

3

PRE SEK

ISSN 0351-6652

DRUŠTVO MATEMATIKOV, FIZIKOV IN ASTRONOMOV SLOVENIJE, 23(1995-1996)

PRESEK

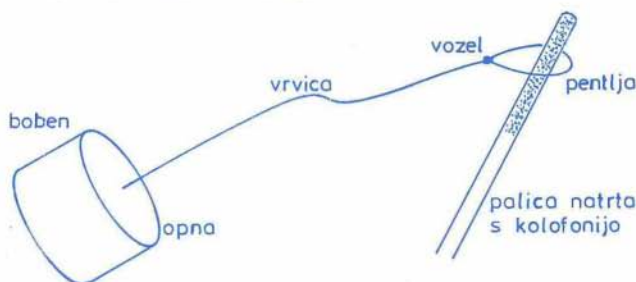
list za mlade matematike, fizike, astronome in računalnikarje
23. letnik, leto 1995/96, številka 3, strani 129–192

VSEBINA

MATEMATIKA	Obstojna praštevila (Jože Grasselli)	134-136
	Pregradimo trikotnik, 2. del (Boris Lavrič)	148-154
FIZIKA	Naredimo škržata (Andrej Likar)	129-132
	Past za delce (Janez Strnad)	142-146
ASTRONOMIJA	Koza (Marijan Prosén)	138-139
RAČUNALNIŠTVO	Saj ni res, pa je (Martin Juvan, Matjaž Zaveršnik)	140
NOVICE	Nemogoči predmet je mogoč (Marta Zabret) ...	132-133, III
	Poročilo s 36. mednarodne matematične olimpiade (Matjaž Željko)	147
	26. mednarodna fizikalna olimpiada (Ciril Dominko)	154-155
NALOGE	Nalogi o 1996 (Roman Drnovšek)	133
	Največji zorni kot (Marija Vencelj)	158
REŠITVE NALOG	Manjkajoči števili – s str. 99 (Martin Juvan)	136-137
	Funkcijska enačba – s str. 88 (Roman Drnovšek)	141
	Pocenitev, podražitev – s str. 85 (Vinko Horvat)	155
	Poišči število – s str. 95 (Ivan Lisac)	156
	Ena finančna – s str. 99 (Martin Juvan)	156-158
	Pregradimo trikotnik, 1. del – s str. 86 (Boris Lavrič)	162-163
	Križanka "Očetje fizikalnih enot" – s str. 96 (Marko Bokalič)	163
	Najdaljša četa – s str. 89 (Martin Juvan)	164-165
	Vsakdanje funkcije – s str. 100 (Anton Cedilnik)	165
ZANIMIVOSTI	Sosonce in 22 ^o halo (Jože Rakovec)	140-141, I
RAZVEDRILO	Križanka "Matematične krivulje" (Marko Bokalič) ..	160-161
TEKMOVANJA	Urniki tekmovanj v letu 1996 (Darjo Felda)	167-169
	15. področno tekmovanje iz fizike za osnovnošolce – rešitve s str. 114 (Vesna Harej, Jelisaša Sakelšek)	169-171
	30. občinsko tekmovanje za srebrno Vegovo priznanje – rešitve s str. 117 (Aleksander Potočnik)	171-172
	Izbirno tekmovanje iz matematike – rešitve s str. 121 (Matjaž Željko)	173-177
	Rešitve nalog s predtekmovanja iz srednješolske fizike – s str. 123 (Ciril Dominko)	177-182
	15. državno tekmovanje iz fizike za osnovnošolce (Mojca Čepič)	182-187
	Naloge z državnega tekmovanja iz srednješolske fizike (Ciril Dominko, Jure Bajc)	187-192
NOVE KNJIGE	Strnad J., Fiziki (Andrej Likar)	159
NA OVITKU	Večer na Cresu, 14. avgust 1995 (foto Marta Zabret). Glej tudi razlago na strani 140	I
	Fotografija "nemogočega" predmeta (foto Mojca in Mitja Luštrek). Glej tudi prispevek na str. 132	III
	Slovenski olimpijski ekipi na 26. fizikalni in 36. matematični olimpiadi. Glej tudi prispevke na straneh 147 in 154	IV

NAREDIMO ŠKRŽATA

Škržate poslušamo poleti na morju. Njihovo oglušujoče cvrčanje je del počitniškega vzdušja. V zimskih dneh pa si bomo pomagali s škržati, ki jih naredimo sami. Igračo na sliki 1 sestavlja majhen lesen boben s polmerom nekaj centimetrov in prav tolikšno višino. Opno bobna naredimo iz močnejšega papirja, ki ga prepojimo z lakom. Skoznjo na sredi s šivanko prepeljemo vrvico in jo na drugi strani opne privežemo na drobno trsko. S tem vrvico pripnemo na opno bobna. Na drugem krajišču vrvico oblikujemo v pentljo in jo nataknemo na palico, natrto s kolofonijo. To smolo uporabljajo violinisti, da z njo mažejo lok. Pri vrtenju bobna okrog palice zaslišimo zvok, ki spominja na "petje" škržatov.



Slika 1. Škržat-igrača.

Kako pride do zvoka, najlažje pojasnimo, če primemo boben z eno roko in pri napeti vrvici nekoliko zavrtimo palico. Zaslišimo pok, ko na palico zalepljena vrvica v trenutku zdrsne in s tem sprosti napeto opno. Pri vrtenju bobna okrog palice slišimo rafal takih pokov, ki se zlijejo v hreščav zvok.

Za stik med vrvico in palico je značilno, da je koeficient lepenja večji od koeficienta trenja. Tudi pri stiku avtomobilskih pnevmatik s cesto je tako. Zato je zaviranje z blokiranimi kolesi, ko guma drsa po cesti, manj učinkovito kot pri vrtečih se kolesih. Posebna naprava v sodobnih avtomobilih uravnava prijem zavor tako, da kolesa ne drsijo.

Poskusov, s katerimi uvedemo koeficienta trenja in lepenja, se prav dobro spomnimo. Na podlago postavimo telo z znano težo in ga vlečemo z vzmetno tehtnico v vodoravni smeri (slika 2). Nekaj časa se telo ne premakne kljub sili, ki deluje nanj. Ko silo povečujemo, telo nenadoma zdrsne. Poskusi kažejo, da je sila F_l , pri kateri pride do zdrsa, sorazmerna s težo telesa. Zato zapišemo:

$$F_l = k_l F_g,$$

pri čemer smo z F_g označili težo telesa, s k_l pa koeficient lepenja. Ko telo enakomerno drsa po podlagi, ga moramo vleči s silo F_t , ki je prav tako sorazmerna s težo telesa:

$$F_t = k_t F_g.$$

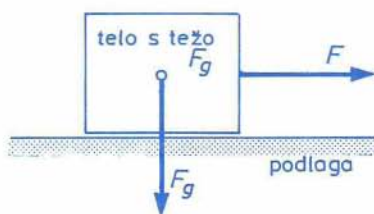
Sorazmernostni faktor k_t imenujemo v tem primeru koeficient trenja. Pri podlagi, prevlečeni s plastjo kolofonije, je koeficient lepenja vrvice precej večji od koeficienta trenja.

Da bomo lažje računali, zane-marimo trenje v primeri z lepenjem, torej naj bo $k_t = 0$, koeficient lepenja pa naj bo zelo velik. Zanima nas pogostost pokov, ko se bobn z dano frekvenco vrti okrog palice. Podrobneje si oglejmo pentljo na palici (slika 3). Na vozlu delujejo tri sile: sila vrvice ter sili obeh krakov pentlje. Vozel ima zelo majhno maso, zato je vsota teh sil nanj vedno enaka nič. Vrvica v srednji legi leži na premici, ki gre skozi središče palice. Takrat sta velikosti sil obeh krakov na vozlu enaki, in sicer

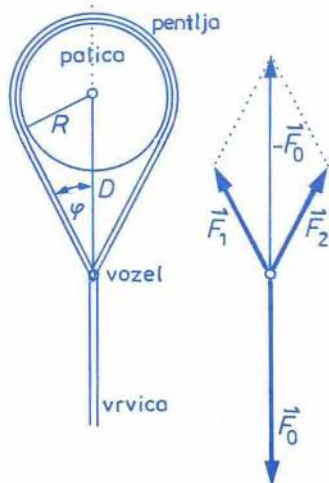
$$F_1 = F_2 = \frac{F_0}{2 \cos \varphi},$$

kjer je F_0 velikost sile vrvice, φ pa polovični kot med krakoma pentlje. Pentlja naj v srednji legi ne drsa po palici. Ker se vrvica vrti, postaja sila F_1 vse večja, sila F_2 pa se manjša (slika 4). V trenutku, ko je vrvica vzporedna z levim krakom pentlje, je sila F_1 kar nasprotno enaka sili vrvice, sila F_2 pa enaka nič in je zato desni krak pentlje ohlapen. V tem trenutku vrvica zdrsne, pentlja se spet postavi v srednjo lego in vse se ponovi. Čas med zaporednima pokoma je kar enak času, ki ga potrebuje vrvica, da se premakne za kot φ . Velja zveza:

$$\varphi \approx \frac{R}{D},$$



Slika 2. Poskus, pri katerem izmerimo sili lepenja in trenja.

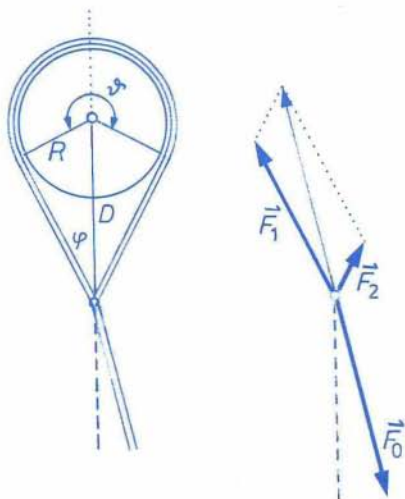


Slika 3. Pentlja v srednji legi. Sili F_1 in F_2 obeh krakov pentlje sta po velikosti enaki.

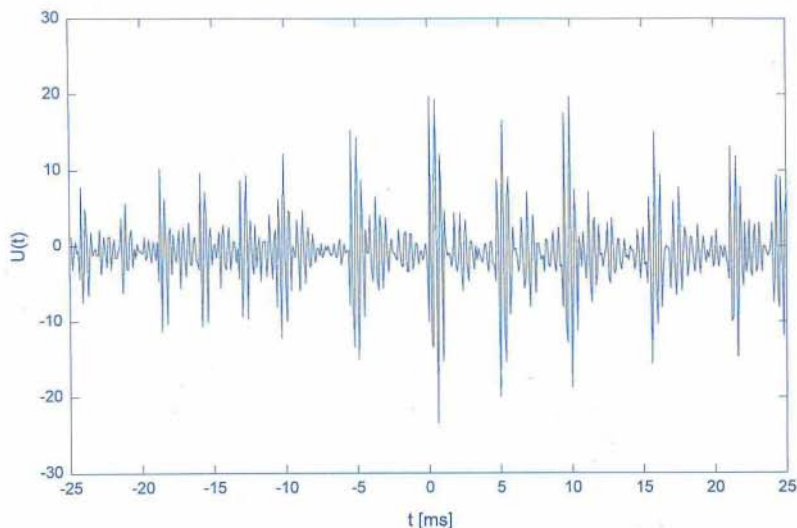
kjer je R polmer palice, D pa razdalja med vozlom in središčem palice. Če se vrstica vrti s frekvenco ν , opravi v času $\frac{1}{\nu}$ polni kot 2π in zato v času $\Delta t = \frac{\varphi}{2\pi\nu}$ kot φ . Frekvenca pokov je potem

$$\nu_p = \frac{1}{\Delta t} = 2\pi\nu \frac{D}{R},$$

torej obratno sorazmerna s polmerom palice. V resnici so razmere bolj zapletene, kar potrjuje tudi časovni potek signala iz kapacitivnega mikrofona (slika 5), s katerim smo snemali zvok. Vidimo, da pri zdrsu pentlje opna bobna zaniha s frekvenco blizu 1 kHz in da si zdrsi sledijo v času okrog 5 ms in da niso povsem enakomerni. Koeficient lepenja ni neskončno velik in



Slika 4. Sili krakov F_1 in F_2 se s časom spreminjata, prva se povečuje, druga pa zmanjšuje. Ko je vrstica desnega kraka ohlapna, pentlja zdrsne.



Slika 5. S kapacitivnim mikrofonom posnet zvok igrarce. Ob zdrsu opna zaniha, potem pa se njeno nihanje duši do naslednjega zdrsa.

tudi koeficienta trenja ne smemo zanemariti. Podrobnejši račun pokaže, da je razmerje velikosti sil F_1 in F_2 v trenutku, ko pentlja zdrsne, odvisno le od koeficienta lepenja in objemnega kota pentlje ϑ :

$$\frac{F_1}{F_2} = e^{k_1 \vartheta}.$$

Tudi v tem primeru je zveza med frekvenco ν_p , radijem R in razdaljo D taka kot prej, v njej pa se pojavi še koeficient lepenja. Morali bi tudi upoštevati koeficient trenja, ki smo ga tu zanemarili. Pri zelo visoki frekvenci pokov bi morali upoštevati še gibanje vrvice in opne, kar ni preprosto.

Tako igračko lahko naredimo tudi iz prazne konzervne škatle tako, da je opna kar kovinsko dno. Njen zvok pa ni več podoben škrlatovemu.

Andrej Likar

NEMOGOČI PREDMET JE MOGOČ

Naslovnica prve letošnje številke Preseka me je očarala že pri poštnem nabiralniku. Fotografijo Bruna Ernsta, na kateri je "model" Penrosovega trikotnika, in članek, v katerem je matematično ovržen obstoj tega predmeta, sem molela pred oči vsakemu, ki mi je bil pripravljen prisluhniti. Moje navdušenje za nemogoče predmete je namreč vzniknilo že v juliju 1995, ko sem se udeležila raziskovalnega tabora z naslovom *Od jezika do dokaza*.

Tabor sta pripravila profesorja bežigradske gimnazije, Jani Kovačič in avtor omenjenega članka, Vilko Domajnko. Udeleženci tabora smo lahko listali po knjigah z Escherjevimi reprodukcijami; nekatere so bralci Preseka videli tudi v članku *Penrose – Escher – Reuteswärd*. V spomin se mi je vtisnila Vilkova pripomba: "Za mnoge nemogoče predmete obstajajo tridimenzionalni modeli ..." Ob pogledu na naše dvomeče obraze je nadaljeval: "... le da niso videti taki, kot mislite." Kljub tej pomoči sem bila še vedno brez vsake predstave, kakšen naj bi bil tak predmet videti "od zadaj in od strani".

Deseto leto teče, odkar poučujem matematiko kamniške srednješolce, in v tem času sem spoznala preprosto, a osnovno pedagoško skrivnost: *od dijakov se lahko veliko naučiš*. Med svoja dekleta in fante tako nisem šla samo z ogromno barvno fotokopijo Presekove naslovnice, ki so se ji vsi čudili, ampak tudi z vablivo ponudbo: "Vsakemu, ki mi jutri prinese tridimenzionalen model Penrosovega trikotnika, natančneje, model, ki bo z neke točke v prostoru videti kot Penrosov trikotnik, zapišem petko v redovalnico ..."

Kot je pri takih natečajih pričakovati, je večina dijakov zavila z očmi in preklopila možgane na večno lepi najstniški program. Pri nekaterih pa sem le dočakala značilni zamegljeni pogled. Kresale so se prve ideje: nekdo je razmišljal o modelu, pri katerem bi uporabil žico; drugi bi si pomagal z Rubikovo kačo; večina pa je dvomila v uspešnost modeliranja, ker so bili prepričani, da gre pri Presekovi naslovnici za fotomontažo ali računalniško grafiko.

Naslednjega dne smo imeli vse: model, množico dijakov, ki so si ga želeli ogledati, petko v redovalnici in običajni soglasni vzklík v 3. B: "Seveda – Mitja, kdo pa drug!" Pred tem mi je Mitja Luštrek postavil na mizo škatlo, iz katere sem – z občutkom, ki ga nisem doživela že od svojega petega rojstnega dneva – potegnila papirnat modelček, ki je ustrezal vsem zahtevam.

Mitja svoje razmišljanje, ki ga je pripeljalo do modela, opisuje takole:

"Izdelati nemogoči predmet – zveni dokaj nemogoče, mar ne? Vendar, kot je razvidno s slik, zadeva ni tako nemogoča. Ko sem videl fotografijo v Preseku, mi je najprej prišlo na misel, da gre za prevaro in da predmet v resnici sploh ni tridimenzionalen – da je narejen enako kot njegova risba, le da je sestavljen iz lesenih ploščic. Toda ko sem ga tako izdelal, mi o njegovi tridimenzionalnosti ni uspelo prepričati prav nikogar. Zato sem poskusil drugače – in, glej ga zlomka, šlo je! Telo, ki sem ga izdelal, je pravzaprav še boljše od onega v Preseku, saj je mesto, kjer se začetek in konec navidezno stikata, na robu, pri onem v Preseku pa ni (sicer to dosti ne moti, saj je narejen iz lesa in je pričakovati, da so deščice nekje zlepljene skupaj)."

Vse ostalo povedo fotografije na III. strani ovitka Preseka, saj je Mitja svojo mojstrovino na mojo željo upodobil tudi v "fotostripu". Z Vilkom Domajnkom pa se že dogovarjam za izposojlo nadaljnje literature. Mitja je namreč problemu nemogočih predmetov pripravljen posvetiti še marsikatero sivo celico ...

Marta Zabret

NALOGI O 1996

1. naloga: Določi število

$$k = \min\{|1 + 9^m - 96^n| : m, n \in \mathbb{N}\}$$

2. naloga: Dokaži, da imata za vsako naravno število n števili 1996^n in $1996^n + 4^n$ v desetiškem zapisu enako število števč.

Roman Drnovšek

OBSTOJNA PRAŠTEVILA

Ko v praštevilu 13 zamenjamo vrstni red števk, dobimo praštevilo 31. Če napravimo isto s praštevilom 19, pridemo do števila $91 = 7 \cdot 13$, ki ni praštevilo.

Imenujmo dvo ali večmestno praštevilo **obstojno**, če vsaka permutacija njegovih števk pripelje do praštevila. Torej: praštevilo 13 je obstojno, praštevilo 19 pa ne.

Takoj vidimo, da v desetiškem zapisu obstojnega praštevila ne more biti števke 2. Števke namreč lahko preuredimo tako, da pride 2 na mesto enic. Dvo ali večmestno število, ki se končuje z 2, pa ni praštevilo. Iz podobnih razlogov se v obstojnem praštevilu ne more pojavljati tudi nobena od števk 0, 4, 6, 8, 5. Zato: **V desetiškem zapisu obstojnega praštevila nastopajo le števke 1, 3, 7, 9.**

Poiščimo vsa dvomestna obstojna praštevila. Najdemo jih med tistimi dvomestnimi praštevili, ki se zapišejo le s števki 1, 3, 7, 9; torej med praštevili

$$11, 13, 17, \underline{19}, 31, 37, 71, 73, 79, 97, \quad (1)$$

ki so vsa razen 19 obstojna. Vseh dvomestnih praštevil je 21, po (1) je devet obstojnih.

Kako bi našli vsa trimestna obstojna praštevila? Podobno kot v (1) bi iz seznama vseh trimestnih praštevil, ki imajo v zapisu le števke 1, 3, 7, 9, odbrali obstojna praštevila. Ravnamo pa lahko še drugače.

V zapisu trimestnega števila so, ali vse števke enake ali vse števke različne ali pa dve števki enaki.

Če so vse števke enake, je trimestno število deljivo s 3 in ni praštevilo.

Naj bodo vse števke različne. Iz števil

$$137, 139, 179, 379 \quad (2)$$

dobimo s permutacijami števk vsa trimestna števila, ki imajo v zapisu same različne števke 1, 3, 7, 9. Števila (2) so sicer praštevila, ni pa nobeno obstojno. Je namreč

$$371 = 7 \cdot 53, \quad 319 = 11 \cdot 29, \quad 791 = 7 \cdot 113, \quad 793 = 13 \cdot 61.$$

Obstojnih trimestnih praštevil s tremi različnimi števki torej ni.

Naj bosta sedaj v številu od treh števk dve enaki. Napravimo seznam števil, ki se zapišejo z 1, 3, 7, 9 in imajo prvi števki enaki:

$$113, \underline{117}, 119, 331, 337, \underline{339}, \underline{771}, 773, 779, 991, \underline{993}, 997. \quad (3)$$

Obstojna trimestna praštevila z dvema enakima števka so nujno med števili (3). Podčrtana števila so deljiva s 3, torej niso praštevila. Ker je

$$119 = 7 \cdot 17, \quad 133 = 7 \cdot 19, \quad 737 = 11 \cdot 67, \quad 779 = 19 \cdot 41, \quad 979 = 11 \cdot 89,$$

se seznam (3) skrči na

$$113, 337, 991. \quad (4)$$

Če je kaj trimestnih obstojnih praštevil z dvema enakima števka, so zajeta v (4). Preizkus ali pogled v praštevilsko tabelo potrdi, da so števila (4) praštevila. Permutacije števk v (4) privedejo do števil

$$113, 131, 311; 337, 373, 733; 991, 919, 199, \quad (5)$$

ki so obenem praštevila.

Sklep: Med trimestnimi praštevili je devet obstojnih, navedena so v (5). Dodajmo še, da je vseh trimestnih praštevil 143.

Pri iskanju štirimestnih obstojnih praštevil je treba upoštevati možnosti: Od štirih števk, vzeti izmed števk 1, 3, 7, 9, so, ali vse štiri različne ali tri različne ali dve različni ali vse štiri enake. Če si pomagamo s praštevilsko tabelo, hitro ugotovimo, da štirimestnih obstojnih praštevil ni. Na tak način bi mogli nadaljevati pri določanju pet in večmestnih obstojnih praštevil.

Večmestno število, ki ima vse števke enake c , ob vsaki permutaciji števk preide vase. Tako število pri $c \neq 1$ ni praštevilo, saj premore delitelj $c > 1$. Vzemimo sedaj, da v številu a nastopa samo števka 1, in to j -krat. Če je j sestavljeno število, je tudi a sestavljeno število. Naj bo namreč $j = st$ in s, t naravni števili, večji od ena. V številu

$$b = 10^{s-1} + 10^{s-2} + \dots + 10 + 1$$

so vse števke 1 in jih je s . Ker je

$$a = b \cdot 10^{j-s} + b \cdot 10^{j-2s} + \dots + b \cdot 10^s + b,$$

deli b število a . Zaradi $1 < s, 1 < t$ je tudi $1 < b < a$ in a sestavljeno število.

Iz zadnje ugotovitve izhaja: Število, ki ima v desetiškem zapisu vse števke enake 1, bi moglo biti praštevilo kvečjemu tedaj, ko je število števk j praštevilo. Za $j = 2$ dobimo praštevilo 11. Ne velja pa to za $j = 3, 5, 7, 11, 13, 17$. Saj je

$$111 = 3 \cdot 37$$

$$11111 = 41 \cdot 271$$

$$1111111 = 239 \cdot 4649$$

$$1111111111 = 21649 \cdot 513239$$

$$111111111111 = 53 \cdot 79 \cdot 265371653$$

$$1111111111111111 = 2071723 \cdot 5363222357.$$

Pač pa dobimo praštevila za $j = 19, 23$, potem pa za $j = 29, 31, 37, 41$ spet ne.

Znano je, da je praštevil neskončno. Ali med števili, ki se zapišejo s samimi enkami, neskončnokrat naletimo na praštevilo? Ali je obstoj njih praštevil neskončno? Na zastavljeni vprašanji pisec teh vrstic ne ve odgovora.

Naloga. Zgoraj so obravnavana obstojna praštevila v desetiškem zapisu. Naj bo p praštevilo. V dvojiškem zapisu je iskati obstojna praštevila le med Mersennovimi števili $1...1 = 2^p - 1$ (števka 1 nastopa na levi p -krat). Prepričaj se o tem.

Jože Grasselli

MANJKAJOČI ŠTEVILI - Rešitev s str. 99

Med naravnimi števili od 1 do n iščemo manjkajoči dve. Osnovno idejo že poznamo. Izračunamo vsoto števil na datoteki, jo odštejemo od vsote števil med 1 in n , ta je $\frac{n(n+1)}{2}$, in dobimo vsoto obeh manjkajočih števil. Označimo jo z s . Vendar pa manjkajočih števil samo iz njune vsote ne moremo enolično določiti. Vemo pa, da bo eno od števil manjše, drugo pa večje od $\frac{s}{2}$ (ker sta manjkajoči števili različni, nobeno ne bo enako $\frac{s}{2}$). Dovolj je poiskati le manjše, saj večje dobimo tako, da od vsote obeh odštejemo prvo. Iskanje manjšega pa je že znana naloga, le pri pregledu datoteke moramo upoštevati le tista števila, ki niso večja od $\frac{s}{2}$. Ker že vemo, da med njimi na datoteki manjka natanko eno, iz vsote prisotnih zlahka določimo manjkajočega.

Oglejmo si program:

```

program ManjakajociStevili;
{ Med števili na izbrani datoteki poišče tisti, ki manjkata. }
var
  ime: string;                                { ime datoteke }
  f: file of longint;
  n: longint;
  s: longint;                                { vsota obeh manjkajočih števil }
  vsota: longint;                            { vsota vseh števil na datoteki }
  vsotap: longint;                           { vsota števil pod polovico s }
  a,b: longint;                              { manjkajoči števili }
  i,s2: longint;
begin
  write('Na kateri datoteki se nahajajo števila: '); readln(ime);
  assign(f,ime); reset(f);
  n := 2; vsota := 0; { na datoteki manjkata natanko dve števili }
  while not eof(f) do { preštejemo števila in izračunamo vsoto }
    begin read(f,i); n := n+1; vsota := vsota+i; end;
  s := (n*(n+1) div 2) - vsota;
  s2 := s div 2;
  reset(f);
  vsotap := 0;
  while not eof(f) do
    begin read(f,i); if i <= s2 then vsotap := vsotap+i; end;
  a := (s2*(s2+1) div 2) - vsotap; { izračunamo manjkajoči števili }
  b := s - a;
  write('Na datoteki ',ime,' manjkata števili ',a,' in ',b,'. '); readln;
end.

```

Ker je največja vrednost, ki jo v turbo pascalu lahko shranimo v spremenljivko tipa `longint`, enaka $2^{31} - 1 = 2147483647$, gornji program računa pravilno le za $n \leq 65535$. Seveda pa ga lahko popravimo tako, da namesto vsote prisotnih števil izračunamo raje ostanek te vsote pri deljenju z $2n$ (računati moramo po modulu $2n$, saj je vsota obeh manjkajočih števil lahko večja od n , ne more pa biti večja od $2n$). Že samo ta ostanek nam enolično določa vsoto obeh manjkajočih števil. Podobno storimo tudi pri seštevanju števil, ki so manjša od $\frac{s}{2}$. Tako spremenjeni program bo pravilno računal tudi za zelo velike vrednosti števila n . Seveda pa taka sprememba zahteva še dodatno branje datoteke, s katerim najprej preštejemo števila na datoteki in določimo n .

Martin Juvan

KOZA

Prišla je zima. Jesenske zvezde se polagoma poslavljajo od nas. Nado mestile jih bodo zvezde zimskega neba. Med njimi najbolj izstopa svetlo ruma *Kapela*. Pri nas ji rečemo tudi *Koza*.

Prav nič ni težko najti Koze na večernem zimskem nebu, saj je po siju peta najsvetlejša zvezda (slika 1). Sredi zime jo v naših krajih lahko opazujemo okoli zenita.

Slika 1. Takole po Velikem vozu izsledimo Kapelo – Kozo, najsvetlejšo zvezdo v ozvezdju Voznik – Auriga (lat.). Najboljša vidljivost tega ozvezdja pri nas je od septembra do junija.

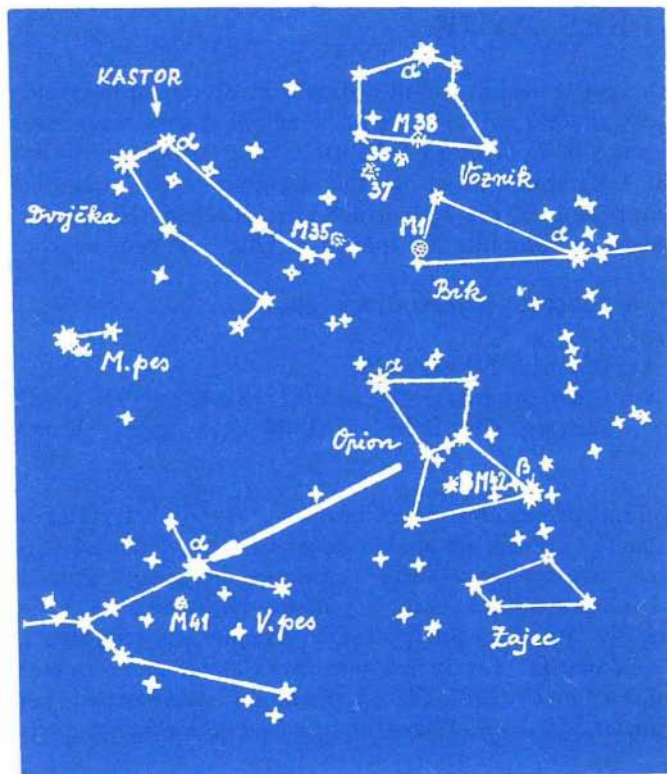


Koza je glavna ali vodilna zvezda v ozvezdju *Voznik*, ali po starem *Kočijaž*. Nebesni Voznik predstavlja po grškem bajeslovju Erihtonija, sina boga ognja in kovaštva He-fajsta. Rodil se je s pohabljenimi nogami. Vzredila ga je boginja modrosti Atena, brez vednosti bogov na Olimpu. S polnoletnostjo je postal kralj Aten. Ker ni mogel hoditi, je izumil voz oziroma kočijo s štiriimi konji. Vrhovni bog Zevs je bil tako navdušen nad njegovim izumom, da je Erihtonija za nagrado postavil na nebo, kjer bodo lahko umetnost njegove vožnje občudovali tudi ljudje (slika 2).

Kapela je zvezda, ki so jo zelo proučevali. S posebnimi raziskavami, ki slonijo na interferenci prihajajoče svetlobe z zvezd, so ugotovili, da je



Slika 2. Ozvezdje Voznik upodablja na nebu izumitelja voza (kočije). Slika je iz moje knjižice *Veliki in Mali medved*, narisal pa jo je akademski slikar Matjaž Schmidt.



Slika 3. Glavne zvezde zimskega neba, zbrane v ozvezdjih Bik, Orion, Veliki pes, Mali pes, Dvojčka in Voznik: α Oriona – Betelgeza, α Bika – Aldebaran, α Voznika – Kapela, α Velikega psa – Sirij, najsvetlejša zvezda neba, α Dvojčkov – Kastor (daljnogledska dvojna zvezda).

dvojna zvezda. Obe zvezdi Kapele pa sta tako zelo blizu skupaj, da bi morali vzeti zelo močan daljnogled, da bi ju ločili.

Ker Kapelo tako preprosto najdemo na nebu, predlagamo, da se primerno oblečete in obujete in v jasni noči izsledite in nato opazujete to lepo zvezdo. Poskusite izslediti in opazovati še ostale svetle zvezde zimskega neba, ki so zbrane v ozvezdjih, kot jih prikazuje zadnja skica.

Od vsega neba je zimsko zvezdno nebo najlepše. Zato ne zamudite priložnosti za opazovanje te zimske lepote.

Marijan Prosén

SAJ NI RES, PA JE

V Preseku smo že večkrat pisali o številu π . Tokrat objavljamo program v programskem jeziku C, ki izpiše prvih 800 mest tega zanimivega števila. Sestavil ga je Dik T. Winter z inštituta CWI v Amsterdamu. Sprva nisva verjela, da tako kratek program lahko izračuna toliko mest števila π , ko pa sva ga preizkusila, sva bila prijetno presenečena. Kot lahko vidite iz spodnje kode, ki nima niti 200 znakov, je Dik pravi programer.

```
int a=10000,b,c=2800,d,e,f[2801],g;
main(){
    for(;b-c;) f[b++]=a/5;
    for(;d=0,g=c*2;c-=14,printf("%.4d",e+d/a),e=d%a)
        for(b=c;d+=f[b]*a,f[b]=d%--g,d/=g--,--b;d*=b);
}
```

Pri prevajanju gornjega programa nekateri prevajalniki izpišejo nekaj opozoril, vendar se na njih ne smemo ozirati. Dik je namreč v programu izpustil vse "nepotrebne okraske". Pri tem se je tudi potrudil, da je program kar se da kratek, zato je v njem uporabil kopico v C-ju dovoljenih okrajsav. Program predpostavlja, da spremenljivka tipa `int` hrani 32-bitna cela števila. Če uporabljate prevajalnik, kjer so običajna cela števila dolga 16 bitov (Borland, ...), potem `int` zamenjajte z `long`.

O podrobnostih uporabljenega algoritma pa bova raje molčala.

Martin Juvan, Matjaž Zaveršnik

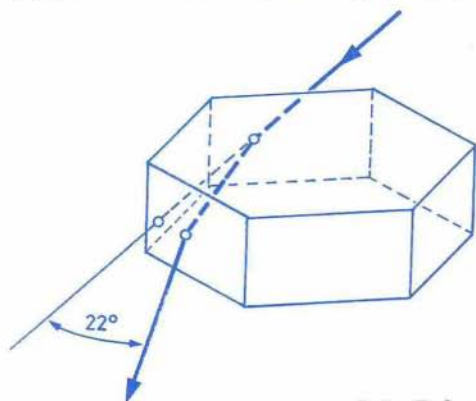
SOSONCE IN 22° HÁLO

Na fotografiji na naslovni strani Preseka¹ vidimo ob zahajajočem soncu nad obmorsko pokrajino in lesketajočim se morjem na cirusnih oblakih še del pojava hálo, in sicer tako imenovano sosonce. Če pozorno pogledamo, opazimo ob notranjem robu sosonca tudi kratek, navpično se raztezajoč del kroga, imenovanega 22° hálo. Oba pojava nastaneta zaradi loma sončne svetlobe na lebdečih ledenih kristalčkih, ki imajo obliko pravilne šeststrane prizme. Ker se na sliki vidi sosonce, celotnega kroga 22° hála pa ni videti, to pomeni, da so kristalčki v cirusih

¹ Za razlago posnetega naravnega pojava smo poprosili Jožeta Rakovca, profesorja meteorologije na Fakulteti za matematiko in fiziko.

orientirani pretežno tako, da so njihove osnovne ploskve približno vodoravne. Tako pride do dvakratnega loma svetlobe skozi dve nesosednji stranski ploskvi prizme, kot kaže skica. Ker se lomni količniki ledu za različne barve nekoliko razlikujejo, se svetloba tudi razklanja: notranji rob sosonca je rdečkast, zunanji, v rep razpotegnjeni, pa bolj rumen oziroma zeleno-modro.

V eni od naslednjih številc Preseka pa kaj več o hálu, ki ga lahko sestavlja več krogov, peg, lokov itd. Toliko, da so včasih videli v njem znamenje za bližajoče se hude dogodke, npr. vojne, lakoto, kugo,



Jože Rakovec

FUNKCIJSKA ENAČBA - Rešitev s str. 88

(a) Če v enačbo $f(x+ma)+f(x)=0$ vstavimo $x+ma$ namesto x , dobimo $f(x+2ma)+f(x+ma)=0$. Zato je $f(x+2ma)=-f(x+ma)=f(x)$ za vsak $x \in \mathbb{R}$. Torej je število $2ma$ perioda funkcije f . Podobno ugotovimo, da je število $2na$ perioda funkcije f .

Ker sta števili m in n tuji, nista obe sodi. Zaradi simetrije smemo privzeti, da je m sodo in n liho število. Torej je $m=2k$ in $n=2l+1$ za neki celi števili k in l . Potem imamo po eni strani

$$f(x+mna) = f(x+k(2na)) = f(x)$$

in po drugi

$$f(x+mna) = f(x+ma+l(2ma)) = f(x+ma) = -f(x)$$

za vsako realno število x . Torej velja $f(x) = -f(x)$ oziroma $f(x) = 0$ za vsak $x \in \mathbb{R}$.

(b) Če sta m in n različni lihi števili, potem je funkcija $f(x) = \sin(\pi x/a)$ primer iskane funkcije.

Roman Drnovšek

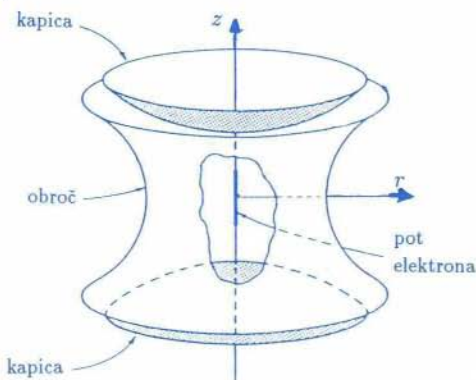
PAST ZA DELCE

*Ujemi ion, daj ga v past
in pazi, da ti ne uide.¹*

Ali bi lahko naelektren delec – zaradi preprostosti na začetku govôrmo o pozitivnem ionu – ločili od vseh drugih delcev in dosegli, da bi dalj časa ostal v določenem delu prostora? Ion bi hitro izgubili, če bi ga zaprli v posodo, ker bi zadel steno posode. Pomagamo si z drugimi naelektrenimi delci, ki ustvarijo električno in magnetno polje. Polji izvajata silo na ion. Z električnim in magnetnim poljem je treba ion ločiti od okolice in zadržati v določenem delu prostora, da bi ga v miru opazovali. Napravo, ki nam to omogoči, imenujemo *past*. S pastmi so v zadnjem času naredili merjenja, ki so se zdela prej neizvedljiva.

Past sestavljajo tri osno simetrične elektrode: obroč s hiperboličnim presekom in hiperbolični kapici (slika 1). Obroč je priključen na en, kapici pa na drug priključek izvira enosmerne napetosti. Taka razporeditev elektrod ustvari *kvadrupolno električno polje*. Vsa naprava je v zelo močnem magnetnem polju v smeri osi in je nameščena v nepredušni posodi, iz katere so izsesali ostanke zraka.

Slika 1. Elektrode pasti ustvarijo kvadrupolno električno polje. To polje in magnetno polje zadrži elektrone v majhnem valjastem prostoru s premerom nekaj deset mikrometrov in nekoliko večjo višino. V močnem magnetnem polju elektroni zaradi gibanja pravokotno na smer polja s tako imenovanim *sinhrotronskim sevanjem* v desetini sekunde izgubijo kinetično energijo, ki je naložena v hitro kroženje v ravnini, pravokotni na smer magnetnega polja.



Delci iz okolice ne smejo motiti delcev v pasti. Zato morajo ustvariti dovolj dober vakuum. Tlak znižajo v skrajnem primeru na okoli $7 \cdot 10^{-17}$ mbara, kar je okoli $1,4 \cdot 10^{19}$ -krat manj od navadnega zračnega tlaka. To je milijonkrat nižji tlak od najnižjega tlaka, ki ga je mogoče izmeriti z običajnimi merilniki.

¹ Po ameriški popevki "Catch a falling star and put it in your pocket, never let it go away."

Kljub zelo dobremu vakuumu delci v pasti niso popolnoma neodvisni od okolice. Elektroni, ki ustvarijo električno polje, se v elektrodah neurejeno gibljejo sem in tja in se po naključju zdaj tu nakopičijo in tam razredčijo, zdaj tam nakopičijo in tu razredčijo. Te *fluktuacije* so tem izdatnejše, čim večja je povprečna kinetična energija elektronov, torej čim višja je temperatura. Fluktuacije elektronov povzročajo fluktuacije električnega polja, ki vplivajo na naelektreni delec. Tako delec v pasti sledi fluktuacijam elektronov v elektrodah in se neurejeno giblje sem in tja. Delcu lahko priredimo v povprečju kinetično energijo, ki jo ima zaradi fluktuacij in ki je sorazmerna s temperaturo. Navadno nam ne pride na misel, da bi posameznemu delcu priredili temperaturo, a v tem primeru to na opisani način lahko storimo, le pozabiti ne smemo, za kaj gre.

Past hladijo s kapljevinskim helijem pri temperaturi malo nad 4 K, samo dobre 4 stopinje nad absolutno ničlo pri -273° . Zato ima delec pri tej temperaturi okolice v povprečju samo 0,0005 eV kinetične energije. Izračunamo jo z enačbo za povprečno kinetično energijo $\frac{3}{2}kT$, v kateri je $k = 1,38 \cdot 10^{-23}$ J/K Boltzmannova konstanta. Joule spremenimo v elektronvolte: $1 \text{ eV} = 1,6 \cdot 10^{-19} \text{ J}$.

Zaradi zelo nizke temperature se molekule preostalega plina obesijo na stene posode, tako da za vakuum ni treba še posebej skrbeti. Pri navedenem tlaku in temperaturi je v kubičnem centimetru v povprečju 130 molekul. To izhaja iz plinske enačbe za gostoto molekul $n = p/kT$.

Delec v pasti s svojim električnim poljem vpliva na elektrone v elektrodah in povzroča med elektrodama napetost, ki je odvisna od njegove lege. Zaradi tega nastane med obema kapicama napetost, ki jo ojačijo in neposredno opazujejo efektivno napetost na izhodu ojačevalnika. (Efektivno vrednost napetosti dobimo tako, da trenutno vrednost napetosti kvadriramo, izračunamo povprečje in nato korenimo.) Na drugi strani lahko med kapici priključijo visokofrekvenčno izmenično napetost in z njo vplivajo na gibanje ujetega delca, s tem da delcu dovedejo energijo ali jo odvedejo od njega (slika 2).

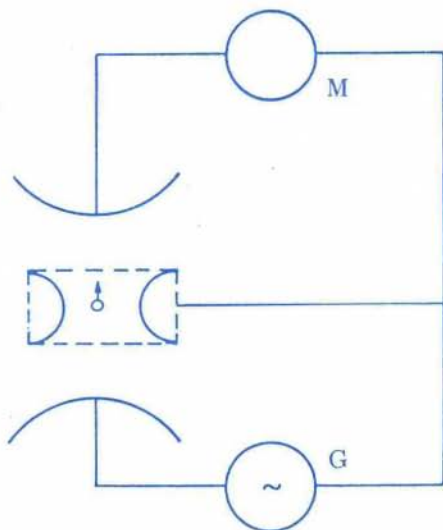
Na poseben način zmanjšajo povprečno kinetično energijo delca v pasti – ga “hladijo”. Med kapici priključijo napetost, ki niha z malo nižjo frekvenco od lastne frekvence delca. Energijo iz elektromagnetnega valovanja absorbirajo pretežno delci, ki potujejo v nasprotni smeri kot elektromagnetno valovanje in za katere je na račun Dopplerjevega pojava frekvenca povečana. Delci nato valovanje izsevajo v vseh mogočih smereh, zaradi česar se jim v povprečju zmanjša kinetična energija.

Pasti so razvili po stari Penningovi zamisli: Hans Georg Dehmelt z univerze v Seattlu v ZDA in Wolfgang Paul z univerze v Bonnu ter njuni učenci in sodelavci. Dehmelt in Paul sta svoj čas imela istega učitelja in sta

si leta 1989 razdelila Nobelovo nagrado. Paul je raziskoval pasti, na katere je priključil izmenično napetost z radijsko frekvenco, Dehmelt pa je uporabil enosmerno napetost in dodal magnetno polje.

V past ujamejo različne delce in izvajajo z njimi zelo natančna merjenja v različne namene. Najprej omenimo merjenja z elektronom. Elektron je v pasti vezan kot v orjaškem atomu, le da ga namesto električnega polja jedra vežeta električno polje elektrod in magnetno polje tuljave. Tak "atom" imenujejo *geonij*, češ da je elektron, vezan na Zemljo. V marsičem je geonij preprostejši od navadnih atomov in omogoča merjenja, ki jih z navadnimi atomi ni mogoče izvesti. Pri enem izmed poskusov so elektron zadrževali v pasti deset mesecev.

Doslej smo elektron opisovali, kot da bi šlo za naelektreno točkasto telo, katerega gibanje obravnava Newtonova mehanika. Vendar je treba vezani elektron obravnavati v okviru kvantne mehanike, ki velja v svetu atomov. Naelektreni delci v pasti ne morejo imeti katere koli energije, ampak so lahko samo v stanjih z določeno energijo. Mogoči so prehodi med stanji, pri katerih vezani delec seva ali absorbira elektromagnetno valovanje. Z merjenjem frekvence tega sevanja je mogoče priti do pomembnih podatkov. Elektron se obnaša hkrati kot vrtavka in magnetnica. Vrtenja elektrona si sicer ne moremo predstavljati kot vrtenja kolesa, ker se naboj elektrona kaže do zelo majhnih razdalj do 10^{-18} m, kot točkast. Mogoče pa je količino, ki zadeva magnetne lastnosti elektrona, povezati s količino, ki zadeva njegovo "vrtenje". Z merjenjem frekvence elektromagnetnega valovanja pri prehodih med stanji so določili to razmerje na enajst mest. Podatek se v okviru napak pri merjenju in računanju ujema s teoretično napovedjo in je eden izmed najnatančnejše izmerjenih količin v fiziki.

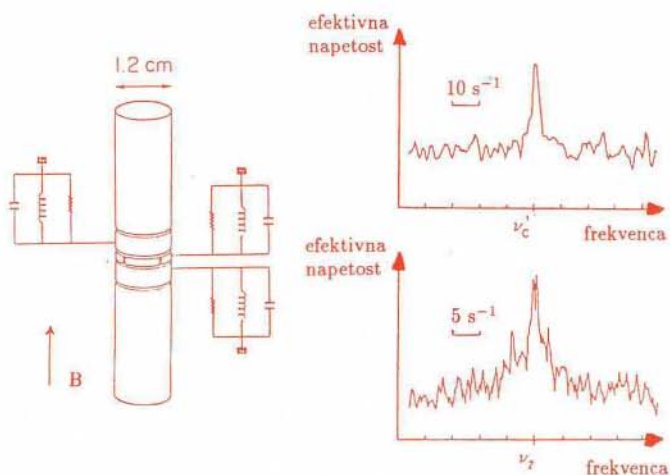


Slika 2. Elektronski krog, s katerim posredno opazujejo gibanje naelektrenega delca v pasti. Z merilnikom M merijo efektivni tok, medtem ko izvir G daje izmenično gonilno napetost z visoko frekvenco. Zasledujejo časovno odvisnost efektivne napetosti, ki ustreza efektivnemu toku. To napetost nanesejo v grafu v odvisnosti od časa.

V pasti lahko zadržujejo posamični ion težjega elementa in ga dražijo s curkom laserske svetlobe, da znova in znova absorbira in seva. Izsevano svetlobo je mogoče opazovati na primer v smeri pravokotno na curek laserske svetlobe. Tako so opazovali barijev ion, ki je seval modrozeleno svetlobo, ko so ga osvetlili z laserjem. Ion so poimenovali Astrid, češ da so bili z njim tako dolgo v stiku, da so dobili do njega oseben odnos. Dehmelt, ki si je ves čas želel delati poskuse s posamičnimi delci in ki so ga nekateri zato imeli za čudaka, je zapisal: "Laserska svetloba je lahko povprašala en in isti atom: 'Ali si še tukaj?' in zelenomodra fluorescenčna svetloba je odgovarjala: 'Da, še sem tukaj.'"

Delec v pasti zelo dolgo časa ne trči z delcem iz okolice. Zato je mogoče v pasti zadrževati antidelce. Antidelci so nekakšne slike delcev, podobno kot je leva roka zrcalna slika desne. Antidelci imajo enako maso in ne razpadejo, če ne razpadajo njihovi delci, a imajo naboj z nasprotnim znakom. Če antidelec trči z delcem, se spremeni v druge delce ali v sevanje, kar imenujemo *anihilacija*. V pasti so trki tako redki, da je mogoče v njej zadrževati tudi antidelce po več mesecev. Tako so več mesecev držali v pasti pozitron, antidelec elektrona, in delali z njim poskuse. Temu pozitronu so dali ime Priscilla. Zapisali so: "Tukaj prav zdaj v majhnem valjastem prostoru s premerom približno $30\ \mu\text{m}$ in dolžino $60\ \mu\text{m}$ v središču naše pasti biva pozitron Priscilla, ki je v zadnjih treh mesecih po ukazih ali sam od sebe nastopal z baletom kvantnih skokov." Pozitronov ni težko dobiti, oddaja jih na primer umetni radioaktivni izotop natrija ^{22}Na .

Z nekoliko spremenjeno pastjo so raziskovali antiprotone, antidelce protonov, vodikovih atomskih jeder (slika 3). Past mora biti nekoliko drugačna, ker nastanejo antiprotoni z veliko energijo pri reakcijah protonov z veliko energijo s protoni v snovi. V nekakšnem majhnem pospeševalniku, pravzaprav "pojernalniku", sicer zavrejo antiprotone, a imajo ti kljub temu preveliko energijo. Gruče antiprotonov gredo skozi steno pasti in pri trkih izgubijo kinetično energijo, nekateri se anihilirajo. Zato je past oblikovana nekoliko drugače. V njo spustijo gručo antiprotonov na strani, na kateri je tisti trenutek na zunanji elektrodi pozitivna napetost. V pasti pa pripravijo množico elektronov z majhno energijo. Del antiprotonov se ob trkih z njimi znebi presežne energije in obtiči v pasti. Potem ko gruča vstopi v past, takoj tudi na to zunanjo elektrodo priključijo znatno negativno napetost. Antiprotoni niso antidelci elektronov in pri trkih ne pride do anihilacije. Upajo, da bo mogoče ob pospeševalniku spraviti antiprotone v past in nato past odpeljati na mesto, kjer ne moti zunanje magnetno polje. Izdelali so tudi superprevodno tuljavo, ki se je odzvala na spremembe magnetnega polja ob pospeševalniku, tako da je ostal tok po njej nespremenjen.



Slika 3. Elektrode pasti za antiprotone imajo nekoliko drugačno obliko. Med srednjim obročem in zunanji elektrodo, ki ustrežata kapicama, sta vmesni elektrodi. Tudi tako razvrščene elektrode dajo kvadrupolno električno polje. Obroč je razdeljen na več odsekov, ki jih uporabljajo pri merjenju. Med tak odsek in vmesno elektrodo priključijo izmenično napetost, ki ji spreminjajo frekvenco. Med drug odsek in vmesno elektrodo priključijo vhod ojačevalnika in na izhodu merijo efektivno napetost. V odvisnosti te napetosti od frekvence izmenične napetosti se pojavi vrh, ko pride do resonance. Tedaj se frekvenca izmenične napetosti ujema s frekvenco hitrega kroženja ν'_c v ravnini, pravokotni na magnetno polje delca (zgoraj), ali s frekvenco nihanja v smeri magnetnega polja ν_z (spodaj). S tem natančno izmerijo obe frekvenci in preko prve določijo maso.

V pasti so zadrževali več tisoč antiprotonov več kot dva meseca. Pri tem so tisočkrat natančnejše kot prej izmerili maso antiprotona. Ugotovili so, da se na sedem mest ujema z maso protona. Nadejajo se, da bo na istem kraju nekako uspelo shraniti dovolj antiprotonov in dovolj pozitronov, da se bodo spojili v atome antivodika. Raziskovanje teh naj bi natančno pokazalo, ali imajo antidelci glede na delce natančno opisane lastnosti in ne obstajajo majhni odmiki od teh. Antiatomov ne bo lahko opazovati. Načrt je sicer jasen: dobiti dovolj pozitronov in antiprotonov pri zelo majhni hitrosti, da ujamemo drugi druge in se spojijo v antiatome. Pri tem je treba opazovati sevanje in ugotoviti, ali je prav tako kot sevanje, ki nastane pri združevanju elektronov in protonov v atome. Težava je v tem, da so antiatomi brez naboja in jih ni mogoče zadržati v pasti.

Past so uporabili tudi kot zelo natančen *masni spektrometer*, s katerim merijo maso ionov. Z relativno natančnostjo $4 \cdot 10^{-10}$ so, na primer, določili razliko mas ionov CO^+ in N_2^+ .

Janez Strnad

POROČILO S 36. MEDNARODNE MATEMATIČNE OLIMPIADE

Po napornem popoldnevu (trije obroki hrane, dva filma in en prelet Atlantika) nam je do zaslužnega počitka manjkalo še prevoz do univerzitetnega centra York v Torontu v Kanadi. Nepolna dva tedna smo v njem prebivali udeleženci letošnje matematične olimpiade; med njimi tudi Jernej BARBIČ (Gimnazija Tolmin), Gorazd BRUMEN (Gimnazija Bežigrad, Ljubljana), Polona GREŠAK (Gimnazija in ESS, Trbovlje), Tadej NOVAK (SS Rudolfa Maistra, Kamnik) in Mitja PIRC (Gimnazija in ESS, Brežice) ter Matjaž ŽELJKO kot vodja slovenske ekipe.

Dneve do tekmovanja smo preživeli dinamično in v skladu z ameriškim hitrim načinom življenja (in prehranjevanja). In prav Mc'Donalds nas je rešil zanesljive dehidracije, saj smo si za ogled živalskega vrta v Torontu izbrali enega najbolj vročih in soparnih dni v zadnjih nekaj letih.

Člani tekmovalne komisije (Slovenijo je zastopal Darjo FELDA) so poskrbeli, da sta dopoldneva 19. in 20. julija za 413 dijakov minila v globoki zbranosti ob šestih tekmovalnih nalogah. Naslednji dve nalogi sta bili srednje težki:

1. Določi vsa cela števila $n > 3$, za katera obstaja n točk $A_1, A_2, \dots, A_n$ na ravnini in realna števila $r_1, r_2, \dots, r_n$, da sta izpolnjena pogoja
 - (i) nobene tri točke izmed $A_1, A_2, \dots, A_n$ ne ležijo na isti premici in
 - (ii) za vsako trojico i, j, k ($1 \leq i < j < k \leq n$) je ploščina trikotnika $A_i A_j A_k$ enaka $r_i + r_j + r_k$.
2. Poišči največjo vrednost števila x_0 , za katerega obstaja zaporedje pozitivnih realnih števil $x_0, x_1, \dots, x_{1995}$, ki zadošča pogojema
 - (i) $x_0 = x_{1995}$ in
 - (ii) $x_{i-1} + \frac{2}{x_{i-1}} = 2x_i + \frac{1}{x_i}$ za vsak $i = 1, 2, \dots, 1995$.

Tudi v dneh do zaključne svečanosti nam vreme ni bilo preveč naklonjeno. Pri ogledu Niagarskih slapov je lilo kot iz škafe, razgled s 553 metrov visokega stolpa (CN Tower v Torontu) pa so kazile meglice sopare.

Za uspešno reševanje nalog so prejeli pohvale trije naši tekmovalci: Jernej BARBIČ, Gorazd BRUMEN in Polona GREŠAK.

Mednarodna matematična karavana so bo leta 1996 preselila v Indijo, za kar je organizator vsem bodočim udeležencem že sedaj izrekel še posebej toplo dobrodošlico.

Matjaž Željko

PREGRADIMO TRIKOTNIK, 2. del

V prvem delu članka, ki je izšel v prejšnji številki Preseka, smo našli najkrajšo *daljico*, ki pregradi dani trikotnik na dela s predpisanimi ploščinama. Zdaj se bomo lotili splošnejše naloge, poiskali bomo najkrajšo *krivuljo*, ki pregradi dani trikotnik na dva dela s predpisanimi ploščinama. Ta naloga je precej težja od prejšnje. Če bi jo hoteli obravnavati z vso matematično strogostjo, bi že na samem začetku naleteli na težave. Morali bi namreč korektno opredeliti pojme, kot so ploščina ravninskega lika, krivulja in dolžina krivulje. Ker to ni preprosto in presega okvir Preseka, si bomo delo olajšali. Z definicijo ploščine si ne bomo belili glave, pa tudi pojma krivulja ne bomo natančno opredelili. Krivuljo si bomo predstavljali kot zelo tanko neraztegljivo nepretrgano nitko z dvema koncema, položeno na ravnino, tako da se pokrivata kvečjemu njena konca. Če to nitko (krivuljo) napnemo in s tem zravnamo, dobimo *daljico*, katere dolžino razglasimo za dolžino krivulje.

Postavljeno nalogo bomo ugnali v nekaj korakih in si pomagali z naslednjim, zelo pomembnim rezultatom.

Izoperimetrični izrek. *Krog ima večjo ploščino kot vsi drugi ravninski liki z enakim obsegom.*

Tu si predstavljamo, da je ravninski lik območje ravnine, ograjeno s sklenjeno krivuljo, obseg lika pa dolžina te krivulje. Obstaja nekaj elementarnih dokazov izoperimetričnega izreka (brez uporabe višje matematike), vendar so precej zapleteni. Med njimi naj omenim zelo lep dokaz katalonskega matematika Santalója, ki je obdelan v Vidavovi knjižici *Rešeni in nerešeni problemi matematike* iz zbirke Sigma.

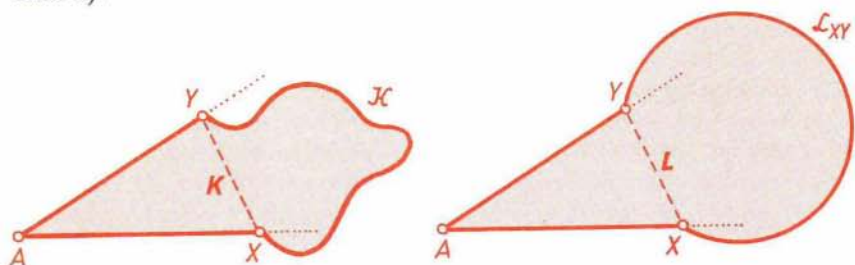
In zdaj k nalogi! Krivulja, ki razdeli trikotnik na dva dela, ima krajišči na straneh trikotnika, torej povezuje točki krakov enega od notranjih kotov trikotnika. Zato se bomo najprej lotili naslednje naloge:

Poišči najkrajšo krivuljo, ki veže točki na krakih danega konveksnega kota in odreže od tega kota lik z dano ploščino.

Tudi ta naloga ni preprosta in ji bomo kos postopoma. Najprej bomo predpisali dolžino krivulje in njeni krajišči na kraku kota ter dokazali naslednji rezultat:

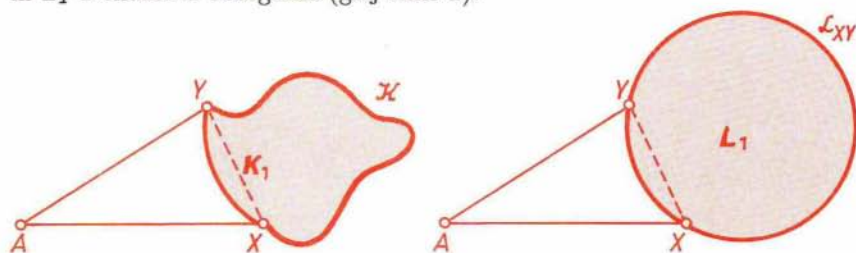
Trditev 1. *Dan je konveksen kot z vrhom A in od A različni točki X in Y na njegovih krakih. Med vsemi krivuljami dane dolžine $l > |XY|$, ki vežejo X in Y , ogradi skupaj z daljicama AX in AY lik z največjo ploščino krožni lok $\mathcal{L}_{XY}$ s krajiščema X in Y , ki leži na nasprotnem bregu premice XY kot točka A .*

Dokaz. Vzemimo poljubno krivuljo $\mathcal{K}$ dolžine l , ki veže točki X in Y ter leži na nasprotnem bregu premice XY kot A . Bralca vabimo, da premisli, zakaj smemo pri dokazu brez škode privzeti zadnji pogoj. Zaznamujmo s K lik, ki ga ograjujeta krivulja $\mathcal{K}$ in daljici AX , AY , z L pa unijo trikotnika AXY in krožnega odseka, ki ga določa lok $\mathcal{L}_{XY}$ (glej sliko 1).



Slika 1.

Če v likih K in L trikotnik AXY nadomestimo s krožnim odsekom, ki ga določa lok, komplementaren loku $\mathcal{L}_{XY}$ (na isti krožnici), dobimo lika K_1 in L_1 z enakima obsegoma (glej sliko 2).



Slika 2.

Lik L_1 je krog, zato ima po izoperimetričnem izreku vsaj tolikšno ploščino kot K_1 . Od tod že sledi, da ploščina lika K ne presega ploščine lika L in da imata enaki ploščini le takrat, kadar je $\mathcal{K} = \mathcal{L}_{XY}$. Dokaz trditve je sklenjen.

Trditev 1 zlahka razširimo tudi na primer, da se katera od točk X in Y (ali obe) ujema z A , vendar podrobnosti prepustimo bralcu. V naslednjem koraku bomo sprostili točki X in Y iz trditve 1 in ju premikali po kraku kota.

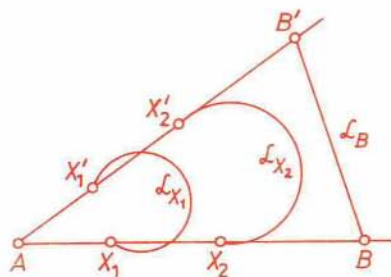
Trditev 2. Med vsemi krivuljami dane dolžine $l > 0$, ki vežejo kaki točki X in Y s krakov danega konveksnega kota $\mathcal{A}$ z vrhom A , ograjuje skupaj z daljicama AX in AY , lik z največjo ploščino lok $\mathcal{L}$ krožnice s središčem v točki A .

Dokaz. Če za par točk X in Y z različnih krakov kota $\mathcal{A}$ velja $|XY| < l$, mu priredimo krožni lok $\mathcal{L}_{XY}$ iz trditve 1, če pa velja $|XY| = l$, mu priredimo daljico XY . Družino vseh teh lokov in daljic zaznamujemo z Ω .

Pri vsakem strogo pozitivnem številu $z \leq l$ si oglejmo poddružino $\Omega_z \subset \Omega$, sestavljeno iz tistih lokov $\mathcal{L}_{XY}$ oziroma daljic XY (pri $z = l$) iz Ω , ki ustrezajo pogoju $|XY| = z$. Največjo ploščino med trikotniki AXY (ki ustrezajo pogoju $|XY| = z$) ima po posledici iz prvega dela članka (glej Presek 2, str. 86) enakokraki trikotnik z osnovnico XY . Ker so poleg tega pri $z < l$ krožni odseki, ki jih določajo loki $\mathcal{L}_{XY}$ iz Ω_z , skladni, med vsemi loki $\mathcal{L}_{XY}$ iz Ω_z , $z < l$, (oziroma daljicami iz Ω_l) skupaj z AX in AY ograjuje lik z največjo ploščino lok $\mathcal{L}_{XY}$ (oziroma daljica XY), ki ustreza pogoju $|AX| = |AY|$. Ta lok pri $z < l$ (oziroma daljica pri $z = l$) je določen(a) že s krajiščem X na kraku kota $\mathcal{A}$. Njegovo (njeno) drugo krajišče bomo označili z X' , lok (oziroma daljico) pa z $\mathcal{L}_X$ (slika 3).

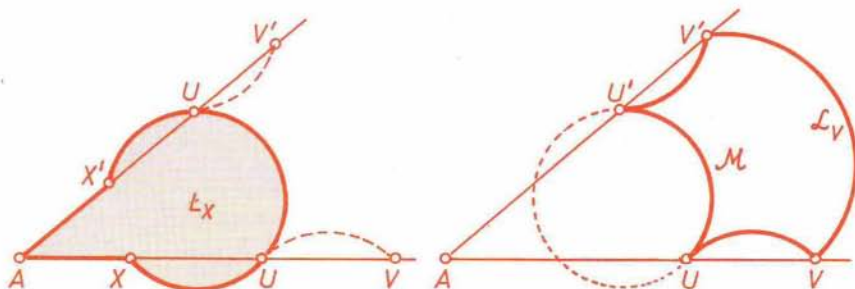
Premikajmo točko X po kraku kota $\mathcal{A}$ od njegovega vrha A do točke B , v kateri se lok $\mathcal{L}_X$ zravnava v daljico $\mathcal{L}_B$. Bralec naj se za vajo prepriča, da velja enakost $|AB| = l/(2 \sin \frac{\alpha}{2})$, kjer je α velikost kota $\mathcal{A}$. Pri določenem položaju točke X med A in B ima lik $\mathcal{L}_X$, ograjen z $\mathcal{L}_X$ in daljicama AX ter AX' , največjo ploščino.

Dokažimo najprej, da v tem (ekstremnem) položaju $\mathcal{L}_X$ leži v



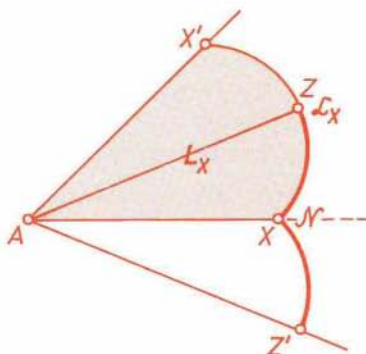
Slika 3.

kotu $\mathcal{A}$. Denimo, da lok $\mathcal{L}_X$ sega čez $\mathcal{A}$. Potem seka kraka AX in AX' (v istem zaporedju) v točkah $U \neq X$ in $U' \neq X'$ ter tako razpade na tri loke (glej sliko 4). Lok s krajiščema X in U prezrcalimo čez U na lok s krajiščema U in V , lok s krajiščema X' in U' pa na lok s krajiščema U' in V' . Dobljeni zrcalni sliki nato združimo z lokom $\mathcal{L}_X \cap \mathcal{A}$ v krivuljo $\mathcal{M}$. Ta je sestavljena iz treh krožnih lokov, ima dolžino l in skupaj z daljicama AV ter AV' ograjuje lik z enako ploščino kot lok $\mathcal{L}_X$. Po trditvi 1 krožni lok $\mathcal{L}_V$ skupaj z daljicama AV in AV' ograjuje lik z večjo ploščino, zato lok $\mathcal{L}_X$ v ekstremnem položaju leži v kotu $\mathcal{A}$. Dokažimo, da se $\mathcal{L}_X$ ujema z lokom $\mathcal{L}$, opredeljenim v besedilu trditve, ki jo dokazujemo.



Slika 4.

Zaznamujmo z Z sečišče simetrane kote A z $\mathcal{L}_X$ (slika 5). Prezrcalimo del loka (oziroma daljice) $\mathcal{L}_X$ s krajiščema X in Z preko premice AX in ga združimo z njegovo zrcalno sliko v krivuljo $\mathcal{N}$ s krajiščema Z in Z' . Krivulja $\mathcal{N}$ povezuje točki Z in Z' s krakov kote ZAZ' , skladnega s kotom A , ima dolžino l in skupaj z daljicama AZ ter AZ' ograjuje lik, ki ima enako ploščino kot $\mathcal{L}_X$.



Slika 5.

Iz trditve 1 in ekstremnega položaja $\mathcal{L}_X$ sledi, da je krivulja $\mathcal{N}$ krožni lok. Središče S nosilne krožnice tega loka tedaj leži na premici AX . Ker tudi $\mathcal{L}_X$ leži na isti krožnici, S leži tudi na premici AZ . Oboje hkrati velja samo takrat, kadar se S ujema z A , zato se $\mathcal{L}_X$ ujema z lokom $\mathcal{L}$. S tem je dokaz sklenjen.

S trditvijo 2 bi lahko pomagali Didoni, mitološki feničanski kraljici in ustanoviteljici Kartagine. Ob nakupu zemlje na libijski obali, kamor je s pristaši zbežala iz rodne Tira, si je Didona namreč zakuhala naslednji problem:

Med vsemi krivuljami dane dolžine, ki vežejo kaki točki na dani premici, poišči tisto, ki skupaj s premico ograjuje lik z največjo ploščino.

Didona je bila prebrisana in je kupila le toliko zemlje na obali, kolikor je more obseči volovska koža. Domačini so ji nasedli in za majhno

vsoto prodali mnogo več, kot so mislili prodati. Didona je namreč volovsko kožo razrezala na tanke jermene, jih zvezala v trak (krivuljo) in z njim zajela precejšen del ozemlja ob ravni obali (premici), na katerem so zgradili kartaginsko trdnjavo. Ker je hotela čimvečji kos zemlje, se je znašla pred omenjenim problemom. Še zdaj podoben splošnejši matematični problem imenujemo Didonina naloga.

Zdaj lahko brez težav rešimo nalogo, ki smo si jo zadali.

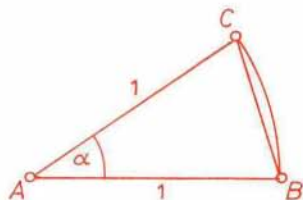
Trditev 3. Najkrajša krivulja, ki od danega konveksnega kota velikosti α z vrhom A odreže lik z dano ploščino p , je lok krožnice s središčem v A . Polmer te krožnice meri $\sqrt{2p/\alpha}$, lok pa $\sqrt{2p\alpha}$.

Dokaz. Naj bo $\mathcal{K}$ krivulja s krajiščema na krakih kota, ki odreže od kota lik s ploščino p . Če $\mathcal{K}$ ni krožni lok s središčem v A , obstaja po trditvi 2 enako dolg krožni lok $\mathcal{L}$, ki odreže od kota krožni izsek s ploščino $q > p$. Podobnostna preslikava s središčem v A in koeficientom raztega $\sqrt{p/q} < 1$ preslika $\mathcal{L}$ v krajši krožni lok, ki od kota odreže krožni izsek s ploščino p . Dokaz trditve je s tem sklenjen.

Za rešitev prvotne naloge bomo potrebovali še naslednjo neenakost.

Lema. Za vsak $\alpha > 0$ velja $\sin \alpha < \alpha$.

Dokaz. Ker je $\sin \alpha \leq 1$, smemo brez škode za splošnost dokaza privzeti, da je $\alpha \leq 1$. Naj bo ABC enakokraki trikotnik s podatki $|AB| = |AC| = 1$, $\alpha = \angle BAC$ (slika 6). Njegova ploščina meri $\frac{1}{2} \sin \alpha$ in je seveda manjša od ploščine krožnega izseka, ki pripada tetivi BC v krogu s središčem A . Ker ploščina izseka meri $\frac{1}{2} \alpha$, je res $\sin \alpha < \alpha$.



Slika 6.

Odgovor na prvotno nalogo zdaj strnimo v

Izrek. Najkrajša krivulja, ki razdeli dani trikotnik ABC na dela s ploščinama p_1 in p_2 ($p_1 \leq p_2$), je lok krožnice s središčem v oglišču ob najmanjšem kotu trikotnika, in meri $\sqrt{2p_1\alpha}$, kjer je α velikost najmanjšega kota trikotnika ABC .

Dokaz. Uporabimo običajne oznake za elemente trikotnika ABC in predpostavimo, da velja $\alpha \leq \beta$ in $\alpha \leq \gamma$. Po trditvi 3 meri dolžina iskane krivulje vsaj $\sqrt{2p_1\alpha}$. Tako dolžino ima lok $\mathcal{L}$ krožnice s središčem A , središčnim kotom α in polmerom $r = \sqrt{2p_1/\alpha}$. Ko bomo ugotovili, da ta lok leži v trikotniku ABC , bo dokaz izreka sklenjen.

Ker iz pogojev in leme sledi

$$r^2 = \frac{2p_1}{\alpha} \leq \frac{p(ABC)}{\alpha} = \frac{bc \sin \alpha}{2 \alpha} < \frac{bc}{2},$$

bi iz neenakosti $r \geq b$ dobili $b^2 < bc/2$ in tedaj $2b < c$, od tod pa zaradi $a \leq b$ še $a + b \leq 2b < c$. Slednje seveda ni res, zato je $r \leq b$. Podobno vidimo, da je $r \leq c$.

Kadar vsaj eden od kotov β in γ ni oster, iz neenakosti $r \leq b$ in $r \leq c$ sledi, da lok $\mathcal{L}$ leži v trikotniku ABC . Če pa sta kota β in γ ostrata, moramo dokazati neenakost $r \leq v_a$, kjer je v_a dolžina višine na stranico BC .

Trikotniku ABC očrtajmo krožnico, z A_1 pa zaznamujmo nožišče njegove višine iz oglišča A (slika 7). Vzporednici premice AA_1 skozi B in C naj sečeta krožnico v točkah B_1 in C_1 . Potem leži A na krajšem loku očrtane krožnice s krajiščema B_1 in C_1 . Ker je poleg tega po izreku o obodnem kotu

$$\angle BB_1C = \angle BAC = \alpha,$$

velja

$$v_a = |AA_1| \geq |BB_1| = a \operatorname{ctg} \alpha.$$

Slika 7.

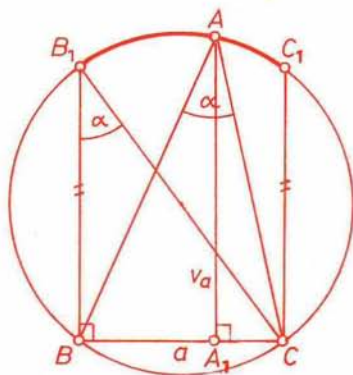
Zaradi $\alpha \leq \beta$ in $\alpha \leq \gamma$ velja tudi $\alpha \leq \frac{\pi}{3}$ in tedaj $\cos \alpha \geq \frac{1}{2}$. Od tod z uporabo leme sledi

$$v_a \geq a \frac{\cos \alpha}{\sin \alpha} \geq \frac{a}{2 \sin \alpha} > \frac{a}{2\alpha},$$

nato

$$\frac{p(ABC)}{\alpha} = \frac{av_a}{2\alpha} < v_a^2$$

in zaradi $r^2 \leq p(ABC)/\alpha$ še $r < v_a$.



Sklenimo prispevek z nalogami.

1. Najmanj koliko mora biti oddaljena točka X od vrha A kota $\mathcal{A}$, da lok $\mathcal{L}_X$ iz trditve 2 leži v kotu $\mathcal{A}$?
2. Dan je oster kot z vrhom A in od A različna točka X na njegovem kraku. Med vsemi krivuljami dane dolžine, ki vežejo točko X s kako točko Y na drugem kraku kota, poišči tisto, ki skupaj z daljicama AX in AY ogradi lik z največjo ploščino.
3. Krivulja $\mathcal{K}$ razdeli kvadrat s stranico dolžine 1 na dva dela, katerih ploščini sta v razmerju $m : n$. Dokaži, da pri pogoju $\frac{1}{\pi-1} \leq \frac{m}{n} \leq \pi-1$ dolžina $\mathcal{K}$ meri vsaj 1.
4. Dokaži, da je premer kroga najkrajša krivulja, ki razpolavlja njegovo ploščino.

Boris Lavrič

26. MEDNARODNA FIZIKALNA OLIMPIADA

Mednarodna fizikalna olimpiada je potekala od 5. do 12. julija 1995 v Canberri, Avstralija. To je bila prva "zimsko" fizikalna olimpiada, saj je v tem času na južni polobli zima.

Na olimpiadi je sodelovalo 246 tekmovalcev iz 51 držav. Ob finančni podpori Ministrstva za šolstvo in šport se je tudi slovenska ekipa udeležila olimpiade v popolni sestavi: pet tekmovalcev ter dva spremljevalca, člana mednarodne komisije. Za Slovenijo so na olimpiadi tekmovali: Martin KLANJŠEK, Gimnazija Bežigrad, Ljubljana; Jure BABNIK, Srednja šola za elektrotehniko in računalništvo, Ljubljana; Marko ŽNIDARIČ, II. gimnazija Maribor; Andrej BARTOLIČ, Srednja šola Nova Gorica; Sašo PUKŠIČ, Srednja tehniška šola Celje. Spremljevalca sva bila Jure Bajc (Fakulteta za matematiko in fiziko, Oddelek za fiziko) in Ciril Dominko (Društvo matematikov, fizikov in astronomov Slovenije).

Ekipa je imela konec maja enotedenske priprave na Fakulteti za matematiko in fiziko. Več priprav ni bilo mogoče izvesti, ker zaradi mature tekmovalci niso imeli časa.

Tudi letos so tekmovalci najprej morali v petih urah rešiti tri teoretične naloge in nato po enodnevnem odmoru še v petih urah narediti dva eksperimenta in napisati poročili. Skupaj torej pet enakovrednih nalog. Tako kot že nekaj let so bili tudi letos bili najbolj uspešni tekmovalci LR Kitajske. Vseh pet je dobilo zlato medaljo, njihov tekmovalec Yu Haitao pa je bil absolutni zmagovalec olimpiade.

Tudi naša ekipa je dosegla lep uspeh. Najboljši je bil Martin KLANJŠEK, ki je dosegel 69 % točk od povprečja treh najboljših tekmovalcev in dobil bronasto medaljo. Sašo PUKŠIČ pa je dosegel 51 % točk in prejel pohvalo.

Naslednja, 27. Mednarodna fizikalna olimpiada, bo od 30.6. do 7.7.1996 v glavnem mestu Norveške, Oslu.

Ciril Dominko

POCENITEV, PODRAŽITEV – Rešitev s str. 85

Naj bo cena blaga na začetku enaka a , odstotek podražitve naj bo p in označimo $x = \frac{p}{100}$. Če upoštevamo dve podražitvi in pocenitev, dobimo enačbo:

$$a(1+x)^2(1-x) = a.$$

a je različen od nič, zato enačbo delimo z njim in jo uredimo. Dobimo $x^3 + x^2 - x = 0$.

Ena od rešitev enačbe je $x = 0$, ki ni uporabna, saj podražitev za nič odstotkov ni podražitev. Preostali dve sta

$$x_{1,2} = \frac{-1 \pm \sqrt{5}}{2}.$$

Tudi $x_1 = \frac{-1-\sqrt{5}}{2}$ ni rešitev, saj je $x_1 < 0$ in tudi to ne bi bila podražitev.

Preostane nam samo še $x_2 = \frac{-1+\sqrt{5}}{2}$, kar je približno 0,618.¹ Odgovor se torej glasi: "Blago bi morali podražiti za 61,8 odstotka".

Če pa odgovarjamo na drugi del vprašanja, moramo začeti z enačbo

$$a(1-x)^2(1+x) = a,$$

ki nam da rešitve $x_1 = 0$, $x_2 = \frac{1-\sqrt{5}}{2}$ in $x_3 = \frac{1+\sqrt{5}}{2}$.

Prva rešitev očitno ni ustrezna in tudi druge ne moremo uporabiti, ker je $x_2 < 0$ in bi dobili podražitev. Tako nam ostane samo x_3 . Ta rešitev je večja od 1, kar bi pomenilo, da je treba blago poceniti za več kot 100 odstotkov, kar pa ni mogoče.

Torej take pocenitve ni.

Vinko Horvat

¹ Zanimivo pri tem rezultatu je, da je iskana podražitev enaka razmerju pri zlategu rezu. Podjetnega bralca vabimo, da poišče zanj geometrijsko razlago (op. urednice).

POIŠČI ŠTEVILO - Rešitev s str. 95

Označimo iskano število z n . Ker potrebujemo za njegov zapis v dvojiškem sistemu sedem mest, velja neenačba:

$$64 = 2^6 \leq n < 2^7 = 128.$$

V petiškem sistemu porabimo za zapis štiri mesta, torej je

$$125 = 5^3 \leq n < 5^4 = 625.$$

Od tu sledi $125 \leq n < 128$. Ker je n sod, je $n = 126$. Poglejmo še oba zapisa:

$$126 = 1111110_{(2)} = 1001_{(5)}.$$

Ivan Lisac

ENA FINANČNA - Rešitev s str. 99

Med tremi ponodbami borzne hiše želimo izbrati tisto, ki je za nas najugodnejša. Za hip pozabimo na stroške upravljanja in ponovimo nekaj osnov. Recimo, da bo letni donos na naše premoženje znašal d odstotkov. Če leto začnemo z x denarnimi enotami, potem bomo imeli pri takem donosu na koncu leta $x \cdot D$ denarnih enot, kjer je $D = 1 + d$. Na primer, če je $d = 10\%$, potem končno vrednost premoženja dobimo tako, da začetno vrednost pomnožimo z 1.1. Vključimo v račun še stroške upravljanja in delitev dobička ter si oglejmo posamezne možnosti.

V prvem primeru plačamo stroške upravljanja na začetku. To upoštevamo tako, da količino vloženega denarja najprej zmanjšamo za 2.4%. Začetna vrednost premoženja v upravljanju je torej $x \cdot 0.976$ denarnih enot. Borzna hiša nam to vsoto čez leto poveča na $(x \cdot 0.976) \cdot D$. Na koncu leta nam odtegne še 10% ustvarjenega dobička, torej desetino razlike $x \cdot 0.976 \cdot D - x \cdot 0.976$. Končna vrednost premoženja je torej

$$y_1 = x \cdot 0.976 \cdot D - \frac{1}{10}(x \cdot 0.976 \cdot D - x \cdot 0.976) = x \cdot 0.976 \cdot \frac{9D + 1}{10}.$$

Druga različica nam ponuja plačilo stroškov upravljanja na koncu obdobja. Ker se stroški upravljanja nanašajo na vrednost premoženja na koncu obdobja, nam po plačilu stroškov ostane $(x \cdot D) \cdot 0.976$ denarnih enot. To pa je ravno toliko kot pri prejšnjem primeru. Končna vrednost premoženja ob izbiri druge različice je torej (morda nekoliko presenetljivo) enaka kot pri prvi izbiri:

$$y_2 = x \cdot 0.976 \cdot \frac{9D + 1}{10} = y_1.$$

Oglejmo si še zadnjo možnost. Ta je računsko nekoliko zahtevnejša. Naj bodo $d_1, d_2, \dots, d_{12}$ donosi, ki jih v posameznih mesecih pri upravljanju našega premoženja doseže borzna hiša. Označimo še $D_i = 1 + d_i$, $i = 1, 2, \dots, 12$. Število D_i je torej faktor, s katerim moramo pomnožiti vrednost premoženja na začetku i -tega meseca, da dobimo njegovo vrednost ob koncu meseca.

Na začetku prvega meseca imamo x denarnih enot. Do konca meseca ta znesek naraste na $x \cdot D_1$ denarnih enot. Ob koncu meseca ga borzna hiša zmanjša za stroške upravljanja, tako da je začetna vrednost za drugi mesec enaka

$$x \cdot D_1 \cdot 0.998.$$

Drugi mesec se zgodba ponovi. Vrednost z začetka meseca moramo pomnožiti z D_2 in na koncu še z 0.998. Tako imamo na začetku tretjega meseca

$$(x \cdot D_1 \cdot 0.998) \cdot D_2 \cdot 0.998 = x \cdot D_1 \cdot D_2 \cdot 0.998^2$$

denarnih enot. Zgodba se ponavlja še naslednjih deset mesecev. Ob koncu leta pred obračunom dobička je vrednost našega premoženja enaka

$$x \cdot D_1 \cdot D_2 \cdot \dots \cdot D_{12} \cdot 0.998^{12}$$

denarnih enot. Ker je celoletni donos enak d , pripadajoči faktor pa je $D = 1 + d$, velja

$$D = D_1 \cdot D_2 \cdot \dots \cdot D_{12}.$$

Pripomnimo, da ta zveza velja tudi tedaj, ko je donos v nekaterih mesecih negativen (tedaj so pripadajoči faktorji D_i manjši od 1). Torej je vrednost premoženja pred obračunom dobička enaka kar

$$x \cdot D \cdot 0.998^{12}.$$

Če vključimo še delitev dobička, je končna vrednost premoženja ob izbiri tretje različice plačila stroškov upravljanja enaka

$$y_3 = x \cdot 0.998^{12} \cdot \frac{9D + 1}{10}.$$

Izračunali smo že, da sta prva in druga možnost enakovredni, ugotoviti pa moramo še, kako je s tretjo ponudbo. Ker je

$$0.998^{12} \doteq 0.97626 > 0.976,$$

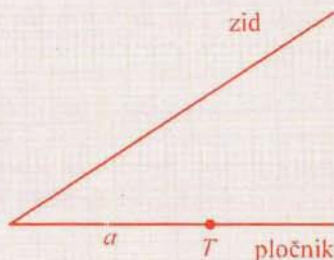
je tudi $y_3 > y_1 = y_2$. Torej je tretja ponudba najugodnejša.

Res pa je, da so razlike med posameznimi ponodbami majhne. Pri začetnem vložku $x = 500000$ SIT in letnem donosu $d = 30\%$ je razlika med prvima in tretjo izbiro le slabih 167 SIT. Vendar pa nekaj velja tudi zadovoljstvo, da smo vsaj tokrat izbrali najugodnejšo možnost, mar ne?

Martin Juvan

NAJVEČJI ZORNI KOT

Izpred vhoda v svojo trgovino, ki je a metrov oddaljen od vogala trga, opazuje trgovec Jaka sosadni zid. Ta postrani izhaja iz vogala trga (glej skico). Jaka bi rad ugotovil, kam naj obesi b metrov širok reklamni napis, da bo izpred vhoda viden pod največjim možnim kotom. Pomagajte mu! Poskusite najti elementarno geometrijsko rešitev!



Če nalogi ne boste kos, poskusite z nekoliko lažjo. Jaka naj svoj napis najprej obesi na zid, vi pa mu svetujte, kako daleč od vogala naj se postavi na pločniku pred svojo trgovino, da bo v reklami užival pod največjim zornim kotom.

Marija Vencelj

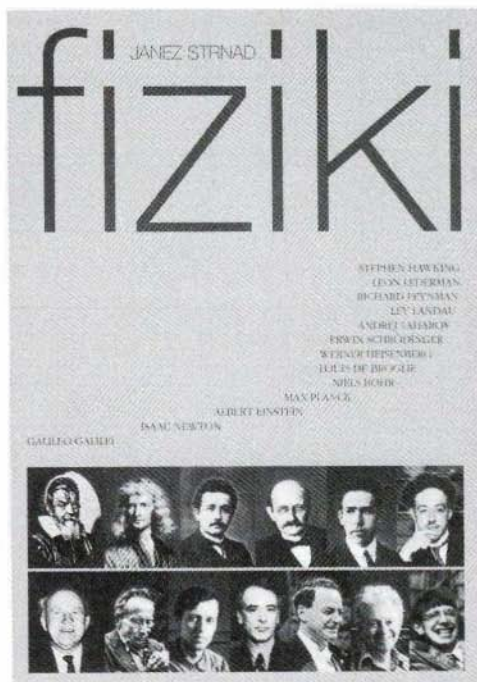
Strnad J.: FIZIKI, Založba Mihelač in Nešović, Ljubljana 1995, 159 str.

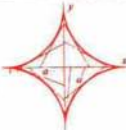
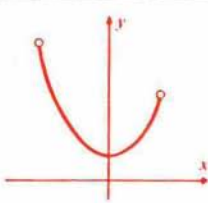
Pri založbi Mihelač in Nešović je izšla knjiga Janeza Strnada z naslovom *Fiziki*. V njej najdemo na 159 straneh strnjene zapise o trinajstih znamenitih fizikih od Galileja, Newtona in Einsteina, utemeljiteljev fizike makroskopskega sveta, do očetov kvantne mehanike: Plancka, Bohra, de Broglia, Heisenberga in Schrödingerja. Avtor je tej bleščeči osmerici pridružil še portrete petih znanih fizikov, ki so gradili na delu prejšnjih: Saharova, Landaua, Feynmana, Ledermana in Hawkinga.

Knjiga je nastala po nizu oddaj na tretjem programu Radia Ljubljana v letih od 1993 do 1995. Zato ne vsebuje slik, prav tako ni v njej niti ene enačbe. Vendar knjigi to ni v škodo, saj je namenjena širšemu krogu bralcev, ki bi jih ustaljeni način pisanja prav gotovo odvrnil od branja. Poleg tega so temeljne poteze pojavov in teorij predstavljene tako nazorno, da risbe in enačbe kot v radijski igri kar same stopijo pred bralca.

Delo portretirancev je opisano z biografskega vidika. Zverno, kaj vse je vplivalo na njihovo delo, s pravo mero je opisan tudi njihov značaj. V knjigi je zbranih veliko podatkov, zato bo prišla prav učiteljem fizike na vseh stopnjah za popestritev strokovnih razlag z zgodbami iz zgodovine fizike. Radi pa jo bodo vzeli v roke tudi nefiziki, ki bodo iz nje z bolj domačega zornega kota marsikaj zvedeli o osnovah klasične in moderne fizike.

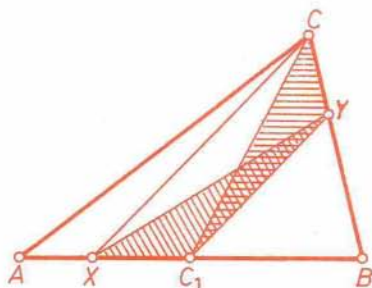
Andrej Likar



ITOŠKA EDOŽEM ZAVICA	NIELS JERNE	POD- STREŠJE (NAREČNO)	STARA MERA ZA ŽITO	ROŽEVINA	STO KVADRATNIH METROV	EKIPA MOSTVO	ALEKSAN- DAR (KRAJSE)		
									PREBIVALKA BRITAN SOSEDE
	DVOJICA				GORSKI SKLOP ANGLEŠKA GROFIJA				TROP. MLEČKOVKA ZA MOKO TAPIOKO ANTON NOVAČAN
	RŽEVO ZGANJE					EVIN PARTNER	STRAH PRED JAVNIM NASTOPOM		
	V CELOTO ZBRAN SKUPEK	KAMNITA PRIMORSKA POKRAJINA	NAPOVEDO- VALKA SENICA				TV ZASLON ZGORNJI TOK REKE UNE		
ENKO ALIN			NAJBOLJŠI KOLESAR NA SVETU RESA						ZNIŽANA NOTA "G"
MENS)									
VR, KI ŽVO								PEČAT	
				NOVINAR ŠTAKUL	IGRALKA ZETTERLING UBITI EGIPT. PREDSIEDNIK			OČAK, KI JE PREŽVEL VESOLJNI POTOP	
						KADMIJ SPANJE		MATEMAT. NEZNANKA RADO ČASL	
	ZELEN JUŽNI SADEŽ	ŽITNI PLOD STANJE NA RAČUNU				PRIMEK DEVICE ORLEANSKE ZAPORNICA			SL. UMET. ZGODO- VINAR (FRANCE) KRAŠKA CRNINA
							SLAVA NESTRO- KOVNJAK		
			PREKOP PISEC FLEMING					ČASO- MERILNA NAPRAVA TELUR VISOK GORSKI GREBEN	
						SL. PEŠNICA (NEŽA) KOSITER			
									
OSEBNI ZAMEK					SPAKA				

PREGRADIMO TRIKOTNIK, 1. del – Rešitev s str. 86

1. Skozi razpolovišče C_1 stranice AB načrtajmo vzporednico k premici CX . Ta seka eno od stranic AC in BC v iskani točki Y . Utemeljimo konstrukcijo pri pogoju $|AX| \leq |AC_1|$. Trikotnika C_1YX in C_1YC imata skupno stranico CY in enako dolgi višini nanjo, zato imata enaki ploščini. Od tod sledi



$$\begin{aligned} p(XBY) &= p(C_1YX) + p(C_1BY) = \\ &= p(C_1YC) + p(C_1BY) = p(C_1BC). \end{aligned}$$

Ker je poleg tega očitno $p(C_1BC) = \frac{1}{2}p(ABC)$, je Y res iskana točka. Podobno utemeljimo konstrukcijo točke Y pri pogoju $|AX| > |AC_1|$.

2. Uporabimo standardne oznake za elemente danega trikotnika ABC in predpostavimo, da velja $a \leq b$ in $a \leq c$. Po izreku iz članka je najkrajša daljica XY , ki razpolavlja ploščino trikotnika, osnovnica enakokrakega trikotnika AXY . Za dolžino x krakov AX in AY velja

$$\frac{1}{2}x^2 \sin \alpha = p(AXY) = \frac{1}{2}p(ABC) = \frac{1}{4}bc \sin \alpha$$

in tedaj $x = \sqrt{bc/2}$. Od tod z uporabo kosinusnega izreka za stranico XY trikotnika AXY dobimo enakost

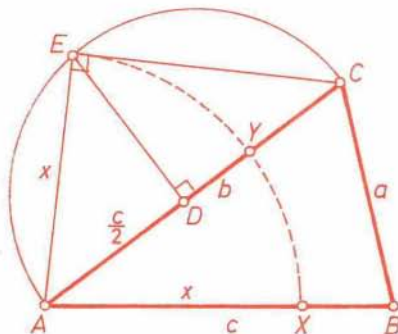
$$|XY|^2 = x^2 + x^2 - 2x^2 \cos \alpha = bc(1 - \cos \alpha).$$

Če iz formule $a^2 = b^2 + c^2 - 2bc \cos \alpha$ izračunamo $\cos \alpha$ in dobljeni izraz vstavimo v prejšnjo enakost, dobimo po kratkem računu

$$|XY|^2 = \frac{1}{2}(a^2 - (b - c)^2).$$

Opišimo konstrukcijo dolžine x (in s tem iskanih točk X in Y), ki je skicirana na naslednji sliki.

Na poltraku AC določimo točko D , tako da velja $|AD| = c/2$. Ker velja $c < 2b$ (glej dokaz izreka v članku), točka D leži na stranici AC . Skozi D načrtamo pravokotnico na AC , in točko, v kateri ta seka polkrožnico nad premerom AC , zaznamujemo z E . Po Evklidovem izreku za pravokotni trikotnik ACE velja $|AE|^2 = |AD| \cdot |AC| = bc/2$, zato je $x = |AE|$.



3. Vzemimo poljubno točko X na stranici AB in poljubno točko Y na stranici AC trikotnika ABC , zapišimo

$$x = |AX|, \quad y = |AY|, \quad z = |XY|$$

in predpostavimo, da daljica XY razpolavlja ploščino $p = p(ABC)$ trikotnika ABC . Potem velja $p = xy \sin \alpha$, iz dokaza trditve v članku pa dobimo tudi enakost

$$z^2 = (x - y)^2 + 2p \operatorname{tg} \frac{\alpha}{2}.$$

Od tod sledi, da je dolžina z največja takrat, kadar je absolutna vrednost $|x - y|$ največja. Ker je produkt xy konstanten in velja $0 < x \leq |AB|$ ter $0 < y \leq |AC|$, doseže izraz $|x - y|$ največjo vrednost, kadar je $x = |AB|$ ali $y = |AC|$. V prvem primeru je z dolžina težiščnice iz oglišča B , v drugem pa dolžina težiščnice iz oglišča C trikotnika ABC .

Odgovor je zdaj na dlani. Najdaljša daljica, ki razpolavlja ploščino trikotnika, je njegova najdaljša težiščnica.

Boris Lavrič

KRIŽANKA "OČETJE FIZIKALNIH ENOT" – Rešitev s str. 96

Vodoravno: Pascal, gad, Ampère, Olaf, real, pastinak, KN, satelit, Ahac, cirkas, Garbo, pouk, tlo, Ero, plus, koristnik, Bol, Vezuv, Eho, topol, Mansell, Milva, relief, batist, Watt, OM, Van, akt, raja, strok, AH, igo, Ohm, Nolde, Kru, Bruce, Marn, Selca, komandir, Bell, Faraday.

Marko Bokalič

NAJDALJŠA ČETA - Rešitev s str. 89

Naloga zahteva, da sestavimo funkcijski podprogram, ki v danem zaporedju števil poišče dolžino najdaljše čete. Vemo, da vsako zaporedje razpade na nekaj disjunktnih čet. Meje med četami določajo pari zaporednih elementov, pri katerih je prvi element strogo večji od drugega.

V podprogramu bomo s pomočjo indeksa *i* v zanki **for** od konca proti začetku tabele primerjali vse pare sosednjih elementov. V spremenljivki **kon** bomo ves čas vodili indeks zadnjega elementa v trenutni četi, v spremenljivki **maxD** pa dolžino trenutno najdaljše čete. Ko *i*-ti element ne pripada več trenutni četi, primerjamo dolžino pravkar končane čete z doslej najdaljšo in ustrezno ukrepamo. Ker je parov elementov, ki določajo meje med četami, za ena manj, kot je čet, tabelo števil razširimo z dodatnim elementom na začetku, običajno mu rečemo stražar, ki zagotovi, da bomo v zanki upoštevali tudi dolžino prve čete.

Oglejmo si rešitev v pascalu.

```

const
  maxN=100;
type
  element=integer;                                { ali pa real,... }
  tabela=array[0..maxN] of element;

function NajdaljsaCeta(var a: tabela; n: integer): integer;
{ V zaporedju a[1],...,a[n] poišče dolžino najdaljše čete. }
var
  i: integer;
  kon,maxD: integer;
begin
  a[0] := a[1]+1;                                { stražar }
  kon := n;  maxD := 1;
  for i:=n-1 downto 0 do
    if a[i]>a[i+1] then begin
      if kon-i>maxD then maxD := kon-i;
      kon := i;
    end;
  NajdaljsaCeta := maxD;
end; { NajdaljsaCeta }
```

V zadnjih letih se tudi pri reševanju računalniških nalog vse bolj uveljavlja programski jezik C. Prevajalniki za ta programski jezik slovijo po izredno hitri prevedeni kodi. Oglejmo si še gornjo rešitev v tem programskem jeziku.

```

typedef int element; /* ali pa float,... */
/* V zaporedju a[1],...,a[n] poišče dolžino najdaljše čete. */
int NajdaljsaCeta(element a[], int n)
{
    int i;
    int kon = n;
    int maxD = 1;

    a[0] = a[1]+1;
    for (i = n-1; i >= 0; i--)
        if (a[i] > a[i+1]) {
            if (kon-i > maxD) maxD = kon-i;
            kon = i;
        };
    return maxD;
}

```

Ker sta tako pascal kot C proceduralna programska jezika, sta si rešitvi precej podobni. Ena od razlik med pascalom in C-jem je, da se v C-ju tabele vedno začno z indeksom 0. Programski jezik C nam tudi omogoča, da podprogram kličemo z različno dolgimi tabelami. Tega v standardnem pascalu ne moremo narediti. To je ena bolj motečih pomanjkljivosti tega jezika. Izognemo se ji lahko z uporabo dinamičnih spremenljivk, v turbo pascalu pa tudi z uporabo "odprtih" polj. Težavo pa lahko uženemo tudi tako, da sestavimo objekt tabele, ki meje indeksov nosi s seboj.

Martin Juvan

VSAKDANJE FUNKCIJE – Rešitev s str. 100

Funkcija $\langle x \rangle_n$ je zaokrožena vrednost števila x na n decimal, če je n pozitiven, oziroma na $|n|$ celih mest, če n ni pozitiven. Približek (2) je skoraj vedno enak funkciji; razlikuje se od nje le takrat, kadar pri okrajšanju izločimo le 5 na zadnjem mestu, ki ima pred seboj sodo števko, npr.:

$$\langle 1,35 \rangle_1 = 1,4; \quad \langle 1,45001 \rangle_1 = 1,5; \quad \text{toda } \langle 1,45 \rangle_1 = 1,4.$$

Približek (2), ki petko vedno zaokroži navzgor, uporabljajo povsod v praksi, npr. v bankah.

Anton Cedilnik

**PRVA
SLOVENSKA
ASTRONOMSKA
REVIJA**

Spika



**VSAK MESEC NOVA, BARVNA ŠTEVILKA REVIE ZA LJUBITELJE ASTRONOMIJE,
KI PRINAŠA NOVICE, VSE O SONCU, PLANETIH, ZEMLJI, ZVEZDAH,
GALAKSIJAH, ASTROFIZIKI, KOZMOLOGIJI, ASTRONAVTIKI,
ASTROFOTOGRAFIJI, ARHEOASTRONOMIJI...
ZA AMATERJE MESEČNO SVEŽE EFEMERIDE IN ZVEZDNA KARTA,
O TELESKOPIH, UPORABNIH PROGRAMIH...
IN ŠE OSNOVE ZA ZAČETNIKE, RAZISKOVALNI KOTIČEK, TESTI,
ZNANSTVENA FANTASTIKA, MALI OGLASI TER NAGRADNA IGRA!**

Revijo naročajte na naslov: Spika, Poštni predal 9, 61109 Ljubljana. Četrtna naročnina (15% popusta) je 1070,00 SIT, polletna naročnina (20% popusta) je 2015,00 SIT, celoletna naročnina (25% popusta) je 3780,00 SIT.

URNIK TEKMOVANJ V LETU 1996

področje	šola	tekmovanje	datum
matematika	osnovna	šolsko področno državno	22. marec 20. april 18. maj
	srednja	šolsko izbirno državno olimpiada	22. marec 13. april 25. in 26. maj julij
fizika	osnovna	šolsko področno državno	do 15. marca 30. marec 11. maj
	srednja	področno državno olimpiada	30. marec 20. april 30. junij
logika	osnovna in srednja	šolsko izbirno državno	september oktober november
matematika za razvedrilo	osnovna in srednja	državno	7. september
računalništvo	osnovna	šolsko področno državno	22. marec 19. april 11. maj
	srednja	državno	11. maj
raziskovanje inovatorstvo	srednja	državno	

Nekaj informacij o tekmovanjih

Matematika – osnovna šola

Vsa tekmovanja bodo potekala v skladu s *Pravilnikom o tekmovanju učencev osnovne šole v znanju matematike za Vegova priznanja*. Pojasnila lahko dobite pri g. Aleksandru POTOČNIKU, OŠ Božidarja Jakca, Nusdorferjeva 10, Ljubljana, telefon (061)-443-074 ali (061)-442-900.

Matematika – srednja šola

Vsa tekmovanja bodo potekala v skladu s *Pravilnikom o tekmovanju srednješolcev v znanju matematike*. Pojasnila daje g. Darjo FELDA, Fakulteta za elektrotehniko in računalništvo, Tržaška 25, Ljubljana, tel. (061)-17-68-233 ali (061)-17-68-234.

Fizika – osnovna šola

Vsa tekmovanja bodo potekala v skladu s *Pravilnikom o tekmovanju učencev osnovne šole v znanju fizike za Stefanova priznanja*. Izjemoma bosta v tem šolskem letu šolsko in področno tekmovanje bolj zгодaj, ker je prva sobota v aprilu velikonočna. V februarju bomo na šole poslali razpis tekmovanj. Dodatne informacije dobite pri ga. Jelisavi SAKELŠEK, OŠ Ketteja in Murna, Koširjeva 2, Ljubljana, tel. (061)-444-401 ali (061)-444-181.

Fizika – srednja šola

Razpis za tekmovanja bomo skupaj s prijavitnicami poslali na šole do konca februarja. Informacije dobite pri g. Cirilu DOMINKU na Gimnaziji Bežigrad, Peričeva 4, Ljubljana, telefon (061)-321-567 ali (061)-311-024.

Matematika za razvedrilo

Vse informacije dobite v časopisih *Logika & Razvedrilna matematika* in *Ugankarski domenek*.

Logika

Na državnem tekmovanju tekmujejo učenci, ki bodo v času tekmovanj na predmetni stopnji osnovne šole, učenci srednjih šol in študenti. Šole, ki bodo organizirale izbirno tekmovanje, se morajo prijaviti na razpis do **1. junija** na ZOTKS, Komisija za logiko, Lepi pot 6, 61001 Ljubljana. Druge informacije daje g. A. JUS na ZOTKS, tel. (061)-213-727, faks (061)-222-487.

Računalništvo – osnovna šola

Razpisi za tekmovanje so že na šolah. Informacije dobite pri g. A. JUSU, ZOTKS – Svet za tehnično vzgojo mladine, Lepi pot 6, Ljubljana, tel. (061)-213-727, faks (061)-222-487.

Računalništvo – srednja šola**I. Raziskovalne naloge**

Strokovna komisija bo pregledala naloge, ki bodo do **1. maja** prišle na naslov Gibanje znanost mladini, Lepi pot 6, Ljubljana. Na osnovi dobljenih ocen bo določila tiste učence, ki bodo svoje naloge ustno zagovarjali.

II. Tekmovanje iz znanja računalništva

Mentorji naj pošljejo prijavo šole s poimenskim seznamom tekmovalcev (ne več kot po 5 učencev za vsako od treh tekmovalnih skupin) do **10. aprila** na Gibanje znanost mladini. Pri tem naj upoštevajo pravila, ki že vrsto let veljajo za to tekmovanje.

Potrditiv prijav in natančni razpored tekmovanja bodo šole dobile teden dni pred tekmovanjem. Šolam priporočamo, da izvedejo predtekmovanja in tako izberejo najboljše predstavnike. Učenci šol, ki se ne bodo prijavile na tekmovanje kot organizacije, se lahko sami prijavijo na isti naslov, prav tako najkasneje do 10. aprila. Informacije dobite pri ZOTKS – Komisija za računalništvo, Lepi pot 6, Ljubljana, tel (061)–213–727, faks (061)–222–487.

Raziskovanje in inovatorstvo

Razpise za srečanje mladih raziskovalcev in inovatorjev Slovenije so srednje šole že dobile, podrobnejše informacije pa dobite pri g. B. SOTOŠ-KU, ZOTKS – Gibanje znanost mladini, Lepi pot 6, Ljubljana, p.p. 99, tel. (061)–213–727, faks (061)–222–487.

Darjo Felda

ALTIVS, CITIVS, FORTIVS

Čas matematičnih tekmovanj se približuje. Srednješolcem, ki se želijo spopasti z različnimi tekmovalnimi nalogami, je namenjena knjiga *Altius, Citius, Fortius*, v kateri lahko poleg številnih nalog s podrobno izdelanimi rešitvami najdete tudi pregled potrebnih teoretičnih znanj.

Knjigo lahko kupite pri Komisiji za tisk DMFAS, Ljubljana, Jadranska 19.

Matjaž Željko

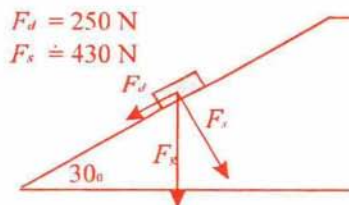
15. PODROČNO TEKMOVANJE IZ FIZIKE ZA OSNOVNOŠOLCE – Rešitve s str. 114

7. razred

1. a) Ker je gibanje enakomerno, mora biti vsota vseh zunanjih sil enaka 0. Torej je sila Janka nasprotno enaka vsoti dinamične komponente sile teže in sile trenja. $F_J = 260 \text{ N}$.

- b) Tlak povzroča sila, ki je pravokotna na podlago.
 $p = F_N / S = 21500 \text{ Pa}$.

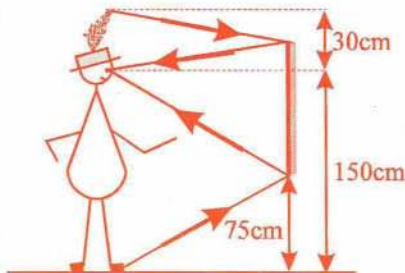
- c) Ker je gibanje še vedno enakomerno, mora Janko delovati s silo, ki je nasprotno enaka sili trenja (20 N).



2. Če težo ladjice zanemarimo, je vzgon enak teži kamna. $F_{vzg} = F_{gk}$. Od tod sledi $h_1 = m_k / \rho_v S = 2,5 \text{ mm}$. To je višina gladine vode glede na gladino vode, ko v posodi še ni bilo ladjice in kamna. Potopljeni kamen izpodrine toliko vode, kot je njegova prostornina. Višina gladine vode $h' = V_k / S = 1 \text{ mm}$, razlika gladin je torej $\Delta h = h_1 - h' = 1,5 \text{ mm}$.
3. Tlak v levem kraku manometra, ki ga povzroča vodni stolpec višine h , je enak tlaku v desnem kraku manometra, ki ga povzroča živosrebrni stolpec višine h_2 . Iz enakosti tlakov sledi $h = 68 \text{ cm}$. Torej je $r = h - h_1 = 48 \text{ cm}$.
4. a) Delo v prvem primeru je večje od dela v drugem primeru.
 b) $A_1 = F_1 \cdot s = 7 \text{ N} \cdot 2 \text{ m} = 14 \text{ J}$
 $A_2 = F_2 \cdot s = 5 \text{ N} \cdot 2 \text{ m} = 10 \text{ J}$
5. a) Palici bosta enako dolgi, ko bo $l_1 \alpha_1 \Delta T - l_2 \alpha_2 \Delta T = \Delta l$. Sledi $\Delta T = 240^\circ \text{ C}$.
 b) Njuna dolžina je tedaj $l = l_1 + \Delta l_1 = 1200 \text{ mm} + 5,5 \text{ mm} = 1205,5 \text{ mm}$.

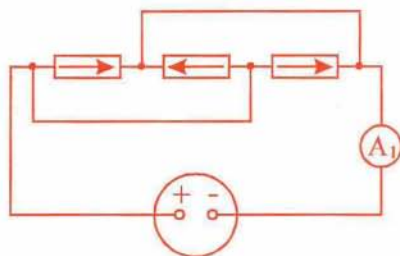
8. razred

1. Svetloba gre od predmeta do zrcala, se tam odbije in pride do očesa. Ker je vpadni kot enak odbojnemu kotu, je s slike razvidno, da mora biti ogledalo visoko najmanj 90 cm. Ogledalo mora pritrditi tako, da bo spodnji rob ogledala 75 cm od tal. S slike naj bo razvidna tudi smer svetlobe od predmeta do zrcala, kjer se odbije v oko.



2. Potencialna energija se je uteži zmanjšala za $F_g h = 200 \text{ N} \cdot 20 \text{ m} = 4000 \text{ J}$. Za 1000 J se je povečala kinetična energija, torej je delo zaviralne sile 3000 J. Ker deluje sila F na poti 20 m, je velikost te sile 150 N.
3. V navpični legi ima palica s krogla samo $W_p = F_{g1} h_1 + F_{g2} h_2 = 11,7 \text{ J}$. Ko se dotakne tal, pa ima samo kinetično energijo. Ker druga krogla opravi v istem času trikrat krajšo pot, je njena hitrost tudi trikrat manjša od hitrosti prve krogle. $\Delta W_p = \Delta W_k$ in od tu izrazimo hitrost prve krogle $v_1 = 4,7 \text{ m/s}$.

4. a) Ko skakalec počepne, se mu težišče zniža za h_1 . Njegova začetna hitrost je enaka 0. Pri odzivu pridobiva kinetično energijo z delom mišic. Hitrost je odvisna od počepa. Ker je pospešek a pri odzivanju konstanten, potem iz $v = at$ in $h_1 = at^2/2$ sledi $t = 2h_1/v = 0,25$ s.
- b) Ko se odlepi od tal, ima maksimalno kinetično energijo. Na račun te energije se dvigne težišče skakalca v prostem letu za $h_2 = v^2/2g = 0,5$ m.
5. a) Vezje narišemo drugače in vidimo, da so vsi trije uporniki vezani vzporedno. Skozi vsakega izmed treh enakih upornikov teče tok $0,2$ A.



Vesna Harej, Jelislava Sakelšek

30. OBČINSKO TEKMOVANJE ZA SREBRNO VEGOVO PRIZNANJE – Rešitve s str. 117

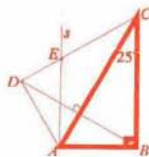
6. razred

Sklop A

naloga	A1	A2	A3	A4	A5	A6
pravilni odgovor	Č	C	C	Č	D	B

Sklop B

- B1 $\frac{1}{2} + 2 \cdot \frac{1}{3} + 3 \cdot \frac{1}{4} + 4 \cdot \frac{1}{5} = \frac{163}{60}$, in $\frac{17}{60} + \frac{163}{60} = \frac{180}{60} = 3$. Odštevali smo od števila 3.
- B2 Ker je $370 = 2 \cdot 5 \cdot 37$, $148 = 2 \cdot 2 \cdot 37$ in $222 = 2 \cdot 3 \cdot 37$, je $D(148, 222, 370) = 2 \cdot 37 = 74$. V enem šopku je torej 5 gerber, 2 nageljna in 3 vejice zelenja. $5 \cdot 210 + 2 \cdot 100 + 3 \cdot 80 = 1490$. Šopek stane 1490 SIT.
- B3 $\angle BAC = 180^\circ - 90^\circ - 25^\circ = 65^\circ$. Ker je $\angle DAC \cong \angle BAC$, je $\angle BAC = 65^\circ$, odtod pa $\angle EAC = 32^\circ 30'$. Ker je $\angle ACE \cong \angle ACB$, je tudi $\angle ACB = 25^\circ$, odtod pa dobimo $\angle CEA = 180^\circ - (25^\circ + 32^\circ 30') = 122^\circ 30'$.



7. razred

Sklop A

naloga	A1	A2	A3	A4	A5	A6
pravilni odgovor	B	B	Č	A	B	Č

Sklop B

B1 Rešitev enačbe je $x = 2$.

B2 Ker je $\frac{a_1 + a_2 + \dots + a_{10}}{10} = 10$, je $a_1 + a_2 + \dots + a_{10} = 100$. Največje število dobimo, če od 100 odštejemo vsoto prvih devetih zaporednih naravnih števil: $a_{10} = 100 - (1 + 2 + 3 + 4 + 5 + 6 + 7 + 8 + 9) = 100 - 45 = 55$, torej največje število ni večje od 55.

B3 Ploščina 44 kvadratov s stranico a je $44a^2$, ploščina 28 krogov s polmerom $r = \frac{a}{2}$ pa $7\pi a^2$. Razmerje $\frac{7\pi a^2}{44a^2} = \frac{7 \cdot 22}{44 \cdot 7} = \frac{1}{2}$ nam pove, da je pokrita polovica pravokotnika.

8. razred

Sklop A

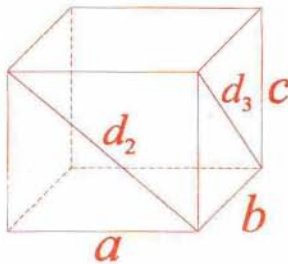
naloga	A1	A2	A3	A4	A5	A6
pravilni odgovor	B	C	Č	A	D	C

Sklop B

B1 Iz enačbe $\frac{a-1}{b-1} = \frac{a}{b} + 1$ sledi $a = b^2$, pri čemer $b \neq 1$.

B2 $10^\circ\text{C} = 50^\circ\text{F}$, $14^\circ\text{F} = -10^\circ\text{C}$ in $T_C = \frac{5}{9} \cdot (T_F - 32)$.

B3 Zaradi $a = 3t$ in $b = t$, dobimo $d_2^2 = 9t^2 + c^2$ in $d_3^2 = t^2 + c^2$, zato je $13 : 5 = (9t^2 + c^2) : (t^2 + c^2)$, od koder je $c = 2t$. Tedaj je $22t^2 = 49,5$ in $t = 1,5$. Robovi kvadra merijo $a = 4,5$ cm, $b = 1,5$ cm in $c = 3$ cm, prostornina pa $V = 20,25$ cm³.



Aleksander Potočnik

IZBIRNO TEKMOVANJE IZ MATEMATIKE – Rešitve s str. 121

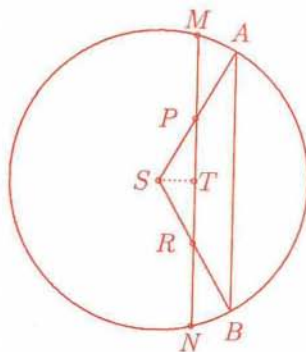
Prvi letnik

1. Ker $3|3n$, je vsota števk števila $3n$ deljiva s 3. Vsota števk števila n je enaka vsoti števk števila $3n$, zato je tudi n deljiv s 3. Toda potem je $3n$ deljiv z 9 in je tudi vsota njegovih števk deljiva z 9. Končno je tudi vsota števk števila n deljiva z 9 in je n deljiv z 9.
2. Izračunajmo

$$\begin{aligned}x - y &= (a + b)(c + d) - (a + c)(b + d) = \\&= ac + ad + bc + bd - ab - ad - bc - cd = \\&= (a - d)(c - b).\end{aligned}$$

Ker je $a - d < 0$ in $c - b > 0$, je $x - y < 0$ oziroma $x < y$. Podobno iz $z - y = (a + d)(b + c) - (a + c)(b + d) = (a - b)(c - d)$ sklepamo, da je $z > y$, in imamo oceno $x < y < z$.

3. Trikotnik BAS je enakokrak. Ker je tetiva MN vzporedna z AB , je tudi trikotnik RPS enakokrak. Naj bo T nožišče višine na stranico RP v trikotniku RPS . Potem je $\angle RST = \frac{120^\circ}{2} = 60^\circ$, trikotnik TSR je enak polovici enakostraničnega trikotnika in velja $|ST| = \frac{|TR|}{\sqrt{3}} = \frac{1}{\sqrt{3}} \cdot \frac{|NP| - |NR|}{2} = \frac{|NP| - |MP|}{2 \cdot \sqrt{3}}$. Ker pa je $|TN| = \frac{|MN|}{2} = \frac{|MP| + |PN|}{2}$, sledi $r^2 = |SN|^2 = |ST|^2 + |TN|^2 = \frac{(|NP| - |MP|)^2}{4 \cdot 3} + \frac{(|NP| + |MP|)^2}{4} = \frac{|NP|^2 + |MP|^2 + |NP| \cdot |MP|}{3} = 13$ in dobimo $r = \sqrt{13}$.



4. Za števila žetonov, ki jih imajo igralci, velja, da dajo paroma različne ostanke pri deljenju s 3: $19 = 3 \cdot 6 + 1$, $9 = 3 \cdot 3$ in $5 = 3 \cdot 1 + 2$. Po vsakem metu kocke se dvema igralcema število žetonov zmanjša za 1, tretjemu pa se poveča za 2, tako da za nova števila žetonov ponovno velja, da dajo paroma različne ostanke pri deljenju s 3, zato se ne more zgoditi, da bi na koncu dva ostala brez žetonov.

Drugi letnik

1. Predpostavimo najprej, da je $m \geq n$. Tedaj lahko enakost iz naloge zapišemo $m^n(m^{m-n} + n^n) = 1995$. Ker je $1995 = 3 \cdot 5 \cdot 7 \cdot 19$, mora biti $n = 1$ in enakost preide v obliko $m(m^{m-1} + 1) = 1995$. Od tod pa že sklepamo, da noben m ni dober, saj je na levi strani produkt sodega in lihega števila, na desni pa liho število.

Naj bo torej $m < n$. Tokrat lahko zapišemo $m^m(1 + m^{n-m}n^n) = 1995$ in mora biti $m = 1$, zato enakost preide v $1 + n^n = 1995$ oziroma $n^n = 1994$. Naravnega števila, ki bi zadoščalo tej enakosti, pa ni.

Ugotovili smo, da ne obstajata naravni števili m in n , da bi veljalo $m^m + (mn)^n = 1995$.

2. Naj bosta p in q rešitvi kvadratne enačbe. Po Vietovih formulah dobimo $p + q = 4a$ in $pq = 5a^2 - 6a$. Rešitvi p in q bosta najbolj oddaljeni med seboj takrat, ko bo $(p - q)^2$ največji. Izraz

$$\begin{aligned}(p - q)^2 &= (p + q)^2 - 4pq = 16a^2 - 4(5a^2 - 6a) = \\ &= -4a^2 + 24a = -4(a - 3)^2 + 36\end{aligned}$$

bo največji, ko bo prvi člen enak 0; torej ko je $a = 3$.

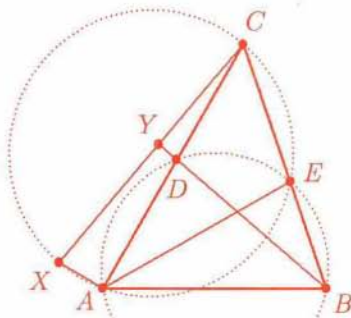
3. Če točke tvorijo nekonveksni štirikotnik, pade ena od točk v notranjost ali na rob trikotnika, ki ga tvorijo druge tri. Potem temu trikotniku očrtamo krožnico in njen polmer mora očitno biti manjši od 1. Še lažje gre, če so vse točke na isti daljici (notranje točke premera kroga s polmerom 1).

Naj sedaj točke tvorijo konveksni štirikotnik $ABCD$. Ker je

$$(\sphericalangle A + \sphericalangle C) + (\sphericalangle B + \sphericalangle D) = 2\pi,$$

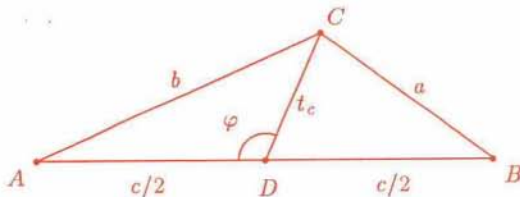
mora veljati $\sphericalangle A + \sphericalangle C \geq \pi$ ali $\sphericalangle B + \sphericalangle D \geq \pi$. Brez škode za splošnost lahko privzamemo, da velja prvo: $\sphericalangle A + \sphericalangle C \geq \pi$. Trikotniku ABD očrtamo krožnico in, ker je $\sphericalangle BCD \geq \pi - \sphericalangle DAB$, mora seveda C ležati znotraj krožnice (oziroma na njej, če velja $\sphericalangle A + \sphericalangle C = \pi$).

4. Naj nosilka višine iz C na BD seka krožnico, očrtano trikotniku AEC , v točki X , nožišče te višine pa označimo z Y . Potem zaradi tetivnosti štirikotnikov $AECX$ in $ABED$ velja $\sphericalangle AXC = \sphericalangle AEB = \sphericalangle ADB$. Ker je $\sphericalangle CDY = \sphericalangle ADB$, sta trikotnika CYD in CAX podobna. Torej je kot $\sphericalangle CAX$ pravi in je po Talesovem izreku CX premer krožnice, očrtane trikotniku AEC .



Tretji letnik

- Desna stran je deljiva s 7, prav tako prvi člen leve strani; torej je $15y^2$ deljiv s 7, zato je y deljiv s 7, y^2 pa s 7^2 . Ker sta desna stran in $15y^2$ deljiva s 7^2 , je tudi $14x^2$ deljiv s 7^2 in je x deljiv s 7. Če pišemo $x = 7x_1$ in $y = 7y_1$ ter vstavimo to v enačbo, dobimo $14x_1^2 + 15y_1^2 = 7^{1993}$. Dobili smo podobno enačbo kot na začetku, le potenca na desni strani se je zmanjšala za 2. Če to ponovimo še 996 krat, dobimo $14x_2^2 + 15y_2^2 = 7$. Ta enačba pa nima rešitve v naravnih številih.
- Preoblikujemo: $2 \cdot \frac{c^2+d^2+2cd}{c^2+d^2} \leq \frac{a^2+b^2+2ab}{ab} \iff 2 + \frac{4cd}{c^2+d^2} \leq 2 + \frac{a^2+b^2}{ab} \iff 4 \leq \frac{c^2+d^2}{cd} \cdot \frac{a^2+b^2}{ab}$. Iz $(a-b)^2 \geq 0$ sledi $\frac{a^2+b^2}{ab} \geq 2$ in podobno še $\frac{c^2+d^2}{cd} \geq 2$, zato je neenakost $4 \leq \frac{c^2+d^2}{cd} \cdot \frac{a^2+b^2}{ab}$ izpolnjena.
- Razpolovišče stranice AB označimo z D in naj bo $\sphericalangle ADC = \varphi$.



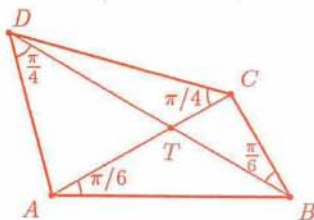
Uporabimo kosinusni izrek v trikotnikih ADC in BCD :

$$b^2 = \left(\frac{c}{2}\right)^2 + t_c^2 - 2 \cdot \frac{c}{2} t_c \cos \varphi,$$

$$a^2 = \left(\frac{c}{2}\right)^2 + t_c^2 - 2 \cdot \frac{c}{2} t_c \cos(\pi - \varphi).$$

Enačbi seštejemo, upoštevamo $\cos(\pi - \varphi) = -\cos \varphi$ in dobimo $t_c^2 = \frac{1}{4}(2(a^2 + b^2) - c^2)$. Sledi $4t_c^2 - c^2 = 2(a^2 + b^2 - c^2) = 2 \cdot 2ab \cos \gamma = 4 \cdot \frac{2S}{\sin \gamma} \cos \gamma = 8S \operatorname{ctg} \gamma$.

4. Opazimo $\sphericalangle DTA = \sphericalangle TCD + \sphericalangle TDC = \sphericalangle ADT + \sphericalangle TDC = \sphericalangle ADC$ in $\sphericalangle BTC = \sphericalangle BAT + \sphericalangle TBA = \sphericalangle CBT + \sphericalangle TBA = \sphericalangle CBA$. Ker je $\sphericalangle DTA = \sphericalangle BTC$, sta kota $\sphericalangle ADC$ in $\sphericalangle CBA$ enaka. Torej ležita točki B in D na krožnicah, iz katerih vidimo daljico AC pod zornim kotom $\sphericalangle DTA$. Krožnici imata zato enaka polmera.



Četrty letnik

1. Denimo, da obstajata m in n , da je $3^m + 3^n + 1 = k^2$ za neko naravno število k . Torej je k liho število. Če enačbo preoblikujemo, dobimo $3^m + 3^n = (k-1)(k+1)$. Ker je k liho število, sta $k-1$ in $k+1$ zaporedni sodi števili, zato je desna stran deljiva z 8.

Pokažimo, da je $3^n = 8l + 3$, če je n liho, in $3^n = 8l + 1$, če je n sodo. Za $n \in \{1, 2\}$ trditev očitno velja. Predpostavimo, da trditev velja za vse n , manjše ali enake $2s$. Pokažimo, da velja tudi za $2s+1$ in $2(s+1)$:

$$3^{2s+1} = 3^{2s} \cdot 3 = (8l+1) \cdot 3 = 8l_1 + 3,$$

$$3^{2(s+1)} = 3^{2s} \cdot 9 = (8l+1) \cdot 9 = 8l_2 + 1.$$

Torej trditev velja za vsako naravno število n .

Če sta m in n lihi števili, je $3^m + 3^n = 8l + 6$; če sta sodi, je $3^m + 3^n = 8l + 2$; če sta različne parnosti, pa $3^m + 3^n = 8l + 4$. Torej v nobenem primeru leva stran ni deljiva z 8. Tako smo prišli do protislovja, zato taki naravni števili m in n ne obstajata.

2. Najprej je $f(x \cdot f(1)) = x^p$. Iz $f(1) = f(\frac{1}{f(1)}) \cdot f(1) = (\frac{1}{f(1)})^p$ sledi $f(1) = 1$. Tako imamo $f(x) = x^p$. Potem pa zaradi

$$x^q = f(1 \cdot f(x)) = f(f(x)) = (x^p)^p = x^{p^2}$$

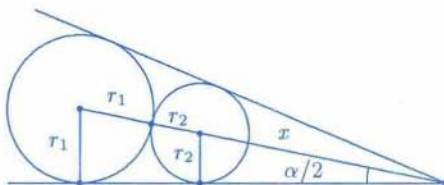
velja $q = p^2$.

3. Naj bo $p(x) = a_n x^n + \dots + a_1 x + a_0$, $m \in \mathbb{Z}$ ničla polinoma $p(x)$ in k naravno število, ki ne deli nobenega izmed števil $p(1), p(2), \dots, p(k)$. Zapišimo m v obliki $m = lk + j$, $l, j \in \mathbb{Z}$, $0 < j \leq k$ in poračunajmo:

$0 = p(m) = p(lk + j) = a_n(lk + j)^n + \dots + a_1(lk + j) + a_0 =$
 $= ka_n l^n + a_n j^n + \dots + ka_1 l + a_1 j + a_0 = k \cdot (\dots) + p(j)$. Takoj

opazimo, da mora biti $p(j)$ deljivo s k , kar pa je očitno protislovje.

4. Izpeljimo zvezo med polmeroma sosednjih vrtanih krogov.



S slike razberemo $r_1 = (r_1 + r_2 + x) \sin \frac{\alpha}{2}$ in $r_2 = x \sin \frac{\alpha}{2}$. Iz teh enačb izpeljemo $r_2 = r_1 \frac{1 - \sin \frac{\alpha}{2}}{1 + \sin \frac{\alpha}{2}}$. Pri $\alpha = \frac{\pi}{3}$ je $r_2 = r_1/3$.

Naj bo R polmer temu trikotniku vrtane krožnice. Skupna ploščina krogov je potem

$$\pi R^2 + 3 \cdot \pi R^2 \left(\frac{1}{9} + \frac{1}{9^2} + \frac{1}{9^3} + \dots \right) = \pi R^2 \left(1 + \frac{3}{9} \frac{1}{1 - \frac{1}{9}} \right) = \frac{11}{8} \pi R^2.$$

Ker je ploščina enakostraničnega trikotnika enaka $3R^2\sqrt{3}$, je iskano razmerje enako $\frac{11\pi}{24\sqrt{3}}$.

Matjaž Željko

REŠITVE NALOG S PREDTEKMOVANJA IZ SREDNJEŠOLSKE FIZIKE – s str. 123

Skupina A

- Čas t potovanja signala od vesoljske ladje do Zemlje in nazaj izračunamo iz enačbe: $L + L + v_1 t = ct \Rightarrow t = \frac{2L}{c - v_1} = 6730$ s. Čas t' od trenutka, ko ladja pošlje signal, do trenutka, ko trčita, izračunamo iz enačbe: $d = v_1 t' + v_2 t' \Rightarrow t' = \frac{d}{v_1 + v_2} = 6500$ s. Ukaz ni prispel pravočasno, ker je $t > t'$.
- Ker je koeficient lepenja k_l večji od koeficienta trenja k_t , je vodoravna komponenta sile ceste na avto največja, ko so kolesa tik pred tem, da zdrsnejo. Navor na os kolesa je takrat $M = r_1 F_l = 500$ mN, pri čemer je r_1 radij kolesa in $F_l = \frac{1}{4} mg k_l = 1800$ N vodoravna komponenta sile

ceste. Iz razmerja izračunamo povečanje tlaka v zavornem sistemu $\Delta p = 5$ bar in potem silo na zavorni pedal $F = \Delta p \pi r_2^2 = 88$ N, pri čemer je r_2 polmer valjastega bata pod zavornim pedalom.

3. Največja sila, ki jo kost lahko še prenese, je $F_n = E(2S) \frac{\Delta l}{l} = 8000$ N, kjer sta E in S prožnostni modul oziroma presek kosti, $\frac{\Delta l}{l}$ pa relativni skrčitev. Iz II. Newtonovega zakona $F = ma = F_n - mg$ izračunamo pospešek človeka $a = 120 \text{ m/s}^2$ pri ugrezanju. Iz pospeška a in globine ugreza d izrazimo hitrost na začetku ugrezanja, ki pa je po drugi strani končna hitrost prostega pada z iskane višine h . Torej

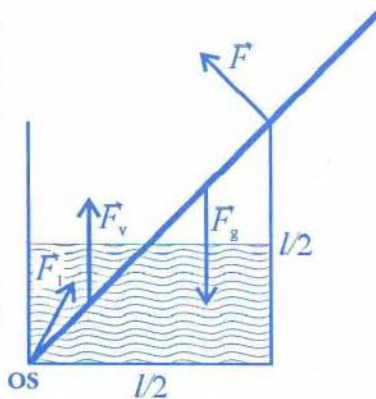
$$\sqrt{2ad} = \sqrt{2gh} \Rightarrow h = \frac{ad}{g} = 61 \text{ cm}.$$

4. Sile so narisane na sliki, pri čemer v splošnem lahko sila F_1 kaže kamorkoli v notranjost kozarca. Iz podobnih trikotnikov izračunamo dolžino $l_2 = l/\sqrt{2}$ dela žice, ki je v kozarcu in dolžino $l_1 = l_2/(2\sqrt{2})$ potopljenega dela žice. Ravnovesje navorov glede na os na sliki je potem:

$$F l_2 + F_v \frac{l_1}{2} \frac{\sqrt{2}}{2} = F_g \frac{l}{2} \frac{\sqrt{2}}{2},$$

kjer je vzgon $F_v = \rho_0 g S l_1$ in $F_g = mg$ teža žice. Končni izraz za silo F na rob kozarca je potem

$$F = \frac{8mg - \rho_0 g S l}{16}.$$



Skupina B

- Da ulovimo v posodo vso vodo, mora biti dolžina palice enaka dometu curka, vrteti se mora z enako frekvenco kot top, vendar zamaknjena za določen kot. Dolžina palice je potemtakem $l = (v_0^2 \sin 2\varphi)/g = 5,1$ m. Palica zaostaja za topom za kot $\alpha = \omega t = 2\pi\nu t = 1,67 \text{ rad} = 95^\circ$, pri čemer je ν frekvenca vrtenja topa in $t = (2v_0 \sin \varphi)/g = 0,53$ s čas potovanja vode od ustja topa do posode.
- V začetku je drugo vedro v višini $h_2 = 2h - l = 5$ m, kjer je h višina škripca in l dolžina vrvi. Ko druga krogla pade z višine h_2

nad tlemi v vedro, ima hitrost $v_2 = \sqrt{2g(h_1 - h_2)} = 6,3 \text{ m/s}$. Pride do neprožnega trka. Iz izreka o ohranitvi gibalne količine dobimo hitrosti v obeh veder po trku: $m_2 v_2 = (m_1 + m_2)v \Rightarrow v = v_2/3 = 2,1 \text{ m/s}$, kjer je m_1 masa prve krogle in $m_2 = m_1/2$ masa druge krogle. Iz izreka o ohranitvi mehanske energije $\frac{1}{2}(m_1 + m_2)v^2 + m_2 g \Delta h = m_1 g \Delta h$ izračunamo spremembo višine $\Delta h = 3v^2/(2g) = 68 \text{ cm}$.

3. V **ravnini** je moč motorja $P = (F_u + F_t)v = 13,5 \text{ kW}$, pri čemer je sila trenja $F_t = mgk_t = 180 \text{ N}$ in sila upora $F_u = Cv^2 = 310 \text{ N}$. Opravljeno delo za prevoženih 100 km je $Pt/\eta = 320 \text{ MJ}$, kjer je čas vožnje $t = 3600 \text{ s}$ in η izkoristek motorja. Poraba goriva na 100 km vožnje je v tem primeru $\frac{320 \text{ MJ}}{40 \frac{\text{MJ}}{\text{l}}} = 8,0 \text{ l}$. Na **klancu** je moč motorja $P = (F_u + F_t + F_d)v = 25 \text{ kW}$, pri čemer je dinamična komponenta teže $F_d = mg \sin \varphi = 410 \text{ N}$, sila trenja $F_t = mg \cos \varphi k_t = 180 \text{ N}$, F_u je enaka kot v ravnini. Povečanje porabe goriva je potem za $(25 \text{ kW} - 13,5 \text{ kW})/13,5 \text{ kW} = 85 \%$.
4. Premik zgornje in spodnje plošče izračunamo iz izreka o ohranitvi mehanske energije in iz ravnovesja sil v položaju, ko so vzmeti najbolj stisnjene:

$$\begin{aligned} mg(h + x_1) &= \frac{1}{2}k_1(x_1 - x_2)^2 + 2 \cdot \frac{1}{2}k_2x_2^2 \\ k_1(x_1 - x_2) &= 2k_2x_2, \end{aligned}$$

pri čemer je x_1 premik zgornje plošče in x_2 premik spodnje plošče. Rešitvi sistema enačb sta $x_1 = 10 \text{ cm}$, $x_2 = 2 \text{ cm}$.

Skupina C

1. "Baterija" električne jegulje ima 140 vzporednih verig členov, v vsaki verigi pa je 5000 zaporedno vezanih členov. Gonilna napetost baterije je $U = 5000 \cdot 0,15 \text{ V} = 750 \text{ V}$, notranji upor pa $R_n = 5000 \cdot 0,25 \Omega/140 = 8,9 \Omega$. Skozi vodo teče tok $I = U/(R_n + R) = 0,93 \text{ A}$, kjer je R upor vode. Tok skozi posamezno celico je $I/140 = 6,6 \text{ mA}$.
2. Zaradi influence se na posameznem lističu nabere naboj $e = \epsilon_0 ES = \epsilon_0 \frac{U}{d} S = 6,2 \cdot 10^{-10} \text{ As}$, kjer je S ploščina lističa, U napetost na kondenzatorju in d razdalja med ploščama kondenzatorja. Listič se enakomerno pospešeno giblje proti nasprotno nabiti plošči in hkrati prosto pada. Izračunamo čas t , ko listič doseže ploščo:

$$\frac{d}{2} = \frac{at^2}{2} = \frac{eEt^2}{2m} \Rightarrow t = \sqrt{\frac{md^2}{eU}} = 34 \text{ ms},$$

kjer je m masa lističa. V tem času se listič spusti za višino $\Delta h = \frac{1}{2}gt^2 = 5,7 \text{ mm}$.

3. Navor na valj je najenostavneje računati glede na os valja. Magnetni navor je v ravnovesju enak navoru sile lepenja (ki je enaka dinamični komponenti teže). Velja: $NI_1SB \sin \varphi = mgr \sin \varphi$, $S = 2rl$, pri čemer je N število ovojov tuljave, I_1 tok, pri katerem je valj v ravnovesju, B gostota magnetnega polja, r polmer valja, l dolžina valja, m masa valja in φ naklonski kot klanca. Iz enačbe izračunamo $I_1 = \frac{mg}{2NB} = 2,5 \text{ A}$. Ko povečamo tok skozi tuljavo, se poveča magnetni navor in tuljava se zavrti navzgor po klanecu za določen kot, da se magnetni navor izenači z navorom v prejšnjem primeru: $NI_22rIB \sin \beta = mgr \sin \varphi$ oziroma $2I_1 \sin \beta = \frac{mg}{2NB} \sin \varphi = I_1 \sin \varphi$, kjer je β kot med magnetnim poljem in osjo tuljave. Iz prejšnjega sledi, da je $\sin \beta = \frac{1}{2} \sin \varphi \Rightarrow \beta = 14,5^\circ$. Tuljava se zavrti za kot $\varphi - \beta = 15,5^\circ$.
4. Višini tekočine v prvem kondenzatorju (x) in drugem kondenzatorju (y) se spreminjata po enačbah:

$$x = a - \frac{\Phi_v}{ad}t, \quad y = \frac{\Phi_v}{ad}t,$$

kjer pomeni Φ_v volumski pretok, a stranico kvadratne plošče in d razdaljo med ploščama. Ko se pretoči del tekočine v drugi kondenzator, obravnavamo oba kondenzatorja kot zaporedno vezan par dveh vzporedno vezanih kondenzatorjev (v enem delu kondenzatorja je vakuum, v drugem delu pa dielektrik) z nadomestno kapaciteto

$$C = \frac{1}{\frac{1}{C_1+C_2} + \frac{1}{C_3+C_4}},$$

kjer je $C_1 = \varepsilon_0 a(a-x)/d$, $C_2 = \varepsilon_0 \varepsilon ax/d$, $C_3 = \varepsilon_0 \varepsilon ay/d$, $C_4 = \varepsilon_0 a(a-y)/d$. Po času t je na kondenzatorju naboj

$$e = CU = \frac{\varepsilon_0 a^2 U}{d(\varepsilon + 1)} \left(\varepsilon + (1 - \varepsilon) \frac{\Phi_v t}{a^2 d} \right) \left(1 - (1 - \varepsilon) \frac{\Phi_v t}{a^2 d} \right).$$

Po 10 s je naboj na sistemu kondenzatorjev $e = 5,1 \cdot 10^{-10} \text{ As}$. Ker sta po končanem pretakanju tekočine kondenzatorja samo zamenjana, se da iz simetrije sklepati, da bo največji naboj na sistemu po polovici ($t = 50 \text{ s}$) pretakanja, in sicer $e = \varepsilon_0 a^2 U (\varepsilon + 1) / (4d) = 1,3 \cdot 10^{-9} \text{ As}$. Za matematični dokaz pa je potrebno poiskati teme funkcije za naboj e , saj je krivulja parabola.

Skupina D

1. Da bi telo prispelo do druge postaje, ga moramo s površja prve postaje vreči s tako hitrostjo, da doseže točko na zveznici med obema postajama, kjer je težnostni pospešek enak nič. V tej točki sta gravitacijski sili obeh postaj na telo ravno nasprotno enaki. Točko, ki naj bo za x oddaljena od lažje postaje, izračunamo iz ravnovesnega pogoja.

$$\frac{\kappa m_1 m}{x^2} = \frac{\kappa m_2 m}{(r-x)^2} \Rightarrow x = \frac{r}{1 + \sqrt{\frac{m_2}{m_1}}} = 13 \text{ km},$$

kjer je m_1 masa manjše postaje, m_2 masa večje postaje in r razdalja med postajama. Iz izreka o ohranitvi mehanske energije

$$-\frac{\kappa m_1 m}{r_1} - \frac{\kappa m_2 m}{r-r_1} + \frac{1}{2}mv^2 = -\frac{\kappa m_1 m}{x} - \frac{\kappa m_2 m}{r-x},$$

kjer je r_1 polmer manjše postaje, izračunamo hitrost $v = 3,9 \text{ m/s}$.

2. Zaradi opisane vožnje je smer navideznega težnega pospeška pravokotna na nagnjeno cesto. Pravo hitrost avtomobila dobimo iz zveze

$$\operatorname{tg} \varphi = \frac{F_c}{mg_0} \Rightarrow v = \sqrt{rg_0 \operatorname{tg} \varphi} = 19,9 \text{ m/s},$$

kjer je F_c centripetalna sila, r polmer krožne ceste, φ kot nagnjenosti cestišča, $g_0 = 9,81 \text{ m/s}^2$. Navidezni težni pospešek je $g_0/\cos \varphi < g$, zato je nihajni čas nihala v vozečem avtu $\sqrt{\cos \varphi}$ -krat manjši od nihajnega časa v mirujočem vozilu. Voznik zato našteje preveč nihajev; določi torej prevelik čas in kot posledico tega manjšo hitrost $v' = v\sqrt{\cos \varphi} = 19,7 \text{ m/s}$. Razlika med hitrostma je torej $v' - v = -0,2 \text{ m/s}$.

3. Druga kroglica mora biti negativno nabita, da bo vsota sil na os enaka nič. V ravnovesju je $|e_2|E = 2mg + e_1E$. Iz tega lahko izračunamo absolutno vrednost neznanega negativnega naboja $|e_2| = e_1 + 2mgd/U = 3,0 \cdot 10^{-5} \text{ As}$. Ko zasukamo palico za kot φ , postane navor električnih sil različen od nič, navor teže pa je še vedno enak nič. Vsota navorov je

$$M = |e_2| \frac{U l}{d} \frac{1}{2} \sin \varphi + e_1 \frac{U l}{d} \frac{1}{2} \sin \varphi.$$

Za majhne zasuke ($\sin \varphi \approx \varphi$) je nihanje sinusno in lahko zapišemo II. Newtonov zakon za primer nihanja $M = J\omega^2\varphi$, pri čemer je vztrajnostni moment $J = \frac{1}{2}ml^2$. Tako izrazimo krožno frekvenco in frekvenco nihanja:

$$\omega = \sqrt{\frac{U(e_1 + |e_2|)}{mld}} = 20 \text{ s}^{-1}, \quad \nu = \frac{\omega}{2\pi} = 3,2 \text{ Hz}.$$

4. Iz podaljškov dveh nevzporednih žarkov (npr. žarka, ki vpada na prvo ploskev biprizme tako, da se ne lomi, in žarka, ki vpada na biprizmo pod takim kotom, da se pri izhodu iz biprizme ne lomi) pri prehodu od svetila skozi biprizmo določimo navidezni izvir. Pri določitvi upoštevamo, da so vsi koti majhni. Dobimo, da je navidezni izvir za $y_0 = (n-1)\gamma a = 75 \mu\text{m}$ nad svetilom, zaradi simetričnosti biprizme pa še en izvir v enaki razdalji pod svetilom. V izrazu pomenita n lomni kvocient in γ lomeči kot biprizme, a pa oddaljenost svetila od biprizme. Iz enačb za interferenco svetlobe iz dveh točkastih izvirov izpeljemo, da je razdalja med dvema zaporednima progama na zaslonu enaka $\Delta h = \frac{a+b}{2y_0}\lambda = 8,3 \text{ mm}$, kjer je b oddaljenost zaslona od biprizme.

Ciril Dominko

15. DRŽAVNO TEKMOVANJE IZ FIZIKE ZA OSNOVNOŠOLCE

7. razred

Teoretične naloge:

1. naloga:

12 cm visoka posoda v obliki kvadra ima dno s stranicama 4 cm in 6 cm. Vanjo spustimo 2 krogli s polmerom 2 cm in težo 1 N. Stene posode in površine krogel so gladke, kar pomeni, da so sile med telesi pravokotne na stične ploskve. S kolikšno silo deluje gornja krogla na spodnjo in s kolikšno silo deluje vsaka od krogel na stene posode (tudi dno posode razumemo kot eno od sten posode). Nalogo rešite grafično in računsko!

Dodajte v posodo še eno enako kroglo in ponovno določite vse sile, s katerimi gornje krogel delujejo na spodnje, in sile, s katerimi vsaka od krogel deluje na stene posode.

Merilo dolžin: dolžine rišite v naravni velikosti.

Merilo sil: dolžina 1 cm naj pomeni silo 1 N.

2. naloga:

Potapljač vzame na delo pod vodo dve različni orodji. Teža prvega orodja je 30 N in prostornina 1 dm^3 , teža drugega pa 60 N in prostornina 2 dm^3 . Na lažje orodje priveže rdeč balon s prostornino 3 dm^3 , na težje pa moder balon s prostornino 5.2 dm^3 . Balona naj bi na morskem dnu označevala lego obeh orodij. Nato prime obe orodji v roko, skoči v vodo in odplava proti dnu. Na kateri globini lahko spusti prvo orodje in na kateri drugo, ne da bi mu ušli na površino?

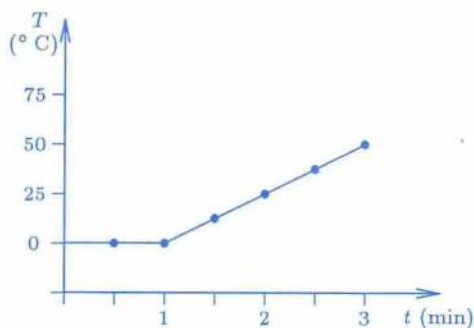
Iz tabele lahko preberete, kako se prostornina balonov spreminja s tlakom v vodi na različnih globinah.

Tlak	1.0	1.1	1.2	1.3	1.4	1.5	1.6	1.7	1.8	1.9	2.0 bar
Prostornina rdečega balona	3.0	2.7	2.5	2.3	2.1	2.0	1.9	1.8	1.7	1.6	1.5 dm^3
Prostornina modrega balona	5.2	4.7	4.3	4.0	3.7	3.5	3.2	3.0	2.9	2.7	2.6 dm^3

3. naloga:

V toplotno izolirano posodo z mešanico ledu in vode potopimo grelec, ki vsako sekundo odda 1000 J toplote. Vsakih 30 sekund izmerimo temperaturo mešanice v posodi in podatke vnesemo v graf (slika 1). Iz grafa ugotovite, koliko je bilo vode in koliko ledu, preden smo začeli greti!

Manjkajoče podatke poiščite v učbeniku!



Slika 1.

Eksperimentalni nalogi:**1. naloga:**

V eno čašo nasujete suho, v drugo pa namočeno fižolovo zrnje.

1. Izmerite, kolikšen del prostornine v posamezni posodi zavzema zrak v suhem in namočenem fižolu?
2. Izmerite gostoto posameznega suhega in namočenega fižolovega zrna!

Upoštevajte, da so v čaši fižola zrna in zrak!

Gostota katerih zrn je večja? Ali lahko to razložite?

Potrebščine:

- suho in namočeno fižolovo zrnje
- 3 menzure
- tehtnica
- voda

2. naloga:

Valjasto posodo iz plastike položite na mizo. Obrnite posodo tako, da bo "šiv" na dnu posode pravokoten na mizo. Da se ne bo kotalila, jo na obeh straneh založite s štručkama plastelina. Prek valja položite desko tako, da bo brusni papir, ki je pritrjen na desko, ležal na valju. Sredina deske naj bo natanko nad šivom podloženega valja. Če je treba, desko uravnovesite s kepico plastelina.

1. Na levo krajišče položite v razdalji 20 cm od sredine deske (na označeno črto) uteži za 10 g in 20 g. Vsakič izmerite višino desnega krajišča deske. Nato položite uteži za 10 g in 20 g tudi na črto na desni strani deske in ponovno izmerite višino desnega krajišča deske. Narišite višino desnega krajišča deske v odvisnosti od uteži na deski! Za izhodišče grafa izberite ravnovesno lego deske brez uteži! Z risbo in besedami razložite, kako je lahko deska v ravnovesju, čeprav je na eni strani utež.
2. Stehtajte lesen kvader natančneje, kot tehta manjša od uteži! Kvader in uteži lahko položite le na črte na deski. Pomagajte si z grafom iz prvega dela naloge! Opišite, kako ste določili maso kvadra!

Potrebščine:

- lesen kvader
- valjasta plastična posoda
- plastelin
- desko z označenima mestoma, kamor lahko polagate uteži in lesen kvader
- 2 uteži (10 g in 20 g)

8. razred

Teoretične naloge:

1. naloga:

Nezaupljiv šofer ne verjame merilniku hitrosti v svojem avtomobilu, zato se odloči, da ga bo umeril. Meri čas, ki ga potrebuje za razdaljo 10 km pri stalni hitrosti na merilniku 60 km/h. Za to razdaljo potrebuje 11 minut. Koliko največ lahko pokaže merilnik hitrosti na avtocesti, kjer je hitrost omejena na 120 km/h?

2. naloga:

Vodoraven železniški tir se nadaljuje s klancem z nagibom 30° kot kaže slika 2. Po vodoravnem delu vozi s hitrostjo 24 km/h pet enakih, med sabo povezanih vagonov, ki tehtajo vsak 1 tono in so dolgi 5 metrov. Kako daleč po klancu pride prvi vagon? Trenje lahko zanemarimo.

Predstavljajte si, da je masa posameznega vagona zbrana v sredini posameznega vagona. Težni pospešek zaokrožite na 10 m/s^2 . Bodite pozorni na dolžino vlaka!

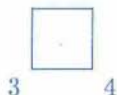


Slika 2.

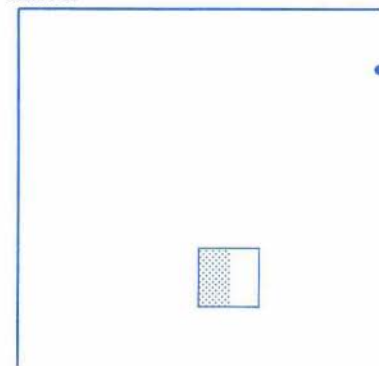
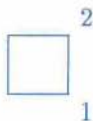
3. naloga:

Pred pravokotni zrcali postavimo 3 cm od prvega in 4 cm od drugega zrcala kocko, katere polovica je pobarvana črno, polovica pa belo. V zrcalih lahko vidite tri slike kocke (slika 3). Označite, kje so bele in kje črne strani kocke na slikah! Konstruirajte, kako nastanejo slike oglišč 1, 2, 3, 4 in 5!

Predstavljajte si, da opazujete kocko in slike iz točke, označene s piko. Žarke, ki se nanašajo na različne slike, narišite v različnih barvah! Konstruirajte na sliki 3, končno rešitev pa prerisite na sliko 4.



Slika 3.



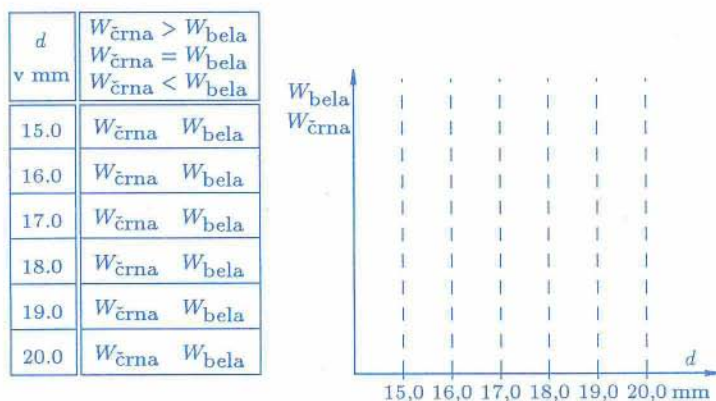
Slika 4.

Eksperimentalni nalogi:

1. naloga:

Pri eksperimentalni nalogi opazujete trk dveh enakih kroglic na tirnicah. Širino tira lahko spreminjamo z dvema klinoma, ki ju z obeh strani potisnemo med tirnici. Na klinih je merilo, ki določa širino tira d na desetinko milimetra natančno. Trk sprožimo tako, da črno kroglico postavimo na črno črto nekaj centimetrov od cevi, po kateri spustimo belo kroglico proti črni kroglici.

1. Primerjajte kinetično energijo obeh kroglic po trku pri tistih razdaljah med tiroma, ki so zapisane v tabeli. Ocenite vsakič, ali je kinetična energija črne kroglice (ki je pred trkom mirovala), večja, enaka ali manjša od kinetične energije bele kroglice po trku. Z znakom večji ($>$), enak ($=$) ali manjši ($<$) vpišite rešitev v tabelo (vstavite ustrezní znak med $W_{\text{črna}}$ in W_{bela}).
2. S klinom izmerite širino med tiroma na desetinko milimetra natančno, ko sta kinetični energiji obeh kroglic po trku enaki. Ali je tedaj njuna skupna kinetična energija po trku večja ali manjša od kinetične energije obeh kroglic pred trkom?
3. Nakazite približen potek grafa odvisnosti kinetične energije bele kroglice od širine tirov in potek grafa odvisnosti kinetične energije črne kroglice od širine tirov (oboje v isti graf)!
(Upoštevajte ugotovitve iz točke a in b.) Napišite kratek komentar opazovanja.



Slika 5. Tabela in graf.

4. Ali je lahko v kakšnem primeru kinetična energija črne kroglice po trku enaka kinetični energiji bele kroglice pred trkom? Odgovor utemeljite. Pomagajte si s poskusom: trk dveh kroglic v žlebu (premični tirnici).

2. naloga:

Upornik z uporom $R_o = 100 \, \Omega$ vezemo z žarnico z neznanim uporom na napetostni vir vzporedno, v drugi vezavi pa zaporedno. Koliko meri upor žarnice R_z v zaporedni vezavi in koliko je njen upor R_v v vzporedni vezavi? Na voljo je ampermeter (njegovega notranjega upora ne upoštevamo). Skicirajte najprej vezja in vanje vpišite simbole količin, ki jih boste uporabili pri računih.

(Opomba: z napačno vezavo lahko pregori varovalka instrumenta, tedaj meritve ne boste mogli več nadaljevati.)

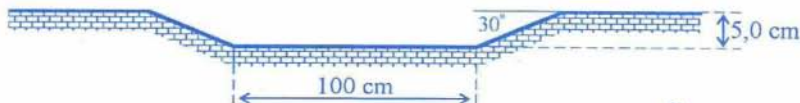
Mojca Čepič

NALOGE Z DRŽAVNEGA TEKMOVANJA IZ SREDNJEŠOLSKE FIZIKE

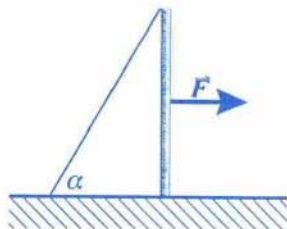
Naloge je 6.5.1995 reševalo 126 najboljših tekmovalcev z regijskega tekmovanja.

Skupina A

1. Po gladki podlagi drsita vstric enaki kladi. Hitrost posamezne klade je $1,5 \, \text{m/s}$. Prva klada na svoji poti naleti na vdolbino, ki jo v prerezu kaže slika. Vodoravni del vdolbine, ki je globoka $5,0 \, \text{cm}$, je dolg $100 \, \text{cm}$. Pospešek telesa na klancu z naklonom 30° je $5,0 \, \text{m/s}^2$. Katera klada po izstopu prve klade iz vdolbine prehiteva? Odgovor utemelji z računom! Kako bi morali spremeniti dolžino vodoravnega dela vdolbine, da bi bil izid drugačen?



2. Homogeno palico z dolžino $100 \, \text{cm}$ in težo $200 \, \text{N}$ postavimo navpično na ravno podlago in pripnemo z vrvjo, kot kaže slika. Kot α med vrvico in tlemi je 60° , koeficient lepenja med palico in podlago pa $0,35$. S silo F vlečemo palico v vodoravni smeri na polovici višine. Pri kolikšni najmanjši



sili F palica zdrsne? Kolikšna pa mora biti ta sila, če je prijemališče 75 cm nad tlemi? Utemelji!

3. V posodo z velikim presekom natočimo 20 cm živega srebra s specifično težo 136 kN/m^3 in nato še 30 cm vode s specifično težo 10 kN/m^3 . V posodo damo dva enako velika kvadra, ki sta povezana z lahko, tanko, neraztegljivo vrvico z dolžino 15 cm. Vrvica povezuje središči osnovnih ploskev. Ploščina osnovne ploskve kvadra je 400 cm^2 , višina pa 10 cm. Specifična teža enega kvadra je 70 kN/m^3 , drugega pa $4,5 \text{ kN/m}^3$. Koliko zgornjega kvadra gleda iz vode? S kolikšno silo je napeta vrvica?

Skupina B

1. Po gladki podlagi drsita vstric enaki kladi. Obe kladi imata hitrost v_0 . Prva klada na svoji poti naleti na vdolbino, ki jo v prerezu kaže slika. Dolžina vodoravnega dela vdolbine, ki je globoka 10 cm, ni znana. Naklonski kot obeh klancev vdolbine je 15° . Kolikšna mora biti začetna hitrost klad, da bo po izstopu prve klade iz vdolbine ta pred drugo, ne glede na dolžino vodoravnega dela vdolbine?



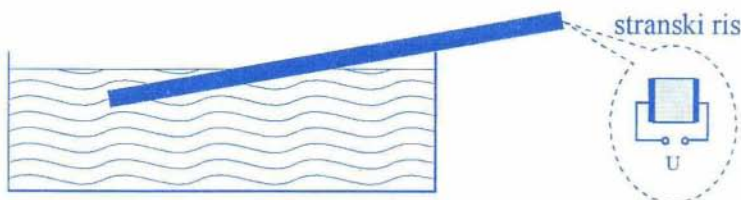
2. Tovorni vlak z dolžino 100 m je naložen tako, da se njegova masa na dolžinsko enoto linearno veča od začetka proti koncu. Na začetku vlaka znaša masa na dolžinsko enoto 500 kg/m . Vlak se začne gibati s konstantnim pospeškom $0,10 \text{ m/s}^2$, pri čemer mora lokomotiva vleči s silo 10 kN.
- Kolikšna je masa vlaka?
 - Kolikšna je masa na dolžinsko enoto na koncu vlaka?
 - Zadnja četrtina vlaka je pripeta k preostalemu dela vlaka z jeklenim drogom. Kakšen premer naj ima drog, da bi se pretrgal šele pri pospeških, večjih od 10 m/s^2 ? Jeklena palica s premerom 1,0 cm se pretrga pri obremenitvi s silo 100 kN.
3. Kovinski lonec s toplotno kapaciteto 180 J/K je do višine 1,0 cm napolnjen z vodo. Lonec je valjaste oblike, njegov notranji polmer je 10 cm, prav toliko višina. Na začetku imata voda in lonec 20°C . Napravimo dva poskusa. Najprej polagamo v vodo železne diske višine 1,0 cm in polmera 9,0 cm. Kateri disk po vrsti bo delno potopljen v vodo, če imajo diski temperaturo 20°C ? Drugi poskus napravimo

z vročimi diski, segretim na temperaturo 200°C . Kateri disk bo sedaj prvi pogledal iz vode, če jih zelo počasi polagamo drugega vrh drugega v posodo? Specifična toplota vode je $4,2 \text{ kJ/kgK}$, železa 450 J/kgK . Izparilna toplota vode je $2,3 \text{ MJ/kg}$. Gostota železa je $7,8 \text{ kg/l}$, vode pa 1000 kg/m^3 .

- Na klanec z naklonskim kotom 45° vržemo prožno žogico pod kotom 47° (2° glede na klanec). Največ kolikokrat se žogica odbije, preden se začne vračati nazaj k nam?

Skupina C

- V posodo z živim srebrom z gostoto 13600 kg/m^3 in specifičnim uporom $9,6 \cdot 10^{-7} \Omega\text{m}$, je potopljena 100 cm dolga cev kvadratnega profila s stranico $5,0 \text{ mm}$, ki je proti vodoravnici nagnjena za $5,0^{\circ}$ in ima prevodni navpični steni (glej sliko). Kolikšno napetost moramo priključiti na steni, da bo v navpičnem magnetnem polju z gostoto $1,0 \text{ T}$ živo srebro začelo iztekati na zgornjem koncu?

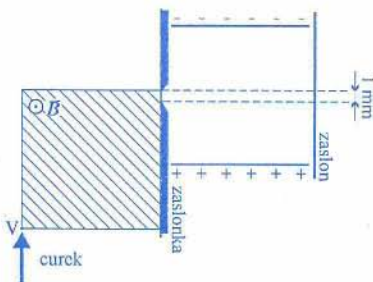


- V poenostavljenem modelu vodikovega atoma elektron enakomerno kroži okoli dosti težjega protona. S predpostavko, da je vrtilna količina atoma za osnovno stanje enaka $\hbar = h/2\pi$ (Bohrov postulat), kjer je h Planckova konstanta, izračunaj radij tira elektrona vodikovega atoma v osnovnem stanju. Izračunaj še vse možne spremembe radija, ko pravokotno na ravnino kroženja vklopimo magnetno polje z magnetno poljsko gostoto 100 T . Planckova konstanta je $h = 6,63 \cdot 10^{-34} \text{ Js}$, influenčna konstanta pa $\epsilon_0 = 8,85 \cdot 10^{-12} \text{ As/Vm}$. *Fizikalni poduk:* Vrtilna količina točkastega telesa, ki kroži po krogu z določenim radijem, je glede na središče kroženja enaka produktu med radijem in gibalno količino telesa.
- Neskončno velika vodoravna plošča, nabita s površinsko gostoto naboja $-1,5 \cdot 10^{-5} \text{ As/m}^2$, ima luknjo s polmerom $5,0 \text{ cm}$. Kje je ravnovesna lega prašnega delca z maso $1,0 \text{ mg}$ in nabojem $+3,2 \cdot 10^{-11} \text{ As}$, ki se lahko giblje le po simetrijski osi luknje?

Fizikalni poduk: Jakost električnega polja je na osi okrogle enakomerno nabite plošče z radijem r in nabojem e , v oddaljenosti z od središča plošče, enaka

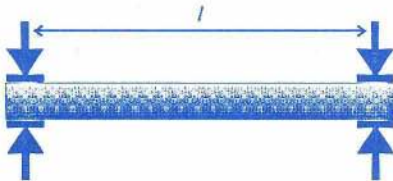
$$E = \frac{e}{2\pi\epsilon_0 r^2} \left(1 - \frac{|z|}{\sqrt{z^2 + r^2}} \right).$$

4. Neznano hitrost protonov v curku bi radi omejili na ozek interval. Zaradi tega usmerimo curek skozi napravo, ki je prikazana na sliki. Curek vstopa pod pravim kotom v območje s homogenim magnetnim poljem gostote $0,10 \text{ T}$ v točki V (na sliki šrafirano kvadratno območje s stranico 20 cm), izstopa pa skozi ozko zaslonko širine $1,0 \text{ mm}$ v električno polje ploščatega kondenzatorja z jakostjo 1000 V/cm in dolžino plošč 20 cm , za katerim je zaslon. Kolikšna je širina curka na zaslonu? Naboj protona je $1,6 \cdot 10^{-19} \text{ As}$, masa pa $1,67 \cdot 10^{-27} \text{ kg}$.



Skupina D

1. Ko ob poznih zimskih večerih žerjavica v peči že dogori, je ob ohlajanju kovinskih vrat moč slišati zaporedne poke, ki se pojavljajo v približno enakih časovnih presledkih. To dogajanje približno opišemo z naslednjim modelom (glej sliko). Palica z dolžino l in presekom S naj bo na obeh koncih vpeta, tako da nanjo delujeta na koncih veliki konstantni prečni sili F . Sprememba temperature na časovno enoto naj bo R , koeficienta lepenja in trenja k_l in k_t ($k_t < k_l$), prožnostni modul E in temperaturni koeficient dolžinskega raztezka α . Kolikšna je pogostnost (frekvenca) pokov? Primerne vrednosti navedenih količin izberi sam!
2. Zvezdi s temperaturama 1500 K in 10000 K , masama $1,0 \cdot 10^{31} \text{ kg}$ in $7,0 \cdot 10^{29} \text{ kg}$ ter radijema $2,0 \cdot 10^9 \text{ m}$ in $8,0 \cdot 10^7 \text{ m}$ krožita okoli skupnega težišča. Razdalja med zvezdama je $9,0 \cdot 10^{10} \text{ m}$. Zemlja se nahaja v ravnini, v kateri krožita zvezdi. Dogodek, ko se zvezdi prekrivata, imenujemo mrk. Gostoto svetlobnega toka s sistema zvezd

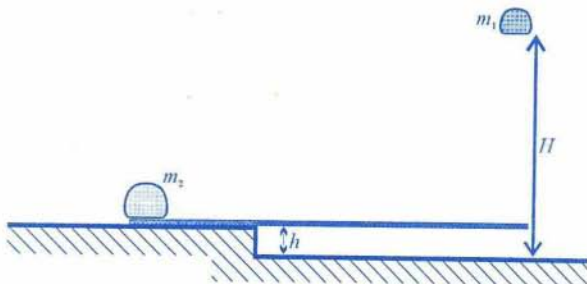


merimo s teleskopom, ki ima premajhno ločljivost, da bi lahko zaznali posamezno zvezdo.

- a) Skiciraj graf, kako je izmerjena gostota svetlobnega toka odvisna od časa. Na skici jasno označi tipične količine: *ekstreme*, *čase trajanja mrkov* in *čase zahajanja ene zvezde za drugo*.
- b) Izračunaj:
 - i) razmerja med največjimi in najmanjšimi izmerjenimi gostotami svetlobnega toka;
 - ii) čas trajanja zahoda manjše zvezde za večjo;
 - iii) čase trajanja mrkov.

Upoštevaj, da je ena zvezda veliko manjša od druge zvezde in da sta velikosti obeh veliko manjši od razdalje med zvezdama. Upoštevaj tudi, da je masa ene zvezde veliko manjša od mase druge zvezde. Zvezdi obravnavamo kot črni telesi. Stefanova konstanta je $\sigma = 5,67 \cdot 10^{-8} \text{ W/m}^2\text{K}^4$.

3. Na stopnico z višino h postavimo togo, lahko desko dolžine l tako, da je $3/4$ gleda čez rob (glej sliko). Na en konec deske postavimo utež z maso m_2 , na drugi konec deske pa z višine H spustimo utež z maso m_1 . Uteži sta kovinski. Če taka utež pade na primer na tla, se ustavi, vendar se na tla ne prilepi. Dimenzije uteži so zanemarljive. Izračunaj največje višine obeh uteži med poskusom!



Eksperimentalna naloga

Raztopina soli prevaja električni tok. Upor takšnega prevodnika je, tako kot upor žice, odvisen od razdalje med priključkoma in od prečnega preseka dela tekočine, ki tok prevaja. Odvisen pa je tudi od temperature, koncentracije in vrste soli.

1. Izmeri specifični upor raztopine pri sobni temperaturi.
2. Izmeri in nariši odvisnost specifičnega upora raztopine od temperature (v območju od 40°C do 60°C) ter določi temperaturni koeficient specifičnega upora v tem temperaturnem območju.

V poročilu v nekaj stavkih predstavi in skiciraj poskus, na kratko opiši, kako si meril, predstavi rezultat in ga komentiraj ter odgovori na vprašanja.

Vprašanja

1. Zakaj smo pri poskusu uporabili izmenično napetost?
2. Kakšno je temperaturno spreminjanje upora kovine in kakšno upora prevodne raztopine?

Potrebščine

- plastična banjica;
- napetostni izvir ŠMI 03 (uporabi izmenično napetost 5 V);
- dve bakreni ploščici s priključnimi žicami (na koncu banana);
- tri žice z bananami;
- pripravljena raztopina (sobna temp.), v drugem delu vroča raztopina (cca 70°C);
- digitalni unimer za merjenje izmeničnega toka – območje do 10 A, natančnost 0,01 A;
- analogni unimer za merjenje izmenične napetosti z natančnostjo 0,1 V;
- ščipalka, plastična žlička za mešanje, papirnata brisača, smirkov papir;
- termometer;
- milimetrski papir, ravnilo.

Ciril Dominko, Jure Bajc

PRESEK

list za mlade matematike, fizike, astronome in računalnikarje

23. letnik, šolsko leto 1995/96, številka 3, strani 129 – 192

UREDNIŠKI ODBOR: Vladimir Batagelj, Tanja Bečan (jezikovni pregled), Dušica Boben (oblikovanje teksta), Vilko Domajnko, Roman Drnovšek (novice), Darjo Felda (tekmovanja), Bojan Golli, Marjan Hribar, Boštjan Jaklič (tehnični urednik), Martin Juvan (računalništvo), Sandi Klavžar, Boris Lavrič, Andrej Likar (fizika), Matija Lokar, Bojan Magajna (glavni urednik), Franci Oblak, Peter Petek, Marijan Prosén (astronomija), Marjan Smerke (svetovalec za fotografijo), Miha Štalec, Jana Vrabec (nove knjige), Marija Vencelj (matematika, odgovorna urednica).

Dopisi in naročnine: Društvo matematikov, fizikov in astronomov Slovenije – Podružnica Ljubljana – Komisija za tisk, Presek, Jadranska c. 19, 61111 Ljubljana, p.p. 64, tel. (061) 1232-460, št. ŽR 50106-678-47233. Naročnina za šolsko leto 1995/96 je za posamezne naročnike 1.250 SIT, za skupinska naročila šol 1.000 SIT, posamezna številka 250 SIT, za tujino 25.000 LIT, devizna nakazila SKB banka d.d. Ljubljana, val-27621-42961/9, Ajdovščina 4, Ljubljana.

List sofinancirata MZT in MŠŠ

Ofset tisk DELO – Tiskarna, Ljubljana

Po mnenju MZT št. 415-52/92 z dne 5.2.1992 šteje revija med proizvode iz 13. točke tarifne št. 3 zakona o prometnem davku, za katere se plačuje 5% davek od prometa proizvodov.

© 1996 Društvo matematikov, fizikov in astronomov Slovenije – 1265

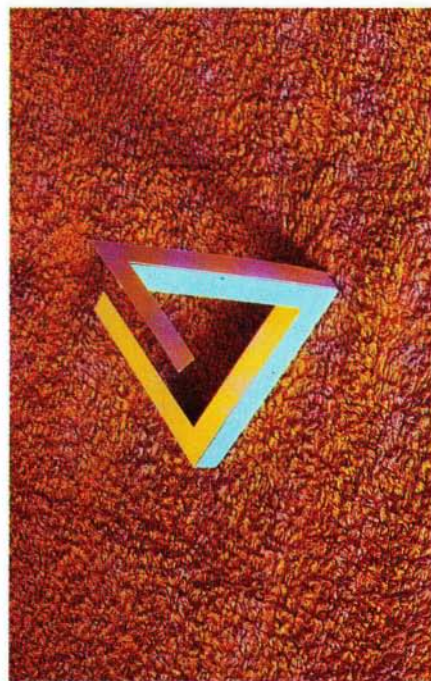


Foto: Mojca in Mitja Luštrek



Slovenska ekipa na 36. matematični olimpiadi v Torontu v Kanadi.



Slovenska fizikalna olimpijska ekipa na 26. olimpiadi v Canberri v Avstraliji.