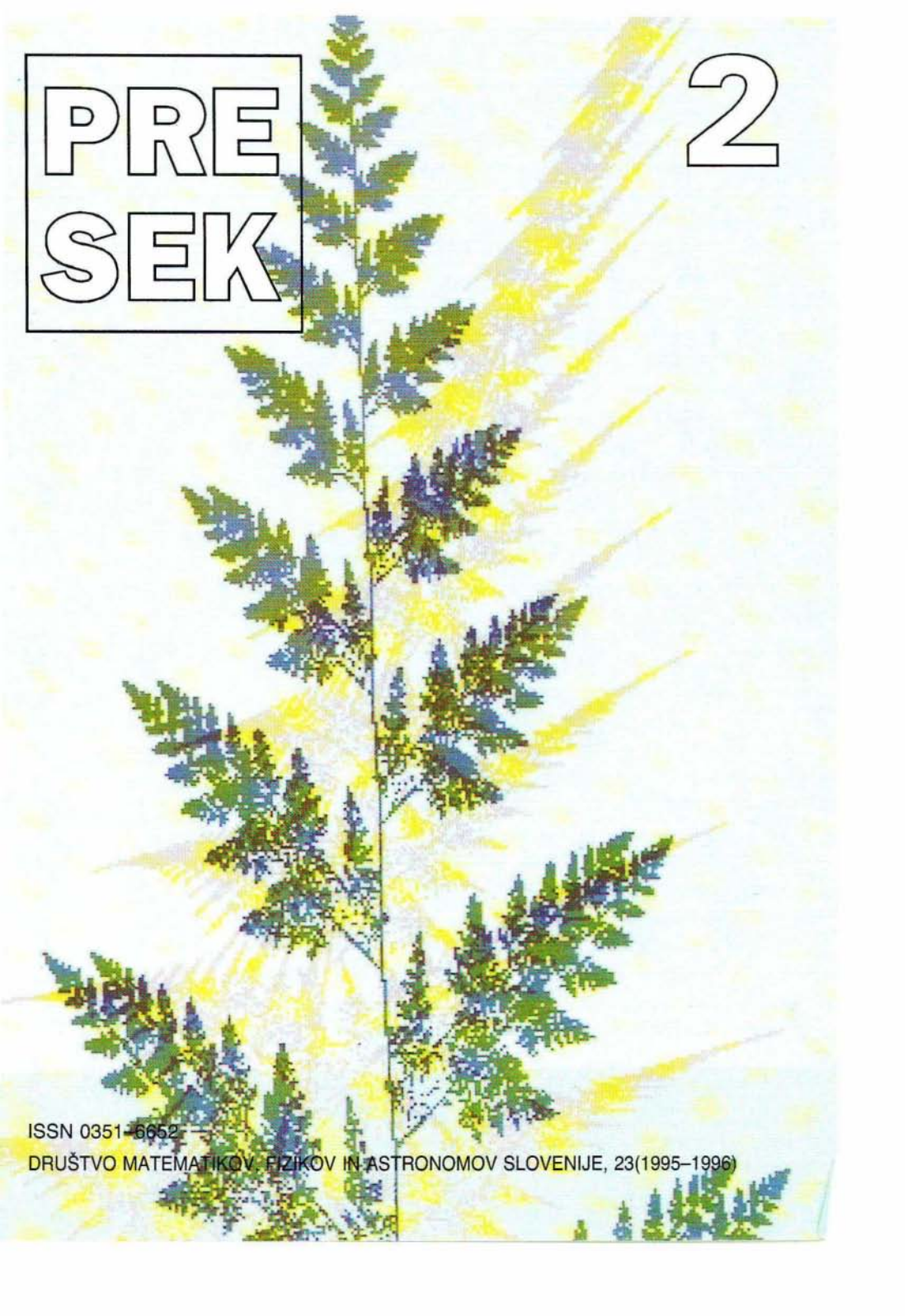




PRE
SEK

2

ISSN 0351-6652

DRUŠTVO MATEMATIKOV, FIZIKOV IN ASTRONOMOV SLOVENIJE, 23(1995-1996)

list za mlade matematike, fizike, astronome in računalnikarje
23. letnik, leto 1995/96, številka 2, strani 65–128

VSEBINA

MATEMATIKA	Matrike – ali skladišča informacij (Olga Arnuš) 65-69
	Pregradimo trikotik, 1. del (Boris Lavrič) 86-88
	Vsakdanje funkcije (Anton Cedilnik) 100-104
	O praštevilih (Borut Zalar) 110-113
FIZIKA	Veter in zvok (Andrej Likar) 72-75
	Atwoodov škripec (Janez Strnad) 90-94
	Vibracijski transporterji (Milan Ambrožič) 108-109
ASTRONOMIJA	Usta (Marijan Prosén) 76-77
RAČUNALNIŠTVO	Napake v prikazovanju števk (Darko Zupanič) 78-82
NALOGE	Pocenitev, podražitev (Vinko Horvat) 85
	Funkcijska enačba (Roman Drnovšek) 88
	Najdaljša četa (Martin Juvan) 89
	Poišči število (Ivan Lisac) 95
	Ena finančna (Martin Juvan) 99
	Manjkajoči števili (Martin Juvan) 99
REŠITVE NALOG	Čakanje na avtobus – Rešitev nagradne naloge s str. 1 (Marija Vencelj) 69-71
	Na koliko načinov se policist lahko zmoti – s str. 45 (Anton Suhadolc) 75
	Križanka "Starogrški matematiki" – s str. 32 (Marko Bokalič) 77
	Deljivost – s str. 4 (Marija Vencelj) 82
	Trikotiki s posebno lastnostjo – s str. 19 (Ivan Vidav) 83-85
	Na obisku pri Barbari – s str. 4 (Janez Žerovnik) 89
	Slamica – s str. 31 (Matjaž Vencelj) 94-95
	Penrosov trikotnik – s str. 18 (Vilko Domajnko) 98
	Iz družinske kronike – s str. 29 (Marija Vencelj) 104
	Manjkajoče število – s str. 25 (Martin Juvan) 104-105
	Devet vprašanj o širokih številih – s str. 39 (Martin Juvan) 106-107
RAZVEDRILO	Križanka "Očetje fizikalnih enot" (Marko Bokalič) 96-98
TEKMOVANJA	15. področno tekmovanje iz fizike za osnovnošolce (Vesna Harej, Jelisava Sakelšek) 114-116
	30. občinsko tekmovanje za srebrno Vegovo priznanje (Aleksander Potočnik) 117-121
	Izbirno tekmovanje iz matematike (Matjaž Željko) 121-123
	Naloge s predtekmovanja iz srednješolske fizike (Ciril Dominko, Jure Bajc) 123-128
NA OVITKU	Praproti (Matija Lokar). Glej tudi prispevek istega avtorja v prejšnji številki Preseka I,IV

MATRIKE (ali skladišča informacij)

Gospa Korenčkova je nameravala kupiti 3kg jabolka in 2kg pomaranč. V prvi trgovini so bila jabolka po 120 SIT za kg, pomaranče pa po 150 SIT za kg. Sadje bi jo torej stalo $3 \cdot 120 \text{ SIT} + 2 \cdot 150 \text{ SIT} = 660 \text{ SIT}$. V zgošчени obliki bi zgornje podatke zapisali v dveh stolpcih:

	količina	cena
jabolka	3	120
pomaranče	2	150

Dogovorimo se, da bomo oba stolpca zapisali v oglatih oklepajih. Skupni strošek za sadje smo dobili s preprostim gospodinjskim računom, ki mu bomo rekli skalarno množenje:

$$\begin{bmatrix} 3 \\ 2 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 120 \\ 150 \end{bmatrix} = 3 \cdot 120 + 2 \cdot 150 = 660.$$

V splošnem zapišemo ta račun takole:

$$\begin{bmatrix} a_1 \\ a_2 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} b_1 \\ b_2 \end{bmatrix} = a_1 b_1 + a_2 b_2.$$

Gospa Korenčkova je pogledala še v drugo trgovino. Tam so bila jabolka po 110 SIT, pomaranče pa po 160 SIT za kg. Skupni strošek bi bil $3 \cdot 110 + 2 \cdot 160 = 650$, torej manjši kot v prvi trgovini. Podatke o cenah lahko spravimo v tabelo:

	jabolka	pomaranče
trgovina 1	120	150
trgovina 2	110	160

Taki tabeli števil rečemo v matematiki matrika. Običajno jo zapišemo med oglata oklepaja ali pa med dve dvojni navpični črti. Zgornja matrika ima dve vrstici in dva stolpca (matrika reda 2×2). Število vrstic ni nujno enako številu stolpcev. Tudi eno vrstico ali stolpec bomo šteli k matrikam.

Vse dosedanje gospodinjske podatke gospe Korenčkove lahko zapišemo z dvema matrikama: prva zgoščeno prikazuje cene v obeh trgovinah, druga pa nakupne količine. Iz teh podatkov lahko izračunamo zneska za obe trgovini. Tudi ti dve števili lahko zložimo v stolpec:

$$\begin{bmatrix} 120, & 150 \\ 110, & 160 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 3 \\ 2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 120 \cdot 3 + 150 \cdot 2 \\ 110 \cdot 3 + 160 \cdot 2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 660 \\ 650 \end{bmatrix}.$$

Izvedli smo neko operacijo, ki je matriki in stolpcu priredila nov stolpec. To je poseben primer operacije, ki jo imenujemo množenje matrik.

Denimo, da imamo opravka še z gospo Petersiljčkovo, ki je namepravala kupiti 1kg jabolk in 2kg pomaranč. Za prikaz vseh količin obeh gospodinj potrebujemo matriko reda 2×2 :

$$\begin{array}{l} \text{jabolka} \\ \text{pomaranče} \end{array} \quad \begin{bmatrix} 3, & 1 \\ 2, & 2 \end{bmatrix}.$$

Drugi stolpec se nanaša na gospo Petersiljčkovo. Primerjavo zneskov za obe gospodinj in obe trgovini nam da naslednji račun z matrikami:

$$\begin{bmatrix} 120, & 150 \\ 110, & 160 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 3, & 1 \\ 2, & 2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 120 \cdot 3 + 150 \cdot 2, & 120 \cdot 1 + 150 \cdot 2 \\ 110 \cdot 3 + 160 \cdot 2, & 110 \cdot 1 + 160 \cdot 2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 660, & 420 \\ 650, & 430 \end{bmatrix}.$$

Drugi stolpec nam pove, da se gospe Petersiljčkovi bolj izplača kupiti sadje v prvi trgovini.

Iz primera vidimo, da matrike množimo tako, da skalarno množimo vrstice iz prve matrike s stolpci iz druge matrike (skalarni produkt j -te vrstice prve matrike in k -tega stolpca druge matrike je v rezultatu število, ki leži v j -ti vrstici in k -tem stolpcu). Bralec naj premisli, kakšen pogoj mora veljati za dimenzije dveh matrik, da ju je mogoče zmnožiti.

Matrika torej predstavlja zgoščeno informacijo. Ta je skrita v številih in v položaju števil v tabeli. V našem primeru je 120 cena, prva vrstica pove, da gre za jabolka, prvi stolpec pa, da se cena nanaša na prvo trgovino. Dve matriki sta enaki natanko tedaj, ko se ujemata v istoležnih številih. Namesto številnih razmetanih računov nam množenje matrik v zgoščeni in urejeni obliki prikaže primerjavo zneskov. Množenje matrik, ki smo ga spoznali na našem primeru, je samo ena od možnih operacij z matrikami. Lahko jih na primer tudi seštevamo ali pa množimo s številom.

Oglejmo si še, kakšna pravila veljajo za to množenje matrik. Omejili se bomo na matrike 2×2 .

1. Zelo pomembno lastnost množenja odkrijemo, če zmnožimo na primer

$$\begin{bmatrix} 1, & 2 \\ 3, & 5 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 3, & 2 \\ 2, & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \cdot 3 + 2 \cdot 2, & 1 \cdot 2 + 2 \cdot 1 \\ 3 \cdot 3 + 5 \cdot 2, & 3 \cdot 2 + 5 \cdot 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 7, & 4 \\ 15, & 11 \end{bmatrix},$$

nato pa še

$$\begin{bmatrix} 3, & 2 \\ 2, & 1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 1, & 2 \\ 3, & 5 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3 \cdot 1 + 2 \cdot 3, & 3 \cdot 2 + 2 \cdot 5 \\ 2 \cdot 1 + 1 \cdot 3, & 2 \cdot 2 + 1 \cdot 5 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 9, & 16 \\ 5, & 9 \end{bmatrix}.$$

Množenje matrik torej ni komutativno.

2. Nekoliko daljši račun bi bil potreben za dokaz asociativnosti. Če tri poljubne matrike označimo z A , B in C , to pomeni $(AB)C = A(BC)$. Bralec naj to opravi sam.

3. Prav posebno vlogo ima matrika $I = \begin{bmatrix} 1, & 0 \\ 0, & 1 \end{bmatrix}$. Če jo množimo s katerokoli matriko $A = \begin{bmatrix} a, & b \\ c, & d \end{bmatrix}$ (z leve ali z desne), dobimo kar matriko A . Tako lastnost ima pri množenju števil število 1.

4. V množici realnih števil lahko za vsako število $a \neq 0$ najdemo tako število b , da je $ab = 1$ ali $b = a^{-1}$ ali $b = 1 : a$ (inverzna vrednost števila a). Ali je to mogoče tudi v množici matrik? Namesto števila 1 bomo seveda vzeli matriko I . Matriki $A = \begin{bmatrix} a, & b \\ c, & d \end{bmatrix}$ bi radi priredili tako matriko $B = \begin{bmatrix} x, & y \\ u, & v \end{bmatrix}$, da bo $AB = I$ ali

$$\begin{bmatrix} a, & b \\ c, & d \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} x, & y \\ u, & v \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1, & 0 \\ 0, & 1 \end{bmatrix}.$$

To nas privede do sistema enačb:

$$ax + bu = 1, \quad ay + bv = 0$$

$$cx + du = 0, \quad cy + dv = 1$$

z rešitvijo

$$x = \frac{d}{ad-bc}, \quad y = \frac{-b}{ad-bc}, \quad u = \frac{-c}{ad-bc}, \quad v = \frac{a}{ad-bc}.$$

Rešitev seveda obstaja, če je število $ad - bc$ različno od nič. Imenujemo ga determinanta D matrike $A = \begin{bmatrix} a, & b \\ c, & d \end{bmatrix}$. Če je torej $D \neq 0$, je matrika

$$B = \begin{bmatrix} \frac{d}{D} & \frac{-b}{D} \\ \frac{-c}{D} & \frac{a}{D} \end{bmatrix}$$

inverzna matrika matrike A ali $AB = I$. Bralec se lahko prepriča, da je tedaj tudi $BA = I$. Zato je smiselna oznaka $B = A^{-1}$. Za matrike, ki imajo determinanto enako nič, pravimo, da niso obrnljive.

Omenjena pravila pomagajo pri reševanju nekaterih matričnih enačb. Naj bosta na primer dani matriki $A = \begin{bmatrix} 2, & 1 \\ 5, & 3 \end{bmatrix}$ in $B = \begin{bmatrix} 4, & 1 \\ 3, & 2 \end{bmatrix}$. Zanima nas taka matrika X , da bo $AX = B$. Da bi izračunali X , bi morali enačbo "deliti" z A , kar pa pomeni množiti z inverzno vrednostjo, če ta seveda obstaja. Zaradi nekomutativnosti množenja moramo paziti na vrstni red faktorjev, v našem primeru moramo z leve strani množiti obe strani enačbe z A^{-1} (da bosta faktorja A^{-1} in A skupaj):

$$A^{-1}(AX) = A^{-1}B.$$

Upoštevamo asociativnost množenja:

$$(A^{-1}A)X = A^{-1}B.$$

Od tod

$$IX = A^{-1}B \quad \text{in} \quad X = A^{-1}B.$$

V danem primeru je determinanta $D = 2 \cdot 3 - 5 \cdot 1 = 1$, $A^{-1} = \begin{bmatrix} 3, & -1 \\ -5, & 2 \end{bmatrix}$ in

$$X = \begin{bmatrix} 3, & -1 \\ -5, & 2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 4, & 1 \\ 3, & 2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 9, & 1 \\ -14, & -1 \end{bmatrix}.$$

Zaradi nekomutativnosti množenja ima enačba $XA = B$ drugačno rešitev. Tu je treba z A^{-1} množiti z desne (vaja za bralca).

Do naloge rešiti matrično enačbo bi prišli, če bi v zgledu iz uvoda poznali količine kupljenega sadja, na primer:

	gospa K.	gospa P.
jabolka	3,5	4
pomaranče	2	2

Te podatke naj predstavlja matrika A . Znani naj bodo tudi skupni zneski za sadje, ki sta jih gospodinji plačali enkrat v prvi in naslednjič v drugi trgovini:

	gospa K.	gospa P.
trgovina 1	610	660
trgovina 2	675	730

Te podatke naj predstavlja matrika B . Bralec naj izračuna matriko, ki bo predstavljala cene jabolk in pomaranč v obeh trgovinah.

Olga Arnuš

ČAKANJE NA AVTOBUS – Rešitev nagradne naloge s str. 1

V uredništvo Preseka je do 16. oktobra prispelo nekaj odgovorov na zastavljeno vprašanje. Vsi reševalci so odkrili, da je Klemenov račun napačen, in od tod vsi, razen enega, sklepali, da je pravilen Tilnov odgovor. Le Miha Movrin iz Ljubljane je pravilno ugotovil, da je napačno tudi Tilново sklepanje. To je utemeljil z izračunom povprečne čakalne dobe na avtobus za primer, če prideta kdaj na postajo hkrati avtobusa obeh prog. V nadaljevanju bomo pokazali, da tudi ta odgovor ni popoln, vendar Miha za reševanje prav gotovo zasluži nagrado. Knjigo Keitha Devlina Nova zlata doba matematike smo mu že poslali po pošti.

Poglejmo sedaj popolno rešitev naloge:

Oba računa, tako Klemenov kot Tilnov, sta napačna (Klemenov nekoliko očitneje, saj je pri dveh progah dobil večjo povprečno čakalno dobo, kot če bi vozili le avtobusi prve proge).

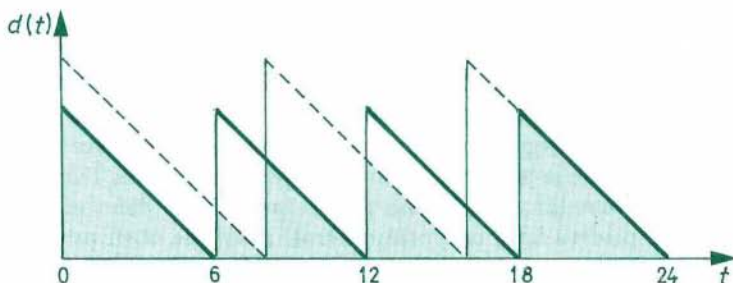
Pravzaprav skriva naloga v sebi majhno past. Iz danih podatkov namreč povprečne čakalne dobe na avtobus na opisani avtobusni postaji sploh ne moremo natančno izračunati. Na povprečno čakalno dobo vpliva

tudi urnik prihodov avtobusov, natančneje, zamiki prihodov avtobusov ene proge za prihodi avtobusov druge proge.

Ilustrirajmo to na nekoliko preprostejšem primeru. Vzemimo, da vozijo avtobusi obeh prog v enakih razmikih, denimo, na osem minut. Če sta vozna reda prog takšna, da prihajajo na postajo avtobusi prve in druge proge istočasno, je povprečna čakalna doba, kljub dvema progama, tolikšna, kot če bi bila progama ena sama; to je $\frac{1}{2} \cdot 8 \text{ minut} = 4 \text{ minute}$. Če pa prihajajo avtobusi druge proge 4 minute za avtobusi prve proge, je povprečna čakalna doba enaka $\frac{1}{2} \cdot 4 \text{ minute} = 2 \text{ minuti}$. Izkaže se, da lahko v tem primeru z ustreznim voznim redom dosežemo katerokoli povprečno čakalno dobo v intervalu od dveh do štirih minut.

Pa se povrnimo k dani nalogi. Zadošča obravnavati obdobje 24 minut, saj se očitno po tem času ves potek prometa ponovi, tudi medsebojni zamiki avtobusov obeh prog. To je delno uvidel že Tilen v svoji "rešitvi".

Za začetek izračunajmo povprečno čakalno dobo, če je vozni red tak, da prideta kdaj na postajo hkrati avtobusa prve in druge proge. Čas takega skupnega prihoda izberimo za začetni čas $t = 0$. Na sliki 1 je z debelejšo polno črto prikazana čakalna doba na avtobuse prve proge (6-minutni intervali), črtkano pa čakalna doba na avtobuse druge proge (8-minutni intervali). Čakalna doba $d(t)$ na avtobus nasploh je seveda ob vsakem času manjša od obeh vrednosti, torej jo predstavlja zgornji rob osenčenega področja na sliki.



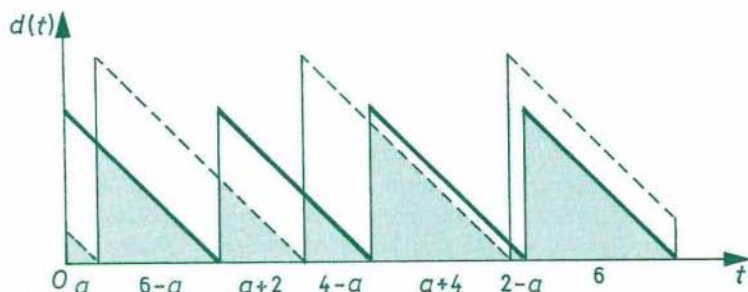
Slika 1.

Ker ta funkcija ni nikjer negativna, je njena povprečna vrednost $\bar{d}$ enaka višini pravokotnika, ki ima z osenčenim likom enako osnovnico in enako ploščino. Skupna ploščina osenčenih trikotnikov je:

$$\frac{1}{2}(6^2 + 2^2 + 4^2 + 4^2 + 2^2 + 6^2) = 56$$

in povprečna čakalna doba $56 : 24 = 2\frac{1}{3} \text{ minute}$.

Poglejmo sedaj splošnejši primer, ko pride avtobus druge proge na postajo a minut za tistim avtobusom prve proge, ki je pripeljal zadnji pred njim. Ustrezni graf prikazuje slika 2.



Slika 2.

Za $t = 0$ smo izbrali čas prihoda avtobusa prve proge. Seveda je $0 \leq a < 6$, z grafa pa razberemo, da se smemo omejiti na $0 \leq a < 2$, saj bi sestavljali pri začetnem zamiku $a + 2$ osenčeni lik na štiriindvajsetminutnem intervalu enaki trikotniki, kot pri zamiku a . Iz tega premisleka in iz ploščine osenčenega lika

$$\begin{aligned} \frac{1}{2}[a^2 + (6-a)^2 + (a+2)^2 + (4-a)^2 + (a+4)^2 + (2-a)^2 + 6^2] = \\ = 3a^2 - 6a + 56 \end{aligned}$$

sledi, da je povprečna čakalna doba $\overline{d(a)}$ za $0 \leq a < 2$ enaka $\frac{1}{24}(3a^2 - 6a + 56)$, za ostale vrednosti a pa jo izračunamo iz zveze $\overline{d(a+2)} = \overline{d(a)}$.

Vidimo še, da ima funkcija $\overline{d(a)}$ na intervalu $[0, 1)$ minimum pri $a = 1$. Torej dosežemo najmanjšo možno povprečno čakalno dobo s takim voznim redom, po katerem vozijo avtobusi druge proge z zamikom ene minute (in seveda treh in petih minut) za avtobusi prve proge. Ta je enaka $\frac{1}{24}(3 \cdot 1^2 - 6 \cdot 1 + 56) = 2\frac{5}{24}$ minute. Največjo povprečno čakalno dobo $2\frac{1}{3}$ minute (pri $a = 0$) smo že na začetku posebej izračunali. Med obema je razlike le za dobrih 5%.

Marija Vencelj

VETER IN ZVOK

V neki vasi so kmetje sodili o spremembi vremena po zvonjenju iz nekaj kilometrov oddaljene cerkve. Ponavadi zvonov niso slišali. Če pa so zvonovi razločno bili, je to napovedovalo spremembo vremena. Takrat je pihal veter od cerkve proti vasi in govorili so, da pač veter prinese tudi zvok.

Spremembo slišnosti zvoka iz oddaljenega izvira marsikdo razlaga takole: Hitrost zvoka je 340 m v sekundi, zato za pot, denimo treh kilometrov, potrebuje okrog deset sekund. V tem času se tudi zrak premakne za nekaj deset metrov, zato pride zvok do poslušalca nekoliko prej. Zvok tako prepotuje v zraku krajšo pot kot v brezvetrju. Zvok pa na krajši poti manj oslabi.

Izkušnje kažejo, da se v brezvetrju oddaljenega zvonjenja skoraj ne sliši, tudi če smo nekaj sto metrov bliže zvonovom. Ko pa piha veter v pravi smeri, je zvonjenje zelo razločno in glasno. Z zgornjo razlago torej ne moremo biti zadovoljni. Pokaže se, da je za opis pojava pomembno upoštevati lom zvoka.

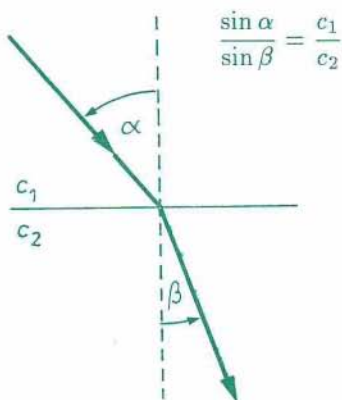
Spomnimo se, kako opišemo lom valovanja. Ravni val, ki potuje po sredstvu 1 in pade poševno na mejo s sredstvom 2, se tam lomi. Lomni zakon pravi, da je razmerje sinusov vpadnega in lomnega kota enako razmerju lomnih količnikov obeh sredstev:

$$\frac{\sin \alpha}{\sin \beta} = \frac{n_2}{n_1},$$

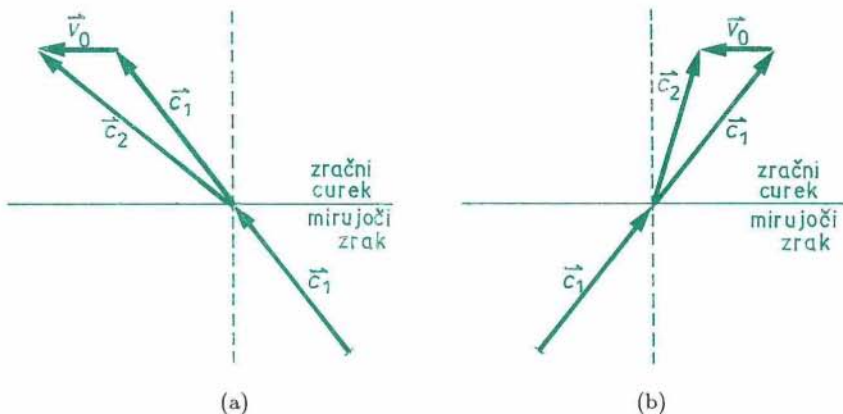
pri čemer kota α in β merimo glede na pravokotnico na mejo obeh sredstev. Razmerje lomnih količnikov snovi $\frac{n_2}{n_1}$ je enako razmerju $\frac{c_1}{c_2}$ med hitrostma valovanja v sredstvih 1 in 2. Če je hitrost valovanja v sredstvu 2 večja kot v sredstvu 1, se valovanje lomi stran od vpadne pravokotnice, v obratnem primeru pa k vpadni pravokotnici (glej sliko 1).

Opazujmo zvočni val, ki naleti na vodoravni curek zraka. Meja med mirujočim zrakom in zrakom v curku naj bo ostra. Hitrost zvoka v curku ni v vseh smereh enaka. Največja je v smeri curka, najmanjša pa v curku nasprotni smeri. Hitrosti valovanja v curku moramo prišteti še hitrost

curka. Na meji med mirnim in gibajočim se zrakom se bo val zato lomil. Slika 2a kaže lom vala, ki vpade vzdolž curka, slika 2b pa lom, ko val vpade proti curku. V prvem primeru se bo val lomil od vpadne pravokotnice, saj je hitrost valovanja v curku večja kot v mirnem zraku. V drugem primeru pa se bo lomil proti vpadni pravokotnici. Lomni kot določimo tako, da seštejemo vektorja hitrosti $\vec{c}_1$ in hitrosti zraka v curku $\vec{v}_0$, da dobimo hitrost $\vec{c}_2$. Nekaj valovanja se pri tem odbije nazaj v mirujoč zrak.



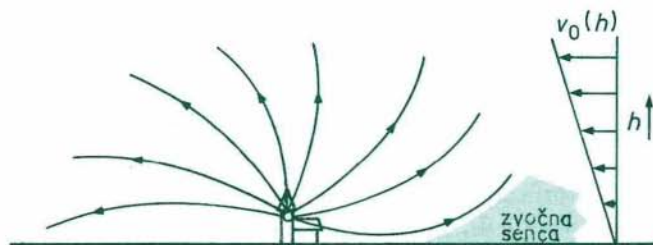
Slika 1. Ponazoritev lomnega zakona. Kot α je vpadni kot, β pa lomni. Oba kota merimo glede na pravokotnico na mejo obeh sredstev.



Slika 2. Lom ravnega vala, ki vpade na mejo med mirnim zrakom in zračnim curkom s hitrostjo $\vec{v}_0$. Val, ki se giblje vzdolž curka, se lomi stran od vpadne pravokotnice (a), val v nasprotni smeri pa k vpadni pravokotnici (b). Smeri valovanja dobimo z vektorsko vsoto valovne hitrosti v mirnem zraku in hitrostjo zraka v curku.

Ko piha veter, hitrost zraka z višino narašča. Blizu tal zrak skoraj miruje, na višini nekaj sto metrov pa je njegova hitrost največja. Zvočni valovi zato potujejo drugače kot v mirnem zraku. Ker se hitrost zraka z višino enakomerno spreminja, se valovanje neprestano lomi. Valovi, ki potujejo proti vetru, se lomijo navzgor, tisti v smeri vzdolž vetra

pa navzdol (glej sliko 3). V smeri proti vetru nastane zvočna senca, vzdolž vetra pa se valovanje zbira na tleh. V valovni senci se glasnost zvoka zmanjša tudi do 30 decibelov glede na brezvetrje. Ojačitev zvoka v smeri vetra pa je navadno manjša.

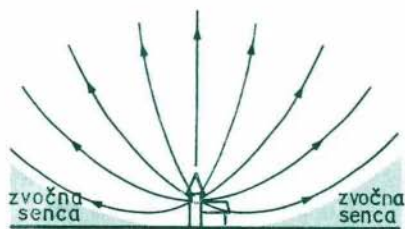


Slika 3. Žarki zvočnih valov iz oddajnika nad tlemi v vetru. Zvok se vzdolž vetra glede na brezvetrje ojači, v nasprotni smeri pa oslabi.

Tudi ko ni vetra, se zvok v zraku lomi. Hitrost zvoka je odvisna tudi od temperature zraka, ki se spreminja z višino. Navadno je zrak v višjih plasteh ozračja hladnejši kot na tleh. V zimskih mesecih pa je pogosta temperaturna inverzija: temperatura se z višino nekaj časa večja, nato pa začne spet padati. Hitrost zvoka je takole odvisna od temperature zraka:

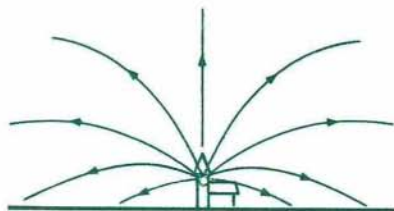
$$c(T) = c_0 \sqrt{\frac{T}{T_0}}.$$

S c_0 smo označili hitrost zvoka pri temperaturi T_0 . Temperaturi T in T_0 merimo od absolutne ničle. Pri $T_0 = 273\text{K}$ (0°C) je $c_0 = 331\text{ms}^{-1}$. Za vsako stopinjo zraste hitrost zvoka za približno $0,6\text{ms}^{-1}$, če smo blizu temperature T_0 . Običajno se temperatura ozračja zmanjša za eno stopinjo na 100 m. Takrat se valovanje od izvira na tleh lomi navzgor. Na oddaljenosti nekaj kilometrov okrog izvira nastane valovna senca (glej sliko 4).

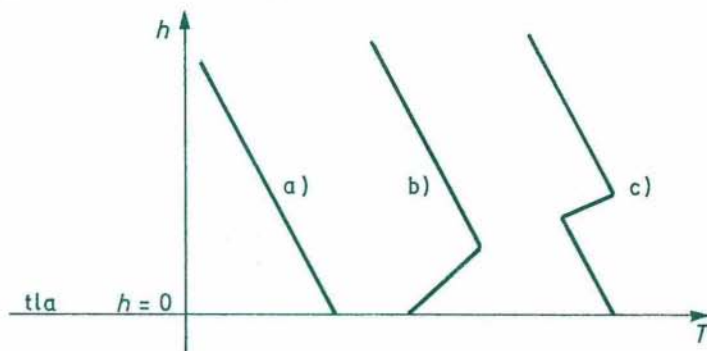


Slika 4. Lom zvočnih valov zaradi padanja temperature z višino. Tudi v tem primeru nastane nekaj kilometrov okrog izvira zvočna senca.

V mirnem in jasnem vremenu se temperatura z višino manjša, zato so noči v takem vremenu tihe. Pri inverziji pa se valovanje lomi navzdol in slišimo tudi bolj oddaljene zvočne izvire (slika 5). V posebnih okoliščinah nastane inverzija na večji višini: temperatura zraka se najprej znižuje, nato pa se v ozkem pasu spet povečuje (glej sliko 6). Nastane valovni vodnik, po katerem se širi zvok skoraj brez dušenja na zelo velike razdalje.



Slika 5. Potek zvočnih valov pri temperaturni inverziji, ko se temperatura z višino povečuje. Oddaljene zvočne izvire slišimo dosti dlje kot pri normalnih razmerah.



Slika 6. Krivulje temperature v odvisnosti od višine pri normalnem ozračju (a), pri temperaturni inverziji (b) in pri redkem pojavu višinske inverzije, ki tvori "zvočni valovod" (c).

Opisani pojavi so pogosto manj izraziti, ker je ozračje bolj ali manj vrtninčasto in nehomogeno.

Andrej Likar

NA KOLIKO NAČINOV SE POLICIST LAHKO ZMOTI? – Rešitev s str. 45

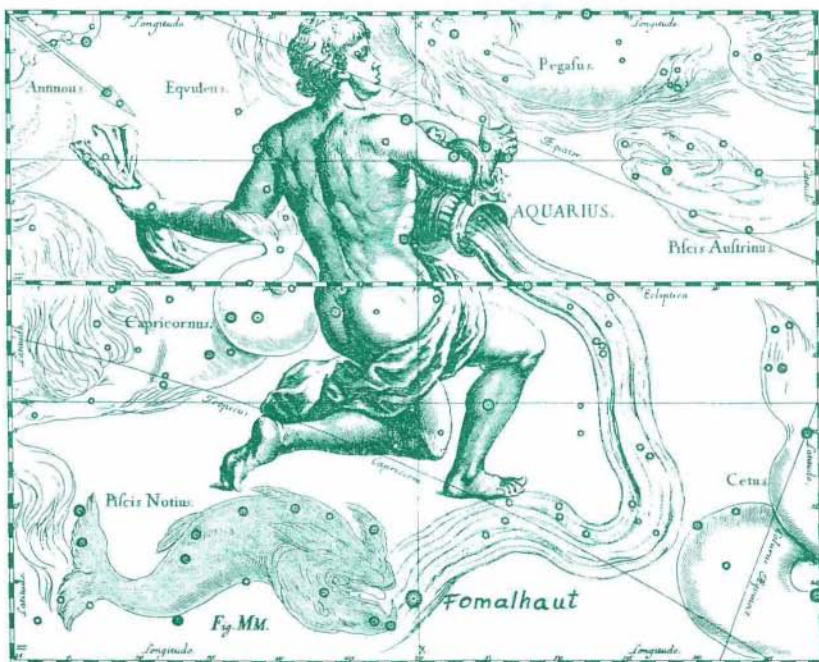
Dobimo tele pare:

15 : 3, 18 : 3, 24 : 3, 27 : 3, 16 : 4, 36 : 4, 15 : 5, 25 : 5, 35 : 5, 45 : 5, 48 : 6, 28 : 7, 49 : 7.

Anton Suhadolc

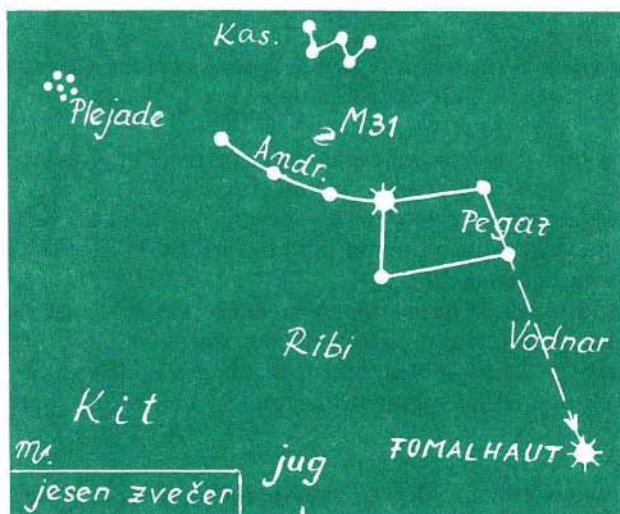
USTA

Daleč pod ozvezdjem Pegaz nizko ob obzorju je okrog zelo svetle zvezde zbranih kakih deset šibkih zvezd, ki oblikujejo neke vrste ozek oval. To podolgovato "zvezdno jajce" predstavlja telo dolge in suhe ribe. Tam leži manj znano ozvezdje *Južna riba*. Ime najsvetlejšje zvezde tega ozvezdja je *Fomalhaut*, kar v arabščini pomeni usta ribe. Če pogledamo sliko, svetla zvezda Fomalhaut res leži v ustih Južne ribe. Riba na široko odpira usta, da bi zajela čim več vode iz deročega vodnega toka, ki ga Vodnar nenehno zliva iz večno polnega vrča (slika 1).



Slika 1. Del jesenskega zvezdnega neba z Vodnarjem, ki iz svojega večno polnega vrča zliva vodo naravnost v Fomalhaut - usta Južne ribe. Ozvezdje Južna riba - Piscis Notius je pri nas vidno zvečer od septembra do decembra. Slika je iz zvezdnega atlasa *Uranografija* (1690) znamenitega poljskega astronoma Jana Heveliusa.

Ta, na nebo postavljena riba, naj bi ovekovečila tisto ribo, ki je po bajeslovni zgodbi rešila egipčansko boginjo plodnosti Izido pred utopitvijo.



Slika 2. Skica prikazuje, kako najpreprosteje najdemo zvezdo Fomalhaut. Čeprav se ta zvezda zgublja v nižinskem smogu, je v naših krajih lepo vidna in vredna občudovanja. Označena je še lega galaksije M 31.

V jesenskih večerih je zvezda Fomalhaut, ki sveti v rahlo rdečkasti barvi, le za kratek čas vidna nizko nad južnim obzorjem. Tam sveti kot oddaljen ogenjček sredi širne in puste pokrajine. Fomalhaut vzbuja pozornost ne samo zaradi svoje značilne barve in močnega sija, ampak tudi zato, ker je to edina tako svetla zvezda, ki je vidna na južni strani neba v jesenskih mesecih.

Predlagam, da se toplo oblečete in v jasni sami noči opazujete to prelepo zvezdo.

Marijan Prosén

KRIŽANKA “STAROGRŠKI MATEMATIKI” – Rešitev s str. 32

Vodoravno: apel, Diofant, Pirej, Arhimed, otava, Arhitas, lata, as, Šilka, ogor, dizajn, LR, nos, Bonisegna, Irtiš, ata OD, Jaen, Radomlje, Ndola, Tales, PH, ide, prsi, Tinje, trot, opiat, prsk, Paz, lak, splet, Sepe, Eton, las, Heron, Mima, Evklid, LO, Ejadema, ešalon, jahalec, Kanin.

NAPAKE V PRIKAZOVANJU ŠTEVK

Na 19. državnem tekmovanju iz računalništva za srednješolce je bila tekmovalcem zastavljena tudi naslednja naloga:

Na zaslonu je niz sedem-segmentnih (digitalnih) števk dolžine N . Predstavitev števk s segmenti je naslednja: 0 1 2 3 4 5 6 7 8 9. Za prižgane segmente vemo, da so pravilni, medtem ko za ugasnjene segmente ne vemo, ali so pravilni ali pokvarjeni. Poleg tega vemo, da je vsota števk deljiva z 10.

Opiši postopek, ki najde tak niz vrednosti števk, da ustrezajo omejitvam in imajo najmanj popravljenih segmentov.

Primer: 3 7 ima možni rešitvi 3-7 in 8-2. Rešitev je 3-7, ker ima samo en popravljen segment, medtem ko ima 8-2 pet popravljenih segmentov.

Enostavno rešitev problema ponujajo mehanizmi, ki se uporabljajo v logičnem programiranju z omejitvami (Constraint Logic Programming – CLP). CLP je področje umetne inteligence, ki je nastalo z zlitjem področij logičnega programiranja (jezik logičnega programiranja je prolog) in razreševanja omejitev. Kot primer razreševanja omejitev lahko vzamemo reševanje linearnih enačb. Če sistemu damo enačbo $Y = 2X + 3$, si to zapomni kot omejitev (vrednost spremenljivke Y je omejena z vrednostjo spremenljivke X in obratno). Če vnesemo še enačbo $Y = -X + 6$, se sproži razreševalec omejitev, ki poskuša čimbolj poenostaviti dane omejitve. V našem primeru sta rezultat poenostavitve kar vrednosti $Y = 5$ in $X = 1$.

Rešitev problema bo prikazana v jeziku pascal. Ker pascal ne vsebuje mehanizmov, ki omogočajo avtomatično razreševanje omejitev, bomo za nekatere podprograme predpostavili, da so že napisani. Prav tako bomo predpostavili obstoj nekaterih podprogramov in funkcij, ki se ukvarjajo z 'malenkostmi'.

Delovanje podprogramov, ki se ukvarjajo z dodajanjem in razreševanjem relacij (omejitev) med spremenljivkami, si lahko predstavljamo kot določanje njihove zaloge vrednosti. Vsako dodajanje relacije med spremenljivkami ustrezno uskladi (doda, odvzame, ohrani) možne vrednosti vseh spremenljivk, ki nastopajo v relacijah.

Primer: Naprej dodajmo relaciji $X < Y$ in $Y < Z$. Ob vnosu dodatne relacije $Z < 5$ se avtomatično zmanjša zaloga vrednosti za spremenljivko Y na števila manjša od 4 in za spremenljivko X na števila manjša od 3. Seveda pa so celoštevilске omejitve samo najenostavnejša vrsta omejitev, ki nastopajo v realnih problemih.

Dejanska rešitev je bila napisana v sistemu za logično programiranje z omejitvami ECLiPSe, iz katerega je vzet tudi potek reševanja našega primera.

Pri reševanju bomo potrebovali naslednje konstante, tipe in spremenljivke:

```
const
  MxSegment = 7;      {vsaka številka je sestavljena iz 7 segmentov}
  MxStevka = 9;      {možne številke so od 0 do 9}
type
  SegmentDef = 1..MxSegment;
  StevkaDef = 0..MxStevka;
  MnozicaStevkDef = set of StevkaDef;
  SegmentiDef = array [ SegmentDef ] of boolean;
  MnozicaCelihStevil = set of integer;
var
  MozneStevke : array [ 1..N ] of MnozicaStevkDef;
  VsotaMoznihStevk : MnozicaCelihStevil;
  Razlika : array [ 1..N, StevkaDef ] of 0..MxSegment;
  VsotaRazlik, MinimalnaRazlika : MnozicaCelihStevil;
  VrednostiStevk, Resitev : array [ 1..N ] of StevkaDef;
```

Podatke o števkih na zaslonu in njihovi predstavitvi dobimo z naslednjimi podprogrami:

```
function StevkeSegmenta ( Segment : SegmentDef ) : MnozicaStevkDef;
– funkcija StevkeSegmenta vrne množico števk, ki so možne, kadar je segment Segment prižgan. Tako so pri prižganem zgornjem segmentu možne številke 0, 2, 3, 5, 6, 7, 8, in 9.
```

```
function Segmenti ( i : integer ) : SegmentiDef;
– funkcija Segmenti vrne tabelo vrednosti (prižgan/ugasnjen) segmentov i-te številke na zaslonu.
```

```
function RazlicniSegmenti ( Segmenti : SegmentiDef;
  Stevka : StevkaDef ) : SegmentDef;
– funkcija RazlicniSegmenti vrne število različnih segmentov v Segmenti in Stevka.
```

Za razreševanje omejitev bomo uporabljali naslednje podprograme:

```
procedure Presek ( var MnozicaStevk1 : MnozicaStevkDef;
  MnozicaStevk2 : MnozicaStevkDef );
– podprogram Presek naredi relacijo (omejitev) presek množic med MnozicaStevk1 in MnozicaStevk2.
```

```
procedure Pristej ( var Vsota : MnozicaCelihStevil;
  Stevilo : MnozicaStevkDef );
```

- podprogram *Pristej* naredi relacijo (omejitev) *vsota* med *Vsota* in *Stevilo*.

```
procedure Mod ( var Deljenec : MnozicaCelihStevil;
  Delitelj, Ostanek : integer );
```

- podprogram *Mod* naredi relacijo (omejitev) *ostanek* pri deljenju med *Deljenec*, *Delitelj* in *Ostanek*.

```
procedure Manjsi ( var i, j : MnozicaCelihStevil );
```

- podprogram *Manjsi* naredi relacijo (omejitev) *manjši* med *i* in *j*.

Da rešitev ne bo predolga, bomo uporabili še naslednji podprogram:

```
function IzberiVrednost ( var MnozicaStevk : MnozicaStevkDef ) :
  StevkaDef;
```

- podprogram *IzberiVrednost* vrne eno izmed vrednosti v *MnozicaStevk* ter jo iz nje izloči.

Problem rešujemo v dveh fazah. Najprej opišemo omejitve problema, nato pa priredimo vrednosti posameznim spremenljivkam.

```
procedure StaticneOmejitve;
begin
```

```
  for i := 1 to N do begin
    MozneStevke [ i ] := [ StevkaDef ];
    for j := 1 to MxSegment do begin
      Presek ( MozneStevke [ i ], StevkeSegmenta ( j ));
    end;
  end;
```

```
  VsotaMoznihStevk := [ 0 ];
  for i := 1 to N do begin
    Pristej ( VsotaMoznihStevk, MozneStevke [ i ] );
  end;
  Mod ( VsotaMoznihStevk, 10, 0 );
```

```
  for i := 1 to N do begin
    for j := 0 to MxStevka do begin
      Razlika [ i, j ] := RazlicniSegmenti ( Segmenti ( i ), j );
    end;
  end;
  VsotaRazlik := [ 0 ];
  for i := 1 to N do begin
    Pristej ( VsotaRazlik, Razlika [ i, VrednostiStevk [ i ]]);
  end;
end;
```

Problem vsebuje tri vrste omejitev.

Vsak prižgan segment določa možne številke. Če naredimo presek možnih števk za vse segmente, dobimo kandidate za posamezno številko zaslona. Za primer iz besedila naloge dobimo možne vrednosti števk [3, 8, 9] in [0, 2, 3, 7..9].

Naslednja omejitev je vsota števk, ki mora biti deljiva z 10. Naj opozorimo, da s podprogramoma *Pristej* in *Mod* le določimo relacijo med spremenljivkami. V našem primeru je *VsotaMoznihStevk* lahko le med [3..18] in mora biti deljiva z 10. Od tod razreševalec omejitev lahko sklepa, da je *VsotaMoznihStevk* enaka 10, in možne vrednosti števk skrči na [3, 8] in [2, 3, 7]. Kot vidimo, uporabljeni sistem za razreševanje omejitev ne zna vedno sklepati do konca (ne izloči 3 za drugo številko). Vendar pa je bistveno, da ne izloči kakšne vrednosti preveč.

Zadnja vrsta omejitev je povezana s pogojem, da je rešitev tisti niz števk, ki vsebuje najmanj popravljenih segmentov. Za vsako možno vrednost številke na izbranem mestu zaslona preštejemo število segmentov, ki jih je potrebno ugasniti, da dobimo vzorec na zaslonu. Omejitev je vsota popravkov na vseh mestih zaslona. To vsoto kasneje minimiziramo. Zopet samo vzpostavimo relacije (omejitve). Vsota razlik še ni znana, saj temelji na *VrednostiStevk*, ki jih še nismo določili. Vendar pa razreševalec omejitev lahko naredi nekatere sklepe. Razlika na prvi številki je lahko [0..2] (tokrat ne izloči 1), na drugi pa [1, 3..5] (ne izloči 4 in 5), kar pomeni, da je *VsotaRazlik* med [1..7].

```
procedure PrirediVrednosti ( i : integer );
begin
  if i = N then begin
    Resitev := VrednostiStevk;
    MinimalnaRazlika := VsotaRazlik;
  end else begin
    while MozneStevke [ i ] <> [] do begin
      VrednostiStevk [ i ] := IzberiVrednost ( MozneStevke [ i ] );
      Manjsi ( VsotaRazlik, MinimalnaRazlika );
      PrirediVrednosti ( i + 1 );
    end;
  end;
end;
```

Sedaj lahko preidemo v drugo fazo, kjer prirejamo možne vrednosti posameznim številkam. Postopek je tak, da vsaki številki prirejamo samo vrednosti, ki ustrezajo omejitvam. Po vsaki prireditvi dodamo omejitev, ki preveri, če je *VsotaRazlik* manjša kot *MinimalnaRazlika*. Naj še enkrat opozorimo, da so samo nekateri členi vsote znani in da je *VsotaRazlik* pravzaprav spodnja meja. Z vsako prireditvijo vrednosti posamezni številki

se sproži razreševalec omejitev, ki zmanjšuje množice možnih vrednosti še nedoločenim števkam. V našem primeru se prvi števk priredi vrednost 3. To sproži razreševalec omejitev, ki sedaj natančno ugotovi, da je možna vrednost za drugo števko 7 in da je *VsotaRazlik* enaka 1. To postane trenutno najboljša rešitev (*MinimalnaRazlika*). Ker dodamo omejitev, da mora biti *VsotaRazlik* manjša od *MinimalnaRazlika*, in od prej velja, da je *VsotaRazlik* [1..7], razreševalec omejitev javi, da ni boljše rešitve. Rešitev torej dobimo z enim prirejanjem vsaki števk, kar je bistveno bolje od 10^N , $N = 2$) prirejanj, ki bi jih bi potrebovali pri najenostavnejši rešitvi problema.

V praksi je veliko problemov, ki so podobni naši nalogi: zgradba šolskega urnika, načrtovanje zaporedja operacij, razni razrezi materialov, ... Za vse take probleme je značilno, da so rešitve znotraj nekih omejitev. Poleg tega imamo še kriterijsko funkcijo, na podlagi katere izločimo najboljšo rešitev. Npr. na čim manjšem kosu materiala (kriterijska funkcija) moramo izrezati razne elemente (določene z omejitvami).

Principi in mehanizmi, ki smo jih uporabljali pri reševanju zastavljene naloge, nam v teoretičnem smislu sicer ne odpravijo problema, vendar pa se v praksi (npr. naš primer) izkaže, da lahko z njimi večkrat rešimo probleme bistveno hitreje kot s klasičnimi prijemi.

Darko Zupanič

DELJIVOST – Rešitev s str. 4

Velja

$$\underbrace{10\ 10\ 10\ \dots\ 10}_{26\text{-krat}}\ 1 =$$

$$= 10101 \cdot (10^{48} + 10^{42} + 10^{36} + 10^{30} + 10^{24} + 10^{18} + 10^{12} + 10^6 + 1).$$

Prvi faktor v drugi vrsti je deljiv s tri (vsota števk je tri), medtem ko ima drugi faktor v desetiškem zapisu devet enic, ostale številke pa so ničle, torej je deljiv z devet (vsota števk je devet). Produkt je tedaj res deljiv s 27.

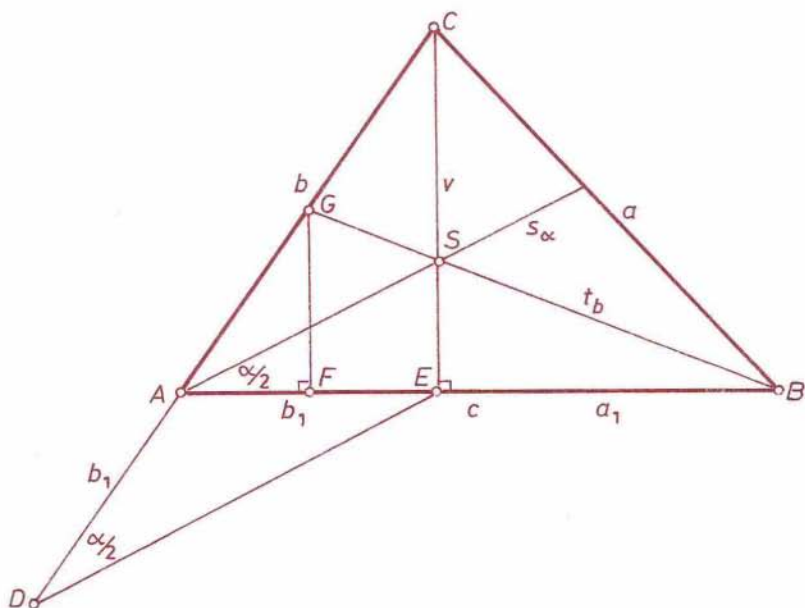
Podobno rešimo drugi del naloge, s tem da iz danega števila izpostavimo število $\underbrace{10\ 10\ 10\ \dots\ 10}_{8\text{-krat}}\ 1$.

Marija Vencelj

TRIKOTNIKI S POSEBNO LASTNOSTJO –
Rešitev s str. 19

Kotna simetrala iz oglišča A in težiščnica iz B se sečeta v notranjosti trikotnika. Če gre skozi to presečišče tudi višina iz C na stranico $\overline{AB}$, morata biti notranja kota trikotnika pri A in B ostra.

Zaznamujmo kakor običajno stranice trikotnika a, b, c kote α, β, γ , višino na stranico c pa z . Podnožišče višine naj bo točka E . Pišimo $AE = b_1, EB = a_1$ (slika 1). Naj bo S točka, kjer seče kotna simetrala višino. To je v našem primeru hkrati točka, kjer seče težiščnica BG višino.



Slika 1.

Določimo na premici AC točko D tako, da je $\overline{AD} = \overline{AE} = b_1$ in leži A med C in D . Ker je trikotnik DEA enakokrak z osnovnico DE , je kot pri D enak $\frac{1}{2}\alpha$. Zato je premica DE vzporedna kotni simetrali AS in velja razmerje

$$\overline{ES} : \overline{EC} = b_1 : (b + b_1).$$

Od tod dobimo

$$\overline{ES} = \frac{b_1 v}{b + b_1}. \quad (1)$$

Ker je premica BG težiščnica, je G središče daljice $\overline{AC}$ in je zato $\overline{FG} = \frac{1}{2}\overline{EC} = \frac{1}{2}v$ in nadalje $\overline{AF} = \overline{EF} = \frac{1}{2}b_1$ (premica GF je pravokotna na osnovnico $\overline{AB}$). Iz podobnih trikotnikov EBS in FBG dobimo

$$\overline{ES} : \overline{FG} = a_1 : (a_1 + \frac{1}{2}b_1).$$

Od tod

$$\overline{ES} = \frac{a_1 v}{2a_1 + b_1} = \frac{a_1 v}{a_1 + c}. \quad (2)$$

Enačbi (1) in (2) dasta enakost

$$\frac{b_1}{b + b_1} = \frac{a_1}{a_1 + c}.$$

Iz nje izhaja $b_1 c = a_1 b$, se pravi

$$b_1 : a_1 = b : c = \overline{AC} : \overline{AB}. \quad (3)$$

Torej je v nalogi navedeni pogoj potreben.

Denimo zdaj, da v trikotniku ABC velja enakost (3). Iz dokazovanja je razvidno tole: Če pomeni S točko, kjer kotna simetrala iz oglišča A seče višino, dobimo daljico $\overline{ES}$ po formuli (1). Če pa S' pomeni točko, kjer seče višino težiščnica BG , dobimo $\overline{ES'}$ po formuli (2), se pravi

$$\overline{ES'} = \frac{a_1 v}{a_1 + c}.$$

Pomnožimo števec in imenoalec na desni z b in upoštevajmo zvezo $a_1 b = b_1 c$, ki sledi iz (3). Dobimo

$$\overline{ES'} = \frac{b_1 v}{b + b_1} = \overline{ES}.$$

To pomeni, da je $S' = S$: kotna simetrala, težiščnica in višina se sečejo v isti točki S . Zato je pogoj (3) tudi zadosten.

Pripombe

1. Vsak trikotnik z navedeno lastnostjo dobimo takole: Narišimo pravokoten trikotnik ABD (pravi kot je pri B) s kateto $\overline{AB} = c$ in hipotenuzo $\overline{AD} = b + c$ (slika 2). Na hipotenuzi določimo točko C tako, da je $\overline{CD} = \overline{AB} = c$. Naj bo $\overline{EC}$ višina na osnovnico $\overline{AB}$ v trikotniku ABC . Ker sta EC in BD vzporedni, velja razmerje

$$a_1 : b_1 = \overline{CD} : \overline{AC} = \overline{AB} : \overline{AC}.$$

Torej je izpolnjen pogoj (3) in trikotnik ABC ima zahtevano lastnost.

Vidimo, da je tak trikotnik natanko določen, če sta dani stranici b in c .

2. Obstaja nešteto trikotnikov z navedeno lastnostjo, pri katerih so stranice cela števila. Zgleda

$$a = 13, \quad b = 12, \quad c = 15$$

in

$$a = 277, \quad b = 35, \quad c = 308.$$

3. Nalogo lahko rešimo tudi z uporabo Cevovega izreka. O njem je Presek pisal v 1. številki 20. letnika.

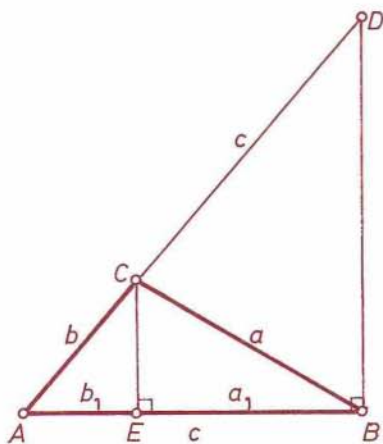
Ivan Vidav

POCENITEV, PODRAŽITEV

Ali se lahko zgodi, da dobimo na koncu ceno enako začetni, če blago najprej dvakrat zapored podražimo za enak odstotek, nato pa ga za prav tak odstotek pocenimo?

Kaj pa, če blago najprej dvakrat pocenimo in ga nato enkrat podražimo, vsakokrat spet za enak odstotek?

Vinko Horvat



Slika 2.

PREGRADIMO TRIKOTNIK, 1. del

Dani trikotnik želimo pregraditi s čimkrajšo krivuljo na dva dela s predpisanimi ploščinama. Kako naj to storimo? V prvem delu članka si bomo olajšali nalogo, tako da se bomo omejili na najpreprostejše pregrade – daljice; v drugem delu, ki bo na vrsti v naslednji številki Preseka, pa bomo to olajšavo opustili in se lotili splošnega problema.

Vsaj en lik, ki nastane pri pregraditvi trikotnika T z daljico, je trikotnik z danim kotom (enim od notranjih kotov trikotnika T), zato se najprej lotimo naslednje naloge:

Naloga. Dan je konveksen kot z vrhom A . Med vsemi trikotniki AXY s predpisano ploščino p in ogliščema X ter Y na različnih krakih kota poišči tistega, ki ima najkrajšo stranico XY .

Naloga je smiselna, kadar kot ni niti izrojen niti iztegnjen, torej takrat, kadar velja $0 < \alpha = \angle XAY < \pi (= 180^\circ)$. Zaznamujmo

$$x = |AX|, \quad y = |AY|, \quad z = |XY|$$

in zapišimo kosinusni izrek za stranico XY trikotnika AXY :

$$z^2 = x^2 + y^2 - 2xy \cos \alpha.$$

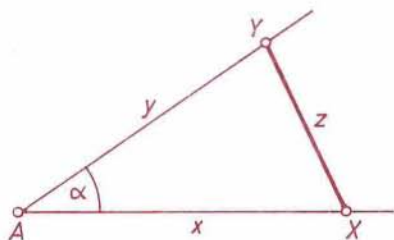
Če preoblikujemo izraz na desni strani enačaja in upoštevamo formulo

$$p = \frac{1}{2}xy \sin \alpha$$

za ploščino trikotnika AXY , dobimo po kratkem računu

$$\begin{aligned} z^2 &= (x - y)^2 + 2xy(1 - \cos \alpha) = \\ &= (x - y)^2 + 4p \frac{1 - \cos \alpha}{\sin \alpha} = \\ &= (x - y)^2 + 4p \operatorname{tg} \frac{\alpha}{2}. \end{aligned}$$

Od tod brž sledi, da doseže z najmanjšo vrednost, kadar je $x = y$, in da je tedaj $z = 2\sqrt{p \operatorname{tg} \frac{\alpha}{2}}$. Iz formule za ploščino p dobimo tudi vrednost $x = y = \sqrt{2p / \sin \alpha}$. Nalogo smo rešili in s tem dokazali naslednjo



Trditev. Med vsemi trikotniki AXY s predpisano ploščino p in ogliščema X in Y na krakih danega neizrojenega kota z vrhom A in velikostjo $\alpha < \pi$ ima najkrajšo stranico XY enakokraki trikotnik s podatki

$$|AX| = |AY| = \sqrt{\frac{2p}{\sin \alpha}}, \quad |XY| = 2\sqrt{p \operatorname{tg} \frac{\alpha}{2}}.$$

Posledica. Med vsemi trikotniki AXY z ogliščema X in Y na krakih danega neizrojenega neiztegnjenega konveksnega kota z vrhom A in s predpisano dolžino stranice XY ima največjo ploščino enakokraki trikotnik z osnovnico XY .

Dokaz. S podobnostno preslikavo P_{XY} , ki ima središče A in koeficient raztega $\sqrt{1/p(AXY)}$, kjer je $p(AXY)$ ploščina trikotnika AXY , preslikajmo trikotnik AXY na trikotnik $AX'Y'$. Brez težav vidimo, da ima trikotnik $AX'Y'$ ploščino 1. Med trikotniki $AX'Y'$, ki ustrezajo trikotnikom AXY iz posledice, ima po trditvi najkrajšo stranico $X'Y'$ enakokraki trikotnik z osnovnico $X'Y'$. Če upoštevamo še koeficiente raztega podobnostnih preslikav P_{XY} , vidimo, da ima med trikotniki AXY največjo ploščino enakokraki trikotnik AXY z osnovnico XY .

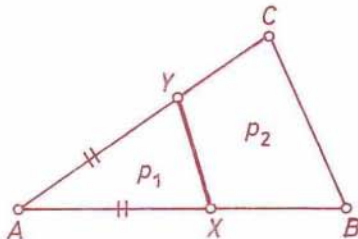
Bralca vabimo, da poskusi dokazati gornjo posledico brez uporabe prejšnje trditve.

Vrnimo se zdaj k nalogi in zaznamujmo s p_1 in p_2 ploščini likov, na katera naj razpade trikotnik ABC s podatki $a = |BC|$, $b = |AC|$, $c = |AB|$, če ga pregradimo z daljico. Vsota $p_1 + p_2$ se seveda ujema s ploščino $p(ABC)$ trikotnika ABC . Predpostavimo, da je $a \leq b$, $a \leq c$ in $p_1 \leq p_2$. Potem kot $\alpha = \angle BAC$ ne presega drugih dveh notranjih kotov trikotnika ABC . Pri obravnavanih pregraditvah trikotnika ABC z daljico vedno dobimo trikotnik s ploščino p_1 ali p_2 , odrezan od notranjega kota trikotnika ABC , zato po trditvi dolžina pregradne daljice meri vsaj $2\sqrt{p_1 \operatorname{tg} \frac{\alpha}{2}}$. Vendar še ne vemo, če je taka pregrada trikotnika sploh možna. Ugotoviti bi namreč morali, da točki X in Y s poltrakov kota BAC , ki določata enakokraki trikotnik AXY iz trditve, ležita na stranicah AB in AC . To bomo tudi storili, tako da bomo dokazali neenakosti

$$b = |AC| > \sqrt{\frac{2p_1}{\sin \alpha}}$$

in

$$c = |AB| > \sqrt{\frac{2p_1}{\sin \alpha}}.$$



Zaradi $p_1 \leq p_2$ velja

$$2p_1 \leq p_1 + p_2 = p(ABC) = \frac{1}{2}bc \sin \alpha$$

in tedaj $\sqrt{bc/2} \geq \sqrt{2p_1/\sin \alpha}$. Če upoštevamo, da poleg tega iz

$$c < a + b \leq 2b \quad \text{in} \quad b < a + c \leq 2c$$

sledi $b > \sqrt{bc/2}$ in $c > \sqrt{bc/2}$, takoj dobimo iskani neenakosti. Dokazali smo

Izrek. Naj bo ABC dani trikotnik in BC njegova najkrajša stranica. Potem je med vsemi daljicami, ki razdelijo trikotnik ABC na dela s ploščinama p_1 in p_2 ($p_1 \leq p_2$), najkrajša osnovnica XY enakokrakega trikotnika z vrhom A ter ogliščema X in Y na stranicah AB in AC . Daljica XY meri $2\sqrt{p_1 \operatorname{tg} \frac{\alpha}{2}}$, kjer je $\alpha = \angle BAC$.

Sklenimo prispevek z nalogami.

1. Iz dane točke X na stranici AB trikotnika ABC nariši daljico XY , ki razpolavlja ploščino trikotnika.
2. Dan je trikotnik ABC s podatki $a = |BC|$, $b = |AC|$ in $c = |AB|$. Izrazi z a , b in c dolžino najkrajše daljice, ki razpolavlja ploščino trikotnika ABC , in to daljico tudi nariši.
3. Poišči najdaljšo daljico, ki razpolavlja ploščino danega trikotnika.

Boris Lavrič

FUNKCIJSKA ENAČBA

Naj bo a pozitivno realno število ter m in n tuji si naravni števili. Naj za funkcijo $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ velja

$$f(x + ma) + f(x) = f(x + na) + f(x) = 0$$

za vsak $x \in \mathbb{R}$.

- (a) Pokaži, da je $f = 0$, če števili m in n nista obe lihi!
- (b) Denimo, da sta m in n različni lihi števili. Poišči kakšno neničelno funkcijo f , ki zadošča zgornjemu pogoju!

Roman Drnovšek

NAJDALJŠA ČETA

Včasih, ko so bili računalniki še ogromni, njihove zmogljivosti pa ne tako velike, je bilo urejanje velikih količin podatkov posel za "prave" programerje. Podatki so bili običajno shranjeni na magnetnih trakovih, tako da je bilo za urejanje potrebno uporabljati postopke, ki so do podatkov pristopali zaporedno. Tudi število branj posameznega podatka je moralo biti čim manjše, saj je bilo previjanje trakov zamudno opravilo. Skoraj vsi ti postopki so temeljili na porazdeljevanju in zlivanju čet v različnih vrstnih redih.

In sedaj k nalogi. Spomnimo se najprej, kaj je to četa. Četa (v našem kontekstu je to posrečen prevod angleške besede *run*) v zaporedju števil je maksimalno strnjeno nepadajoče podzaporedje. Oglejmo si primer. Vzemimo zaporedje

5, 1, 2, 3, 5, 5, 4, 6.

Podzaporedje 1, 2, 3 je strnjeno in nepadajoče, vendar ne tvori čete, saj ni maksimalno, ker ga lahko podaljšamo s številom 5. Podzaporedje 1, 3, 6 prav tako ni četa, saj ni strnjeno. Vsako zaporedje števil razpade na nekaj čet. Gornje je sestavljeno iz treh: začetna je sestavljena le iz prvega števila 5, druga ima pet elementov: 1, 2, 3, 5, 5, zadnjo pa sestavljata števili 4 in 6. Povejmo še besedilo naloge: sestavi funkcijski podprogram, ki za dano zaporedje števil, to je podano s tabelo, ugotovi dolžino najdaljše čete.

Martin Juvan

NA OBISKU PRI BARBARI – Rešitev s str. 4

Število pretvorimo najprej v številski sistem z osnovo r , potem pa v številski sistem z osnovo q .

Primer: $p = 16 = 2^4$, $q = 8 = 2^3$, zapišimo $A13B_{[16]}$ v osmiškem številskem sistemu! (V šestnajstiškem zapisu nam zmanjka desetiških števk, zato se dogovorimo, da je $A = 10_{[10]} = 1010_{[2]}$, $B = 11_{[10]} = 1011_{[2]}$, $C = 12_{[10]} = 1100_{[2]}$, $D = 13_{[10]} = 1101_{[2]}$, $E = 14_{[10]} = 1110_{[2]}$, $F = 15_{[10]} = 1111_{[2]}$.)

$$\begin{aligned} A13B_{[16]} &= \underbrace{1010000100111011}_{[2]} = \\ &= \underbrace{1\ 010\ 000\ 100\ 111\ 011}_{[2]} = 120473_{[8]} \end{aligned}$$

Janez Žerovnik

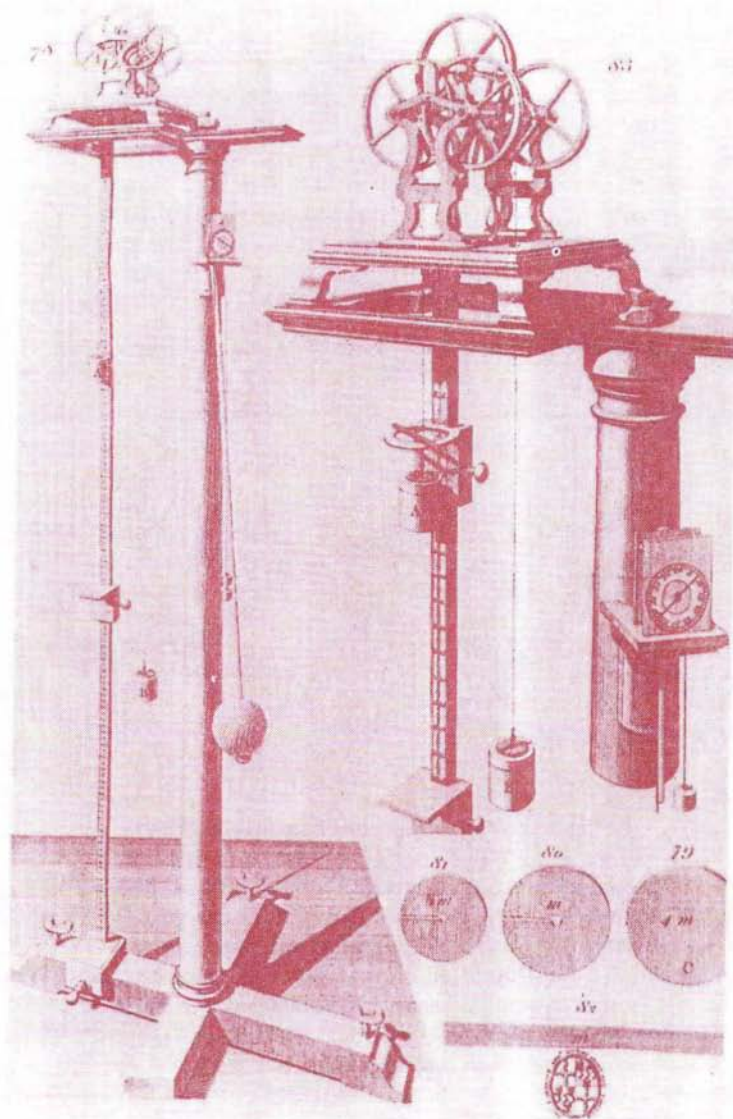
ATWOODOV ŠKRIPEC

Newtonov zakon preskusimo v šoli tako, da z njim izračunamo pospešek, s katerim se giblje telo z znano maso, ko delujejo nanj druga telesa z znano vsoto sil, in ga primerjamo z izmerjenim. To lahko naredimo dovolj natančno le, če izdatno zmanjšamo trenje in upor. Teh sil namreč navadno vnaprej ne moremo dovolj natančno določiti.¹ Pri poskusih se je najbolje omejiti na vsoto sil, ki se ne spreminja s časom. Najpreprostejši primer je prosto padanje. Vendar telo hitro doseže tolikšne hitrosti, da začne motiti zračni upor. Temu se izognemo s kotaljenjem krogle ali valja po rahlo nagnjenem klancu. Po Galilejevem zgledu se prepričamo, da je gibanje enakomerno pospešeno, če ugotovimo, da je pot sorazmerna s kvadratom časa. Vendar je pri tem pospešek težišča odvisen od oblike telesa. Pri prostem padanju in pri gibanju po klancu pospešuje telo sila, ki je sorazmerna z maso, tako da lahko pri danem telesu vplivamo na pospešek samo, če spremenimo nagib klanca. Ne moremo na primer izmeriti pospeška telesa z dano maso, na katero deluje manjša in nato večja sila, ali pospeška telesa najprej z manjšo in nato z večjo maso, na katero deluje dana sila.

Tako nekako je razglabljal tudi George Atwood (1746 do 1807) v knjigi z naslovom *Razprava o premem gibanju in vrtenju teles z opisom originalnih poskusov v tej zvezi*, ki je izšla v Cambridgeu leta 1784. Atwood je študiral je na univerzi v Cambridgeu in je po končanem študiju na njej delal kot višji predavatelj do izida knjige. Thomas Young je ob Atwoodovi smrti, ne glede na to, da z njim ni bil v najboljših odnosih in je imel tudi pridržke glede njegovega raziskovalnega dela, zapisal, da je Atwood "prispeval k razvoju znanosti s tem, da je pomnožil načine za ilustracijo, ki jih eksperimentalna opravila zahtevajo od učitelja."

Atwoodova zamisel je bila preprosta. Na eno krajišče vrvice je pritr dil večjo, na drugo pa manjšo utež in vrstico obesil na škripec (slika 1). Posebej je poskrbel, da je bilo trenje v ležajih škripca čim manjše. Pred desetletji so na številnih srednjih šolah še imeli *Atwoodov škripec* ali *Atwoodovo padalo* in so ga ponekod tudi še uporabljali za demonstracijske poskuse.

¹ I. Newton je svoj zakon preskusil predvsem z gibanjem planetov, ki ga ne spremljata trenje in upor. Zadostovalo je, da je s svojim zakonom gibanja in gravitacijskim zakonom v približku prišel do Keplerjevih zakonov.



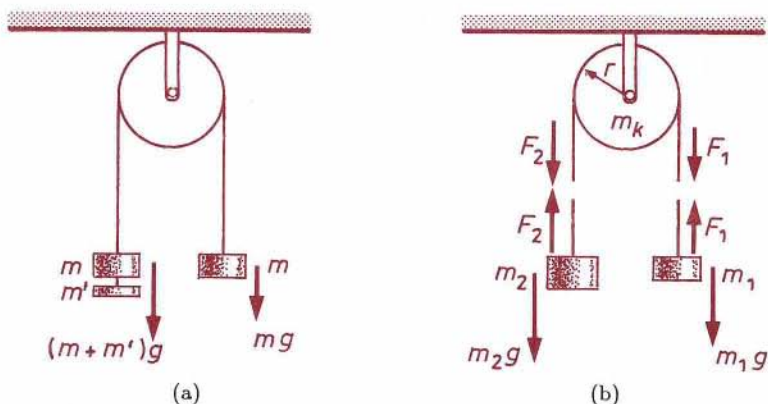
Slika 1. Atwoodov škripec po sliki iz njegove knjige. Štiri vrtljiva kolesa na vrhu so zmanjšala trenja škripca. Atwood je uporabil uteži s skupno maso 0,5 kg in več, škripec je imel efektivno maso 77 g. Čas je meril z metronomom, ki je bil pritrjen na napravo. Kot je bilo v tistih časih navada, si ni belil glave z natančnostjo pri merjenju.

Na hitro sestavimo podobno napravo z majhnim škripcem s koničastim ležajem in naredimo nekaj poskusov. Na krajišči vrvice obesimo enaki uteži z maso m in eni dodamo majhno utež z maso m' . S stoparico po petkrat izmerimo čas, v katerem se premakneta uteži za $h = 1$ m. Pri $m' = 5$ g in $m = 10$ g dobimo čas $(1,10 \pm 0,05)$ s, pri $m = 50$ g čas $(2,16 \pm 0,07)$ in pri $m = 100$ g čas $(2,84 \pm 0,08)$ s.

Pospremimo merjenje s kratkim računom. Po Newtonovem zakonu razlika tež $m'g$ poganja telo s skupno maso $2m + m'$ (slika 2a). Dolžina vrvice se ne spremeni in obe uteži se gibljeta z enakim pospeškom a :

$$a(2m + m') = gm'.$$

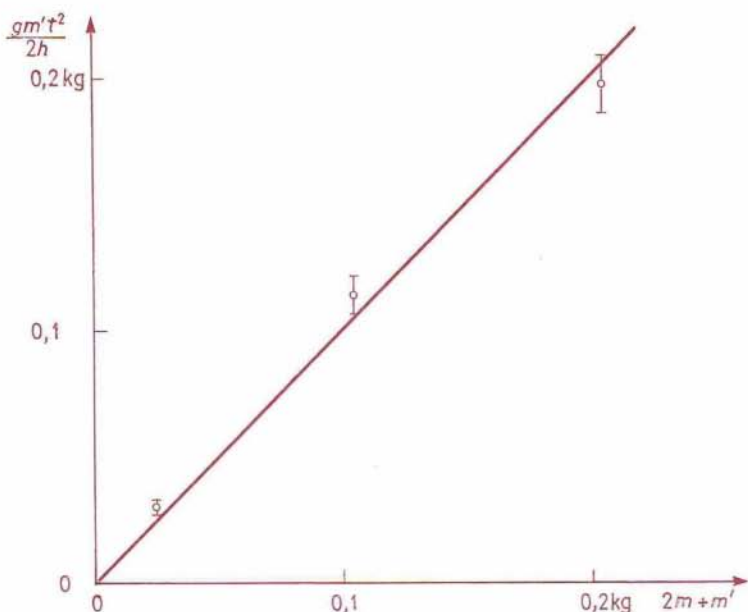
Pospešek določa višino $h = \frac{1}{2}at^2$, ki jo prepotujeta uteži v času t .



Slika 2. Uteži na škripcu (a) in napetost vrvice (b).

V diagramu nanesemo na vodoravno os skupno maso $2m + m'$, na navpično os pa količino $m'gt^2/2h$ z izmerjenim časom t (slika 3). Merske točke so presenetljivo malo odmaknjene od premice, ki ustreza Newtonovemu zakonu. Zavedamo se namreč, da časa s stoparico ne izmerimo natančno. Naključni napaki se pridruži sistematična napaka zaradi zakasnjene odziva roke na vidni dražljaj.² Najbrž pa stoparico ustavimo s približno enako zakasnitvijo, kot jo poženemo. Trenje v koničastem ležaju je tako majhno, da ne moti. Vendar velja to le, dokler radialne obremenitve niso velike, dokler torej uporabljamo uteži z dovolj majhno maso. Z opisanim merjenjem tako dokaj natančno podpremo Newtonov zakon.

² To napako bi zmanjšali od okoli 0,1 s pod 0,04 s, če bi poskus posneli s televizijsko kamero in pri počasnem predvajanju zasledovali lego uteži na zaporednih slikah.



Slika 3. Graf kaže odvisnost izmerjene količine $m't^2/2h$ od skupne mase $2m + m'$. Nakazane so učinkovite napake pri merjenju. Sistematična napaka, ki bi utegnila biti precej večja, ni upoštevana. Efektivna masa škripca meri samo 1,4 g, tako da je pri naši natančnosti ni treba upoštevati. V skupni masi na vodoravni osi bi lahko razen pri prvem merjenju zanemarili celo m' v primeri z $2m$, tako da bi se enačba glasila $2ma = gm'$. Z obratno vrednostjo strmine premice skozi tri merske točke bi lahko določili težni pospešek, če bi na navpično os nanegli količino $m't^2/2h$, kot je to storil Atwood. Dobili bi dokaj nenatančen rezultat $(9,1 \pm 0,9) \text{ m/s}^2$.

Kako vpliva na gibanje škripec? Na prvi strani je vrstica napeta s silo F_1 in na drugi s silo F_2 . Za škripec uporabimo izrek o vrtenju: vsota navorov, ki delujejo na škripec, je enaka produktu vztrajnostnega momenta kolesa $km_k r^2$ in kotnega pospeška a/r :

$$rF_2 - rF_1 = km_k r^2 a/r = km_k r a.$$

Pri tem je r radij škripca in m_k njegova masa, koeficient k pa je enak 1 pri obroču in $\frac{1}{2}$ pri polnem valju. Naš škripec je iz polivinila in ima maso samo 2,54 g in radij 2,20 cm. Newtonov zakon uporabimo za eno in za drugo stran $m_1 a = F_1 - m_1 g$ in $m_2 a = m_2 g - F_2$ (slika 2b). Tako

nazadnje dobimo enačbo

$$a(2m + m' + km_k) = gm', \quad m_1 = m, \quad m_2 = m + m',$$

ki se samo po efektivni masi škripca km_k na levi strani razlikuje od prejšnje enačbe.

Na škripec navijemo vrv in na njeno krajišče obesimo utež m' . Ugotovimo, da pade utež za $h = 0,5$ m (več vrvice ne moremo naviti na škripec) v $(0,36 \pm 0,05)$ s. Upoštevamo, da je $m_2 = m'$ in $m_1 = 0$, pa dobimo za efektivno maso škripca $km_k = m'(gt^2/2h - 1) = 1,4$ g. To je nekaj več kot polovica mase škripca – zaradi utorov v valju. Naš poskus je pokazal prednost lahkega škripca. Maso škripca bi se dalo še malo zmanjšati s tem, da bi izvrtali vanj nekaj lukenj, ne da bi prizadeli njegovo trdnost.

Janez Strnad

SLAMICA – Rešitev s str. 31

Če hočemo popiti sok iz kozarca, je treba na vrhu slamice z usti ustvariti dovolj nizek tlak p , da bo tekočino "potegnili" gor.

Ko v slamici miruje stolpec tekočine z višino h glede na gladino preostale tekočine v kozarcu, je tlak pri dnu slamice enak vsoti hidrostatičnega tlaka tekočinskega stolpca ρgh in tlaka na vrhu slamice.

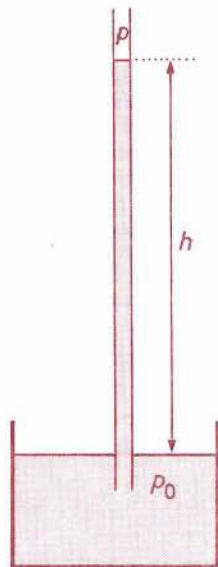
Tlak pri dnu je približno enak zunanjemu zračnemu tlaku p_0 , saj je v kozarec potopljenih le nekaj centimetrov slamice in se višina gladine v kozarcu ne pozna preveč. Sicer bi morali upoštevati le višino stolpca tekočine nad gladino v kozarcu.

Med navedenimi tlaki torej velja zveza

$$p_0 = \rho gh + p$$

oziroma

$$h = \frac{p_0 - p}{\rho g}.$$



V najboljšem primeru bi na vrhu slamice lahko ustvarili tlak 0 barov in sok bi lahko popili z višine desetih metrov. To seveda ne gre. Največja tlačna razlika, ki jo zmoremo z usti, je okrog 0,6 barov, kar ustreza šestmetrski slamici. Brez hudega truda pa lahko pijemo šele skozi metrsko ali krajšo slamico.

Kaj pa, če je slamica daljša od desetih metrov? Na vrhu bi lahko ustvarili poljubno majhen tlak, pa bi sok "prilezel" le do višine 10 metrov. Nad gladino soka v slamici pa bi ostal razredčen zrak in vodna para. Če bi namreč tlak zmanjšali do nasičenega parnega tlaka vode, bi sok v slamici v zgornjih centimetrih stolpca zavrel. Pri sobni temperaturi se to zgodi pri tlaku 0,03 bara. Tega seveda ne bi mogli početi s srkanjem z usti, vprašamo pa se tudi, kolikšen podtlak sploh zdrži slamica, ne da bi se zmečkala.

Podobne težave nastopijo pri dvigovanju podtalne vode z vaško črpalko oziroma "štirno"; če pri kopanju vodnjaka do globine desetih metrov ne naletimo na vodo, je treba poskusiti drugje ali pa se odločiti za drugačen način dviganja vode na površje, npr. s čebrom na vitlu.

Opomba: Ker mi vprašanje o trdnosti slamice ni dalo miru, sem napravil takšen poizkus:

V pokrovček pollitrse plastenke sem pritrdil kolesarski ventilček. Vanjo sem do treh četrtin nalil vodo in potopil dve plastični slamici (običajni mlečno beli za sok, dolgi 20 cm in s premerom 2 mm). Prva je bila zatajena le na eni strani in je služila kot barometer, druga pa je bila neprodušno zaprta z obeh strani. V plastenko sem načrpal zrak do tlaka 6 barov (v polzaprti slamici, kamor je z ene strani vdiral voda, se je stolpec zraka skrajšal na $1/6$), vendar je druga – zaprta slamica obdržala okrogel prečni presek in vanjo ni vdrlo nič vode. Torej slamice očitno dobro prenesejo tudi za pet barov manjši tlak v notranjosti. Slabše so se obnesle mehkejše slamice, tiste debele s kolenčkom za prepogibanje. Okroglo obliko nenadoma izgubijo pri tlačni razliki okoli 0,2 bara, z nadaljnim večanjem tlačne razlike pa se ubogljivo stiskajo, sledeč spremembi prostornine vsebovanega zraka v skladu s plinskimi zakoni.

Matjaž Vencelj

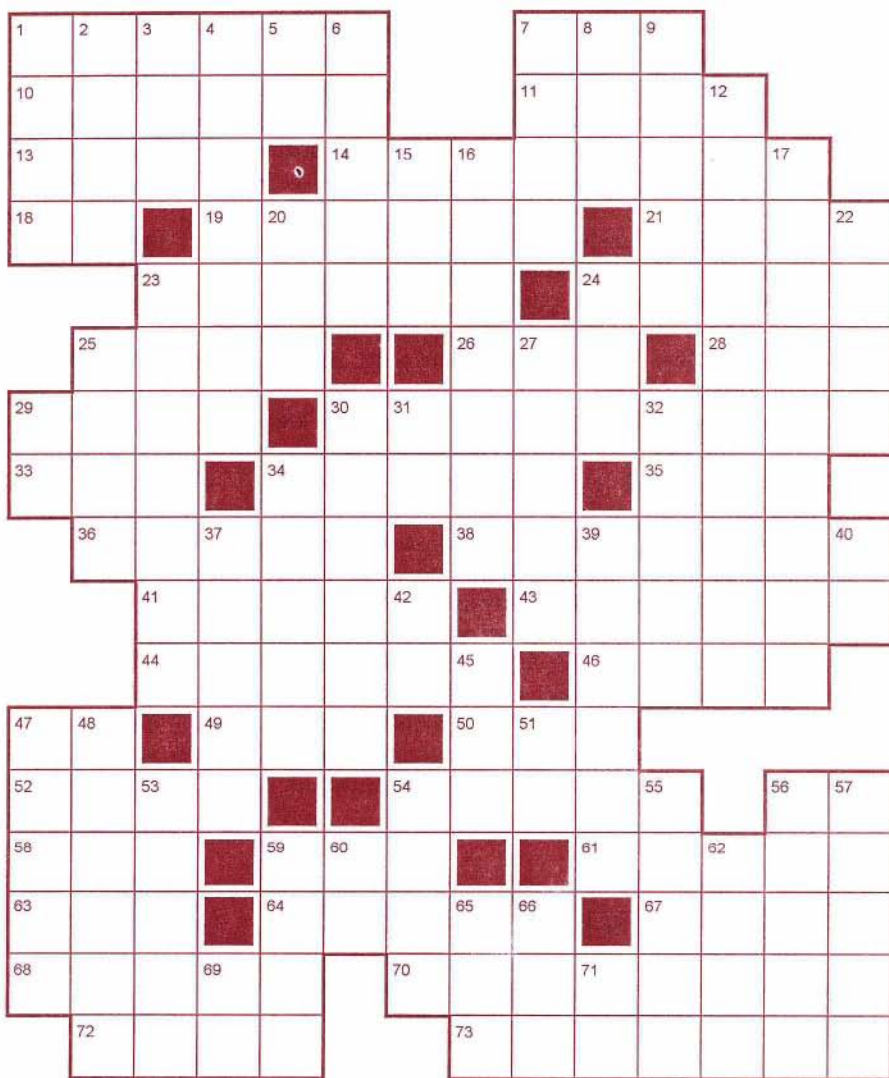
POIŠČI ŠTEVILO

Sodo naravno število ima v dvojiškem zapisu sedemmestno številko, v petiškem pa štirimestno. Katere število je to?

Ivan Lisac

KRIŽANKA “OČETJE FIZIKALNIH ENOT”

Tokrat smo v križanko uvrstili 15 znanstvenikov (po večini fizikov), po katerih so dobile ime nekatere fizikalne enote. Opisi zanje so v krepkem tisku.



VODORAVNO:

1. francoski matematik in filozof, po katerem se imenuje enota za tlak (Blaise), 7. naša redkejša strupena kača, 10. francoski matematik in fizik, odkritelj elektrodinamičnih pojavov, po katerem se imenuje enota za električni tok (André Marie), 11. ime norveškega kralja, ki je bil na prestolu od leta 1957 do svoje smrti leta 1991, 13. nova brazilska denarna enota, 14. vrtna rastlina z užitim podzemnim odebelenim delom, rebrinec, 18. začetnici češkega tenisača Novačka, 19. zlitina kobalta, kroma in volframa, 21. krajša oblika moškega imena Ahacij, 23. vezava, ki daje tkanini poševne črte, 24. slovita švedska igralka (Greta), 25. dejavnost, ki se odvija v učilnicah, 26. redek knjižni izraz za tla, 28. naslovna oseba opere Jakova Gotovca, 29. matematični znak za seštevanje, 30. uporabnik, potrošnik, 33. letovišče na otoku Braču, 34. vulkan nad Neapljem, 35. grška nimfa, ki se je spremenila v odmev, 36. visoko listnato drevo z mehkim lesom, 38. angleški dirkač formule ena (Nigel), 41. starejša italijanska pevka popularne glasbe, 43. model, ki prikazuje dvignjenost zemeljskega površja, 44. fina, gosta tkanina za osebno in posteljno perilo, 46. angleški inženir, izumitelj parnega stroja, po katerem se imenuje enota za moč (James), 47. začetnici zagrebskega TV voditelja Mlakarja, 49. veliko jezero v vzhodni Turčiji, 50. umetniška podoba golega telesa, 52. nemuslimanski podložniki v stari Turčiji, 54. plod fižola ali graha, 56. začetnici književnika Hienga, 58. stara vprežna priprava, jarem, 59. nemški fizik, po katerem je dobila ime enota za električno upornost (Georg Simon), 61. ameriški filmski igralec (Nick), 63. sudansko ljudstvo v zahodni Afriki, predvsem na Slonokoščeni obali, 64. ime rockovskega glasbenika Springsteena, 67. slovenski literarni zgodovinar iz 19. stoletja, ki je izdal časopis "Jezičnik" (Josip), 68. večji kraj pri Železnikih, 70. poveljnik manjše vojaške ali policijske enote, 72. ameriški izumitelj škotskega rodu, ki je leta 1876 izdelal prvi uporabni telefon (po njem se imenuje mera za glasnost zvoka, Alexander Graham), 73. angleški fizik in kemik, odkritelj električne indukcije in osnovnih zakonov elektrolize, po katerem nosi ime enota za kapacitivnost kondenzatorja.

NAVPIČNO:

1. mestna zelenica s potmi za sprehajanje, 2. konec molitve, 3. belgijsko zdravilišče in dirkališče formule ena, 4. švedski astronom iz prve polovice 18. stoletja, ki je predlagal delitev temperaturne skale med tališčem in vreliščem vode na 100 (njegovih) stopinj (Anders), 5. sto kvadratnih metrov, 6. lepljiva beljakovina v žitu, gluten, 7. češki pevec zabavne glasbe (Karel), 8. nekdanja legenda profesionalnega boksa (Muhammad), 9. hči argoškega kralja Akrizija, ki se ji je Zevs približal v podobi zlatega dežja, Perzejeva mati, 12. nemški fizik, ki je izdelal termometer na živo srebro, po katerem je zmrzišče pri 32, vrelišče pa pri 212 (njegovih) stopinjah (Gabriel Daniel, ta razdelitev je še danes v rabi v Angliji in Ameriki), 15. krilo rimske legije, 16. staro glasbilo v obliki ropotulje, ki so ga uporabljali Egipčani pri čaščenju Izide, 17. športni avtomobil z zložljivo streho, 20. dotik dveh gibajočih se teles, pri katerem se skupna gibalna energija ohrani, 22. angleški pomorščak iz 18. stoletja, ki je prvi obplul svet (James), 23. francoski fizik, po katerem se imenuje naboj 1As (Charles-Augustin de), 24. redka domača pernata žival, 25. lesena ograja, 27. delavec, ki uliva kovinske izdelke, 29. znak za svinec, 30. angleški fizik (lord), ki je izdelal absolutno temperaturno skalo (William Thomson), 31. sodobni izraelski pisatelj (Amos), 32. hrvaški elektrotehnik, po katerem se imenuje enota za gostoto magnetnega polja (Nikola), 34. italijanski fizik, ki je izdelal prvi galvanski člen in se po njem imenuje enota za električno napetost (Alessandro), 37. reka v severni Italiji (naša pisava), 39. angleški fizik in

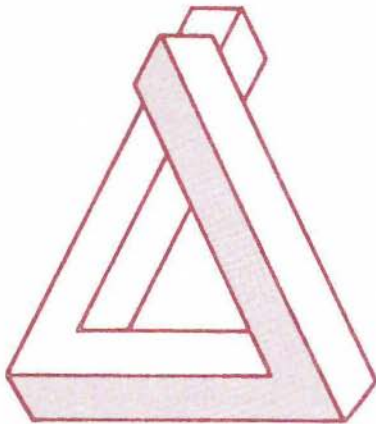
matematik, po katerem se imenuje enota za silo (sir Isaac), 40. začetnici slovenskega publicista in dramaturga Filipiča, 42. bakren rimski novc, 45. človek, ki kaj ukrade, 47. antilopa z dolgimi, močno koničastimi rogovi, 48. skupen izraz za afriške države Maroko, Alžirijo in Tunizijo, 51. oznaka Kranja, 53. angleški fizik, po katerem nosi ime enota za delo, energijo, toploto (James Prescott), 54. hitra smučarska disciplina, 55. visoka planota nad Bohinjem, 56. mestoce blizu izliva reke Pad v severni Italiji, po katerem ima ime Jadransko morje, 57. ameriški fizik, po katerem se imenuje enota za induktivnost (Joseph), 59. državni sekretar za kmetijstvo (Ivan), 60. oznaka Hrvaške, 62. starejši, že pokojni ameriški filmski igralec (Alan), 65. okrasni prišitek na kapi, 66. ime astrologinje Kurent, 69. znak za klor, 71. znak za argon.

Marko Bokalič

PENROSOV TRIKOTNIK – Rešitev nalog s str. 18

- 1) "Prostornina" telesa znaša 48 dm^3 , njegova "površina" pa 48 dm^2 .
- 2) Pikapolonica bo znova na svojem izhodiščnem mestu potem, ko bo četrtilič prestopila rdeči obroč.
- 3) Naslovna Ernstova fotografija je seveda efekten trik, ki gledalca spretno spelje na misel, da ima pred seboj dokaz za obstoj nečesa, o čemer ve, da sploh ne obstaja.

Oglejmo si sedaj predmet na desni sliki. Ta v realnem seveda brez dvoma obstaja. Recimo, da ga fotografiramo pod primernim kotom tako, da se bodo robovi na prekinitev med seboj lepo pokrivali. Tedaj bi nastala iluzija, da imamo pred seboj sklenjeni predmet oz. "pravi" Penrosov trikotnik.



V ozadju Ernstove fotografije tiči torej zgolj precej spretna in duhovita igra z zakoni perspektive. Sedaj najbrž nekoliko bolj razumemo tudi osnovno risbo Penrosovega trikotnika oz. sploh vse risbe t.i. nemogočih predmetov. Očitno sploh ni nujno, da bi te risbe predstavljale to, kar se zdi, da predstavljajo. Marsikaj je pač odvisno od tega, kako jih razumemo, torej od naše interpretacije teh risb.

Vilko Domajnko

ENA FINANČNA

Recimo, da imamo nekaj prihrankov. Kaj storiti z njimi? Ker smo malce pohlepni in nekoliko pustolovskega duha, bančne obresti pa so nemarno nizke, se odločimo, da bomo za leto dni denar investirali na borzi. No, ne čisto neposredno, saj se na delnice, obveznice in podobna čudesa ne spoznamo najbolje. Zato svoje majhno premoženje zaupamo v upravljanje ugledni borzni hiši. Seveda pa upravljanje premoženja ni zastoj. Pri podpisu pogodbe nam borzna hiša ponudi naslednje možnosti za plačilo stroškov upravljanja:

- (a) na začetku leta plačamo 2.4% začetne vrednosti premoženja,
- (b) na koncu leta plačamo 2.4% končne vrednosti premoženja,
- (c) na koncu vsakega meseca plačamo 0.2% trenutne vrednosti premoženja.

Seveda nam v vseh primerih ob koncu leta odtrgajo še fiksni del ustvarjenega dobička, recimo 10%. (O morebitni izgubi pa raje ne razmišljamo.)

Zdi se, da je možnost (b) najugodnejša, saj pri njej plačamo stroške šele na koncu leta, pri izbiri (a) moramo enako velike stroške poravnati vnaprej, pri izbiri (c) pa so porazdeljeni preko celega leta. Za katero od ponujenih možnosti bi se odločili vi?

Martin Juvan

MANJKAJOČI ŠTEVILI

Rešitev naloge "Manjkajoče število", ki je objavljena v tej številki Preseka, nas nauči, kako ugotovimo, katero število manjka na datoteki, ki vsebuje vsa naravna števila od 1 do n razen enega. Tokrat pa bomo nalogo še nekoliko otežili. Zopet dobimo veliko datoteko, na kateri so zapisana vsa števila med 1 in (neznanim) n razen dveh. Vsako število je zapisano samo enkrat, števila na datoteki pa seveda niso urejena. Čim hitreje in s čim manj dodatnega prostora poišči manjkajoči števili.

Martin Juvan

VSAKDANJE FUNKCIJE

Matematika v srednjih šolah je včasih na prvi pogled čudna. Učiti se moramo nekaterih zelo kompliciranih funkcij; kot primer naj služi tale dijakova nočna mora

$$f(x) = \sqrt{\log(1 - x^2)},$$

ki je skoraj zagotovo ne bomo nikoli srečali v praktičnem življenju. Po drugi strani pa bode v oči, da so v srednjih šolah zelo redko predstavljene nekatere funkcije, ki jih vsakodnevno srečujemo. Nekaj teh bomo v nadaljevanju opisali. Nikakor pa ne želimo trditi, da premlevanje kompliciranih funkcij ni smiselno, pravzaprav je res ravno obratno!

Ena od "vsakodnevnih funkcij" je **celi del**. Ta funkcija poljubnemu realnemu številu priredi tisto celo število, ki mu je od spodaj najbližje, torej največje celo število, ki ni večje od x :

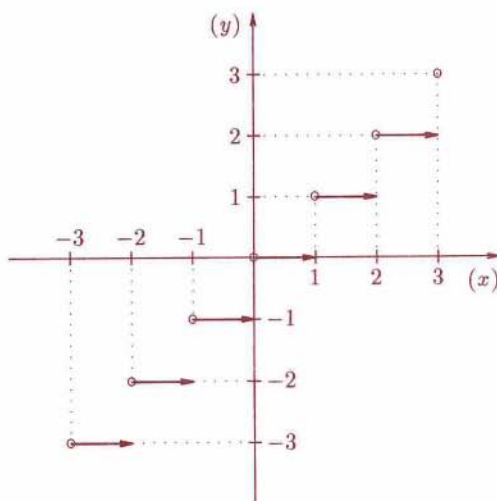
$$\text{int}(x) = \max\{n \mid n \in \mathbb{Z} \wedge n \leq x\}.$$

Oznaka int je prišla iz računalništva in je uspešno izrinila starejšo oznako; njen izvor je angleška beseda *integer* = celo število (dejanski izvor besede pa je seveda latinski).

x	$\text{int}(x)$	$\text{frac}(x)$	$\text{sgn}(x)$
3	3	0	1
3,14	3	0,14	1
3,99	3	0,99	1
0	0	0	0
-4	-4	0	-1
-4,1	-5	0,9	-1
-4,8	-5	0,2	-1

Tabela 1

Nekaj primerov vrednosti te in naslednjih dveh funkcij je v tabeli 1. Graf $y = \text{int}(x)$ pa je na sliki 1.

Slika 1. $y = \text{int}(x)$

Ne smemo zamenjati te funkcije z zaokroževanjem na cela mesta. Zaokrožitev števila 3,99 je namreč 4 in ne 3, zaokrožitev števila -4,1 pa je -4 in ne -5. Res pa je, da zaokroževanje zahteva že določen miselni napor, ki mu nekateri niso kos. To izrabljajo trgovci, ki na izdelek napišejo ceno npr. 798 tolarjev, možgansko len kupec pa namesto cene 800 vidi 700 tolarjev in zmotno domneva, da je nakup ugoden. Da je to res, lahko vsak preskusi sam. Gre naj v trgovino in si zapiše nekaj deset cen, potem pa naj doma ugotovi pogostost posameznih števk; skoraj gotovo bo največkrat nastopala devetka (ki je sicer najbolj sitna za računanje na pamet), kar dokazuje, da trgovci dobro poznajo opisani psihološki trik.

Funkcijo celi del zlahka in, kot se izkaže, smiselno razširimo tudi na kompleksna števila takole:

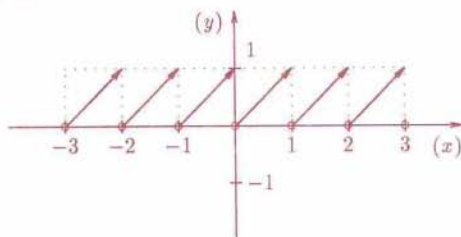
$$\text{int}(a + ib) = \text{int}(a) + i \cdot \text{int}(b) \quad (a, b \in \mathbb{R}).$$

Iz celega dela izpeljemo **mantiso** (latinsko: prideatek, dodatek):

$$\text{frac}(x) = x - \text{int}(x),$$

kjer je x poljubno realno ali celo kompleksno število. Simbol frac spet prihaja iz latinščine preko angleščine (fraction = ulomek, odlomek). Mantiso so pred izbruhom kalkulatorjev srednješolci srečali pri iskanju logaritmov

iz tabel. Nekaj primerov funkcijskih vrednosti je v tabeli 1, graf $y = \text{frac}(x)$ pa je na sliki 2. Iz grafa se vidi zanimiva lastnost: mantisa je periodična funkcija.

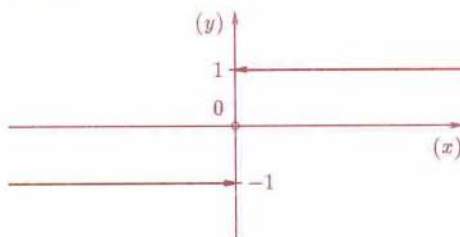


Slika 2. $y = \text{frac}(x)$

Naslednja zanimiva funkcija je **signum** realnega števila.

$$\text{sgn}(x) = \begin{cases} 1 & (x > 0), \\ 0 & (x = 0), \\ -1 & (x < 0). \end{cases}$$

Latinska besega *signum* (iz katere pride tudi angleški *sign*, ki se pojavlja na nekaterih kalkulatorjih) pomeni znak, v tem kontekstu predznak. Vedo, kadar hočemo, da je neko število pozitivno ali negativno, dejansko uporabimo to funkcijo; to pa storimo, kdo ve kolikokrat na dan. Zato je ta preprosta funkcija s samo tremi vrednostmi pomembna. Njen graf $y = \text{sgn}(x)$ je na sliki 3.



Slika 3. $y = \text{sgn}(x)$

Funkcija signum je v tesni zvezi z absolutno vrednostjo; za vsak realen x namreč velja:

$$x = |x| \cdot \text{sgn}(x),$$

$$|x| = x \cdot \text{sgn}(x).$$

Signum nima smiselne posplošitve na kompleksna števila.

Nazadnje še opozorimo na nenavadno lastnost prikazanih treh funkcij. Nezvezne so, njihovi grafi so v nekaterih točkah "pretrgani". Če skušamo to povedati natančneje: v nekaterih točkah se lahko funkcijske vrednosti že pri poljubno majhni spremembi argumenta močno spremenijo.

Tako! Tri funkcije, ki jih (mnogokrat podzvestno) uporabljamo v vsakdanjem življenju, smo opisali, četrto bomo pa prepustili za nalogo bralcu. Zagotovo jo poznate, celo njeno ime veste. Njen simbol ni ustaljen, zato bomo uporabili pač enega, ki je v uporabi. Za poljuben realen x naj bo:

$$\langle x \rangle_n = \left[b - c \frac{1 - (-1)^b}{2} \right] \cdot 10^{-n}, \quad (1)$$

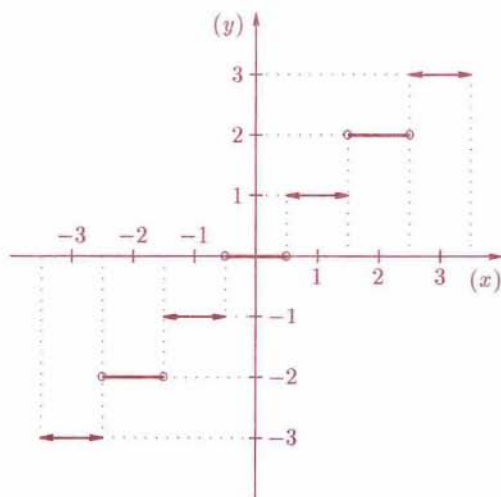
kjer so:

$$a = x \cdot 10^n + \frac{1}{2}$$

$$b = \text{int}(a),$$

$$c = 1 - \text{sgn}(a - b).$$

Indeks n je lahko poljubno celo število in je tako pomemben, da ga omejamo celo v imenu te funkcije. Za $n = 0$ je graf $y = \langle x \rangle_0$ prikazan na sliki 4.



Slika 4. $y = \langle x \rangle_0$

Da boste lažje odkrili, za kaj gre pri tej funkciji, svetujemo, da izračunate

$$\langle 7329, 8545 \rangle_n$$

za vse n od -5 do 5 . Ker pa je, kot smo omenili, funkcija tudi čisto praktično pomembna, naj še dodamo, da je zelo preprost približek za to, sicer dokaj komplicirano funkcijo, takle:

$$\langle x \rangle_n \approx \text{int}\left(x \cdot 10^n + \frac{1}{2}\right) \cdot 10^{-n}. \quad (2)$$

Kdaj se ta približek sploh razlikuje od natančne vrednosti?

Anton Cedilnik

IZ DRUŽINSKE KRONIKE – Rešitev s str. 29

Andrejev praded se je rodil leta 1870, njegova dva sinova pa 1895. in 1904. leta. Praded je bil torej ob rojstvu mlajšega sina, Andrejevega deda, star 34 let.

Marija Vencelj

MANJKAJOČE ŠTEVILO – Rešitev s str. 25

Če bi imeli dovolj velik pomnilnik, bi bila rešitev preprosta. Števila z datoteke bi prebrali v pomnilnik, jih hkrati prešteli in rezervirali tabelo logičnih vrednosti primerne velikosti. Nato bi s prehodom tabele števil v tabeli logičnih vrednosti označili, katera števila nastopajo, nazadnje pa bi z dodatnim pregledom tabele logičnih vrednosti ugotovili manjkajoče število. Če bi si dovolili dvakratno branje datoteke s traku, bi v pomnilniku potrebovali le tabelo logičnih vrednosti, ne pa tudi pomožne tabele števil. Dobra stran tega postopka je, da deluje pravilno tudi tedaj, kadar na datoteki manjka več kot eno število.

Žal pa nimamo dovolj pomnilnika, da bi lahko izpeljali gornji postopek. Zato bomo uporabili drugačen, nekoliko bolj matematičen pristop. Recimo, da bi naša datoteka vsebovala vsa števila od 1 do n . Vsota teh števil je $\frac{n(n+1)}{2}$. To število dá pri deljenju z n ostanek 0, če je n lih, in ostanek $\frac{n}{2}$, če je n sod. Če katero od števil manjka, potem zopet izračunamo

vsoto prisotnih števil oziroma ostanek, ki ga dá ta vsota pri deljenju z n . Iz razlike med ostankom celotne vsote in ostankom, ki ga določajo prisotna števila, pa zlahka izračunamo manjkajoče število.

```

program ManjkajoceStevilo;
{ Med števili na izbrani datoteki poišče tisto, ki manjka. }
var
  ime: string;                { ime fizične datoteke na traku }
  f: file of longint;         { datotečna spremenljivka }
  n: longint;                 { velikost datoteke plus ena }
  i,ost: longint;
begin
  write('Na kateri datoteki se nahajajo števila: '); readln(ime);
  assign(f,ime); reset(f);
  n := 1;
  while not eof(f) do        { prvi prehod datoteke: štetje }
    begin read(f,i); n := n+1; end;
  reset(f);
  ost := 0;
  while not eof(f) do { drugi prehod datoteke: seštevanje ostankov }
    begin read(f,i); ost := (ost+i) mod n; end;
  if not odd(n) then { celotni ostanek minus ostanek prisotnih števil }
    ost := (n div 2)-ost
  else
    ost := 0-ost;
  if ost<1 then ost := ost+n;      { določimo manjkajoče število }
  write('Na datoteki ',ime,' manjka število ',ost,','); readln;
end.

```

Morda se sprašujete, zakaj kompliciramo z ostanki, ko pa bi lahko izračunali kar celotno vsoto in iz nje takoj dobili manjkajoče število. Prednost računanja z ostanki je, da pri tem vrednost spremenljivk v programu nikoli ne preseže $2n - 1$. Če pa bi izračunali vsoto, bi se ta lahko povsem približala vrednosti $\frac{n(n+1)}{2}$. Ilustrirajmo to s primerom. Največja vrednost, ki jo v turbo pascalu sprejme spremenljivka tipa `integer` je 32767. Če računamo z ostanki, bo postopek deloval pravilno za vrednosti $n \leq 16384$. Če pa vzamemo celotno vsoto, bo računanje vedno pravilno le za $n \leq 255$. Razlika je očitna. Res pa je, da se z računanjem celotne vsote lahko izognemo drugemu pregledu datoteke.

Martin Juvan

DEVET VPRAŠANJ O ŠIROKIH ŠTEVILIH – Rešitev s str. 39

Spornimo se, da smo število imenovali široko, če je vsota njegovih števk v desetiškem zapisu enaka njihovem produktu. Vsoti števk smo rekli širina števila.

1. S kratkim računom preverimo, sa so števila 7, 22, 123 in 13131 široka, števili 1234 in 121212 pa ne.
2. Naj bosta a in b števki dvomestnega širokega števila. Potem je $a + b = ab$ oziroma $a = \frac{b}{b-1}$. Desna stran te enakosti je celo število le pri $b = 0$ in $b = 2$. Možnost $b = 0$ odpade, saj je tedaj tudi $a = 0$ in dobljeno število ni dvomestno. Pri $b = 2$ je tudi $a = 2$, torej je 22 edino dvomestno široko število.
3. Označimo z a edino števko k -mestnega širokega števila, sestavljenega iz samih enakih števk. Potem velja enakost $ka = a^k$. Za $k = 1$ je ta enakost izpolnjena pri vsakem številu a . Vsa enomestna števila torej rešijo nalogo. Če pa je $k \geq 2$, ločimo dve možnosti. Pri $a = 1$ je leva stran enakosti večja, tako da enačaja ne more veljati. Če pa je $a \geq 2$, lahko dobimo enačaja le za $k = 2$ in $a = 2$, torej pri številu 22, ki smo ga že srečali, sicer pa je desna stran strogo večja.
4. Ker mora imeti široko število širine 3 produkt števk enak 3, v njegovem zapisu lahko nastopata le števki 1 in 3. Da bo produkt enak 3, mora nastopiti natanko ena števka 3. Da pa vsota števk ne postane prevelika, številke 1 ne smemo dodati. Edino široko število s širino 3 je torej število 3.
Podobno sklepamo, ko iščemo široka števila širine 4. Števke, ki lahko nastopijo v njihovem zapisu, so 1, 2 in 4. Da bo njihov produkt enak 4, moramo imeti eno števko 4 ali pa dve števki 2. V obeh primerih pa enic ne moremo več dodati, saj bi sicer vsota števk postala prevelika. Edini široki števili širine 4 sta torej števili 4 in 22.
5. Pokažimo, da široko število širine 11 ne obstaja. V to se zlahka prepričamo, če opazimo, da števila 11 ne moremo zapisati kot produkt desetiških števk. Število 11 je namreč praštevilo, zato v vsakem njegovem zapisu kot produkt naravnih števil nastopa tudi število 11 samo, to število pa ne predstavlja desetiške številke.
6. Oglejmo si razcep števila 1995 na prafaktorje: $1995 = 3 \cdot 5 \cdot 7 \cdot 19$. Ker v njegovem razcepu nastopa tudi praštevilo 19, ki je strogo večje od vseh desetiških števk, široka števila širine 1995 ne obstajajo.

7. Poti, kako poiskati poljubno velika široka števila, je veliko. Uporabili bomo naslednjo idejo. Z nekaj števkami, ki so večje od 1, poskrbimo, da je produkt števk dovolj velik. Nato z dodajanjem enic, tako dodajanje ne spremeni produkta števk, poskrbimo, da je produkt števk enak njihovi vsoti. Za vsako naravno število k tako lahko zgradimo široko število

$$\underbrace{2 \dots 2}_k \underbrace{1 \dots 1}_{2^k - 2k}$$

s širino 2^k . Nekaj prvih širokih števil, dobljenih s to konstrukcijo, je 2, 22, 22211 in 22221111111. Seveda z rastočim k ta števila zelo hitro postanejo poljubno velika.

8. Naj bo x široko število s širino k . Številka 0 v zapisu števila x ne nastopa, saj bi bil sicer produkt števk enak 0. Torej ima število x kvečjemu k števk, saj vsaka neničelna številka poveča vsoto števk vsaj za ena, celotna vsota pa je po predpostavki enaka k . Število x torej ni večje od 10^k . Gornja zelo groba ocena torej pravi, da širokih števil širine k ni več kot 10^k .
9. S pomočjo računalnika lahko izračunamo naslednjo tabelo:

n	število širokih števil do n
10	9
10^2	10
10^3	16
10^6	98
10^9	550
10^{12}	1695

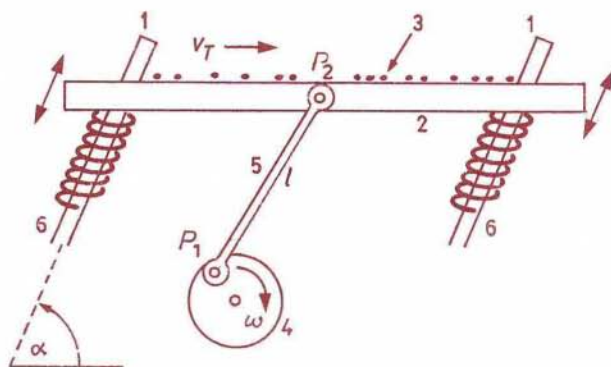
Širokih števil je torej zelo malo. Do tisoč so to le enomestna števila 1, ..., 9, število 22 in število 123 ter še pet števil, ki jih lahko dobimo iz števila 123, če zamenjamo vrstni red posameznih števk. O tem, kako sem izračunal gornjo tabelo, pa kdaj drugič.

- Široka števila bi lahko definirali tudi pri osnovah, ki so različne od 10. Na primer, pri osnovi 2 široka števila niso posebej zanimiva. Zakaj?

Martin Juvan

VIBRACIJSKI TRANSPORTERJI

Vibracijske transporterje uporabljamo za prenos zrnatega ali praškatega materiala. Delujejo tako, da podlaga hitro niha v poševni smeri, zato zrnca na njej poskakujejo in se tako premikajo naprej. Shema delovanja takega transporterja je prikazana na sliki. Transportno podlago podpirajo vzmeti, poševna vodila pa dopuščajo njeno gibanje le v določeni smeri. Vzmeti so največkrat nameščene kar na vodilih. Elektromotor poganja z veliko frekvenco pogonsko kolo, to pa preko ročice podlago, da drsi po vodilih gor in dol.



1 – vodili, 2 – transportna podlaga, 3 – zrnati material, 4 – pogonsko kolo,
5 – ročica, 6 – podporne vzmeti.

Opišimo najprej gibanje podlage, potem pa še obnašanje drobnega telesa na njej. Navadno je razdalja r med središčem pogonskega kolesa in pritrdiščem P_1 ročice na kolesu veliko manjša od dolžine ročice l . V tem primeru je nihanje podlage približno sinusno:

$$l = r \sin(\omega t),$$

kjer je l odmik v smeri vodil od ravnovesne lege, ω krožna frekvenca kolesa, t pa čas. Bralec lahko to preveri tako, da upošteva gibanje sistema pritrdišč ročice na pogonsko kolo in podlago (točki P_1 in P_2 na sliki). Točka P_1 enakomerno kroži po krožnici z radijem r , točka P_2 pa se giblje v smeri, določeni z vodili tako, da je med njima stalna razdalja l . Pri računu upoštevamo $r \ll l$ in lahko nekatere člene zanemarimo.

Gibanje podlage razstavimo na gibanje v vodoravni in navpični smeri:

$$x_p = r \cos \alpha \sin(\omega t)$$

$$y_p = r \sin \alpha \sin(\omega t),$$

kjer je α naklonski kot vodil. Pri tem vzamemo poljubno točko podlage in gledamo njen odmik iz ravnovesne lege. Telo se odlepi od podlage, ko postane pojemek podlage v navpični smeri enak težnemu pospešku:

$$-r\omega^2 \sin \alpha \sin(\omega t) = -g.$$

Zaradi krajšega zapisa uvedimo parameter $K = r\omega^2/g$. Potreben pogoj, da je gornja enačba rešljiva in da transporter sploh deluje, je: $K \sin \alpha > 1$. Navadno je K veliko večji od 1 ($10 < K < 100$), kar nam precej poenostavi računanje. Pri vibracijskih transporterjih nas seveda najbolj zanima transportna hitrost, to je povprečna hitrost zrn v vodoravni smeri. Potem, ko telo odskoči, njegovo gibanje opisujejo enačbe za poševni met navzgor:

$$x = v_p \cos \alpha t$$

$$y = v_p \sin \alpha t - \frac{gt^2}{2},$$

kjer je v_p hitrost podlage v smeri vodil v trenutku odskoka telesa:

$$v_p = \omega r \sqrt{1 - \frac{1}{K^2 \sin^2 \alpha}}.$$

Pri tem smo spet prestavili izhodišče koordinatnega sistema tako, da je začetna lega zrna ob skoku $x = 0, y = 0$. Bralec se lahko hitro prepriča da je za velik K telo v zraku veliko nihajnih period podlage, preden spet pade nanjo. Torej je transportna hitrost v_T kar približno enaka komponenti hitrosti podlage ob odskoku v vodoravni smeri:

$$v_T \simeq v_p \cos \alpha = r\omega \cos \alpha \sqrt{1 - \frac{1}{K^2 \sin^2 \alpha}} \simeq r\omega \cos \alpha.$$

Če naj bodo transporterji učinkoviti, mora biti transportna hitrost čim večja. Edino, kar navadno lahko izbiramo, je frekvenca elektromotorja ; r in α sta določena s strojem, ki ga dobimo. Čim večja je frekvenca, tem večja je transportna hitrost. Frekvenca je seveda omejena z močjo motorja in dinamičnimi obremenitvami v sistemu, najbolj na pogonskem kolesu in na vzmeteh.

Milan Ambrožič

O PRAŠTEVILIH

Že stari Grki so se poleg geometrije veliko ukvarjali tudi s praštevili. Problemi v zvezi s praštevili so največkrat enostavno zastavljeni, a zelo težki za reševanje. Še danes obstaja precej nerešenih problemov kljub številnim novim (neelementarnim) metodam za njihovo reševanje. Ideje, ki izvirajo iz preučevanja praštevil, so bile zelo plodno uporabljene tudi v modernih matematičnih disciplinah, kot sta teorija kolobarjev in algebraina geometrija.

Danes bomo spregovorili nekaj o enostavnejših problemih in metodah, ki so dostopne tudi srednješolcem. Naloge s praštevili so za vas zelo koristne, saj razvijajo sposobnost mišljenja z lastno glavo. Pri teh nalogah namreč ponavadi ne gre za uporabo že naučenih metod, ampak morate sami iznajti tudi metodo reševanja, kar je od vseh opravil človeških možgan nedvomno najtežje.

Kljub temu, da nalog v zvezi s praštevili ni mogoče spraviti v predalčke, bomo poskusili s primeri predstaviti uporabo treh najosnovnejših idej, ki vam večkrat utegnejo koristiti.

1. ideja. Kadar rešujete problem, ki ima kaj opraviti s praštevili, ne pozabite na najosnovnejša dejstva:

- (a) Vsa praštevila, razen dvojke, so liha števila.
- (b) Nobeno praštevilo, razen trojke, ni deljivo s 3.
- (c) Če je p praštevilo in je $p = xy$, potem je $x = 1, y = p$ ali pa $x = p, y = 1$.
- (d) Če število n ni praštevilo, ga lahko zapišemo v obliki produkta $n = xy$, kjer sta x, y različna tako od 1 kot od n .

Problem 1. Naj bosta $p > q > 3$ praštevili. Dokaži, da je $p^2 - q^2$ deljivo s 24.

Rešitev. Najprej je očitno, da sta p in q lihi števili, zato lahko pišemo $p = 2n + 1$ in $q = 2m + 1$. Tedaj je število

$$\begin{aligned} p^2 - q^2 &= (4n^2 + 4n + 1) - (4m^2 + 4m + 1) = \\ &= 4(n(n + 1) - m(m + 1)) \end{aligned}$$

deljivo s 4. Števili $n(n + 1)$ in $m(m + 1)$ sta gotovo sodi, ker je med dvema zaporednima številoma vedno eno sodo in eno liho. To pomeni, da je $p^2 - q^2$ deljivo z 8.

Nadalje je izmed števil $p-1, p, p+1$ natanko eno deljivo s 3. Ker je p praštevilo, različno od 3, p ni deljivo s 3, zato je $(p-1)(p+1) = p^2 - 1$ deljivo s 3. Podobno je $q^2 - 1$ deljivo s 3. Tedaj pa je tudi $p^2 - q^2 = (p^2 - 1) - (q^2 - 1)$ deljivo s 3 in glede na prejšnji odstavek tudi s 24.

Problem 2. Naj bo p praštevilo. Denimo, da je $8p^2 + 1$ tudi praštevilo. Koliko je tedaj p ?

Rešitev. Najprej poskusimo s $p = 2$. Tedaj je $8p^2 + 1 = 33$, kar ni praštevilo. To pomeni, da lahko predpostavimo, da je p liho število. Pišimo torej $p = 2n + 1$. Tedaj je

$$8p^2 + 1 = 32n^2 + 32n + 9 = 32n(n+1) + 9.$$

Če bi bilo eno izmed števil $n, n+1$ deljivo s 3, bi bilo $8p^2 + 1$ tudi deljivo s 3 in večje od 9, torej bi ne bilo praštevilo. Zato je s 3 deljivo število $n-1$, oziroma $n-1 = 3s$. Če to vstavimo v p , dobimo

$$p = 2n + 1 = 2(3s + 1) + 1 = 6s + 3 = 3(2s + 1).$$

Ker je p praštevilo, je $s = 0$ oziroma $p = 3$. Če naredimo preizkus, je $8 \cdot 3^2 + 1 = 73$ res praštevilo.

Problem 3. Za kakšen n sta števili $2^n + 1$ in $2^n - 1$ hkrati praštevili?

Rešitev. Število $n = 1$ ni rešitev, saj 1 ni praštevilo. Število $n = 2$ je rešitev, saj dobimo 3 in 5.

Naj bo zdaj $n > 2$. Denimo, da je $2^n - 1$ praštevilo. Pišimo n v obliki produkta $n = xy$, pri $x \leq y$. Tedaj je

$$2^n - 1 = (2^x)^y - 1 = (2^x - 1)((2^x)^{y-1} + \dots + 2^x + 1).$$

Ker je $2^n - 1$ praštevilo, je $2^x - 1 = 1$. Torej je $x = 1$ in $y = n$. To pomeni, da n nima netrivialnih deliteljev, zato je n tudi sam praštevilo. Ker je $n > 2$, je n liho število. Pišimo ga v obliki $n = 2k + 1$. Tedaj je število

$$\begin{aligned} 2^n + 1 &= 2 \cdot 4^k + 1 = 2(3 + 1)^k + 1 = \\ &= 2(3^k + k \cdot 3^{k-1} + \dots + k \cdot 3 + 1) + 1 = \\ &= 3(2 \cdot 3^{k-1} + \dots + 2k) + 2 + 1 \end{aligned}$$

deljivo s 3 in hkrati večje od 3, zato ni praštevilo. Edina rešitev je torej $n = 2$.

2. ideja. Včasih je koristno uporabiti dejstvo, da je vsako naravno število mogoče zapisati v obliki produkta potenc praštevil. Vedno imejte v mislih tudi to, da je tak produkt enolično določen, če praštevila uredimo po velikosti.

Problem 4. Naj bo $p = 2^n + 1$ praštevilo. Dokaži, da je n potenca števila 2.

Rešitev. Napišimo n kot produkt potenc praštevil, torej

$$n = 2^k p_2^{k_2} \dots p_n^{k_n}.$$

Ker so praštevila $p_2, \dots, p_k$ liha, je tudi njihov produkt liho število, zato lahko pišemo $n = 2^k(2l + 1)$. Tedaj je

$$p = 2^{2^k(2l+1)} + 1 = (2^{2^k} + 1)((2^{2^k})^{2l} - (2^{2^k})^{2l-1} + \dots - 2^{2^k} + 1).$$

Ker je p praštevilo, je $2^{2^k} + 1 = p$, oziroma $l = 0$.

Problem 5. Naj bo D največji skupni delitelj in v najmanjši skupni večkratnik. Dokaži, da je $D(a, b, c)v(ab, bc, ca) = abc$ za poljubna naravna števila a, b, c .

Rešitev. Pišimo

$$\begin{aligned} a &= p_1^{\alpha_1} p_2^{\alpha_2} \dots p_n^{\alpha_n}, \\ b &= p_1^{\beta_1} p_2^{\beta_2} \dots p_n^{\beta_n}, \\ c &= p_1^{\gamma_1} p_2^{\gamma_2} \dots p_n^{\gamma_n}. \end{aligned}$$

Jasno je seveda, da so nekateri eksponenti lahko enaki 0. Tedaj je

$$D(a, b, c) = p_1^{\min\{\alpha_1, \beta_1, \gamma_1\}} \dots p_n^{\min\{\alpha_n, \beta_n, \gamma_n\}}.$$

Poleg tega je

$$v(ab, bc, ca) = p_1^{\max\{\alpha_1 + \beta_1, \beta_1 + \gamma_1, \gamma_1 + \alpha_1\}} \dots p_n^{\max\{\alpha_n + \beta_n, \beta_n + \gamma_n, \gamma_n + \alpha_n\}}.$$

Preveriti moramo torej identiteto

$$\alpha + \beta + \gamma = \min\{\alpha, \beta, \gamma\} + \max\{\alpha + \beta, \beta + \gamma, \gamma + \alpha\}.$$

Brez škode za splošnost lahko predpostavimo, da je $\alpha \leq \beta \leq \gamma$. Tedaj je prvo število na desni enako α , drugo pa $\beta + \gamma$ in enakost res velja.

3. ideja. V matematiki se zelo pogosto uporablja način dokazovanja, ki temelji na naslednjem: Denimo, da moramo dokazati, da iz A sledi B . Tedaj vzamemo, da A velja B pa ne (naredimo torej neko hipotezo), in potem poskušamo pokazati, da nas ta hipoteza vodi v protislovje.

V naslednjem primeru bi šlo naprimer takole: Dokazati moramo, da če ima število p lastnost P , potem je p praštevilo. To poskusimo dokazati tako, da vzamemo, da p ni praštevilo in da ima lastnost P , ter nato poskusimo izpeljati protislovje.

Problem 6. Denimo, da p deli $(p-1)! + 1$. Dokaži, da je p praštevilo.

Rešitev. Denimo, da p deli število $(p-1)! + 1$ in da ni praštevilo. Potem ima p neki delitelj q , ki je večji od 1 in manjši od p . Toda potem bi q nastopal v produktu $(p-1)! = 1 \cdot 2 \cdot \dots \cdot (p-1)$ in bi ga seveda delil. V tem primeru seveda q ne more deliti $(p-1)! + 1$. Dobili smo torej situacijo, ko q deli p , p deli $(p-1)! + 1$, q pa ne deli $(p-1)! + 1$. To je očitno protislovje, ki pomeni tudi konec dokaza.

Problem 7. Dokaži, da je praštevil neskončno mnogo. Ta problem je zelo star in so ga znali rešiti že stari Grki.

Rešitev. Pa denimo, da je praštevil končno mnogo, recimo k . Dokazali bomo, da to vodi v protislovje.

Označimo praštevila s $p_1, \dots, p_k$ in si oglejmo število $N = p_1 p_2 \dots p_k + 1$. Vsako število je bodisi praštevilo bodisi je deljivo z nekim praštevilom, manjšim od števila samega. Število N ni praštevilo, saj je večje od vseh praštevil $p_1, \dots, p_k$. Če je deljivo z nekim praštevilom, mora biti deljivo z nekim izmed $p_1, p_2, \dots, p_k$, saj drugih praštevil ni. Toda tedaj bi p_i delil 1, kar je protislovje.

Problem 8. Dokaži, da je v zaporedju $a_n = 4n + 3$ neskončno mnogo praštevil.

Rešitev. Uporabili bomo podoben prijem kot v prejšnji nalogi. Denimo, da je v zaporedju samo končno mnogo praštevil $p_1, p_2, \dots, p_k$.

Razen dvojke so vsa praštevila liha in zato oblike $4n + 1$ ali $4n + 3$. Produkt dveh števil oblike $4n + 1$ je spet take oblike, zato mora imeti vsako število oblike $4n + 3$ vsaj en praštevilski faktor te oblike.

Oglejmo si števili $N = p_1 p_2 \dots p_k + 2$ ter $M = p_1 p_2 \dots p_k + 4$. Natanko eno od obeh števil je oblike $4n + 3$, drugo pa oblike $4n + 1$ (gre za dve zaporedni lihi števili). Denimo, da je N oblike $4n + 3$. Tedaj ima N prafaktor oblike $4n + 3$, ki je torej člen zaporedja a_n in zato enak enemu izmed praštevil $p_1, p_2, \dots, p_k$. Če p_i deli N , sledi, da p_i deli 2, kar je nemogoče. Podobno obravnavamo primer, ko je M oblike $4n + 3$.

Zdaj ko ste oboroženi z osnovnimi idejami o praštevilih, lahko greste v knjižnico po stare Preseke ali kakšno zbirko nalog in rešujete naloge, ki so v zvezi s praštevili. Pa brez pretiravanja. Nikoli ne pozabite, da matematika ni edina stvar na svetu.

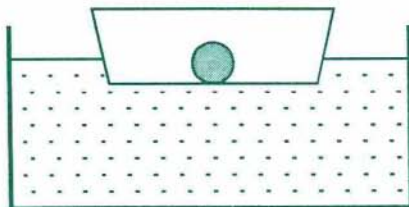
15. PODROČNO TEKMOVANJE IZ FIZIKE ZA OSNOVNOŠOLCE

NALOGE ZA 7. RAZRED

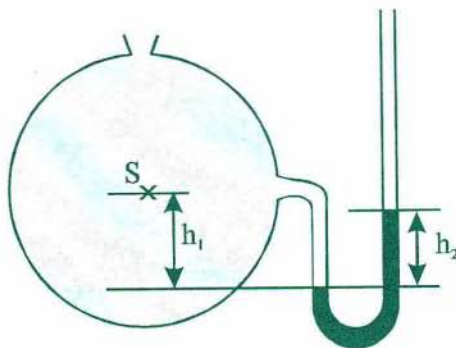
1. Na saneh z maso 10 kg sedi Metka z maso 40 kg. Janko vleče Metko po klancu z nagibom 30° .

- S kolikšno silo vleče Janko, če je gibanje enakomerno in je sila trenja ocenjena na 10 N?
- Kolikšen je tlak pod sanmi, če je velikost stične ploskve med sanmi in snegom 2 dm^2 ?
- S kolikšno silo naj Janko vleče po vodoravni podlagi, da bo gibanje še vedno enakomerno? Upoštevaj, da se sila trenja na vodoravnem delu poti podvoji.

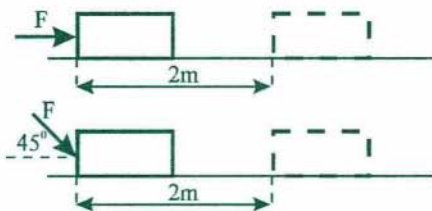
2. Posoda v obliki kvadra s površino dna 3 dm^2 je napolnjena z vodo do višine h . Na vodi plava lahka ladjica, na dnu katere je kamen s prostornino 30 cm^3 in gostoto $2,5 \text{ g/cm}^3$. Za koliko se zviša ali zniža gladina vode v posodi, ko vzamemo kamen iz ladjice in ga spustimo na dno posode?



3. Okrogla posoda je pri strani pritrjena na živosrebrni manometer. Gladina živega srebra v levem kraku manometra je za $h_1 = 20 \text{ cm}$ pod središčem krogle, gladina v desnem kraku pa je za $h_2 = 5 \text{ cm}$ nad gladino živega srebra v levem kraku manometra. Kolikšen je polmer posode, če je posoda polna vode in je zgoraj odprta?



4. Na sliki je prikazano telo, na katerega deluje sila $F = 7 \text{ N}$. V prvem primeru deluje sila v smeri gibanja, v drugem primeru pa sila oklepa s smerjo poti kot 45° . V obeh primerih se telo premakne za 2 m .



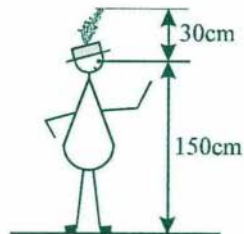
- Ali je v obeh primerih opravljeno delo enako?
 - Če ni, katero delo je večje in za koliko?
5. Dolžino medeninaste in jeklene palice izmerimo pri temperaturi 0° C . Medeninasta palica je dolga 1200 mm , jeklena pa 1202 mm .

- Pri kateri temperaturi sta palici enako dolgi?
- Kolikšna je njuna dolžina pri tej temperaturi?

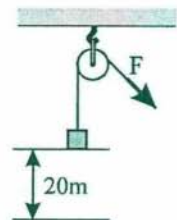
Upoštevaj podatek, da se medeninasta palica podaljša za $0,019 \text{ mm}$ in jeklena za $0,012 \text{ mm}$, če ju segrejemo za eno stopinjo.

NALOGE ZA 8. RAZRED

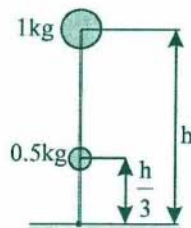
1. 160 cm visoka Metka si kupuje ogledalo, v katerem bi se videla od pete do vrha peresa na klobuku. Ker je varčna, želi kupiti najmanjše možno ogledalo. Svetuj ji, kako visoko naj bo in kako daleč od tal naj bo njegov spodnji rob. Odgovor utemelji z risbo.



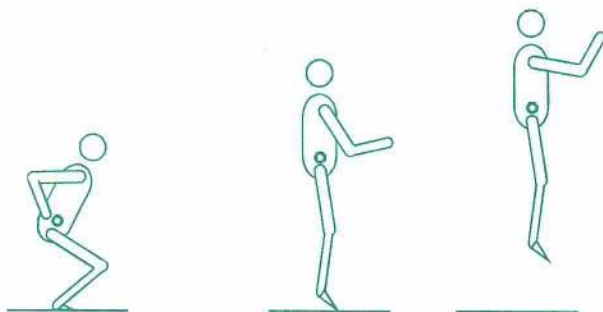
2. Breme z maso 20 kg je obešeno na vrvi, ki vodi prek škripca, pritrjenega na strop. Spustimo ga z višine 20 m nad tlemi. Njegovo padanje zaviramo tako, da ga s stalno silo F vlečemo za prosto krajišče vrvi. Kolikšna naj bo ta sila, da bo breme padlo na tla s hitrostjo 10 m/s ?



3. Na lahki, 1 m dolgi palici, ki stoji navpično, sta pritrjeni dve krogli. Na vrhu je krogla z maso 1 kg , na eni tretjini višine pa krogla z maso $0,5 \text{ kg}$. Palico spustimo, da začne padati, ne da bi spodnje krajišče zdrsnilo. Kolikšna je hitrost zgornje krogle, ko udari palica na vodoravna tla? Maso palice zanemarimo.



4. Na atletskem tekmovanju je fizik opazoval skok v višino. Nekatere podatke o skoku je uspel zmeriti, ostale pa mu pomagaj izračunati. Tri faze tega skoka so shematično prikazane na sliki.

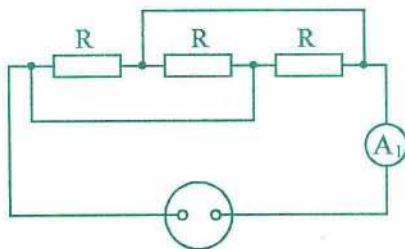


Pri počepu se je skakalcu težišče znižalo za 0,4 m. Pri odrivu pa so skakalcu izmerili odrivno hitrost 3,2 m/s.

- Kolikšen je bil odrivni čas, če je pospešek oddivanja konstanten?
- Za koliko se je skakalcu dvignilo težišče po odrivu?

5. Tri enake upornike povežemo z napetostnim izvirom in ampermetrom z zanemarljivim notranjim uporom v vezje, ki je prikazano na sliki.

- Kolikšen tok teče skozi vsak upornik, če ampermeter (A_1) kaže tok 0,6 A?
- V vsakem uporniku s puščico označi smer toka skozi upornik.



Objavljamo še popravek tekmovalnih rezultatov, objavljenih v 1. številki Preseka:

Med dobitniki zlatega Stefanovega priznanja je tudi ekipa 7. razreda OŠ Lipnica. Učenca Katja Goli in David Štuler sta pri ponovnem pregledu in ocenitvi tekmovalnih nalog prejela dodatne točke in tako osvojila 12 točk. Učencema iskreno čestitamo.

Vesna Harej, Jelislava Sakelšek

30. OBČINSKO TEKMOVANJE ZA SREBRNO VEGOVO PRIZNANJE

22. aprila 1995 se je 1815 šestošolcev, 1605 sedmošolcev in 1691 osmošolcev na občinskem tekmovanju potegovalo za srebrno Vegovo priznanje. Osvojilo ga je 620 učencev 6. razreda, 500 učencev 7. razreda in 561 učencev 8. razreda. Prvič so letos učenci reševali naloge v dveh sklopih. Prvih šest nalog je bilo izbirnega tipa z obkrožanjem ustreznega odgovora, nato pa še tri "klasične" naloge. Poglejmo naloge:

6. razred

- A1 Človek ima približno 150000 las. Vsak dan mu jih izpade približno 100. Vzemimo, da izpadejo vsak dan tisti lasje, ki so najstarejši. Nadomestijo jih novi lasje. Približno koliko let živi človeški las.

(A) 1 leto (B) 2 leti (C) 3 leta (Č) 4 leta (D) 5 let

- A2 Učiteljica pravi učencem: "Do konca šolske ure je ostalo dvakrat manj časa, kakor ga je že preteklo od začetka." Koliko minut je še do konca te šolske ure?

(A) 5 min (B) 10 min (C) 15 min (Č) 18 min (D) 20 min

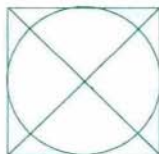
- A3 Če dam Tinetu dve čokoladi, se lahko vozim z njegovim kolesom 3 ure, če mu dam 12 bonbonov, pa 2 uri. Jutri mu bom dal čokolado in tri bonbone, zato se bom lahko vozil

(A) pol ure (B) eno uro (C) dve uri (Č) tri ure (D) štiri ure

- A4 Rešitev enačbe $\frac{2+3+4}{3} = \frac{1994+1995+1996}{x}$ je

(A) 3 (B) 6 (C) 1994 (Č) 1995 (D) 1996

- A5 Katerega lika ni na sliki?



- (A) kroga (B) kvadrata
(C) pravokotnega trikotnika (Č) enakokrakega trikotnika
(D) enakostraničnega trikotnika

A6 Domino sestavljata dva mala kvadratka:



Katere od spodnjih "šahovnic" ne moreš sestaviti iz samih takih domin? (Domine se ne prekrivajo.)

(A)



(B)



(C)



(Č)



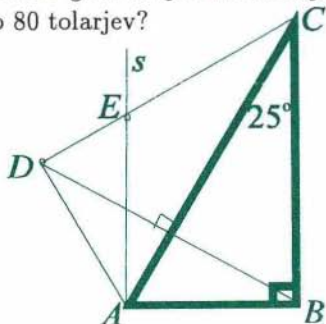
(D)



B1 Od nekega števila smo odšteli enkrat $\frac{1}{2}$, dvakrat $\frac{1}{3}$, trikrat $\frac{1}{4}$, štirikrat $\frac{1}{5}$ in dobili $\frac{17}{60}$. Od katerega števila smo odštevali?

B2 V cvetličarni imajo na zalogi 370 gerber, 148 nageljnov in 222 vejic zelenja. Iz vsega cvetja in zelenja želijo narediti največje možno število enakih šopkov. Koliko stane šopek, če so gerbere po 210 tolarjev, nageljni po 100 tolarjev, zelenje pa po 80 tolarjev?

B3 Dan je pravokotni trikotnik $\triangle ABC$ s kotom $\angle ACB = 25^\circ$, kot kaže skica. Točka D je zrcalna slika točke B glede na nosilko AC . Sime-trala kota $\angle CAD$ seka daljico CD v točki E . Izračunaj velikost kota $\angle CEA$.

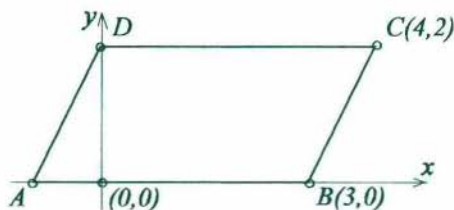


7. razred

- A1 Kolikšna je vsota števil, ki bi jih morali zapisati v polja, kjer so zvezdice, da bi bile vsote števil v vsaki vrstici, v vsakem stolpcu in v vsaki diagonali med seboj enake?

*	1	8
7	*	3
*	9	4

- (A) 11 (B) 13 (C) 15 (Č) 18 (D) ni mogoče ugotoviti
- A2 Eden od naštetih produktov ni enak drugim. Kateri?
- (A) $112 \cdot 1$ (B) $11,2 \cdot 0,1$
 (C) $112000 \cdot 0,001$ (Č) $0,00112 \cdot 10^5$
 (D) $1,12 \cdot 100$
- A3 Kateri je največji količnik, ki ga lahko izračunaš iz dveh elementov množice $\{-24, -3, -2, 1, 2, 8\}$?
- (A) -24 (B) -3 (C) 8 (Č) 12 (D) 24
- A4 V trgovini so povečali cene za 25%. Ker je bila prodaja slaba, so jih znižali na prejšnjo raven. Koliko odstotna je pocenitev?
- (A) 20 (B) 24 (C) 25 (Č) 30 (D) 35
- A5 Koliko kvadratnih (ploščinskih) enot meri ploščina paralelograma $ABCD$:



- (A) 6 (B) 8 (C) 12 (Č) 15 (D) 18
- A6 Kateri večkotnik ima petkrat toliko diagonal kot oglišč?

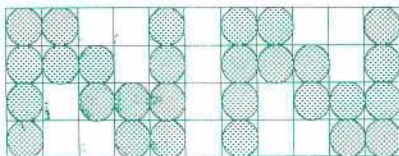
- (A) petkotnik (B) osemkotnik (C) desetkotnik
 (Č) trinajstkotnik (D) petnajstkotnik

B1 Izračunaj x , če je

$$\frac{(0,375 + \frac{2}{3}) : (\frac{1}{4} + \frac{5}{6} - 1) - (2 + \frac{1}{2})}{3 \cdot (\frac{1}{2} - 1)^2 \cdot \sqrt{0,75 - \frac{11}{36}}} : x = 10.$$

B2 Aritmetična sredina 10 različnih naravnih števil je 10. Pokaži, da največje izmed teh števil ni večje od 55.

B3 Pravokotnik iz 4×11 kvadratov delno pokrijemo s krogi, ki so vrtani kvadratom, kot kaže slika. Kolikšen del pravokotnika pokrivajo krogi? ($\pi = \frac{22}{7}$)



8. razred

A1 Vrednost izraza $\frac{1}{1 + \frac{1}{1 + \frac{1}{1 + \frac{1}{3}}}}$ je:

- (A) $\frac{1}{2}$ (B) $\frac{7}{11}$ (C) $\frac{8}{11}$ (Č) 1 (D) $\frac{11}{7}$

A2 Smerni koeficient premice, ki gre skozi točki $A(0, 2)$, $B(-1, 1)$, je

- (A) -2 (B) $\frac{1}{2}$ (C) 1 (Č) 2 (D) 3

A3 Vasi Studeno in Unec sta 9 km narazen. Na zemljevidu meri njuna razdalja 3 cm 6 mm. V kolikšnem merilu je narisana zemljevid?

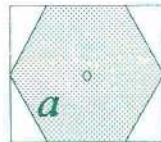
- (A) 1 : 9 (B) 1 : 9000 (C) 1 : 25000 (Č) 1 : 250000 (D) 1 : 400000

A4 Iztegnjeni kot razdelimo na polovici, polovico na tretjine, tretjino na petine, petino na šestine. Šestina petine tretjine polovice iztegnjenega kota meri

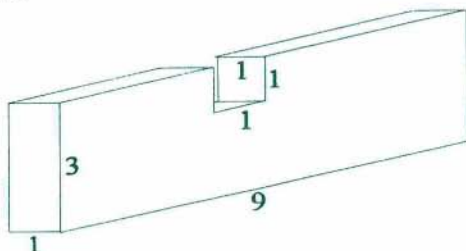
- (A) 1° (B) 2° (C) 30° (Č) $1'$ (D) $30'$

A5 Pravilnemu šestkotniku s stranico a je očrtan pravokotnik, kot kaže slika. Koliko odstotkov ploščine pravokotnika je ploščina šestkotnika?

- (A) 67% (B) 69% (C) 71%
(Č) 73% (D) 75%



- A6** Iz kvadra izrežemo enotsko kocko, kot prikazuje slika. Za koliko kvadratnih (ploščinskih) enot se površina novega telesa razlikuje od površine kvadra?



- (A) je za 2 manjša (B) je za 1 manjša (C) sta enaki
(Č) je za 1 večja (D) je za 2 večja
- B1** Za katere pare naravnih števil a in b je ulomek $\frac{a-1}{b-1}$ za 1 večji od $\frac{a}{b}$? Zapiši vsaj dva taka para.
- B2** Temperaturo lahko izrazimo v stopinjah Celzija ($^{\circ}\text{C}$), ponekod pa še uporabljajo stopinje Fahrenheita ($^{\circ}\text{F}$). Oba načina povezuje enačba $T_F = \frac{9}{5} \cdot T_C + 32$. (T_F pomeni temperaturo, izraženo v stopinjah Fahrenheita, T_C pa temperaturo, izraženo v stopinjah Celzija.)
- Koliko $^{\circ}\text{F}$ je 10°C ?
 - Koliko $^{\circ}\text{C}$ je 14°F ?
 - Iz dane enačbe izrazi T_C .
- B3** Robova osnovne ploskve kvadra sta v razmerju $3 : 1$, diagonali sosednjih stranskih ploskev pa $\sqrt{13} : \sqrt{5}$. Površina kvadra meri $49,5 \text{ cm}^2$. Izračunaj prostornino tega kvadra.

Aleksander Potočnik

IZBIRNO TEKMOVANJE IZ MATEMATIKE

Sobotnega dopoldneva 18. marca 1995 so se mladi matematiki spopadli z naslednjimi nalogami:

Prvi letnik

- Vsota števk števila $3n$ je enaka vsoti števk števila n . Pokaži, da je število n deljivo z 9.
- Za realna števila a, b, c in d velja $a < b < c < d$. Uredi po velikosti števila $x = (a+b)(c+d)$, $y = (a+c)(b+d)$ in $z = (a+d)(b+c)$.

3. V krogu s središčem S sta narisana polmera SA in SB , ki tvorita kot 120° . Tetiva MN , ki je vzporedna tetivi AB , seka SA v točki P in SB v točki R . Izračunaj polmer kroga, če veš, da je $|MP| = 2$ in $|PN| = 5$.
4. Igralci A , B in C mečejo kocko. Če pade 1 ali 2, dobi igralec A en žeton od igralca B in en žeton od igralca C , če pade 3 ali 4, dobi B po en žeton od A in C , in če pade 5 ali 6, dobi C po en žeton od A in B . Igra se konča, ko enemu od igralcev zmanjka žetonov. Ali se lahko zgodi, da zmanjka žetonov dvema igralcema hkrati, če ima igralec A na začetku 19 žetonov, igralec B 9 žetonov in igralec C 5 žetonov?

Drugi letnik

1. Ali obstajata naravni števili m in n , da je $m^m + (mn)^n = 1995$?
2. Za katero vrednost števila a sta rešitvi kvadratne enačbe

$$x^2 - 4ax + 5a^2 - 6a = 0$$

med seboj najbolj oddaljeni?

3. Dane so štiri točke v ravnini. Katerekoli tri izmed njih ležijo v krogu s polmerom 1. Dokaži, da vse ležijo v krogu s polmerom 1.
4. Izberimo točko E na stranici BC ostrokotnega trikotnika ABC in naj krožnica, očrtana trikotniku ABE , seka stranico AC v točki D . Dokaži, da leži središče trikotniku AEC očrtane krožnice na nosilki višine iz C trikotnika BCD .

Tretji letnik

1. Pokaži, da enačba $14x^2 + 15y^2 = 7^{1995}$ ni rešljiva v množici naravnih števil.
2. Pokaži, da velja neenakost

$$2 \frac{(c+d)^2}{c^2+d^2} \leq \frac{(a+b)^2}{ab},$$

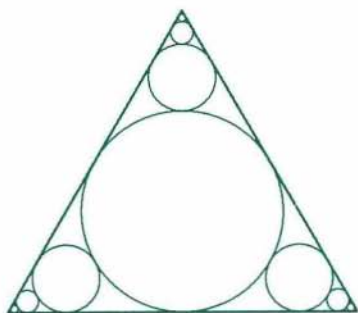
če so a , b , c in d pozitivna realna števila.

3. Dokaži, da v poljubnem trikotniku velja zveza $4t_c^2 = c^2 + 8S \operatorname{ctg} \gamma$, pri čemer t_c označuje dolžino težišnice na stranico c , S ploščino trikotnika, γ pa kot nasproti c .

4. Naj bo T presečišče diagonal konveksnega štirikotnika $ABCD$ in naj velja: $\sphericalangle TAB = \sphericalangle TBC = \frac{\pi}{6}$ in $\sphericalangle TCD = \sphericalangle TDA = \frac{\pi}{4}$. Dokaži, da imata krožnici, očrtani trikotnikoma ABC in ACD , enaka polmera.

Četrty letnik

1. Pokaži, da število $3^m + 3^n + 1$ ne more biti popolni kvadrat za noben par naravnih števil m in n .
2. Funkcija $f: \mathbb{R}^+ \rightarrow \mathbb{R}^+$ preslika množico pozitivnih realnih števil vase. Pri tem velja $f(xf(y)) = x^p y^q$, kjer sta p in q naravni števili. Pokaži, da je $q = p^2$.
3. Naj bodo vsi koeficienti polinoma p cela števila. Dokaži: Če obstaja naravno število k , ki ne deli nobenega izmed števil $p(1), p(2), \dots, p(k)$, potem polinom nima celoštevilskih ničel.
4. V enakostranični trikotnik včrtamo neskončno mnogo krogov, kot kaže skica. Kolikšen del ploščine trikotnika pokrijejo krogi?



Matjaž Željko

NALOGE S PREDTEKMOVANJA ZA LETO 1994/1995 IZ SREDNJEŠOLSKE FIZIKE

Tekmovanje je 8.4.1995 potekalo istočasno na osmih srednjih šolah po posameznih regijah. Sodelovalo je okrog 1000 dijakov iz 50 srednjih šol. Po 30 najboljših iz vsake skupine se je potem udeležilo državnega tekmovanja.

Skupina A

1. Vesoljska ladja Enterprise, ki se oddaljuje od Zemlje s hitrostjo $3,00 \cdot 10^3$ km/s, je $1,00 \cdot 10^9$ km oddaljeni Zemlji poslala signal, da se ji s hitrostjo $1,00 \cdot 10^3$ km/s približuje sovražni satelit, ki je od nje oddaljen $2,60 \cdot 10^7$ km. Na Zemlji so takoj, ko so sporočilo sprejeli, poslali signal, naj se ladja umakne. Ali je ukaz prišel pravočasno? Signal potuje s

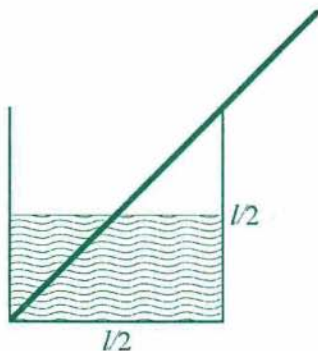
hitrostjo $3,00 \cdot 10^5$ km/s. Odgovor utemelji z računom! Gibanje Zemlje je zanemarljivo, vse hitrosti so podane glede na Zemljo. Ladja in satelit se gibljeta po isti premici.

2. Voznik 800 kilogramskega avtomobila se pelje po neznani cesti in nenadoma zagleda pred seboj prepad. S kolikšno silo naj pritisne na zavorni pedal, da se bo čim hitreje ustavil, če prijemljejo zavore povsem enakomerno? Povečanje tlaka v zavornem sistemu za 1 bar pomeni dodatni navor 100 Nm na avtomobilsko kolo. Premer pnevmatike je 55 cm, premer valjastega bata pod zavornim pedalom pa 1,5 cm. Koeficient trenja med kolesi in cesto je enak 0,80, koeficient lepenja pa 0,90. Predpostavi, da so tudi med zaviranjem vsa štiri kolesa enako obremenjena, in zanemari maso koles.

3. S kolikšne višine se sme človek z maso 60 kg togo in sonožno spustiti na tla, ki se pri tem ugreznejo za 5,0 cm, da se mu nožna kost pri tem ne zdrobi? Prečni presek nožne kosti je $4,0 \text{ cm}^2$, prožnostni modul je $1,0 \cdot 10^{10} \text{ N/m}^2$, kost pa se lahko brez poškodbe stisne največ za 0,10 %. Pri tem skoku mišice in sklepi sunka ne ublažijo. Ugrezanje obravnavaj kot enakomerno pospešeno gibanje.

Fizikalni poduk: Če se telo giblje enakomerno pospešeno, je rezultanta sil na telo enaka produktu mase telesa in pospeška ter kaže v smeri pospeška.

4. Kos tanke homogene žice z dolžino l , prečnim presekom S in maso m damo v valjast kozarec, ki je do polovice napolnjen z vodo. Gostota vode je ρ_0 . Dimenzije kozarca so prikazane na sliki. Nariši sile na žico! Z danimi splošnimi podatki izrazi silo, s katero deluje palica na zgornji rob kozarca?



Skupina B

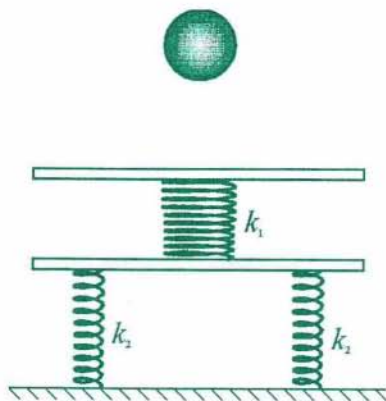
1. Na vrtljivem stojalu je v osi pritrjen vodni top, iz katerega izteka voda s hitrostjo 10 m/s pod kotom 15° glede na vodoravnico. Top se enakomerno vrti okrog navpične osi s frekvenco 0,50 Hz. Vodo iz topa lovimo v posodo, ki je z vodoravno palico pritrjena na isto stojalo kot top. Posoda in ustje vodnega topa sta v isti vodoravni ravnini. Kako

dolga mora biti palica in kako mora biti usmerjen vodni top (kot med palico in projekcijo topa na vodoravno ravnino), da v posodo ulovimo vso vodo? Upor zraka zanemari.

2. Preko škripca, ki je pritrjen na višini 20 m, sta s 35 m dolgo lanko neraztegljivo vrvjo povezani dve lahki vedri. V enem vedru je krogla, v drugega pa z višine 7,0 m nad tlemi spustimo drugo kroglo, ki ostane v vedru. Masa druge krogle je enaka polovici mase prve. Za koliko se dvigne vedro s težjo kroglo?

3. Avtomobil z maso 1200 kg vozi enakomerno po ravni cesti s hitrostjo 100 km/h. Sila zračnega upora je podana z $F = Cv^2$, pri čemer je $C = 0,40 \text{ N s}^2/\text{m}^2$ in v hitrost avtomobila. Koeficient trenja med cesto in avtomobilom pa je 0,015. Kolikšna je poraba goriva (v litrih na 100 prevoženih kilometrov) pri tej hitrosti? Ko zgori liter goriva se sprosti 40 MJ energije. Izkoristek motorja je 0,15. Za koliko odstotkov se poveča poraba goriva, če vozi avto z isto hitrostjo v klanec z naklonom $2,0^\circ$?

4. Lahka prožna vzmet s koeficientom $k_1 = 10 \text{ N/cm}$ je na obeh straneh pritrjena na lahki plošči. Spodnja plošča je z dvema lahkima prožnima vzmetema s koeficientoma $k_2 = 20 \text{ N/cm}$ pritrjena na tla. Z višine 30 cm nad zgornjo ploščo spustimo togo kroglo z maso 1,0 kg, tako da pade na sredino zgornje plošče. Največ za koliko se premakne navzdol zgornja in za koliko spodnja plošča?

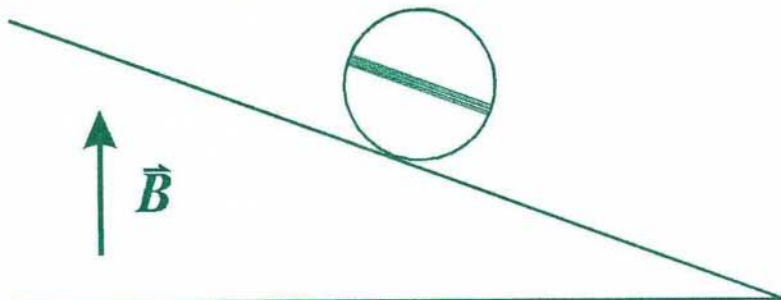


Skupina C

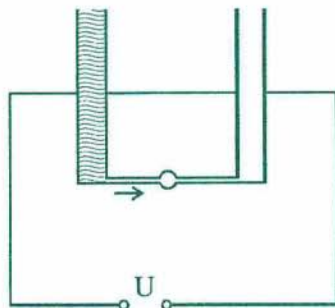
1. Električne jegulje imajo poseben sistem za generiranje visoke napetosti. S tem sistemom lahko ubijejo ali omrtvičijo žrtev. Sistem je sestavljen iz 140 tankih trakov, ki se raztezajo od glave do repa. V vsakem traku je 5000 posebnih električnih celic, nameščenih druga za drugo. Vsaka celica ima gonilno napetost 0,15 V, njen upor pa je 0,25 Ω . Kolikšen tok lahko teče skozi vodo med repom in glavo, če je upor vode 800 Ω ? Kolikšen tok pa teče skozi posamezne celice v jegulji?

2. Razmik med ploščama ploščatega kondenzatorja je 1,0 cm. Priključen je na napetost 7,0 kV, plošči pa sta postavljeni navpično. V kondenzator vtaknemo dva kovinska lističa; vsak ima maso 50 mg in ploščino $1,0 \text{ cm}^2$. Lističa staknemo, ju razmaknemo, nato pa enega vzamemo iz kondenzatorja. Listič, ki ga še držimo v kondenzatorju, se nam po nerodnosti izmuzne iz držala. Za koliko se listič spusti, preden pade na eno od plošč, če se nam je izmuznil na sredini kondenzatorja? Držalo, s katerim držimo kovinska lističa, je neprevodno. Influenčna konstanta je $8,9 \cdot 10^{-12} \text{ As/Vm}$.

3. Lesen valj z maso 0,25 kg in dolžino 0,10 m je na klancu z naklonskim kotom 30° . Na valj je navita tuljava z 10 ovoji, tako kot kaže slika, ves sistem pa se nahaja v homogenem navpičnem magnetnem polju z gostoto 0,50 T. Da se valj ne bi zakotalil po klancu, ga držimo s prstom v takem položaju, da je ravnina ovojev vzporedna z naklonsko ploskvijo, in hkrati počasi povečujemo tok skozi tuljavo. Pri katerem toku lahko valj spustimo in ta ostane v danem položaju? Na sliki nariši, kakšna mora biti v tem primeru smer toka. Za kolikšen kot pa se valj zavrti, če počasi povečamo tok na dvakratno vrednost? Koeficient lepenja med valjem in klancem je tako velik, da valj po klancu ne more zdrsniti.



4. Dva enaka kondenzatorja sta zvezana zaporedno in prikjučena na napetost 10 V. Plošči kondenzatorja, ki imata kvadratno obliko s ploščino $1,0 \text{ dm}^2$, sta razmaknjeni za 10 mm. Na začetku je prvi kondenzator napolnjen z dielektrično tekočino ($\epsilon = 56$), drugi pa je prazen. Potem začnemo enakomerno črpati tekočino po neprevodni ozki cevki (zanemarljive prostornine), ki povezuje oba kondenzatorja. Volumski pretok skozi cev je



enak $1,0 \text{ cm}^3/\text{s}$. Izračunaj naboj na sistemu kondenzatorjev po 10 s od začetka črpanja! Kolikšen pa je med črpanjem največji naboj na sistemu kondenzatorjev? Influenčna konstanta je $8,9 \cdot 10^{-12} \text{ As/Vm}$.

Skupina D

1. Daleč proč od ostalih teles z večjo maso imamo dve homogeni okrogli vesoljski postaji z masama $3,0 \cdot 10^{15} \text{ kg}$ in $5,0 \cdot 10^{15} \text{ kg}$ in radijema 7100 m in 8400 m v medsebojni razdalji med središčema 30 km. Najmanj s kolikšno hitrostjo moramo vreči telo s površja manjše vesoljske postaje, da bo še prišlo do druge postaje? Postaji ves čas mirujeta.

Fizikalni poduk: Potencialna energija telesa z maso m v okolici okroglega homogenega telesa z maso M v razdalji r od središča je enaka

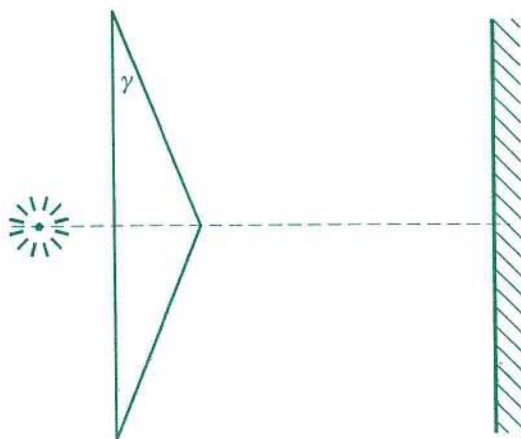
$$W_p = -\frac{\kappa M m}{r},$$

kjer je $\kappa = 6,7 \cdot 10^{-11} \text{ Nm}^2/\text{kg}^2$.

2. Podjetni avtomobilisti zgradijo krožno avtomobilsko cesto s polmerom 230 m, nagnjeno navznoter za $10,0^\circ$ glede na vodoravnico. V avtu, ki vozi s stalno hitrostjo po tej cesti, je pritrjeno sekundno nihalo (dolžina tega matematičnega nihala je taka, da je nihajni čas na Zemlji 1,00 s), s katerim voznik meri čas. Cesta je ledena, avto pa vozi s tako hitrostjo, da ga ne zanaša ne levo ne desno. Izračunaj razliko med hitrostjo, ki jo določi voznik iz časa, izmerjenega z nihalom, in pravo hitrostjo!

3. Plošči ploščatega kondenzatorja ležita vodoravno (negativno nabita plošča spodaj) in sta med seboj oddaljeni 15 cm. V sredini med ploščama je vodoravna os, na katero pritrdimo 10 cm dolgo lahko neprevodno palčko. Pritrjena je v sredini in vrtljiva okoli vodoravne osi. Na konca palčke pritrdimo majhni neprevodni kroglici. Masa posamezne kroglice je 5,0 g. Ena kroglica je nabita z nabojem $+1,0 \cdot 10^{-5} \text{ As}$. S kolikšnim nabojem mora biti nabita druga kroglica, da je sila na os enaka nič? S kolikšno frekvenco sistem zaniha, če eno od kroglic rahlo sunemo? Napetost na kondenzatorju je 750 V.

4. Točkast izvor rdeče svetlobe z valovno dolžino 620 nm je oddaljen 5,0 mm od tanke steklene Fresnelove biprizme, kot kaže slika. Kot γ v prizmi je $0,030 \text{ rad}$. Izračunaj razdaljo med dvema zaporednima rdečima progama na 200 cm oddaljenem zaslonu! Lomni kvocient stekla je 1,5.



Fizikalni poduk: Pomagaj si z dejstvom, da imajo žarki po prehodu skozi prizmo tak potek, kot da bi izvirali iz dveh navideznih izvorov.

Matematični poduk: Za majhne kote velja $\sin \gamma \approx \tan \gamma \approx \gamma$, $\cos \gamma \approx 1$, za majhen x pa: $\sqrt{1+x} \approx 1 + \frac{1}{2}x$.

Ciril Dominko, Jure Bajc

PRESEK

list za mlade matematike, fizike, astronome in računalnikarje

23. letnik, šolsko leto 1995/96, številka 2, strani 65 – 128

UREDNIŠKI ODBOR: Vladimir Batagelj, Tanja Bečan (jezikovni pregled), Dušica Boben (oblikovanje teksta), Vilko Domajnko, Roman Drnovšek (novice), Darjo Felda (tekmovanja), Bojan Golli, Marjan Hribar, Boštjan Jaklič (tehnični urednik), Martin Juvan (računalništvo), Sandi Klavžar, Boris Lavrič, Andrej Likar (fizika), Matija Lokar, Bojan Magajna (glavni urednik), Franci Oblak, Peter Petek, Marijan Prosén (astronomija), Marjan Smerke (svetovalec za fotografijo), Miha Štalec, Jana Vrabec (nove knjige), Marija Vencelj (matematika, odgovorna urednica).

Dopisi in naročnine: Društvo matematikov, fizikov in astronomov Slovenije – Podružnica Ljubljana – Komisija za tisk, Presek, Jadranska c. 19, 61111 Ljubljana, p.p. 64, tel. (061) 1232-460, št. ŽR 50106-678-47233. Naročnina za šolsko leto 1995/96 je za posamezne naročnike 1.250 SIT, za skupinska naročila šol 1.000 SIT, posamezna številka 250 SIT, za tujino 25.000 LIT, devizna nakazila SKB banka d.d. Ljubljana, val-27621-42961/9, Ajdovščina 4, Ljubljana.

List sofinancirata MZT in MŠŠ

Ofset tisk DELO – Tiskarna, Ljubljana

Po mnenju MZT št. 415-52/92 z dne 5.2.1992 šteje revija med proizvode iz 13. točke tarifne št. 3 zakona o prometni davku, za katere se plačuje 5% davek od prometa proizvodov.

© 1995 Društvo matematikov, fizikov in astronomov Slovenije – 1259

**PRVA
SLOVENSKA
ASTRONOMSKA
REVIJA**

Spika



**VSAK MESEC NOVA, BARVNA ŠTEVILKA REVije ZA LJUBITELJE ASTRONOMIJE,
KI PRINAŠA NOVICE, VSE O SONCU, PLANETIH, ZEMLJI, ZVEZDAH,
GALAKSIJAH, ASTROFIZIKI, KOZMOLOGIJI, ASTRONAVTIKI,
ASTROFOTOGRAFIJI, ARHEOASTRONOMIJI...
ZA AMATERJE MESEČNO SVEŽE EFEMERIDE IN ZVEZDNA KARTA,
O TELESKOPIH, UPORABNIH PROGRAMIH...
IN ŠE OSNOVE ZA ZAČETNIKE, RAZISKOVALNI KOTIČEK, TESTI,
ZNANSTVENA FANTASTIKA, MALI OGLASI TER NAGRADNA IGRA!**

Revijo naročajte na naslov: Spika, Poštni predal 9, 61109 Ljubljana. Četrtletna naročnina (15% popusta) je 1070,00 SIT, polletna naročnina (20% popusta) je 2015,00 SIT, celoletna naročnina (25% popusta) je 3780,00 SIT.

