

6

PRESEK

ISSN 0351-6652

DRUŠTVO MATEMATIKOV, FIZIKOV IN ASTRONOMOV SLOVENIJE, 22(1994-1995)

COMET

PRESEK - list za mlade matematike, fizike, astronome in računalnikarje
22. letnik, leto 1994/95, številka 6, strani 321-384

VSEBINA

MATEMATIKA	Aritmetika s kvadrati (Vilko Domajnko)	321-326
	Sundaramovo rešeto (Primož Potočnik)	340-341
	Šifriranje z javnim ključem (Marija Vencelj)	354-357
FIZIKA	Opazovanje iztočnega vrtnca (Zoran Arsov)	328-331
	Odklon proti vzhodu (Janez Strnad)	342-343
ASTRONOMIJA	Straža (Marijan Prosén)	332-335
RAČUNALNIŠTVO	Preizkusni programi za matematiko (Matija Lokar)	344-348, III, IV
NOVICE	Sto let rentgenskih cevi (Janez Strnad)	338-339, I
	Dve sporočili (Iz uredništva)	351
	Christian Huygens - Ob tristoletnici smrti (Janez Strnad)	358-363
	Tečaji iz vakuumске tehnike za profesorje srednjih šol (Andrej Pregelj)	364-366
NALOGE	Butalska - Reš. str. 369 (Vilko Domajnko)	327
	Tri za bistrе glave - Reš. str. 368 (Neža Mramor - Kosta) ...	327
	Nariši pravokotni trikotnik - Reš. str. 372-373 (Marija Vencelj)	331
	Skladnost - Reš. str. 368 (Vilko Domajnko)	339
	Strogo naraščajoča števila - Reš. str. 350 (Martin Juvan) ...	341
	Stična števila - Reš. str. 366 (Martin Juvan)	343
RAZVEDRILO	Kako štejemo po slovensko? (Tomaž Pisanski)	335-336
	Kaj je kipu? (Veselko Guštin)	349-350
	Križanka 'Računalništvo' - Reš. str. 373 (Marko Bokalič)	352-353
REŠITVE NALOG	Neznana osnova - s str. 295 (Martin Juvan)	326
	Popotovanje z letalom - s str. 275 (Vilko Domajnko)	336-337
	Barvanje kock - s str. 275 (D. M. Milošević, prev. B. Japelj) ..	348
	Spet ena logična - s str. 307 (Neža Mramor - Kosta)	357
	Koliko šestkotnikov? - s str. 299 (Ciril Pezdir)	370-371
	Astronomska križanka - s str. 288 (Marko Bokalič)	373
TEKMOVANJA	16. mednarodno matematično tekmovanje mest - pomladanski krog (Matjaž Željko)	374-375
	16. mednarodno matematično tekmovanje mest - jesenski krog - rešitve s str. 252 (Matjaž Željko) ...	375-381
NOVE KNJIGE	Zmazek V., Matematika, priprava na maturo (Mojca Lokar) .	351
LETNO KAZALO		382-384
NA OVITKU	Rentgenska cev. Glej članek na str. 338-339	I
	Slike k članku na str. 344-348	III-IV

MATEMATIKA

ARITMETIKA S KVADRATI

Geometrijskih likov ponavadi ne seštevamo, vsaj v običajnem smislu ne. V elementarni matematiki uporabljamo operacijo seštevanja največkrat le v številskih množicah; čeprav smo sicer navajeni seštevati tudi vektorje, funkcije, izraze, ...

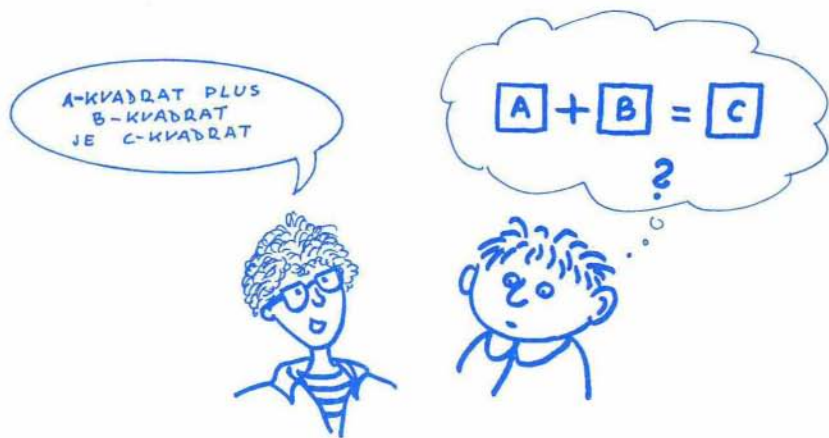
Toda spomnimo se samo, kako velikokrat na hitro povemo Pitagorov izrek:

a kvadrat plus b kvadrat je c kvadrat.

Mar ta stavek ne govori o natanko tistem, kar smo v uvodnem odstavku zanikali – o seštevanju kvadratov? In tudi nekoliko izboljšana "ljudska" verzija izreka ni bistveno drugačna:

Vsota kvadratov nad katetama je enaka kvadratu nad hipotenuzo.

Pravzaprav le še določneje govori o – seštevanju kvadratov!

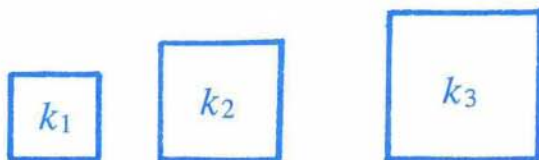


Kajpak vemo, da je posredi nesporazum, ki je bolj ali manj jezikovne narave. Po njegovi zaslugi se samo zdi, kakor da seštevamo in primerjamo geometrijske like, čeprav v resnici seštevamo in primerjamo zgolj njihove ploščine.

Pa izkoristimo ta jezikovni zaplet in definirajmo seštevanje kvadratov. Označimo s K množico vseh kvadratov v ravnini in se domenimo, da bo

vsota $k_1 \oplus k_2$ poljubno izbranih kvadratov k_1 in k_2 iz K spet kvadrat – in sicer tak, čigar števska vrednost ploščine je vsota števiskih vrednosti ploščin kvadratov k_1 in k_2 :

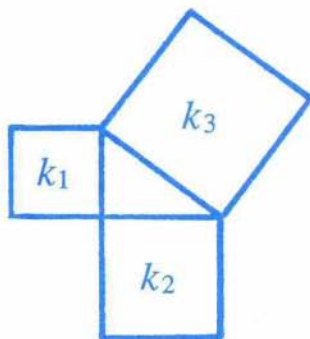
$$k_1 \oplus k_2 = k_3 \iff \text{pl}(k_1) + \text{pl}(k_2) = \text{pl}(k_3) \quad (k_1, k_2, k_3 \in K).$$



Pitagorov izrek nam pove, da je seštevanje kvadratov dokaj preprosto, če se ga lotimo zgolj po aritmetični plati – s pomočjo dolžin stranic kvadratov k_1 in k_2 izračunamo stranico njune vsote k_3 . Tako je naša naloga že rešena. Nekoliko več truda pa zahteva geometrijski pristop po konstrukcijski poti. V tem primeru sta kvadrata k_1 in k_2 podana kot lika na ravnini, njuno vsoto pa smemo, kot običajno, poiskati le s pomočjo geometrijskega orodja. V nadaljevanju nas bo zanimal predvsem ta način.

Geometrijsko poiščemo vsoto kvadratov najelegantneje seveda s pomočjo *Pitagorovega izreka*. Če torej želimo sešteti par kvadratov, ni treba drugega, kakor konstruirati pravokotni trikotnik, čigar kateti imata dolžini enaki dolžinama njunih stranic. Vsota je potem kvadrat nad hipotenuzo.

Definicijo lahko zelo preprosto posplošimo še na seštevanje treh ali več kvadratov. Tudi v tem primeru je rezultat spet kvadrat s ploščino, ki je vsota ploščin posameznih kvadratov:



$$k_1 \oplus k_2 = k_3$$

$$k_1 \oplus k_2 \oplus \dots \oplus k_n = k_{n+1} \iff \text{pl}(k_1) + \text{pl}(k_2) + \dots + \text{pl}(k_n) = \text{pl}(k_{n+1}) \\ (k_1, k_2, \dots, k_{n+1} \in K).$$

Na srečo je vsota kvadratov asociativna (glej nalogo 3), zato si lahko pri njeni konstrukciji pomagamo kar z zaporednim seštevanjem posameznih kvadratov. Tri kvadrate na primer seštejemo tako, kakor kaže risba na desni.

Podobno lahko definiramo tudi *razliko* kvadratov $k_1 \Delta k_2$. Ta naj bo tak kvadrat, katerega ploščina je (številsko) razlika ploščin danih kvadratov:

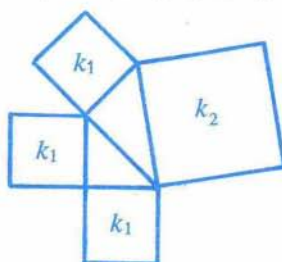
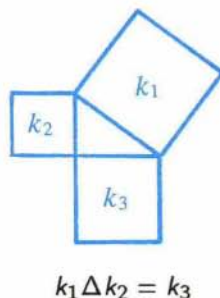
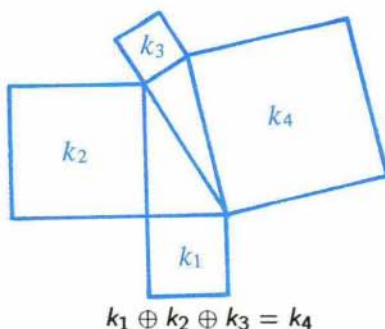
$$k_1 \Delta k_2 = k_3 \iff \text{pl}(k_1) - \text{pl}(k_2) = \text{pl}(k_3) \quad (k_1, k_2, k_3, \in K)$$

Zgornja definicija je očitno smiselna samo v primeru, ko je $\text{pl}(k_1) \geq \text{pl}(k_2)$. Pri konstrukciji razlike kvadratov se spet opremo na Pitagorov izrek. Konstruirati moramo pravokotni trikotnik z dano hipotenuzo (stranica prvega kvadrata) in z eno izmed katet (stranica drugega kvadrata). Preostala kateta je tedaj stranica razlike.

Oglejmo si naposled še *množenje kvadrata s številom*. Definiramo ga takole: produkt števila a in kvadrata k_1 je tak kvadrat k_2 , katerega ploščina je a -kratnik ploščine kvadrata k_1 :

$$a \otimes k_1 = k_2 \iff a \cdot \text{pl}(k_1) = \text{pl}(k_2) \quad (a \in \mathbb{R}; k_1, k_2 \in K).$$

Množenje, ki smo si ga zamislili, je dokaj preprosto, če je število a naravno. V tem primeru si namreč lahko pomagamo kar s seštevanjem kvadratov, ki pa ga že poznamo – in to celo za primer poljubnega števila sumandov. Risba na desni prikazuje množenje kvadrata s 3.



Pri množenju z nekoliko večjimi števili pa bi bil opisani postopek nedvomno precej neroden. Zato si v teh primerih pomagamo drugače. Oglejmo si, kako steče takšno množenje v primeru, ko je $a = 17$:

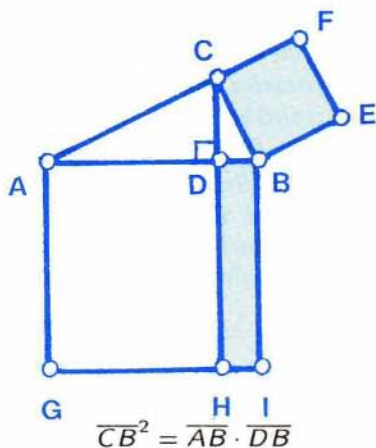
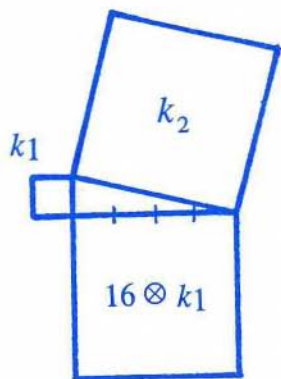
$$17 \otimes k_1 = (16 + 1) \otimes k_1 = (16 \otimes k_1) \oplus k_1 = k_2.$$

$16 \otimes k_1$ je kvadrat, ki ima 16-krat večjo ploščino od kvadrata k_1 . Njegova stranica je torej 4-krat daljša od stranice kvadrata k_1 . Torej pri danem kvadratu k_1 konstruiramo njegov 17-kratnik tako, kakor kaže risba na desni.

Za konec opišimo še množenje kvadratov z racionalnimi števili oblike $a = \frac{p}{q}$, kjer sta p in q poljubni naravni števili in je $p \leq q$. V tem primeru se namesto na Pitagorov izrek raje opremo na prav tako dobro znani *Evklidov izrek* v pravokotnem trikotniku. Njegovo sporočilo preberemo na desni risbi.

Za ponazoritev te metode si oglejmo konstrukcijo produkta $\frac{1}{5} \otimes k$, kjer je k dani kvadrat. Naj bo na risbi na desni $GIBA$ dani kvadrat k . Na stranici AB konstruiramo točko D tako, da je $\overline{DB} = \frac{1}{5} \cdot \overline{AB}$. Tedaj je očitno tudi ploščina pravokotnika $HIBD$ enaka petini ploščine kvadrata $GIBA$. S pomočjo Talesovega izreka, da je

obodni kot nad premerom pravi kot, konstruiramo pravokotni trikotnik $\triangle ABC$, kjer je DB pravokotna projekcija katete CB na hipotenuzo AB . Kvadrat s stranico CB je tedaj $\frac{1}{5}$ -kratnik kvadrata k .



Naloge

1. Na ravnini izberi kvadrata k_1 in k_2 . Zatem konstruiraj:

$$\begin{array}{ll} \text{a) } k_1 \oplus k_2, & \text{b) } k_1 \Delta k_2 \text{ (ali } k_2 \Delta k_1), \\ \text{c) } (2 \otimes k_1) \oplus (3 \otimes k_2), & \text{d) } 6 \otimes k_1, \\ \text{e) } \frac{1}{3} \otimes k_1, & \text{f) } \frac{5}{6} \otimes k_1. \end{array}$$

2. Na ravnini izberi kvadrate k_1 , k_2 in k_3 tako, da boš lahko konstruiral tudi kvadrata $k_1 \oplus k_2 \oplus k_3$ in $k_1 \Delta k_2 \Delta k_3$.
3. Dokaži, da je vsota kvadratov asociativna; za poljubno trojico kvadratov k_1 , k_2 in k_3 torej velja:

$$(k_1 \oplus k_2) \oplus k_3 = k_1 \oplus (k_2 \oplus k_3) = k_1 \oplus k_2 \oplus k_3.$$

4. Dokaži, da je vsota kvadratov tudi komutativna; za poljubno izbran par kvadratov k_1 in k_2 torej velja:

$$k_1 \oplus k_2 = k_2 \oplus k_1.$$

5. Kaj lahko rečeš o asociativnosti in kaj o komutativnosti razlike kvadratov?
6. Izberi na ravnini kvadrat k . Zatem konstruiraj:
- $\sqrt{3} \otimes k$,
 - $\sqrt{n} \otimes k$, ($n \in \mathbb{N}$).
7. Premisli, kako bi množil kvadrate s poljubnim nenegativnim realnim številom.
8. Posplošena verzija Pitagorovega izreka pravi:

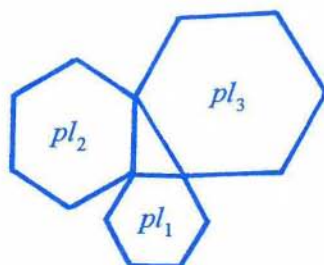
V pravokotnem trikotniku je za vsako naravno število n ($n \geq 3$) vsota ploščin pravih n -kotnikov nad katetama enaka ploščini pravih n -kotnika nad hipotenuzo.

Na naslednji strani je prikazan primer za $n = 6$.

a) Dokaži izrek za $n = 3$ in $n = 6$.

b) Premisli, kako bi sešteval in odšteval poljubno izbrane pravilne n -kotnike. Podobno napravi tudi za množenje s številom.

c) Premisli, kako bi seštel kvadrat in enakostranični trikotnik.



$$pl_1 + pl_2 = pl_3$$

Vilko Domajnko

NEZNANA OSNOVA - Rešitev s str. 295

Recimo, da pri zapisu v osnovi b velja enakost

$$x + xx + xxx = 1000.$$

Torej imamo

$$x + (xb + x) + (xb^2 + xb + x) = 3x + 2xb + xb^2 = b^3.$$

Od tod lahko izračunamo x :

$$x = \frac{b^3}{3 + 2b + b^2}.$$

Ker je imenovalac gornjega ulomka večji od b^2 , je vrednost ulomka vedno manjša od b . Prav tako pa je $x > b - 2$, saj je

$$b^3 > (b - 2)(3 + 2b + b^2) = b^3 - b - 6.$$

Edina možnost za števko x je torej $b - 1$. Toda tudi ta izbira ne ustreza, saj tedaj zapisa xxx in 1000 predstavljata zaporedni števili, število $x + xx$ pa je strogo večje od 1 . Iskana osnova b torej ne obstaja.

Martin Juvan

BUTALSKA

V Butalah so oni dan vrtičkarjem naposled le ugodili. Po dolgem moledovanju številnih krajanov je župan štirim najvztrajnejšim prosilcem dodelil 100 m² veliko pravokotno zemljišče, kjer si bodo lahko že kmalu uredili svoje male vrtove. Pri tem se je celo izkazal za izjemno natančnega, saj so vsa štiri posamezna zemljišča v obliki pravokotnika in med seboj površinsko enaka.

Še posebej pa se je mož odrezal pri računu. Novopečenim lastnikom je namreč njihov kos zemlje namesto glede na površino zaračunal raje glede na obseg zemljišča. Večji ko je obseg zemljišča, več je moral njegov lastnik zanj plačati.

Presenečenje med butalskimi vrtičkarji pa je bilo popolno, ko so čez čas ugotovili, da so tudi v tem primeru vsi odšteli enake vsote za zemljišča. Vsa četverica je poslej navdušena hvalila izjemno modrost svojega župana.

Izmed vseh najbolj zadovoljen pa je bil zagotovo Srečko Veselko, saj je njegovo zemljišče mejilo na vsa tri preostala. Tako bo imel, je dejal, *na svojem vrtu obilo priložnosti za klepet s sosedi* in mu ne bo treba preveč delati.

Poskušajte sedaj kar se le da natančno opisati obliko zemljišča, ki ga je župan razdelil med te štiri vrtičkarje.

Vilko Domajnko

TRI ZA BISTRE GLAVE

Poskusite, kdo bo hitreje rešil naslednje naloge:

1. Štiri črne in tri rjave krave dajo skupaj v petih dneh ravno toliko mleka, kot tri črne in pet rjavih krav v štirih dneh. Katere krave dajejo več mleka, črne ali rjave?
2. Martin je star dvakrat toliko kot bo Jurij takrat, ko bo Primož star toliko, kot je Martin sedaj. Kdo je najstarejši, kdo srednji in kdo najmlajši med njimi?
3. Urh, Anže, Jaka in Miha si ogledujejo in primerjajo svoje ribiške plene:
 - Miha je ujel več kot Jaka.
 - Skupaj sta Urh in Anže ujela ravno toliko kot Jaka in Miha.
 - Urh in Miha skupaj sta ujela manj kot Anže in Jaka skupaj.

Kako so se izkazali naši ribiči? Kdo je ujel največ, kdo drugi največ, kdo je bil tretji in kdo se je najslabše odrezal?

Neža Mramor - Kosta

OPAZOVANJE IZTOČNEGA VRTINCA

V prejšnji številki Preseka smo prebrali članek o iztočnem vrtincu. Vrtinec je zabaven vsakdanji pojav, ki ponuja veliko fizikalnih vprašanj. Večina jih je precej zapletenih, tako da je v literaturi težko najti izčrpno razlago pojava. Vseeno si lahko na nekatera vprašanja poskušamo odgovoriti sami.

Pojav vrtinčenja ni nujno odvisen od prisotnosti Coriolisove sile (npr. turbulentno gibanje). Zato se iztočni vrtinec oblikuje tudi v opazovalnem sistemu, kjer ni sistemskih sil. Opazujemo posodo s kapljevino, ki ima na dnu odprtino. Na začetku delčki kapljavine ohranjajo smer gibanja proti odprtini, saj prečnih sil ni. Pri veliki odprtini na dnu posode vrtinčenja ne opazimo. Če odprtino zmanjšamo pod določeno mejo, pa nastane vrtinec.

Za ponazoritev naredimo enostaven poskus. Prvič v posodo natočimo sadni sirup, drugič vodo in opazujemo, ali nastane vrtinec ali ne. Rezultate predstavimo s tabelo 1.

	velika odprtina	srednja odprtina	mala odprtina
voda	—	+	+
sirup	—	—	+

Tabela 1. Nastanek vrtinca v odvisnosti od viskoznosti kapljavine in velikosti iztočne odprtine.

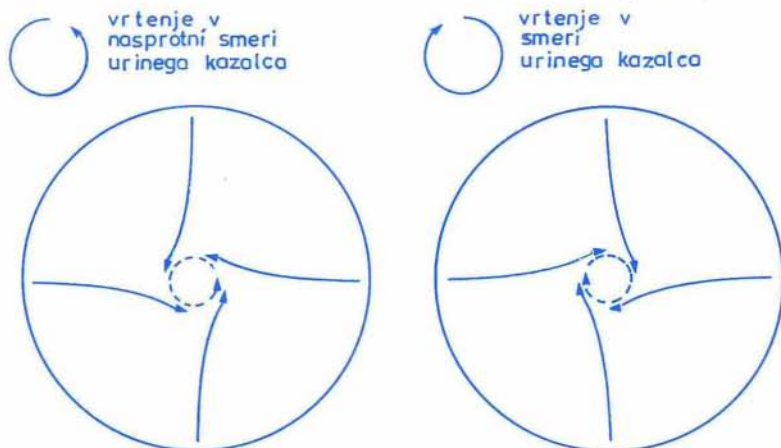
Izkaže se, da je nastanek vrtinca odvisen tudi od narave kapljavine. Pri kapljevinah z manjšo viskoznostjo ga opazimo prej.

Prisotnost sistemskih sil je pomembna pri napovedi smeri vrtenja. Če se opazovanja lotimo v kopalnici, je težko kaj reči o smeri vrtenja, saj so izidi opazovanj različni. Razlog so premalo nadzorovane okoliščine, v katerih izvajamo poskus. Težavam se izognemo, če opazujemo v neinercialnem sistemu, ki se glede na Zemljo vrti s tolikšno kotno hitrostjo, da postane Zemlja pri naši natančnosti inercialni sistem. Zato je vpliv Coriolisove sile na kapljevino dovolj velik, da premaga motnje. Tak sistem je npr. otroški vrtiljak.

V sistemu vrtiljaka smo opazovali iztočni vrtinec v posodi z radijem 5 cm. Po več ponovitvah se smeri vrtenja med seboj niso razlikovale. Primerjajmo pogoje v kopalnici in na vrtiljaku. Koordinatni sistem, ki je vezan na Zemljo, se na naši zemljepisni širini $\alpha = 46^\circ$ vrti s kotno hitrostjo $\omega = 5,2 \cdot 10^{-5} \text{ s}^{-1}$. Vrtiljak sem ročno poganjal s kotno hitrostjo enega obrata v 24 s (namesto

24 urah), kar da $\omega' = 0,26 \text{ s}^{-1}$ (približno pettisočkrat več od ω). Ponovimo račun iz članka *Iztočni vrtinec*. Hitrost delov kapljevine v kopalnici mora biti pred začetkom poskusa manjša kot $2,6 \cdot 10^{-4} \text{ cm/s}$, da se razvije iztočni vrtinec v pravi smeri. Na vrtiljaku je ta hitrost že $1,3 \text{ cm/s}$. Ta pogoj lahko hitro dosežemo, saj moramo vodo pustiti mirovati le nekaj minut (namesto nekaj dni).

Izidi opazovanj so se ujemali s pričakovanji. Izkazalo se je, da je smer vrtenja vrtinca enaka smeri vrtenja opazovalnega sistema (slika 1).



Slika 1. Smer vrtenja vrtinca v odvisnosti od smeri vrtenja vrtiljaka.

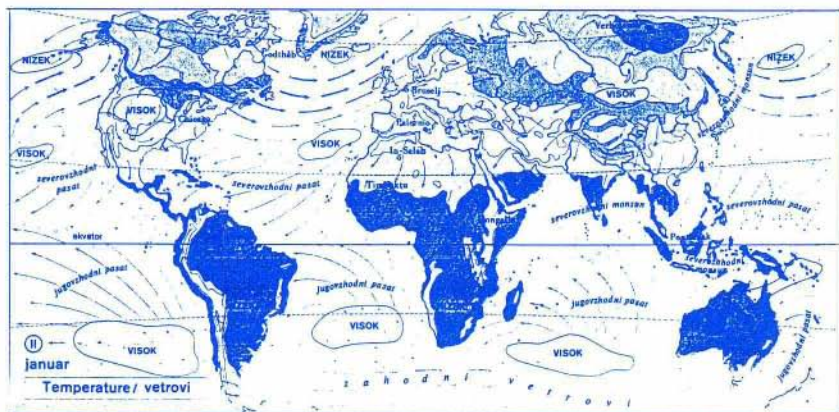
Poskus bi se dalo še lepše izvesti na obsežnejši vrteči se ploščadi. Možna bi bila namreč uporaba posode večjih razsežnosti (višja posoda z večjim radijem). Tako bi lažje fotografirali sam vrtinec ter neposredno merili hitrosti delčkov tekočine na različnih oddaljenostih od osi posode. Opisano opazovanje je bilo zanimivo še zato, ker se je dalo smer vrtenja vrtiljaka spreminjati. S tem smo lahko pogoje v opazovanem sistemu primerjali z okoliščinami na severni (smer vrtenja Zemlje v smeri proti urinemu kazalcu) in južni polobli (smer vrtenja Zemlje v smeri urinega kazalca).

Med opazovanjem tudi ugotovimo, da se vrtincu spreminja oblika med prazenjem posode. Če je v posodi več vode, je vrtinec ožji. Voda pritiska proti odprtini, delci v vrtincu pa pritisku nasprotujejo zaradi vrtenja (zaradi centrifugalne sile). Ko nekaj vode izteče, se pritisk zmanjša, zato vrtinec postaja širši (slika 2).



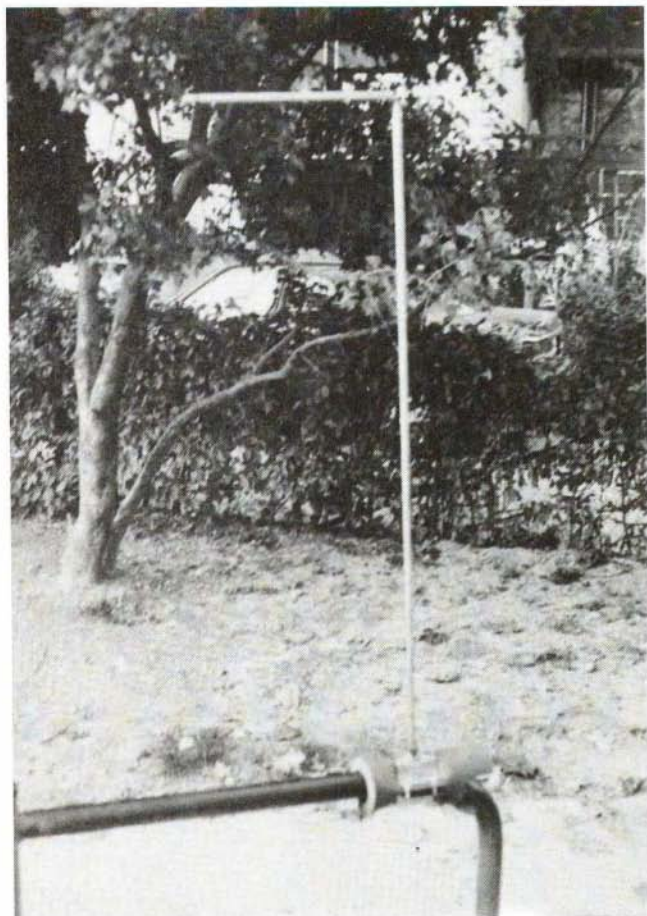
Slika 2. Oblika vrtinca v odvisnosti od višine vode v posodi.

Vrtincu podobne pojave opazimo v meteorologiji. Tako dobimo značilne oblike ciklonov (slika 3), kjer zrak teče proti področjem z nižjim tlakom, in je zato smer vrtenja ciklona enaka smeri iztočnega vrtinca. Pri anticiklonih je smer obratna (slika 3).



Slika 3. Smer vrtenja ciklonov (območje nizkega zračnega pritiska) in anticiklonov (območje visokega zračnega tlaka) na severni in južni polobli.

Prisotnost velike Coriolisove sile v našem opazovalnem sistemu lahko koristno uporabimo tudi pri opazovanju Foucaultovega nihala (slika 4). Mesto, kjer je nihalo pritrjeno na vrtiljak, ni pomembno (kotna hitrost je na vseh mestih enaka). Opazoval sem spremembe nihanja glede na dolžino uporabljene vrvice in mase obešene kroglice. Najboljše rezultate (najmanj motenj pri nihanju) dobimo pri uporabi dolge vrvice in težke kroglice. Prvo je pomembno zaradi ugodne frekvence, drugo pa zaradi vztrajnosti.



Slika 4. Foucaultovo nihalo na vrtiljaku.

Zoran Arsov

NARIŠI PRAVOKOTNI TRIKOTNIK

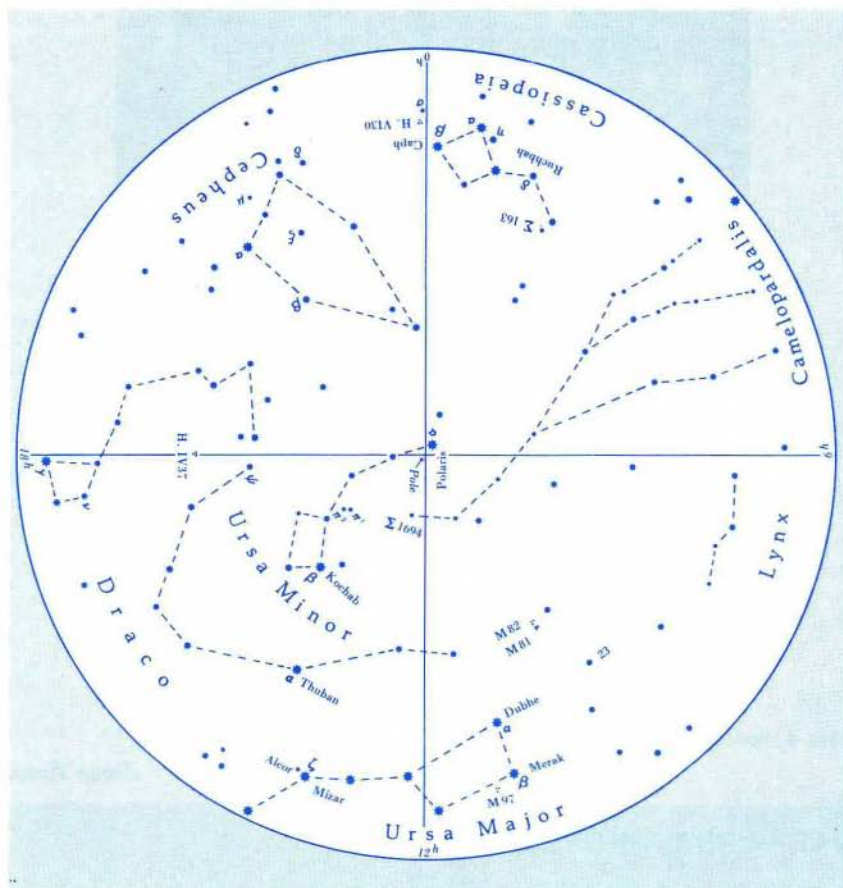
Nariši pravokotni trikotnik, če poznaš njegov obseg $2s$ in dolžino simetrale pravega kota s_γ .

Marija Vencelj

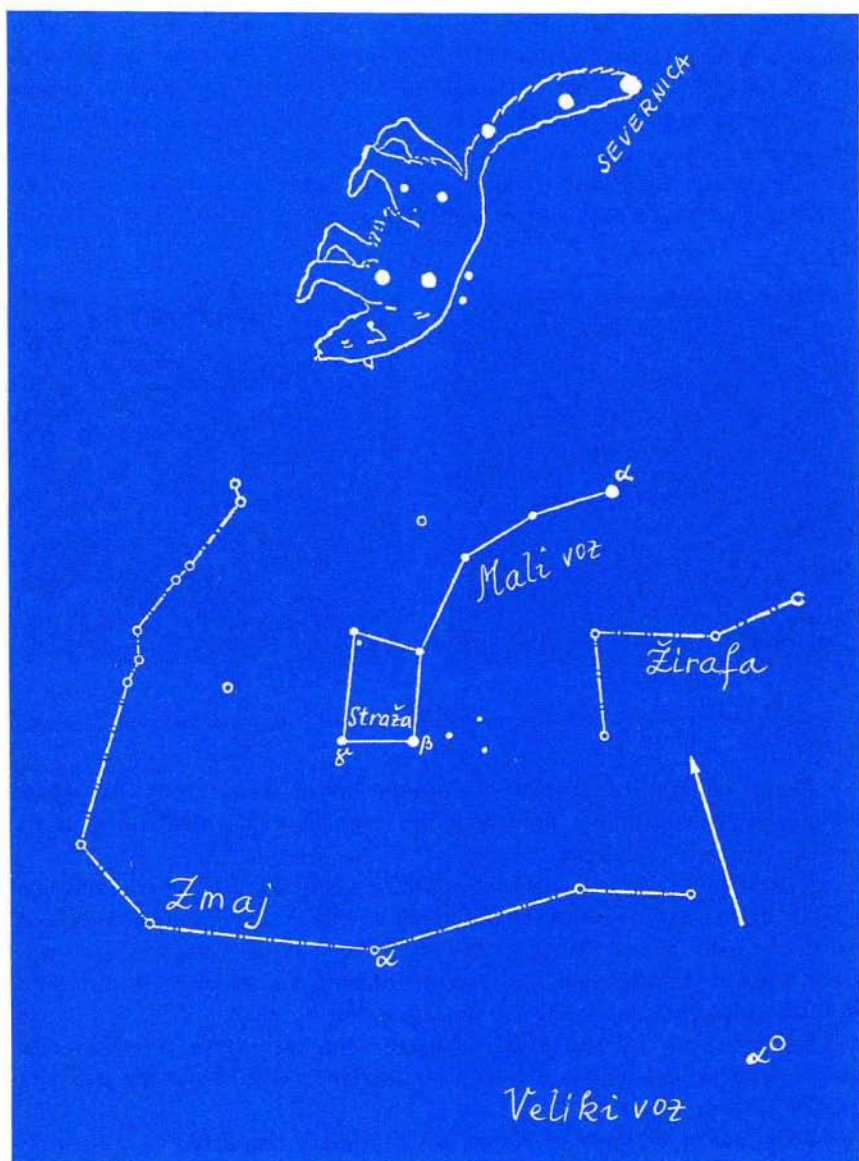
ASTRONOMIJA

STRAŽA

Kdo neki bi si mislil, da imamo celo na nebu stražo. Na nasprotni strani ojesa Malega voza ležita zvezdi, ki sta poleg Severnice edini dovolj svetli zvezdi v tem vozu, da ju z lahkoto vidimo s prostim očesom. Znani sta pod imenom Stražarski zvezdi, Stražarki pola, Čuvajki Severnice ali kar *Straža*. Njuno imenovanje je povezano z zvezdami Velikega voza.

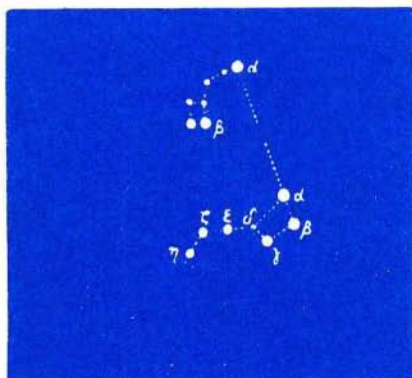


Karta nadobzorniških zvezd, s katero si pomagajte, da izsledite zvezdico Alkor.



Mali voz je del ozvezdja Malega medveda. Le v temni jasni noči vidimo vse zvezde tega voza. Zvezdi Beta (Kohab) in Gama (Ferkad), imenovani Stražarki pola ali Straža, pa sta vedno dobro vidni s prostim očesom.

Medtem ko oba Voza navidezno krožita okrog Severnice, ti zvezdi vedno najdemo med Severnico in zvezdami Velikega voza. Zdi se, kot da bi zvezdi stražili Severnico, da je ne bi ukradle svetle, ponosne in grabežljive zvezde Velikega voza. Zgodba namreč pripoveduje, da so te zvezde že nekoč ukradle eno zvezdo (Alkor) iz najmanjšega nebesnega voza – Plejad. Zvezdi sta zato stalno na preži, da bi vsak trenutek preprečili roparskim zvezdam ukrasti še kakšno drugo zvezdo in jo dodati na že tako svetel predel neba, kjer leži Veliki voz.



ob 19. uri



ob 21. uri

Sprememba leg zvezd Velikega in Malega voza glede na obzorje je preprost dokaz za vrtenje Zemlje.

Druga od zgodb pripoveduje o sedmih bratih, ki so zvedeli za sedem lepih sestra. Bile so pridne, prijazne in rade so plesale. Domenili so se, da jih ugrabijo in vzamejo za žene.

Presenetili so jih pri plesu med rožami na travniku. Le enemu je uspelo ugrabiti dekle, ostale pa so ušle. Za kazen so bogovi ugrabitelje prikovali na nebo kot sedem zvezd Velikega voza. Ob enem ugrabitelju (srednji zvezdi Mizar v ojesu Velikega voza) s prostim očesom res lahko vidimo drobno zvezdico (Alkor), ki naj bi bila ugrabljena sestra.

Ker prispevek želi spodbujati k opazovanju, predlagam, da si izberete jasno brezluunino noč in greste daleč od moteče svetlobe. Poskusite najprej s prostim očesom najti:

- Veliki voz in po njem Severnico (orientacija na zemljišču),
- Mali voz in v njem Stražo,
- ugrabljeno sestro – zvezdico Alkor ob zvezdi Mizar (če jo izsledite, vedite, da dovolj dobro vidite in vam ni treba na pregled k okulistu).

Iz istega kraja opazujte Stražo okoli 21. ure in nato ponovno čez uro ali dve. Opazili boste, da je Straža (in tudi druge bližnje zvezde) spremenila lego glede na zemeljske predmete, zvezda Severnica pa ne. Ali bi znali pojasniti, kaj je vzrok te spremembe?

Marijan Prosén

KAKO ŠTEJEMO PO SLOVENSKO?

Ne boste verjeli, ampak včeraj zvečer me je nekdo spravil v zadrego, ko me je vprašal, kako se po slovensko reče številu, ki ga zapišemo z enico in štirinajstimi ničlami.

Zadrega nastopi, ker že v angleščini štetje ni standardizirano. Evropejci (in s tem Angleži) štejemo drugače, kot to počno Američani. V slovenščini velja takle dogovor pri štetju:

1	ena
10	deset
100	sto
1000	tisoč
10000	deset tisoč
100000	sto tisoč
1000000	milijon
10000000	deset milijonov
100000000	sto milijonov
1000000000	milijarda
10000000000	deset milijard
100000000000	sto milijard
1000000000000	bilijon
10000000000000	deset bilijonov
100000000000000	sto bilijonov
1000000000000000	bilijarda
10000000000000000	deset bilijard
100000000000000000	sto bilijard
1000000000000000000	trilijon

Zdaj ko je sistem jasen, moramo samo še ugotoviti, kako naprej:

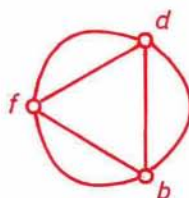
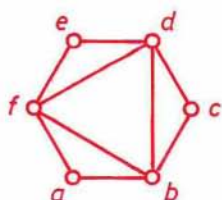
1000000	milijon
1000000000	milijarda
1000000000000	bilijon
1000000000000000	bilijarda
1000000000000000000	trilijon
1000000000000000000000	trilijarda
1000000000000000000000000	kvadrilijon
1000000000000000000000000000	kvadrilijarda
1000000000000000000000000000000	kvintilijon
1000000000000000000000000000000000	kvintilijarda
1000000000000000000000000000000000000	seksilijon
1000000000000000000000000000000000000000	seksilijarda
100	septilijon
1000	septilijarda
100	oktilijon
1000	oktilijarda
100	nonilijon
100	nonilijarda
1000	decilijon
100	decilijarda

Seveda bi lahko nadaljevali še naprej. Znati moramo šteti latinsko. Število 10^{120} je torej vigintilijon, 10^{123} pa vigintilijarda. V težave zaidemo pri številu 10^{126} , saj se latinsko 21 zapiše z dvema besedama: viginti unum. Ali je 10^{126} vigintiunilijon po slovensko?

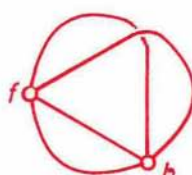
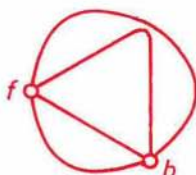
Tomaž Pisanski

POPOTOVANJE Z LETALOM – Rešitev s str. 275

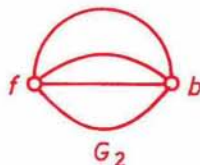
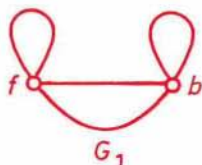
Tabelo prevedimo najprej v graf. Vsaki državi priredimo točko in povežemo med seboj vse tiste pare, ki označujejo države, med katerimi obstajajo letalske linije. Tako dobimo graf na naslednji risbi na levi. Za rešitev Mavricijeve naloge moramo v njem prešteti vse tiste obhode, ki gredo po vsaki povezavi natanko enkrat. Nalogo pa si lahko še dodatno poenostavimo s tem, da namesto obhodov v grafu na levi raje preštevamo obhode v njegovem sosedu na desni. Število vseh obhodov po vseh povezavah je namreč v obeh grafih enako, o čemer se bo reševalec zlahka prepričal tudi sam.



Pri vsakem izmed teh obhodov lahko gremo skozi točko d na enega izmed naslednjih treh načinov:



Graf na levi poenostavimo v graf G_1 , ostala dva pa v graf G_2 :



Denimo, da je v prvem grafu n_1 , v drugem pa n_2 sklenjenih poti, ki gredo čez vsako povezavo po enkrat. Število vseh iskanih sklenjenih poti v začetnem grafu dobimo tedaj z vsoto:

$$n_1 + 2n_2 = 2 \cdot 2 \cdot 2 + 2 \cdot (2 \cdot 6) = 32.$$

Pri tem smo upoštevali, da lahko gremo po vsaki povezavi grafov na dva različna načina - v eno ali drugo smer. Enako velja tudi za zanki grafa G_1 .

Glede na tekst v nalogi smemo predpostaviti, da Mavricij ne živi v nobeni izmed šestih držav, omenjenih v njej. To pomeni, da bo lahko svoje popotovanje začel v katerikoli izmed teh držav in potoval skoznje kar na $32 \cdot 6 = 192$ različnih načinov. Zanimivo pa je, da bo moral potovanje v vsakem primeru tudi končati v tisti državi, kjer ga bo začel.

Vilko Domajnko

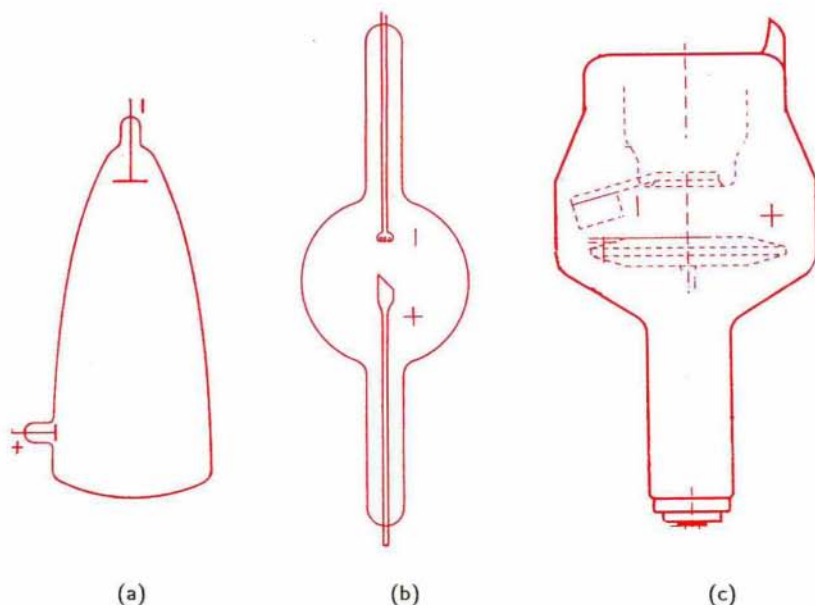
STO LET RENTGENSKIH CEVI

Pred sto leti so bile rentgenske cevi preproste steklene bučke, iz katerih so izsesali zrak (slika 1a). Med negativno elektrodo – katodo – in pozitivno – anodo – je bilo mogoče opaziti pramen katodnih žarkov, kakor so tedaj rekli curku elektronov. Najmočnejše je rentgensko svetlobo seval del steklene stene, ki ga je zadel curek. Kmalu so začeli izdelovati cevi s katodo, ki so jo segrevali z električnim tokom do visoke temperature, tako da so iz nje izhajali elektroni (slika 1b). Za razliko od prejšnje cevi je seval rentgensko svetlobo samo del anode, ki so ga zadeli elektroni. V tem primeru so vsi elektroni prileteli na anodo z enako kinetično energijo, ki jo je določala napetost anode proti katodi.

Dandanes rentgenske cevi uporabljajo za zdravniške preiskave in v merilnih in raziskovalnih laboratorijih. Glede na namen se cevi med seboj precej razlikujejo. Sodobno cev za zdravniške preiskave (slika 1c in naslovna stran) priključimo na napetost do 150 000 V. Moč, ki jo rabi rentgenska cev, izračunamo kot za vsak drug porabnik tako, da pomnožimo napetost U na cevi s tokom I . Pri napetosti 150 000 voltov in toku 0,002 A dobimo 300 W. Samo del odstotka te moči prevzame energijski tok rentgenske svetlobe, preostanek morajo odvajati kot toplotni tok. Segreta anoda ga izseva; poleg tega lahko hladijo anodo samo ali ohišje cevi z vodo ali ohišje z zrakom.

Za rentgensko svetlobo ni leč in zrcal, torej smo vezani na senčne slike. Zato je pomembno, da izvira rentgenska svetloba iz čim manjšega dela anode, da torej curek elektronov zadene čim manjši del anode. Elektronska leča zbere elektrone na nagnjeni anodi v ploskvi, ki jo je videti s strani kot kvadrat s stranico milimetra ali nekaj manj. Anoda iz zlitine renija, volframa in molibdena bi se tam kljub hlajenju preveč segrela, če je ne bi vrteli do več kot stokrat na na sekundo. (V izvedbi rentgenske cevi, ki jo vidimo na naslovni strani, je pod kovinsko anodo debela plast grafita, ki poveča toplotno kapaciteto anode in seva.) Temni ozki valj pod anodo je vrtljivi del kratkostičnega motorja, ki sega v mirujoči del zunaj cevi.

Za napajanje rentgenske cevi navadno uporabimo transformator. S posebnimi prijemi poskrbimo, da je napetost na cevi čim bolj konstantna. Pogosto zato uporabimo na vhodu transformatorja napetost s frekvenco več deset tisoč nihajev na sekundo. Cev lahko poganjamo neprekinjeno ali v sunkih. Senčno sliko lahko opazujemo neposredno na fluorescenčnem zaslonu, posredno s slikovnim pretvornikom ali na fotografiji. Rentgenska svetloba ionizira in je škodljiva, zato poskušajo doseči, da preiskovanca čim manj obsevajo.



Slika 1. Stara rentgenska cev s hladno (a) in segreto (b) katodo in sodobna rentgenska cev za zdravniško rabo (c). Na naslovni strani je slika nekoliko drugačne izvedbe cevi (c).

Na kolikšno napetost priključijo cev, kako velik presek elektronskega curka na anodi izberejo in to, ali poganjajo cev neprekinjeno ali v sunkih, je odvisno od opazovanega dela telesa in načina opazovanja.

Mimogrede omenimo, da najmanjšo valovno dolžino λ_0 pri rentgenski cevi z napetostjo U določa enačba $U\lambda_0 = 1240 \text{ V}\cdot\text{nm}$. Najmanjša valovna dolžina pri napetosti 150 000 V meri torej 0,008 nanometrov.

Janez Strnad

SKLADNOST

Dokaži, da sta pravokotnika s paroma enakima obsegoma in ploščinama skladna.

Vilko Domajnko

MATEMATIKA

SUNDARAMOVO REŠETO

Vsi poznamo Eratostenovo rešeto, ki nam omogoča hitro in enostavno določiti poljubno mnogo začetnih praštevil. Manj znana in resnici na ljubo ne tako hitra pa je metoda, ki jo je še kot študent odkril indijski matematik S.P. Sundarama. Kaj nam torej svetuje naš indijski kolega?

1. Vzemi prazen list papirja in v zgornji levi kot napiši število 4. Nadaljuj stolpec tako, da prejšnjemu številu prišteješ 3.

2. k -to vrstico nadaljuj tako, da prejšnjemu številu v vrstici prišteješ $2k + 1$.

Na ta način dobimo naslednjo tabelo:

4	7	10	13	16	...
7	12	17	22	27	...
10	17	24	31	38	...
13	22	31	40	49	...
16	27	38	49	60	...
⋮	⋮	⋮	⋮	⋮	⋮

Opazimo, da stoji na presečišču k -te vrstice in n -tega stolpca število $k + (2k + 1)n = k + 2kn + n$.

Sledi malce presenetljiva trditev.

Za vsako naravno število, ki ga ni v tabeli, je njegov dvakratnik, povečan za 1, praštevilo. Še več, vsako liho praštevilo se da na takšen način dobiti iz naravnega števila, ki ga v tabeli ni.

V prvi del trditve se prepričamo takole:

Vzemimo naravno število x , ki ga ni v tabeli. To pomeni, da se števila x ne da zapisati v obliki $n + 2kn + k$ za nobeni naravni števili n in k . Dokazati moramo, da je število $2x + 1$ praštevilo. Pa denimo, da ni. Tedaj se da zapisati kot produkt dveh od 1 različnih naravnih števil:

$$2x + 1 = ab; \quad a, b \in \mathbb{N} \quad a \neq 1, \quad b \neq 1.$$

Ker je $2x + 1$ liho število, morata biti lihi tudi števili a in b . To pa pomeni, da sta števili

$$k = \frac{a-1}{2}, \quad n = \frac{b-1}{2}$$

naravni števili. Izračunajmo izraz:

$$k + 2kn + n = \frac{a-1}{2} + 2 \frac{(a-1)(b-1)}{4} + \frac{b-1}{2} = \frac{ab-1}{2} = x.$$

Potemtakem se število x nahaja v naši tabeli, in sicer na presečišču k -te vrstice in n -tega stolpca. To pa je v nasprotju z začetno predpostavko, da števila x ni v tabeli. Do protislovja smo prišli, ker smo dodatno privzeli, da število $2x + 1$ ni praštevilo. S tem je prvi del trditve dokazan.

Lotimo se še drugega dela. Vzemimo liho praštevilo p . Vsako liho od 1 večje naravno število - in zato tudi p - se da na en sam način zapisati v obliki $2x + 1$, kjer je x naravno število. Za število p poiščimo takšen x . Dokazati želimo, da števila x ni v tabeli. Pa recimo, da kljub vsemu x je v tabeli. Potem morata obstajati naravni števili k in n taki, da velja: $x = k + 2kn + n$.

Tedaj za p velja:

$$p = 2x + 1 = 2n + 4kn + 2k + 1 = (2n + 1)(2k + 1).$$

Praštevilo p smo torej razcepili na produkt dveh naravnih števil, ki sta različni od 1. To pa je po definiciji praštevila nemogoče. Predpostavka, da število x najdemo v tabeli, nas je torej pripeljala do protislovja. Tedaj pa ni druge, kot da priznamo, da ga v tabeli ni. S tem je trditev v celoti dokazana.

Primož Potočnik

STROGO NARAŠČAJOČA ŠTEVILA

Naravno število je *strogo naraščajoče*, če njegove številke (v desetiškem zapisu) tvorijo strogo naraščajoče zaporedje. Ker imamo na voljo deset števk, števko 0 pa lahko uporabimo le na začetku, kar pa števila ne spremeni, nobeno strogo naraščajoče število nima več kot devet števk. Celo več, edino strogo naraščajoče število z devetimi števčkami je 123456789, vsa ostala pa imajo osem ali manj števk. Naše vprašanje je preprosto: koliko je vseh strogo naraščajočih naravnih števil?

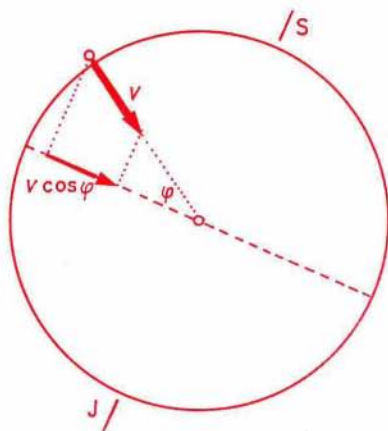
Martin Juvan

ODKLON PROTI VZHODU

Spoznanja ob razmišljanju o vrtnicu pri iztekanju pomagajo, da obdelamo zanimiv pojav, pri katerem se telo giblje navpično navzdol, ne v vodoravni smeri. V tem primeru Coriolisova sila $2mv\omega \cos \varphi$ odkloni telo proti vzhodu (slika 1). Pri tem je φ geografska širina. Pojav je najizrazitejši na ekvatorju, na polu pa ga ni. Odklona ni težko izračunati. Tako majhen je, da si lahko mislimo, da v navpični smeri telo enakomerno pospešeno pada zaradi težnega pospeška g . Njegova hitrost v navpični smeri s časom narašča kot gt , če smo telo spustili v trenutku $t = 0$. V smeri proti vzhodu, pravokotno na smer padanja, ustreza

Coriolisovi sili pospešek $2gt\omega \cos \varphi$. Z njim dobimo komponento hitrosti v tej smeri $gt^2\omega \cos \varphi$ in ustrezeni premik, torej odklon proti vzhodu, $s = \frac{1}{3}gt^3\omega \cos \varphi$. Nazadnje odklon izrazimo z višino $h = \frac{1}{2}gt^2$, za katero telo v tem času pade,

$$s = \frac{2\sqrt{2}\omega \cos \varphi}{3\sqrt{g}} h^{3/2}.$$



Slika 1. Radialna komponenta hitrosti telesa pri gibanju navpično navzdol.

Odklon je prvi natančno izračunal C.F. Gauss leta 1803. Zanj pa je vedel že I. Newton in je celo predlagal, da naj bi ga izmerili. To so prvič storili šele leta 1791, a so izidi pri poskusih s stolpa razočarali, ker je motil preprih (glej preglednico). To je veljalo tudi za naslednje merjenje. Šele Reichovi poskusi v rudniškem jašku so dali zadovoljive izide. Merjenja W.W. Runda in v Cornwallskem rudniku so bila manj natančna, a so pokazala tudi majhen odklon proti jugu. Na tak odklon je pomislil spočetka že Benzenberg. Prav zaradi tega odklona, ki ga ni bilo mogoče pojasniti s Coriolisovo silo, so nadaljevali s poskusi. Za poskuse E.E. Halla, ki ga poznamo po Hallovem

pojavu, so na harvardski univerzi zgradili stolp, ki se je kasneje še enkrat vpisal v zgodovino fizike.¹

Skrbna merjenja so dala napovedani odklon proti vzhodu, medtem ko odklon proti jugu 0,045 mm ni presegal napake pri merjenju. V Parizu so delali poskuse v Pantheonu. Omeniti kaže, da je že leta 1851 edino L.Foucault prišel na misel, da pri nihalu Coriolisova sila kaže v prvi polovici nihaja v isto smer kot v drugi.

Leto	meril	kraj	φ	h	število merenj	s_{izm}	s_{izr}
1791	Guglielmini	Bologna	44°	78,3 m		1,89 cm	1,09 cm
1802	Benzenberg	Hamburg	54°	76,3 m		0,90 cm	0,86 cm
1831	Reich	Freiberg	51°	158,5 m		2,84 cm	2,75 cm
1902	Hall	Cambridge	52°	23,0 m	984	0,15 cm	0,15 cm
1903	Flamarion	Pariz	49°	68,0 m	144	0,76 cm	0,81 cm

Tabela 1. Pregled najpomembnejših merenj odklona proti vzhodu teles pri prostem padanju. V zadnjem času so ugotovili, da se zaradi zračnega upora odklon poveča, v prvem približku na primer za 15 % pri višini 50 m in za 62 % pri višini 200 m. Tako je z zračnim uporom mogoče pojasniti manjše izmerjene odklone od izračunanih, pri katerih ni upoštevan zračni upor.

Pozneje so nadaljevali poskuse z Atwoodovim škripcem. J.G.Hagen je leta 1912 meril pri pospešku 0,1g. Z isto napravo so najprej v mirovanju določili navpičnico. Na višini 23 m se je izmerjeni odklon proti vzhodu 0,0899 cm dobro prilegal napovedanemu 0,0889 cm, ki ga je treba izračunati s pospeškom 0,1g. Odklon proti jugu 0,010 mm je bil manjši od napake pri merjenju. V tistih letih je tekla razprava predvsem o odklonu proti jugu. Za razliko od odklona proti vzhodu ta še ni do kraja pojasnjen. Pri precej manjšem odklonu proti jugu ali celo proti severu je vpletena oblika Zemlje in najbrž tudi krajevne posebnosti zemeljskega gravitacijskega polja.

Janez Strnad

¹ V njem sta R.V.Pound in G.A.Rebka leta 1960 prvič v laboratoriju z Mössbauerjevim pojavom izmerila spremembo valovne dolžine svetlobe v gravitacijskem polju.

STIČNA ŠTEVILA

Poišči vsa naravna števila, ki so pri desetiškem zapisu enaka produktu svojih števk.

Martin Juvan

RAČUNALNIŠTVO

PREIZKUSNI PROGRAMI ZA MATEMATIKO

Računalnik lahko uporabljamo v različne namene. Ena od možnosti je, da ga uporabimo kot pripomoček pri učenju. Uporabo računalniških programov v šoli srečamo na različnih področjih. Pri pouku jih lahko uporabljamo kot demonstracijsko sredstvo za ponazoritev določene snovi, pri izpeljavi vaj, kot pripomoček pri samostojnem odkrivanju nove snovi, ...

Preizkusni programi

Poleg programov, ki jih ponujajo velike programerske hiše (Microsoft, Borland, Lotus, Novell) in še cel kup manjših podjetij, je na tržišču tudi skupina programov, ki jih kupujemo na drugačen način. To so ti. shareware programi. O tem, kako besedo shareware prevesti v slovenščino, se še vedno krešejo mnenja. Možna prevoda sta npr. programi v prostem razširjanju in preizkusni programi, kot jih imenuje tudi revija Monitor. Osnovna ideja teh programov je, da jih lahko "poberemo", od koder hočemo, jih preizkusimo in, če nam program ugaja, avtorju (bodisi posamezniku ali podjetju) pošljemo plačilo za njegov program. Tak program lahko brez kančka slabe vesti (to je celo zaželeno!) damo prijatelju, znancu, sosedu. S tem ne kršimo nobenih avtorskih ali drugih predpisov, vse dotlej, dokler za tako početje ne zahtevamo plačila, večjega od dejanskih stroškov (disketa, stroški pošiljanja).

Praviloma ti programi v kvaliteti ne zaostajajo veliko za "pravimi" programi, večkrat jih celo prekašajo. Seveda poleg ne dobimo lepih priročnikov, programi tudi ne ponujajo barvitih škatel, a to uporabnosti samega programa ne zmanjšuje. Seveda je precej tovrstnih programov tudi slabih, z dvomljivo idejo in pomanjkljivo izvedbo, vendar med njimi lahko najdemo tudi take, ki nam res ustrezajo.

Naj še enkrat poudarim, da ti programi niso brezplačni – uporabnik naj bi po izteku preizkusnega obdobja program prenehal uporabljati ali pa naj bi ga registriral, torej poslal plačilo avtorju oz. avtorjem.

Preizkusni programi niso edina skupina programov, ki se razširja na tak način (s presnemavanjem, posojanjem disket). Tako srečamo še brezplačne programe (freeware), okrnjene programe (crippleware), programe v javni lasti (public domain programs), demonstracijske programe (demo programs). Na kratko opišimo značilnosti posameznih skupin programov:

shareware: Program preizkusimo. Če nam je všeč, avtorju pošljemo zahtevano vsoto denarja. Običajno potem dobimo najnovejšo inačico programa, pogosto tudi tiskan priročnik. Program lahko razširjamo naprej (ne

prodajamo!), vendar moramo paziti, da ostane nespremenjen, z vsemi pripadajočimi datotekami (tudi tistimi, na katerih je reklama za avtorja).

freeware: Program lahko uporabljamo brez plačila. Lahko ga razširjamo naprej pod enakimi pogoji kot shareware. Posebna skupina programov je ti. cardware – avtor ne zahteva plačila, v zahvalo pa pričakuje razglednico.

public domain: Avtor je dal program v javno last. To pomeni, da lahko s programom počnemo, kar se nam zdi – ga vključujemo v svoje programe, spreminjamo, ...

crippleware: Program nima vseh sposobnosti pravega programa. Določene funkcije manjkajo, program po določenem času ne deluje več, med delovanjem se izpisujejo obvestila. Ko avtorju pošljemo plačilo, dobimo "zaresni" program brez omejitev.

demo: Pogosto so demonstracijski programi okrnjeni na podoben način kot crippleware. Velikokrat tečejo sami od sebe in le kažejo možnosti "pravega" programa. Če nas demonstracijski program prepriča, kupimo pravi program.

Kako do preizkusnih programov?

Verjetno najenostavnejši način je, da imate pri sebi disketo vsakokrat, ko ste pri kolegu, ki tudi ima računalnik. Če vidite program, ki vam je všeč (in je to preizkusni program!), ga enostavno presnamete. Obstajajo tudi ljudje, ki načrtno zbirajo tovrstne programe in jih za majhno plačilo (omenili smo že, da smemo pri razširjanju preizkusnih programov zaračunavati le dejanske stroške posredovanja) razširjajo naprej. Obstajajo tudi klubi, katerih glavna dejavnost je zbiranje in razširjanje preizkusnih programov. Če boste postali član kakšnega takega kluba, bo vaša največja težava, kako izbrati med tisoči in tisoči programov, ki vam bodo na voljo.

Glavni način za razširjanje tovrstnih programov pa so BBS-i (Bulletin Board System). O BBS-ih ne bomo obširneje govorili, povejmo le, da nam med drugim omogočajo, da preko modema presnamemo tudi tovrstne programe. V zadnjem času srečamo tudi vedno večjo ponudbo zbirk preizkusnih programov na CD-ROM-ih. Tako za nekaj tisoč tolarjev dobite CD-ROM, na katerem je tudi več tisoč preizkusnih programov. Poudarimo pa še enkrat, da z denarjem, ki ga plačate za CD-ROM ali za članarino v klubu, programov, ki ste jih dobili, še niste plačali. Še vedno morate avtorju programa (če seveda ne gre za brezplačni program) poslati plačilo, ki pa praviloma ne presega 3000 tolarjev.

Programi za matematiko

Tudi na področju izobraževalnih programov je ponudba preizkusnih programov kar velika. Posebno za matematiko in učenje angleščine jih je veliko. Mnogi med njimi so nastali, ko sta očka ali mama programer poskušala svojim otrokom pomagati pri spoznavanju tako zapletenih stvari, kot so seštevanje, poštevanje ali računanje z ulomki. Zato je tudi največ programov, ki so namenjeni utrjevanju štirih osnovnih računskih operacij. Pogosto je to učenje prikrito z igranjem igrice, tako da učenje postane tudi zabava. V nadaljevanju bomo na kratko opisali nekatere od teh programov. Če bi do katerega radi prišli, se oglasite na Fakulteti za matematiko in fiziko na Jadranski 19 v Ljubljani. Le diskete imejte s seboj.

Math rescue

V deželo so se pritihočile čudne pošasti in pokradle vse številke. Ti, hrabri junak, se moraš spustiti v podvodni svet, kjer prebivajo, in prinesiti številke nazaj. Pri tem ti bo v pomoč črv Benny, tvoje glavno orožje pa bo hitro in spretno reševanje računskih nalog, sestavljenih iz seštevanja in odštevanja različnih števil. Če boš dober računar, boš pošasti premagal. Glej sliko na III. strani ovitka.

Lugnut city

Kot robot se prebijaš preko pasti v mestu Lugnut ali Težki orehi po naše. Na voljo imaš lasersko pištolo, s katero odstranjuješ ovire. Vendar ne vseh. Pod večino ovir se skrivajo matematične zanke – tako moraš pravilno prešteti pike, povedati, ali je račun pravilen, poiskati manjkajoči seštevanec, izbrati pravilni odgovor. Hkrati pa moraš poiskati dovolj čudežnih čevljev, ki ojačajo tvoje noge, da lahko skačeš vedno višje, in se prebiti do izhoda iz vsake sobe. Glej sliko na III. strani ovitka.

Big math attack

Pozor, pozor! Naše mesto napadajo čudni osvajalci. Spuščajo bombe in vsaka uniči četrtno mesta. Ti si poveljnik obrambe in na osvajalčeve bombe meriš z raketami. Vendar rakete zadanejo na pravo mesto le, če vtipkaš pravilno šifro. Ta pa je odgovor na račun, ki ga vsaka bomba nosi na sebi. Boš uspešnejši

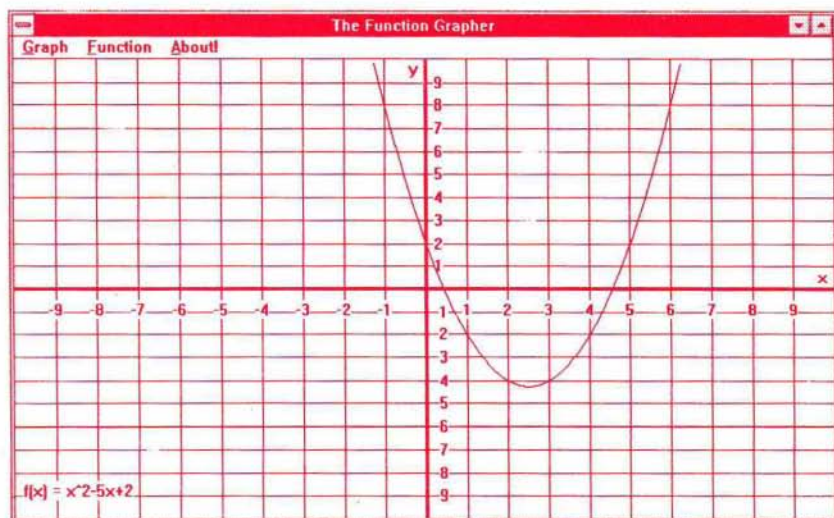
kot tvoji predhodniki? Se boš prebil na lestvico nesmrtnih braniteljev mesta? Glej sliko na IV. strani ovitka

Sparky

Medvedek Sparky se sprehaja po parku in nenadoma zagleda čudno drevo. Na deblu je račun, na vejah pa se zibljejo tri gnezda, vsako s svojo številko. Bo medvedek dovolj spreten, da bo s kamnom zadel pravi odgovor? Seveda ga mora zadeti dovolj hitro, preden poteče odmerjeni čas. Da naloga ne bo pretežka, Sparky tu le sešteva. Če pa avtorju pošljete 15 dolarjev, bo Sparky moral reševati tudi težje naloge – odštrevati, množiti, deliti. Glej sliko na IV. strani ovitka.

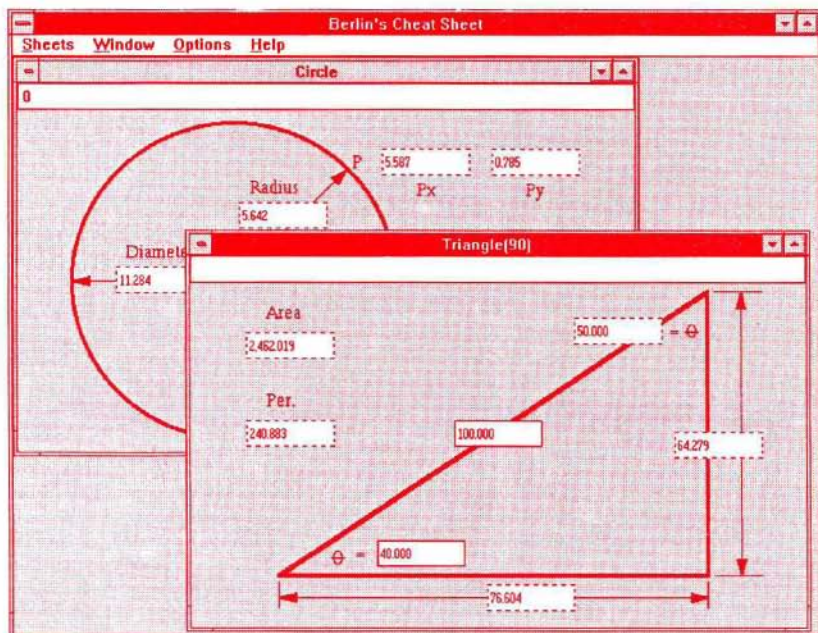
Function grapher

No, da se ne bomo le igrali, narišimo še kakšno funkcijo. Function grapher je eden od številnih programov, ki nam pri tem lahko pomagajo.



Berlin's cheat sheet

Berlinov elektronski plonk listek je odličen pripomoček, če je treba razrešiti 10 pravokotnih trikotnikov, 20 krogov in še kaj podobne navlake. Vtipkaš podatke, ki jih poznaš, program pa sam zapiše ostale važne mere – brez nadležnega korenjenja, obračanja formul, ...



Matija Lokar

BARVANJE KOCK - Rešitev s str. 275

Štirideset sekund. Navodilo: Najprej en tabornik pobarva dve stranici prve kocke, drugi pobarva 4 stranice druge kocke in tretji celo tretjo kocko. Nato prvi tabornik pobarva celo četrto kocko, drugi dokonča barvanje prve in tretje druge kocke. (Opomba: Obstajajo tudi druge, podobne možnosti. Poiščite jih!)

Dragoljub M. Milošević – prev. in prir. Barbara Japelj

RAZVEDORILLO

KAJ JE KIPU?

Indijansko ljudstvo Inkov je v 13. stoletju ustvarilo veliko državo na ozemlju današnjega Peruja. Dosegli so visoko stopnjo civilizacije, ki jo lahko primerjamo z visokimi kulturami Starega sveta. Čeprav niso poznali koles, so razvili obsežno in razvejano cestno omrežje. Prave pisave niso poznali, zato so uporabljali različne pripomočke za hranjenje podatkov. Prav gotovo je eden takih tudi kipu. Inkovska centralizirana oblast v Cuzcu je zgradila svojevrsten birokratski stroj za nadziranje svojih podložnikov. Tako so za vsako regijo izšolali nekaj ljudi za izdelovanje kipujev. Ko so se ti ljudje vrnili domov, so že znali ravnati z njimi. Bili so močno privilegiran del prebivalstva, saj so bili edini, ki so vedeli, kaj v kipujih "piše".



Kako je sestavljen kipu? Na prečno glavno vrvico je bilo privezanih več vzdolžnih vrvic. Običajno so bile viseče vrvice organizirane v skupine, ki so bile med seboj ločene z barvnimi vrvicami. Posamezna skupina je lahko pomenila ozemeljsko, upravno ali časovno enoto, za katero je bilo potrebno narediti obračun ali zapis. Kipu je imel lahko vrvice usmerjene tudi navzgor.

S temi vrvicami so zabeležili vsoto na spodnjih vrvicah. Na eno vrvico je bilo lahko obešenih še nekaj drugih vrvic. Na vsaki vzdolžni vrvici so bili vozli, ki so pomenili število, zapisano v desetiškem številskem sistemu. Tako sta dva vozla pri vrhu in trije spodaj pomenili desetiško število 23. Največje število, ki so ga odkrili na kakem kipuju, je bilo nekaj manj kot 100000 (natančneje 97357). Ničle so bile predstavljene z večjim razmakom med skupkom vozlov. Manjši razmaki pa so ločevali posamezne desetiške številke.

Zmotno je mišljenje, da je tovrstna naprava računski stroj, neke vrste računalno ali kaj podobnega. S kipujem so Inki le beležili števila in pojme (dogodke). Lahko je kipu pomenil še kaj drugega, na primer zapis korakov pri plesu, kodiran zapis vzorca v blagu ali pa celo notni zapis znane verske ali posvetne melodije.

Po približno tridesetih letih, ko so Španci "odkrili" inkovsko kulturo, so jo tudi uničili. Tako se je izgubila tudi sled za tem, kas so v resnici pomenile nitke z vozli. Ker so tudi ustvarjalci kipujev končali kot žrtve španskih osvajalcev, še danes ne vemo, kakšno sporočilo je nosil in čemu je bil namenjen posamezni kipu. Ohranjenih je kakih 550 kipujev, ki ležijo raztrošeni po raznih muzejih po svetu.

Na sliki vidimo poštno znamko s sliko kipuja. Kipu na znamki sodi med preprostejše. Najobsežnejši odkriti kipu ima sedem vrvic v skupini v devetih nizih, kjer je vsak še v eni od 27-tih barv (torej $9 \cdot 27 = 243$ skupin po 7 vrvic).

Veselko Guštin

STROGO NARAŠČAJOČA ŠTEVILA - Rešitev s str. 341

Ugotoviti moramo, koliko je vseh strogo naraščajočih števil, torej števil, katerih številke v desetiškem zapisu tvorijo strogo naraščajoče zaporedje. Najprej opazimo, da je strogo naraščajoče število enolično določeno z množico števk, ki ga sestavlja. Vsaka številka namreč lahko nastopi samo enkrat, njihov vrstni red pa je določen z zahtevo po naraščanju števk. Prav tako nam vsaka neprazna množica števk določa natanko eno strogo naraščajoče število. Ker imamo na voljo devet števk (s številko 0 si ne moremo pomagati), je vseh strogo naraščajočih števil ravno toliko, kolikor je vseh podmnožic množice z devetimi elementi minus ena. To pa je $2^9 - 1 = 511$.

Podobno bi lahko sklepali tudi pri zapisu števil v osnovi b , ki je različna od 10. Pri osnovi b je strogo naraščajočih števil $2^{b-1} - 1$.

Martin Juvan

NOVE KNJIGE

Zmazek, V.: MATEMATIKA, zbirka vprašanj in rešenih nalog za pripravo na maturo, DMFA Slovenije, Ljubljana 1995, 140 str.

V začetku leta 1995 je izšla nova zbirka, ki ima zgovoren naslov Matematika, priprava na maturo. V zbirki so vprašanja, ki jih bodo dijaki srečali na ustnem delu maturitetnega izpita, ter naloge z rešitvami, kakršne naj bi bile na pisnem delu.

Vsako poglavje se prične najprej z ustnimi vprašanji, ki so jim dodane lažje, tipične, kratke naloge. Nato sledijo naloge, ki kar temeljito preverjajo razumevanje snovi. Naloge niso lahke, največ jih je "srednje težkih", zato so rešitve še kako dobrodošle. Na koncu zbirke najdemo formule, ki jih tudi za pisni maturitetni izpit ni potrebno znati na pamet.

Mislim, da bodo dijaki zbirke veseli, prav tako tudi njihovi profesorji.

Pri reševanju nalog, ki jih najdete v zbirki, vam želim veliko uspeha še posebej pa seveda dijakom na maturitetnem izpitu.

Mojca Lokar

DVE SPOROČILI

Naročnikom

Vse Presekove bralce, ki bodisi končujejo z rednim šolanjem bodisi iz kakšnega drugega razloga ne bodo imeli priložnosti, da se priključijo skupinskemu naročilu na našo revijo, vabimo, da se nanjo naročijo osebno. To svojo željo (s polnim naslovom, na katerega želijo prejemati Presek) naj sporočijo na naslov: **Komisija za tisk DMFAS, Jadranska 19, 61111 Ljubljana, p.p.64** ali po telefonu **(061) 1232-460**.

Avtorjem

Vse avtorje, ki svoje prispevke pišejo računalniško, prosimo, da **po možnosti** pripravijo datoteke v $\text{T}_{\text{E}}\text{X}$ u ali $\text{L}_{\text{A}}\text{T}_{\text{E}}\text{X}$ u, oziroma tudi v ASCII formatu, če v tekstu ni veliko formul. Ker Presek stavimo v $\text{T}_{\text{E}}\text{X}$ u, bi nam s tem zelo olajšali delo.

Seveda je to le prošnja tistim, ki to možnost imajo, so pa še vedno dobrodošli vsi prispevki, ne glede na format, v katerem so pripravljeni.

Iz uredništva

KRIŽANKA 'RAČUNALNIŠTVO'

				FIZIČARKA CURIE	INDIJ	SLOV. LIT. KRITIK (BOJAN)	MESTNI GOSTINSKI LOKAL	STARO IRANSKO NOMADSKO PLEME	AVTOR MARKO BOKALIČ	WAL DISNE
									STAREJŠI UREJE- VALNIK BESEDIL	
	1000 KG	ANGLEŠKA PLOŠČINSKA MERA	GR. PREGRE- ŠNI KRALJ RAČUNALN. SPOMIN						ZBIRKA OBDELO- VANIH PODATKOV	
TROPSKI KOPITAR Z RILCASTIM GOBCEM						IGRALKA ZUPANČIČ			IME BALONARJA SOLNA	BABILO STOI ČIRKIL ŠALJI
NASLOV DELA JANEŽA JANŠE						ORIENTALSKO GOSTIŠČE			UJEDA, KI LOVI KAČE	
									ARZEN	
PREBIVALKE RAZVITE EVROPSKE DRŽAVE						VRH V JULJSKIH ALPAH	IRANSKI DENAR			
							DOLOČITEV OPERACIJE			
REKA V ITALIJI, KI TEČE SKOZI FIRENCE					NEKD. MADŽ. POLITIK (BELA)				PROGRAM- SKA OPREMA	
					NEKD. SL. KOŠARKAR (VITAL)					
	VOJAŠKO POVELJ- STVO	IVERICA	LUKA NA SEVERU FINSKE						VSOTA Z NEŠTETO ČLENI	NEZAŽELENI GOST V RA- ČUNALNIKU KOSTUMOGRA- VOGELNIK
PLAČILO OBISKO- VANJA SOLE								ZAPIRALO		
								MAGNETNI POMNILNI MEDIJ		
GLAVNO MESTO TUNIZIJE						PREMIK V NENAVADNI POLOŽAJ				KP VIP DC
DEKLICA IZ ČUDEŽNE DEŽELE (ORIG.)						BAVARSKA REKA, DESNI PRITOK DONAVE				
						ČLOVEK, PERSONA				
NEKD. JUG. NOGOME- TAŠ (JOŠIP)						KONICA				ZNIZANA NOTA "E"
						OBDONAV. NASELEJE V SREMU				KOTANJA Z DEŽEVNICO
										
									ŠTUDIJ	
					IGRALEC MARVIN				NAJDAJ JSA SIBIRSKA REKA	
					ČLOVEK, KI SE BRANI PRED SODIŠČEM					
					GLAVNO SVETIŠČE V MEKI					P

ŠIFRIRANJE Z JAVNIM KLJUČEM

V prejšnji številki Preseka smo spoznali nekaj preprostih tajnopisnih metod. Za večino med njimi je eden največjih problemov prenos šifrirnega ključa. Ta pomembni podatek, ki ga potrebuje prejemnik za dešifriranje sporočila, moramo pri teh metodah pogosto menjati, da bi zmedli nepoklicano osebo, ki bi prestregla sporočilo; vsakokrat je treba poskrbeti za varen prenos ključa med pošiljateljem in prejemnikom.

V poznih sedemdesetih letih pa so razvili kriptografske metode, ki ne zahtevajo nikakršnega prenosa ključa. Pravimo jim metode šifriranja z javnim ključem. Srž metode je v tem, da lahko prejemnik povsem javno objavi nekaj števil, ki predstavljajo ključ za šifriranje sporočil, ki bi mu jih kdo želel poslati. Samo on pa pozna skrivna števila, s katerimi je moč ta sporočila dešifrirati.

Med metodami šifriranja z javnim ključem je najbolj znana RSA metoda. Za uspešno (varno) delo s to metodo uporabljajo zelo velika števila, zato so tako za šifriranje kot za dešifriranje potrebni računalniki. Tudi z računalniki pa je praktično nemogoč vdor v šifrirni sistem. Edini način za zlom šifre je namreč odkritje skrivnih dešifrirnih števil, ki jih pozna le prejemnik. V principu je ta števila sicer moč dobiti iz javno objavljenih šifrirnih števil, v praksi pa bi to zahtevalo mesece dela z računalnikom.

Metoda RSA

Metoda nosi ime po začetnicah priimkov Ronalda Rivesta, Adija Shamirja in Leonarda Adlemana s Tehnološkega inštituta Massachusetts v ZDA, ki so jo razvili leta 1978. Njena varnost temelji na dejstvu, da je razmeroma lahko najti zelo velika praštevila in zelo težko razstaviti na prafaktorje števila, ki so produkti velikih praštevil (če poznamo samo produkt). V praksi uporabljajo praštevila, ki se dajo zapisati z najmanj petdeset desetiškiimi števkami, njihovi produkti torej z vsaj sto desetiškiimi števkami.

Samo težavnost faktoriziranja lahko opazimo celo že pri zelo majhnih številih. Poskusite na primer brez računalnika razstaviti na prafaktorje število 54 053. Videli boste, da je precej težje priti do rezultata $54\,053 = 191 \cdot 283$, kot pa ugotoviti, da sta 191 in 283 praštevili in ju zmnožiti.

Kot pri metodah, ki smo jih spoznali zadnjič, tudi pri metodi RSA nadomestimo besedila sporočil s števili. Vsako črko lahko npr. nadomestimo s številom, ki pomeni njeno mesto v abecedi. Pri tem priredimo črkam od A do I števila 00 do 09 namesto 0 do 9. Brez tega previdnostnega ukrepa

bi, denimo, ne vedeli, ali pomeni število 12 črko M ali par črk BC (ki bo tako predstavljen z 0102). Besedilo z n črkami tako nadomestim z zlepkom n dvomestnih števil, na katerega lahko gledamo kot na $2n$ -mestno število.

Prejemnikova skrivna števila sta dve veliki praštevili p in q ter število N , ki je tuje s produktom $(p-1)(q-1)$. Števili, ki ju prejemnik javno objavi, sta produkt pq in pozitivno število M z lastnostjo, da je ostanek deljenja števila MN s številom $(p-1)(q-1)$ enak 1, torej

$$MN \equiv 1 \pmod{(p-1)(q-1)}.$$

Javno objavi tudi postopek šifriranja. Vsak, ki mu želi poslati tajno sporočilo, katerega predstavlja število x , naj mu posreduje število y , ki je ostanek deljenja števila x^M s produktom pq . Šifra y je torej najmanjše nenegativno število, ki ustreza kongruenci

$$y \equiv x^M \pmod{pq}.$$

Pri tem mora število x izpolnjevati pogoj $0 \leq x < pq$. (Ta pogoj izpolnjuje tudi y .) Če je sporočilo predolgo, ga je potrebno razbiti na kose, ki predstavljajo števila, manjša od pq , in izvesti navedeni račun za vsak kos posebej.

Prejemnik dešifrira sporočilo tako, da izračuna ostanek deljenja števila y^N s produktom pq , kjer je N njegovo skrivno število. Originalno število x (sporočilo) je torej najmanjše nenegativno število, za katerega velja

$$x \equiv y^N \pmod{pq}.$$

Primer. Za ilustracijo metode ne bomo uporabili velikih števil, ki so v navadi v praksi; potek bomo lahko pregledneje predstavili z majhnimi števili. Zaradi preglednosti se bomo tudi izognili podrobnemu računanju, ki ga lahko opravite sami.

Naj si je prejemnik za skrivna števila izbral $p = 11$, $q = 13$ in $N = 7$. Ne spreglejmo, da je število N tuje s številom $(p-1)(q-1) = 120$. Iz teh števil izračuna (z uporabo Evklidovega algoritma ali kako drugače), da je 103 najmanjše pozitivno število M , ki izpolnjuje pogoj $7M \equiv 1 \pmod{120}$.

Nato prejemnik objavi naslednje sporočilo: "Kdor mi želi poslati tajno sporočilo, ki ga na običajni način (zamenjava črk z dvomestnimi števili) predstavlja število x , naj mi posreduje ostanek deljenja števila x^{103} s številom 143."

Sedaj je na vrsti pošiljatelj. Recimo, da želi poslati prejemniku sporočilo SOS, ki ga predstavlja število 181518 ($S=18$, $O=15$). Ker je število preveliko, ga mora razbiti na tri kose, manjše od 143, to je na števila 18, 15, 18. Nato izračuna, da je $18^{103} \equiv 112 \pmod{143}$ in $15^{103} \equiv 141 \pmod{143}$. (S tem je kar nekaj dela, če boste računali peš, z računalnikom pa boste hitro gotovi.) Odposlati mora torej števila 112, 141, 112.

Ko pride to sporočilo v roke prejemniku, ta izračuna $112^7 \equiv 18 \pmod{143}$ in $141^7 \equiv 15 \pmod{143}$ in v nizu 18, 15, 18 prepozna klic na pomoč.

Gotovo ste se ob tem vprašali, zakaj metoda deluje. Kako to, da opisano zaporedje šifrnega in dešifrnega postopka vrne na koncu originalno sporočilo? Podrobnejša razlaga razlogov bi bila za večino Presekovih bralcev pretežka. Za tiste radovednejše pa le povejmo, da je skrita v naslednjem izreku.

Izrek. Če sta p in q različni praštevili in je

$$MN \equiv 1 \pmod{(p-1)(q-1)},$$

potem velja

$$(x^M)^N \equiv x \pmod{pq}.$$

Podpisovanje

Pomemben del tajnega sporočila pa tudi vsakega drugega dokumenta je podpis, ki potrjuje njegovo verodostojnost. Ker pri pošiljanju sporočil po elektronski pošti ne moremo prenašati fizičnega podpisa, je potrebno poskrbeti za drugačno potrjevanje pristnosti.

Ena dodatnih lastnosti metode RSA je prav varno prenašanje podpisa pošiljatelja. Glede na to, da so javna šifrirna števila prejemnika splošno znana, bi npr. lahko kdo prejemniku poslal lažno šifrirano sporočilo, podpisal pa verodostojno drugo osebo in s tem prejemnika zavedel.

Spet si kar na primeru oglejmo, kako lahko z metodo RSA kaj takega preprečimo.

Denimo, da si Urša in Vinko izmenjujeta tajna sporočila. Označimo z M_U in $a_U = (pq)_U$ ter M_V in $a_V = (pq)_V$ Uršini oziroma Vinkovi javni šifrirni števili. Nadalje naj bosta N_U in N_V njuni skrivni dešifrirni števili. Pa naj želi Vinko poslati Urši svoj podpis, ki ga predstavlja število v . V ta namen šifrira podpis s svojim skrivnim številom N_V in svojim javnim številom a_V , to je, izračuna najmanjše nenegativno število z , ki izpolnjuje pogoj $z \equiv v^{N_V} \pmod{a_V}$. Urša dobljeno sporočilo dešifrira s ključem, ki ga predstavljata Vinkovi javni šifrirni števili M_V in a_V , to je, poišče najmanjše

nenegativno število w , ki izpolnjuje pogoj $w \equiv z^{M_V} \pmod{a_V}$. Ker je $(v^{N_V})^{M_V} = (v^{M_V})^{N_V}$ in zaradi izreka na koncu prejšnjega razdelka, je $w = v$. Urša torej ve, da je sporočilo poslal Vinko, saj bi uporaba vsakega drugega ključa kot N_V , ki ga pozna le Vinko, dala rezultat, različen od v .

Vendar tako šifriran podpis lahko prebere še kdo drug razen Urše. Da bi se temu izognil, lahko šifrira Vinko svoj podpis dvakrat: najprej s ključem (N_V, a_V) in nato še z Uršinim javnim ključem (M_U, a_U) . Le Urša lahko prebere podpis z zaporedno uporabo ključev (N_U, a_U) in (M_V, a_V) .

Varnost metode RSA

Iz vsega, kar smo izvedeli o metodi RSA, sledi, da je zlom šifre mogoč, če vsiljivcu uspe faktorizirati javno objavljeno število pq . Potem lahko najde $(p-1)(q-1)$ in, z uporabo Evklidovega algoritma za par števil $(p-1)(q-1)$ ter javni eksponent M , izračuna skrivno dešifrirno število N . Z njim pa lahko na enak način kot prejemnik dešifrira tajnopis. Torej je pomembno, da sta uporabljeni praštevili p in q dovolj veliki, da je faktorizacija produkta pq praktično nemogoča.

Zaenkrat v praksi velja, da morata imeti uporabljeni praštevili vsaj petdeset desetiških mest, hitri razvoj računalniških metod za razstavljanje pa sicer trenutno zagotavlja resnično varnost, če imata števili p in q vsaj po petinosemdeset mest. Vendar predstavlja že samo šifriranje in dešifriranje s tako velikimi števili izredno zamudno delo, celo za najhitrejša računalnike.

Razvitje RSA metode je povzročilo mrzlično iskanje hitrih algoritmov za razcep števil na prafaktorje.

Kakršnekoli napovedi za bodoče so seveda nevhvaležne. Vsekakor se obe strani, iskalci metod za generiranje velikih praštevil in iskalci metod za hitro razstavljanje velikih števil, trudita premagati druga drugo. Svoje pa prispevajo tudi čedalje hitrejši računalniki.

Marija Vencelj

SPET ENA LOGIČNA - Rešitev s str. 307

Novakova, ki ima pisarno čisto na vrhu, mora biti zdravnica. Tajnica Kraljeve mora biti Valerija, pisarna Kraljeve pa mora biti v sredini, torej je Kraljeva arhitektka. Sanja je torej tajnica Polakove, ki je pravica, Roza pa je tajnica zdravnice Novakove.

Neža Mramor - Kosta

CHRISTIAN HUYGENS

Ob tristoletnici smrti

Christian Huygens (slika 1) je bil rojen leta 1629 v Haagu. Na začetku ga je poučeval oče, ki je bil visok vladni uradnik in si je pridobil obsežno znanje jezikoslovja, glasbe in matematike. Christian je na univerzi v Leidenu končal študij prava. Že v mladosti ga je pritegnila tudi matematika in prve uspehe je dosegel pri sedemnajstih letih. Pri dvaindvajsetih je objavil dognanja o ploščini stožnic, pri petindvajsetih tedaj najnatančnejši podatek za π , pozneje se je ukvarjal tudi z verjetnostjo.

V naravoslovje je Huygensa pripeljalo zanimanje za astronomijo. Z bratom je izdelal daljnogled po lastni zamisli. Tudi nekateri današnji daljnogledi imajo *Huygensov okular*. Z nekaj manj kot osem metrov dolgim daljnogledom je odkril Saturnov obroč in Saturnovo luno Titan¹,

Orionovo meglico in opazoval Marsovo površje. S privzetkom, da seva Sirij kot Sonce, je ocenil njegovo razdaljo na 0,42 svetlobnega leta. Sirij seva izdatneje kot Sonce, zato je razdaljo dvajsetkrat podcenil. Izdelal je mikrometer za merjenje kotov med zvezdami na nekaj kotnih sekund natančno.

Pri astronomskih opazovanjih se je Huygens zavedal, kako pomembno je natančno meriti čas. Njegovo prizadevanje, da bi izdelal natančno uro, je pripeljalo do patenta leta 1656. Odkritje je objavil šele leta 1673 v knjigi z

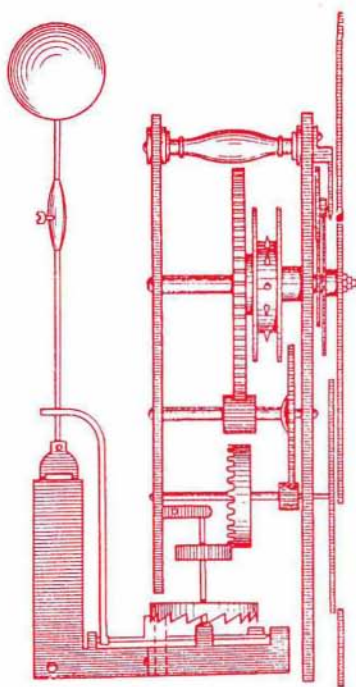


Slika 1. Christian Huygens (14. aprila 1629 do 8. junija 1695)

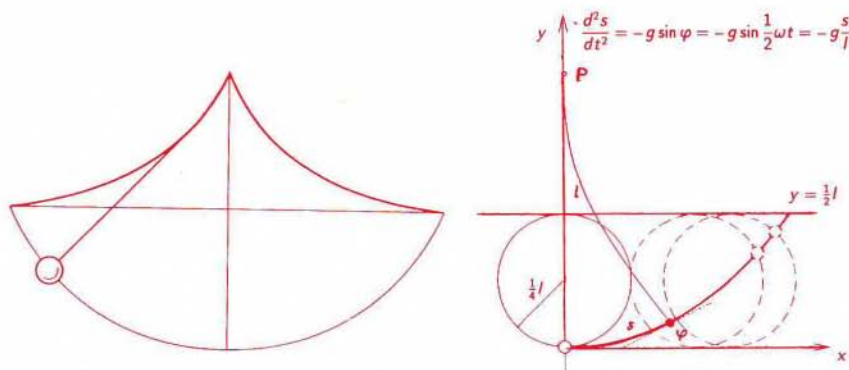
¹ Galileo Galilei s slabšim daljnogledom obroča še ni mogel videti, pozoren pa je postal na "trojno" sliko Saturna. Huygens je mislil, da v Osončju poleg šestih planetov Merkurja, Venere, Zemlje, Marsa, Jupitra in Saturna obstaja samo šest lun: Luna, štiri Jupitrove lune, ki jih je odkril Galilei, in Titan.

naslovom *O uri na nihalo* (slika 2). Ob tem je ugotovil, da je sicer nihajni čas nitnega nihala z dolžino l zares sorazmeren s $\sqrt{l}$, kakor je mislil Galilei, a je pri večjih amplitudah odvisen od amplitude, kar je Galilei spregledal. Ob iskanju nihala, ki nima te pomanjkljivosti, je odkril *cikloidno nihalo* (slika 3). Njegov nihajni čas ni odvisen od amplitude. Obravnaval je nihanje *fizičnega nihala*, togega telesa, vrtljivega okoli vodoravne osi, ki ne gre skozi težišče. Leta 1669 je Huygens predložil razpravo o trkih, v kateri je prvi v celoti pojasnil prožne in popolnoma neprožne trke. Razprava je izšla veliko pozneje (1703). Raziskal je enakomerno kroženje in določil pospešek. Ugotovil je tudi, da je Zemlja sploščena na polih.

Slika 2. Načrt za uro na nihalo. Tedaj so začeli vodne ure nadomeščati z mehaničnimi urami, v katerih se je počasi spuščala utež. Te ure so bile sicer manj natančne kot vodne, a so zahtevale manj skrbi in so imele dobro viden kazalec. Z nihalom je Huygens dal uri notranjo enoto, zaradi katere je ura tekla veliko bolj enakomerno. Preko zobatega kolesa in zasunka je nihalo krmililo utež, da se je pravi čas znižala in z delom krila izgube zaradi trenja in upora.



Leta 1678 je Huygens obdelal teorijo svetlobe, ki jo je objavil v *Razpravi o svetlobi* leta 1690. Knjigo je nameraval prevesti v latinščino, a tega zaradi pomanjkanja časa ni storil. Tako je vsaj utemeljil njen pozni izid. Huygens ni obravnaval sinusnega valovanja v današnjem smislu, ampak motnjo, ki potuje po snovi, sestavljeni, na primer, iz samih dotikajočih se kroglic. Motnja se



Slika 3. Cikloidno nihalo (levo) in cikloida (desno). Cikloida $y = \frac{1}{4}l(1 - \cos \omega t)$, $x = \frac{1}{4}l(\omega t + \sin \omega t)$ nastane, ko se krog z radijem $\frac{1}{4}l$ kotali po spodnji strani premice $y = \frac{1}{2}l$. Ločno dolžino cikloide od najnižje točke zaznamujemo z s . Nitno nihalo z dolžino l , ki je obešeno v točki P, niha z nihajnim časom $2\pi\sqrt{l/g}$ ne glede na amplitudo, če se utež giblje po tej cikloidi.

s trki prenaša od kroglice do kroglice. Tako je postavil *Huygensovo načelo*: Vsaka točka valovnega čela je izvir elementarnih valov. Ovojnica elementarnih valov da novo valovno čelo. Raziskal je dvojni lom in je pri tem moral vpeljati dve različni hitrosti svetlobe, saj je motnjo razumel kot longitudinalno. Določil je optične lastnosti islandskega dvolomca, to je ene izmed kristalnih oblik apnenca, in odkril polarizacijo svetlobe.

Huygens si je s svojim delom v fiziki pridobil velik ugled. Leta 1660 je obiskal Anglijo. Tri leta pozneje so ga sprejeli med ustanovne člane Kraljeve družbe, angleške akademije znanosti. Na Colbertov predlog ga je Ludvik XIV leta 1666 postavil za predsednika francoske akademije znanosti. V Parizu je ostal do leta 1681, ko so ukinili zakon, ki je protestantom dovoljeval bivanje v Franciji. Umrli je leta 1695 v Haagu.

Huygens je ves svoj čas posvetil raziskovanju. Nanj sta vplivala Galilei in predvsem René Descartes. Pozneje je Descartesa kritiziral: "Gospod Descartes je znal doseči, da so njegova uganjanja in predstave veljale za resnične. Bralcem njegovih Principov [*Principia philosophiae* 1644] se je godilo kot bralcem romana, ki jim knjiga ugaja in imajo vtis, da gre za resnično

zgodbo. Oblike majhnih delcev in lastnosti vrtincev sprejmejo v splošnem za pravilne. Tudi meni se je zdelo, da je vse v najlepšem redu, ko sem knjigo prvič bral. Tedaj sem bil star 14 ali 15 let. Ko sem naletel na težave, sem mislil, da sem bil kriv sam, ker sem napačno razumel njegove zamisli."

Descartes je izhajal iz treh splošnih trditev, ob katerih pomislimo na današnje ohranitvene zakone:

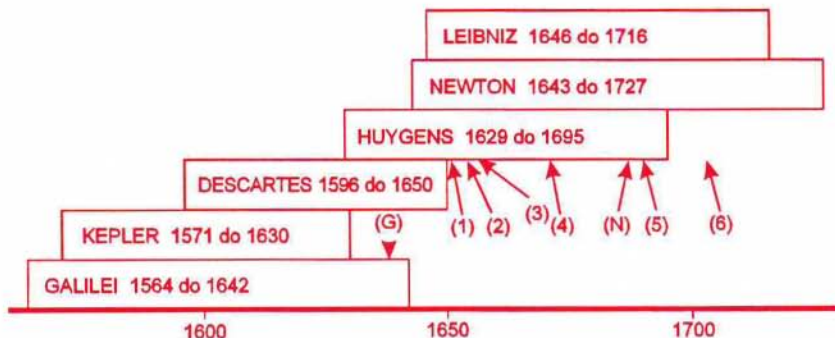
1. Vsaka stvar (gibanje, oblika ...) ostane nespremenjena, dokler je ne spremeni zunanji vzrok.
2. Gibanje se nadaljuje v ravni črti.
3. Pri trku se gibanje ohrani.

Z njimi naj bi pojasnili vse pojave in dosegli enotnost fizike. Ves prostor naj bi izpolnjevala telesa iz etra, ki naj bi v obliki vrtincev poganjala planete okoli Sonca. Drugo na drugo naj bi namreč delovala le telesa, ki se dotikajo. Huygens ni postavljaj meglenih splošnih trditev, ampak je svoje izreke izvajal iz opazovanj in merjenj za določen primer.

Huygens ni sprejel Newtonove zamisli o splošni gravitaciji, čeprav se je leta 1689 srečal z njim v Londonu. Še naslednje leto je trdil, da izvira teža iz razlike med centrifugalno silo teles na Zemlji, ki naredijo na njenem površju en obhod v 24 urah, in delci etra v Vesolju ob Zemlji, katerih obhodni čas je krajši. Po njegovem mnenju bi bili cetrifugalna sila in teža v ravnovesju, če bi delci etra obkrožili Zemljo v poldrugi uri (kot današnji umetni sateliti). Pri tem se je skliceval na opazovanje vrteče se posode z vodo, v kateri silijo majhna telesa iz lesa proti osi. Po Huygensovem mnenju v praznem prostoru, kakršnega je imel v mislih Newton, ne bi bilo mogoče pojasniti ne teže ne svetlobe. To je bil davek Descartesovemu prepričanju, da telo lahko deluje le na telo, ki se ga dotika.

Za razliko od številnih sodobnikov je Huygens priznaval tuje uspehe. Čeprav je posvetil vse življenje znanosti, se je zanimal še za kaj drugega. Spesnil je nekaj pesmi, ki jih je posvetil nekaterim lepoticam tistega časa. V zapuščini so našli znanstveno-fantastični roman o prebivalcih na Luni in risbo stroja z notranjim zgorevanjem.

Christian Huygens je bil eden izmed največjih umov sedemnajstega stoletja. Njegova odkritja so segala na vsa področja tedanje fizike in astronomije. Po uspešnosti ga je presegel najbrž samo Isaac Newton, ki mu je Huygens s svojim delom pomagal pripraviti pot (slika 4).



Slika 4. Življenjski čas nekaterih znamenitih mož sedemnajstega stoletja in časi izidov Huygensovih knjig: 1 *Ciklometriæ* 1651, 2 *De circuli magnitudine inventa* 1654, 3 *Systema Saturnium* 1656, 4 *Horologium oscillatorium* 1673, 5 *Traité de la lumière* 1690, 6 *De motu corporum ex percussione* 1703. Galilejevi *Discorsi* (G) so izšli 1638 in Newtonovi *Principi* (N) 1687.

Obdelajmo nekaj Huygensovih dognanj nekoliko podrobneje z današnjega gledišča. Zanimivo je, da nekatera presegajo današnjo srednješolsko fiziko, medtem ko dognanja njegovih predhodnikov večinoma sodijo vanjo.

Galilei je ugotovil, da je hitrost kotaleče se kroglice na klancu sorazmerna s časom, pot pa s kvadratom časa, če kroglica spočetka miruje. Pot je potemtakem sorazmerna s kvadratom hitrosti. Domneval je, da hitrost kroglice na dnu klanca ni odvisna od nagiba, ampak je sorazmerna z višino v začetni legi. Te ugotovitve je Huygens razvil dalje.

Utež na niti nitnega nihala se začne gibati v višini $y = h$ in doseže največjo hitrost v ravnovesni legi pri $y = 0$. Hitrost v vmesni legi je odvisna od višine $h - y$, za katero se utež spusti: $v^2 = 2g(h - y)$. To Huygensovo enačbo dandanes hitro dobimo iz izreka o kinetični in potencialni energiji. Postavimo $v = ds/dt$. Kratek odsek poti ds in majhna sprememba višine dy sta v zvezi $ds = dy/\sin \varphi$, če je φ kot med delom poti in vodoravno osjo x . Velja:

$$dt = \frac{dy}{\sin \varphi \sqrt{2g(h - y)}}. \quad (1)$$

Krog z radijem l , po katerem se giblje utež, v bližini ravnovesne lege približno opišemo s parabolo $y = x^2/2l$. V približku, v katerem $\sin \varphi$ izenačimo s $\tan \varphi = dy/dx = x/l = \sqrt{2y/l}$, preide enačba (1) v $dt = \frac{1}{2} \sqrt{l/g} dy/\sqrt{y(h - y)}$. Integrirajmo enačbo od višine 0 do h , čemur ustreza po času integral od 0 do $\frac{1}{4}t_0$, pa dobimo nihajni čas $t_0 = 2\pi \sqrt{l/g}$. Huygens je moral vse enačbe izpeljati geometrijsko, saj tedaj infinitezimalni račun še ni bil razširjen.

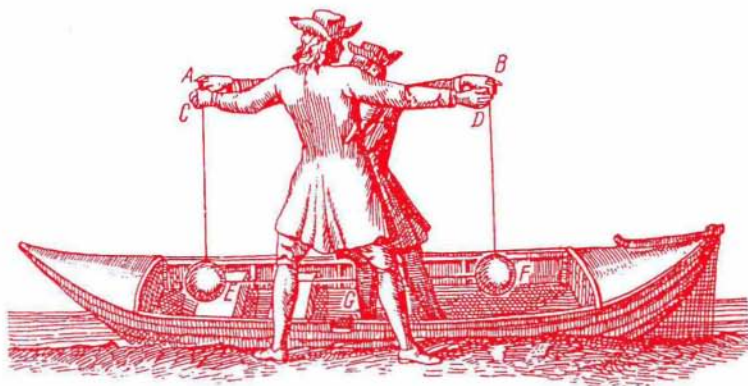
Po kakšni krivulji se mora gibati utež, da enačba za nihajni čas velja natančno za znatne amplitude in je torej nihajni čas neodvisen od amplitude? Iz enačbe (1) razberemo, da mora biti tedaj $\sin \varphi$ sorazmeren s $\sqrt{y}$. Takšno lastnost ima *cikloida*, krivulja, ki so ji v Huygensovem času posvečali precej pozornosti. Bralci jo poznajo kot brahistokrono

(*Smučanje pri veleslalomu*, Presek 20 (1993) 232-236). Huygens je pribil: "Če se giblje telo po navzgor odprti cikloidi, potrebuje do najnižje točke vselej enak čas, ne glede na to, v kateri točki se je začelo gibati." Utež nitnega nihala se giblje po cikloidi, če jo vodita vodili v obliki obrnjene cikloide (slika 3). Huygens je ugotovil, da je *evolventa* cikloide tudi cikloida. Evolventa je krivulja, ki jo opiše krajišče vrvice, ko napeto vrvico odvijamo z druge krivulje – *evolute*.

Togo telo pri fizičnem nihalu je v mislih razdelil na drobna telesa in po tej poti izračunal *reducirano dolžino* fizičnega nihala, to je dolžino nitnega nihala, ki niha z enakim nihajnim časom kot dano fizično nihalo.

Preme prožne trke je obravnaval na osnovi treh izrekov:

1. Vsako gibajoče se telo teži k temu, da nadaljuje gibanje s konstantno hitrostjo, dokler ne zadene kakšne ovire.
2. Če trčita enaki krogli z nasprotno enakima hitrostma, se obrneta po trku smeri njunih hitrosti, ne da bi se spremenila velikost hitrosti.
3. Izreka veljata tudi za opazovalca na ladji, ki se glede na obalo giblje s poljubno konstantno hitrostjo, kot za opazovalca na obali.



Slika 5. Opazovalec na obali in opazovalec na enakomerno se gibajoči ladji, s katerima si je Huygens pomagal, ko je pojasnil trke (iz Huygensove knjige o trkih).

Tretji izrek vsebuje zakon relativnosti (slika 5). Izreki pripeljejo do ohranitve gibalne količine $m_1 v_1 + m_2 v_{1I} = m_1 v_1 + m_2 v_2$. Z zamislijo, da ustreza določeni hitrosti določena višina, do katere se lahko telo s to hitrostjo dvigne, je vključil Huygens v razpravo izrek o ohranitvi kinetične energije $m_1 v_1^2 + m_2 v_{1I}^2 = m_1 v_1^2 + m_2 v_2^2$. Pri tem ni uporabljal kinetične energije mv^2 , ampak po tedanji navadi *živo silo* mv^2 . Zgodbe o londonski nagradni nalogi (*Neprožni trki*, Presek 19 (1991) 72-78) ne kaže ponavljati. Omenimo samo, da je Descartes za gibalno količino napačno postavil velikost $m|v|$, Huygens pa je upošteval znak hitrosti in tako predvidel vektorsko naravo gibalne količine.

Janez Strnad

TEČAJI IZ VAKUUMSKE TEHNIKE ZA PROFESORJE SREDNJIH ŠOL

1. O vakuumu

Uporaba vakuumu in vakuumskih tehnologij je postala nepogrešljiva sestavina naše civilizacije in kulture.

Besedo vakuum srečujemo vsakodnevno v različnih pomenih, vendar je fizikalna definicija jasna razmeroma ozkemu krogu ljudi. V najširšem fizikalnem smislu je vakuum razredčena atmosfera. Stopnjo razredčenja, ki bistveno vpliva na fizikalne lastnosti plina, izražamo v logaritemski škali, ki se za uporabnike razteza od 1000 mbar do 10^{-8} mbar in za posebne primere še nižje. Poimenovanje takšnega razpona tlakov z besedo vakuum je sicer sprejemljivo, a premalo za uporabnika, zato vakuum natančno delimo še na grobi, srednji, visoki in ultravisoki vakuum.

Tlak in sestava plina v nekem prostoru določata ionsko, elektronsko, termično in zvočno prevodnost, površinsko stanje trdnih snovi in kapljevin, hitrost kemijskih in fizikalnih procesov ipd. Posameznim področjem vakuumu pripadajo povsem določene lastnosti, ki omogočajo opazovanje mnogih fizikalnih pojavov, delovanje naprav, izvedbo procesov in tehnologij.

Navedimo nekaj primerov, kjer imamo opraviti z določeno lastnostjo vakuumu:

- mehanična sila oz. tlak atmosfere na stene evakuiranih prostorov: za prijemanje in prenašanje predmetov, za oblikovanje termo plastičnih plošč, folij in stekla; hermetično zapiranje in pakiranje, filtriranje, impregnacija;
- termodinamične lastnosti: za sušenje, destilacijo, liofilizacijo (hrana, zdravila), izplinjevanje, vlivanje in prašnato metalurgijo (sintranje) kovin;
- vakuum kot izredno čisti medij oz. kot čisto okolje: za tehnologije nanosa tankih vakuumskih plasti (polprevodniške tehnologije za izdelavo integriranih vezij, optična industrija, zrcala, antirefleksni nanosi ...);
- vakuum kot zaščitna atmosfera: za predhodno evakuiranje pri postopkih, ki potekajo v čistih inertnih plinih (žarnice, hladilniki ...);
- ionska prevodnost: za neonska in fluorescentna svetila ter obločnice; pri stabilizatorjih napetosti, jedrski fuziji;
- toplotna izolacija: pri tehniki nizkih temperatur, termos steklenice, doseganje in opazovanje superprevodnosti;
- vakuum kot medij brez viskoznosti oz. upora: za gibanje svetlobe, elektronov, molekul – za elektronke vseh vrst – rentgenske, slikovne; elektronski mikroskopi, sonde, spektrometri, elektronski varilniki.

2. Zakaj tečaj?

Znanje o vakuumski tehniki si je mogoče pri nas pridobiti z lastnim študijem, z občasnimi tečaji, ki jih prireja Društvo za vakuumsko tehniko Slovenije (DVTS), ter s podiplomskim (magistrskim) študijem na Univerzi v Mariboru. Dijaki srednjih šol spoznajo to tehnično in znanstveno panogo le deloma, in še to posredno pri pouku fizike, kemije itd.

Želimo, da bi mlade generacije dobile nekaj sistematično urejenega znanja s področja vakuumu, najprej od svojih profesorjev (pri pouku v razredu) in nato pri eksperimentalnem delu v šolskih laboratorijih.

Zato smo v našem društvu posebej pripravili tozadevni tečaj za profesorje s kompletom "šolskih" eksperimentov. Pri tem smo imeli polno podporo Zavoda za šolstvo in Ministrstva za šolstvo in šport. Sami smo za ta namen izdali tudi knjižico z naslovom "Osnove vakuumске tehnike za srednješolske predavatelje" in zvezek z izborom najzanimivejših vaj.

3. Vsebina in izvedba tečaja

Tečaj je trodnevni (četrtek, petek, sobota); doslej je bil izveden že dvakrat (9.-11.sept.93 in 15.-17.sept.94), in sicer na Inštitutu za elektroniko in vakuumsko tehniko (IEVT, Teslova 30, Ljubljana). Tečaj je imel naslednjo vsebino:

<i>A. Predavanja</i>	trajanje
1. Zgodovinski oris razvoja vakuumске tehnike in razdelitev vakuumu in področja uporabe	1 ura
2. Fizikalne osnove	1 ura
3. Osnove delovanja črpalk (rotacijske, difuzijske, turbomolekularne, sorpcijske)	2 uri
4. Delovanje merilnikov in masnega spektrometra	3 ure
5. Vakuumски elementi, sistemi in naprave	1 ura
6. Vakuumски spoji in tesnilke	1 ura
7. Hermetičnost in detekcija netesnosti	1 ura
8. Materiali v vakuumски tehniki	1 ura
<i>B. Eksperimentalni del</i>	
1. Izvajanje poskusov iz programa Osnov vakuumске tehnike in tistih poskusov, ki naj bi jih v šolskih laboratorijih izvajali dijaki	7 ur
2. Ogled nekaterih laboratorijev na IEVT in IJS	3 ure
3. Diskusija in priprava poročila	3 ure

Udeleženci so bili vsakič zelo zadovoljni; presenečeno so se spraševali, kako da tako zanimivemu področju v šolskem programu ni moč posvetiti več časa. Mnogi profesorji so izrazili željo, da bi jim prišli vaje demonstrirati na šolo in so se tudi zanimali za potrebno opremo, s katero bi sami lahko izvajali osnovne poskuse. Ena od udeleženk je kasneje celo pripeljala skupino dijakov na prikaz zanimivejših eksperimentov. Mlade sta obisk na Inštitutu in predstava vakuumistike z dobrim komentarjem zelo pritegnila.

Opisana "vakuumaska delavnica" je sedaj že uvrščena v Katalog nenehnega strokovnega spopolnjevanja Ministrstva za šolstvo in šport. Objavljena je v Šolskih razgledih, ocenjena z eno točko in pripisana je pripomba MŠŠ, ki ta program zelo priporoča. Predavatelji so dolgoletni strokovnjaki s tozadavnega področja, nekateri tudi univerzitetni učitelji. Letošnji termini so: 12.-14. maj, 11.-13. junij, 21.-23. sept. in 9.-11. november. Koordinator programa je Bojan Jenko z Ministrstva za znanost in tehnologijo, **kontaktna oseba za prijave in informacije pa je Lidija Irmančnik-Belič (IEVT, tel.: 061-263-461).**

Število udeležencev je omejeno na 15. Če je prijav več, delavnico ponovimo v najkrajšem možnem času. Udeleženci, ki opravijo zahtevane naloge, prejmejo potrdilo o opravljenem izobraževanju iz vakuumske tehnike. Vabljeni!

Za DVTS Andrej Pregelj

STIČNA ŠTEVILA - Rešitev s str. 343

Naj bo n naravno število, ki ima v desetiškem zapisu številke $c_k, \dots, c_0$, pri čemer številka c_0 označuje enice, vodilna številka c_k pa ni enaka 0. Če je število n enako produktu svojih števk, potem velja

$$c_k \cdot \dots \cdot c_0 = c_k 10^k + \dots + c_0.$$

Ker številke niso večje od 9, njihov produkt ni večji od $9^k c_k$. Ker pa so tudi nenegativne, imamo

$$10^k c_k \leq 10^k c_k + \dots + c_0 = c_k \cdot \dots \cdot c_0 \leq 9^k c_k.$$

Ker je $c_k > 0$, je ta neenakost izpolnjena le pri $k = 0$. Iskana števila so torej natanko vsa enomestna števila. Enak dokaz pokaže, da taka trditev velja tudi za zapise v drugih osnovah.

Martin Juvan

**PRVA
SLOVENSKA
ASTRONOMSKA
REVIJA**

Spika



**VSAK MESEC NOVA, BARVNA ŠTEVILKA REVIJE ZA LJUBITELJE ASTRONOMIJE,
KI PRINAŠA NOVICE, VSE O SONCU, PLANETIH, ZEMLJI, ZVEZDAH,
GALAKSIJAH, ASTROFIZIKI, KOZMOLOGIJI, ASTRONAVTIKI,
ASTROFOTOGRAFIJI, ARHEOASTRONOMIJI...
ZA AMATERJE MESEČNO SVEŽE EFEMERIDE IN ZVEZDNA KARTA,
O TELESKOPIH, UPORABNIH PROGRAMIH...
IN ŠE OSNOVE ZA ZAČETNIKE, RAZISKOVALNI KOTIČEK, TESTI,
ZNANSTVENA FANTASTIKA, MALI OGLASI TER NAGRADNA IGRA!**

Revijo naročajte na naslov: Spika, Poštni predal 9, 61109 Ljubljana. Četrtna naročnina (15% popusta) je 1070,00 SIT, polletna naročnina (20% popusta) je 2015,00 SIT, celoletna naročnina (25% popusta) je 3780,00 SIT.

REŠITVE NALOG

SKLADNOST – Rešitev s str. 339

1. rešitev:

Denimo, da merita stranici prvega pravokotnika a in b , stranici drugega pa x in y . Naloga pravi:

$$ab = xy \quad \text{in} \quad a + b = x + y.$$

Izrazimo iz obeh enačb dolžino y in izenačimo:

$$\frac{ab}{x} = a + b - x.$$

Po preurejanju enačbe dobimo

$$x^2 - (a + b)x + ab = 0,$$

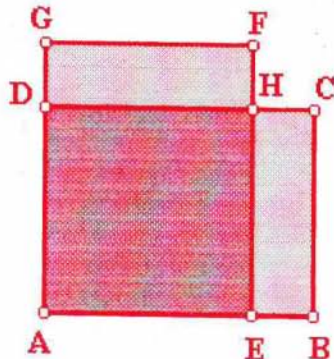
kar razcepimo v

$$(x - a)(x - b) = 0.$$

Od tod sledi: $x = a$ in $y = b$ ali $x = b$ in $y = a$.

2. rešitev:

Tudi tokrat naj bosta $a = \overline{AB}$ in $b = \overline{AD}$ stranici prvega pravokotnika $ABCD$, $x = \overline{AE}$ in $y = \overline{AG}$ pa stranici drugega $AEFG$. Postavimo pravokotnika tako, kakor kaže risba na desni. Iz enakosti obsegov $2 \cdot (\overline{AD} + \overline{DC}) = 2 \cdot (\overline{AE} + \overline{EF})$ sledi $\overline{HC} = \overline{HF}$. Očitno sta enaki tudi ploščini kvadratov $EBCH$ in $DHFG$, zato je $\overline{BC} = \overline{GF}$ oziroma $b = x$. Potem mora biti tudi $a = y$.



Vilko Domajnko

TRI ZA BISTRE GLAVE – Rešitev s str. 327

1. Rjave.
2. Najstarejši je Martin, srednji je Primož, najmlajši pa je Jurij.
3. Največ je ujel Anže, potem pa za njim po vrsti: Miha, Jaka in Urh.

Neža Mramor – Kosta

BUTALSKA – Rešitev s str. 327

Vsi štirje pravokotniki (vrtovi) imajo enako ploščino in enak obseg. Ni se težko prepričati, da so med seboj skladni.

Preglejmo nadalje vse možne pravokotnike s ploščino 100 m^2 , ki se dajo razrezati na štiri manjše skladne pravokotnike. Če skladnih razrezov med seboj ne ločimo, dobimo naslednjih šest možnosti:



I



II



III



IV



Va



Vb

Primeri I, II in III so izvedljivi za poljuben pravokotnik velikosti 100 m^2 , vendar ne pridejo v poštev, saj samo primeri IV, Va in Vb prikazujejo razreze, v katerem kak izmed manjših pravokotnikov meji na preostale pravokotnike.

Denimo, da imajo mali pravokotniki stranice z dolžinama a in b , kjer je $a \leq b$.

Pri razrezu IV je $b = 3a$. Iz pogoja za ploščino $ab = 25$ dobimo $a = \frac{5}{\sqrt{3}}$ m in $b = 5\sqrt{3}$ m. Iz risbe razberemo, da meri veliko pravokotno zemljišče v tem primeru $a + b$ v dolžino in b v širino.

Pri obeh razrezih V je $b = 2a$. Po podobni poti kakor prej dobimo, da meri zemljišče, ki ga je delil župan, v tem primeru $2a + b = 10\sqrt{2}$ m v dolžino in $b = 5\sqrt{2}$ m v širino.

Lahko, da je bralec mnenja, da so tudi pri razrezu III vsi pravokotniki med seboj sosedni. Če se domenimo, da sosedstva dveh pravokotnikov "v eni sami točki" ne upoštevamo kot pravo sosedstvo, tega primera seveda ne obravnavamo, v nasprotnem pa njegovo obravnavo prepuščamo bralcu.

Poskusite rešiti podobno nalogo tudi za primer, ko je treba pravokotno zemljišče razdeliti na kakšno večje število pravokotnikov.

Vilko Domajnko

KOLIKO ŠESTKOTNIKOV — Rešitev s str. 299

Nalogo bomo rešili na tri načine in vsakokrat prišli do enakega rezultata. Za računanje bomo potrebovali enakosti $\sum_{i=1}^n i = \frac{n(n+1)}{2}$ in $\sum_{i=1}^n i^2 = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}$, ki ju lahko dokažemo z indukcijo.

1. način:

Po vrsticah je v n -šestkotniku zapored $n, n+1, \dots, n+n-1, \dots, n+1, n$ 1-šestkotnikov, torej vseh $2n-1 + \sum_{i=0}^{n-2} 2(n+i) = 3n^2 - 3n + 1$.

Podobno ugotovimo, da je vseh 2-šestkotnikov $3n^2 - 9n + 7$, vseh m -šestkotnikov je $3n^2 - (6m-3)n + 3m^2 - 3m + 1$.

Vseh šestkotnikov v n -šestkotniku je torej:

$$\begin{aligned} \sum_{m=1}^n (3n^2 - (6m-3)n + 3m^2 - 3m + 1) &= \\ &= 3n^3 - 3n^2(n+1) + 3n^2 + \frac{n(n+1)(2n+1)}{2} - \frac{3n(n+1)}{2} + n = n^3. \end{aligned}$$

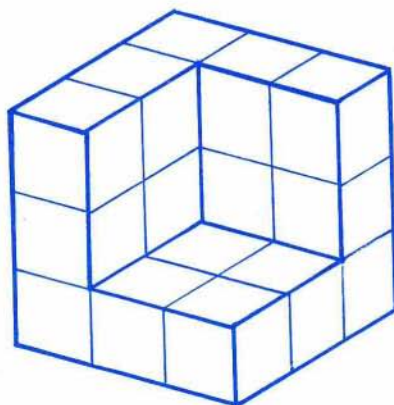
2. način:

V n -šestkotniku je 1 n -šestkotnik, $(n-1)$ -šestkotnikov je 1 + 6, $(n-2)$ -šestkotnikov je 1 + 6 + 12, itd., v n -šestkotniku je 1-šestkotnikov 1 + 6 + 12 + $\dots$ + $6(n-1)$. Od tod sledi skupno število

$$\begin{aligned} \sum_{k=0}^{n-1} (1 + \sum_{i=1}^k 6i) &= \sum_{k=1}^n (1 + \sum_{i=1}^{k-1} 6i) = n + \sum_{k=1}^n \sum_{i=1}^{k-1} 6i = \\ &= n + \sum_{k=1}^n 3(k-1)k = n + \frac{n(n+1)(2n+1)}{2} - \frac{3n(n+1)}{2} = n^3. \end{aligned}$$

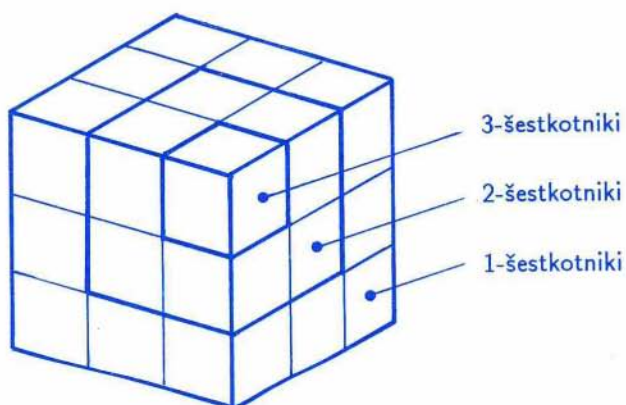
3. način:

Če pogledamo kocko v smeri telesne diagonale, vidimo 1-šestkotnik, n -šestkotnik pa dobimo s pravokotno projekcijo kocke, sestavljene iz $n \times n \times n$ manjših kock, na ravnino, ki je pravokotna na telesno diagonalo. Število 1-šestkotnikov je tedaj enako številu manjših kock v telesu (ki je za $n=3$ ilustrirano na sliki 1), torej $n^3 - (n-1)^3 = 3n^3 - 3n + 1$.



Slika 1.

Z nekaj premisleka lahko ugotovimo, da je v n -šestkotniku toliko 2-šestkotnikov, kot je manjših kock v podobnem telesu, ki pripada $n - 1$, itd.



Slika 2.

Vseh šestkotnikov v n -šestkotniku je torej toliko kot vseh kock v vseh takih izsekih. Teh pa je prav n^3 , kar smo ugotovili že na oba prejšnja načina.

Ciril Pezdir

poteka skozi skupno točko S njunih simetral tudi simetrala notranjega kota tega trikotnika pri oglišču C .

Nadaljevanje konstrukcije je sedaj preprosto: na DS odmerimo dolžino dane simetrle ($DF = s_\gamma$) in narišemo skozi F krožni lok s središčem S . Ta seka (če polmer SF ni premajhen) daljico DE v točkah H in G . Kako končno konstruiramo oglišča A , B , C iskanega pravokotnega trikotnika, je razvidno s slike. Narisana je le ena od dveh možnih rešitev, ki sta skladni.

Opomba 1. Iz zadnjega dela analize naloge lahko takoj ugotovimo, da ima naloga dve (skladni) rešitvi, če je $s_\gamma < s(\sqrt{2} - 1)$, eno (enakostranični pravokotni trikotnik) za $s_\gamma = s(\sqrt{2} - 1)$ in nobene za večje s_γ .

Opomba 2. Ideja rešitve je enaka, če želimo konstruirati trikotnik z danim obsegom $2s$, poljubnim kotom γ in dolžino simetrle s_γ .

Marija Vencelj

ASTRONOMSKA KRIŽANKA – Rešitev s str. 298

Vodoravno:

poanta, mrk, sekstant, Rur, akut, Tirtej, Anet, teodolit, Oita, meteor, aktiva, Ru, Slavko, Alba, TL, krvotok, torr, Esk, skripta, etanol, RS, Basel, Pompej, psi, oktant, iskra, opat, Apollo, ŽI, okov, jeni, šola, EK, sik, slepar, LR, koala, čreslo, foot, Ta, Eneas, Inki, Pau, Tang, lok, rig, parsek, lambada, kare, komet, krater, eritrocit, nuna, Inter, galaksija.

KRIŽANKA 'RAČUNALNIŠTVO' – Rešitev s str. 352

Vodoravno:

miška, Wordstar, Tantal, datoteka, tapir, Iva, zigurat, Okopi, han, kačar, NK, Nemke, rial, geto, PM, Arno, Kun, softver, krom, iverka, virus, akronim, šolnina, ventil, lekcija, Tunis, zdrk, ekloga, etan, Alice, Isar, raison, so, Bukal, ost, es, Neer, čorba, tiskalnik, gliser, AN, Lee, učenje, tat, asi, obtoženec, ekrazit, Kaaba, AZ, metlica.

16. MEDNARODNO MATEMATIČNO TEKMOVANJE MEST – POMLADANSKI KROG

V prvem delu pomladanskega kroga 16. tekmovanja mest, ki je bil 29. marca na Fakulteti za elektrotehniko in računalništvo v Ljubljani, je tekmovalo 22 srednješolcev. Dijaki prvih in drugih letnikov so tekmovali v prvi skupini, ostali pa v drugi skupini. Reševali so naslednje naloge:

Prva skupina

1. V skladišču imajo 500 kg sladkorja v vrečah po 10, 15 in 20 kg. Skupaj je 30 vreč. Dokaži, da je vreč po 20 kg več kot vreč po 10 kg.
2. Tri kobilice sedijo v točkah A , B in C , pri čemer je B središče daljice AC . Vsako sekundo ena od kobilic skoči prek ene od drugih dveh na simetrično točko (če skoči kobilica s točke X prek točke Y na točko X' , velja $\overrightarrow{XY} = \overrightarrow{YX'}$). Po nekaj skokih pristanejo vse tri v začetnih točkah (toda ne nujno vsaka v svoji izhodiščni točki). Dokaži, da v točki B pristane prav tista kobilica, ki je tam sedela že na začetku.
3. Naj bo L kvadratu T_1 včrtana krožnica. Kvadrat T_2 je včrtan krožnici L tako, da oglišča kvadrata T_1 ležijo na nosilkah stranic kvadrata T_2 . Poišči kote konveksnega osemkotnika, katerega oglišča so dotikališča krožnice s stranicami kvadrata T_1 in oglišča kvadrata T_2 . Določi središčne kote nad loki, na katere razdelijo krožnico L oglišča osemkotnika.
4. Dokaži, da število $40 \dots 09$ (z vsaj eno ničlo) ni popolni kvadrat.

Druga skupina

1. Naj bodo a , b , c in d števila z intervala $[0, 1]$. Dokaži, da obstaja število x z intervala $[0, 1]$, za katerega velja

$$\frac{1}{|x-a|} + \frac{1}{|x-b|} + \frac{1}{|x-c|} + \frac{1}{|x-d|} < 40.$$

2. Štiri kobilice sedijo v ogliščih kvadrata. Vsako sekundo skoči ena od njih preko ene od drugih treh na simetrično točko (če skoči s točke X preko Y na točko X' , velja $\overrightarrow{XY} = \overrightarrow{YX'}$). Dokaži, da po nekaj skokih nobene tri kobilice ne morejo sedeti na isti premici.
3. Trikotnik ABC je včrtan krožnici s središčem v O . Naj bo q krožnica skozi A , O in B . Premici CA in CB sekata krožnico q v točkah D in E (ki sta različni od A in B). Dokaži, da sta premici CO in DE med seboj pravokotni.

4. Dokaži, da nobeno število $a0 \dots 09$ (z vsaj eno ničlo), kjer je a neničelna števka, ni popolni kvadrat.

Za drugi del tekmovanja, ki je bil 4. aprila, je mednarodna tekmovalna komisija pripravila po sedem (neenakovrednih) nalog za vsako skupino. Vseh nalog ni treba rešiti, saj se izdelek vsakega tekmovalca oceni z največjo možno vsoto točk iz treh nalog. Naloge v drugem delu so precej težje od nalog iz prvega dela, zato si oglejmo le po dve nalogi za vsako skupino.

Prva skupina

1. Dan je enakostranični trikotnik ABC . Poišči množico takih točk P , za katere sta odseka premic AP in BP , ki ležita v trikotniku, enako dolga.
2. Skupina geologov je odšla na odpravo in s seboj je vzela 80 različno težkih zabojev hrane. Skupina je imela seznam z vsebino in težo posameznega zaboja. Ko so prispeli na cilj, s poškodovanih nalepk ni bilo več moč razbrati vsebine zabojev. Kuhar je trdil, da lahko s seznamom in uporabo tehtnice, ki pokaže razliko med težama predmetov z ene in druge strani tehtnice, ugotovi vsebino posameznega zaboja, ne da bi tega odprl. Pokaži, da
 - (a) so štiri tehtanja dovolj;
 - (b) tri tehtanja niso dovolj.

Druga skupina

1. Nad krakoma trapeza narišemo krožnici, katerih premera sta kraka trapeza. Presečišče diagonal naj leži zunaj obeh krogov. Dokaži, da so vsi štirje odseki tangent na krožnici od presečišča diagonal do dotikališč enako dolgi.
2. Dokaži, da sta v skupini 50 ljudi vedno dva, ki imata sodo število (lahko tudi 0) skupnih znancev iz skupine.

Matjaž Željko

16. MEDNARODNO MATEMATIČNO TEKMOVANJE MEST – JESENSKI KROG – Rešitve s str. 252

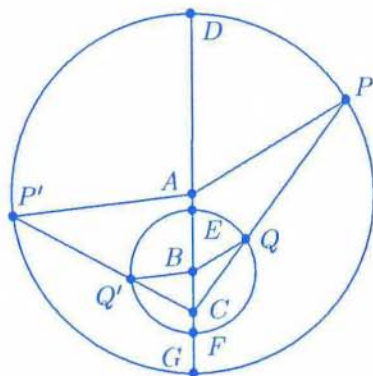
Rešitve nalog prvega dela:

Prva skupina

1. Nalogo lahko rešimo že s tremi pari plesalcev. Oštevilčimo dekleta po bistrosti od 1 do 3 (najbistrejše dekle naj ima številko 3) in predpostavimo, da

si dekleta po naraščajoči lepoti sledijo v vrstnem redu 2, 3, 1. Predpostavimo nadalje, da bo tisti fant, ki je plesal z dekletom številka k , pri naslednjem plesu zaplesal z dekletom številka $(k \bmod 3) + 1$. Pri tako izbranih parih pleše en fant z dekletom, ki je lepše in bolj bistro od prejšnje soplesalke, preostala dva fanta pa plešeta z dekletoma, ki sta bodisi lepši ali bolj bistri od prejšnjih soplesalk.

2. Označimo središči večjega in manjšega kroga z A in B zaporedoma. Če središči krogov sovpadata, je iskana točka C kar skupno središče krogov. Naj bo torej $A \neq B$. Premica skozi A in B naj seka kroga zaporedoma v točkah D, E, F in G . Izberimo točko P ($P \neq D, P \neq G$) na večjem krogu. Premica skozi B , vzporedna AP , seka manjši krog v dveh točkah in s Q označimo tisto presečišče, ki leži na istem bregu premice skozi AB kot točka P . Označimo $r = |BQ|$ in $R = |AP|$.



Ker je $r < R$, se premici AB in PQ sekata. Označimo presečišče s C in dokažimo, da je to iskana točka.

Izberimo drugo točko P' ($P' \neq D, P' \neq G, P' \neq P$) na večjem krogu. Potem premica skozi B , vzporedna AP' , seka manjši krog v dveh točkah in s Q' označimo tisto presečišče, ki leži na istem bregu premice skozi AB kot točka P' . Presečišče premic $P'Q'$ in AB označimo s C' .

Iz podobnosti sledi $\frac{|CB|}{|CA|} = \frac{|CQ|}{|CP|} = \frac{|BQ|}{|AP|} = \frac{r}{R}$ in $\frac{|C'B|}{|C'A|} = \frac{|C'Q'|}{|C'P'|} = \frac{|BQ'|}{|AP'|} = \frac{r}{R}$. Torej $C' = C$ in je točka C nedvoumno definirana. Preverimo:

$$\frac{|CF|}{|CG|} = \frac{r - |CB|}{R - |CA|} = \frac{r}{R} = \frac{r + |CB|}{R + |CA|} = \frac{|CE|}{|CD|}.$$

Točka C je res središče raztega s koeficientom $\frac{R}{r}$, ki preslika manjši krog na večjega.

Središče drugega raztega, tistega s koeficientom $-\frac{R}{r}$, dobimo na podoban način, le da izberemo za točko Q tisto presečišče manjšega kroga s premico skozi B , vzporedno k AP , ki leži na nasprotnem bregu premice skozi AB , kot točka P .

3. Naj bodo to števila $a < b < c < d < e$. Postavimo $b - a = c - b = 1$ in od tod $c - a = 2$. Nadalje zahtevamo $d - c = 2$, saj je 2 najmanjši skupni večkratnik števil 1 in 2. Potem je $d - b = 3$ in $d - a = 4$. Ker je 12 najmanjši skupni večkratnik števil 2, 3 in 4, postavimo $e - d = 12$. Sledi $e - c = 14$, $e - b = 15$ in $e - a = 16$. Če sedaj postavimo $e = 1680$, kjer je 1680 najmanjši skupni večkratnik števil 12, 14 in 15 in 16, lahko izračunamo $d = 1668$, $c = 1666$, $b = 1665$, $a = 1664$. Z neposrednim izračunom preverimo, da ta števila zadoščajo pogojem naloge.

Z manj sistematičnim pristopom lahko poiščemo tudi manjše peterice, npr. $\{36, 40, 42, 45, 48\}$, $\{40, 42, 44, 45, 48\}$, ...

4. Vsak učenec ima natanko dva stara očeta. Učenca, ki ima stara očeta A in B , označimo z $\{A, B\}$ (seveda je takih učencev lahko več). Če ima vseh 20 učencev skupnega starega očeta, je naloga rešena. Predpostavimo sedaj, da ne obstaja skupni stari oče vseh učencev. Potem obstaja vsaj en učenec, ki mu B ni stari oče. Ker ima ta učenec vsaj enega skupnega starega očeta z učencem $\{A, B\}$, mora biti to učenec $\{A, C\}$. Podobno obstaja vsaj en učenec, ki mu A ni stari oče. Ker ima ta učenec vsaj enega skupnega starega očeta z $\{A, B\}$ in $\{A, C\}$, mora biti to učenec $\{B, C\}$. Torej imamo samo tri različne pare starih očetov. Ker ima 20 učencev 40 starih očetov, se mora en par starih očetov pojaviti vsaj 14-krat. Torej obstaja vsaj 14 učencev, ki imajo skupnega starega očeta.

Druga skupina

1. V skupini naj bo n deklet in n fantov. Oštevilčimo dekleta po bistrosti (najbistrejše dekle naj ima številko n) in predpostavimo, da si dekleta po naraščajoči lepoti sledijo v vrstnem redu $2, 3, \dots, n, 1$. Predpostavimo nadalje, da bo tisti fant, ki je plesal z dekletom številka k , pri naslednjem plesu zaplesal z dekletom številka $(k \bmod n) + 1$. Pri tako izbranih parih pleše $n - 2$ fantov z dekletom, ki je lepše in bolj bistro od prejšnje soplesalke, preostala dva fanta pa plešeta z dekletoma, ki sta bodisi lepši ali bolj bistri od prejšnjih soplesalk. Naloga zahteva $\frac{n-2}{n} \geq 0.8$, od koder sledi $n \geq 10$. Naloga je torej rešljiva.

2. Naj bo AB najdaljši rob tetraedra $ABCD$. Če je $|AB| < |AC| + |AD|$, lahko iz daljic AB , AC in AD sestavimo trikotnik, drugi trikotnik pa je kar trikotnik BCD . Če pa je $|AB| \geq |AC| + |AD|$, pa mora zaradi $|AC| + |BC| > |AB|$ in $|AD| + |BD| > |AB|$ veljati $|BC| + |BD| > |AB|$. Potem pa sta iskana trikotnika $\triangle ACD$ in trikotnik s stranicami BC , BD in AB .

3. Iz podatkov naloge sledi $b^3 + c^3 + d^3 = -a^3 = (-a)^3 = (b + c + d)^3$, od koder potem izpeljemo $(b + c + d)^3 - (b^3 + c^3 + d^3) = (b + c)(c + d)(d + b) = 0$.

4. Označimo število različnih permutacij na traku $1 \times n$ z a_n . Očitno je, da mora ležati število n na začetku ali koncu traku. Torej lahko dobimo a_n različnih permutacij tako, da dodamo n na začetku ali na koncu vsaki izmed a_{n-1} permutacij števil $\{1, 2, \dots, n-1\}$. Torej velja rekurzivna zveza $a_n = 2a_{n-1}$ z začetnim pogojem $a_1 = 1$. Sledi $a_n = 2^n$ in v posebnem primeru $a_{10} = 512$.

Rešitve nalog drugega dela:

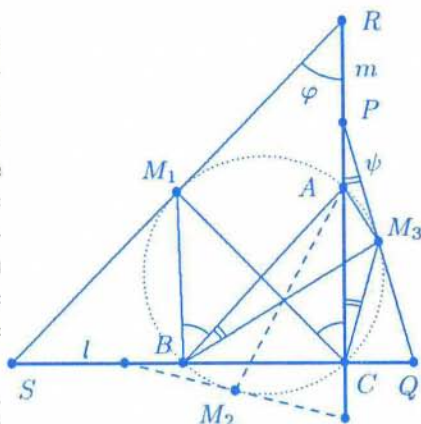
Prva skupina

1. Potegnimo tangente skozi M_1 , M_2 in M_3 in označimo točke, kot kaže skica. Zaradi $|M_1S| = |M_1R|$ je točka M_1 središče pravokotnemu trikotniku SCR očrtane krožnice. Označimo še $\varphi = \angle M_1RC$. Potem je $\angle M_1BA = \angle M_1CA = \varphi$. Ker je kot med tetivo in tangento enak obodnemu kotu nad tetivo, je $\angle SM_1B = \angle BCM_1 = \frac{\pi}{2} - \varphi = \angle RSC$. Sledi $\angle SBM_1 = 2\varphi$ in zato $\angle M_1BA = \frac{1}{3}\angle SBA$.

Označimo nadalje $\psi = \angle ACM_3$. Potem je M_3 središče trikotniku PCQ očrtane krožnice in podobno kot zgoraj lahko dokažemo, da je $\angle M_3BQ = \angle CAM_3 = 2\psi$. Ker je $\angle ABM_3 = \psi$, je $\angle ABM_3 = \frac{1}{3}\angle ABQ$. Torej je $\angle M_1M_2M_3 = \angle M_1BM_3 = \frac{1}{3}(\angle SBA + \angle ABQ) = \frac{\pi}{3}$. Povsem analogno dokažemo še $\angle M_1M_3M_2 = \frac{\pi}{3}$. Trikotnik $M_1M_2M_3$ je res enakokraki.

2. (a) Zaporedje lahko kar konstruiramo. Označimo $b_{100} = b_{99} = 1$ in $b_{k-2} = b_{k-1} + b_k$ za $3 \leq k \leq 100$. Naj bo m najmanjši skupni večkratnik števil $b_1, b_2, \dots, b_{100}$. Postavimo $a_k = \frac{m}{b_k}$ za $k = 1, 2, \dots, 100$. Potem je

$$\frac{1}{a_{k-1}} - \frac{1}{a_k} = \frac{b_{k-1}}{m} - \frac{b_k}{m} = \frac{b_{k+1}}{m} = \frac{1}{a_{k+1}}.$$



(b) Ne. Dokažimo trditev s protislovjem. Naj obstaja neskončno zaporedje $\frac{1}{a_1}, \frac{1}{a_2}, \frac{1}{a_3}, \dots$, za katero velja

$$\frac{1}{a_{k-1}} - \frac{1}{a_k} = \frac{1}{a_{k+1}}$$

za vsak k . Naj bo m največji skupni večkratnik števil a_1 in a_2 . Z indukcijo dokažimo, da je m deljiv z vsemi števili a_k . Trditev očitno velja za $k = 1$ in $k = 2$. V dokazu induksijskega koraka pa predpostavimo, da je m deljiv z a_{k-1} in a_k . Potem sta $b_{k-1} = \frac{m}{a_{k-1}}$ in $b_k = \frac{m}{a_k}$ celi števili. Ker je

$$\frac{1}{a_{k+1}} = \frac{1}{a_{k-1}} - \frac{1}{a_k} = \frac{b_{k-1} - b_k}{m},$$

je $m = a_{k+1}(b_{k-1} - b_k)$. Torej je m deljiv tudi z a_{k+1} . Prišli smo do protislovja, saj je v zaporedju a_k neskončno različnih števil in m ne more biti deljiv z vsemi členi tega zaporedja.

Druge skupina

1. Z indukcijo bomo dokazali ekvivalentno neenakost

$$(a_2 + a_1^2)(a_3 + a_2^2) \cdots (a_1 + a_n^2) \geq (a_1 + a_1^2)(a_2 + a_2^2) \cdots (a_n + a_n^2). \quad (1)$$

Pri $n = 1$ neenakost očitno drži. Pri dokazu induksijskega koraka lahko predpostavimo, da je a_{n+1} največje izmed števil $a_1, a_2, \dots, a_{n+1}$. Preverimo lahko, da je neenakost

$$(a_{n+1} + a_n^2)(a_1 + a_{n+1}^2) \geq (a_1 + a_n^2)(a_{n+1} + a_{n+1}^2) \quad (2)$$

ekvivalentna neenakosti

$$(a_1 - a_{n+1})(a_n - a_{n+1})(a_n + a_{n+1}) \geq 0.$$

Slednje drži zaradi predpostavke o številu a_{n+1} . Induksijski korak potem dokažemo tako, da zmnožimo neenakosti (1) in (2).

2. Zaradi simetrije lahko predpostavimo $m < n$. Dokažimo najprej s protislovjem, da ne obstajata periodični zaporedji s periodama m in n , ki se ujemata v prvih $m + n - 1$ členih. Člene zaporedja s periodo m označimo z a_k , člene zaporedja s periodo n pa z b_k . Ker sta števili m in n tuji, lahko zapišemo $n = am + p$, kjer sta a in n celi števili in je $1 \leq p < m$. Očitno

je $a \geq 1$. Analogno lahko zapišemo $m = bp + q$, kjer sta b in q celi števili in je $0 \leq q < p$ ter $b \geq 1$. Iz predpostavke, da se zaporedji $(a_k)_k$ in $(b_k)_k$ ujemata v prvih $m + n - 1$ členih, sledi

$$(a_{p+1}, a_{p+2}, \dots, a_{p+m-1}) = (b_1, b_2, \dots, b_{m-1}) = (a_1, a_2, \dots, a_{m-1}).$$

Z upoštevanjem periodičnosti zaporedja $(a_k)_k$ lahko gornjo enakost zapišemo takole

$$\begin{array}{ccccccc} a_1 & = & a_{p+1} & = & \dots & = & a_{bp+1}, \\ a_2 & = & a_{p+2} & = & \dots & = & a_{bp+2}, \\ & & \vdots & & & & \\ a_q & = & a_{p+q} & = & \dots & = & a_{bp+q} = a_m, \\ a_{q+1} & = & a_{p+q+1} & = & \dots & = & a_1, \\ & & \vdots & & & & \\ a_{q+p-1} & = & a_{2p+q-1} & = & \dots & = & a_{p-1}, \end{array}$$

od koder sledi

$$(a_1, a_2, \dots, a_{p-1}) = (a_{q+1}, a_{q+2}, \dots, a_{q+p-1}). \quad (3)$$

S predpisom $c_k = a_{m-p+k}$ za $k = 1, 2, \dots, p$ in $c_{k+p} = c_k$ je definirano periodično zaporedje $(c_k)_k$ s periodo (največ) p , predpis $d_k = a_{q+k}$ za $k = 1, 2, \dots, 2p - q$ in $d_{k+2p-q} = d_k$ pa določa periodično zaporedje $(d_k)_k$ s periodo (največ) $2p - q$. Upoštevamo gornje enakosti in zapišimo nekaj zaporednih členov zaporedja $(c_k)_k$

$$\overbrace{a_{q+1}, \dots, a_p}^p, \overbrace{a_1, \dots, a_q}^{p-q}, \overbrace{a_{q+1}, \dots, a_p}^q, \overbrace{a_1, \dots, a_q}^{p-q}, \overbrace{a_{q+1}, \dots, a_{p-1}}^{p-q}, a_p, \dots$$

ter zaporedja $(d_k)_k$

$$\overbrace{a_{q+1}, \dots, a_p, a_{p+1}, \dots, a_{2p}}^{2p-q}, \overbrace{a_{q+1}, \dots, a_{2q}}^q, \overbrace{a_{2q+1}, \dots, a_{q+p-1}, a_{q+p}}^{p-q}, \dots$$

Iz enakosti (3) potem sledi, da se zaporedji $(c_k)_k$ in $(d_k)_k$ ujemata v prvih $(2p - q) + q + (p - q) - 1 = 3p - q - 1$ členih, saj sta člena a_p in a_{q+p} lahko različna.

Dokazali smo naslednje: Če obstajata periodični zaporedji s periodama m in n , kjer sta m in n tuji si števili, ki se ujemata v prvih $m + n - 1$ členih, obstajata tudi periodični zaporedji s periodama (največ) p in (največ) $2p - q$,

ki se ujemata v prvih $3p - q - 1$ členih. Ker je $(m + n) - (p + (2p - q)) = ((a + 1)b - 2)p + (a + 2)q > 0$ (upoštevamo $a, b \geq 1$) in sta si števili p in $2p - q$ tuji, lahko s ponavljanjem gornjega sklepa pridemo do para zaporedij s periodama m, n , $m < n$, da je $n \equiv 1 \pmod{m}$, saj se vsota period manjša. Še enkrat uporabimo zahtevo o ujemanju prvih $m + n - 1$ členov in dobimo, da sta ti dve zaporedji konstantni.

Protislovje torej dokazuje, da ne obstajata periodični zaporedji s periodama m in n , kjer sta m in n tuji si števili, ki se ujemata v prvih $m + n - 1$ členih. Iz gornjega dokaza pa lahko izpeljemo, da zaporedji s periodama m in n , ki se ujemata v prvih $m + n - 2$ členih, obstajata.

Matjaž Željko

PRI NASTAJANJU PRESEKA POMAGAJO S PROGRAMSKO OPREMO PODJETJA: MARAND, MARMIS IN SKUPINA ATLANTIS

PRESEK

list za mlade matematike, fizike, astronome in računalnikarje
22. letnik, šolsko leto 1994/95, številka 6, strani 321–384

UREDNIŠKI ODBOR: Vladimir Batagelj, Tanja Bečan (jezikovni pregled), Dušica Boben (oblikovanje teksta), Mirko Dobovišek (glavni urednik), Vilko Domajnko, Roman Drnovšek (novice), Darjo Felda (tekmovanja), Bojan Golli, Marjan Hribar, Boštjan Jaklič (tehnični urednik), Martin Juvan (računalništvo), Sandi Klavžar, Boris Lavrič, Andrej Likar (fizika), Matija Lokar, Franci Oblak, Peter Petek, Marijan Prosén (astronomija), Marjan Smerke (svetovalec za fotografijo), Miha Štalec, Jana Vrabec (nove knjige), Marija Vencelj (matematika, odgovorna urednica).

Dopisi in naročnine: Društvo matematikov, fizikov in astronomov Slovenije - Podružnica Ljubljana - Komisija za tisk, Presek, Jadranska c. 19, 61111 Ljubljana, p.p. 64, tel. (061) 1232-460, št. ŽR 50101-678-47233. Naročnina za šolsko leto 1994/95 je za posamezne naročnike 1100 SIT, za skupinska naročila šol 880 SIT, posamezna številka 220 SIT, za tujino 21000 LIT, devizna nakazila SKB banka d.d. Ljubljana, val-27621-42961/9, Ajdovščina 4, Ljubljana.

List sofinancirajo MZT, MŠŠ in MK
Ofset tisk DELO - Tiskarna, Ljubljana

Po mnenju MZT št. 415-52/92 z dne 5.2.1992 šteje revija med proizvode iz 13. točke tarife št. 3 zakona o prometnem davku, za katere se plačuje 5% davek od prometa proizvodov.

PRESEK - list za mlade matematike, fizike, astronome in računalnikarje 22. letnik, leto 1994/95, številka 1-6, strani 1-384

UVODNIK

Novemu letniku Preseka na pot (Marija Vencelj) 1

MATEMATIKA

Verižno merjenje dolžin (Jože Malešič)	4-9
Malo harmonične geometrije (Neža Mramor)	54-61
O številu π (Ivan Vidav)	68-69
Nekomutativne in neasociativne operacije (Anton Cedilnik) ..	92-95
Povrnimo se na Otok zakladov (ali sestavljamo rotacije) (Drago Bajc)	98-101
Zanimiva lastnost naravnih števil (Jože Grasselli)	104-109
Pascal, Fibonacci in božično drevce (Gregor Pavlič) ..	129-132, IX
O kvadratih v aritmetičnem zaporedju (Jože Grasselli) ..	206-211
To in ono o tajnopisih (Marija Vencelj)	257-263
Kako razrežemo kvadrat na trikotnike z racionalnimi stranicami (Ivan Vidav)	282-286
Aritmetika s kvadrati (Vilko Domajnko)	321-326
Sundaramovo rešeto (Primož Potočnik)	340-341
Šifriranje z javnim ključem (Marija Vencelj)	354-357

RAČUNALNIŠTVO

Posplošeni hanojski stolp (Ciril Pezdir)	10-16
Množice iz računalnika (Franc Savnik)	80-83
Vrste vzporednih računalnikov in računalnik CM-5 (Sandi Klavžar)	166-172
Računalniki RISC (Aleksander Vesel)	200-205
Za prave uporabnike (Martin Juvan, Matjaž Zaveršnik) ..	276-281
Preizkusni programi za matematiko (Matija Lokar)	344-348, XXIII, XXIV

FIZIKA

Ali se zemlja giblje? (Janez Strnad)	34-42
Klepec (Andrej Likar)	70-73
Trzaj - sprememba pospeška v času (Janez Strnad)	116-124
Žejna račka (Janez Strnad)	146-152
Alessandro Volta - Ob dvestopetdesetletnici rojstva (Janez Strnad)	194-199
Poskusa ob Voltovi obletnici (Janez Strnad)	212, XIII, XVI
Iztočni vrtinec (Janez Strnad)	264-270
Opazovanje iztočnega vrtinca (Zoran Arsov)	328-331
Odklon proti vzhodu (Janez Strnad)	342-343

ASTRONOMIJA

Sedem sester (Marijan Prosén)	62, I, III, IV
Bombni napad na planet Jupiter (Matjaž Vencelj) ..	66-67, V, VII, VIII
Prijatelja (Marijan Prosén)	90-91
Štetje zvezd (Marijan Prosén)	126
Kosci (Marijan Prosén)	162-165
Kraljič (Marijan Prosén)	214-216
Osla (Marijan Prosén)	272-274
Straža (Marijan Prosén)	332-335

REŠITVE NALOG

Križanka Krog - iz P-XXI/6, str. 352 (Marko Bokalič)	47
Kako hitro izteče voda? - iz P-XXI/5, str. 257 (Martin Klanjšek)	186-187
Še enkrat o trgih in ulicah (Martin Juvan, Bojan Mohar)	193

TEKMOVANJA

Državno tekmovanje iz fizike za Zlata Stefanova priznanja 1993/94 (Mirko Cvahte, Zlatko Bradač)	16-17
30. tekmovanje za Zlato Vegovo priznanje (Aleksander Potočnik)	25
38. matematično tekmovanje srednješolcev Slovenije (Darja Žužek Delač)	28-29
32. tekmovanje iz srednješolske fizike (Ciril Dominko)	30-31
15. mednarodno matematično tekmovanje mest - pomladanski krog - rešitve iz P-XXI/6, str. 359 (Matjaž Željko)	43-47
18. državno tekmovanje srednješolcev iz računalništva (Iz uredništva)	53
14. področno tekmovanje iz fizike za osnovnošolce - reš. str. 142-144 (Zlatko Bradač, Mirko Cvahte)	74-76
Naloge za ogrevanje - reš. str. 139-141 (Aleksander Potočnik)	83-85
Izbirno tekmovanje iz matematike za srednješolce - reš. str. 174-178 (Matjaž Željko)	102-103
Naloge s predtekmovanja iz srednješolske fizike - reš. str. 153-157 (Jure Bajc, Ciril Dominko, Bojan Golli)	111-115
29. občinsko tekmovanje za srebrno Vegovo priznanje - reš. str. 234-237 (Aleksander Potočnik)	133-135
Nekaj nalog z računalniškega tekmovanja za srednješolce v letu 1994 - reš. str. 248-250 (Marko Grobelnik)	144-145
Naloge z državnega tekmovanja iz srednješolske fizike - reš. str. 244-247 in 312-316 (Jure Bajc, Ciril Dominko, Bojan Golli)	180-184
14. državno tekmovanje iz fizike za osnovnošolce - reš. str. 231-233 (Zlatko Bradač, Mirko Cvahte) ..	188-190
Urniki tekmovanj v letu 1995 (Darjo Felda)	229-231
9. državno tekmovanje iz znanja računalništva za osnovnošolce (Ivan Gerlič)	237-240
3. državno tekmovanje osnovnošolcev v znanju matematike - reš. str. 310-312 (Aleksander Potočnik)	241-242
Razpis za srednješolsko tekmovanje iz računalništva (Marko Grobelnik)	242-244

38. matematično tekmovanje srednješolcev Slovenije - reš. str. 316-320 (Darjo Felda)	250-252
16. mednarodno matematično tekmovanje mest - jesenski krog - reš. str. 375-381 (Matjaž Željko) ...	252-254
Rešitvi izbranih nalog s 35. matematične olimpiade - s str. 158 (Matjaž Željko)	254-256
16. mednarodno matematično tekmovanje mest - pomladanski krog (Matjaž Željko)	374-375

NOVICE

Frekvenca nihajnega kroga (Janez Strnad)	3
Matematični učbeniki Jurija Vege (Peter Legiša)	18-24
Lavoisier in Helmholtz - Ob dvestoletnici in stoletnici smrti (Janez Strnad)	86-89
Popolna zakladnica logaritmov (Agata Tiegl)	110-111
Mednarodni kongres matematikov - Zürich 1994 (Dušan Repovš)	128,VII
25. mednarodna fizikalna olimpiada (Ciril Dominko)	136-137
25. mednarodna fizikalna olimpiada v Pekingu na Kitajskem - neformalno (Metka Demšar)	137-139,XII
Poročilo s 35. mednarodne matematične olimpiade (Matjaž Željko)	158-159,XII
Še o letalskem poku (Janez Strnad)	184
1. kongres matematikov, fizikov in astronomov Slovenije (Marija Vencelj)	191-192
Fizika v Preseku (Janez Strnad)	192
George Boole - ob stotridsetletnici smrti (Marjan Jerman) ..	217-221
Conrad Wilhelm Röntgen (Janez Strnad)	290-295
Test iz fizike (Rajko Peterl)	300-307
Sto let rentgenskih cevi (Janez Strnad)	338-339,XXI
Dve sporočili (Iz uredništva)	351
Christian Huygens - Ob tristoletnici smrti (Janez Strnad)	358-363
Tečaji iz vakuumске tehnike za profesorje srednjih šol (Andrej Pregelj)	364-366

NALOGE

Povezanost - reš. str. 73 (Vilko Domajnko)	2
Groza - reš. str. 125 (Vilko Domajnko)	17
Novi neznani liki, 1. del - reš. str. 79 (Martin Juvan)	17
Zabava - reš. str. 78-79 (Mateja Rojc)	42
O treh črnih čepicah - reš. str. 124 (Matevž Bren)	52
Dolgčas - reš. str. 109 (Vilko Domajnko)	61
Račun z znaki - reš. str. 190-191 (Martin Juvan)	65
Daljnosežne posledice preproste enačbe - reš. str. 179 (Jurij Kovič)	76
Aritmetična števila - reš. str. 173 (Martin Juvan)	77
Trisekcija - reš. str. 185 (Martin Juvan)	89
Trgi in ulice - reš. str. 178 (D.M.Milošević, prev. B. Japelj)	111
Premeščanje števk - reš. str. 152 (D.M.Milošević, prev. B. Japelj) 125	
Konstruktivska naloga - reš. str. 187 (Marija Vencelj)	126
Vsi nizi - reš. str. 228 (Martin Juvan)	132
Številka uganka za jubilej - reš. str. 205 (Marija Vencelj) ..	133
Novoletna - reš. str. 222 (Marija Vencelj)	135
Sedem žbljev - reš. str. XVI (Dušan Repovž)	159
Avtomobilska - reš. str. 299 (Martin Juvan)	199
Novi neznani liki - 2. del - reš. str. 271 (Martin Juvan)	213
Najmanjši krog - reš. str. 296-297 (Martin Juvan)	213
Paličice - reš. str. 275 (D. M. Milošević, prev. B. Japelj) ..	222
Števke tu in tam - reš. str. 271 (Martin Juvan)	223
Sam sebe - reš. str. 308-309 (Martin Juvan)	225
Popotovanje z letalom - reš. str. 336-337 (Vilko Domajnko) .	275
Barvanje kock - reš. str. 348 (D. M. Milošević, prev. B. Japelj)	275
Dve vprašanji za fizike in astronome (Anton Cedilnik)	281
Neznana osnova - reš. str. 326 (Martin Juvan)	295
Koliko šestkotnikov? - reš. str. 370-371 (Ciril Pezdir)	299
Spet ena logična - reš. str. 357 (Neža Mramor - Kosta)	307
Bazen - burkalnik? (Andrej Likar)	XVII,XX
Butalska - reš. str. 369 (Vilko Domajnko)	327
Tri za bistre glave - reš. str. 368 (Neža Mramor - Kosta)	327

Nariši pravokotni trikotnik - reš. str. 372-373

(Marija Vencelj)	331
Skladnost - reš. str. 368 (Vilko Domajnko)	339
Strogo naraščajoča števila - reš. str. 350 (Martin Juvan)	341
Stična števila - reš. str. 366 (Martin Juvan)	343

NOVE KNJIGE

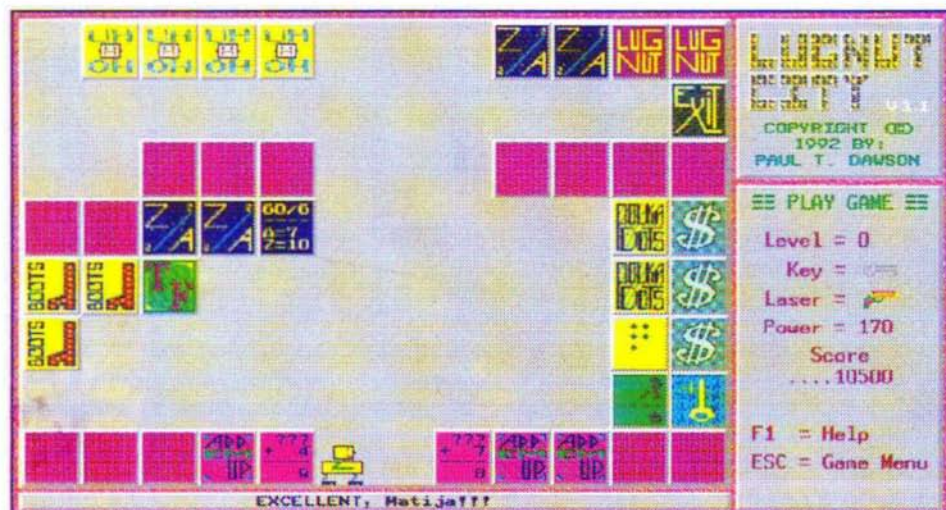
Lokar M., Turbo pascal 7.0 (Jernej Kozak)	213
Hawkingove knjižne uspešnice v zbirki Sigma (Mirjam Galičič)	226-227
Šporer Z., Matematični leksikon za nematematike (Marija Vencelj)	287
Zmazek V., Matematika, priprava na maturo (Mojca Lokar) .	351

RAZVEDRILO

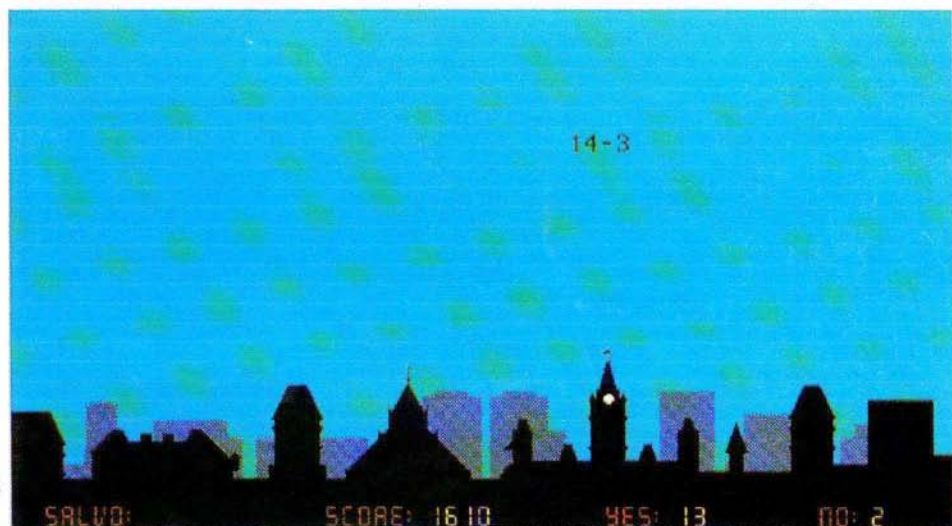
Igra "LEGO" - reš. str. 77-78 (Mitja Rosina)	26-28
Križanka Fizikalne enote - reš. str. 109 (Marko Bokalič) ..	32-33
Popolne številke besede v slovenščini (Tomaž Pisanski) ...	48-52
Križanka Ob I. kongresu matematikov, fizikov in astronomov Slovenije - reš. str. 172 (Marko Bokalič) ..	96-97
Križanka Ob jubileju slovenskega matematika - reš. str. 223 (Marko Bokalič)	160-161
In vendar se premika (Sandi Klavžar)	216
Izpolnjevanke z matematičnimi pojmi - reš. str. 297 (Jakob Andrejčič)	224
Šifrirano pisanje za mlajše bralce - reš. str. 308 (Marina Rugelj)	225
Astronomska križanka - reš. str. 373 (Marko Bokalič) ...	288-289
Tri anekdote o Davidu Hilbertu (Vilko Domajnko)	298-299
Kako štejemo po slovensko? (Tomaž Pisanski)	335-336
Kaj je kipu? (Veslko Guštin)	349-350
Križanka 'Računalništvo' - reš. str. 373 (Marko Bokalič) .	352-353



Math rescue



Lugnut city



Big math attack



Sparky