. Kolikšna mora biti druga stranica, da se ploščina igrišča ne spremeni? Za koliko odstotkov moramo podaljšati stranico b ?
4. Pokaži, da je izraz $(1000^{1000} - 1)$ deljiv s 27.
5. Obseg figure, ki jo vidiš na sliki je enak 30π cm. Izračunaj ploščino figure.



8. razred

1. Če v nekem ulomku prištejemo števcu in imenovalcu imenovalcu, dobimo ulomek, ki je za $\frac{1}{9}$ večji od danega ulomka. Poišči prvotni ulomek.
2. Pokaži, da je izraz $(4x + 1)^2 + 15$ deljiv z 8.
3. Dana je enačba $\frac{1}{4}(7x + 3) : \frac{2}{3} = m : 2$.
 - a) Reši enačbo, če je neznanka x in m znano število.
 - b) Določi vrednost m , če je $x = \frac{1}{7}$.
 - c) Za katere cele vrednosti količine m je $0 < x < 1$?
4. Pokaži, da je produkt treh zaporednih naravnih števil, povečan za srednje teh števil, enak kubu srednjega števila. (Nasvet: srednje število označi z n).
5. Izračunaj ploščino trikotnika, ki ga omejujeta koordinatni osi in premica $3x + 4y - 12 = 0$. Kolikšna je razdalja premice od koordinatnega začetka?

PRVA ZNANA ASTRONOMKA

Po nam znanih zgodovinskih podatkih je bila prva znanstvenica - astronomka - Grkinja *Hipatija*, ki je živel v Aleksandriji od leta 370 do leta 415. Bila je hči aleksandrijskega matematika Teona, znanega po tem, da je napisal delo o astrolabu (astronomska opazovalna naprava), komentar k najpomembnejši knjigi antike *Almagestu*, v kateri je znameniti astronom in geograf Ptolemej (2. stol.) zagovarjal geocentrični sistem, in s pojasnili in dopolnili na novo izdal Evklidova Načela (geometrijo).

Hipatija je bila očarljiva ženska in zelo dobra guvernica. Predavala je astronomijo, matematiko in filozofijo v aleksandrijski knjižnici. Ljudje so zelo cenili njeno mnenje in nasvete ne samo v znanosti in literaturi, ampak tudi v vsakodnevnem življenju. Razen z astronomijo, matematiko in filozofijo se je Hipatija ukvarjala tudi še z medicino.

Napisala je komentar k Diofantovi Aritmetiki in komentar k Stožčastim presekom Apolona Pergskega. Njenemu peresu pripisujejo še druga dela iz astronomije in matematike, ki pa se na žalost niso ohranila.

Hipatija je imela veliko znancev in prijateljev med kristjani, sama pa je ostala poganka - helenka, verna tradicijam svojih predhodnikov. Bila je žrtev verskega fanatizma kristjanov.

Ko se je nekoč vračala s predavanj domov, jo je napadla naščuvana množica kristjanov, jo odvela k cerkvi in jo s kamenjanjem ubila. Zatem so njeno zmaličeno truplo zažgali na grmadi.

Znan je tale zapis o Hipatiji (skrajšano in prirejeno): "Bila je ljubljenka številnih študentov. Zelo radi so poslušali njena predavanja. Vedno so jo navdušeno pozdravljali ob vhodu v predavalnico. To pa ni bilo

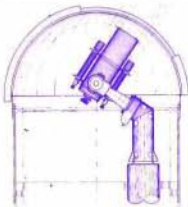
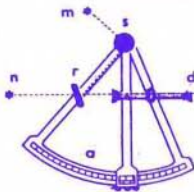
všeč menihom. Niso opustili nobene priložnosti, da je ne bi dražili. Nagajali so ji tudi tedaj, ko je odhajala iz knjižnice. Večkrat je lahko slišala nesramne pripombe menihov, da hodijo študentje na njena predavanja zato, da bi videli lepo predavateljico, ne pa, da bi se od nje kaj naučili.

Komaj je Hipatija tistega dne prišla iz knjižnice in sedla v kočijo, že so se zaslišali kriki. Neko je odtrgal vrata kočije. Težka roka je zgrabila rame lepe Helenke in jo vrgla na tla. Tolpa razjarjenih ljudi se je vrgla na Hipatijo. Vlekli so jo za lase, trgali z nje obleko, končno pa so jo s kamenji ubili. To je bilo leta 415 v Aleksandriji. Tako so verski fanatiki obračunavali z nasprotniki."

Marijan Prosen

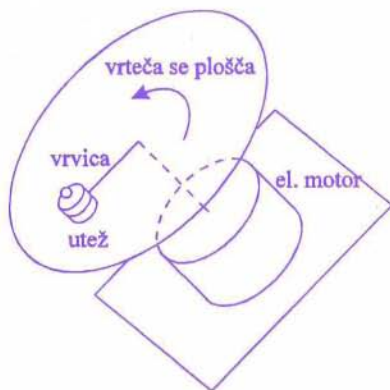


“ASTRO” KRIŽANKA

				AVTOR MARKO BOKALIČ	VELIKA PEVSKA SKUPINA	ROMARSKO MESTO V SRED. ITALIJ	GIBANJE PO ZRAKU	UMETNIŠKI OKRASEK	ŽVEČIL MIŠIČ
				IZDAJANJE KNJIG					
				MEDCELIN. MORJE					
				▶					
		LADKO KOROŠEC	MOŠKI SUKNJIC Z DOLGIMI SKRICI	BRIT. IGRALEC (KEVIN)					
				PTIČ MOČVIRNIK					
IT. PIŠEC TRAGEDIJ (VITTORIO)								ROBINJA	
SONČEV SESTAV								PRIČAKOVANJE REŠITVE	
VSE POTREBNO ZA PREŽIVETJE						VSOTA			
SPLIT		REKA IN DEPARTMA V FRANCIJI				SLOVAŠKA REKA			
		HRV. OTOK							
ANTILOPA S SABLIJAST. ROGOVI					◀	OTROŠKO VOZILO, KI SE POGANJA Z ENO NOGO	NEZNANKA V ENAČBI	NIKO KURET	
								SOSEDNJA DRŽAVA (ORIG.)	
PRIBOR Z REZILOM			TABORIŠČNI PAZNIK	ZMANJ-SANJE, PADEK	NOTRANJ. VISOKA PLANOTA	KRČEVIT JOK ALI JEZA			
ČARLI NOVAK		MADŽ. POLITIK (BELA)				KRANJ		LATINSKI VEZNIK	SPRIME
		NORV. PISAT. (JONAS)							NEKD. ? POLITI (STANI)
NEMŠKA SKALNA ZELIKA						VRTALNI PRIPOMOČEK			
NARKOTIK ZA KRATKOTRAJNO OMAMO						PLITVA VDOLBINA V SKALOVJU	KORALNI OTOK		
							DEDALOV SIN		
				▶				MESTO V ANGLIJI	
								KIT. UTEŽNA MERA	
						IZPRAZNJ. MESTO CERKVENEGA FUNKCIONARJA			
						S SLADKOR. PREPOJEN POMARANČ. OLUPEK			

VIOLINA IN LOK

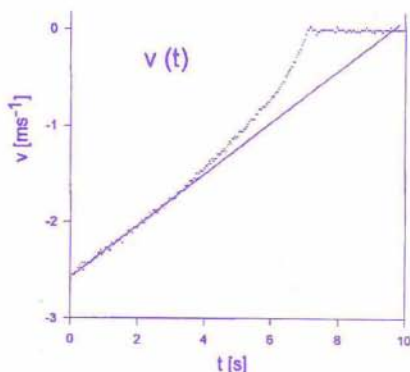
Violino najpogosteje igrajo z lokom, ki drsi po strunah. Ni lahko razumeti, zakaj pri tem strune nihajo. Izkušnja uči, da nihanje hitro izzveni, če se strune le dotaknemo. Lok pa s precejšnjo silo pritiska na struno in ji s tem celo pomaga nihati. Pojav bomo razložili na preprostejšem primeru nihala, ki ga vzbujamo s trenjem. Poskus naredimo z vrtečo se kovinsko ploščo in nihalom (slika 1). Nagnjena plošča s polmerom dveh decimetrov naj se enakomerno vrti. To najlažje dosežemo tako, da jo pritrdimo na manjši elektromotor. Nihalo naredimo iz 100 gramske uteži, ki jo vpnemo v pentljo vrvice. Dobro očiščeno ploščo natremo s kolofonijo, prav tako drsno ploskev nihala. Ko na nagnjeno ploščo, ki se vrti s primerno kotno hitrostjo, položimo nihalo, to začne nihati z vse večjo amplitudo. Vrteča plošča torej vzbuja nihalo prav tako kot lok, natrt s kolofonijo, vzbuja strune. Pomembno je, da smo ploščo natrli s kolofonijo. Če poskus ponovimo s ploščo, ki je natrta z voskom, vzbujanja ne opazimo.



Slika 1. Torno nihalo. Med vrtečo se nagnjeno ploščo in nihalom je plast kolofonije.

Pozorno opazovanje nihala daje slutiti, kaj se pri poskusu dogaja. Ko se nihalo giblje v isto smer kot podlaga, je medsebojna hitrost nihala in plošče zelo majhna. Takrat se nihalo za hip prilepi na ploščo in ta ga nekaj časa vleče s sabo. Ko pa se nihalo giblje v nasprotni smeri, je trenje med nihalom in ploščo manj izrazito. Res podrobnejša opazovanja potrjujejo, da je koeficient trenja med podlagama, ki sta namazani s kolofonijo, zelo odvisen od njune medsebojne hitrosti. Tako nihalo poganja izmenična sila, ki je takrat, ko se nihalo giblje v isto smer kot podlaga, večja kot takrat, ko se giblje v nasprotno smer. Velikost sile se spreminja torej skladno z gibanjem nihala, zato je frekvenca nihanja zelo blizu lastni frekvenci nihala. Na začetku, ko nihalo miruje, zadošča najmanjša motnja, da se nihalo začne vzbujati. Pri violini za to motnjo poskrbi kar lok.

Naredili smo poskus, pri katerem smo izmerili koeficient trenja tako, da smo zaustavljali vrteče se masivno kolo. Kolo smo povezali z merilnikom obodne hitrosti, ki smo ga povezali z osciloskopom. Tako smo lahko opazovali pojemanje obodne hitrosti s časom, ko smo s koščkom kofonije pritiskali s konstantno silo na obod kolesa (slika 2). Pri konstantnem koeficientu trenja bi bilo pojemanje kotne hitrosti enakomerno, vsako sekundo bi se obodna hitrost kolesa zmanjšala za enako vrednost. Na grafu, kjer bi risali obodno hitrost v odvisno od časa, bi opazili premico.



Slika 2. Obodna hitrost kot funkcija časa pri zaviralnem poskusu. Pri konstantni zaviralni sili bi izmerki ležali na vrisani premici.

Newtonov zakon, prirejen za vrtenje tega telesa okrog stalne osi, se glasi:

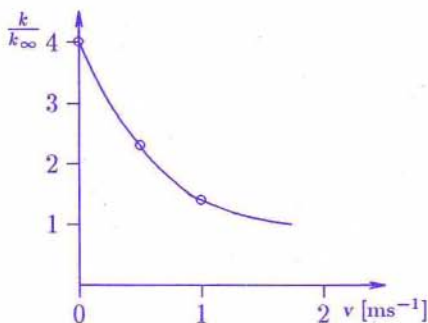
$$M = J\alpha,$$

kjer je M navor sile, ki deluje na telo, J vztrajnostni moment telesa okrog dane osi in α *kotni pospešek* telesa. Pri zaustavljanju s trenjem na obodu je navor kar sorazmeren s silo trenja, kotni pospešek pa sorazmeren obodnemu pospešku telesa. Sila trenja in obodni pospešek sta si torej sorazmerna. Če poskrbimo, da je sila, s katero pritiskamo na obod kolesa ves čas enaka, je tudi koeficient trenja sorazmeren s pospeškom. Pri našem poskusu nas zanima le razmerje med koeficientoma trenja pri dani hitrosti in pri velikih hitrostih, zato ni potrebno vedeti sorazmernostnega faktorja med koeficientom trenja in obodnim pospeškom.

Pri poskusu pa smo opazili, da se je obodna hitrost kolesa spremenjala enakomerno le, če je bila večja od 2 ms^{-1} . Iz tega sklepamo, da je koeficient trenja na tem območju neodvisen od hitrosti; označimo ga s k_{∞} . Pod enim metrom v sekundi pa se hitrost manjša tem izdatneje, čim

manjša je. Slika 3 kaže razmerje $k(v)/k_\infty$, ki smo ga dobili na podlagi izmerkov s slike 2. Vidimo, da je koeficient trenja pri hitrostih blizu nič kar štirikrat večji od tistega pri velikih hitrostih. Za oceno smo izmerili koeficient trenja pri majhni hitrosti in dobili $k(0) \approx 0,5$, kar pomeni, da je $k_\infty \approx 0,1$.

Sedaj razumemo, zakaj se amplituda pri tornem nihalu veča. Ko se nihalo giblje v smeri plošče, je sila trenja večja kot takrat, ko se giblje v nasprotni smeri. To spominja na poganjanje gugalnice, ki jo potiskamo le v eni smeri, ko se vrača, pa ne. Ko doseže amplituda določeno velikost, se nihalo za hip celo prilepi na ploščo. Od takrat naprej se amplituda ne spreminja več. Ko hitrost plošče nekoliko povečamo, se poveča tudi končna amplituda nihala. Pri igranju violine je prav tako – večja hitrost loka pomeni tudi večjo amplitudo nihanja strune in s tem glasnejši zvok. Obravnava gibanja violinske strune, ki jo vzbujamo z lokom, je zelo zapletena. Torno nihalo pa nam le odgovori na osnovno vprašanje, ki smo si ga zastavili na začetku.



Slika 3. Razmerje med koeficientom trenja pri hitrosti v in tistim pri velikih hitrostih, ki smo ga izluščili iz izmerkov na sliki 2.

Andrej Likar

FIZIKALNA OLIMPIADA Z NETEKMOVALNE PLATI

Matura se je vendarle končala. Misel na "prihajajoči fizikalni" oddih se je zato s tako lahkoto vselila v naše glave. Avstralija... za nas le sanjska dežela! A postopoma so sanje postajale realnost, ko smo se prvega v juliju podali na prvi polet. Mimogrede - vseh skupaj je bilo kar sedem in postali smo pravi "stari letalski mački".

Začelo se je torej z dvema dnevoma poletov. Za to kaže iskati razloge v razmeroma dolgih postankih na letališčih. Zapolnili smo jih s pomočjo taroka ali pa, vsaj v Jakarti, z "učenjem indonezijsčine". Na to so nas napeljali napisi na trgovinah in na vratih, ki vodijo v "prostore olajšanja", po indonezijsko imenovane *kamar kecil*. Po dveh pretežno prebedenih

nočeh smo se tako znašli v Sydneyu. Dan se je tam komaj začel, a svoje oči smo le stežka držali odprte. Pa bi bil pravi greh imeti zaprte oči, ko pa imaš edinstveno priložnost ogledovati si Sydney.

Naslednji dan smo se povzpeli tudi na 325 m visok *Sydney Tower* in dodobra posebej prečesali tisti del Sydneya v bližini našega hotela *Koala* na Oxford Streetu.

Dan za tem nas je že čakal polet v Canberro, prizorišče 26. fizikalne olimpiade. Tam je bila zima že bolj podobna evropskim kontinentalnim. Temperature so se gibale okrog temperature, pri kateri voda prehaja iz trdnega v kapljevinoasto agregatno stanje. A samemu pojavu nismo bili priča, saj v Canberri ni bilo snega.

Po naselitvi v študentskem naselju so skrb za nas prevzeli organizatorji. Še istega dne zvečer smo poslušali predavanje prof. Malcolma Longaira o merjenju osnovnih fizikalnih konstant. Biološko uro smo do tedaj nekako le uspeli premakniti za osem ur. O njeni natančnosti bi bilo seveda še mogoče razpravljati, nikakor pa ji ne pritakniti imena "švicarska ura". Olimpiada se je formalno začela šele naslednji dan, in sicer z mimohodom zastav in prižiganjem olimpijskega ognja. V tem primeru se je imenoval *Flame of Science*, pač stroki primerno.

Malokatera dejavnost ima, kar se tiče neenostavnosti, tako zelo podobni dve plati - fizikalno in praktično - kot ravno metanje bumerangov. Drugo plat smo na lastni koži okušali kar precej časa, potem ko smo si ogledali spretnosti avstralskega prvaka v metanju tega ZNLP (znanega nedojemljivega letečega predmeta). Prvi plati pa se kaže izogibati kar najdlje časa...

Naslednji dan je bilo zaželeno, da pokažemo prav to plat naših sposobnosti, čez dva dni pa mešanico obeh. Tako smo vsega skupaj deset ur brskali po naših glavah in jih poskušali prepričati, da bi dojele nihanje boje, potovanje zvoka po morju in rdeči pomik. Pomoč rok pa naj bi jim zagotovila, da bi nekako ugotovile lastnosti laserske svetlobe in padanja valjev v viskozni kapljevini.

Po vsem tem pa so se naše zimske(?) počitnice, pač brez snega, vsemu navkljub le začele. Ob ogledovanju znamenitosti nam je Canberra počasi začela postajati vsaj nekoliko domača - še posebej pa, ko smo gostovali v slovenskem klubu, kamor nas je povabilo osebje naše ambasade v Avstraliji. Seveda smo se srečali tudi s kengurujem. Kako prijazen zna biti ta vrečar v človeški družbi, smo se prepričali na neki kmetiji, ki se ukvarja s turizmom. Nekoliko manj družabne predstavnike vrečarjev je bilo mogoče opaziti v naravnem rezervatu *Tidbinbilla*.

KAJ KDO POUČUJE?

Na neki srednji šoli v Ljubljani poučujejo ekonomijo, slovenščino, francoščino, zgodovino, latinščino in matematiko tile učitelji: gospa Pleterski, gospa Kopriva, gospa Prijatelj, gospod Godnič, gospod Merhar in gospod Novak, vendar ne nujno v tem vrstnem redu.

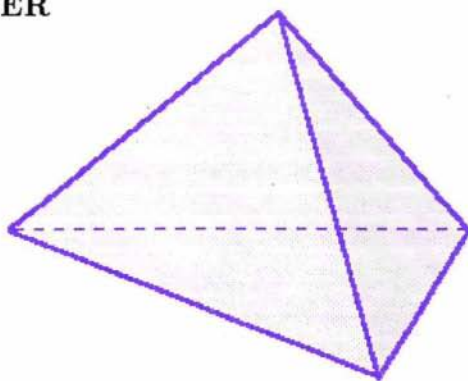
- Osebi, ki učita matematiko in latinščino, sta iste starosti in sta si v študentskih letih delili sobo v študentskem domu.
- Merhar je nekaj let starejši od Novaka, vendar še ne poučuje tako dolgo kot oseba, ki uči ekonomijo.
- Pleterskijeva in Koprivova sta obiskovali isto srednjo šolo, ostali pa so vsi hodili v srednjo šolo drugam.
- Novak je oče osebe, ki uči francoščino.
- Oseba, ki uči slovenščino, je najstarejša v šesterici tako po letih kot po učiteljskem stažu. Pravzaprav sta bili osebi, ki učita matematiko in zgodovino, njena učenca.
- Gospa Pleterski je starejša od osebe, ki uči latinščino.

Kdo poučuje kateri predmet?

Neža Mramor - Kosta

RAZREŽI TETRAEDER

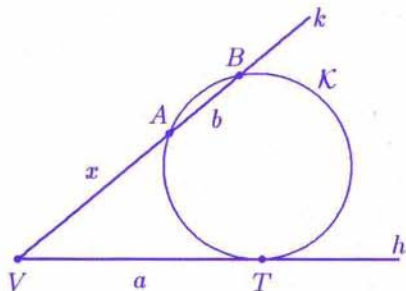
Na koliko različnih načinov je mogoče prerezati pravilni tetraeder z ravnino na dva skladna poliedra?



Vilko Domajnko

NAJVEČJI ZORNI KOT - Rešitev s str. 158

Nalogo postavimo najprej v geometrijski okvir. Dan je kot z vrhom V in krakoma h in k . Na kraku h leži točka T za a oddaljena od V , na k pa daljica AB dolžine b . Poiskati moramo oddaljenost x tistega krajišča daljice AB od V , ki leži bližje V , če vemo, da je AB vidna iz T pod največjim možnim kotom (slika 1).



Slika 1.

Rešitev: Pod enakim kotom kot iz T je daljica AB vidna iz vseh točk tistega krožnega loka nad daljico AB , ki poteka skozi T . Velja še: Iz točk, ki pripadajo različnim krožnim lokom nad daljico AB (na istem bregu), vidimo daljico AB pod različnimi zornimi koti.

Med krožnimi loki s krajiščema A in B , ki imajo skupno točko s krakom h , moramo torej najti tistega, ki razpenja nad tetivo AB največji obodni kot.

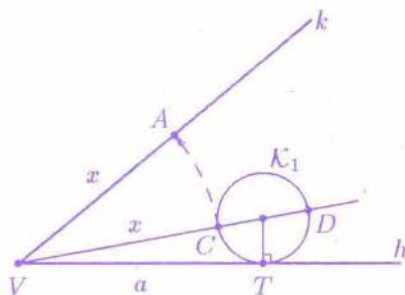
Če je ta kot oster, je rešitev na dlani: Dani tetivi pripada pri manjših krožnicah večji središčni in s tem večji obodni kot. Torej iščemo najmanjšo krožnico, ki poteka skozi A in B in ima s krakom h skupno točko. Očitno je to krožnica, ki se kraka h dotika. Do enakega sklepa pridemo, če je največji zorni kot top ali pravi, le da je tedaj krožnica, ki se kraka h dotika, največja možna krožnica.

Po tej ugotovitvi lahko zvezo med a , b in x preberemo s slike 1. Na dva načina (enkrat preko sekante k , drugič preko tangente h) zapišemo potenco točke V glede na krožnico $\mathcal{K}$:

$$x(x + b) = a^2.$$

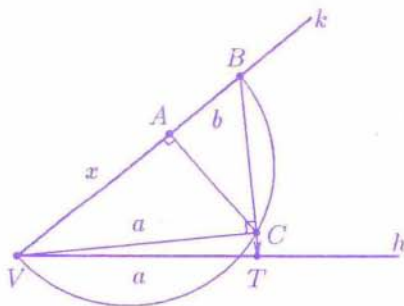
Iskani x je pozitiven rešitev te kvadratne enačbe. Zanimivo je, da v koeficientih enačbe nastopata le a in b . Torej je razdalja x , s katero bomo pomagali Jaku, odvisna le od širine napisa in od oddaljenosti vhoda trgovine od vogala trga, prav nič pa ne od velikosti kota, ki ga oklepata pločnik in zid.

Konstrukcijo razdalje x vidimo na sliki 2: $\overline{CD} = b$ je premer krožnice $\mathcal{K}_1$, $\overline{VT} = a$ je tangenta na $\mathcal{K}_1$, $\overline{VC} = x$, pri čemer poteka nosilka daljice VC skozi središče krožnice. Pravilnost konstrukcije potrjuje dvojni izračun potence točke V glede na krožnico $\mathcal{K}_1$.



Slika 2.

Nekoliko lažja je konstrukcija, če poznamo x in b ter želimo narisati a . Tedaj si npr. lahko pomagamo z Evklidovim izrekom za pravokotni trikotnik (slika 3).



Slika 3.

15. DRŽAVNO TEKMOVANJE IZ FIZIKE ZA OSNOVNOŠOLCE – Rešitve s str. 182

7. razred

Rešitve teoretičnih nalog:

Naloga 1:

1. Posoda je široka ravno za en premer krogel. Zato krogle pritiskajo samo na ožji stranici posode. Iz simetrije naloge je razvidno, da pri razstavljanju sil lahko uporabimo povezave, ki veljajo za enakostranični trikotnik. Sile, ki delujejo na stene posode, smo označili z indeksom s in številko krogel, ki povzroča silo, sile med krogli z indeksom k in številko ustrezne krogel. Krogle smo oštevilčili od zgoraj navzdol.

Pri določanju sil smo upoštevali, da krogle mirujejo in so zato sile v ravnovesju. Tako so sile po velikosti enake (glej sliko 2):

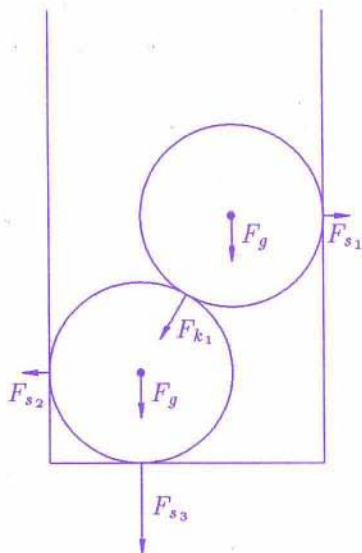
$$F_g = 1 \text{ N};$$

$$F_{s_1} = \frac{1}{\sqrt{3}} \text{ N};$$

$$F_{k_1} = \frac{2}{\sqrt{3}} \text{ N};$$

$$F_{s_2} = F_{s_1} = \frac{1}{\sqrt{3}} \text{ N};$$

$$F_{s_3} = 2F_g = 2 \text{ N}.$$



Slika 1.

2. Sile prve krogel na stene in drugo kroglo se ne spremenijo:

$$F_g = 1 \text{ N};$$

$$F_{s_1} = \frac{1}{\sqrt{3}} \text{ N};$$

$$F_{k_1} = \frac{2}{\sqrt{3}} \text{ N}.$$

Sila druge krogle na tretjo bo dvakrat večja od sile prve na drugo, ker na spodnjo kroglo pritiskata dve krogli:

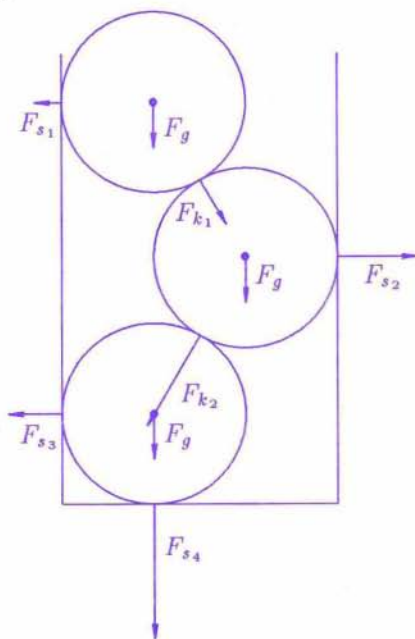
$$F_{k_2} = 2F_{k_1} = 2 \frac{2}{\sqrt{3}} \text{ N}.$$

Spodnja krogla deluje na stene v dveh smereh – navpični, kjer se na podlago prenese teža vseh treh krogel,

$$F_{s_4} = 3F_g = 3 \text{ N},$$

in vodoravni, kjer se na steno prenese komponenta sile F_{k_2} , ki je pa dvakrat večja kot sila F_{k_1} v prvem delu naloge

$$F_{s_3} = 2F_{s_1} = \frac{2}{\sqrt{3}} \text{ N}.$$



Slika 2.

Vsota vseh sil v vodoravni smeri mora biti prav tako enaka 0, zato

$$F_{s_2} = F_{s_1} + F_{s_3} = \sqrt{3} \text{ N}.$$

Naloga 2:

Sila vzgona na posamezno orodje z balonom je večja kot teža orodja. Zato orodji ne potoneta. Ker se z globino tlak povečuje, se prostornina balonov zmanjšuje. Potapljač lahko spusti orodje na tisti globini, kjer je sila vzgona manjša kot sila teže. Teži in prostornini orodij označimo s F_1 in V_1 ter F_2 in V_2 , prostornini balonov pa z V_r za rdeč balon in V_m za modrega. Specifično težo vode označimo s σ_v . Težo zraka v balonih zanemarimo.

1. rdeči balon:

$$F_1 - \sigma_v V_1 = \sigma_v V_r$$

$$V_r = \frac{F_1 - \sigma_v V_1}{\sigma_v} = \frac{50 \text{ N} - 10 \text{ N}}{10 \frac{\text{N}}{\text{dm}^3}} = 2.0 \text{ dm}^3.$$

Iz tabele preberemo, da ima rdeč balon prostornino 2 dm^3 pri tlaku 1.5 bara, kar se zgodi v globini 5 m. Potapljač lahko spusti prvo orodje na globini 5 m.

2. modri balon:

$$F_2 - \sigma_v V_2 = \sigma_v V_m$$

$$V_m = \frac{F_2 - \sigma_v V_2}{\sigma_v} = \frac{60 \text{ N} - 20 \text{ N}}{10 \frac{\text{N}}{\text{dm}^3}} = 4.0 \text{ dm}^3.$$

Iz tabele preberemo, da ima modri balon prostornino 4 dm^3 pri tlaku 1.3 bara, kar se zgodi v globini 3 m. Potapljač lahko spusti drugo orodje na globini 3 m.

Naloga 3:

Ko smo v mešanico začeli dovajati toploto, se je najprej talil led. V tem času se temperatura mešanice ni spreminjala. Iz grafa ugotovimo, da je to trajalo 1 minuto. V tem času je grelec dovedel vodi toploto Q_1 :

$$Q_1 = 1000 \frac{\text{J}}{\text{s}} \times 60 \text{ s} = 60 \text{ kJ}.$$

V učbeniku za 7. razred poiščemo podatek za talilno toploto vode, $q_t = 336 \text{ kJ/kg}$, in izračunamo maso ledu (m_l):

$$m_l = \frac{Q_1}{q_t} = \frac{60 \text{ kJ}}{336 \frac{\text{kJ}}{\text{kg}}} = 0.18 \text{ kg} = 18 \text{ dag}.$$

Po 1 minuti je v posodi samo še voda. Iz grafa preberemo, da se v dveh minutah voda segreje za $(T - T_0) = 50^\circ\text{C}$. V tem času je grelec dovedel vodi toploto:

$$Q_2 = 1000 \frac{\text{J}}{\text{s}} \times 120 \text{ s} = 120 \text{ kJ}.$$

Iz učbenika za 7. razred preberemo, koliko toplote je potrebno, da segrejemo 1 kg vode za 1°C ($c = 4.2 \text{ kJ}$), in izračunamo, koliko vode (m_v) je v posodi:

$$m_v = \frac{Q_2}{c(T - T_0)} = \frac{120 \text{ kJ}}{4.2 \frac{\text{kJ}}{\text{kg}^\circ\text{C}} \times 50^\circ\text{C}} = 0.57 \text{ kg} = 57 \text{ dag}.$$

Na začetku je bilo v posodi torej 39 dag vode in 18 dag ledu.

Predlagane rešitve eksperimentalnih nalog:**Naloga 1:**

1. Stehtamo dve menzuri (menzure so lahko tudi različne). Prva menzura ima maso m_1 , druga pa maso m_2 .
2. V prvi menzuri odmerimo določeno prostornino suhega in določeno prostornino mokrega fižola, npr. 0.1 dm^3 , ki sta lahko tudi različni. Obe menzuri stehtamo (m'_1 in m'_2). Masi fižolov v posodah sta:

$$m_{\text{suh}} = m'_1 - m_1$$

$$m_{\text{moker}} = m'_2 - m_2.$$

3. Med fižolovimi zrnji je mnogo praznega prostora. Zato ta prostor zapolnimo z vodo. Odmerimo določeno prostornino vode (V_1, V_2), ki je dovolj velika, da bo pokrila fižol v menzurah. Vodo prelijemo preko fižola v menzurah in odčitamo, kje se je ustalila vodna gladina (V'_1, V'_2). Iz teh podatkov lahko izračunamo prostornino fižolovih zrn:

$$V_{\text{suh}} = V'_1 - V_1$$

$$V_{\text{moker}} = V'_2 - V_2.$$

4. Izračunamo še specifično gostoto suhih in mokrih fižolovih zrn:

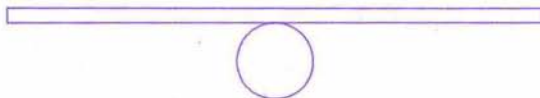
$$\rho_{\text{suh}} = \frac{m_{\text{suh}}}{V_{\text{suh}}}$$

$$\rho_{\text{moker}} = \frac{m_{\text{moker}}}{V_{\text{moker}}}.$$

Večja je gostota suhih fižolovih zrn. Mokra fižolova zrna so vpila vodo, ki ima manjšo specifično gostoto kot suha fižolova zrna, in je zato specifična gostota mokrih fižolovih zrn manjša.

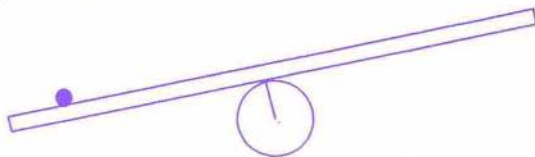
Naloga 2:

Naredili smo improvizirano tehtnico, kot je videti na sliki 3. Deska je na vsaki strani valjaste posode enako dolga, ker pa so v lesu grče, je navadno potrebno desko uravnesiti z dodatno utežjo – plastelinom. Navora, ki delujeta na vsako stran deske, sta v ravnovesju enaka.



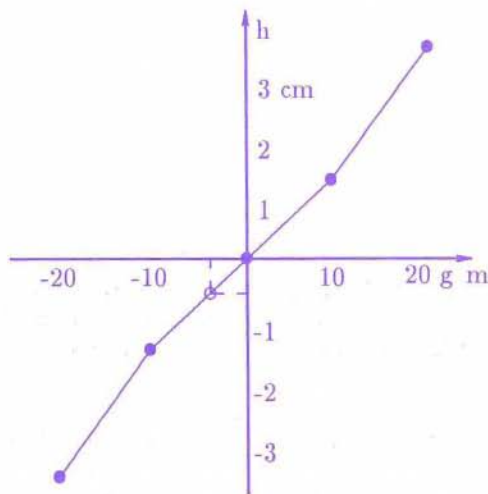
Slika 3.

Ko smo dodali na eno stran preutež, se je deska nagnila. Deska se je zakotalila po valjasti posodi tako, da je na strani, kjer je preutež, krajši del deske, na drugi strani pa daljši (slika 4). Na strani, kjer je preutež, je ročica krajša, na strani, kjer je ni, pa daljša, zato sta navora (produkta sile in ročice), ki delujeta na desko, v ravnovesju.



Slika 4.

Na tisti strani, na kateri je preutež, je krajišče deske nižje, na drugi pa višje. Odvisnost višine desnega krajišča od uteži na deski je predstavljena na grafu (slika 5). Uteži na desni strani deske, ki desno krajišče deske znižujejo, smo na grafu nanegli kot negativne, uteži na levi strani deske, ki desno krajišče dvigujejo, pa kot pozitivne. Kot izhodišče grafa je izbrana ravnovesna lega deske.



Slika 5.

Merjenec tehta približno 20 g. Ker njegova masa ni natančno enaka 20 g, se deska ne uravnovesi v ravnovesni legi. Zato izmerimo višino desnega krajišča in iz grafa poiščemo, koliko se masa kvadra razlikuje od mase uteži (slika 5): npr. -4 mm, kar predstavlja maso -3 g. Masa kvadra je 17 g.

8. razred

Rešitve teoretičnih nalog:

Naloga 1:

Dejanska hitrost avtomobila pri oznaki hitrosti na merilniku 60 km/h je:

$$v = \frac{s}{t} = \frac{10 \text{ km}}{\frac{11}{60} \text{ h}} = 54.5 \text{ km/h.}$$

Ko kaže merilnik hitrosti 60 km/h, je torej dejanska hitrost avtomobila 54.5 km/h. Merilnik lahko na avtocesti pokaže nekoliko več:

$$v_x = \frac{60}{54.5} 120 \text{ km/h} = 132 \text{ km/h.}$$

Merilnik hitrosti lahko pokaže 132 km/h.

Naloga 2:

Mase vagonov označimo z m , njihove dolžine z l in hitrost vlaka z v .

- Celotna kompozicija ima na začetku kinetično energijo:

$$W_k = \frac{1}{2}(5m)v^2 = \frac{1}{2} \times 5 \times 1000 \text{ kg} \times (6.7 \text{ m/s})^2 = 1.125 \times 10^5 \text{ J.}$$

- S to kinetično energijo bi se vlak lahko povzpел do višine:

$$h = \frac{W_k}{5mg} = \frac{1.125 \times 10^5 \text{ J}}{5 \times 1000 \text{ kg} \times 10 \text{ m/s}^2} = 2.25 \text{ m.}$$

Ker je klanec strm, odgovarja ta višina (podobnost z enakostraničnim trikotnikom) dolžini

$$s = 2h = 4.5 \text{ m,}$$

kar je približno dolžina enega vagona. Privzetek, da se na klancu znajde vlak v celoti, je torej napačen. Zato računamo postopoma, kako se potencialna energija vlaka veča na račun kinetične, ko se vagoni postopoma vzpenjajo po klancu.

- Na klanec se povzpne 1 vagon
Potencialna energija 1 vagona:

$$W_p = mgh = mg \frac{l}{4} = 0.125 \times 10^5 \text{ J.}$$

V računu smo upoštevali, da je masa vagona zbrana v sredini vozila in da prevožena dolžina x na klanecu predstavlja vzpon za višino $\frac{x}{2}$. Celotna kompozicija ima 0.125×10^5 J potencialne in 1×10^5 J kinetične energije. Vlak se bo še vzpenjal.

- Na klanec se povzpne 2 vagona

$$W_p = mg \frac{l}{4} + mg \frac{1}{2} \left(l + \frac{l}{2} \right) = 0.5 \times 10^5 \text{ J.}$$

Sesteli smo potencialni energiji vagona, ki se je komaj znašel na nagnjenem delu proge, in vagona, ki je pred njim za dolžino enega vagona dalje na klanecu. Celotna kompozicija ima 0.5×10^5 J potencialne in 0.625×10^5 J kinetične energije. Vlak se bo še vzpenjal.

- Na klanec se povzpnejo 3 vagoni

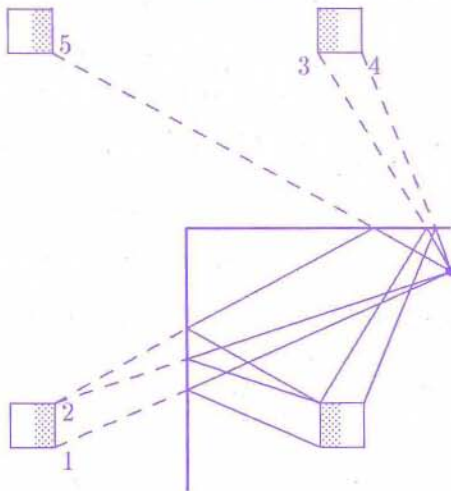
$$W_p = mg \frac{l}{4} + mg \frac{1}{2} \left(l + \frac{l}{2} \right) + mg \frac{1}{2} \left(2l + \frac{l}{2} \right) = 1.125 \times 10^5 \text{ J.}$$

Celotna kompozicija ima 1.125×10^5 J potencialne in nobene kinetične energije. Vlak se ne bo več vzpenjal.

Na klanec se bodo povzpeli trije vagoni, kar pomeni, da bo prvi vagon prišel 15 m daleč po klanecu.

Naloga 3:

Konstrukcija žarkov je predstavljena na sliki 6.



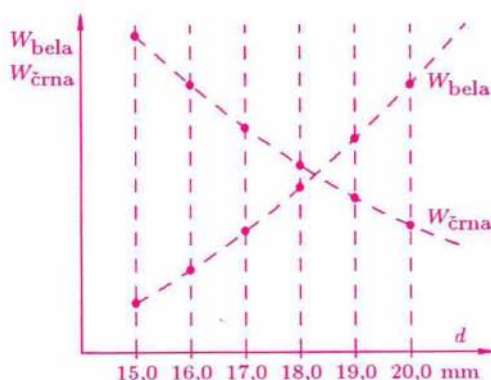
Slika 6.

Predlagane rešitve eksperimentalnih nalog

Naloga 1:

Rešitve so v tabeli na sliki 7.

d v mm	$W_{\text{črna}} < W_{\text{bela}}$ $W_{\text{črna}} = W_{\text{bela}}$ $W_{\text{črna}} > W_{\text{bela}}$
15.0	$W_{\text{črna}} > W_{\text{bela}}$
16.0	$W_{\text{črna}} > W_{\text{bela}}$
17.0	$W_{\text{črna}} > W_{\text{bela}}$
18.0	$W_{\text{črna}} > W_{\text{bela}}$
19.0	$W_{\text{črna}} < W_{\text{bela}}$
20.0	$W_{\text{črna}} < W_{\text{bela}}$



Slika 7. Tabela in graf.

- Opazovanja poskusov pokažejo, da je kinetična energija črne kroglice enaka energiji bele kroglice, ko je razdalja med tiri (približno) 17,3 mm. Skupna energija obeh kroglic po trku ne more biti večja, kot je energija obeh kroglic pred trkom.
- V grafu je potrebno upoštevati ugotovitve opazovanja, da se z večanjem razdalje med tiroma kinetična energija črne kroglice zmanjšuje in kinetična energija bele kroglice povečuje, da obstaja takšna razdalja med tiroma, ko sta energiji obeh krogel enaki (v grafu presečišče obeh krivulj), in da pri širinah med tiri, ki so večje, kot je omenjena, pride do dveh trkov, ker bela kroglica čez nekaj časa ponovno ujame črno. V graf vnesemo eksperimentalno ugotovljeno točko presečišča ($W_{\text{bele}} = W_{\text{črne}}$) – koordinata na y osi je poljubno izbrana, koordinata x osi pa izmerjena – in potegnemo za črno kroglico skozi to presečišče krivuljo, ki z d pada, in za belo kroglo skozi presečišče krivuljo, ki z d narašča.
- Opazovanja kažejo, da se z manjšanjem razdalje med tiri kinetična energija druge kroglice res povečuje (toda pri trku krogel na ravni mizi bi ugotovili, da se bela kroglica ne ustavi) in zato je njena začetna kinetična energija vselej večja od kinetične energije črne kroglice, ki je pred trkom mirovala, kar velja tudi zaradi izreka o kinetični energiji.

Naloga 2:

Ker je na voljo ampermeter, lahko izmerimo tok skozi znani upor. Ta je $I_0 = 0.062$ A. Ta podatek in znana vrednost upornika $R_0 = 100$ Ω omogočata izračunati napetost napetostnega vira: $U_g = R_0 \cdot I_0 = 100$ $\Omega \cdot 0.062$ A = 6.2 V.

Pri vzporedni vezavi lahko izmerimo tok v veji z žarnico. Tedaj je napetost na žarnici enaka napetosti na uporu (6.2 V). Z žarnico zaporedno vezani ampermeter kaže $I_v = 0.118$ A, zato je upor žarnice v tem primeru $R_v = U_g / I_v = 6.2$ V / 0.118 A = 52 Ω . Druga možnost je, da merimo skupni tok skozi vzporedno vezani upornik in žarnico, ta tok je $I'_v = 0.184$ A. Iz Ohmovega zakona in enačbe za nadomestni upor vzporedno vezanega upornika in žarnice

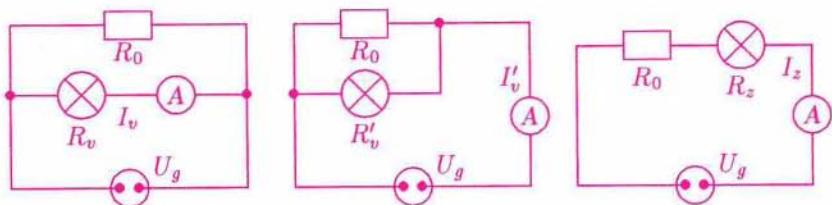
$$U_g = \frac{R_0 R'_v}{R_0 + R'_v} I'_v$$

izračunamo neznani upor

$$R'_v = \frac{U_g R_0}{R_0 I_v - U_g} = \frac{6.2 \text{ V} \cdot 100 \text{ } \Omega}{100 \text{ } \Omega \cdot 0.184 \text{ A} - 6.2 \text{ V}} = 51 \text{ } \Omega.$$

V zaporedni vezavi pa velja: $U_g = R_0 I_z + R_z I_z$. Izmerjeni tok je $I_z = 0.047$ mA, zato

$$R_z = \frac{U_g - R_0 \cdot I_z}{I_z} = \frac{U_g}{I_z} - R_0 = \frac{6.2 \text{ V}}{0.047 \text{ A}} - 100 \text{ } \Omega = 32 \text{ } \Omega.$$



Slika 8. Vezalni načrti pri merjenju.

V vzporedni vezavi žarnica bolj sveti, kar pomeni, da ima višjo temperaturo, njen upor je večji kot pri zaporedni vezavi, ko je temperatura žarnice nižja (saj manj sveti). Z naraščajočo temperaturo upor žarnice raste.

Mojca Čepič

REŠITVE NALOG Z DRŽAVNEGA TEKMOVANJA IZ SREDNJEŠOLSKE FIZIKE, 1. del – s str. 187

Opomba uredništva:

Zaradi pomanjkanja prostora objavljamo v tej številki le rešitve za skupini C in D, rešitve za skupini A in B bomo objavili v naslednji številki Preseka.

Skupina C

- Da bo živo srebro teklo po cevi dolžine l , mora biti komponenta magnetne sile vzdolž cevi večja ali kvečjemu enaka dinamični komponenti teže: $mg \sin \alpha \leq I a B \cos \alpha$, kjer je α kot nagiba cevi proti vodoravnici, I tok, ki teče prečno skozi živo srebro, in a prečna dimenzija cevi. Upor živega srebra v cevi je $R = \zeta a / (a l) = \zeta / l$, masa pa $m = a^2 l \rho$. Napetost, ki ustreza dovolj velikemu toku, je od tu $U \geq a \zeta \rho g \tan \alpha / B = 56 \mu\text{V}$.
- Vsota sil na telo, ki kroži po krožnici polmera r s hitrostjo v , je po drugem Newtonovem zakonu $e_0^2 / (4\pi\epsilon_0 r^2) \pm e_0 v B = m_0 v^2 / r$, kjer prvi del predstavlja električno silo med jedrom in elektronom z maso m in nabojem $-e_0$, drugi del pa magnetno silo zaradi gibanja elektrona v magnetnem polju. Predznak $\pm$ je posledica proste izbire smeri magnetnega polja, ki lahko kaže navzgor ali navzdol, če je ravnina kroženja vodoravna. Iz Bohrovega postulata za vrtilno količino $rmv = h/2\pi$ dobimo za $B = 0$ tako imenovani Bohrov radij $R = \frac{\epsilon_0 h^2}{\pi m e_0^2} = 5,32 \cdot 10^{-11} \text{ m}$. Za $B \neq 0$ dobimo kvadratno enačbo za polmer kroženja r . Enačba je preglednejša, če jo zapišemo brezdimenzijsko, z novo spremenljivko $x \equiv r/R$:

$$\pm a x^2 + x - 1 = 0; \quad a \equiv \frac{2RBh\epsilon_0}{me_0} = 4,28 \cdot 10^{-4}.$$

Dva predznaka parametra a določata dve kvadratni enačbi, zato dobimo štiri formalne rešitve

$$x = \frac{-1 \pm \sqrt{1 \pm 4a}}{\pm 2a}.$$

Ker je $a \ll 1$ lahko rešitve zapišemo približno kot $x_{1,2} = 1 \pm a$ in $x_{3,4} = \pm(1-a)/a$. Prvi dve rešitvi sta fizikalno smiselni in nam dasta $r = R \pm \Delta r$; $\Delta r = aR = 2,28 \cdot 10^{-14} \text{ m}$. Drugi dve rešitvi sta približno $r = \pm R/a = \pm 124 \text{ nm}$. Negativna rešitev ni smiselna, pozitivna pa

predstavlja kroženje skoraj prostega elektrona v magnetnem polju B . Slednja rešitev bi bila dosegljiva iz začetnega vezanega stanja elektrona le z veliko večjim magnetnim poljem, ko bi parameter a postal primerljiv z 1.

3. Plošča kroglice privlači, zato je stabilna lega na neki razdalji z pod ploščo, kjer se bosta izenačili električna sila na kroglico in teža kroglice. Električno polje vzdolž osi luknje izračunamo tako, da nadomestimo ploščo z luknjo z neskončno veliko ploščo brez luknje z gostoto naboja $\sigma = -15 \mu\text{As/m}^2$ in enakomerno nasprotno nabito ploščo z radijem luknje r . Električno polje na osi luknje ima od nič različno le komponento v smeri osi z : $E_z = \frac{\sigma z}{2\epsilon_0 \sqrt{z^2 + r^2}}$. Dobimo $mg = eE_z = \frac{e\sigma z}{2\epsilon_0 \sqrt{z^2 + r^2}}$ in od tu $z = -1,9 \text{ cm}$.

4. Protoni v magnetnem polju krožijo po krožnicah z različnimi polmeri $r = mv/eB$, kjer sta m in e masa in naboj protona, v pa njegova hitrost. Skrajna radija, ki še vodita proton skozi režo, sta $R_1 = a$ in $R_2 = a - d + d^2/2a \approx a - d$, kjer je $a = 20 \text{ cm}$ velikost stranice področja z magnetnim poljem in $d = 1,0 \text{ mm}$ velikost reže. Protona, ki letita po teh dveh skrajnih tirih, se nato odklonita še v električnem polju v kondenzatorju, kjer se gibljeta po paraboli. Če postavimo koordinatno izhodišče v spodnji rob reže, je odklon prvega protona $y_1 = d + (eE/m)t_1^2/2$, kjer je $t_1 = a/v_1$ čas preleta. Tir drugega protona je $y_2 = v_{2y}t_2 + (eE/m)t_2^2/2$, kjer je $t_2 = a/v_{2x}$ čas preleta drugega protona skozi kondenzator. Komponente hitrosti drugega protona dobimo iz geometrije; $v_{2x} = v_2(a - d)/R_2$ in $v_{2y} = -v_2d(1 - d/(2a))/R_2$.

$$\text{Iščemo razliko } y_1 - y_2 \approx d \left(2 - \frac{mE}{2eB^2} \right) = 1,5 \text{ mm}.$$

Skupina D

1. Zdrs nastopi, ko sila, s katero je napeta palica, preseže lepenje. Tik pred tem velja $l' = l(T) + \Delta l$, kjer je $l(T)$ dolžina nevpete palice pri temperaturi T in Δl raztezek palice zaradi sile lepenja. Ker je zdrs kratek, se temperatura vmes zanemarljivo malo spremeni. Velja $\Delta l = l F k_l / (SE)$. Palica ima v tem trenutku prožnostno energijo $W_{\text{pr}} = k \Delta l^2 / 2$, kjer je $k = SE/l$ prožnostni koeficient palice. Ker lepenje ne vzdrži, se palica skrči, nakopičena prožnostna energija pa se porabi za premagovanje trenja in dodaten stisk palice $W_{\text{pr}} = W'_{\text{pr}} + A_{\text{tr}}$. Zdaj je palica skrčena za $\Delta l'$, tako da velja

$$k \Delta l^2 / 2 = k \Delta l'^2 / 2 + F k_t (\Delta l + \Delta l').$$

Rešitvi kvadratne enačbe sta $\Delta l' = -\Delta l$ in $\Delta l' = \Delta l(1 - 2\beta)$, kjer je $\beta \equiv Fk_t/(k\Delta l) = k_t/k_l$. Prva rešitev ustreza začetnemu stanju in nas ne zanima, druga pa ustreza skrčitvi palice zaradi zdrsa. Da zopet zdrsne, se mora palica ohlajati čas t_0 , da velja $Rt_0\alpha l = \Delta l + \Delta l' = 2\Delta l(1 - \beta)$. Frekvenca pokov je od tu $\nu = t_0^{-1} = \frac{R\alpha SE}{2F(k_l - k_t)}$.

2. Zaradi gravitacijske sile zvezdi krožita s kotno hitrostjo $\omega = \sqrt{G(M + m)/R^3}$, kjer je G gravitacijska konstanta in R razdalja med zvezdama. Svetlobni tok s posamezne zvezde, ki ga merimo na Zemlji, je sorazmeren s celotnim izsevanim svetlobnim tokom z zvezde. Zvezdi sevata kot črni telesi, svetlobni tok prve je $L_1 = 4\pi r_1^2 \sigma T_1^4$, druge pa $L_2 = 4\pi r_2^2 \sigma T_2^4$, kjer sta r_1 in r_2 polmera zvezd ($r_1 < r_2$), T_1 in T_2 pa njuni temperaturi. Naj bo manjša zvezda označena z indeksom 1. Ko se zvezdi ne prekrivata, izmerimo maksimalni svetlobni tok, ki je sorazmeren z $L_0 = L_1 + L_2$. Ko manjša zvezda popolnoma zaide za večjo, izmerimo svetlobni tok, ki je sorazmeren z $L_{\min 1} = L_2$. Ko je manjša zvezda pred večjo, izmerimo svetlobni tok, ki je sorazmeren z $L_{\min 2} = L_1 + L_2(1 - (r_1/r_2)^2)$, ker manjša zvezda prekriva del večje. Relativno zmanjšanje svetlobnega toka je $L_{\min 1}/L_0 = 0,24$ za prvi in $L_{\min 2}/L_0 = 0,9996$ za drugi mrk. Mrk traja od začetka navideznega prekrivanja obeh zvezd do trenutka, ko se zvezdi ne prekrivata več, torej je čas trajanja mrka $2(r_1 + r_2)/(R\omega) = 13$ h. Oba mrka trajata enako dolgo. Zahod male zvezde za večjo traja $2r_1/(R\omega) = 0,5$ h.

3. Pristanek uteži obravnavamo kot neprožni trk. Na desko prileti s hitrostjo $v_0 = \sqrt{2g(H - h)}$. Ohranitev vrtilne količine nam da kotno hitrost $\omega_0 = \frac{v_0}{l} \cdot \frac{12m_1}{9m_1 + m_2}$, s katero se sistem uteži vrti tik po pristanku uteži 1. Če ima utež 2 dovolj majhno maso, bo utež 1 udarila ob tla in tam obstala, medtem ko bo utež 2 odskočila do višine

$$H_2 = \frac{4h}{3} + \frac{h}{9 + m_2/m_1} \left(1 - \frac{m_2}{3m_1} + \frac{9(H - h)}{h(9 + m_2/m_1)} \right) \left(1 - \left(\frac{4h}{3l} \right)^2 \right).$$

Pogoj, da utež 1 udari ob tla, dobimo iz pogoja, da ima pri tleh hitrost večjo ali enako nič, kar nam da $m_2/m_1 \leq 3(\sqrt{1 + 3H/h} - 1)$. V nasprotnem primeru deska zaniha in v zrak odleti utež 1, ki pa se zaradi neprožnega pristanka na desko ne dvigne do začetne višine H , temveč do višine

$$H_1 = h + (H - h) \left(\frac{12m_1}{9m_1 + m_2} \right)^2.$$

REŠITVI IZBRANIH NALOG S

36. MATEMATIČNE OLIMPIADE

1. Očitno obstaja rešitev pri $n = 4$. Točke $A_1, \dots, A_4$ naj bodo oglišča enotskega kvadrata in $r_1 = \dots = r_4 = \frac{1}{6}$.

Dokažimo s protislovjem, da za $n = 5$ problem ni rešljiv. Ploščino trikotnika $A_i A_j A_k$, $1 \leq i < j < k \leq 5$, označimo s p_{ijk} .

Števila $r_1, \dots, r_5$ so vsa različna, saj iz npr. $r_4 = r_5$ sledi $p_{124} = p_{125}$ (torej $A_4 A_5 \parallel A_1 A_2$) ter $p_{234} = p_{235}$ (torej $A_4 A_5 \parallel A_2 A_3$) in bi bile potem točke A_1, A_2 in A_3 kolinearne.

Nadalje opazimo, da pri konvexnem štirikotniku $A_i A_j A_k A_l$ velja $r_i + r_k = r_j + r_l$. (Slednje izpeljemo iz enakosti $p_{ijk} + p_{ikl} = p_{ijl} + p_{jkl}$.)

Ločimo sedaj tri primere:

- (a) Konvexna ogrinjača množice točk $\{A_1, \dots, A_5\}$ je petkotnik. Ker sta štirikotnika $A_1 A_2 A_3 A_4$ in $A_1 A_2 A_3 A_5$ konvexna, sledi $r_1 + r_3 = r_2 + r_4$ in $r_1 + r_3 = r_2 + r_5$. Prišli smo do protislovja, saj je potem $r_4 = r_5$.
- (b) Konvexna ogrinjača množice točk $\{A_1, \dots, A_5\}$ je štirikotnik, recimo $A_1 A_2 A_3 A_4$. Predpostavimo lahko, da A_5 leži v trikotniku $A_1 A_3 A_4$. Potem je tudi $A_1 A_2 A_3 A_5$ konvexni štirikotnik in pridemo do enakega protislovja kot v prejšnji točki.
- (c) Konvexna ogrinjača množice točk $\{A_1, \dots, A_5\}$ je trikotnik, recimo $A_1 A_2 A_3$. Potem pa iz enakosti

$$p_{124} + p_{234} + p_{314} = p_{125} + p_{235} + p_{315}$$

izpeljemo $r_4 = r_5$. To pa je protislovje.

Ker torej naloga ni rešljiva pri $n = 5$, ni rešljiva niti pri nobenem večjem n in je zato $n = 4$ edina rešitev.

2. Preoblikujmo rekurzivno zvezo: $2x_i^2 - \left(x_{i-1} + \frac{2}{x_{i-1}}\right)x_i + 1 = 0$. Sledi

$$x_i = \frac{1}{2}x_{i-1} \quad \text{ali} \quad x_i = \frac{1}{x_{i-1}}.$$

Z indukcijo dokažimo naslednje: Za vsak $i = 0, 1, 2, \dots$ je $x_i = 2^{k_i} x_0^{\sigma_i}$, kjer je k_i celo število, $|k_i| \leq i$, in $\sigma_i = (-1)^{k_i+i}$.

Pri $i = 0$ trditev očitno drži (postavimo $k_0 = 0$ in $\sigma_0 = 1$). Naj sedaj trditev velja pri indeksu $i - 1$. Če je $x_i = \frac{1}{2}x_{i-1}$, mora biti $k_i = k_{i-1} - 1$ in $\sigma_i = \sigma_{i-1}$. Pri $x_i = \frac{1}{x_{i-1}}$ pa velja $k_i = -k_{i-1}$ in $\sigma_i = -\sigma_{i-1}$. V obeh primerih torej velja $x_i = 2^{k_i}x_0^{\sigma_i}$, $|k_i| \leq i$ in $\sigma_i = (-1)^{k_i+i}$.

Označimo $k = k_{1995}$ in $\sigma = \sigma_{1995} = (-1)^{1995+k}$. Potem iz pogoja naloge sledi $x_0 = 2^k x_0^\sigma$. Število k ni liho, saj bi bil tako $\sigma = 1$ in enačbi $2^k = 1$ bi zato zadoščal le $k = 0$.

Torej je k sodo število in je zato $\sigma = -1$. Sledi $x_0^2 = 2^k$. Ker je $|k| \leq 1995$ in je k sodo število, je $k \leq 1994$. Sledi $x_0 \leq 2^{997}$.

Nazadnje preverimo, da zaporedje

$$x_i = \begin{cases} 2^{997-i}, & i = 0, 1, \dots, 1994 \\ 2^{997}, & i = 1995 \end{cases}$$

zadošča pogojem naloge.

Matjaž Željko

4. DRŽAVNO TEKMOVANJE OSNOVNOŠOLCEV V ZNANJU MATEMATIKE

V soboto, 20. maja 1995, se je 203 sedmošolcev in 300 osmošolcev, ki so se na občinskih tekmovanjih najbolje odrezali, zbralo v Ljubljani, Mariboru, Celju, Kopru, Novi Gorici in Novem mestu na 4. državnem tekmovanju, ki je bilo že enaintrideseto tekmovanje slovenskih osnovnošolcev v znanju matematike, petindvajsetič pa je nosilo ime po našem slavnem matematiku Juriju Vegi.

Zlato Vegovo priznanje je osvojilo 55 sedmošolcev in 93 osmošolcev, prejeli pa so ga sedmošolci, ki so osvojili vsaj 13 od 25 možnih točk, in osmošolci, ki so osvojili najmanj 16 od 25 možnih točk.

Tekmovalci so reševali naslednje naloge:

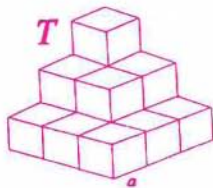
7. razred

- Poišči vsa cela števila x , za katera je tudi vrednost izraza $\frac{2x+35}{x}$ celo število. Rešitev utemelji.
- Petmestno število 17436 je deljivo z nekaterimi izmed števil 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8 in 10. Za koliko najmanj moraš to število
 - zmanjšati,
 - povečati,
 da boš dobil število, ki bo deljivo z vsemi naštetimi števili?
 - Katero od dobljenih števil se od danega petmestnega števila najmanj razlikuje?

3. Pokaži, da je razlika $81^7 - 27^9 - 9^{13}$ večkratnik števila 45.
4. Dana je kocka z robom a . Če rob kocke povečamo za 20 %, se njena prostornina poveča za 91 cm^3 . Za koliko odstotkov se tedaj poveča površina kocke?
5. Del mestnega trga, ki ima obliko kroga s premerom 18 m, bodo prekrili z asfaltom in granitnimi kockami. Na sredini bo krog s premerom 2 m, prekrit z asfaltom, nato pa bodo izmenično sledili 2 m široki kolobaji, prekriti s kockami, in 2 m široki kolobarji, prekriti z asfaltom. Približno koliko granitnih kock bodo porabili, če meri ploščina kvadrata na taki kocki 64 cm^2 ?

8. razred

1. Neko naravno število smo pomnožili z 2, nato zmnožek zmanjšali za $\frac{2}{3}$ njegove vrednosti. Tri četrtnine dobljenega števila smo kvadrirali, odšteli 21 in nato izračunali kvadratni koren. Ko smo vrednost kvadratnega korena delili s 5 in količniku prišteli 2, smo dobili število 4. Izračunaj neznano število.
2. Tone se je odločil, da bo sodeloval na matematičnem tekmovanju. Njegova povprečna ocena iz matematike je 2,5. Če bo na tekmovanju uspešen, bo za nagrado dobil petico in povprečna ocena se bo zvišala na 3. Izračunaj, koliko ocen je imel Tone zapisanih v redovalnici pred tekmovanjem.
3. Zapiši enačbo premice $y = \frac{1}{2} \cdot (m + 3)x - \frac{3}{5}m$ za tisto vrednost spremenljivke m , za katero ima izraz $\frac{1}{4m^2 + 12m + 10}$ največjo vrednost. Izračunaj razdaljo te premice od koordinatnega izhodišča.
4. Razmerje zunanjih kotov trikotnika $\triangle ABC$ je 9:16:20. Izračunaj velikost kota, ki ga oklepata simetrala največjega notranjega kota in višina z vrha istega kota na nasprotno stranico.
5. Telesu T na skici, ki je sestavljeno iz kock z robom a , očrtaj štiristrano piramido. V kolikšnem razmerju sta prostornini telesa T in očrtane piramide? Za koliko odstotkov je prostornina očrtane piramide večja od prostornine telesa T ?



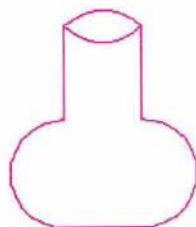
Aleksander Potočnik

10. DRŽAVNO TEKMOVANJE IZ ZNANJA RAČUNALNIŠTVA ZA OSNOVNOŠOLCE¹

1. SKUPINA (učenci do 3. razreda)

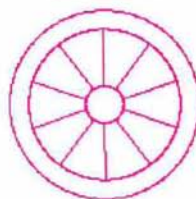
1. naloga (25 točk):

Želvetica naj nariše vazo, kakršna je na sliki. Velikost vaze naj bo spremenljiva, in sicer tako, da bo dolžina vratu vaze enaka 10 enotam, loki pa četrtini (zgornji del vaze) oziroma polovici kroga (spodnji del vaze). Želvetica naj risanje vaze konča tam, kjer ga je začela. Primer klica: vaza 5.



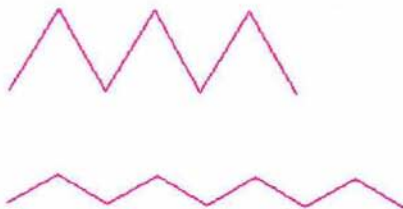
2. naloga (25 točk):

Zapiši program za risanje kolesa, kot ga vidiš na sliki. Kolesu lahko ob klicu spreminjamo velikost. Želvetica naj konča z risanjem tam, kjer je začela. Primer klica: kolo 10.



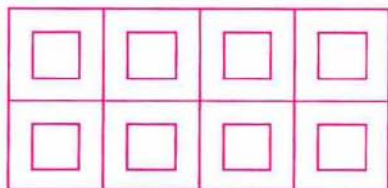
3. naloga (25 točk):

Želvetica naj riše "hribe" tako, da bodo vsi "vrhovi" v vodoravni smeri (glej sliko). Kot na "vrhu" hriba naj se ujema s kotom v "dolini". Pri klicu določi tri podatke: število "vrhov", kot med "bregovima" in dolžino "brega". Primera klica: hribi 3 60 50, hribi 4 120 30.



4. naloga (25 točk):

Naučimo želvico tlakovati dvorišče s ploščicami. Pri klicu ukazov želvici povemo velikost stranice ploščice, število ploščic v vrsti in število vrst s ploščicami. Stranica notranjega kvadrata naj bo enaka polovici stranice ploščice. Želvetica naj z risanjem začne in konča na istem mestu. Primer klica: tlak 50 4 2.



¹ Opomba uredništva: Od poročevalca nismo dobili podatka, v katerih programskih jezikih so reševali naloge v posameznih tekmovalnih skupinah.

2. SKUPINA (učenci 4. razreda)

1. naloga (25 točk):

S pomočjo želvice nariši smreko. Ob klicu ukaza določi višino debla do prve veje, ki se ujema z dolžino te veje. Vsaka naslednja veja je za osmino krajša od prejšnje. Razmak med vejami je vedno enak. Na koncu risanja naj bo položaj želvice tak kot na začetku. Primer klica: drevo 50.

2. naloga (25 točk):

Želvetica naj nariše pajka. Ob klicu poveš velikost pajka. Če uporabiš npr. ukaz pajek 1, bo želvetica pri risanju trupa naredila 360 "korakov"; noge so dolge 40 enot, trup pa je 3-krat širši kot glava in 8-krat širši kot oči. Končni položaj želvice naj bo tak, kot je bil na začetku. Primer klica: pajek 1.

3. naloga (25 točk):

Iz krogov, lokov in ravnih črt naj želvetica nariše "nasmejano" sonce. Usta naj bodo po velikosti enaka polovici glave (glej sliko). Uporabi spremljivko, ki določa velikost slike. Primer klica: glava 1.

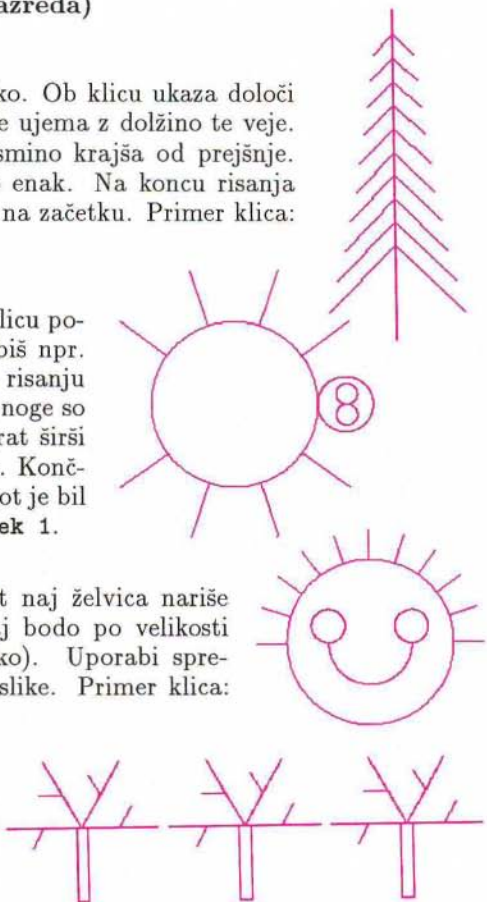
4. naloga (25 točk):

Računalnik naj nariše v vrsti tri enaka drevesa (glej sliko). Sam naj določi, kje bo začel risati prvo drevo, nobeno drevo pa ne sme segati čez rob zaslona.

Razmak med spodnjima vejama sosednjih dreves naj bo enak širini debla. Vsaka glavna veja drevesa ima stransko, ki je postavljena na sredino glavne veje. Veje so razporejene enakomerno v kotu 180 stopinj. Računalnik naj naključno določi velikost dreves oz. delov:

- deblo je dolgo od 20 do 80 enot in široko od 3 do 13 enot,
- dolžina glavnih vej je enaka višini debla,
- dolžina stranskih vej je enaka dvema širinama debla,
- število vej je od 3 do 6,
- koti med glavnimi in stranskimi vejami so od 30 do 70 stopinj.

Želvetica naj konča risanje dreves tam, kjer ga je začela. Primer klica: drevesa.



3. SKUPINA (učenci 5. razreda)

1. naloga (25 točk):

Napiši program, ki na zaslon računalnika izpiše vse delitelje danega naravnega števila. Število vnesemo preko tipkovnice.

2. naloga (25 točk):

Preko tipkovnice vnašamo naravna števila eno za drugim. Posamezna števila po velikosti ne presegajo 30000. Napiši program, ki bo prikazoval števila v treh stolpcih, in sicer v srednjem stolpcu bodo vsa vnešena števila, v levem stolpcu vsa liha in v desnem vsa soda števila. Izvajanje programa naj se konča, ko s števili zapolnimo zaslon, ali pa če vtipkamo število 0. Zaslon naj ima 24 vrstic. Primer izgleda zaslona:

Liha števila:	Vsa števila:	Soda števila:
17	46	46
35	82	82
91	17	4
1	4	66
	35	
	91	
	1	
	66	
	0	

3. naloga (25 točk):

Napiši program, ki na sredino zaslona nariše trikotnik iz zvezdic. Število vrstic trikotnika preberemo preko tipkovnice. Trikotnik velikosti 2 ima dve vrstici, v prvi je ena, v drugi pa tri zvezdice. Trikotnik velikosti 3 ima v tretji vrstici 5 zvezdic. Trikotnik velikosti 4 ima torej v četrti vrstici 7 zvezdic itd. Zaslon ima 25 vrstic.

4. naloga (25 točk):

Napiši program, s katerim boš izračunal povprečno težo svojih sošolcev. Preko tipkovnice boš vnašal podatke o teži na 10 dag natančno, dokler ne boš na nek način (izberi sam) povedal, da si vnesel vse podatke. Program naj izpiše število sošolcev, njihovo skupno težo in njihovo povprečno težo v kilogramih (na 10 dag natančno).

4. SKUPINA (učenci 6. razreda)**1. naloga (25 točk):**

Glej 2. nalogo 3. skupine.

2. naloga (25 točk):

Napiši program, ki med naravnimi števili od 1 do 1000 poišče tisto, ki ima največ deliteljev.

3. naloga (25 točk):

Glej 3. nalogo 3. skupine.

4. naloga (25 točk):

Glej 4. nalogo 3. skupine.

5. SKUPINA (učenci 7. razreda)**1. naloga (30 točk):**

Dežurni meteorolog je prejel podatke o temperaturi zračnih plasti v datoteki `TEMP.DAT` v naslednji obliki:

VIŠINA, TEMPERATURA,

Višina značilne temperaturene plasti (v metrih) in temperatura (v stopinjah Celzija) sta izmerjeni z natančnostjo ene desetinke.

Datoteka običajno vsebuje 20 do 50 vrstic takih podatkov, ki so urejeni po naraščajoči višini.

Pripravi meteorologu program, s katerim bo izvedel, kolikšna je temperatura na poljubni višini in kolikšna je sprememba temperature za vsak meter višine.

2. naloga (20 točk):

Glej 2. nalogo 4. skupine.

3. naloga (25 točk):

V besedilu dolgem do 255 znakov bi radi zamenjali del besedila (ki se lahko večkrat ponavlja) z drugim besedilom. Dolžina novega niza je lahko različna od tistega, ki ga bomo nadomestili. Napiši program, ki na zaslon izpiše popravljeno besedilo. Pozor: Pri zamenjavi je lahko novo besedilo daljše od 255 znakov!

4. naloga (25 točk):

Napiši program, s katerim na zaslon najprej narišeš **okvir** preko celotne zgornje leve četrtine zaslona, potem pa program ta okvir in sliko znotraj njega raztegne čez celotni zaslon. Pomagaj si z naslednjimi ukazi:

- **RECTANGLE** (*X1*, *Y1*, *X2*, *Y2*), ki nariše okvir z diagonalo med *X1*, *Y1* in *X2*, *Y2*;
- **GETPIXEL** (*X*, *Y*: integer): *word*, ki vrne številko barve na točki *X*, *Y*;
- **PUTPIXEL** (*X*, *Y*: integer; **COLOR**: *word*), ki nariše piko določene barve na *X*, *Y*.

6. SKUPINA (učenci 8. razreda)**1. naloga (20 točk):**

Glej 2. nalogo 4. skupine.

2. naloga (25 točk):

Glej 4. nalogo 5. skupine.

3. naloga (25 točk):

Napiši program, ki bo z zvezdicami narisal diagonalni zaslona. Položaj zvezdic mora izračunati računalnik. Zaslon naj vsebuje 79 stolpcev in 25 vrstic.

4. naloga (30 točk):

Napiši program, s katerim izračunaš naraščanje števila zajcev v lovskem revirju (za vsako leto posebej za prvih 10 let po naselitvi). Preko tipkovnice vnesemo podatek, koliko parov enoletnih zajcev smo naselili v revirju, program pa naj izračuna število novo rojenih in poginulih zajcev ter skupno število zajcev.

Samica zajcev, ki je stara eno leto ali dve, ima vsako leto v povprečju med 3 in 6 mladičev (slučajni izbor), od tega je polovico (ali ena manj) samičk. Lisice, lovci, bolezni in huda zima iztrebijo vsako leto od 60 do 80% vseh zajcev, ne glede na starost.

Naloge so pripravili: N. Grubar, J. Pečovnik, S. Bižal in dr. J. Urbančič.

Ivan Gerlič

39. MATEMATIČNO TEKMOVANJE SREDNJEŠOLCEV SLOVENIJE

Poročilo o 39. matematičnem tekmovanju srednješolcev Slovenije je bilo objavljeno v prvi številki *Preseka* letošnjega letnika, kjer najdemo imena najuspešnejših tekmovalcev. V tej številki objavljamo še naloge, s katerimi so se na *Gimnaziji Kranj*, ki je bila 22. in 23. aprila 1995 gostiteljica tekmovanja, spopadli najboljši mladi matematiki – srednješolci. Poskusite, ali bi se tudi vam posrečilo rešiti naloge v predvidenem času 210 minut, ne da bi pri tem uporabljali kakršnekoli pripomočke. Vzemite svinčnik in papir ter poskusite. Morda boste tako pregnali tremo pred tekmovalnimi nalogami.

Prvi letnik

1. Naj bodo a, b, c in d cela števila. Pokaži, da je produkt

$$(a-b)(a-c)(a-d)(b-c)(b-d)(c-d)$$

deljiv z 12.

2. Za pozitivna realna števila a, b in c velja $a \geq b \geq c$. Pokaži, da velja

$$\frac{a^2 - b^2}{c} + \frac{c^2 - b^2}{a} + \frac{a^2 - c^2}{b} \geq 3a - 4b + c.$$

3. Brata sta prodala krdelo ovac. Za vsako ovco sta dobila toliko zlatnikov, kolikor ovc je bilo v krdelu. Zaslužek sta si razdelila na naslednji način: najprej je vzel starejši brat 10 zlatnikov, potem mlajši 10, pa spet starejši 10 ... Na koncu, ko je bil na vrsti mlajši brat, je ostalo manj kot 10 zlatnikov. Vzel je torej ostanek in še pipec starejšega brata, pa je bil zaslužek pošteno razdeljen. Koliko je vreden pipec?
4. Dan je konveksni štirikotnik $ABCD$. Dokaži, da sta simetrali kotov DAB in BCD vzporedni natanko tedaj, ko je $\sphericalangle ABC = \sphericalangle CDA$.

Drugi letnik

1. Za praštevila a, b, c in d velja $b - a = c - b = \sqrt{d - a - b - c} \leq a$. Izračunaj produkt $abcd$.

2. Naj $\overline{abc}$ pomeni trimestno število, ki ima števko a na mestu stotic, b na mestu desetic in c na mestu enic. Funkcija f vsakemu trimestnemu številu $\overline{xyz}$ priredi vrednost $x + y + z + xy + xz + yz + xyz$, torej $f(\overline{xyz}) = x + y + z + xy + xz + yz + xyz$. Poišči vsa trimestna števila n , za katere je $f(n) = n$.
3. Naj bosta M in N taki točki na stranicah AB in BC kvadrata $ABCD$, da velja $\angle MDN = \frac{\pi}{4}$. Presečišči diagonale AC z daljicama MD in ND označimo s P in Q , točka R pa naj označuje razpolovišče daljice MN . Dokaži, da je $|PR| = |RQ|$.
4. V vsakem polju tabele $n \times n$, kjer je n liho število, je vpisano eno od števil 1 oziroma -1 . Pod vsak stolpec zapišemo produkt elementov tega stolpca, desno od vsake vrstice pa produkt elementov te vrstice. Pokaži, da vsota vseh produktov ne more biti enaka 0.

Tretji letnik

1. Pokaži, da ne more veljati

$$p(a) = b, p(b) = c \text{ in } p(c) = a,$$

če so a , b in c med seboj različna cela števila in p polinom s celimi koeficienti.

2. Dana je funkcija f , ki vsakemu naravnemu številu priredi neko vrednost. Vemo, da je $f(1) = 1995$ in da za vsak $n > 1$ velja

$$f(1) + f(2) + \dots + f(n) = n^2 f(n).$$

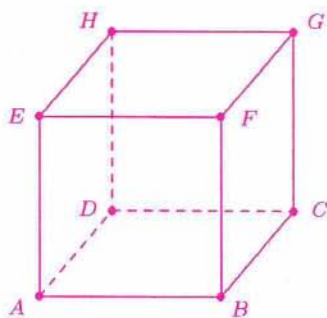
Koliko je $f(1995)$?

3. Naj bo F razpolovišče stranice CD pravokotnika $ABCD$. Na stranici BC izberemo tako točko E , da je AF simetrala kota EAD . Dokaži, da sta daljici AF in EF pravokotni, če velja $\frac{|AB|}{|BC|} = \sqrt{2}$.
4. Pravokotnika sta si podobna, če imata stranice v istem razmerju. Pokaži, da se da vsak pravokotnik razrezati na n sebi podobnih pravokotnikov za vsa naravna števila n , ki niso manjša od 9.

Četrty letnik

1. Pokaži, da nobeno aritmetično zaporedje ne more imeti treh členov, ki bi bili kubični koreni treh različnih praštevil.
2. Dan je polinom $p(x) = x^4 + x^3 + x^2 + x + 1$. Poišči ostanek pri deljenju polinoma $p(x^5)$ s polinomom $p(x)$.
3. Funkcija $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ zadošča pogoju $4f(f(x)) = 2f(x) + x$ za vsak realen x . Dokaži, da je $f(x) = 0$ natanko tedaj, ko je $x = 0$.
4. Naj bo X točka na ploskvi $ABCD$ kvadra $ABCDEFGH$. Izračunaj $\sphericalangle AXE$, če je

$$\sphericalangle AXF = \sphericalangle FXH = \sphericalangle HXA = \frac{\pi}{2}.$$



Darjo Felda

PRESEK

list za mlade matematike, fizike, astronome in računalnikarje
23. letnik, šolsko leto 1995/96, številka 4, strani 193 – 256

UREDNIŠKI ODBOR: Vladimir Batagelj, Tanja Bečan (jezikovni pregled), Dušica Boben (oblikovanje teksta), Vilko Domajnko, Roman Drnovšek (novice), Darjo Felda (tekmovanja), Bojan Golli, Marjan Hribar, Boštjan Jaklič (tehnični urednik), Martin Juvan (računalništvo), Sandi Klavžar, Boris Lavrič, Andrej Likar (fizika), Matija Lokar, Bojan Magajna (glavni urednik), Franci Oblak, Peter Petek, Marijan Prosén (astronomija), Marjan Smerke (svetovalec za fotografijo), Miha Štalec, Jana Vrabec (nove knjige), Marija Vencelj (matematika, odgovorna urednica).

Dopisi in naročnine: Društvo matematikov, fizikov in astronomov Slovenije – Podružnica Ljubljana – Komisija za tisk, Presek, Jadranska c. 19, 61111 Ljubljana, p.p. 64, tel. (061) 1232-460, št. ŽR 50106-678-47233. Naročnina za šolsko leto 1995/96 je za posamezne naročnike 1.250 SIT, za skupinska naročila šol 1.000 SIT, posamezna številka 250 SIT, za tujino 25.000 LIT, devizna nakazila SKB banka d.d. Ljubljana, val-27621-42961/9, Ajdovščina 4, Ljubljana.

List sofinancirata MZT in MŠŠ
Ofset tisk DELO – Tiskarna, Ljubljana

Po mnenju MZT št. 415-52/92 z dne 5.2.1992 šteje revija med proizvode iz 13. točke tarifne št. 3 zakona o prometnem davku, za katere se plačuje 5% davek od prometa proizvodov.

NESKONČNOST

Kaj je neskončno?
Neskončen je čas,
neskončna je cesta,
ki nima konca...
Neskončna je
svetloba sonca
in vesolje,
globoko morje
in obzorje,
kjer se tisoč barv
zliva v neskončni vzorec...
Saj se tudi nebo
nikjer ne konča,
v naravi pravzaprav
nič nima konca!
Prav si imel Escher,
neskončnost je čudna,
tako nenavadna,
da misel je trudna,
ko veš,
da nekaj preprosto nima konca...



Slika surrealističnega slikarja Salvadora Dalija (k članku na strani 216).

David Bedrač
(dijak ptujske gimnazije)

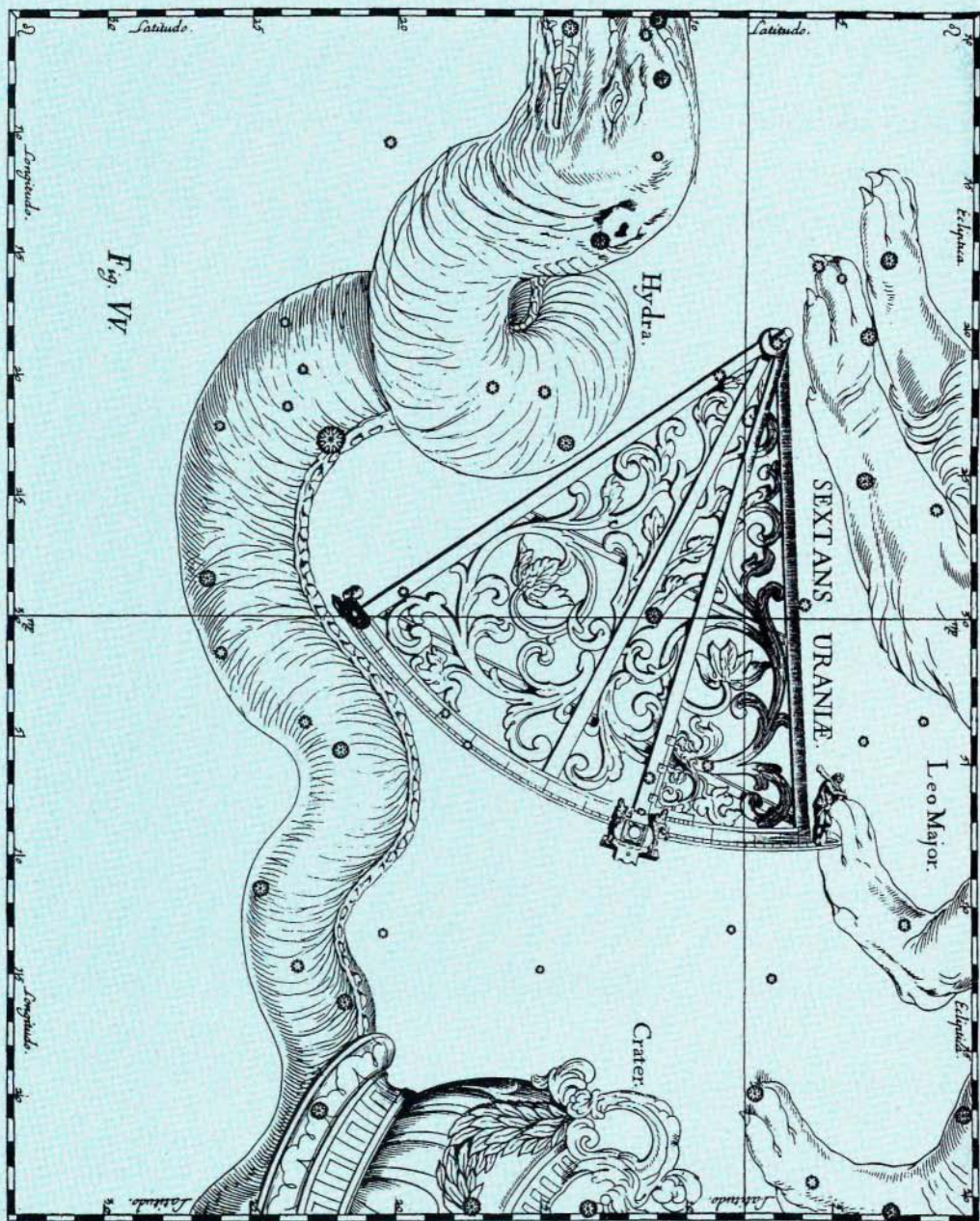


Fig. VI