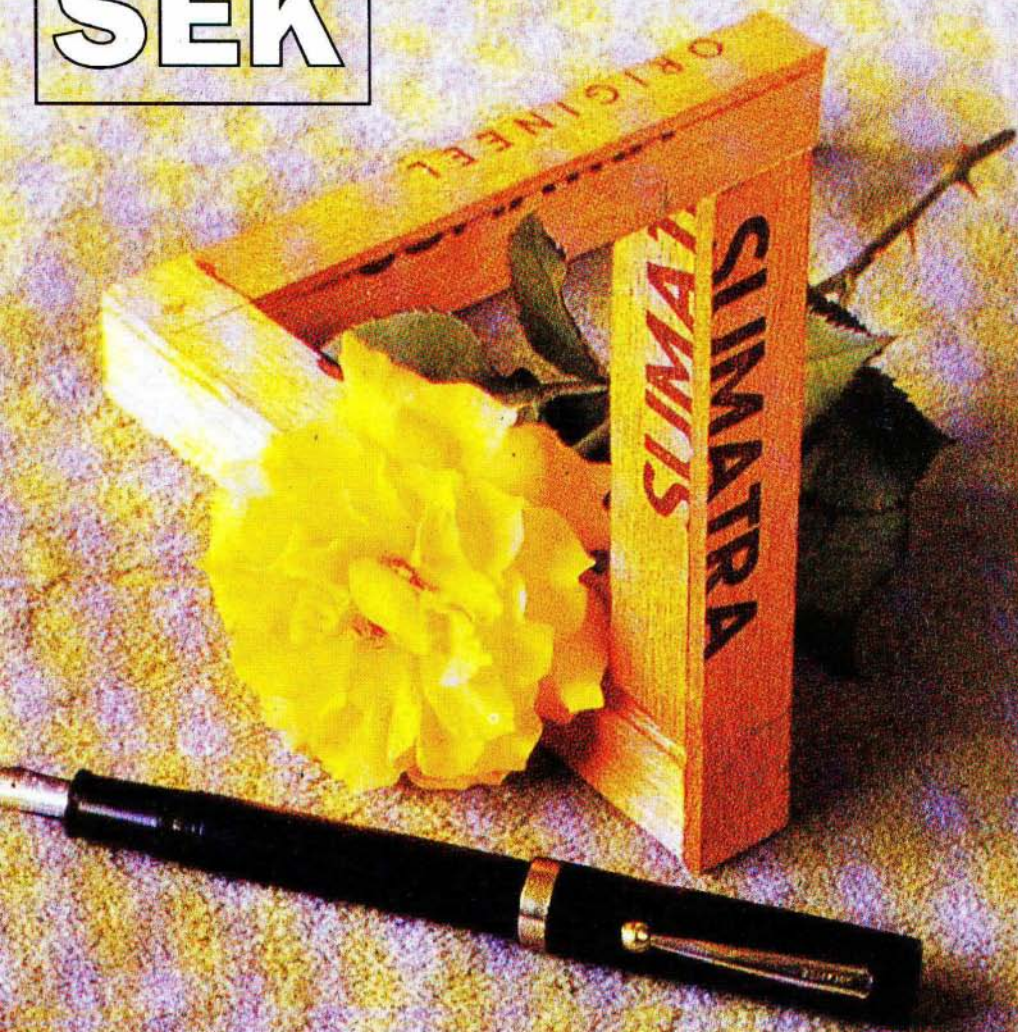


PRE SEK

1



ISSN 0351-6652

DRUŠTVO MATEMATIKOV, FIZIKOV IN ASTRONOMOV SLOVENIJE, 23(1995-1996)

PRESEK

list za mlade matematike, fizike, astronome in računalnikarje
23. letnik, leto 1995/96, številka 1, strani 1-64

VSEBINA

MATEMATIKA	Na obisku pri Barbari (Janez Žerovnik) 2-4 Množenje za tiste, ki poznajo le poštevanke števila 2 (Mirko Dobovišek) 30-31 Geometrijska in harmonična vrsta (Anton Cedilnik) .. 40-45
FIZIKA	Prvi parni stroji (Janez Strnad) 5-11 Presenetljivi prikaz popolnega notranjega odboja (Tilka Jakob) 26-29
ASTRONOMIJA	Nos (Marijan Prosen) 20-22
RAČUNALNIŠTVO	O preslikavah ravnine, praproti in stiskanju podatkov (Matija Lokar) 34-38
TEKMOVANJA	Lepi uspehi slovenskih dijakov na olimpiadah iz matematike, fizike in računalništva 46 31. tekmovanje za Zlato Vegovo priznanje v šolskem letu 1994/95 (Aleksander Potočnik) 47-48 10. državno tekmovanje iz znanja računalništva za osnovnošolce (Ivan Gerlič) 48-50 Državno tekmovanje osnovnošolcev iz fizike za Zlata Stefanova priznanja 1994/1995 (Jelisava Sakelšek) 50-52 39. matematično tekmovanje srednješolcev Slovenije (Matjaž Željko) 52-54 33. tekmovanje iz srednješolske fizike (Ciril Dominko) 54-57 Tekmovanje iz računalništva za srednješolce (Marko Grobelnik) 57-59 16. mednarodno matematično tekmovanje mest - pomladanski krog - rešitve iz XXII, P-6, str. 374 (Matjaž Željko) 59-64
NALOGE	Čakanje na avtobus - nagradna naloga (Marija Vencelj) .. 1 Deljivost (Marija Vencelj) 4 Trikotniki s posebno lastnostjo (Ivan Vidav) 19 Manjkajoče število (Martin Juvan) 25 Iz družinske kronike (Marija Vencelj) 29 Slamica (Matjaž Vencelj) 31 Devet vprašanj o širokih številih (Martin Juvan) 39 Na koliko načinov se policist lahko zmoti (Anton Suhadolc) 45 Penrose - Escher - Reuteswärd (Vilko Domajnko) 12-19 Križanka Starogrški matematiki (Marko Bokalič) 32-33 Željko M. s sodelavci, Altius, citius, fortius (Marija Vencelj) 46
ZANIMIVOSTI RAZVEDRILO NOVE KNJIGE	Quantum in Kvant (Janez Strnad) 22-25 Fotografija nemogočega predmeta (Bruno Ernst, 1985) - glej tudi prispevek na strani 12 I Moč - pesem Marka Budiše, študenta fizike IV
NOVICE NA OVITKU	

ČAKANJE NA AVTOBUS – NAGRADNA NALOGA

Klemen in Tilen sta že deveto leto sošolca. Potem ko sta osem let hodila v šolo v sosednji ulici, se morata po novem vsak dan voziti z avtobusom nabirat srednješolsko učenost na nasprotni konec mesta. Vsako jutro se kake pol ure pred začetkom pouka dobita na bližnji avtobusni postaji in se nato z eno od obeh linij, ki vozita v željeno smer, odpeljeta v šolo.

Z avtobusi in profesorji pa je križ. Medtem ko prvih, ko si najbolj pozen, od nikoder ni, pri drugih zamuda avtobusa ni utemeljen razlog za zamudo pri pouku.

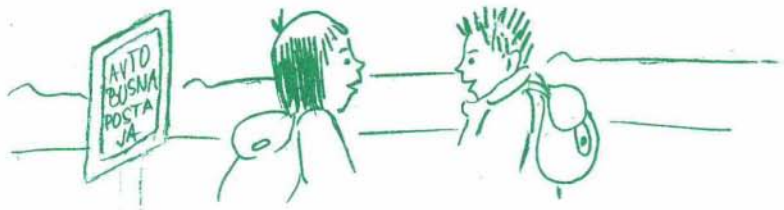
Ko sta se tako naša prijatelja neko jutro spet zaman ozirala po cesti za avtobusom, se jima je porodilo vprašanje, koliko je pravzaprav na njuni domači postaji povprečna čakalna doba na avtobus. Na postajni tabli je pisalo, da vozijo avtobusi prve proge vsakih šest minut, avtobusi druge proge pa na osem minut.

Klemen je pohitel z računom: "Če bi vozili le avtobusi prve proge, bi bila povprečna čakalna doba enaka $\frac{1}{2} \cdot 6 \text{ minut} = 3 \text{ minute}$, če bi vozili le avtobusi druge proge pa $\frac{1}{2} \cdot 8 \text{ minut} = 4 \text{ minute}$. Ker pa se lahko odpeljeva z eno ali drugo linijo, je povprečna čakalna doba enaka $\frac{1}{2} \cdot (3 + 4) \text{ minute} = 3\frac{1}{2} \text{ minute}$."

Tilen je ugovarjal: "Ne, to ne bo prav. Drugače morava računati. Najmanjši skupni večkratnik števil 6 in 8 je 24. Vsakih 24 minut pripeljejo mimo štirje avtobusi prve proge in trije avtobusi druge proge. Skupaj pripelje torej mimo v 24 minutah sedem avtobusov, kar pomeni, da mine med dvema zaporednima prihodoma avtobusov v povprečju $\frac{1}{7} \cdot 24 \text{ minut} = 3\frac{3}{7} \text{ minute}$. Povprečna čakalna doba je enaka polovici tega časa, torej $\frac{1}{2} \cdot 3\frac{3}{7} \text{ minute} = 1\frac{5}{7} \text{ minute}$."

Kateri od obeh prijateljev ima prav? Utemeljene odgovore pošljite najkasneje do 15. oktobra na Uredništvo Preseka, Ljubljana, Jadranska 19, p.p. 64. Na dva izžrebana reševalca s pravilnima odgovoroma čakata zanimivi kujigi.

Marija Vencelj



NA OBISKU PRI BARBARI

V nedeljo smo bili na družinskem obisku pri prijateljih. Prav gotovo vas zanima, kaj smo dobrega pojedli in popili, pa vas bom razočaral. Petošolka Barbara in njen oče sta mi pokazala zanimivo matematično nalogo. Pravzaprav je nalogo iz šole prinesla Barbarina sestra Alenka, ki je že gimnazijka, ampak Barbara se kljub temu ves čas ni ganila od mize. Takole je pisalo:

$$15732_{[8]} = x_{[6]}.$$

Drugače povedano: Število, dano v osmiškem številskem sistemu, zapiši v šestiskem številskem sistemu. Seveda smo nalogo znali rešiti, zanimalo pa nas je, če je res potrebno osmiško številko pretvoriti najprej v desetiško in to potem v šestiško, ali pa gre morda hitreje.

Odgovor je seveda pritrdilen, saj vemo, da desetiški številski sistem ni nič bolj 'naraven' od ostalih. Res je, da imamo deset prstov na rokah. Prav toliko so jih imeli tudi Babilonci, pa so vseeno uporabljali šestdesetiški sistem. Osnova 60 se je do danes ohranila pri merjenju časa, povsod drugje je prevladal desetiški številski sistem. (O zgodovini matematike, tudi o začetkih številskih sistemov, si lahko preberete več v knjigi Matematika skozi kulture in epohe Vladimirja Devideja iz knjižnice Sigma.) Poleg dandanes prevladujočega desetiškega sistema v računalništvu veliko uporabljajo tudi dvojiški (ali binarni) in njegova 'bratranca', osmiški in šestnajstiški številski sistem.

Torej smo se lotili dela. Osmiška številka $a_k a_{k-1} \dots a_2 a_1 a_0$ je zapis števila

$$a_k 8^k + a_{k-1} 8^{k-1} + \dots + a_2 8^2 + a_1 8 + a_0.$$

Torej je treba števila, ki nastopajo v gornjem izrazu, najprej zapisati v šestiskem zapisu, potem pa jih zmnožiti in sešteti (pozor!) 'po šestiško'. To pomeni, da je treba računati v šestiskem številskem sistemu.

Poskusimo z gornjo nalogo.

Najprej si pripravimo zapise potenc osnove 8:

$$8 = 12_{[6]}$$

$$8^2 = 64_{[10]} = 144_{[6]}$$

$$8^3 = 512_{[10]} = 2212_{[6]}$$

$$8^4 = 4096_{[10]} = 30544_{[6]}$$

Zdaj pa zapišimo v šestiškem zapisu še števke $a_0, a_1, \dots, a_4$: $a_0 = 2_{[8]} = 2_{[6]}$, $a_1 = 3_{[8]} = 3_{[6]}$, $a_2 = 7_{[8]} = 11_{[6]}$, $a_3 = 5_{[8]} = 5_{[6]}$, $a_4 = 1_{[8]} = 1_{[6]}$ in jih po šestiško pomnožimo z ustreznimi potencami osnove 8.

$$a_0 = 2_{[6]}$$

$$a_1 8 = 3_{[6]} 12_{[6]} = 40_{[6]}$$

To gre po šestiško takole: 3 krat 2 je $6_{[10]} = 10_{[6]}$, zapišemo 0, 1 dalje; 3 krat 1 je 3 in 1 je 4 (tako v desetiškem kot šestiškem sistemu).

$$a_2 8^2 = 11_{[6]} 144_{[6]} = 2024_{[6]}$$

$$a_3 8^3 = 5_{[6]} 2212_{[6]} = 15504_{[6]}$$

$$a_4 8^4 = 1_{[6]} 30544_{[6]} = 30544_{[6]}$$

Po šestiško seštejmo!

$$2_{[6]} + 40_{[6]} + 2024_{[6]} + 15504_{[6]} + 30544_{[6]} = 53002_{[6]}$$

Za kontrolo lahko naredimo račun po starem: Zapišemo $15732_{[8]} = 7130_{[10]}$ in delimo: $7130 : 6 = 1188$ z ostankom 2, $1188 : 6 = 198$ z ostankom 0, $198 : 6 = 33$ z ostankom 0, $33 : 6 = 5$ z ostankom 3. Lahko rečemo še $5 : 6 = 0$ z ostankom 5, zberemo ostanke in sklenemo: $7130 = 53002_{[6]}$.

Osnovi 8 in 6 nista nič posebnega. Prav tak postopek kot prej lahko naredimo za poljuben par številskih sistemov, recimo z osnovama p in q . Naloga je sedaj splošnejša: Dano imamo število, zapisano v p -iškem številskem sistemu s števki $a_k \dots a_1 a_0$, želimo ga zapisati v q -iškem številskem sistemu. Naredili bomo takole:

1. Zapišemo $p^0, p^1, p^2, \dots, p^k$ v q -iškem sistemu.
2. Zapišemo $a_k, \dots, a_1, a_0$ v q -iškem sistemu.
3. Zmnožimo $a_1 p, a_2 p^2, \dots, a_k p^k$ v q -iškem sistemu.
4. Seštejemo $a_0 + a_1 p + a_2 p^2 + \dots + a_k p^k$ v q -iškem sistemu.

Za konec še dve opombi.

Če kak par osnov uporabljamo večkrat, je boljše zapise potenc preračunati vnaprej in jih hraniti v tabeli. Potem delo pri točki 1 naredimo samo prvič.

Za nekatere pare osnov p in q je račun še precej preprostejši. Vzemimo na primer $p = 4$, $q = 2$. Vsaka števka v štiriškem zapisu da dve števki v dvojiškem zapisu.

$$\text{Primer: } 31203_{[4]} = \underbrace{11}_{[2]} \underbrace{01}_{[2]} \underbrace{10}_{[2]} \underbrace{00}_{[2]} \underbrace{11}_{[2]}$$

Če pa vzamemo $p = 2$ in $q = 4$, po dve števki dvojiškega zapisa določita števko v štiriškem zapisu.

$$\text{Primer: } 111011001_{[2]} = \underbrace{1}_{[2]} \underbrace{11}_{[2]} \underbrace{01}_{[2]} \underbrace{10}_{[2]} \underbrace{01}_{[2]} = 13121_{[4]}$$

Verjetno ste že uganili, da tako preprosta zveza velja, kadar je p potenca q ali ko je q potenca p . Za bistre glave, ki jih $\star$ -iški številski sistemi še niso povsem utrudili, pa še naloga: Poiščite bližnjico za prepis iz p -iškega številskega sistema v q -iški številski sistem, če sta p in q potenci z isto osnovo, na primer $p = r^i$ in $q = r^j$!

Janez Žerovnik

**PRI NASTAJANJU PRESEKA POMAGAJO S
PROGRAMSKO OPREMO PODJETJA:
MARAND, MARMIS IN SKUPINA ATLANTIS**

DELJIVOST

Pokaži, da je število, ki ima v desetiškem zapisu številko

$$\underbrace{10 \ 10 \ 10 \ \dots \ 10}_{26\text{--krat}} 1,$$

deljivo s 27, število s številko

$$\underbrace{10 \ 10 \ 10 \ \dots \ 10}_{80\text{--krat}} 1$$

pa deljivo z 81.

Marija Vencelj

PRVI PARNI STROJI

Proti koncu 17. stoletja se je v Angliji pojavila potreba po strojih z večjo močjo od tistih, ki so jih poganjali ljudje, konji ali mlinska kolesa. Predvsem so jih potrebovali za črpanje vode iz vse globljih rudnikov. Ta praktična potreba je pripeljala do novih spoznanj. Pravijo, da dolguje fizika parnemu stroju več kot parni stroj fiziki.

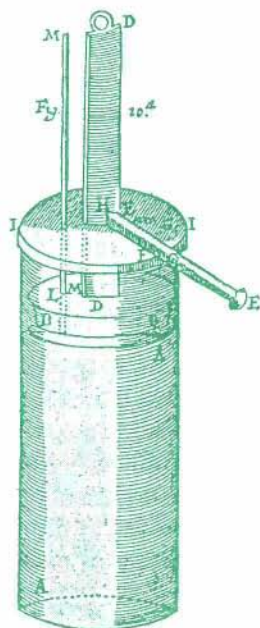
Zgodbo začnimo s Christianom Huygensom, ki so ga v Parizu povprašali, ali bi bilo mogoče s strojem črpati vodo v vodovod za versajske vodomete. Leta 1673 je namreč razmišljal o stroju na smodnik, a je zamisel opustil kot prenevarno. Vprašanje je postavil mlajšemu sodelavcu Denisu Papinu, ki je bil spreten eksperimentator. Njegov dobri glas je segel do Roberta Boyla, ki ga je leta 1675 povabil kot pomočnika v London, preden je lahko odgovoril na Huygensovo vprašanje. V Londonu je Papin leta 1679 izumil tlačni lonec, v katerem je bilo mogoče kuhati v vodi pri višjem tlaku pri temperaturi nad 100°C .

Tedaj so že vedeli, da kapljevina izpareva pri temperaturi, to je pri vrelišču, ki je zanjo značilna, in da je vrelišče odvisno od tlaka. Papin je zares ugotovil, da vre voda v loncu pri višjem tlaku pri višji temperaturi, in približno določil odvisnost vrelišča vode od tlaka. Lonce je imel tudi varnostno zaklopko, ki je preprečevala, da bi tlak v njem preveč narastel. Pri višji temperaturi so se jedi skuhale hitreje in so se živila bolj zmehčala. Zaradi tega odkritja je bil Papin izvoljen v Kraljevo družbo, angleško akademijo znanosti. Ob tej priliki je članom družbe postregel s kosilom, ki ga je skuhal v svojem loncu.

Leta 1690, ko je delal v Marburgu, je Papin v članku *Nov način, kako dobiti znatne gonilne sile po nizki ceni* opisal "prvi stroj, ki lahko s silo ognja dviga vodo". Pri tem se je oprl na Huygensovo zamisel in na poskuse magdeburškega župana Otta von Guerickeja. Temu je zračni tlak dvignil bat z bremenom, ko je iz valja nad batom z zračno razredčevalko izčrpal večji del zraka. Izkušnje s tlačnim loncem so Papina napeljale na misel, da je mogoče silo pare uporabiti za opravljanje dela.

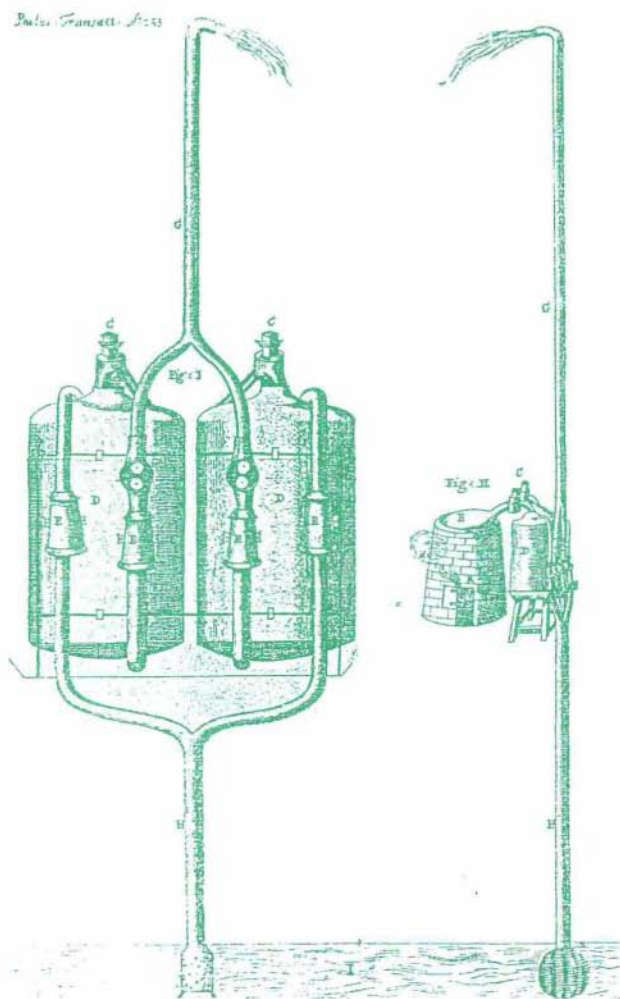
V stroju je Papin s paro dosegel znižani tlak. V valj z batom je uvedel paro pri tlaku, ki ni bil znatno višji od zračnega tlaka. Potem je zunanost valja obilil s hladno vodo, da se je para v valju utekočinila. V valju je nastal znižani tlak in razlika zračnega tlaka na zunanjo stran bata in znižanega tlaka v notranjosti je dvignila bat (slika 1). Osem let pozneje je izdelal še parni stroj na zvišan tlak, ki pa ni vplival na nadaljnji razvoj. Mislił ga je vgraditi v ladjico, toda nezaupljivi čolnarji so jo uničili.

Slika 1. Risba Papinove črpalke na znižani tlak iz članka v reviji *Acta eruditorum* leta 1690. V valju A se je gibal bat B, ki je bil povezan z drogom M. Valj je bil obešen v D in po cevi E je dotekala vanj para pod tlakom, ki je bil malo višji od zračnega. Para se je utekočinila, ko so valj obliili s hladno vodo, in zmanjšani tlak nad batom je posrkal bat navzgor.



Na angleške potrebe po črpalkah se je odzval Thomas Savery. Kot izumitelj je bil član Kraljeve družbe in je njenim članom leta 1699 predvajal črpalko, ki jo je patentiral leto poprej. Za razliko od Papinove ni imela bata. Najprej je para pod visokim tlakom stisnila vodo iz posode skozi navpično cev navzgor (slika 2). Nato so posodo ohladili, da se je para v njej utekočinila in je nastali znižani tlak posrkal vodo po navpični cevi iz spodnjega rezervoarja. Zaklopke, ki so urejale tok pare in vode, so vključevali ročno. Savery je zagotavljal, da bodo njegove črpalke poceni črpale vodo iz rudnikov in da se bo angleško rudarstvo močno razmahnilo. Glede tega se je motil. Črpalke v rudnikih niso mogli uporabljati. Potrebno bi bilo namreč paro pri tlaku več barov, česar pa v tistem času še niso obvladali. Uporabljali so jih le za črpanje vode v stavbe in v rezervoarje za vodomete pri višinski razliki manj kot deset metrov. Za ta primer je namreč zadostovala para pod tlakom, le malo večjim od zračnega tlaka. Vseeno je Saveryjeva črpalka poganjala prve vrteče se stroje okoli leta 1750: vodo so črpali v rezervoar v višini kakih 5 metrov in z njo poganjali mlinška kolesa. Saveryjeve črpalke kljub izdatni uporabi ni veliko prispevala k razvoju parnega stroja.

Pomembnejši korak je naredil Thomas Newcomen. O njegovi izobrazbi je mogoče le ugibati, a zdi se, da sta si on in njegov pomočnik John Cawley vsaj z izkušnjami pridobila veliko spretnost. Celo poročilom njunih sodobnikov ni mogoče zaupati, saj najdemo med njimi tudi neverjetne zgodbe. Tako naj bi na primer samodejne zaklopke iznašel fant, ki bi moral ročno uravnavati zaklopke pri črpalci, pa je v tem času raje odhajal loviti ribe. Prva Newcomnova črpalka, ki so jo postavili leta 1712 v okolici Birminghama, je dobila dokončno obliko 5 let pozneje. Naslednjih petdeset let so jo izpopolnjevali, ne da bi spremenili zasnovo.



Slika 2. Risba Saveryjeve črpalke iz knjižice *Rudarjev prijatelj* iz leta 1702. Iz parnega kotla B nad kuriščem A je pritekla para pod dokaj visokim tlakom v valja D in je vodo iz njiju skozi notranji zaklopki in zgornji navpični cevi G iztisnila na prosto (ob zaprtih zunanjih zaklopkah E). Nato so oblili valja s hladno vodo, da se je para utekočinila. Znižani tlak je skozi zunanji zaklopki E in spodnji navpični cevi posrkal vodo navzgor po cevi H v valja (ob zaprtih notranjih zaklopkah E).

Newcomnova črpalka je tako kot Papinova imela v valju bat. Zanj je bil poleg samodejno delujočih zaklopk značilen delovni vzvod v obliki jarma. Na eni strani je bil nanj z verigo pritrjen bat, na drugi pa težki drog črpalke. V valj so skozi zaklopko uvedli paro pri tlaku, ki je bil malo višji od zračnega tlaka, iz parnega kotla pod valjem. Ob tem se je zaradi svoje teže drog spustil in to je dvignilo bat. Nato so v valj skozi drugo zaklopko vbrizgali hladilno vodo (slika 3). Tlak pod batom se je znižal na kako polovico zračnega tlaka in zračni tlak na zgornji del bata je bat pognal navzdol in dvignil drog skupaj z vodo. Tako je naprava posnemala delovanje črpalk z vzvodom, s kakršnimi pogosto dvigajo vodo iz vodnjakov. Take črpalke vidimo še danes v filmih z naftnih polj jugozahodnega dela ZDA, le da je v njih elektromotor nadomestil parni stroj. Newcomnov parni kotel je bil iz bakra kot kotli v pivovarnah. Tlak v njem ni bil znatno višji od zračnega tlaka, saj je imel prvi kotel varnostno zaklopko naravnano na tlačno razliko dobre desetine bara.

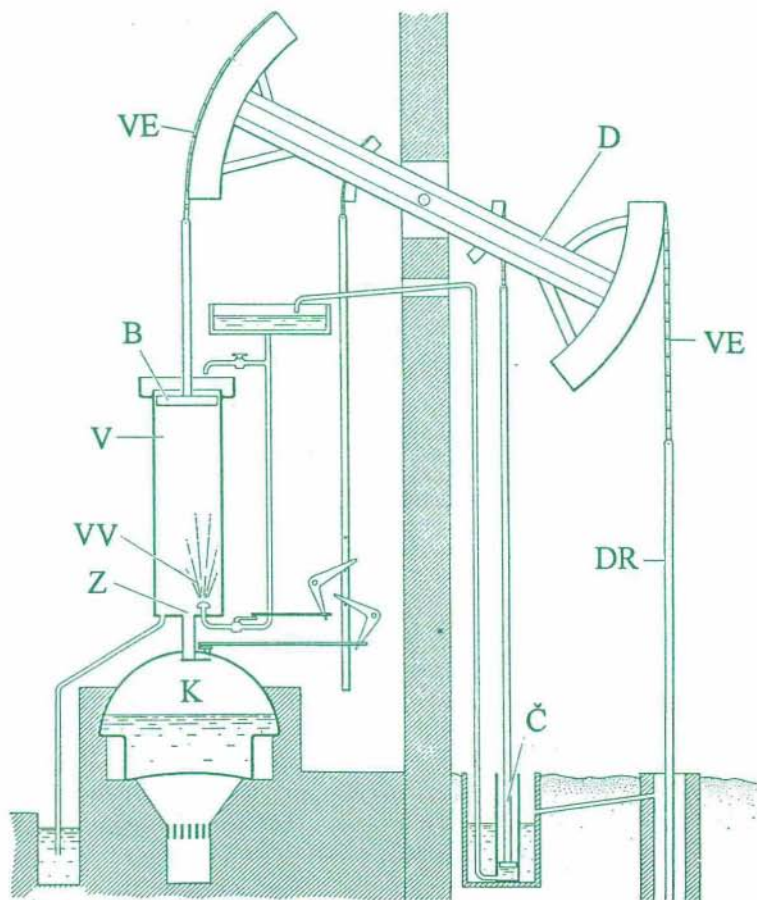
Na začetku so menda tudi Newcomnovo črpalko hladili s tem, da so valj z zunanje strani oblivali s hladilno vodo kot pri Papinovi. Nekoč je po nesreči voda vdrla v valj in tako hitro utekočinila paro, da je vrglo bat iz valja. To naj bi bil razlog, da so v prihodnje vbrizgavali hladno vodo v valj in s tem dosegli, da je črpalka delovala hitreje in zmogla več kot deset gibov na minuto. Papinova črpalka, pri kateri so valj oblivali z vodo, je bila znatno počasnejša; zmogla je 3 do 4 gibe na minuto. Valj prve Newcomnove črpalke je imel premer pol metra in pri 14 gibih na minuto je črpalka delala z močjo več kot 4 kW. Pozneje so črpalke te vrste dosegle skoraj dvajsetkrat večjo moč.

Newcomnova črpalka je zadovoljila potrebe tedanjega časa in je imela pomembno vlogo. Zato v njej ne kaže videti samo naključne prehodne razvojne stopnje. Na drugi strani pa je res, da Newcomen kljub svoji spretnosti ni našel nekaterih boljših rešitev, o katerih bi se lahko poučil v starejših knjigah.

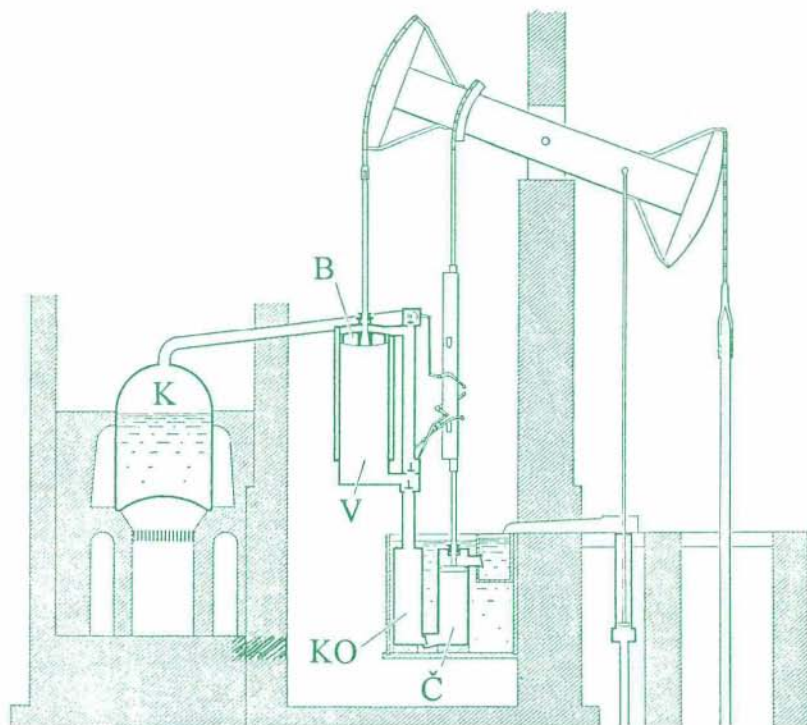
Izučeni mehanik James Watt je bil drugačnega kova. Prvič je prišel v stik z Newcomnovo črpalko leta 1763, ko so mu prinesli v popravilo model za poučevanje. Po dveh letih razmišljanja je uvidel, kako bi bilo mogoče izkoristek črpalke in njeno moč izdatno povečati.

Pare ni več utekočinjal v valju, saj je trajalo precej časa, preden je nato para ohlajeni valj zopet segrela. Paro je odvedel in utekočinil v ločenem kondenzatorju in s tem še pospešil gibanje. Poleg tega je izkoristil *dvojno delovanje*; najprej je uvedel paro nad bat, da ga je stisnila navzdol, nato pa pod njega, da ga je dvignila. Z ekscentrom, drogom in vztrajnikom je gibanje sem in tja spremenil v vrtenje. Nazadnje je valj še postavil v vodoravno lego.

Uporabil je tudi *centrifugalni regulator*, ki so ga dotlej poznali v mlinih, za *povratno vez*. Naprava, ki so jo sestavljali dve uteži v obliki kroglic, vijačna vzmet in vzvodi, se je vrtela z enakim številom vrtljajev na minuto kot stroj. Vzmet se je stiskala tem bolj, čim hitreje se je vrtela naprava, in z vzvodom tem bolj zapirala zaklopko za dovajanje pare. V valj je priteklo tedaj manj pare in stroju se je nekoliko zmanjšalo število vrtljajev na minuto. Tako so dosegli, da se število vrtljajev na minuto ni znatno oddaljilo od naravnane vrednosti.



Slika 3. Poenostavljena risba Newcomenove črpalke: K kotel, Z vstopna zaklopka, V valj, B bat, VE veriga, D delovni vzvod, DR drog, VV vbrizgavanje hladilne vode, Č črpalka za hladilno vodo.

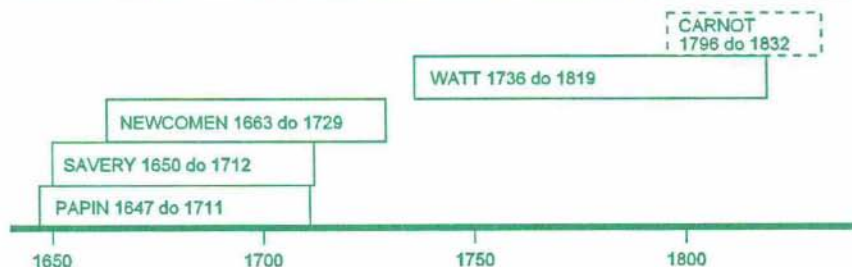


Slika 4. Poenostavljena risba Wattove črpalke: K kotel, V valj, B bat, KO kondenzator, Č črpalka za zrak.

James Watt je svoje iznajdbe patentiral leta 1769, a šele leta 1775 je zgradil prvi stroj. Tedaj je parni stroj začel svojo pot, na kateri je omogočil razvoj industrije v Angliji. Dandanes pa ga več ne uporabljajo, popolnoma ga je izpodrinila parna turbina.

Sadi Carnot je opazoval ta razvoj in obžaloval, da Francija v gradnji parnih strojev zaostaja za Anglijo. Namenil se je storiti kaj proti zaostajanju. Na splošno je raziskal značilnosti parnega stroja. Podrobnosti ga niso zanimale, osredotočil se je na tok toplote. Ugotovil je, da stroj poleg "visoke temperature potrebuje tudi nizko". Stroj je primerjal z mlinjskim kolesom. Če pade na lopatice voda z maso m za višinsko razliko $z_2 - z_1$, stroj v najugodnejšem primeru odda delo, ki je sorazmerno z maso vode in višinsko razliko:

$$A_{\text{odd}} \propto m(z_2 - z_1).$$



Slika 5. Življenski čas mož, ki so zaslužni za razvoj parnega stroja. Denis Papin iz Coudraisa blizu Bloisa v Franciji je končal študij medicine. Najprej je kot fizik delal v Parizu in nato v Londonu. Kot protestant se ni vrnil v Francijo, ampak je nekaj časa preživel v Italiji in se nato preselil v Nemčijo. Umrl je v revščini v Londonu. Thomas Savery iz Shilstonea je izumil več naprav. Umrl je v Londonu. Thomas Newcomen iz Dartmoutha je bil trgovec z železnino in izdelovalec kovinskih predmetov. Tudi on je umrl je v Londonu. O obeh Angležih in še posebej o Newcomnu in njegovem pomočniku Johnu Cawleyu so podatki nenavadno skopi. James Watt iz Greenocka na Škotskem se je kot vajenec v Londonu izučil za mehanika. Predpisi niso dopuščali, da bi odprl lastno delavnico, zato je leta 1756 postal mehanik na glasgowski univerzi, kjer je ostal do upokojitve leta 1800. Dosegel je veliko časti, plemiški naslov pa je odklonil. Umrl je v Heathfieldu blizu Birminghama. Kot enoto za moč je vpeljal konjsko moč. Ugotovil je namreč, da lahko konj v sekundi dvigne breme 150 funtov za $3\frac{2}{3}$ čevlja: $1 \text{ KM} = 550 \text{ teža funta-čevelj/s}$. Danes uporabljamo kot enoto za moč watt: $1 \text{ W} = 1 \text{ kgm}^2/\text{s}^3$; $1 \text{ KM} = 746 \text{ W}$, $1 \text{ kW} = 1,34 \text{ KM}$.

Po podobnosti toplotni stroj odda delo

$$A_{\text{odd}} \propto Q(T_2 - T_1).$$

Masi vode ustreza toplota Q , ki jo prejme toplotni stroj pri višji temperaturi T_2 , višinski razliki pa razlika temperatur $T_2 - T_1$. Carnotu je bila podobnost domača, saj so tedaj imeli toploto za nekakšno snov. Zato je Carnot mislil, da stroj odda pri nižji temperaturi T_1 enako toploto, kot jo pri višji prejme. Danes vemo, da ni tako: stroj prejme pri višji temperaturi toploto Q_2 in pri nižji temperaturi odda manjšo toploto Q_1 . Oddano delo je razlika obeh toplot: $-A = Q_2 - Q_1$. Po odkritju energijskega zakona sredi prejšnjega stoletja so v tem pogledu dopolnili Carnotovo izvajanje. Vseeno je Sadi Carnot s knjižico *O gibalni moči ognja in o strojih, namenjenih izkoriščanju te moči* leta 1824 začel razvoj, ki je pripeljal do entropijskega zakona ali drugega zakona termodinamike (glej Presek 10 (1982/83) 24).

PENROSE – ESCHER – REUTESWÄRD

Zapeljevanje

Nizozemskega grafika M. C. Eschera (1898 – 1972) smo v Preseku že spoznali. Nobena skrivnost ni, da se je Escher pri svojem umetniškem delu v veliki meri ukvarjal s problemi, ki so ponavadi bližje matematikom kakor pa ljudem iz umetniških krogov. Pri tem pa je Escher sam zmeraj dosledno zanikal kakršnokoli tesnejšo povezanost z matematično znanostjo.

Tako je precej svoje pozornosti namenil tudi študiju lastnosti trodimenzionalnega prostora in objektov v njem. V svojih zapisih za predavanja iz leta 1964 je Escher o tej temi med drugim tudi takole razmišljal: "Včasih se mi zdi, da smo ljudje kar preveč obremenjeni z neko notranjo težnjo priti kar se le da blizu nemogočemu in vsem njegovim skrivnostim. Kakor da bi se nam realnost okoli nas, ves ta trodimenzionalni svet, ki nas obdaja, zdela preveč navadna, preveč dolgočasna in vsakdanja. Hrepenimo po nadnaravnem ali celo supernaravnem, po tem, kar ne obstaja, torej po čudežu.

Kakor da bi ta vsakodnevna realnost ne bila že sama po sebi dovolj zagonetna.

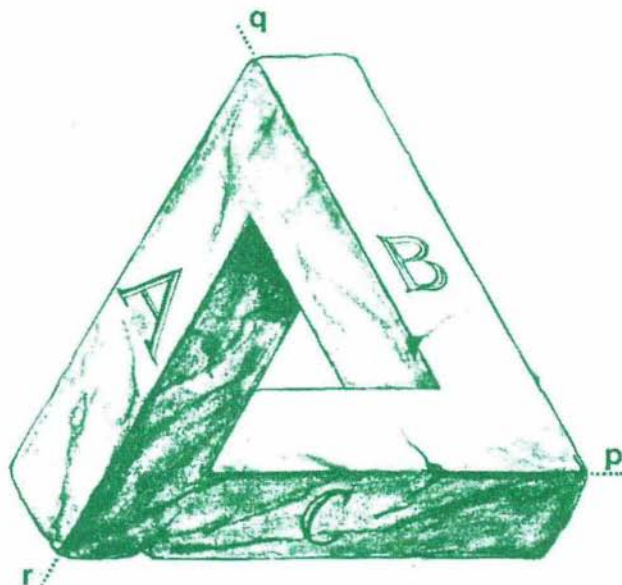
Saj se prav vsakemu izmed nas lahko pripeti, da kdaj povsem nepričakovano ujame trenutek, v katerem se sreča z impulzi, ki izvirajo iz same srži vsakdanjega življenja in realnosti. V mislih imam trenutek, ko postanemo občutljivi tudi za nerazložljivo, tudi za čudesa okoli nas. Gre preprosto za nekak čudež tega trodimenzionalnega prostora, v katerem živimo in skozi katerega se premikamo skorajda povsem rutinsko; včasih se nam namreč prostor sam po sebi razkrije na zares osupljiv način.

Večkrat se mi je na mojih dolgih samotnih sprehodih skozi gozd okoli Baarna primerilo, da je kar nenadoma izginila tišina okrog mene. In ves navdušen sem obstal, takorekoč iz oči v oči s povsem nerealnim in neobrazložljivim. Tedaj sem natanko začutil, kako zagonetna je pravzaprav ta razdalja med menoj in, recimo, drevesi okoli mene in koliko presenetljivega skriva v sebi prostor, v katerem stojim.

Prostora preprosto ne poznamo. Ne moremo ga videti, ne moremo ga slišati, niti občutiti. Stojimo sredi njega, smo celo del tega prostora, pa o njem samem vendarle ničesar ne vemo. Seveda lahko, recimo, izmerim razdaljo med seboj in bližnjim drevesom. Toda ko rečem: "Trije metri," mi to število z ničemer ne razkrije skrivnostnosti prostora. V prostoru lahko vidimo zgolj meje in obrise, prostora samega po sebi pa žal ne."

Penrose

Leta 1958 je znameniti angleški fizik, astronom in matematik Roger Penrose (roj. 1932) objavil skupaj s svojim očetom v reviji *British Journal of Psychology* članek, v katerem je predstavil nekaj t.i. *nemogočih predmetov*. Na sliki 1 vidimo le enega izmed njih. Poslej ga bomo imenovali kar *Penrosov trikotnik*, čeprav bi bilo morebiti natančnejše poimenovanje zanj *Penrosov nemogoči model trikotnika*.



Slika 1.

Penrosov trikotnik je trodimenzionalna konstrukcija, ki je vsaj navidez sestavljena iz treh kvadrastih tramov. Vendar pa se nam že samo ob pogledu nanj, torej brez kakšnih dodatnih pojasnil, zazdi, da tak predmet v resnici najbrž sploh ne obstaja. Seveda se lahko eksistenci tega predmeta postavimo po robu tudi s povsem resnimi, matematično zasnovanimi argumenti. Oglejmo si jih nekaj:

- 1) Očitno je, da leži tram *C* (glej risbo) vodoravno in da se nam tram *A* približuje, tram *B* pa oddaljuje, če ju spremljamo od njunega stika s *C* proti drugemu koncu. Povsem nemogoče je torej, da bi se tramova *A* in *B* sploh kdajkoli staknila, kakor prikazuje risba.

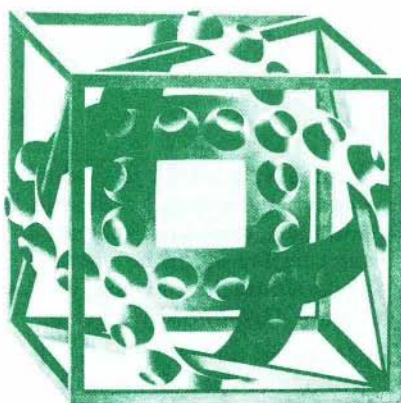
- 2) Konstrukcijo si lahko zamislimo v dvodimenzionalnem prostoru kot model trikotnika, čigar stranice ponazarjajo tramovi A, B in C . Na risbi lahko lepo opazimo, da stojijo tramovi med seboj pravokotno. To pomeni, da bi bila vsota notranjih kotov tega trikotnika 270° . Seveda vemo, da kaj takega ni mogoče.
- 3) V tretje pa se oprimo na znanje stereometrije. Zamislimo si, da je na vsaki izmed stranskih ploskev tramov, ki jih označujejo na sliki najsvetlejša ploskev (B), nekoliko temnejša ploskev (A) in najtemnejša ploskev (C), položene ravnine. Na ploskvi B naj bo to ravnina Σ_B , na ploskvi A naj leži ravnina Σ_A , na ploskvi C pa ravnina Σ_C . Premice, v katerih se sečeta po dve ravnini, označimo takole:

$$\Sigma_C \cap \Sigma_B = p, \quad \Sigma_B \cap \Sigma_A = q, \quad \Sigma_A \cap \Sigma_C = r.$$

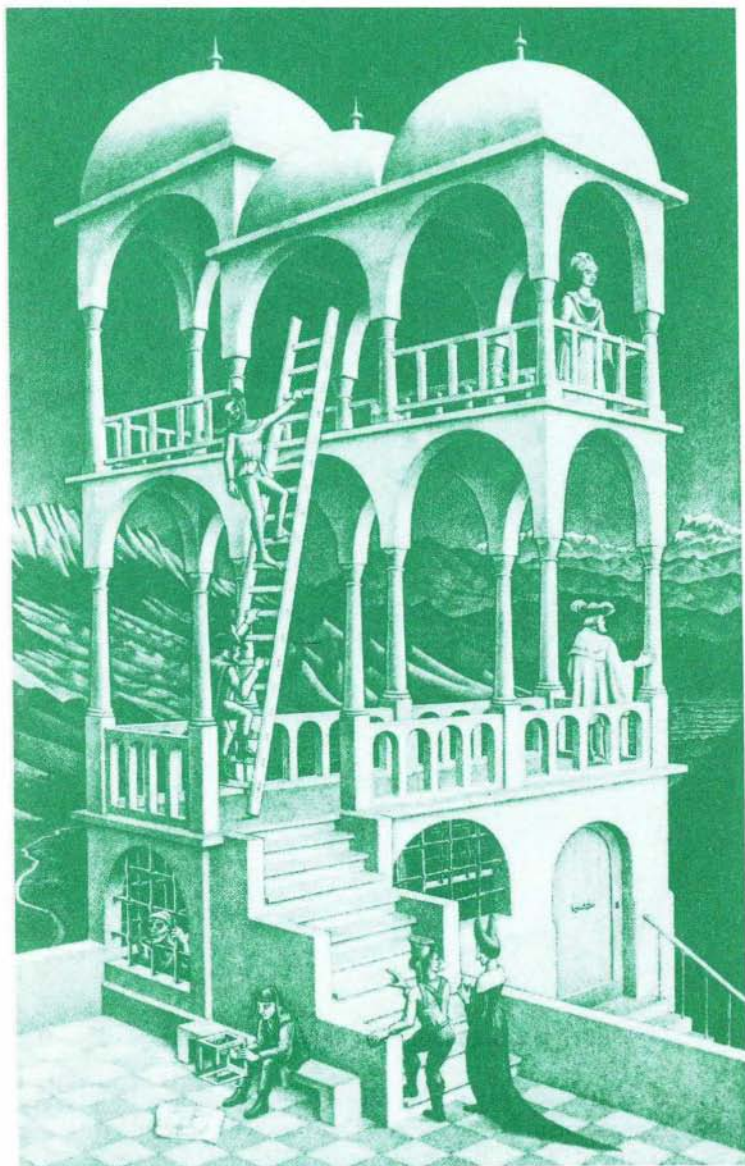
Z risbe se da lepo razbrati, da so ravnine Σ_A, Σ_B in Σ_C paroma nevzporedne. Iz teorije vemo, da se tri takšne ravnine sečejo zmeraj v natanko eni točki. Vendar pa to v primeru ravnin na ploskvah Penrosovega trikotnika ni res, saj se premice p, q in r sečejo v treh različnih točkah. Obstoj tega predmeta bi nas torej znova privedel do logičnega protislovja.

Escher

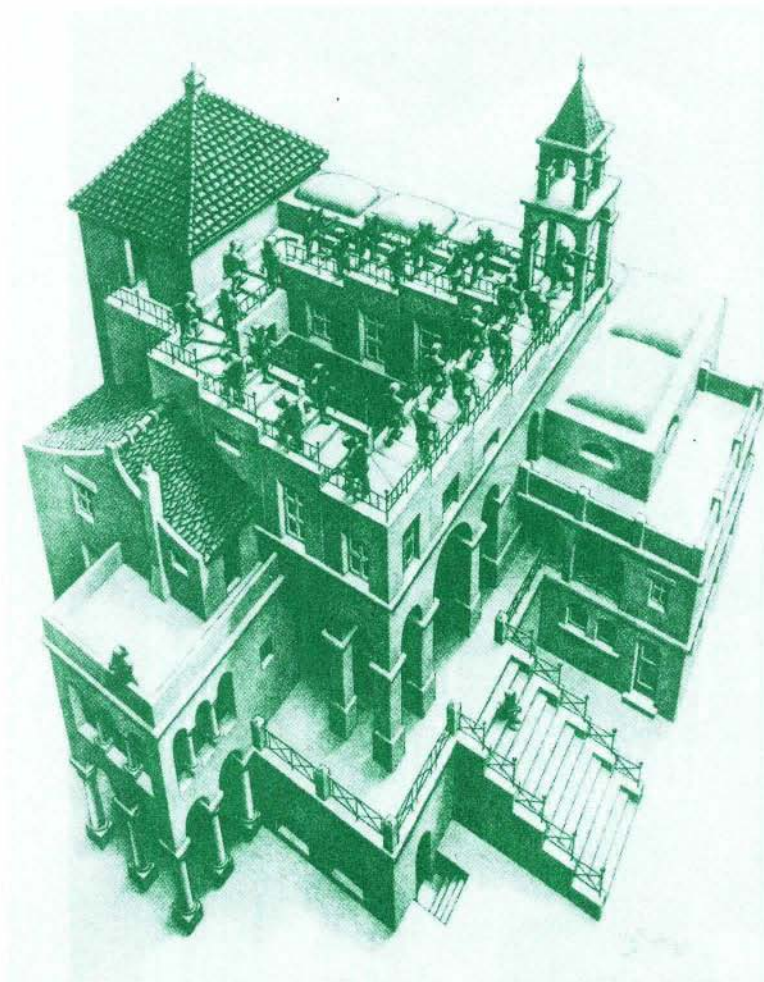
V času, ko je bil objavljen Penrosov članek, se je Escher tudi že sam ukvarjal z risanjem nemogočih predmetov. Tako je imel tedaj za seboj že *Kocko z magičnimi trakovi*, 1957 (slika 2). In prav Penrosovi nemogoči predmeti so Escherju pomenili precejšnjo pomoč in vzpodbudo pri nadaljevanju tovrstnih raziskav. Tako je po branju že omenjenega Penrosovega članka v kratkem izdelal še tri litografije (slike 3, 4, 5).



Slika 2. Kocka z magičnim trakom

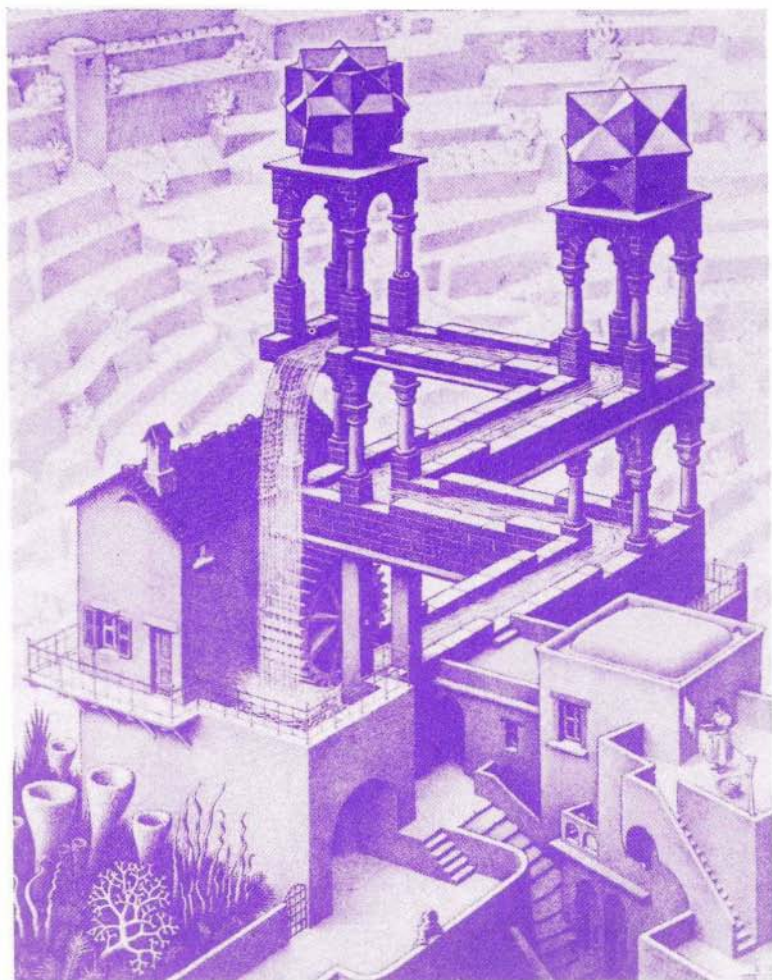


Slika 3. Belvedere (1958)



Slika 4. Po stopnicah navzgor in navzdol (1960)

S *Slapom* se bomo sedaj poskušali seznaniti nekoliko podrobneje. Že ob pogledu nanj zaslutimo, da verjetno ponazarja problem, ki je v osnovi zelo soroden s tistim, ki ga gledalcu ponuja Penrosov trikotnik. Znano je, da je Escher v izdelavo te grafike vložil ogromno truda. Pred njo je izdelal dolgo vrsto risb s samimi nemogočimi predmeti. In naposled mu je v končni verziji uspelo nekaj zares izjemnega. Poleg tega, da je skonstruiral



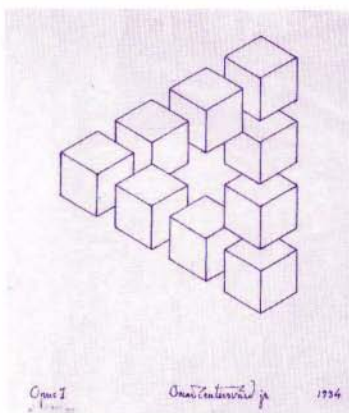
Slika 5. Slap (1961)

objekt, ki je v realnem nemogoč že iz povsem geometrijskih razlogov, je njegovo zagonetnost podkrepil še s fizikalnega vidika. Ker teče voda na risbi po kanalih navzgor "kar sama od sebe" in ker je ta njen tok očitno večen, je Escherju hkrati uspelo skonstruirati tudi svojevrsten perpetuum mobile (večno gibalo). Znano pa je, da je obstoj takšnega predmeta (sistema) v hudem nasprotju z nekaterimi osnovnimi fizikalnimi zakoni.

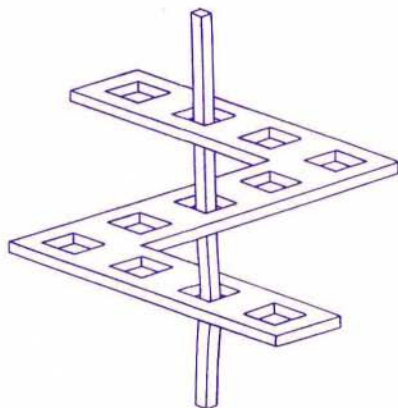
Na vrhu vsakega izmed obeh stolpov opazimo še dodatno zanimivost. Gre za dva velika poliedra, ki ju sicer nekoliko redkeje srečujemo. Levi predstavlja tri sekajoče se kocke, desni pa par sekajočih se oktaedrov. Escher je dejal, ko je komentiral to svoje delo, da poliedra na tej sliki nimata nobenega prav posebnega pomena in da ju je narisal pač preprosto zato, ker so ga poliedri zmeraj zanimali in se je z njimi že od vsega začetka rad ukvarjal.

Reuteswärd

Risba na sliki 6 nam kaže enega izmed več tisoč (!) nemogočih predmetov, ki jih je uspel skonstruirati švedski grafik Oscar Reuteswärd (roj. 1915). Lahko jo razumemo tudi kot pojasnilo k Escherjevemu Slapu. Njegova pa je tudi sedaj že kar znamenita nemogoča konstrukcija na sliki 7.



Slika 6.

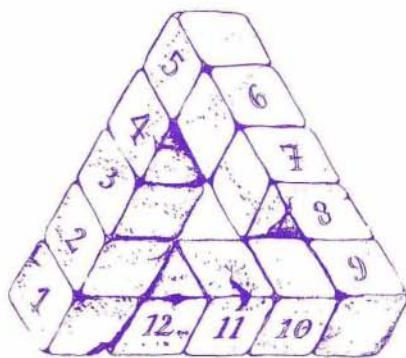


Slika 7.

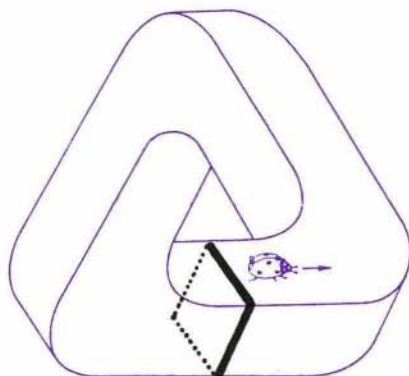
Domača naloga

Za konec si oglejmo še nekaj zanimivih problemov, ki so povezani s Penrosovim trikotnikom.

- 1) Recimo, da bi nam uspelo sestaviti Penrosov trikotnik iz dvanajstih kock, kjer ima vsaka izmed njih rob z dolžino 1 dm (slika 8). Potem bi lahko seveda govorili tudi o "prostornini" in o "površini" tako nastalega telesa. Ali ju znate izračunati?



Slika 8.



Slika 9.

- 2) Recimo, da bi nam uspelo zgraditi poseben Penrosov trikotnik z zaobljenimi robovi (slika 9). Po njem naj beži še pikapolonica, ki pa se giblje zmeraj le naprej in nikdar ne zaide čez nobenega izmed robov tega trikotnika. Poleg tega naj bo na nekem mestu tega telesa zarisani sklenjen obroč, kakor kaže slika. Povejte – najmanj kolikokrat bi morala pikapolonica steči čez obroč, če bi hotela priti spet nazaj na svoje izhodiščno mesto!
- 3) In kako pojasniti **fotografijo** na naslovni strani Preseka? Mar ta fotografija ne zanika tega, kar smo v tem članku zvedeli o nemogočih predmetih?

Nadaljnje branje

- 1) Gardner Martin: *Aha! pa te imam*, Ljubljana, DZS, 1988,
- 2) Smullyan Raymond: *Poznate naslov te knjige?*, Ljubljana, DZS, 1987.

Vilko Domajnko

TRIKOTNIKI S POSEBNO LASTNOSTJO

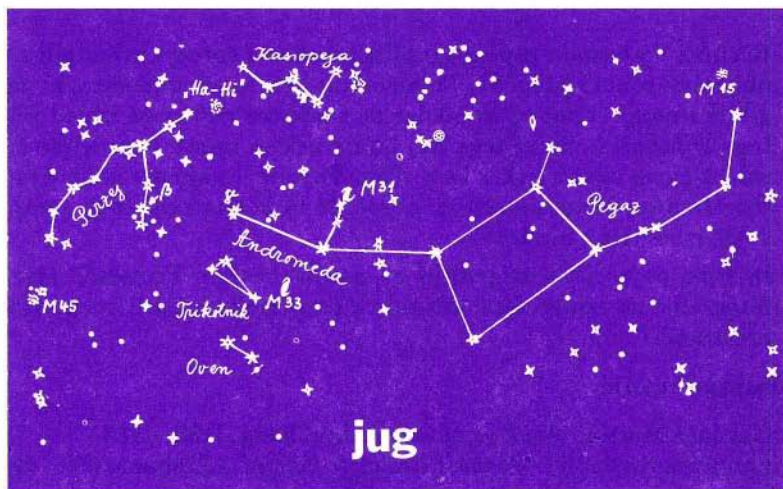
Iz oglišča A trikotnika ABC narišemo kotno simetralo, iz B težiščnico k stranici $\overline{AC}$ in iz C višino na stranico $\overline{AB}$. Dokaži, da gredo te tri premice skozi isto točko natanko tedaj, kadar razdeli višina iz oglišča C stranico $\overline{AB}$ v razmerju stranic $\overline{AC} : \overline{AB}$.

Ivan Vidav

NOS

Tudi nos najdemo na nebu – sicer ne človeškega, ampak živalskega. Nos konja, vendar ne navadnega. Najdemo nos krilatega nebesnega konja – Pegaza.

Sredi jeseni visoko na južnem delu neba lahko opazujemo ozvezdje *Pegaz* (slika 1). To ozvezdje upodablja tistega konja, ki ga je po starogrški pripovedi prvi ukrotil in zajahal veliki grški junak Perzej. Z njim je letal po nebu. S Pegazovo pomočjo je Perzej opravil številna junaštva. Rešil je tudi lepo princeso Andromedo, ki jo je, prikovano na skalnato pečino, hotel požreti ogromen pošasten morski kit.



Slika 1. Ozvezdje Pegaz, v njem zvezda Nos in kroglasta kopica M 15. Fizikalne karakteristike zvezde in kopice poiščite v kakem zanesljivem priročniku, na primer v *Karti severnega in južnega neba*, ki je izšla pri DMFA Slovenije, ali v kakšnem računalniškem programu.

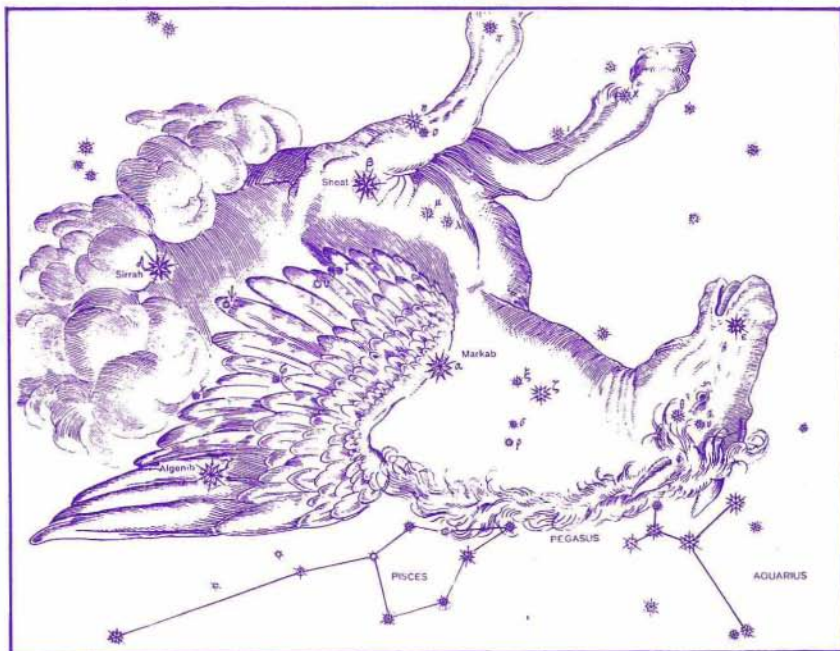
Za nebesnega Pegaza je značilno troje: ima krila, zato lahko leta; večinoma je narisano obrnjen na glavo; nikdar ga ne prikazujejo celega, vedno le kot polovico konja. To pojasnjujejo tako, da naj bi ozvezdje predstavljalo pravkar rojenega konja, takega, ki pravkar leze iz morja.

Pegaz je nekoč na neki gori v Grčiji močno poskakoval. Zaradi udarca njegovih kopit se je udrila zemlja. Iz udrtine je pritekla voda. To je bil slaven konjski izvir. Voda iz tega izvira je imela nenavadno čarobno moč. Kdor jo je pil, ga je navdihnili s pesnikovanjem. Ne samo zaradi junaštev, tudi zaradi čarobne vode so stari Grki tako častili Pegaza, da so ga postavili na nebo, kjer so ga občudovali.

Ozvezdje Pegaz je sestavljeno iz štirih svetlih zvezd, ki oblikujejo na nebu velik "kvadrat" (*Miza*), od katerega štrlita dva različno



Slika 2. Kroglasta zvezdna kopica M 15, posneta z zelo zmogljivim daljnogledom.



Slika 3. Takole je ozvezdje Pegaz narisal nemški astronom Johann Boyer v svojem zvezdnem atlasu *Uranometrija* (1603).

dolga zvezdna kraka. Na koncu daljšega čepi zvezda *Enif* (ϵ Pegaza), kar v arabščini pomeni *Nos (konja)* (sliki 1 in 2). To zvezdo omenjamo zato, ker jo brez težave najdemo v jasnih jesenskih nočeh, v njeni neposredni bližini pa še leži znana kroglasta zvezdna kopica - gruča M 15.

Predlagam, da v jasni noči brez mesečine s prostim očesom najprej poiščete in opazujete zvezdo Nos. Potem vzemite lovski daljnogled in z njim opazujte še prekrasno zvezdno kopico M 15. Vidna je kot nežen drobcen puhast oblček.

Marijan Prosén

QUANTUM IN KVANT

Ruska matematično-fizikalna revija "Kvant", ki jo poznamo tudi pri nas, je začela izhajati leta 1970. Presek ji je namenil nekaj besed ob njeni dvajsetletnici (18 (1990/91) 47). Tedaj je začel izhajati njegov ameriški dvojček "Quantum", o katerem lahko povemo danes nekaj več.

Osnovali so ga matematik William P. Thurston, dobitnik Fieldsve medalje, fizik Sheldon Lee Glashow, dobitnik Nobelove nagrade, in Jurij Ossipyan iz moskovskega urada "Kvanta" pri Akademiji znanosti. Spočetka je "Quantum" samo prevajal članke iz "Kvanta", zdaj pa so že približno enako zastopani prevodi in originalni prispevki. "Quantum" izdajata ameriško Združenje učiteljev naravoslovja in moskovski urad "Kvanta" v sodelovanju z Ameriškim združenjem učiteljev fizike in Državnim svetom učiteljev matematike, založnica pa je mednarodna založba Springer. Na leto izide šest števil s po 84 stranmi. "Quantum" je mogoče najti tudi že v nekaterih naših knjižnicah. Najbrž je za slovensko tržišče zaradi pisave in jezika zanimivejša angleška revija kot ruska. Tudi papir in tisk "Quantuma" sta precej boljša, slike in risbe pa se še vedno precej zgledujejo po "Kvantu". Podobne revije v angleščini doslej ni bilo, zato se bo "Quantum" najbrž dobro uveljavil, začetne težave je že prebrodil. Pri nas je "Presek" imel naravno ozadje v Društvu matematikov, fizikov in astronomov, v tujini pa takega ozadja ni, ker imajo matematiki in fiziki samostojna društva. "Quantum" ima podobne rubrike kot "Kvant" in "Presek". Objavlja članke iz matematike in fizike, matematične in fizikalne naloge, opise poskusov, novosti in posveča precej pozornosti pripravi na mednarodna tekmovanja iz matematike in fizike. Zanimivo je "Quantum" primerjati s prvovrstno poljudno-znanstveno revijo "Scientific American". V "Američana" pišejo vrhunski strokovnjaki, a članki so,

so, čeprav brez enačb, pogosto dokaj zahtevni. V "Quantum" ne pišejo tako znani raziskovalci, a članki so manj zahtevni, četudi se ne izogibajo enačbam. Po zahtevnosti na splošno nekoliko presega "Presek" in je namenjen predvsem srednješolcem. Podobno kot ima "Scientific American" izdaje v drugih jezikih, se obetajo tudi "Quantumu" izdaje v tujih jezikih, pred kratkim so ga začeli izdajati v grščini.

Ob začetku izhajanja "Quantuma" je nekaj misli zapisal W. P. Thurston. Te je urednik Bill K. Aldridge povzel v letošnji marčni oz. aprilski številki:

"Naravoslovno in še posebno matematično pisanje se nagiba k temu, da je gosto in polno nevarnih zavojev in zahrbtnih jam z živim peskom. Ko sem bil otrok, sem bil ponosen na to, da sem prebral veliko strani na uro. Na koledžu sem spoznal, kako neumen sem bil. Pri branju matematike je lahko deset strani na dan zelo velika hitrost. Celo stran na dan utegne biti precejšnja hitrost.

Članki v "Quantumu" niso napisani kot članki v raziskovalnih revijah, toda ko jih beremo, lahko uporabimo nekatere podobne navade. Ne bojte se zaustaviti sredi odstavka ali sredi stavka, če vas kaj preseneti ali se vam zdi uganka. Hitrost ni pomembna. Ne mislite si, da je nekaj očitno, četudi se tako zdi piscu. Kar pri strani sami izpeljete, zahteva veliko več časa, a je veliko več vredno, kot tisto, kar ste prebrali na hitro."

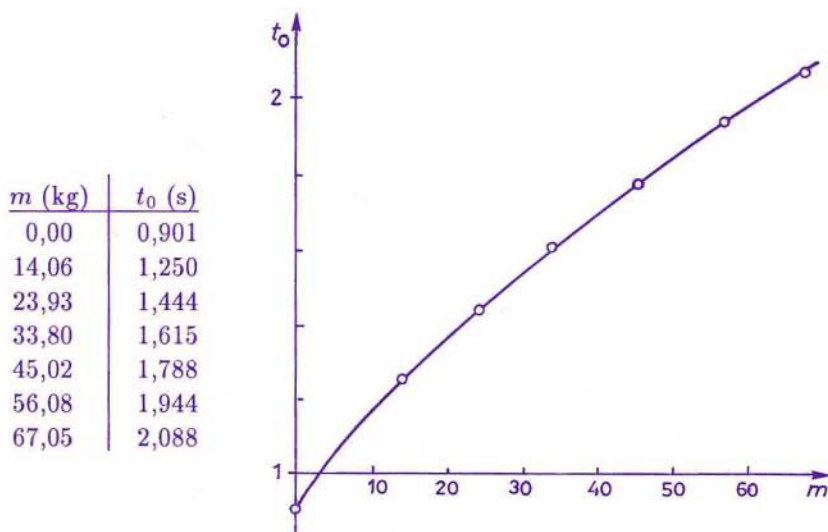
Za pokušnjo si iz omenjene številke "Quantuma" sposodimo podatke iz naloge "Stehtajmo vesoljca". Obdelala sta jo Arthur Eisenkraft in Lary D. Kirckpatrick, ki skrbita tudi za ameriško moštvo na fizikalnih olimpiadah.

Doma se ni težko stehtati. Stopite na osebno tehtnico, ki pokaže težo in iz nje sklepamo na maso, kolikor tehtnica ni že umerjena v kilogramih. Navadno težo uravnovesi sila prožnega telesa v tehtnici. To silo izmerimo po spremembni oblike telesa, ki jo povzroči. V vesoljski postaji, ki se giblje okoli Zemlje kot umetni satelit, to ni mogoče. Telo v prostem padanju ne čuti teže. (Albert Einstein je imel spoznanje, da krovec med padanjem s strehe, ne čuti teže, za eno izmed svojih najbolj posrečenih zamisli, na njej je zgradil teorijo gravitacije – splošno teorijo relativnosti.) V postaji bi osebna tehtnica lebdela enako kot vesoljec in bi kazala ničlo. O teži prosto padajočega telesa ni mogoče preprosto govoriti. Zato maso vesoljca merimo. Ta masa je zelo pomembna, ker pove nekaj o zdravstvenem stanju vesoljca.

Za merjenje kot prej izkoristimo prožno telo, toda zdaj ne merimo spremembe oblike v ravnovesju ampak nihanje. Nekakšen stol so opremili na nogah z vzmetmi v obliki ukrivljenih trakov, ki so bili pritrjeni na ladjo. Vesoljec se usede na stol, se priveže kot v letalu, se s pritiskom nog na steno odrine, popusti in izmeri nihajni čas. Najbolje je izmeriti čas trajanja desetih nihajev in izmerek deliti z deset. Deli stola in vesoljca se gibljejo premo, zato lahko uporabimo znano enačbo za nihajni čas nihala na vijačno vzmet:

$$t_0 = 2\pi\sqrt{\frac{m + m_0}{k}}.$$

m je masa vesoljca, m_0 masa stola in k koeficient vzmeti. *Napravo za merjenje telesne mase BMMD* so umerili na Zemlji, tako da so ugotovili zvezo med dodatno maso m in nihajnim časom t_0 (slika 1):



Slika 1. Z merjenjem z napravo za merjenje telesne mase BMMD ugotovljena odvisnost nihajnega časa t_0 od dodatne mase m in krivulje za $k = 744$ N/m in $m_0 = 15,3$ kg, ki se podatkom najboljše prilega.

Najprej za vsako izmed vrstic izračunamo $(t_0/2\pi)^2$ in od podatkov za m in $(t_0/2\pi)^2$ v dani vrstici odštejemo podatka iz zgornje vrstice. Tako dobimo Δm in $\Delta(t_0/2\pi)^2$ in izračunamo koeficient vzmeti $k = \Delta m / \Delta(t_0/2\pi)^2$. Nato v vsaki vrstici izračunamo maso stola $m_0 = k(t_0/2\pi)^2 - m$. Kratek račun, pri katerem si pomagamo z žepnim računalom, da

$$k = (744 \pm 7) \text{ N/m} \quad \text{in} \quad m_0 = (15,3 \pm 0,3) \text{ kg}.$$

Kot ponavadi računamo na toliko mest, da je zadnje negotovo kvečjemu za nekaj enot.

Owen K. Garriott, ki je prebil v Skylabu 58 dni, je imel na začetku na stolu nihajni čas 2,012 s in na koncu 1,981 s. Enačba $m = k(t_0/2\pi)^2 - m_0$ da za maso na začetku 61,1 kg in na koncu 58,8 kg. Navadno se vesoljcem zaradi tega, ker ne čutijo teže, masa nekoliko zmanjša. Merjenj med začetkom in koncem bivanja v Skylabu, ki so dala podatke o telesnem stanju vesoljca med poletom, članek ne navaja. Kljub temu je mogoče že po povedanem ugotoviti, da "Quantum" ponuja zanimivo čtivo.

Janez Strnad

MANJKAJOČE ŠTEVILO

Dobili smo magnetni trak, na katerem je zelo velika datoteka, ki vsebuje naravna števila od 1 do neznane zgornje meje. Vemo še, da je zgornja meja zelo velika, recimo nekaj deset milijonov. Obvestilo tudi pravi, da na datoteki manjka natanko eno število s tega intervala, vsa ostala števila pa so na datoteki zapisana natanko enkrat. Seveda števila na datoteki niso zapisana urejeno.

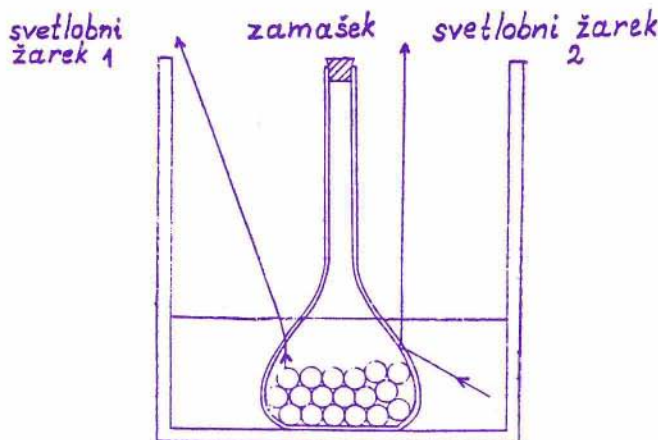
Naša naloga je, da poiščemo manjkajoče število. Žal pa imamo na razpolago le računalnik z zelo majhnim pomnilnikom, majhnim diskom in počasno tračno enoto. Zato mora biti program, ki bo poiskal manjkajoče število, kratek, uporabiti mora malo dodatnih spremenljivk, pa tudi datoteko mora prebrati čim manjkrat, da iskanje ne bo trajalo predolgo.

Martin Juvan

PRESENETLJIVI PRIKAZ POPOLNEGA NOTRANJEGA ODBOJA

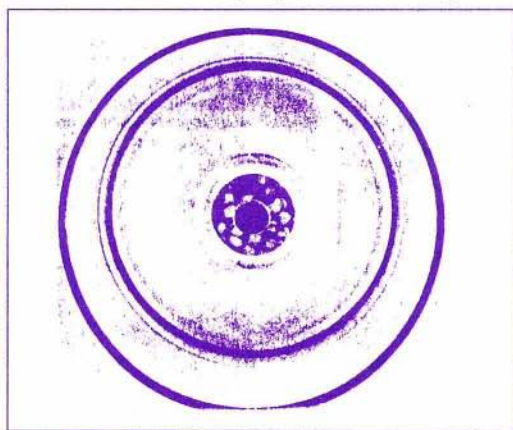
1. PRIKAZ

Slika 1 prikazuje stekleno bučko, napolnjeno približno do polovice s frnikulami. Bučka stoji na tleh velike steklene posode, delno napolnjene z vodo.



Slika 1.

Slika 2 je fotografija z vrha steklene bučke navpično navzdol. Črni krog na sredini steklene bučke je gumijasti zamašek. Frnikule lahko vidimo skozi tisti del steklene bučke, ki je nad vodno gladino.



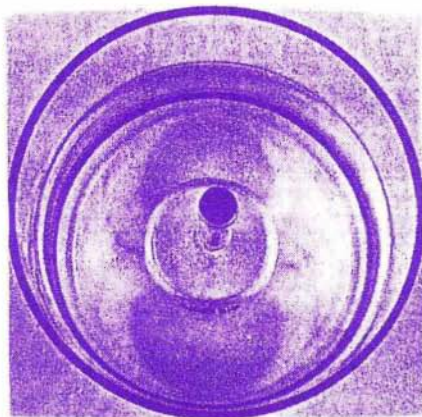
Slika 2.

Če v posodo dotočimo vodo, frnikul ne vidimo več. (Glej sliko 3.)



Slika 3.

Na sliki 4 vidimo, da so frnikule še zmeraj skrite, tudi če se opazovalec nekoliko odmakne od navpičnice. Pri večjem odmiku postanejo frnikule spet vidne. Na sliki vidimo označbo, ki je natisnjena na zunanji površini steklene bučke, in njeno podobo, ki je nastala zaradi odboja od notranje površine.



Slika 4.

2. RAZLAGA

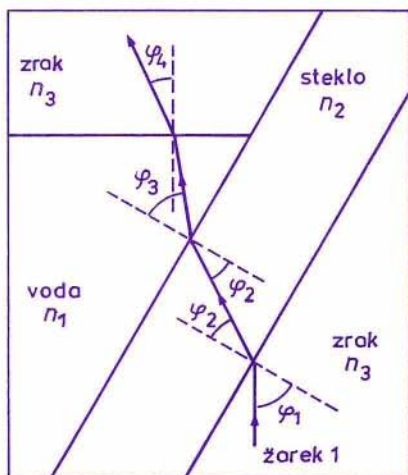
Oglejmo si podrobneje svetlobna žarka 1 in 2 s slike 1.

Robovi steklene bučke so strmo nagnjeni. Svetlobni žarek 1, ki gre od frnikule proti opazovalcu, potuje skozi zrak, nato skozi steklo v vodo, ter na koncu v zračni prostor (glej sliko 5).

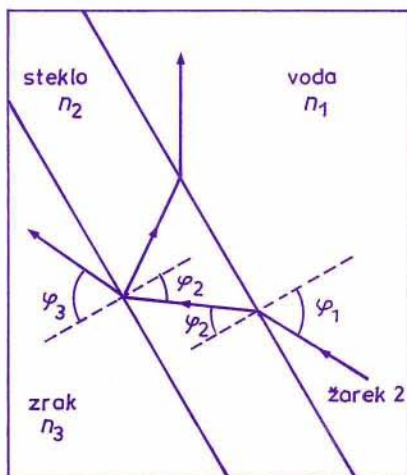
Najprej prehaja iz optično redkejšo snovi v optično gostejšo snov, kjer se svetlobni žarek lomi proti vpadni pravokotnici. Pri prehodu iz stekla v vodo pa se svetlobni žarek lomi od vpadne pravokotnice. Prav tako se svetlobni žarek lomi od vpadne pravokotnice, ko gre iz vode v zrak.

Zato frnikul ne vidimo, če gledamo od vrha steklene bučke navpično navzdol. Potopljeni del bučke je videti zelo svetel zaradi popolnega odboja svetlobe iz okolice.

Na sliki 6 vidimo potek svetlobnega žarka 2 s slike 1. φ_1 predstavlja vpadni kot, φ_2 lomni kot znotraj steklene bučke, φ_3 pa kot žarka v bučki.



Slika 5.



Slika 6.

Če se kot φ_1 povečuje, se povečuje tudi kot φ_3 . Pri mejni vrednosti kota φ_1 postane kot φ_3 enak 90° . Za kote φ_1 , ki so večji od te mejne vrednosti, se žarek na meji med steklom in zrakom v celoti odbije. Zato govorimo o popolnem odboju. Mejni kot φ_1 lahko izračunamo takole:

Upoštevamo lomni zakon za vsako ploskev na sliki 6 in za φ_3 postavimo 90° , dobimo $n_1 \sin \varphi_1 = n_2 \sin \varphi_2 = n_3 \sin \varphi_3 = n_3$.

Če vstavimo za $n_1 = 1.33$ (lomni kvocient za vodo) in $n_3 = 1.00$ (lomni kvocient za zrak), sledi:

$$\begin{aligned}1.33 \sin \varphi_1 &= 1.00 \\ \sin \varphi_1 &= 1/1.33 = 0.752 \\ \varphi_1 &\approx 49^\circ.\end{aligned}$$

Tako smo, neodvisno od lomnega kvocienta za steklo n_2 , dobili mejni kot totalnega odboja za prehod iz vode v zrak. Žarki, ki imajo vpadni kot manjši od 49° , se le delno odbijejo.

Če je steklena bučka v zraku, sta n_1 in n_3 enaka 1.00 in popolnega odboja ni, saj je $\varphi_1 = \varphi_3$.

Pri poskusu smo uporabili:

- stekleno posodo (27 cm x 17 cm x 20 cm),
- stekleno bučko (1000 ml),
- 100 frnikul s premerom 1.5 cm,
- zamašek.

Za popestritev lahko v majhnih skupinah prikažemo, kako frnikule postopno izginjajo, ob dodajanju vode, v zunanjo posodo. Po razgovoru in razlagi tega eksperimenta odstranimo zamašek in natočimo vodo v stekleno bučko, da bodo frnikule postale ponovno vidne. Namesto frnikul uporabimo bonbone, s katerimi se po poskusu lahko tudi posladkamo.

Tilka Jakob

IZ DRUŽINSKE KRONIKE

Andrej je brskal po družinski kroniki in v zapisu za leto 1918 odkril podatke, da je bila tistega leta starost njegovega pradedu trikratnik vsote števk pradedove rojstne letnice. Praded je že tedaj imel dva sinova, od katerih je bil mlajši Andrejev ded. Zanimivo – vsak od njiju je bil tedaj v starosti vsote števk svoje rojstne letnice. Koliko je bil star praded ob rojstvu Andrejevega deda?

Marija Vencelj

MNOŽENJE ZA TISTE, KI POZNAJO LE POŠTEVANKO ŠTEVILA 2

Zastavimo si naslednji problem: Predpostavimo, da znamo seštevati naravna števila, množiti in deliti pa znamo le s številom dve. Ali lahko s tem znanjem izračunamo produkt poljubnih naravnih števil m in n ? Seveda: Če zapišemo n -krat število m v stolpec in seštejemo, dobimo rezultat.

Tu si oglejmo nekoliko krajšo metodo. Menda so jo poznali že stari Egipčani, sedaj pa jo nekateri imenujejo metoda ruskih kmetov. Zanimiva je tudi zato, ker je vseeno, v kateri osnovi števila zapisujemo. Važno je le, da znamo množiti z dve, deliti z dve in seštevati.

Postopek je takle:

1. Števili, ki ju želimo zmnožiti, zapišemo na vrh stolpcev.
2. Števila v prvem stolpcu zaporedoma delimo z dve, kvociente podpišujemo in ostanke enostavno pozabimo. Končamo, ko pridemo do 1. Števila v drugem stolpcu pa zaporedoma množimo z dve. Ko pridemo vzporedno z enojko na levi, končamo.
3. V desnem stolpcu prečrtamo števila v tistih vrsticah, kjer je v levem stolpcu sodo število.
4. Števila v desnem stolpcu, ki jih nismo prečrtali, seštejemo. Vsota je produkt števil m in n .

Oglejmo si postopek na primeru $m = 76$ in $n = 27$.

76	27
38	54
19	108
9	216
4	432
2	864
1	1728

Seštejemo $108 + 216 + 1728 = 2052$, kar je res enako 76×27 .

Poglejmo še, zakaj ta metoda deluje.

S številom m se dogaja sledeče: Najprej ga delimo z 2 in dobimo kvocient m_1 ter ostanek b_0 . Nato delimo z 2 število m_1 in tako dalje.

Kvociente označimo z $m_1, m_2, \dots, m_k$, ostanke pa z $b_0, b_1, \dots, b_k$.

$$\begin{array}{rcl} m & = & 2 \cdot m_1 + b_0 \\ m_1 & = & 2 \cdot m_2 + b_1 \\ & \cdot & \cdot \\ m_{k-1} & = & 2 \cdot m_k + b_{k-1} \\ m_k & = & b_k \end{array}$$

Končamo pri $m_k = b_k = 1$. Števila $b_0, b_1, \dots, b_k$ so ostanki pri deljenju z dva in so enaka 0 ali 1. Vstavimo sedaj izraz za m_k v izraz za m_{k-1} , izraz za m_{k-1} v izraz za m_{k-2} in tako vse do m . Dobimo:

$$m = 2(2(2 \cdots (2b_k + b_{k-1}) + b_{k-2}) + \cdots) + b_1 + b_0.$$

Od tod sledi:

$$m = 2^k b_k + 2^{k-1} b_{k-1} + \cdots + 2b_1 + b_0.$$

Pomnožimo sedaj tako zapisani m s številom n :

$$m \cdot n = 2^k n b_k + 2^{k-1} n b_{k-1} + \cdots + 2n b_1 + n b_0.$$

Ker so $b_0, b_1, \dots, b_k$ enaki 1 ali 0, je produkt $m \cdot n$ zapisan kot vsota nekaterih od števil $n, 2n, 4n, 8n, \dots, 2^k n$. V zgornji vsoti so od nič različni sumandi seveda tisti, pri katerih je ostanek po deljenju z dva, to je pripadajoči b_j , enak 1. To pa je tam, kjer imamo v levem stolpcu liho število. Če je v levem stolpcu sodo število, je ustrezen produkt s potenco dvojke pomnožen z 0, zato smo ga prečrtali. To pomeni, da je naš način množenja pravilen.

Vidimo, da je vseeno vredno se naučiti vse poštevank. Število operacij (množenj in delenj z 2 ter seštevanj), ki jih moramo izvesti pri tem množenju, je namreč zelo veliko v primerjavi z ustreznim številom operacij pri običajnem množenju.

Mirko Dobovišek

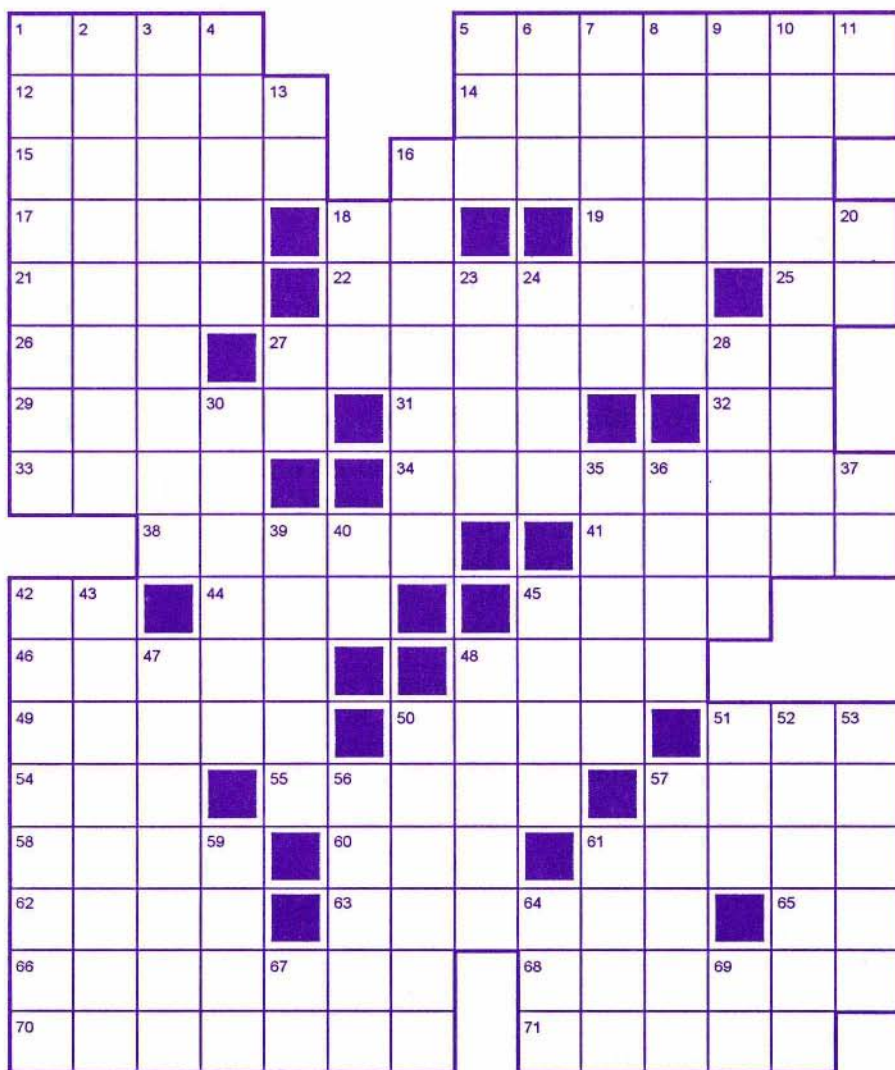
SLAMICA

Koliko sme največ biti dolga ravna slamica, da po njej še lahko navpično iz kozarca pijemo sok?

Matjaž Vencelj

KRIŽANKA “STAROGRŠKI MATEMATIKI”

Tokrat je pred vami križanka, v kateri boste našli 13 starogrških matematikov in filozofov. Opisi zanje so v debelejšem tisku.



VODORAVNO:

1. klic, poziv ljudstvu, 5. grški matematik iz 3.stoletja, ki je prvi sistematično obravnaval algebro in preučeval enačbe z racionalnimi rešitvami, te se še danes imenujejo po njem, 12. atensko pristanišče, 14. največji antični matematik, ki se je ukvarjal s ploščinami ravninskih likov in prostornino teles ter med drugim izračunal zelo natančen približek števila π , 15. trava druge košnje, 16. grški matematik iz 4. stoletja pred našim štetjem, ki je obravnaval števila, uvrščamo ga med pitagorejce, 17. prečni drog v kozolcu, 18. igralna karta z enim znakom na sredini, 19. večja reka v južni Sibiriji, ki izvira v Mongoliji in se izliva v Amur, 21. jegulji podobna velika roparska morska riba, 22. industrijsko oblikovanje (naša pisava), 25. začetnici igralca Rozmana, 26. izbočen del obraza, 27. slovenska igralka (Stanislava), 29. najdaljši pritok Oba, 31. oče, 32. začetnici dirigenta in skladatelja Danona, 33. mesto s katedralo v južni Španiji, 34. večji kraj pri Domžalah z zelo razvitim drobnim gospodarstvom, 38. večje mesto v Zambiji ob meji z Zairom, 41. začetnik starogrške geometrije in astronomije, trgovec iz Mileta, 42. začetnici avstrijskega pisatelja Handkeja, po materi slovenskega rodu, 44. dan v sredini meseca po starorinskem koledarju, 45. sprednji del trupa, 46. kraj nad Slovensko Bistrico, 48. čebelji samec, 49. zdravilo, pridobljeno iz opija, 50. kozje parjenje, 51. meliški pesnik, dobitnik Nobelove nagrade leta 1990 (Octavio), 54. zaščitno premazno sredstvo, 55. skupek med seboj povezanih stvari, 57. slovenski skladatelj zabavne glasbe (Mojmir), 58. star angleški kolidž zahodno od Londona, 60. tanek izrastek na glavi, 61. grški matematik, ki je izpeljal (po njem imenovan) obrazec za ploščino trikotnika in računal prostornine teles, 62. ime teniške igralka Jaušovec, 63. veliki grški matematik, ki je postavil temelje današnji geometriji, 65. začetnici ilustratorke Osterc, 66. predsednik Toga (Etienne), 68. del večje vojaške enote v razporeditvi eden za drugim, 70. jezdec, jahač, 71. gora nad Bovcem z najvišje ležečimi smučišči v Sloveniji.

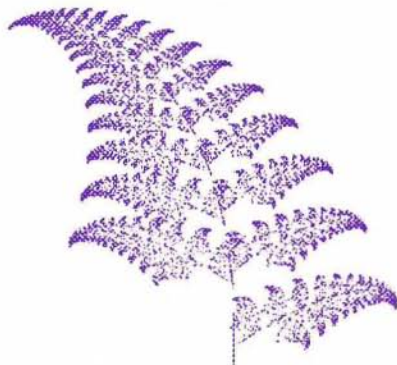
NAVPIČNO:

1. grški matematik, preučeval je krivulje, ki jih dobimo pri preseku okroglega stožca, 2. grški filozof s Samosa, ki je svetu znan predvsem po izreku o pravokotnem trikotniku, 3. grški matematik in geograf, ki je izračunal obseg Zemlje in odkril rešeto za določanje praštevil, 4. slovenski igralec in gledališki vzgojitelj (Ivan, 1888 – 1950), 5. poklonjen predmet, 6. mehko usnje iz kož divjadi, 7. zunanji, varovalni del naprave, okrov, 8. vezni kos z navojem pri ceveh hišne napeljave, 9. šiitska milica v Libanonu, 10. neubranost, disharmonija, 11. različna soglasnika, 13. začetnici igralka Avbelj, 16. otok pred severozahodnim rtom Sardinije, 18. ime tenorista in glasbenega pedagoga Dariana, 20. sto kvadratnih metrov, 23. zadnja avstrijska kraljica, 24. sirski predsednik (Hafez el), 27. začetnici filmskega režiserja Šprajca, 28. slovenski operni baritonist in režiser, organizator slovenske opere (Josip, 1841 – 1902), 30. velika azijska država, 35. človek v prvih letih življenja, 36. maščoba v trdnem stanju, 37. znižana nota "e", 39. ameriški dramatik, pisec filmskih scenarijev (Clifford, 1906 – 1963), 40. avtomobilska oznaka italijanskega mesta Lecceja, 42. aleksandrijski matematik in astronom, začetnik trigonometrije, avtor "Veliškega zbornika astronomije" ali Almagesta, 43. edina omenjena starogrška matematičarka, avtorica komentarjev o klasičnih matematikih, 45. zemlja, 47. aleksandrijski matematik, razlagalec pitagorejske aritmetike, 48. zelo slišen zvok ob udarcu ali padcu, 50. kakovostno dalmatinsko črno vino, 51. slovenska igralka (Vera, poročena Eržen), 52. grški bog sonca, 53. grški filozof in matematik iz Elea, ki se je ukvarjal z neskončno velikim in neskončno majhnim, avtor več paradoksalnih plemenov (npr. o Ahilu in želvi), 56. rodovna skupacija v praskupnosti, 57. mesto ob reki Meuse v severovzhodni Franciji, 59. ime slovenske sopranistke Vidmar, 61. bivalna zgradba, 64. albanska denarna enota, 67. začetnici TV voditeljice Longyke, 69. simbol za litij.

Marko Bokalič

O PRESLIKAVAH RAVNINE, PRAPROTI IN STISKANJU PODATKOV

Kaj imajo skupnega preslikava ravnine, praprot, kot jo vidite na sliki 1, in stiskanje podatkov? Na prvi pogled nič. Kot bomo videli s pomočjo članka iz novembrske številke revije PC Magazine, pa zveza med njimi obstaja. Tako smo praprot narisali s pomočjo štirih preprostih preslikav ravnine. Če sliko dobro pogledate, lahko opazite, da je vsak list kopija celotne praproti. To lastnost pa uporablja tudi postopek, ki ga uspešno uporabljajo za stiskanje (kompresijo) podatkov.



Slika 1.

Točkam, ki so nekaj časa mirno ždele na koordinatni ravnini, je postalo dolgčas. Zato so se odločile, da si malo pretegnejo noge. Ker tako odlična združba ne more početi ničesar, ne da bi to dobro pretehtala, so to pretegovanje nog opravile po načrtu. Tako se je vsaka točka T s svojega starega mesta, podanega kot par koordinat (x, y) , odpravila na novo mesto T' , katerega položaj je bil dan z (x', y') . Pri tem je veljalo

$$x' = ax + by + e$$

$$y' = cx + dy + f.$$

Da bi bilo potovanje zanimivejše, so se vrednosti koeficientov a, b, c, d, e in f od časa do časa spremenile.

Tako se je na pot odpravila tudi točka $(0, 0)$. Ker točke hodijo zelo hitro, je dokaj hitro opravila 10000 korakov. Kot zelo sistematična oseba si je skrbno beležila vsa mesta, ki jih je obiskala, pa tudi koeficiente, ki jih je pri vsakem premiku uporabila za izračun svojega novega položaja.

Opazila je, da so se izmenjevali le štirje nabori koeficientov, vendar so nekateri nastopali pogosto, drugi pa redkeje. Zložila jih je v tabelo:

a	b	c	d	e	f	koliko
0.00	0.00	0.00	0.16	0.00	0.00	100
0.85	0.04	-0.04	0.85	0.00	1.60	8500
0.20	-0.26	0.23	0.22	0.00	1.60	700
-0.15	0.28	0.26	0.24	0.00	0.44	700

Nad sliko obiskanih točk (slika 2) pa se je še sama začudila: "Saj to je čisto prava praprota."



Slika 2.

Preslikavam, kot so jih opravile naše točke, učeno rečemo afine preslikave. Morda se bomo z njimi natančneje spoznali kdaj drugič. Ker pa smo tokrat v računalniškem delu Preseka, nas predvsem zanima, kako bi tudi mi narisali takole praproto. Zadeva je preprosta. Kot vidimo, moramo uporabiti štiri afine preslikave. Vsaka preslikava ima prirejeno še pogostost uporabe, ki določa njeno pomembnost. V našem primeru je najpomembnejša druga preslikava, ki nastopa v 85% primerov.

Začnemo s točko $(0,0)$ in s podanimi verjetnostmi izberemo eno od afinih preslikav. Izračunamo novo točko in to ponavljamo. Sprva nesmiselni razpored točk se nam bo ob dovolj ponovitvah izoblikoval v sliko praproti. Slike zaradi naključne izbire preslikav sicer niso vedno povsem

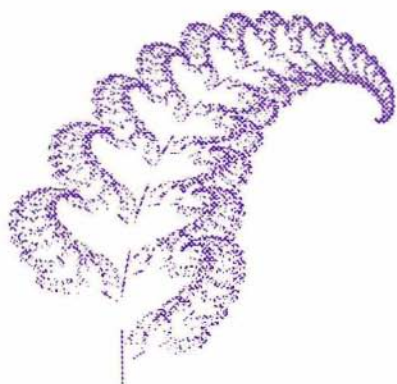
enake, vendar pa jih pri dovolj velikem številu točk s prostim očesom skoraj ne moremo ločiti. Čeprav ne dvomim, da bi znali program, ki nariše sliko, napisati tudi sami, ga vseeno zapišimo še tukaj.

```
SCREEN 12
WINDOW (-4, 0)-(6, 10)
RANDOMIZE TIMER
X = 0 : Y = 0
WHILE INKEY$ = ""
    R = RND
    IF R < .01 THEN
        A = 0: B = 0: C = 0: D = .16: E = 0: F = 0
    ELSEIF R < .86 THEN
        A = .85: B = .04: C = -.04: D = .85: E = 0: F = 1.6
    ELSEIF R < .93 THEN
        A = .2: B = -.26: C = .23: D = .22: E = 0: F = 1.6
    ELSE
        A = -.15: B = .28: C = .26: D = .24: E = 0: F = .44
    END IF
    NOVIX = (A * X) + (B * Y) + E
    NOVIY = (C * X) + (D * Y) + F
    X = NOVIX
    Y = NOVIY
    PSET (X, Y), 2
WEND
```

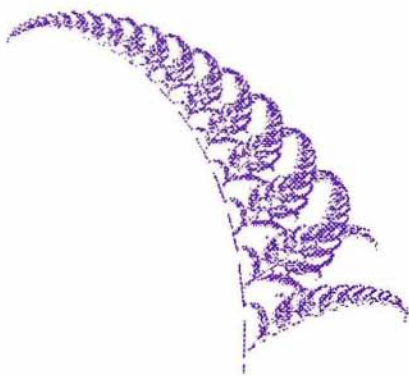
Program je zapisan v QBASICU, programskem jeziku, ki ga lahko uporabljajo vsi, ki imajo na računalnikih operacijski sistem MS-DOS, pa čeravno za ta programski jezik verjetno še vedo ne. Pokličemo ga z ukazom QBASIC in vtipkamo gornje ukaze. S stavkom SCREEN 12 povemo, da uporabljamo grafični način VGA. Točke, ki jih določajo naše štiri afine preslikave, ležijo v kvadratu $(-4, 6) \times (0, 10)$. Zato s ukazom WINDOW poskrbimo, da bomo sliko dobili raztegnjeno na cel zaslon. No, včasih nam kakšna točka pobegne z zaslona, vendar takih enostavno ne upoštevamo. Glavna zanka, v kateri generiramo točke, se ponavlja, dokler ne pritisnemo poljubne tipke. V njej glede na vrednost naključnega števila izberemo ustrezno preslikavo in s stavkom PSET (X,Y), 2 narišemo zeleno (to barvo določa število 2) točko.

Sedaj, ko je program napisan, se lahko malo poigramo s koeficienti v tabeli. Z nekaj poskušanja in kombiniranja lahko ustvarimo prav zanimive slike. Nekaj jih vidimo na slikah 3, 4 in 5. S poskušanjem tudi ugotovimo, da če izpustimo tretjo preslikavo, izgubimo levo polovico veje, četrta preslikava pa je zadolžena za desno stran. Koeficienta b in c skrbita za upognjenost praproti, koeficient f pa vpliva na njeno "potlačenost". Razlogov, zakaj s kombinacijo teh štirih preslikav dobimo sliko praproti,

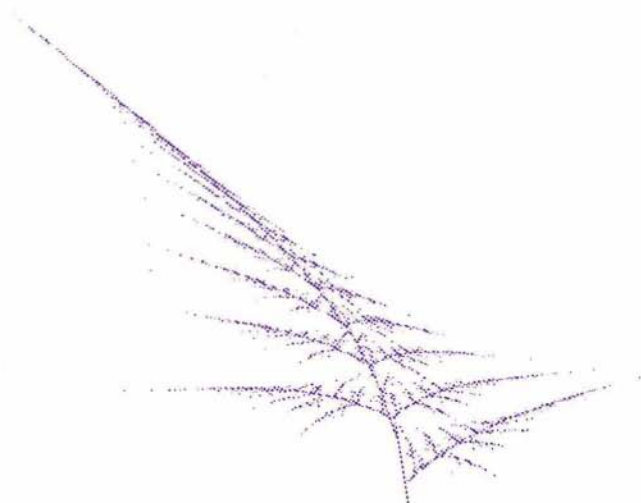
ni lahko pojasniti. Osnovni ključ je samopodobnost slike – veje, ki sestavljajo glavno vejo praproti, so same spet “praproti v malem”. Afine preslikave nam omogočajo, da del ravnine povečamo ali pomanjšamo, ga zasukamo in prestavimo v poljubni smeri. Če torej vzamemo majhen kvadrant iz slike praproti, ga lahko s primernim zaporedjem afinih preslikav razmnožimo po vsej ravnini tako, da nam sestavi celotno sliko.



Slika 3.



Slika 4.



Slika 5.

In kje je tukaj stiskanje podatkov? Da bi v računalnik shranili celotno sliko 2, nam ni potrebno shraniti podatkov, katera izmed $640 \cdot 480 = 307200$ točk zaslona je pobarvana in katera ne, ampak le tabelo koeficientov štirih afinih preslikav. V prvem primeru bi potrebovali približno $307200/8 \doteq 38000$ zlogov pomnilnika. Ker za hranjenje realnega števila ponavadi potrebujemo štiri zloge, za hranjenje tabele koeficientov potrebujemo le $4 \cdot 7 \cdot 4 = 112$ zlogov. To pa je kar 340-kratni prihranek. Si predstavljate, da bi lahko vse podatke v računalniku hranili tako učinkovito. Na eno samo disketo bi šlo več podatkov kot na disk velikosti 400 MB. Konec problemov z vedno premajhnimi diski! In kako to, da nam na diskih naših računalnikov še vedno primanjkuje prostora? Zarota prodajalcev diskov? Žal ni tako. Postopek stiskanja je namreč zelo počasen in računsko zahteven. Prvotne podatke v nestisnjeni obliki lahko dobimo precej hitro – naš program nam je iz stisnjenega zapisa slike praproti (tabele koeficientov in verjetnosti izbir posameznih afinih preslikav) kar hitro prikazal njeno podobo na zaslon. Določiti, kako podatke stisniti, pa gre veliko počasneje. Izredno težavno je namreč določiti vse potrebne preslikave, njihovo število, koeficiente in verjetnosti. Drugi razlog je, da običajno podatki niso dovolj "samopodobni". Zato jih ni mogoče učinkovito opisati z nekaj afinimi transformacijami. Bolj uspešno je tako opisovanje pri slikah. Tam namreč "samopodobnost" delov slike lažje dosežemo, če malo "pogoljufamo". Pri sliki namreč (običajno) ni nič hudega, če kako točko malo "popravimo", saj tega praktično ne bomo opazili. Res pa je, da slika, ki jo bomo dobili iz opisa z afinimi transformacijami, ne bo povsem enaka originalu. To si pri sliki lahko dovolimo, pri drugačnih podatkih pa seveda ne. Zato tam uporabljamo drugačne metode stiskanja, ki pa so veliko manj učinkovite. Ponavadi prihranimo največ pol prostora – dosežemo torej faktor 2.

Kot smo že omenili, je postopek opisovanja slike z afinimi preslikavami zelo zapleten in zahteva veliko časa. Dva znanstvenika sta razvila postopek, s katerim lahko to naredimo pri poljubni sliki v sprejemljivem času. Tako je kar nekaj slik, predvsem v multimedijskih enciklopedijah (npr. v Microsoftovi Encarti), zapisanih na ta način. Vsi podatki o postopku niso znani, saj je sam postopek naproday v obliki programa. O njem vemo to, da sliko razdeli na posamezna nepravilna območja in potem določi ustrezne affine preslikave. Te niso vedno le štiri. Lahko jih je tudi več deset ali pa tudi več kot sto. Na ta način dosežejo, da za zapis posamezne slike porabijo v povprečju okoli stokrat manj prostora.

Matija Lokar

DEVET VPRAŠANJ O ŠIROKIH ŠTEVILIH

Naravno število bomo imenovali *široko*, če je vsota njegovih števk v desetiškem zapisu enaka njihovemu produktu. Vsoto števk bomo imenovali *širina* števila. Opremljeni s tema definicijama poskusimo razrešiti naslednja vprašanja:

1. Katera med naslednjimi števili so široka:

7, 22, 123, 1234, 13131, 121212?

2. Poišči vsa dvomestna široka števila. Namig: takih števil je zelo malo.
3. Opisi vsa široka števila, ki imajo vse števke enake.
4. Poišči vsa široka števila širine 3. Poišči še vsa s širino 4.
5. Ali za vsako naravno število n obstaja široko število širine n ? Za $n = 1, 2, \dots, 9, 10$ trditev drži. Na primer, za $n = 9$ lahko vzamemo kar število 9, pri $n = 10$ pa število 11125.
6. Poišči vsa široka števila s širino 1995.
7. Izmisli si opis poljubno velikih širokih števil.
8. Prejšnja točka trdi, da je širokih števil neskončno. Utemelji, da širokih števil z enako širino ne more biti neskončno.
9. Za konec pa še ena programerska. Videli smo, da je širokih števil neskončno. Ni pa jasno, ali jih je kar nekaj, bolj malo, zelo malo ali celo zelo zelo malo. Ugotovi torej, koliko je širokih števil, ki so manjša od milijarde (ali pa vsaj od milijona).

Martin Juvan

GEOMETRIJSKA IN HARMONIČNA VRSTA

Seštevanje realnih števil je po definiciji preslikava

$$x, y \rightarrow x + y,$$

ki paru dveh (poljubnih) realnih števil priredi tretje, njuno **vsoto**; množica realnih števil je za to operacijo komutativna grupa, pri čemer je enota število 0, nasprotni element števila z pa je $-z$.

Seštevanje je potemtakem seštevanje **dveh** števil. Ker velja zakon asociativnosti, lahko vsoto posplošimo tako, da je v njej poljubno mnogo sumandov:

$$x_1 + x_2 + x_3 := (x_1 + x_2) + x_3,$$

$$x_1 + x_2 + x_3 + x_4 := (x_1 + x_2 + x_3) + x_4$$

in tako naprej. V vsakem primeru pa je v vsoti le **končno število** členov.

Če je v vsoti veliko členov, ji včasih rečemo **končna vrsta** in uvedemo zanjo poseben simbol:

$$x_1 + x_2 + \cdots + x_n =: \sum_{k=1}^n x_k. \quad (1)$$

Znak za seštevanje je podan z veliko grško črko sigma, ki označuje isti glas kot latinski S in namiguje na začetnico latinske besede *summa* = vsota.

Nekaj preprostih primerov:

$$\sum_{k=1}^n a = a + a + \cdots + a = na.$$

$$\sum_{k=1}^n k = 1 + 2 + \cdots + n = n(n+1)/2.$$

$$\sum_{k=0}^n (a + kd) = a + (a + d) + (a + 2d) + \cdots + (a + nd) = (n+1)(a + nd/2)$$

(vsota **aritmetičnega** zaporedja).

$$\sum_{k=0}^n ap^k = a + ap + ap^2 + \cdots + ap^n = a(1 - p^{n+1})/(1 - p) \quad (2)$$

(vsota **geometrijskega** zaporedja).

Matematika pa gre še dlje in uvede **neskončno vrsto** (ali kar **vrsto**): vzamemo neskončno zaporedje $x_1, x_2, x_3, \dots$ realnih števil in iz njega naredimo

$$x_1 + x_2 + x_3 + \cdots = \sum_{k=1}^{\infty} x_k. \quad (3)$$

Seveda pa je tej reči najprej treba dati vsebino. Če so vsi členi od nekega mesta dalje enaki 0, naj bo to kar običajna vsota, npr.:

$$x_1 + \cdots + x_m + 0 + 0 + \cdots := x_1 + \cdots + x_m.$$

Če pa niso, pač ravnamo "po občutku", vzamemo računalnik in seštejemo, recimo, tisoč členov vrste (3); če pri tem ugotovimo, da so nadaljnji členi vrste že tako majhni, da jih pri računanju z računalnikom lahko zanemarimo, rezultat na ekranu razglasimo za **vsoto** ali **vrednost** vrste (3).

Zadnji stavek ni ravno vzor matematične natančnosti. Že zato ne, ker je vsota vrste tedaj odvisna od kvalitete računalnika. Poskusimo biti zato malce bolj objektivni! Uvedimo **delne vsote** vrste (3):

$$s_1 := x_1, \quad s_2 := x_1 + x_2, \quad s_3 := x_1 + x_2 + x_3, \dots$$

Na splošno torej velja:

$$s_n := \sum_{k=1}^n x_k.$$

Sedaj pa recimo: Število S je vsota vrste (3):

$$S = \sum_{k=1}^{\infty} x_k, \quad (4)$$

če se vse delne vsote s_n z dovolj velikimi indeksi razlikujejo od S za tako malo, kot le hočemo. Če je torej indeks n delne vsote s_n res zelo velik, je razlika $|S - s_n|$ manjša od še tako majhne vnaprej postavljene vrednosti. To simbolično zapišemo takole:

$$S = \lim_{n \rightarrow \infty} s_n \quad (5)$$

in preberemo: " S je **limita** zaporedja delnih vsot" ali "**Delne vsote konvergirajo** k S ", ali tudi: "**Delne vsote** gredo k številu S ". Simbol $\lim$ je okrajšava latinske besede *limes*, ki v dobesednem prevodu pomeni mejo.

Že iz definicije same sledi, da vrste nimajo zmeraj vsote. Če se namreč vse delne vsote s_n z dovolj velikimi indeksi ločijo od vsote vrste za poljubno malo, se tudi med seboj ločijo največ za dvakratni "poljubno malo". Ker pa se zaporedni delni vsoti s_{n-1} in s_n ločita ravno za x_n , je potemtaka člen x_n z dovolj velikim indeksom n nujno zelo blizu 0. Sklepamo tedaj, da če vrsta (3) ima vsoto, nujno velja:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = 0. \quad (6)$$

Tako npr. vrsta $1 + 1 + 1 + \dots$ nima vsote.

Pravzaprav je na mestu vprašanje, ali sploh ima kakšna vrsta s pretežno neničelnimi členi svojo vsoto.

Zanimivo je, da so se s tem vprašanjem srečali že antični Grki. Slavni Zenonov paradoks govori ravno o tem. Ustrelimo proti tarči (v originalni verziji paradoksa z Ahilom lovimo želvo); izstrelek najprej preleti pol poti, potem pol od polovice, potem še pol od polovice od polovice, pa tako naprej brez konca. No, in prav zato, ker preletavanje polovičk nima konca, izstrelek morda nikoli ne prileti do tarče. Dejansko se sprašujemo, ali ima vrsta

$$\frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \frac{1}{8} + \frac{1}{16} + \dots = \sum_{k=1}^{\infty} \left(\frac{1}{2}\right)^k \quad (7)$$

svojo vrednost. Zdrava pamet nas uči, da jo mora imeti in da je ta vsota enaka 1 (to je, cela pot). Vendar ne smemo zato misliti, da je bil Zenon malce pregloboko pogledal v kozarec. Prav nasprotno je res: dejstvo, da je opazil problem v sicer tako samoumevnem pojavu, jasno kaže na njegove izjemne intelektualne sposobnosti.

Geometrijska vrsta je

$$a + ap + ap^2 + ap^3 + \dots = \sum_{k=0}^{\infty} ap^k.$$

Delno vsoto s_n imamo že v (2). Recimo, da je $-1 < p < 1$. Kaj se dogaja s p^{n+1} , ko n raste preko vseh mej? Natančen račun je nekoliko dolg, za silo pa se da to ugotoviti tudi z računalnikom. Odtipkajmo katerokoli število med -1 in 1 in pritiskajmo tipko kvadriranje. Primer:

$$\begin{array}{l} 0,990000 \quad \boxed{x^2} \quad 0,980100 \quad \boxed{x^2} \quad 0,960596 \quad \boxed{x^2} \quad 0,922745 \quad \boxed{x^2} \quad 0,851458 \quad \boxed{x^2} \\ 0,724980 \quad \boxed{x^2} \quad 0,525596 \quad \boxed{x^2} \quad 0,276252 \quad \boxed{x^2} \quad 0,076315 \quad \boxed{x^2} \quad 0,005824 \quad \boxed{x^2} \\ 0,000034 \quad \boxed{x^2} \quad 0,000000 \end{array}$$

Torej je $0,99^{2048} = 0$ na vsaj 6 decimalk.

Tako eksperimentiranje z žepnim računalnikom ni vselej zanesljivo, v tem primeru pa je dobra osnova za (pravilno!) domnevo:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} p^{n+1} = 0.$$

Od tod in iz (2) lahko sklepamo, da velja:

$$\sum_{k=0}^{\infty} ap^k = \frac{a}{1-p}. \quad (8)$$

V (7) je $a = p = \frac{1}{2}$ in rezultat je res 1.

Če pa ne velja $-1 < p < 1$, geometrijska vrsta nima vsote; precej očitno je, da (6) tedaj ne velja.

Ali je res pogoj (6) tisti, ki odloča o tem, ali bo vrsta imela vsoto ali ne? Glede na to, kako smo ga dobili (torej iz predpostavke, da vrsta ima vsoto), je pogoj (6) **potrben**, če naj vrsta ima vsoto. **Zadosten** pa ni.

Harmonična vrsta

$$1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \frac{1}{4} + \cdots = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k} \quad (9)$$

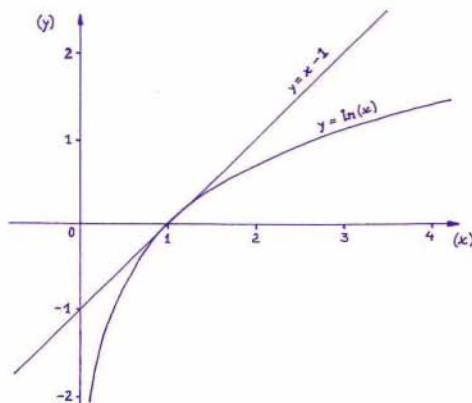
ima izpolnjen pogoj (6), saj se členi res manjšajo in so vse bliže 0. Pokazali pa bomo, da nima vsote. Drugače rečeno, če bi sešteli dovolj členov harmonične vrste, bi dobili poljubno velik rezultat.

V ta namen še malo eksperimentirajmo z žepnim računalnikom. Izberimo si poljuben pozitiven x in izračunajmo števili $x - 1$ ter $\ln(x)$ (naravni logaritem, torej logaritem z osnovo e). Hitro opazimo, da je $\ln(x)$ vedno manjši od $x - 1$, razen za $x = 1$, ko sta oba izraza enaka 0. Tako je npr.: $1 = 2 - 1 > \ln(2) = 0,693$; $-\frac{1}{2} = \frac{1}{2} - 1 > \ln(\frac{1}{2}) = -0,693$. Imejmo to za eksperimentalni dokaz ocene

$$\ln(x) \leq x - 1 \quad (x > 0). \quad (10)$$

S posebnim postopkom, ki se mu reče **odvajanje**, se da (10) tudi strogo dokazati.

Če narišemo grafa funkcij $x - 1$ in $\ln(x)$, dobi (10) preprosto vsebino: krivulja $y = \ln(x)$ ima premico $y = x - 1$ za tangento pri $x = 1$, pri čemer je - razen v dotikališču - premica nad logaritmsko krivuljo.



Slika 1.

Uporabimo (10)! Naj bo k naravno število, večje od 1.

$$\ln(k-1) = \ln\left(k\left(1 - \frac{1}{k}\right)\right) = \ln(k) + \ln\left(1 - \frac{1}{k}\right) \leq \ln(k) - \frac{1}{k}.$$

Od tod:

$$\ln(1) \leq \ln(2) - \frac{1}{2} \leq \ln(3) - \frac{1}{3} - \frac{1}{2} \leq \dots \leq \ln(n) - \frac{1}{n} - \frac{1}{n-1} - \dots - \frac{1}{2}.$$

Če povežemo le začetek in konec izpeljave, dobimo:

$$1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \dots + \frac{1}{n} \leq \ln(n) + 1. \quad (11)$$

Ponovno uporabimo (10), tokrat za $k \geq 1$.

$$\ln(k+1) = \ln\left(k\left(1 + \frac{1}{k}\right)\right) = \ln(k) + \ln\left(1 + \frac{1}{k}\right) \leq \ln(k) + \frac{1}{k}.$$

$\ln(n) \leq \ln(n-1) + \frac{1}{n-1} \leq \ln(n-2) + \frac{1}{n-2} + \frac{1}{n-1} \leq \dots \leq \ln(1) + \frac{1}{1} + \dots + \frac{1}{n-1}$, kar nam da:

$$\ln(n) + \frac{1}{n} \leq 1 + \frac{1}{2} + \dots + \frac{1}{n}. \quad (12)$$

Delna vsota $s_n = 1 + \frac{1}{2} + \dots + \frac{1}{n}$ harmonične vrste je torej vkleščena med meji

$$\ln(n) + \frac{1}{n} \leq s_n \leq \ln(n) + 1. \quad (13)$$

Ker z neomejeno naraščajočim n raste preko vseh mej tudi njegov logaritem $\ln(n)$ (čeprav res mnogo počasneje), pa (13) pove, da tudi delne vsote harmonične vrste neomejeno rastejo. Potemtakem harmonična vrsta nima vsote.

Ocena (13) se da za velike n izboljšati. Precej zahtevna izpeljava namreč pokaže, da za dovolj velik n velja poljubno natančno:

$$s_n \approx \ln(n) + C,$$

kar lahko zapišemo tudi takole:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} (s_n - \ln(n)) = C. \quad (14)$$

Pri tem je $C = 0,57721566\dots$ **Eulerjeva konstanta**, ravno tak čuden spak, kot sta števili $\pi = 3,14159\dots$ ali $e = 2,71828\dots$

Za konec še naloga, ki se jo da rešiti z uporabo (14). Do katerega n je treba sešteti harmonično vrsto, da bo dobljena delna vsota s_n približno 1994? Če bi imeli računalnik, ki bi računal z dovolj decimalkami in bi vsako milijonino sekunde prištel po en člen harmonične vrste, kaj menite, koliko sekund (ur, morda celo dni) bi sešteval do vsote 1994? (Odgovor: $n = 5,4 \cdot 10^{865}$; čas računanja = $1,7 \cdot 10^{852}$ let)

Anton Cedilnik

NA KOLIKO NAČINOV SE POLICIST LAHKO ZMOTI?

Policist je ustavil 4 pešce, ki so šli pri rdeči luči čez cesto. Skupno jih je oglobil s 16 tisočaki. Vzel je beležko in svinčnik ter začel računati, koliko mora vsak plačati. Takole je računal:

$$16 : 4 = \dots$$

4 v 6 gre enkrat, ostane 2; podpišem enico:

$$\begin{array}{r} 16 : 4 = 1 \dots \\ 12 \end{array}$$

Nato je ugotovil, da gre 4 v 12 še trikrat in je dobil rezultat $16 : 4 = 13$.

Kolegu policistu se je zdel rezultat nekoliko sumljiv, pa je napravil preizkus s seštevanjem:

$$\begin{array}{r} 13 \\ 13 \\ 13 \\ \underline{13} \\ 16 \end{array}$$

Pri tem je takole računal: $3 + 3 + 3 + 3 + 1 + 1 + 1 + 1 = 16$. Štima!

Za vsak slučaj so šli še h komandirju. Ta je vzel svinčnik in računal:

$$4 \times 3 = 12, 4 \times 1 = 4, \text{ seštejem } 12 + 4 = 16,$$

ter potrdil pravilnost računa.

In sedaj naloga za Presekove bralce: Poišči vsa dvomestna števila, za katera dobiš po zgornjem vzorcu "pravi" rezultat, ki naj bo tudi dvomestno število; delitelj naj bo enomesten.

Anton Suhadolc

LEPI USPEHI SLOVENSКИH DIJAKOV NA OLIMPIADAH IZ MATEMATIKE, FIZIKE IN RAČUNALNIŠTVA

Z računalniške olimpiade na Nizozemskem je naša srednješolska ekipa prinesla dve srebrni in eno bronasto medaljo, na fizikalni v Avstraliji so tekmovalci dobili eno bronasto in eno pohvalo, matematiki pa so v Kanadi dosegli tri pohvale.

ČESTITAMO!

Željko, M. s sodelavci: ALTIUS, CITIUS, FORTIUS, Društvo matematikov, fizikov in astronomov Slovenije, Učbeniki in priročniki, Ljubljana 1995, 212 str.

Knjiga z olimpijskim geslom v naslovu je delo osmih mladih avtorjev, študentov in asistentov matematike, ki so leta 1994 vodili priprave slovenske ekipe na mednarodno matematično olimpiado. Svoje zapiske s teh priprav so združili v enajst izbranih poglavij: Geometrija, Analitična geometrija, Kompleksna števila, Teorija števil, Neenakosti, Polinomi, Kombinatorika, Teorija grafov, Zaporedja, indukcija in še kaj, Diferenčne enačbe in Rodovne funkcije. Dodatno dvanajsto poglavje prinaša rešene naloge z mednarodnih matematičnih olimpiad od leta 1987 do lani.

V teoretičnem delu posameznega poglavja najdemo definicije in trditve, potrebne za reševanje nalog, ki slede v nadaljevanju poglavja. Dokazi trditve niso navedeni, čeprav se jih da večino izpeljati s srednješolskim znanjem matematike. Gre torej za nekakšen priročnik, s katerim na hitro spoznamo ali ponovimo določeno snov iz naslova poglavja.

Učencem, ki imajo radi matematiko, in njihovim mentorjem bodo dobrodošle naloge, ki jih v zbirki ni malo. Njihova posebna vrednost je v tem, da so dodane precej podrobne rešitve, iz katerih se da še marsikaj naučiti, četudi smo nalogo znali sami rešiti.

Naj zaključim z opozorilom, ki ga je v predgovoru knjige zapisal Matjaž Željko, avtor z največ zaslugami za nastanek priročnika: Knjiga ni zaključena zbirka napotkov in formul, namenjenih tekmovalcem iz matematike – je le zvezek, namenjen srednješolcem, ki jim šolski orehi niso dovolj trdi.

Knjigo lahko kupite pri Komisiji za tisk DMFAS, Ljubljana, Jadranka 19.

Marija Vencelj

31. TEKMOVANJE ZA ZLATO VEGOVO PRIZNANJE V ŠOLSKEM LETU 1994/95

Najboljši sedmošolci in osmošolci z občinskih tekmovanj so se v soboto, 20. maja 1995, pomerili v šestih regijah v naslednjem številu:

REGIJA	7. razred	8. razred
- Ljubljana	86	133
- Maribor	52	70
- Celje	26	37
- Koper	15	21
- Nova Gorica	9	16
- Novo mesto	15	23
SKUPAJ	203	300

Zlato Vegovo priznanje so prejeli sedmošolci, ki so osvojili najmanj 13 od 25 možnih točk, in osmošolci, ki so osvojili najmanj 16 od 25 možnih točk.

Vsem učencem, ki so osvojili zlato Vegovo priznanje, je Društvo matematikov, fizikov in astronomov Slovenije poklonilo knjigo *Številске križanke*.

Novost: V prihodnjem šolskem letu bo dosedanje občinsko tekmovanje nadomestilo področno tekmovanje za srebrno Vegovo priznanje.

Nagrade najuspešnejšim tekmovalcem:

7. razred

I. nagrada:

Miha JUKIČ, OŠ Center, Novo mesto;
Jure BEZGOVŠEK, OŠ Miha Pintarja Toleda, Velenje;
Barbara GROBELNIK, OŠ Nade Cilenšek, Griže;
Tina TONI, OŠ Notranjskega odreda, Cerknica.

II. nagrada:

Katja BAJEC, OŠ Center, Novo mesto;
Jaka HAJNŠEK, I. OŠ Rogaška Slatina, Rogaška Slatina;
Črtomir PREŠERN, OŠ Ledina, Ljubljana;
Miha ŠUŠTERŠIČ, OŠ Miroslava Vilharja, Postojna;
Sašo JELENČIČ, OŠ Stična, Ivančna Gorica.

III. nagrada:

Tomaž NAHTIGAL, OŠ Dr. Vita Kraigherja, Ljubljana;
Črto KREFT, OŠ Mladika, Ptuj.

8. razred:**I. nagrada:**

Klemen ČADEŽ, OŠ Ivana Groharja, Škofja Loka;
Rok ŠKUFGA, OŠ Ivana Groharja, Škofja Loka;
Samo JURETIČ, OŠ Milojke Štrukelj, Nova Gorica;
Ajda SKARLOVNIK, OŠ Prežihovega Voranca, Ljubljana;
Igor JAUŠOVEC, OŠ Slivnica, Orehova vas;
Tomaž WEISS, OŠ Tabor I, Maribor.

II. nagrada:

Jure KALIŠNIK, OŠ Bratov Juhart, Šempeter;
Nina JAMŠEK, OŠ Ivana Cankarja, Trbovlje;
Marjeta BUH, OŠ Šmartno pod Šmarno goro, Ljubljana-Šmartno.

III. nagrada:

Jani SLIVNIK, OŠ Cirkovce, Cirkovce;
Miha RENKO, OŠ Marjana Nemca, Radeče;
Gorazd KARER, OŠ Milojke Štrukelj, Nova Gorica;
Justin ČINKELJ, OŠ Ob Rinži, Kočevje;
Dejan LAVBIČ, OŠ Šmarje pri Jelšah;
Filip ŠRAMEL, OŠ Šmarje pri Jelšah;
Danijel KOVAČIČ, OŠ Valentina Vodnika, Ljubljana.

Aleksander Potočnik

10. DRŽAVNO TEKMOVANJE IZ ZNANJA RAČUNALNIŠTVA ZA OSNOVNOŠOLCE

Tudi v letošnjem letu so se najboljši računalničarji osnovnih šol Slovenije pomerili v znanju računalništva na državnem tekmovanju, ki je potekalo v sklopu FESTIVALA RAČUNALNIŠTVA na Fakulteti za elektrotehniko in računalništvo v Ljubljani od 12. do 14. 5. 1995.

10. jubilejno tekmovanje, kakor tudi vsa predtekmovanja (šolska in področna), že od vsega začetka uspešno vodi Komisija za računalništvo Zveze organizacij za tehnično kulturo Slovenije. Tokrat se je organizator še posebej potrudil, saj je ob tekmovanju potekalo še niz drugih dejavnosti,

kot npr. srečanje mladih raziskovalcev (zagovori raziskovalnih nalog iz področja računalništva), tekmovanje programov, okrogle mize za mentorje, predavanja in predstavitve, razstave itd. Izkazali so se tudi sponzorji, ki so prispevali izredno lepe in uporabne nagrade; glavni sponzor tekmovanja je bil HERMES SoftLab.

Tekmovanja se je udeležilo 118 osnovnošolcev iz vse Slovenije. Predhodno so tekmovali na 140 osnovnošolskih in 8 področnih tekmovanjih. Skupno se je tekmovanj v preteklem šolskem letu udeležilo okoli 2000 osnovnošolcev. Tekmovalci so imeli na vseh nivojih (šolsko, področno in državno) na voljo 2 šolski uri časa za reševanje nalog. Pri delu so lahko uporabljali poljubno literaturo, uradni programski jeziki tekmovanj pa so bili: LOGO, BASIC, VISUAL BASIC in PASCAL. Na državnem tekmovanju so učenci lahko reševali naloge tudi v drugih programskih jezikih.

Tekmovanja zahtevajo znanje:

- osnov informatike in računalništva,
- programiranja v izbranem programskem jeziku in
- praktično delo na računalniku.

Značilnost letošnjega jubilejnega tekmovanja osnovnošolcev je bila med drugim tudi uvedba nove tekmovalne skupine, in sicer objektno orientirano programiranje v okolju Windows s programskim jezikom VISUAL BASIC. To tekmovanje je letos potekalo le na državnem nivoju. Vsaka ekipa je najprej predstavila projekt oz. programski izdelek, ki ga je na šoli izdelala v sklopu priprav na tekmovanje. Republiška komisija je ta projekt ocenila, ekipe pa so v omejenem času (dve šolski uri) še dodatno reševale enostavnejšo nalogo.

Osnovnošolci so tekmovali v šestih starostnih skupinah in dodatni skupini VISUAL BASIC. V prvih dveh skupinah so uporabljali programski jezik LOGO, v ostalih štirih pa LOGO, BASIC ali PASCAL. Med najboljšimi so letos bili:

1. skupina (1. - 3. razred):

1. Rok Mejač, Osnovna šola Martina Krpana, Ljubljana;
2. Mitja Trampuš, Osnovna šola Majde Vrhovnik, Ljubljana;
3. Urban Čuješ, Osnovna šola Ob Dravinji, Slovenske Konjice;
4. Matjaž Veber, Osnovna šola Oskarja Kovačiča, Ljubljana.

2. skupina (4. razred):

1. Andrej Osterman, Osnovna šola Mengeš;
2. Andrej Veber, Osnovna šola Oskarja Kovačiča, Ljubljana;
3. Vito Tič, Osnovna šola Pod Goro, Slovenske Konjice;
4. Borut Likar, Osnovna šola Ledina, Ljubljana.

3. skupina (5. razred):

1. Primož Bratanič, Osnovna šola Louisa Adamiča, Grosuplje;
2. Ivo List, Osnovna šola Oskarja Kovačiča, Ljubljana;
3. Jure Merčun, Osnovna šola Maksa Pečarja, Ljubljana;
4. Marko Dolenc, Osnovna šola Polhov Gradec.

4. skupina (6. razred):

1. Aleš Zamuda, Osnovna šola Velika Nedelja;
2. Janez Langus, Osnovna šola Križe;
3. Davorin Lešnik, Osnovna šola Majšperk;
4. Aleš Hribar, Osnovna šola Mengeš.

5. skupina (7. razred):

1. Andraž Tori, Osnovna šola Oskarja Kovačiča, Ljubljana;
2. Dejan Dolenc, Osnovna šola Simona Jenka, Kranj;
3. Matej Breznik, Osnovna šola Valentina Vodnika, Ljubljana;
4. Miha Pirnat, IV. osnovna šola, Celje.

6. skupina (8. razred):

1. Jure Leskovec, Osnovna šola Polhov Gradec;
2. Miha Kadunc, Osnovna šola Josipa Plemlja, Bled;
3. Matevž Harlander, Osnovna šola Grm, Novo mesto;
4. Damjan Cvetko, Osnovna šola Prule, Ljubljana.

7. skupina (Visual Basic):

1. Iztok Heric, II. osnovna šola, Murska Sobota;
2. Blaž Fortuna, Osnovna šola Gorenja vas, Škofja Loka;
3. Egon Kocjan, Osnovna šola Jurija Dalmatina, Krško.

Vsem tekmovalcem iskreno čestitamo!

Ivan Gerlič

DRŽAVNO TEKMOVANJE OSNOVNOŠOLCEV IZ FIZIKE ZA ZLATA STEFANOVA PRIZNANJA 1994/95

Društvo matematikov, fizikov in astronomov Slovenije in Oddelek za fiziko na Pedagoški fakulteti v Ljubljani sta bila organizatorja 15. državnega tekmovanja iz fizike za osnovnošolce. V predavalnicah in laboratorijih Pedagoške fakultete v Ljubljani se je v soboto 6. 5. 1995 pomerilo v znanju fizike 33 ekip sedmih in 33 ekip osmih razredov.

Na državnem tekmovanju so sodelovali najboljše uvrščeni učenci na področnem tekmovanju, ki je bilo 1. 4. 1995 v devetih mestih Slovenije. Sodelovalo je 312 ekip sedmih in 352 ekip osmih razredov, skupaj 1328 učencev. Tretjina udeležencev je prejela srebrna Stefanova priznanja.

V letošnjem šolskem letu so učenci sedmih in osmih razredov prvič prejeli za sodelovanje na tekmovanju enotne bronaste, srebrne in zlate Stefanove značke.

Najuspešnejši tekmovalci za zlata Stefanova priznanja:

Šola	Prvi tekmovalec	Drugi tekmovalec	Točke
------	-----------------	------------------	-------

7. razred

1. nagrada

OŠ Ledina, Ljubljana	Črtomir Prešern	Matej Kalan	13,5
OŠ Rogaska Slatina	Jaka Hajnšek	Lidija Prah	13,5

3. nagrada

OŠ Maksa Pečarja, Ljubljana	Eva Fürst	Vita Vukasinovič	13
OŠ Simona Jenka, Kranj	Dejan Dolenc	Gregor Hribar	13
OŠ Josipa Plemmlja, Bled	Žiga Jan	Jure Slivnik	13
OŠ Dob	Metka Osredkar	Janez Svetlin	13

Priznanja

OŠ Oskarja Kovačiča, Ljubljana	Andraž Tori	Miha Ravnik	12
OŠ Dravlje, Ljubljana	Matija Lešnjak	Alja Brajič	11,5
OŠ Miha Pintarja Toleda, Velenje	Jure Bezgovšek	Sonja Cinsegar	11,5
OŠ Mirna Peč	Špela Zaletel	Matej Bobnar	11,5
OŠ Lenart	Lovro Žiberna	Zoran Duh	11
OŠ Rače	Matjaž Ogrizek	Tadej Vindiš	11

8. razred

1. nagrada

OŠ Tabor I, Maribor	Tomaž Weiss	Klemen Sitar	17
---------------------	-------------	--------------	----

2. nagrada

I. OŠ Slovenj Gradec	Matej Perkuš	Luka Pušnik	16
----------------------	--------------	-------------	----

3. nagrada

OŠ Milojke Štrukelj, Nova Gorica	Gorazd Karer	Samo Juretič	15
----------------------------------	--------------	--------------	----

Šola	Prvi tekmovalac	Drugi tekmovalac	Točke
------	-----------------	------------------	-------

Priznanja

OŠ Lenart	Alen Stanojevič	Jasmina Ferk	14,5
OŠ Narodnega heroja M. Pečarja, Ljubljana	Primož Bedenk	Boris Car	14
OŠ Dr. Vita Kraigherja, Ljubljana	Luka Lipar	Miha Cirman	13
OŠ Bistrica, Tržič	Jure Kokalj	Primož Meglič	13
OŠ Lava, Celje	Mitja Jurkovnik	Vasilij Centrih	12,75
IV OŠ, Celje	Jure Svetičič	Samo Penič	12,5
OŠ Cvetka Golarja, Škofja Loka	Jernej Porenta	Jure Orešek	12,5
OŠ Cirkovce	Jani Slivnik	Uroš Medved	12
OŠ Koroških jeklarjev, Ravne na Koroškem	Miha Erjavec	Matej Rozman	12

Prvih deset ekip osmih razredov se bo udeležilo fizikalnega raziskovalnega tabora, ki bo na Bledu od 15. do 30. 9. 1995. Nagrado podeljuje DMFA Slovenije v sodelovanju in pod pokroviteljstvom Ministrstva za šolstvo in šport Republike Slovenije.

Jelislava Sakelšek

39. MATEMATIČNO TEKMOVANJE SREDNJEŠOLCEV SLOVENIJE

V sobotnem dopoldnevu 22. aprila 1995 se je 169 dijakov v prostorih Gimnazije Kranj spopadlo z nalogami na 39. matematičnem tekmovanju srednješolcev Slovenije, popoldan pa so si lahko ogledali Dovžanovo sotesko, protokolarni objekt Brdo ali pa Jezersko in Predvdor.

Za uspešno reševanje nalog je državna tekmovalna komisija podelila naslednje nagrade in pohvale:

PRVI LETNIK:**1. nagrada:**

Tadej Starčič, Gimnazija Bežigrad, Ljubljana.

3. nagrada:

Tomaz Kosem, Srednja tehniška šola, Celje; Matija Mazi, Gimnazija Bežigrad, Ljubljana; Martin Knapič, Gimnazija Šentvid, Ljubljana.

Pohvala:

Matjaž Titan, Gimnazija Murska Sobota; Andrej Pukšič, Srednja tehniška šola, Celje; Primož Berlič, Gimnazija Ledina, Ljubljana; Matej Rizman, II. gimnazija Maribor; Dejan Beznec, Gimnazija Murska Sobota; Reya Rok, Gimnazija Škofja Loka; Damir Podlessek, Gimnazija Murska Sobota; Martin Milanič, Gimnazija Koper; Andreja Avberšek, Gimnazija Kranj.

DRUGI LETNIK:**1. nagrada:**

Gorazd Bizjak, Gimnazija Bežigrad, Ljubljana.

2. nagrada:

Matjaž Konvalinka, Gimnazija Bežigrad, Ljubljana; Mitja Šlenc, Gimnazija Bežigrad, Ljubljana; Andrej Vodopivec, Gimnazija Celje.

Pohvala:

Klemen Kenda, Gimnazija Jurija Vege, Idrija; Saša Fratina, Gimnazija Bežigrad, Ljubljana; Mitja Luštrek, Srednja šola Rudolfa Maistra, Kamnik; Gorazd Lampič, Gimnazija Bežigrad, Ljubljana.

TRETJI LETNIK:**1. nagrada:**

Gorazd Brumen, Gimnazija Bežigrad, Ljubljana.

3. nagrada:

Polona Grešak, Gimnazija in ESŠ, Trbovlje; Sanja Fidler, Gimnazija Bežigrad, Ljubljana; Jernej Tonejc, SŠC - Gimnazija Ptuj; Karla Šmigoc, Srednja tehniška šola, Celje.

Pohvala:

Anže Slosar, Gimnazija Bežigrad, Ljubljana; Kristijan Cafuta, SŠC - Gimnazija Ptuj; Blaž Vehar, Gimnazija Šentvid, Ljubljana; Matjaž Košak, Gimnazija Novo mesto; Miha Vuk, Gimnazija Bežigrad, Ljubljana; Andrej Zorko, Gimnazija in ek. sr. šola, Brežice; Sašo Živanovič, Srednja tehniška šola, Celje; Drago Bokal, Gimnazija Bežigrad, Ljubljana; Bojan Pavšič, II. gimnazija Maribor.

ČETRTI LETNIK:**1. nagrada:**

Mitja Pirc, Gimnazija in ek. sr. šola, Brežice; Martin Klanjšek, Gimnazija Bežigrad, Ljubljana.

3. nagrada:

Jernej Barbič, Gimnazija Tolmin; Andrej Studen, Gimnazija Kranj; Dejan Velušček, Gimnazija Bežigrad, Ljubljana; Tadej Novak, Srednja šola Rudolfa Maistra, Kamnik.

Pohvala:

Blaž Mavčič, Gimnazija Bežigrad, Ljubljana; Sašo Pukšič, Srednja tehniška šola, Celje; Peter Kink, Gimnazija in ek. sr. šola, Brežice; Martin Jesenko, Gimnazija Bežigrad, Ljubljana; Marko Žnidarič, II. gimnazija Maribor; Andrej Šalamun, Gimnazija in ESŠ, Trbovlje; Manca Čirk, Gimnazija Kranj; Matjaž Pugelj, Sr. tehn. in zdrav. šola, Novo mesto; Anzej Lemut, Gimnazija Kranj.

V ekipo, ki je zastopala Slovenijo na Mednarodni matematični olimpiadi v Kanadi, so se uvrstili: Jernej BARBIČ, Gorazd BRUMEN, Polona GREŠAK, Martin KLANJŠEK in Mitja PIRC.

Matjaž Željko

33. TEKMOVANJE IZ SREDNJEŠOLSKE FIZIKE

Krog tekmovanj iz srednješolske fizike se je letos začel 8. aprila z regijskim tekmovanjem. Udeležilo se ga je okrog 900 tekmovalcev iz 50 srednjih šol. Tekmovanje je hkrati potekalo na osmih srednjih šolah: Gimnaziji Poljane Ljubljana, Gimnaziji Bežigrad Ljubljana, II. gimnaziji Maribor, Gimnaziji Celje - Center, Gimnaziji Kranj, Srednji šoli Nova Gorica, Gimnaziji Koper in Gimnaziji in ekonomski srednji šoli Brežice.

Državno tekmovanje je bilo 6. maja. Tekmovali so najboljši tekmovalci iz vsake skupine z regijskega tekmovanja. V skupini A je tako bilo 32 tekmovalcev, v skupini B 33, v skupini C 30 in v skupini D 31. Skupaj 126 tekmovalcev iz 26 srednjih šol.

Organizator državnega tekmovanja je bila Srednja tehniška in zdravstvena šola Novo mesto. Medtem ko so tekmovalci reševali naloge, so si njihovi mentorji ogledovali Dolenjsko. Po koncu reševanja nalog pa so si kopanje v toplicah privoščili tudi tekmovalci.

Tekmovalna komisija DMFA Slovenije, ki so ji pri izvedbi tekmovanja in ocenitvi izdelkov pomagali študenti Fakultete za matematiko in fiziko, je na razglasitvi rezultatov podelila 6 prvih nagrad, 14 drugih, 9 tretjih in 40 pohval. Vsi nagrajeni tekmovalci so bili v začetku junija vabljeni na sprejem k ministru za šolstvo in šport dr. Slavku Gabru.

Letošnje tekmovanje iz srednješolske fizike se je zaključilo v sredini maja z izbirnim tekmovanjem za olimpijsko ekipo. Udeležili so se ga nagrajeni tekmovalci iz skupine D, v olimpijsko ekipo pa so bili izbrani tisti z najboljšim seštevkom točk z državnega in izbirnega tekmovanja.

Podeljene nagrade in pohvale:

Skupina A

I. nagrada:

Martin KNAPIČ, Gimnazija Šentvid, Ljubljana.

II. nagrada:

Matjaž TITAN, Gimnazija Murska Sobota; Matija MAZI, Gimnazija Bežigrad, Ljubljana; Tomaž OROZEL, II. gimnazija Maribor.

Pohvale:

Andrej KRANJC, Srednja tehniška šola Celje; Miloš FIDLER, Gimnazija Ledina, Ljubljana; Tomaž KOSEM, Srednja tehniška šola Celje; Jurij ŠTALC, Gimnazija Bežigrad, Ljubljana; Denis PETER, I. gimnazija Maribor; Klemen ROJNIK, Gimnazija Bežigrad, Ljubljana; Dejan ŠMALC, Gimnazija Novo mesto; Andreja AVBERŠEK, Gimnazija Kranj; Simon RANKEL, Gimnazija Škofja Loka; Andrej VILHAR, Gimnazija Šentvid, Ljubljana; Blaž ZUPANČIČ, Gimnazija in ekonomska SŠ Brežice; Drago ŽERJAV, Srednja tehn. in zdrav. šola Novo mesto.

Skupina B

I. nagrada:

Gorazd BIZJAK, Gimnazija Bežigrad, Ljubljana.

II. nagrada:

Luka PREVODNIK, Srednja elektro in strojna šola Kranj; Igor VERSTOVŠEK, Gimnazija Bežigrad, Ljubljana; Blaž VE HAR, Gimnazija Šentvid, Ljubljana.

III. nagrada:

Boštjan GLAŽAR, SŠ za elektrotehniko in rač. Ljubljana; Miloš JEFTIČ, Gimnazija Bežigrad, Ljubljana; Mitja MAJERLE, Srednja tehniška šola Celje; Mitja VARDJAN, Gimnazija Bežigrad, Ljubljana; Anita PRAPO-TNIK, II. gimnazija Maribor.

Pohvale:

Jan SZILAGYI, Gimnazija Bežigrad, Ljubljana; Aleksander SLEMENŠEK, Srednja tehniška šola Celje; Rok ŠABJAN, Gimnazija Bežigrad, Ljubljana; Bojan DOLINAR, Gimnazija Kranj; Matevž KLANJŠEK, Gimnazija Bežigrad, Ljubljana; Saša FRATINA, Gimnazija Bežigrad, Ljubljana.

Skupina C**I. nagrada:**

Matej ŠPINDLER, Gimnazija Bežigrad, Ljubljana; Miha VUK, Gimnazija Bežigrad, Ljubljana; Klemen ŽAGAR, Gimnazija Šentvid, Ljubljana.

II. nagrada:

Peter JEGLIČ, Gimnazija Bežigrad, Ljubljana.

III. nagrada:

Andrija LEBAR, Gimnazija Bežigrad, Ljubljana; Emil POLAJNAR, Gimnazija Kranj.

Pohvale:

Samo BEGUŠ, Gimnazija Jesenice; Andrej RAZPET, Gimnazija Bežigrad, Ljubljana; Iztok HUMAR, Srednja elektro in strojna šola Kranj; Iztok JERAS, Tehniški šolski center Nova Gorica; Egon PAVLICA, Srednja šola Nova Gorica; Zvone SIMONČIČ, Gimnazija Novo mesto; Samir El SHAWISH, Gimnazija Bežigrad, Ljubljana; Boštjan GUŠTIN, Gimnazija Koper; Franci KOPAČ, Srednja tehniška šola Celje; Darko ŠKERL, Srednja tehn. in zdrav. šola Novo mesto; Robert LESAR, Gimnazija in ekonomska SŠ Brežice; Drago BOKAL, Gimnazija Bežigrad, Ljubljana; Matej JUG, Tehniški šolski center Nova Gorica.

Skupina D**I. nagrada:**

Martin KLANJŠEK, Gimnazija Bežigrad, Ljubljana.

II. nagrada:

Mitja PIRC, Gimnazija in ekonomska SŠ Brežice; Aleksander ŽAVCER, Srednja elektro-rač. šola Maribor; Borut DEL FABBRO, Srednja šola Nova Gorica; Sašo PUKŠIČ, Srednja tehniška šola Celje; Dejan VELUŠČEK, Gimnazija Bežigrad, Ljubljana; Marko ŽNIDARIČ, II. Gimnazija Maribor; Andrej BARTOLIČ, Srednja šola Nova Gorica.

III. nagrada:

Jure BABNIK, SŠ za elektrotehniko in rač. Ljubljana; Peter VEK, Srednja tehniška šola Celje.

Pohvale:

Peter KINK, Gimnazija in ekonomska SŠ Brežice; David KONČAN, Gimnazija Kranj; Tilen KOKLIČ, Gimnazija Celje; Dejan TINTA, Srednja šola Nova Gorica; Matej BAŽEC, Gimnazija Koper; Marko GLAŽAR, Gimnazija Bežigrad, Ljubljana; Uroš MALI, Srednja tehn. in zdrav. šola Novo mesto; Damir OMERČEN, SŠ za elektrotehniko in rač. Ljubljana; Alen ORBANIČ, SŠ za elektrotehniko in rač. Ljubljana.

Po izbirnem tekmovanju za olimpijsko ekipo so se na letošnjo XXVI. olimpiado iz fizike, ki je bila od 5. do 12. julija v Canberri, Avstralija, uvrstili:

Martin KLANJŠEK, Gimnazija Bežigrad, Ljubljana; Jure BABNIK, SŠ za elektrotehniko in računalništvo Ljubljana; Marko ŽNIDARIČ, II. gimnazija Maribor; Andrej BARTOLIČ, Srednja šola Nova Gorica; Sašo PUKŠIČ, Srednja tehniška šola Celje.

Ciril Dominko

TEKMOVANJE IZ RAČUNALNIŠTVA ZA SREDNJEŠOLCE

V letu 1995 je tekmovanje iz računalništva za srednješolce potekalo v precej prenovljeni shemi. V prejšnjih letih so dijaki izkazali znanje iz računalništva le na dveh relativno nepovezanih tekmovanjih: na zagovorih raziskovalnih nalog in na tekmovanju iz znanja računalništva (reševanje pisnih nalog). Letos smo obe tekmovanji povezali tako, da smo najboljšim

tekmovalcem omogočili nastop na t.i. zaključnem tekmovanju (playoff), ki je potekalo na računalnikih. Tekmovalci so morali v treh urah napisati program za dano nalogo. Najboljši je bil tisti, ki mu je program deloval pravilno in najhitreje. Ker prvo zaključno tekmovanje ni povsem uspelo, smo ga ponovili z ožjim izborom tekmovalcev. V tem delu tekmovanja so morali tekmovalci doma v nekaj dneh napisati program za nekoliko spremenjeno nalogo iz prvega zaključnega tekmovanja, napisati dokumentacijo in narediti 5-10 minut dolgo predstavitev rešitve, oboje v angleškem jeziku. Najboljšim smo podelili 3 glavne nagrade (praksa v ZDA) in sestavili ekipo, ki nas je zastopala na računalniški olimpiadi.

Poleg omenjenih tekmovanj smo uvedli še eno tekmovalno kategorijo: tekmovanje programov. Dve nalogi sta bili razpisani 2 meseca pred tekmovanjem (opis se nahaja na STENAR::PCSOFT:[TEKMOVANJE]), cilj pa je bil, da vsak tekmovalec napiše program, ki bo tekmoval s programi drugih tekmovalcev. Namen tega tekmovanja je predvsem razvedrilo, čeprav nalogi nista bili posebej lahki.

Na računalniški olimpiadi, ki je potekala zadnji teden junija na Nizozemskem, se je naša ekipa odrezala odlično. Miha Vuk in Janez Brank sta dobila srebrno medaljo, Klemen Žagar pa bronasto.

Rezultati tekmovanja iz znanja računalništva (3 težavnostne skupine in dve zaključni tekmovanji):

1. skupina

1. nagrada: Matej Rizman (Gimnazija Maribor);
2. nagrada: Dejan Beznec (Gimnazija Murska Sobota), Gregor Rot (Srednja šola Nova Gorica), Rok Pahulje (Gimnazija Kočevje), Dejan Dular (Gimnazija Novo mesto);
3. nagrada: Damijan Dolenc (Gimnazija Škofja Loka), Matija Pirc (Srednja šola Krško), Mitja Lorenčak (Srednja elektro in rač. šola Maribor);

2. skupina

- 1.nagrada: Klemen Žagar (Gimnazija Šentvid Ljubljana), Klemen Kenda (Gimnazija Jurija Vege, Idrija);
2. nagrada: Andrej Ota (Gimnazija Vič, Ljubljana), Lojze Šmid (Gimnazija Poljane, Ljubljana), Miha Nahtigal (Gimnazija Novo mesto);
3. nagrada: Damir Cifer (Gimnazija Murska Sobota), Matej Artač (Gimnazija Kranj);

3. Skupina

1. nagrada: Borut Jerič (Srednja šola za el. in rač., Ljubljana);
2. nagrada: Miha Vuk (Gimnazija Bežigrad);
3. nagrada: Simon Golob (Gimnazija Jurija Vege, Idrija).

Najboljša šola: Gimnazija Jurija Vege, Idrija.

Tekmovalci za prvo zaključno tekmovanje: Matej Rizman, Klemen Žagar, Klemen Kenda, Borut Jerič, Miha Vuk, Simon Golob, Drago Bokal, Tomaž Smrkolj, Igor Klep, Jernej Kovše, Mitja Šlenc, Anže Šlosar, Borut Lukič, Miha Grčar.

Ožji izbor tekmovalcev za drugo zaključno tekmovanje: Matej Rizman, Klemen Žagar, Klemen Kenda, Borut Jerič, Miha Vuk, Simon Golob, Drago Bokal, Mitja Šlenc, Miha Grčar, Janez Brank.

Prve tri nagrade (po drugem zaključnem tekmovanju): Janez Brank, Klemen Žagar, Borut Jerič.

Ekipa za olimpiado: Janez Brank, Klemen Žagar, Mitja Šlenc, Miha Grčar, Miha Vuk, Tina Kosmač.

Marko Grobelnik

16. MEDNARODNO MATEMATIČNO TEKMOVANJE MEST – POMLADANSKI KROG – Rešitve iz XXII/P-6, str. 374

Rešitve nalog prvega dela:

Prva skupina

1. Število vreč po 10 kg, 15 kg in 20 kg označimo z a , b in c . Iz podatkov naloge sledi

$$10a + 15b + 20c = 500$$

$$a + b + c = 30.$$

Ko pomnožimo drugo enačbo s 15 in jo odštejemo od prve, dobimo $5c - 5a = 50$. Torej je $c - a = 10$ in je zato $c > a$.

2. Postavimo kobilice A , B , in C na številsko premico zaporedoma v točke -1 , 0 in 1 . Označimo koordinato kobilice A (oz. B , C) po n sekundah z a_n (oz. b_n , c_n) in dokažimo z indukcijo, da so vsa števila a_n in c_n liha, števila b_n pa soda.

Pri $n = 0$ trditev drži: $a_0 = -1$, $b_0 = 0$, $c_0 = 1$. V dokazu indukcijskega koraka pa upoštevamo, da kobilica, ki se nahaja v točki s koordinato x , pri skoku prek y pristane v točki s koordinato $2y - x$. Ker je $x \pmod{2} \equiv 2y - x \pmod{2}$, je indukcijski korak tako dokazan. Torej skače le druga kobilica po točkah s sodo koordinato in lahko zato le ona pristane v srednji točki.

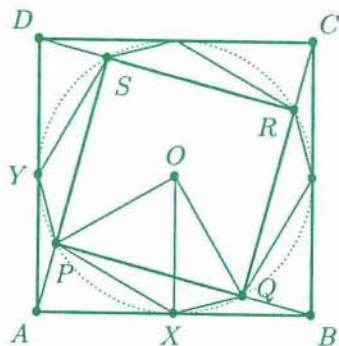
3. Privzemimo oznake s slike; točka O je središče krožnice. Ker je $\angle APB = 90^\circ$, je razpolovišče X stranice AB središče trikotniku ABP očrtane krožnice. Torej je

$$|XP| = \frac{1}{2}|AB| = |PO| = |OX|$$

in je zato $\angle POX = 60^\circ$. Sledi $\angle XOQ = 90^\circ - 60^\circ = 30^\circ$. S slike razberemo še

$$\begin{aligned}\angle PXQ &= \angle PXO + \angle XOQ = \\ &= 60^\circ + \frac{1}{2}(180^\circ - 30^\circ) = \\ &= 135^\circ,\end{aligned}$$

saj je trikotnik XQO enakokrak z vrhom pri O . Ker je $\angle YPS = \angle XQP$, je $\angle XPY = \angle XPQ + \angle XQP + 90^\circ$. Sledi $\angle YPS = 90^\circ + (180^\circ - \angle PXQ) = 135^\circ$.



4. Glej rešitev 4. naloge za drugo skupino.

Druga skupina

1. Disjunktni intervali $[0, 0.2]$, $(0.2, 0.4)$, $[0.4, 0.6]$, $(0.6, 0.8)$, $[0.8, 1]$ pokrijejo interval $[0, 1]$. Po Dirichletovem principu zato v vsaj enem od njih (označimo ga z I) ne leži nobena izmed točk a , b , c in d . Ker za središče x intervala I velja $|a - x| \geq 0.1$, $|b - x| \geq 0.1$, $|c - x| \geq 0.1$ in $|d - x| \geq 0.1$, je

$$\frac{1}{|a - x|} + \frac{1}{|b - x|} + \frac{1}{|c - x|} + \frac{1}{|d - x|} \leq 40.$$

Če pri tako izbranem x velja stroga neenakost, smo točko x že našli, sicer pa mora veljati $|a - x| = |b - x| = |c - x| = |d - x| = 0.1$. Torej ležijo točke a, b, c, d vse v nekem intervalu dolžine 0.2. Tako točko x , da bo veljalo

$|a - x| > 0.1$, $|b - x| > 0.1$, $|c - x| > 0.1$ in $|d - x| > 0.1$, potem zlahka poiščemo.

Opomba. Če razdelimo $[0, 1]$ na podintervale $[0, \frac{1}{8}]$, $[\frac{1}{8}, \frac{3}{8}]$, $(\frac{3}{8}, \frac{5}{8})$, $[\frac{5}{8}, \frac{7}{8}]$, $(\frac{7}{8}, 1]$, lahko poiščemo boljšo oceno. Če nobena izmed točk a, b, c, d ne leži v nobenem podintervalu dolžine $\frac{1}{4}$, vzamemo za točko x središče tega intervala, drugače pa postavimo $x = 0$ ali $x = 1$. Potem veljajo ocene $|a - x| \geq \frac{1}{4}$, $|b - x| \geq \frac{1}{4}$, $|c - x| \geq \frac{1}{4}$ in $|d - x| \geq \frac{1}{4}$ in zato je

$$\frac{1}{|a - x|} + \frac{1}{|b - x|} + \frac{1}{|c - x|} + \frac{1}{|d - x|} \leq 32.$$

Ta ocena je tudi najboljša možna, saj je enakost dosežena pri izboru točk $a = \frac{1}{8}$, $b = \frac{3}{8}$, $c = \frac{5}{8}$ in $d = \frac{7}{8}$.

2. Postavimo kobilice v točke $(0, 0)$, $(0, 1)$, $(1, 1)$ in $(1, 0)$ ravninske celoštevilske mreže in označimo njihove koordinate po n sekundah z (a_n, b_n) , (c_n, d_n) , (e_n, f_n) , (g_n, h_n) . Kot pri drugi nalogi iz prve skupine tudi tu z indukcijo dokažemo, da se parnosti števil $a_n, b_n, \dots, h_n$ ohranjajo.

Dokažimo sedaj s protislovjem, da prva, druga in tretja kobilica nikoli ne ležijo na isti premici. Če bi bile te kobilice kolinearne, bi veljalo

$$\frac{d_n - b_n}{c_n - a_n} = \frac{f_n - b_n}{e_n - a_n}$$

oziroma

$$(d_n - b_n)(e_n - a_n) = (f_n - b_n)(c_n - a_n).$$

Slednja enakost je protislovna, saj je na levi strani liho število, na desni pa sodo. Podobno ovržemo še preostale tri možnosti.

3. Da je naloga smiselna, moramo zahtevati $\angle ACB \neq \frac{\pi}{2}$. Rešimo nalogo v primeru, ko je trikotnik ABC ostrokotni, druge primere pa prepustimo bralcu.

Ker je štirikotnik $ABED$ tetivni, je $\angle DEC = \angle BAD$. Trikotnik BOC je enakokrak s kotom $\angle BOC = 2 \cdot \angle BAD$ ob vrhu O . Sledi $\angle OCE = \frac{\pi}{2} - \angle BAD = \frac{\pi}{2} - \angle DEC$. Torej sta premici OC in DE res pravokotni.

4. Predpostavimo, da je število $a0 \dots 09$ popolni kvadrat. Potem lahko zapišemo

$$a \cdot 10^n + 9 = m^2,$$

kjer je zaradi predpostavke naloge $n \geq 2$. Ker nobeno izmed števil 109, 209, 309, ..., 909 ni popolni kvadrat, lahko predpostavimo, da je $n \geq 3$.

Preoblikujemo gornjo enačbo: $a \cdot 10^n = (m-3)(m+3)$. Ker je razlika med številoma $(m+3)$ in $(m-3)$ enaka 6, nista obe števili deljivi s 5. Torej je natanko eno izmed njih deljivo s 5^n . Če $5^n \mid m+3$, je $m+3 \geq 5^n$, drugače pa $5^n \mid m-3$, od koder sledi $m+3 > m-3 \geq 5^n$. V obeh primerih torej velja $m+3 \geq 5^n$. Sledi $m-3 \leq a \cdot 2^n < 10 \cdot 2^n = 80 \cdot 2^{n-3}$. Ker je $5^n = 125 \cdot 5^{n-3}$, dobimo protislovno oceno

$$6 = (m+3) - (m-3) \geq 125 \cdot 5^{n-3} - 80 \cdot 2^{n-3} > 6.$$

Rešitve nalog drugega dela:

Prva skupina

1. Naj bo P točka z zahtevano lastnostjo. Potem je $\angle ABP = \angle BAP$ ali pa $\angle ABP = \angle PAC$. Če je $\angle ABP = \angle BAP$, leži točka P na notranji simetrali kota ACB . V drugem primeru pa je

$$\angle APB = 180^\circ - (\angle ABP + (60^\circ - \angle PAC)) = 120^\circ$$

in leži zato točka na tistem krožnem loku, ki poteka po notranjosti trikotnika, s katerega vidimo stranico AB pod zornim kotom 120° .

Iskano množico točk torej predstavljata opisani krožni lok in simetrala kota ACB .

2. (a) Oštevilčimo zaboje po vrsti od najlažjega do najtežjega. Če vpeljemo še "nevidni" zaboj brez mase, lahko oštevilčimo teh 81 zabojev v trojiškem sistemu s števili od $0000_{(3)}$ do $2222_{(3)}$.

Pri i -tem tehtanju ($i = 1, 2, 3, 4$) položimo na levo stran tehtnice vse zaboje, ki imajo v trojiškem zapisu i -to številko enako 0, na desno stran pa tiste zaboje, ki imajo v trojiškem zapisu i -to številko enako 2. Pri vsakem tehtanju torej položimo na vsako stran tehtnice po 27 zabojev.

Pri prvem tehtanju pokaže tehtnica razliko vsote mas najtežjih 27 zabojev in vsote mas najlažjih 27 zabojev. Ker je s to razliko natančno določenih 27 najtežjih in 27 najlažjih zabojev (mase so namreč različne), je prva številka pravilna.

Pri drugem tehtanju položimo na vsako stran tehtnice po 27 zabojev: 9 zabojev, katerih oznaka se začne s številko 0, 9 zabojev, katerih oznaka se začne s številko 1, in 9 zabojev, katerih oznaka se začne s številko 2. Ker pokaže tehtnica največjo možno razliko vsote mas zabojev v tako izbranih množicah, je tudi druga številka pravilna.

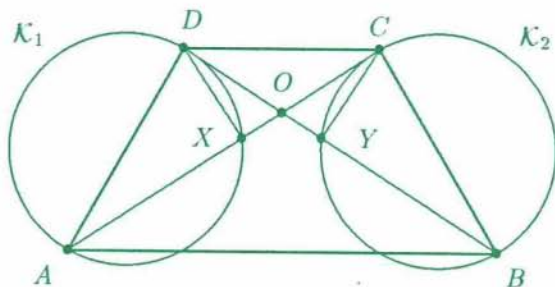
Pri tretjem tehtanju položimo na vsako stran tehtnice po 27 zabojev: 3 zaboje, katerih oznaka se začne s števka 00, 3 zaboje, katerih oznaka se začne s števka 01, 3 zaboje, katerih oznaka se začne s števka 02, ..., in 3 zaboje, katerih oznaka se začne s števka 22. Ker pokaže tehtnica največjo možno razliko vsote mas zabojev v tako izbranih množicah, je tudi tretja številka pravilna.

Pri zadnjem tehtanju pa položimo na vsako stran tehtnice po 27 zabojev, pri katerih so prve tri števke v trojiškem zapisu paroma različne. Ker tudi v tem primeru pokaže tehtnica največjo možno razliko vsote mas zabojev v tako izbranih množicah, je pravilna tudi zadnja – četrta številka.

(b) Pri vsakem tehtanju se izbrani zaboj lahko nahaja na tehtnici (na levi ali na desni strani) ali ga pa ni na tehtnici. Eno tehtanje torej razdeli zaboje v 3 skupnine, tri tehtanja pa razdelijo danih 80 zabojev v 27 skupin. Po Dirichletovem principu torej obstaja skupina, v kateri sta vsaj dva zaboja. Tri tehtanja zato res ne zadoščajo.

Druga skupina

1. Označimo točke, kot kaže skica; AB in DC sta vzporedni stranici trapeza.



Po Talesovem izreku sta koda AXD in BYC prava. Trikotnika OXD in OYC sta tako podobna in lahko zapišemo $|OX| : |OD| = |OY| : |OC|$. Iz podobnosti trikotnikov ABO in CDO pa sledi $|OB| : |OA| = |OD| : |OC|$. Iz dobljenih enakosti izpeljemo

$$|OX| \cdot |OA| = |OY| \cdot |OB|.$$

Točka O torej leži na potenčni premici krožnic K_1 ter K_2 in so zato vsi štirje tangenčni odseki enako dolgi.

2. Opišimo poznanstva z grafom G . Točke grafa naj bodo osebe, povezave pa poznanstva. Množico točk grafa G označimo z $V(G)$.

Trditev bomo dokazali s protislovjem, zato predpostavimo še, da sta poljubni dve različni točki grafa povezani s liho mnogo potmi dolžine 2.

Izberimo in fiksirajmo točko $a \in V(G)$ in z S označimo množico k a sosednjih točk grafa G . Postavimo še $N = V(G) \setminus (S \cup \{a\})$. Vsaka točka iz S je povezana z a samo prek točk iz S in ima zato v S liho mnogo sosednjih točk. Torej je v S sodo mnogo točk in je zato stopnja točke a sode.

Ker ima torej vsaka točka iz S sodo stopnjo in je povezana s točko a in z liho mnogo točkami iz S , je povezana s sodo mnogo točkami iz N . Med točkami iz S in točkami iz N je torej sodo mnogo povezav. Ker je vsaka točka iz N povezana z a le prek S , je povezana z liho mnogo točkami iz S . Torej je v N sodo mnogo točk.

Prišli smo do protislovja, saj bi potem imel graf liho mnogo točk.

Na pomladanskem krogu 16. mednarodnega matematičnega tekmovanja mest so se najbolje odrezali Gorazd BIZJAK in Martin KLANJŠEK iz Gimnazije Bežigrad, Mitja PIRC iz Gimnazije Brežice, Jernej BARBIČ iz Gimnazije Tolmin in Polona GREŠAK iz Gimnazije ETŠ Trbovlje.

Matjaž Željko

PRESEK

list za mlade matematike, fizike, astronome in računalnikarje

23. letnik, šolsko leto 1995/96, številka 1, strani 1 – 64

UREDNIŠKI ODBOR: Vladimir Batagelj, Tanja Bečan (jezikovni pregled), Dušica Boben (oblikovanje teksta), Vilko Domajnko, Roman Drnovšek (novice), Darjo Felda (tekmovanja), Bojan Golli, Marjan Hribar, Boštjan Jaklič (tehnični urednik), Martin Juvan (računalništvo), Sandi Klavžar, Boris Lavrič, Andrej Likar (fizika), Matija Lokar, Franci Oblak, Peter Petek, Marijan Prosén (astronomija), Marjan Smerke (svetovalec za fotografijo), Miha Štalec, Jana Vrabec (nove knjige), Marija Vencelj (matematika, odgovorna urednica).

Dopisi in naročnine: Društvo matematikov, fizikov in astronomov Slovenije - Podružnica Ljubljana - Komisija za tisk, Presek, Jadranska c. 19, 61111 Ljubljana, p.p. 64, tel. (061) 1232-460, št. ŽR 50101-678-47233. Naročnina za šolsko leto 1993/94 je za posamezne naročnike 1.250 SIT, za skupinska naročila šol 1.000 SIT, posamezna številka 250 SIT, za tujino 25000 LIT, devizna nakazila SKB banka d.d. Ljubljana, val-27621-42961/9, Ajdovščina 4, Ljubljana.

List sofinancirajo MZT, MŠŠ in MK
Ofset tisk DELO - Tiskarna, Ljubljana

Po mnenju MZT št. 415-52/92 z dne 5.2.1992 šteje revija med proizvode iz 13. točke tarife št. 3 zakona o prometnem davku, za katere se plačuje 5% davek od prometa proizvodov.

© 1995 Društvo matematikov, fizikov in astronomov Slovenije – 1252

**PRVA
SLOVENSKA
ASTRONOMSKA
REVIJA**

Spika



**VSAK MESEC NOVA, BARVNA ŠTEVILKA REVije ZA LJUBITELJE ASTRONOMIJE,
KI PRINAŠA NOVICE, VSE O SONCU, PLANETIH, ZEMLJI, ZVEZDAH,
GALAKSIJAH, ASTROFIZIKI, KOZMOLOGIJI, ASTRONAVTIKI,
ASTROFOTOGRAFIJI, ARHEOASTRONOMIJI...
ZA AMATERJE MESEČNO SVEŽE EFEMERIDE IN ZVEZDNA KARTA,
O TELESKOPIH, UPORABNIH PROGRAMIH...
IN ŠE OSNOVE ZA ZAČETNIKE, RAZISKOVALNI KOTIČEK, TESTI,
ZNANSTVENA FANTASTIKA, MALI OGLASI TER NAGRADNA IGRA!**

Revijo naročajte na naslov: Spika, Poštni predal 9, 61109 Ljubljana. Četrtletna naročnina (15% popusta) je 1070,00 SIT, polletna naročnina (20% popusta) je 2015,00 SIT, celoletna naročnina (25% popusta) je 3780,00 SIT.

MOČ

Moč

zdrobim prepečenec

trd kot kamen

z golo roko

v majhne koščke

razstavim skorjo

v prav majhne drobtine

porabim ogromno energije

da razvežem kemijske vezi

med gradniki snovi

ampak o atomčku ne vem še nič.

In potem ga le rahlo dregnem

pa mi odgovori ves vesel

z enim obrokom energije

z enim fotončkom.

In potem se zavem

kako močna je šibkost

in potem razpade jedro

in odda hitri elektron

in nevtrino

kako močna je šibkost in

šibka kako je močnost

ki jo iščem skrita je

tam nekje zadaj

v zadnjem nevtronu

ki bo ravnokar razpadel

v zadnjem kotu

kjer čaka na princa

pa mimo hodijo razbojniki.

Oprosti ampak bil sem zaposlen
z odkrivanjem dejstva
da je šibka sila povzročila
jedrsko eksplozijo
jaz pa sem uporabljal
moč.

Marko Budiša

