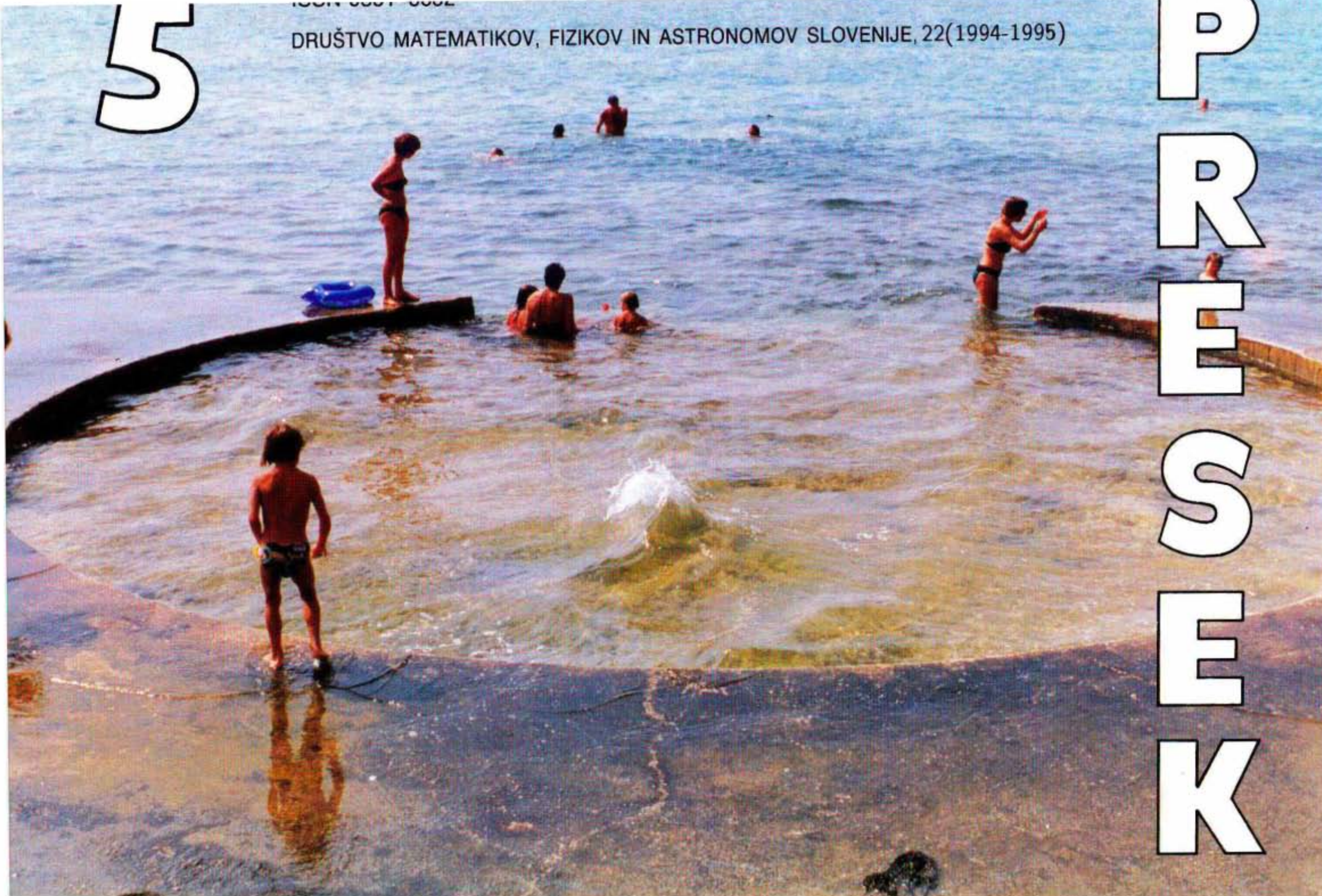
PRESEK

5

DRUŠTVO MATEMATIKOV, FIZIKOV IN ASTRONOMOV SLOVENIJE, 22(1994-1995)



PRESEK - list za mlade matematike, fizike, astronome in računalnikarje
22. letnik, leto 1994/95, številka 5, strani 257–320

VSEBINA

TO IN ONO O TAJNOPISIH

V prejšnji številki Preseka smo na ugankarski strani objavili šifrirano pisemce, katerega namen je bila bolj vaja iz koordinatnih sistemov kot pa njegovo dešifriranje. Razvozlati ga ni bilo prav nič težko, saj je bila priložena tudi mreža - ključ za dešifriranje. Brez ključa pa bi bila ta drobcena naloga kar lep kriptološki problem. Zakaj, bomo razložili nekoliko kasneje.

Kriptologijo, vedo o tajnih pisavah, sestavljata dve veji. Kriptografija uči, kako lahko sporočila bolj ali manj dobro šifriramo, kriptanaliza pa se ukvarja s prav nasprotnim: Kako razvozlati prestreženo sporočilo, če ključa ne poznamo; drugače povedano, kako "zlomiti" kodo sporočila.

Obe vedi imata od nekdaj pomembno vlogo na diplomatskem in vojaškem področju. Iz zgodovine je znan primer, ko je med špansko-francosko vojno leta 1589 francoski matematik Vieta po naročilu svojega kralja razvozlal ključ tajne pisave, ki so jo Španci uporabljali v vojnih načrtih. Pisava je bila za takratne razmere tako zamotana, da so se Španci počutili povsem varne. Njena analiza bi z računalnikom najbrž ne bila prehud problem, tedaj pa so bili Španci zaradi njenega odkritja tako pretreseni, da so se celo pritožili pri papežu, češ da si Francija v vojni pomaga s čarovnijo.

V računalniški dobi se je vloga kriptografije še povečala zaradi potrebe po varnem shranjevanju poslovnih in osebnih podatkov. Tajno kodiranje uporabljajo tudi pri igrah na srečo, da se izognejo goljufijam s ponaredki.

V tem prispevku si bomo ogledali nekaj preprostih načinov šifriranja, ki so jih uporabljali v preteklosti, v prihodnji številki Preseka pa ilustrirali moderno metodo, imenovano šifriranje z javnim ključem. Pri tem se bomo omejili le na razlago osnovnih idej, ob strani bomo pustili njihovo računalniško izvedbo.

Cezarjeva metoda

Najpreprostejši tajnopisi temelje na permutaciji črk v abecedi jezika, v katerem je sporočilo napisano. To pomeni, da zamenjamo, v skladu z nekim pravilom, posamezno črko abecede z natanko določeno drugo črko abecede. Eno takih metod je uporabljal tudi Julij Cezar. Njegova sporočila so šifrirali tako, da so posamezno črko nadomestili s črko, ki stoji tri mesta za njo v abecedi, zadnje tri črke abecede pa so nadomestili s prvimi tremi. V slovenščini predstavlja ključ za Cezarjev način šifriranja naslednja tabela:

A	B	C	Č	D	E	F	G	H	I	J	K	L	M
Č	D	E	F	G	H	I	J	K	L	M	N	O	P

N	O	P	R	S	Š	T	U	V	Z	Ž
R	S	Š	T	U	V	Z	Ž	A	B	C

Sporočilo

TAKOLE JE ŠIFRIRAL CEZAR

se šifrirano glasi:

ZČNSOHMHVLITLTČOEHBČT.

Presledki med besedami so namerno izpuščeni, da bi morebitna nepoklicana oseba sporočilo težje razvozlala. Pri tem smo seveda predpostavili, da bo pravemu naslovniku besedilo TAKOLEJEŠIFRIRALCEZAR dovolj domače, da bo znal postaviti presledke na prava mesta.

Tri seveda ni nobeno magično šifrirno število. Črke abecede bi lahko premaknili za poljubno število mest. Pri tem bi očitno vse bistveno različne načine dobili s premiki za manj kot 25 mest.

Postopek lahko opišemo tudi z matematičnim izrazom, če črke nadomestimo s števili, ki pomenijo njihova mesta v abecedi, pri čemer začnemo številčiti z 0:

A	B	C	Č	D	E	F	G	H	I	J	K	L	M
0	1	2	3	4	5.	6	7	8	9	10	11	12	13

N	O	P	R	S	Š	T	U	V	Z	Ž
14	15	16	17	18	19	20	21	22	23	24

Če označimo z x število, ki pripada črki sporočila, in z y število, ki pripada njeni šifri, lahko opišemo Cezarjevo metodo s formulo

$$y \equiv x + 3 (\text{mod } 25),$$

šifriranje s premikom za d mest pa z

$$y \equiv x + d (\text{mod } 25). \tag{1}$$

Šifri prirejeno število y je torej ostanek, ki ga dobimo, če $x + d$ delimo s 25.

Ključ, s katerim lahko ta tip tajnopisa razvozlamo, je seveda naravno število $d \leq 24$. Od števila, ki v zgornji tabeli pripada šifri, odštejemo d in, v primeru, da je rezultat negativen, prištejemo še 25. Nato poiščemo v tabeli črko, ki pripada dobljenemu številu. Postopek dešifriranja torej opisuje formula

$$x \equiv y - d (\text{mod } 25),$$

kjer je x najmanjše nenegativno število, ki ji pri danih y in d ustreza.

Opisani način šifriranja (tudi za splošni d mu bomo rekli kar Cezarjev način) je za uporabnike zelo preprost, a ga je tudi zelo lahko zlomiti. S pogosto menjavo ključa d lahko dosežemo sicer nekoliko večjo varnost, vendar si s tem nakopljemo skrb za varen prenos ključa do naslovnika. Možni so seveda vnaprejšnji dogovori. Ena takih možnosti je, da na posamezni dan velja ključ, ki je enak vsoti števk tistega dela tekočega datuma, ki označuje dneve. Če bi ob takem domenku, denimo, 14. februarja (na valentinovo) dobili sporočilo SNZRNSŠEAJ, bi vedeli, da se moramo za vsako črko besedila vrniti v abecedi za $d = 1 + 4 = 5$ črk nazaj. Prva črka sporočila tako ustreza številu $18 - 5 = 13$ in je M, vse sporočilo pa se glasi MISLIM NATE.

Seveda lahko nepoklicani ugotovi, da uporabljamo Cezarjev način šifriranja. Potem zlahka odkrije tudi vsakokratno vrednost ključa d. Za d preprosto vstavi zapored vseh 24 možnosti in zelo verjetno bo dešifrirano sporočilo smiselno le pri eni vrednosti premika d.

Učinkovitejši je zlom kode na način, ki temelji na pogostosti posameznih črk v besedah jezika, za katerega domnevamo, da je v njem tajno sporočilo napisano. Naslednja tabela, dobljena seveda statistično, prikazuje v promilah izraženo pogostost posameznih črk v slovenščini.

E	A	I	O	N	R	S	L	J	T	V	D	K
108	102	89	88	69	53	52	47	45	45	40	36	35
M	P	U	Z	B	G	Č	H	Š	C	Ž	F	
33	31	22	21	18	15	15	11	10	7	7	1	

Oglejmo si tak način kriptanalize kar na primeru. Denimo, da smo prestregli sporočilo VKSŽPŠPACLSŠRČJCGRUVZPAG, za katero domnevamo, da je napisano v slovenščini in šifrirano na Cezarjev način z neznanim premikom d. V sporočilu največkrat nastopa znak P, zato najprej poskusimo, če je to morda šifra za črko E, ki je najpogostejša črka v slovenskem jeziku. Izračunamo $d = 16 - 5 = 11$, vendar je s takim d dešifrirano sporočilo

KAGMEHENPBGHFRŽPUFJKLENU nesmiselno, kar odkrijemo že po nekaj prvih črkah. Podobno propade poskus s črko A, za I, tretjo najbolj pogosto črko v slovenščini, pa dobimo $d = 7$, ki nas vodi (potem, ko smo smiselno vstavili presledke) do sporočila ODKRILI STE KLJUČ TAJNOPISA.

Modificirana Cezarjeva metoda

Šifriranje po Cezarjevo torej ni hudo varen način pisanja tajnih sporočil. Obstajajo različne modifikacije Cezarjeve metode, ki izboljšajo varnost tajnopisov. Tako lahko namesto (1) uporabimo kakšno drugo šifrirno funkcijo, na primer

$$y \equiv ax + b (\text{mod } 25). \tag{2}$$

Vse možnosti, ki jih daje formula (2), dobimo, ko a in b pretečeta vsa nenegativna števila manjša od 25. Pri tem smemo a izbirati le med števili, ki so tuja s 25, sicer sporočila ne bo moč dešifrirati (zakaj?).

V daljših sporočilih je seveda nujna tudi uporaba ločil in presledkov. Običajno jih dodamo na koncu abecede in jim, podobno kot črkam, priredimo nadaljnja zaporedna števila. Če ima tako razširjena abeceda n znakov, preideta formuli (1) in (2) v

$$y \equiv x + d (\text{mod } n) \quad \text{in} \quad y \equiv ax + b (\text{mod } n),$$

število a pa mora biti tuje z n.

Pa se povrnimo k formuli (2). Pošiljatelj in prejemnik sporočila se morata na neki način dogovoriti glede izbire števil a in b, ki tokrat predstavljata ključ šifre, ali pa bo treba ključ prenesti. Samo šifriranje in dešifriranje poteka najenostavneje s tabelo, katere pripravo si oglejmo kar na primeru za $a = 7$ in $b = 4$. Iz $y \equiv 7x + 4 (\text{mod } 25)$ sledi, da je šifra za A($x = 0$) znak D($y = 4$), šifre nadaljnih črk abecede pa dobimo tako, da pri cikličnem sprehodu skozi abecedo izpisujemo vsako sedmo črko, začenši z D. S tako dobljeno tabelo

A	B	C	Č	D	E	F	G	H	I	J	K	L	M
D	K	S	A	G	N	U	Č	J	R	Ž	F	M	T

N	O	P	R	S	Š	T	U	V	Z	Ž
C	I	P	Z	E	L	Š	B	H	O	V

hitro preberemo, da sporočilo KITKCRCDPDGIKŠZNJ pomeni BOMBNI NAPAD OB TREH.

To sporočilo bi povzročilo nekaj več sivih las vsiljivcu, ki bi se polotil njegove analize. Čeprav bi vedel, da je šifrirano s formulo (2), bi moral pravilno uganiti vsaj dve črki, da bi lahko izračunal ključ $a = 7$, $b = 4$. Uporaba tabele za pogostost črk bi mu bolj malo koristila, saj je B, ki v sporočilu nastopa največkrat, v tabeli šele na osemnajstem mestu. Če pa bi domneval, da govori sporočilo o bombardiranju, bi morda uganil, da je K($y = 11$) šifra za B($x = 1$) in I($y = 9$) šifra za O($x = 15$). Z vstavljanjem vrednosti za x in y v (2) bi sledilo, da a in b ustrezata sistemu kongruenc

$$\begin{aligned} a + b &\equiv 11 (\mathrm{mod}\ 25) \\ 15a + b &\equiv 9 (\mathrm{mod}\ 25). \end{aligned}$$

Sistem lahko hitro rešimo s standardnimi metodami, podobnimi metodam za reševanje linearnih sistemov. Če pa nam to ni po volji, lahko še vedno preverimo, pri katerem izmed 500 možnih parov (a, b) (ne pozabimo, da mora biti a tuj s 25) dobimo smiselno sporočilo.

Druge zamenjalne metode

Naslednji korak k večji zapletenosti šifre je uporaba poljubne permutacije (razširjene) abecede. V takem primeru predstavlja ključ tajnopisa tabela, s katero je vsaki črki abecede prirejena natanko določena druga črka abecede. Največji problem te metode je varen prenos ključa, saj se ga ne da nadomestiti s tako preprostim opisom, kot je bil opis enega ali dveh števil pri prejšnjih metodah. Zgled takega primera tajnopisa je tudi Urškino šifrirano pisemce iz prejšnje številke Preseka, čeprav so bile tam (zaradi vaje iz koordinatnih sistemov), namesto črk, izbrane nekoliko bolj nerodne oznake za šifre.

Prav gotovo je način šifriranja na osnovi permutacije varnejši od metod, opisanih v prejšnjih dveh razdelkih, seveda ob predpostavki, da nepoklicani ni prestregel ključa. Vendar se da tudi tak tajnopis dokaj hitro razvozlati z metodo pogostosti črk, tako da ne moremo za šifriranje stalno uporabljati iste permutacije. O kriptanalizi na osnovi pogostosti črk obstajajo namreč za posamezne jezike cele študije. Razlog je preprost. Že pri naših primerih kriptanalize smo opazili, da se vrstni red pogostosti znakov v opazovanih besedilih ne ujema povsem z vrstnim redom v tabeli, ki kaže pogostost znakov v slovenščini. Čim krajše je besedilo, tem manj verjetno se to zgodi. Zato v kriptanalizi dodatno upoštevajo, katere črke najpogosteje nastopajo na začetku, katere na koncu besed, nadalje pogostost parov zaporednih črk, itd.

V vsakem primeru pa velja, da je sporočilo tem laže razvozlati, čim daljše je. V daljših besedilih pridejo namreč statistične značilnosti jezika bolj do izraza. Zato morajo biti tajna sporočila kratka, ključ je treba pogosto menjati.

Predlagam vam, da poskusite na osnovi pogostosti črk razvozlati Urškino pisemce, ne da bi pri tem kukali v priloženi ključ za dešifriranje. Čeprav besedilo ni najkrajše, boste videli, da je kar trd oreh.

Oglejmo si še način šifriranja, ki mu z metodo na osnovi pogostosti črk vsiljivec ne more biti kos. Osrednja ideja je, da vsako črko sporočila zamenjamo s črko, ki stoji v abecedi d mest dalje, pri čemer premik d spreminjamo, v skladu z nekim pravilom, od črke do črke, natančneje od mesta do mesta, na katerem črka v sporočilu stoji. Pravilo običajno uvaja neka dogovorjena beseda, ki je ključ šifre. Ključno besedo ponavljaje se zapišemo pod sporočilo, črko pod črko, in nato vsako črko sporočila premaknemo za število, ki pripada podpisani črki ključne besede.

Oglejmo si metodo spet kar na primeru. Denimo, da je dogovorjena ključna beseda BOGASTVO in da želimo šifrirati sporočilo TAKOJ PRODAJ LIRE. Takole gre:

T	A	K	O	J	P	R	O	D	A	J	L	I	R	E
B	O	G	A	S	T	V	O	B	O	G	A	S	T	V
U	O	S	O	Č	K	N	E	E	O	R	L	C	L	C

Šifrirano sporočilo se torej glasi UOSOČKNEEORLCLC. Črko P($x = 16$) smo na primer premaknili ciklično za dvajset mest, ker je 20 zaporedno število podpisane črke T, in zanjo dobili šifro K($y = 11$). To ustreza računu $16 + 20 \equiv 11 (\mathrm{mod}\ 25)$. Koristno si je pripraviti tabelo 25×25 črk, ki pripadajo na opisani način parom črk v abecedi. Tako stolpce kot vrstice označimo s črkami od A do Ž. Na križišču stolpca P in vrstice T stoji v tej tabeli po zgornjem računu črka K.

Tabela je seveda uporabna pri poljubni ključni besedi, ki pa jo je priporočljivo pogosto menjati. Lahko se, recimo, domenimo, da na posamezni dan velja ključna beseda, ki jo sestavlja prvih osem črk s tretje strani en dan starega časopisa Delo.

Šifriranje zaporednih parov črk

Obstaja še veliko šifrirnih metod. Vsem je cilj čimbolj otežiti kriptanalizo. Kot zadnjo v tem sestavku si oglejmo metodo, s katero namesto posameznih črk šifriramo zaporedne pare črk v sporočilu. Eden od načinov, kako to napravimo, je, da si izberemo štiri števila a, b, c, d in za šifriranje uporabimo sistem

$$y_1 \equiv ax_1 + bx_2 (\text{mod } 25)$$
$$y_2 \equiv cx_2 + dx_2 (\text{mod } 25).$$

Za $a = 1$, $b = 3$, $c = 7$ in $d = 12$ preide par črk ET z zaporednima številoma $x_1 = 5$ in $x_2 = 20$ v šifro OA, ker je

$$y_1 = 1 \cdot 5 + 3 \cdot 20 = 65 \equiv 15 (\text{mod } 25)$$

in

$$y_2 = 7 \cdot 5 + 12 \cdot 20 = 275 \equiv 0 (\text{mod } 25),$$

kar sta števili, ki pripadata črkama O in A. Tako par za parom zaporednih črk šifriramo vse sporočilo.

Za dešifriranje moramo pri danih y_1 in y_2 razrešiti zgornji sistem na x_1 in x_2. To gre v primeru, če je število $ad - bc$ tuje s 25.

Kriptanaliza takega tajnopisa bi seveda potekala z uporabo tabel o pogostosti parov zaporednih črk v jeziku sporočila.

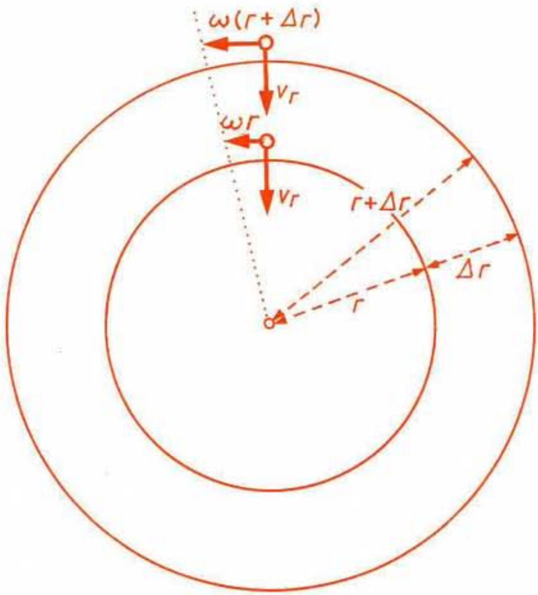
– – –

Računalnikarji med bralci Preseka boste morda za kakšnega od obravnavanih načinov izdelali program za šifriranje in dešifriranje. Takšen je dandanes tudi način dela v kriptografiji in kriptanalizi. Svojčas pa je bilo to tudi za preprostejše sisteme šifriranja hudo zamudno in težaško delo, pri katerem so si pomagali tudi s posebnimi šifrirnimi stroji. Eden najbolj znanih šifrirnih strojev je bila Enigma, ki so jo uporabljali Nemci med drugo svetovno vojno. Skupina angleških kriptanalitikov, ki jo je vodil matematik Alan Turing, je razvila metodo in stroj za dešifriranje prestreženih sporočil, kar je igralo veliko vlogo v zmagi zavezniških sil. Nemci so bili namreč trdno prepričani, da je šifriranje z Enigmo brez ključa nezlomljivo, tako da je bil ta vir informacij zaveznikom na voljo ves čas vojne.

Marija Vencelj

IZTOČNI VRTINEC

Iz vrteče se posode z obliko nizkega pokončnega valja skozi okroglo odprtino sredi dna izteka voda. Posoda se počasi vrti okoli navpične osi v nasprotni smeri kot urni kazalec, če jo pogledamo z vrha. Deli vode, ki se gibljejo proti iztočni odprtini ob osi, prihajajo z območja večjega radija na območje vse manjšega radija (slika 1). Hitrost v smeri tangente je tem manjša, čim manjši je radij, zato deli vode zaradi vztrajnosti silijo v smeri prvotnega gibanja, to je po tangenti v nasprotni smeri kot urni kazalec. Zato se za opazovalca, ki se vrti skupaj s posodo, voda ob iztekanju začne vrteti v nasprotni smeri kot urni kazalec.



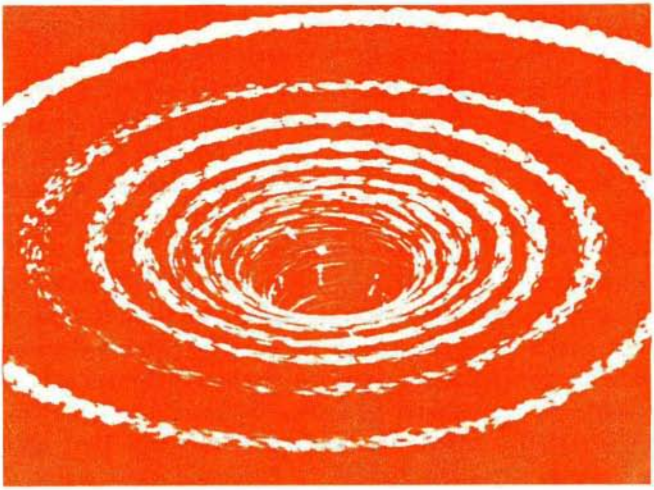
Slika 1. Del vode, ki se bliža osi v vrteči se posodi, zaide na območja z manjšo tangentno hitrostjo in zaradi vztrajnosti sili v to smer.

Zemlja se vrti, in sicer v nasprotni smeri kot urni kazalec, gledano s severnega pola, in vrtljaj traja 24 ur. Zato iz prejšnje misli izhaja ugotovitev, da na severni polobli pri iztekanju vode iz posode nastane *iztočni vrtinec* s smerjo nasprotno smeri urnega kazalca. Najbolj izrazit je pojav na polu, proti ekvatorju je vse manj izrazit. Na ekvatorju ga sploh ni, tam se voda v posodi ne vrti. Od ekvatorja proti južnemu polu postaja pojav zopet vse bolj izrazit in je najbolj izrazit na južnem polu. Toda tam se voda vrti v smeri urnega kazalca, če gledamo navzdol na njeno gladino. To pomeni, da na južni polobli nastane iztočni vrtinec v smeri gibanja urnega kazalca.

Že leta 1865 je Američan Henry Rowland v svoji prvi znanstveni objavi poskušal utemeljiti pojav s primero, da se vrvica z utežjo, ki jo zavihtimo, čedalje hitreje navija na roko. Leta 1908 je Ottokar Turmlitz na Dunaju poskusil pojav zajeti z računom. Po njegovem mnenju je pojav mogoče izkoristiti kot enega izmed neposrednih eksperimentalnih preskusov za vrtenje Zemlje. Vendar se je od časa do časa pojavil dvom.

Sredi lanskega leta je urednik American Journal of Physics med drugimi objavil izzivalno vprašanje z naslovom *Coriolisov mit in voda, ki izteka iz kadi.* Vprašanje je enako kot naslov izzvenelo nekoliko omalovaževalno: "Toda poskuse so delali samo na severni polobli in so bili ti zato manj kot prepričljivi." Decembrska številka je prinesla tri odzive bralcev, ki so opozorili na opise poskusov v literaturi. Ascher Shapiro je v Nature leta 1962 opisal skrbne poskuse v Bostonu na severni širini 42°. Posoda je imela premer 1,8 metra in je bila 15 cm visoka. Okrogla iztočna odprtina s premerom 0,95 cm v dnu je bila priključena na 7 m dolgo odtočno cev. Posodo so napolnili skoraj do roba z vodo, tako da se je med polnjenjem voda vrtela v smeri urnega kazalca. Prekrili so jo s plastično prevleko, da so se izognili zračnim tokovom, in jo pustili stati 24 ur v prostoru s kolikor mogoče konstantno temperaturo, da so zamrli tokovi v vodi. Potem so odstranili prevleko, previdno odprli zamašek v cevi in nad iztočno odprtino postavili majhen plovec iz delov lesa, ki ju je povezovala žica. Posoda se je izpraznila v 20 minutah. Prvih 15 minut se plovec ni vrtel, v zadnjih 5 minutah pa se je začel vrteti in se je nazadnje zavrtel enkrat v 3 do 4 sekundah. Pri taki izvedbi poskusa se je voda vedno vrtela v smeri nasproti urnemu kazalcu. Če so pustili vodo stati krajši čas, se je precej hitreje vrtela v nasprotni smeri. O teh poskusih so posneli tudi dva poučna filma (slika 2).

Poskuse je ponovil v Sydneyu pri 34° južne širine Lloyd Trefethen s štirimi sodelavci in poročal o tem v Nature leta 1965. Najprej so imeli težave in niso opazili vrtinca. Ugotovili so, da se je posoda praznila prepočasi. Poskrbeli so za večji padec odtočne cevi, da se je posoda izpraznila v 22 minutah, in se izognili zračnim tokovom. Potem so dobili pričakovane rezultate. Prvih 10 do 12 minut se voda ni vrtela, potem pa se je oblikoval vrtinec v smeri urnega kazalca. Plovec se je zavrtel nazadnje enkrat v 3 sekundah, če so prej počakali 70 ur, da se je voda umirila.



Slika 2. Pot dela vode v iztočnem vrtincu iz Shapirovega poučnega filma *Vrtinčnost*.

Leta 1983 je o iztočnem vrtincu pisal Merwin Sibulkin v reviji American Scientist. Opisal je starejše poskuse in svoje, ki jih je naredil leta 1962. Opozoril je na vlogo viskoznosti in površinske napetosti pri poskusih, pri katerih voda na začetku ne miruje. Tudi na njegov zapis sta se istega leta odzvala bralca. Eden je predlagal poskus, pri katerem bi bila posoda z iztekajočo vodo vrtljiva okoli navpične osi. Ali bi se ta začela vrteti v nasprotni smeri od iztočnega vrtinca? Winston Cope je na kratko poročal o poskusih z iztekanjem na južnem tečaju. Poskuse so delali s polovico dvestolitrskega soda v obliki bobna. Ker je bila temperatura pod ničlo, so namesto vode uporabili vodno raztopino glikola, po domače antifriza. Potem ko so napolnili posodo, so čakali 3 do 5 dni, da so zamrli tokovi. Proti koncu iztekanja so opazili po delcih smukca na gladini vrtinec v smeri urnega kazalca. Smer vrtinca se ni spremenila, če raztopina ni iztekala skozi odprtino na sredi dna, ampak so jo previdno posesali skozi cev na sredi gladine.

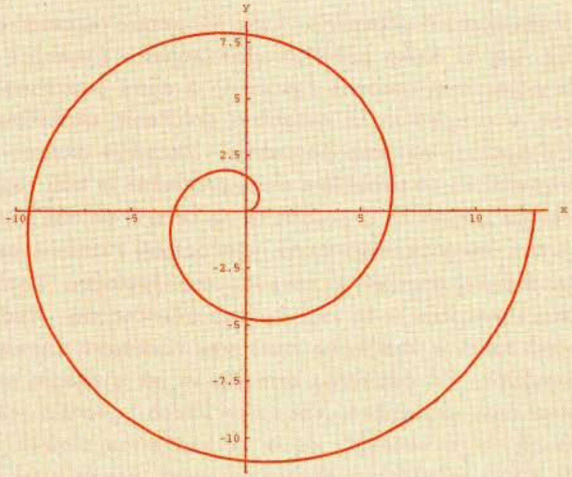
Vprašanje najdemo tudi v znanem *Letečem cirkusu fizike* Yearla Walkerja skupaj z obsežnim seznamom literature. V tej imenitni knjigi so navedene še druge zadeve iz vsakdanjega življenja, ki jih je mogoče pojasniti s fiziko. Vendar se pokaže, da je fizika vsakdanjega življenja pogosto veliko bolj zapletena kot fizika v srednješolskih učbenikih. Kako naj potem razumemo s poudarkom izražene želje, naj bi fiziko približali vsakdanjemu življenju? Ali ni edina možnost, da pojasnimo osnovne zakone in z njimi podrobno preračunamo nekaj zgledov, v preglednih in natančno določenih okoliščinah. Samo te dopuščajo, da poskuse natanko ponovimo. Nazadnje okvirno omenimo, kaj se utegne primeriti, če so okoliščine manj pregledne in bolj zapletene.

Pri iztekanju kapljevine iz posode se na severni polobli izoblikuje vrtinec v nasprotni smeri urnega kazalca in na južni polobli v smeri urnega kazalca le, če je izpolnjenih nekaj pogojev, ki navadno niso izpolnjeni. Posoda z odprtino mora biti osno simetrična in to velja tudi za odtočno cev. Nad kapljevino ne sme biti zračnih tokov in kapljevina mora pred poskusom mirovati in imeti vsa enako temperaturo. Pri odpiranju zamaška in pri iztekanju ne sme priti do motenj, ki niso osno simetrične. Vse to pri kadeh in koritih težko dosežemo, četudi bi dovolj dolgo počakali, da bi se kapljevina umirila. Zato nas ne sme začuditi, da so priložnostni opazovalci videli vrtince v tej ali v nasprotni smeri in so se bili o tem pripravljeni prerekati. Samo podroben premislek o okoliščinah je lahko pripeljal do odločilnih poskusov in do podrobnejšega razumevanja. Osnovne zakone za pojave, ki zadevajo vsakdanje življenje, poznamo. Zgled z iztočnim vrtincem pomaga razumeti tudi nekatera današnja vprašanja in spore, na primer tistega o vplivu električnega in magnetnega polja z nizko frekvenco na živa bitja.

Za bralce Preseka, ki radi računajo, pojasnimo, v kakšni zvezi z iztočnim vrtincem je Coriolis.

Vzemimo točkasto telo, ki se enakomerno oddaljuje od izhodišča z radialno hitrostjo v_r in hkrati kroži s konstantno kotno hitrostjo ω. Pri tem se telo giblje po Arhimedovi spirali (slika 3). V ravnino gibanja postavimo koordinatni sistem xy in zaznamujmo odvajanje po času s piko. Za razdaljo r od izhodišča in zasuk φ glede na os x velja $\varphi = \omega t$ in $r = v_r t$. Koordinati, komponenti hitrosti in komponenti pospeška se spreminjajo s časom takole:

$$x = r\cos\varphi = v_r t\cos\omega t, \quad y = r\sin\varphi = v_r t\sin\omega t,$$
$$v_x = \dot{x} = v_r\cos\omega t - v_r\omega t\sin\omega t, \quad v_y = \dot{y} = v_r\sin\omega t + v_r\omega t\cos\omega t,$$
$$a_x = \dot{v}_x = -2v_r\omega\sin\omega t - v_r\omega^2 t\cos\omega t,$$
$$a_y = \dot{a}_y = 2v_r\omega\cos\omega t - v_r t\omega^2 t\sin\omega t.$$



Slika 3. Gibanje točkastega telesa po Arhimedovi spirali v nepospešenem koordinatnem sistemu ($v_r = 1$ m/s in $\omega = 1$ s^{-1}, tako da je obhodni čas 2π s).

Po dve komponenti združimo v ravninski vektor. Lego točkastega telesa določa krajevni vektor $\mathbf{r} = (x, y)$. Vektor hitrosti $\mathbf{v} = (v_x, v_y)$ ima dve komponenti, radialno v_r in tangentno $v_r \omega t = r\omega$. Tudi vektor pospeška ima dve komponenti, tangentno $2v_r\omega$ v smeri naraščajočega zasuka in radialno $\omega^2 v_r t = \omega^2 r$ v smeri proti izhodišču. Zadnji navadno pravimo radialni ali centripetalni pospešek.

Na telo, ki se giblje po Arhimedovi spirali, morajo po drugem Newtonovem zakonu delovati druga telesa s silo $\mathbf{F} = m\mathbf{a}$. Sila ima tangentno komponento v smeri naraščajočega zasuka $2mv_r\omega$ in radialno komponento $m\omega^2 r$ v smeri proti izhodišču – radialno ali centripetalno silo.

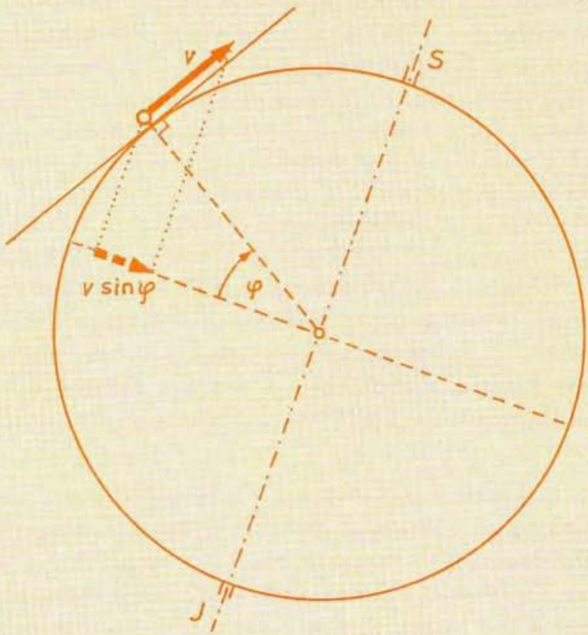
Tako smo opisali gibanje telesa v nepospešenem ali inercialnem koordinatnem sistemu $S(x, y)$. Preselimo se v vrteči se koordinatni sistem $S'(x', y')$, ki se glede na sistem S enakomerno vrti s kotno hitrostjo ω. V tem pospešenem ali neinercialnem koordinatnem sistemu S' se točkasto telo giblje premo in enakomerno v smeri osi x' s hitrostjo $v_r' = v_r$. Če hoče opazovalec v pospešenem ali neinercialnem sistemu uporabiti Newtonov zakon, mora poleg vsote *zunanjih* sil $\mathbf{F}$ upoštevati na levi še vsoto *vztrajnostnih* ali *sistemskih* sil $\mathbf{F}_s$:

$$\mathbf{F} + \mathbf{F}_s = m\mathbf{a}'.$$

To je nakazal že prispevek *Ali se Zemlja giblje?* v prvi številki 22. letnika Preseka.

Pri enakomernem gibanju točkastega telesa v neinercialnem sistemu S′ je pospešek **a**′ enak nič in mora biti vsota zunanjih sil in sistemskih sil enaka nič. Vsota sistemskih sil mora torej biti nasprotno enaka vsoti zunanjih sil. Na točkasto telo, ki se enakomerno giblje v radialni smeri v enakomerno se vrtečem koordinatnem sistemu, delujeta potemtakem radialna sistemska sila $m\omega^2 r$ v smeri od izhodišča, ki jo poznamo kot centrifugalno silo, in tangentna sistemska sila $2mv_r\omega$ v smeri nasprotni smeri naraščajočega zasuka. Tej zadnji rečemo *Coriolisova sila*, po francoskem mehaniku Gaspardu Gustavu de Coriolisu (1797 do 1843), ki jo je prvi podrobno raziskal. (Pri gibanju planetov Coriolisove sile in njenega pospeška ni bilo treba upoštevati.)

Koordinatni sistem S′, ki je togo povezan z Zemljo, se enakomerno vrti s kotno hitrostjo $\omega = 2\pi/24\ \mathrm{h} = 7,3\cdot 10^{-5}\ \mathrm{s}^{-1}$. Omejimo se na gibanje telesa v vodoravni ravnini. Na telo, ki se na severni polobli giblje proti severu, deluje Coriolisova sila proti vzhodu, če se telo giblje proti jugu, pa proti zahodu. V obeh primerih deluje sila $2v'\omega m \sin\varphi$ (slika 4). Z zemljepisno širino φ smo



Slika 4. Za Coriolisovo silo na telo, ki se na severni polobli giblje v vodoravni ravnini s hitrostjo v proti severu, je odločilna komponenta hitrosti $v \sin\varphi$, pravokotna na os.

upoštevali komponento hitrosti pravokotno na os. To ugotovitev najbolje podpre poskus s Foucaultovim nihalom. Tudi izstrelki se odklonijo zaradi Coriolisove sile proti desni. (Odklonijo se tudi zaradi vrtenja okoli vzdolžne osi in zračnega upora, in sicer proti desni, če se vrtijo kot desni sveder.)

Včasih so pripisovali Coriolisovi sili tudi, da se desna tirnica tira, po katerem vozijo vlaki samo v eni smeri proti severu ali proti jugu, bolj obrabi in da so se reke, ki tečejo proti severu ali proti jugu, v geološki zgodovini premikale proti desni, dokler jih ni zaustavilo kako pogorje. Vendar zadnjih trditev ni mogoče preskusiti.

Coriolisova sila je zelo pomembna v meteorologiji.

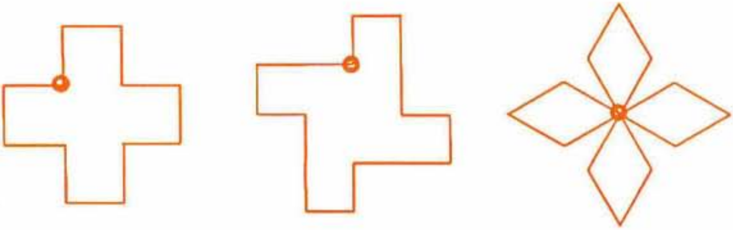
V koordinatnem sistemu S' del iztekajoče kapljevine v posodi, ki miruje na Zemlji, počasi potuje proti osi. To gibanje poganja teža, uravnovesijo pa ga sile zaradi viskoznosti. Pri tem ni treba računati s pospeševanjem dela kapljevine zaradi Coriolisove sile v tangentni smeri. Upoštevamo samo, da ne teža ne deli okolne kapljevine ne izvajajo na opazovani del kapljevine navora glede na os posode. Zato se njegova vrtilna količina glede na to os ne spremeni in velja $m\omega' r^2 = m\omega_1' r_1^2$, če je ω' kotna hitrost kapljevine v razdalji od osi r, merjena v koordinatnem sistemu S'. Iz enačbe $\omega_1' = \omega'(r/r_1)^2$ izračunamo kotno hitrost ob vstopu v odtočno cev v razdalji $r_1 = 0,5$ cm od osi, če vzamemo za $\omega' = \omega \sin\varphi = 5 \cdot 10^{-5}\ s^{-1}$ pri $\varphi = 42^\circ$ in $r = 0,9$ m. Dobimo približno 1,6 s^{-1}, čemur ustreza čas enega vrtljaja $2\pi/\omega_1$ okoli 4 s. Nekoliko krajši čas bi dobili, če bi računali za kapljevino znotraj odtočne cevi. Približno toliko so izmerili. Iz začetnega podatka izhaja tudi, da mora biti hitrost delov kapljevine zaradi preostalih tokov v posodi z radijem okoli 1 m pred začetkom poskusa manjša kot $5 \cdot 10^{-5}$ m/s, da se razvije iztočni vrtinec v pravi smeri.

Rowlandova primera z utežjo na vrvici, ki se navija na roko, potemtakem ni bila posrečena. Bolje je misliti na drobno utež na vrvici, ki teče skozi tanko cev. Z roko poženemo utež v tangentni smeri in z drugo roko počasi vlečemo vrvico skozi cev, da se vrvica na strani uteži krajša. Utež kroži čedalje hitreje, in sicer je njena kotna hitrost obratno sorazmerna s kvadratom razdalje od osi.

Janez Strnad

REŠITVE NALOG

NOVI NEZNANI LIKI - 2.del - Rešitev s str. 213



Začetni položaj želve je na slikah označen s krožcem.

Martin Juvan

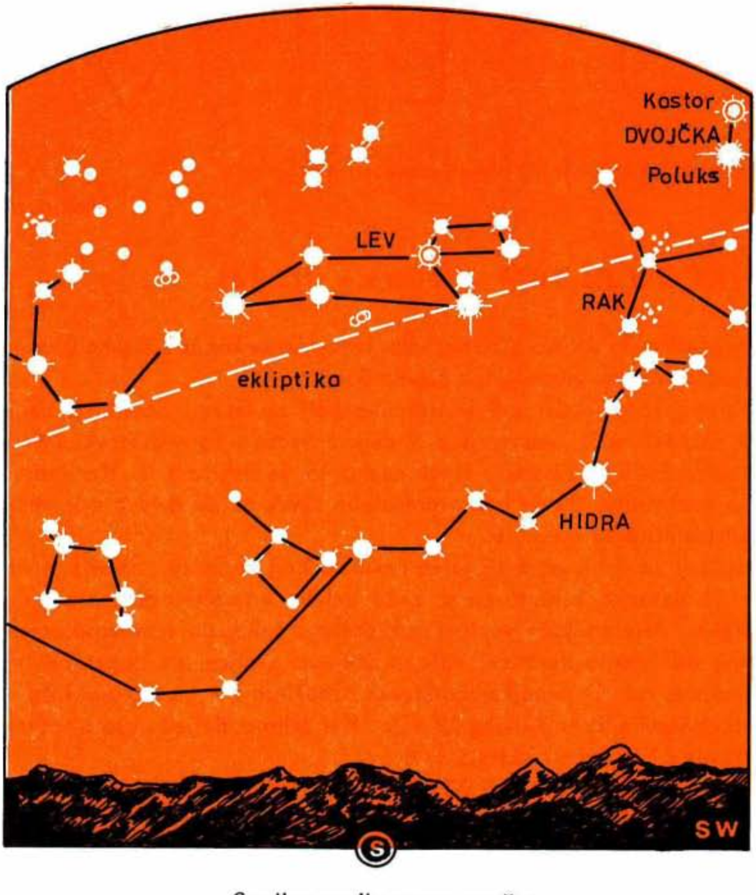
ŠTEVKE TU IN TAM - Rešitev s str. 223

1. Ker je število deljivo z 10 natanko tedaj, ko se konča s števko 0, moramo vprašaj seveda zamenjati s števko 0.
2. Kriterij za deljivost z 9 je nekoliko bolj zapleten. Število je deljivo z 9 natanko tedaj, kadar je z 9 deljiva vsota njegovih števk. Ker ima število 246897531 vsoto števk enako 45, je deljivo z 9. Ker mora tudi po odstranitvi števke vsota preostalih števk ostati deljiva z 9, moramo odstraniti prav števko 9.
3. Kriterij za deljivost z 11 je še nekoliko bolj zapleten. Število je deljivo z 11 natanko takrat, ko je z 11 deljiva alternirajoča vsota njegovih števk. Alternirajočo vsoto števk dobimo tako, da vzamemo enice, od njih odštejemo desetice, nato prištejemo stotice, pa zopet odštejemo tisočice, itd. Če manjkajočo števko označimo z x, je alternirajoča vsota števk števila $5x4x3$ enaka $12-2x$. Ker želimo, da je ta vsota večkratnik števila 11, je edina izbira $x=6$.
4. Pozorno poglejmo račun $327618+2976=61944$. Od kod lahko vzamemo števko in kam jo moramo prenesti? Ker ima prvo število več mest kot drugo in tudi več mest kot rezultat, operacija v računu pa je seštevanje, mu moramo števko odvzeti. Vendar je ne smemo vriniti na desno stran, saj bi ta postala prevelika. Edina možnost je torej, da števko odvzamemo prvemu številu in jo vrinemo v drugo. Z nekaj poskušanja odkrijemo edino rešitev: števko 1 iz prvega števila moramo vriniti med števki 9 in 7 v drugem številu.

Martin Juvan

OSLA

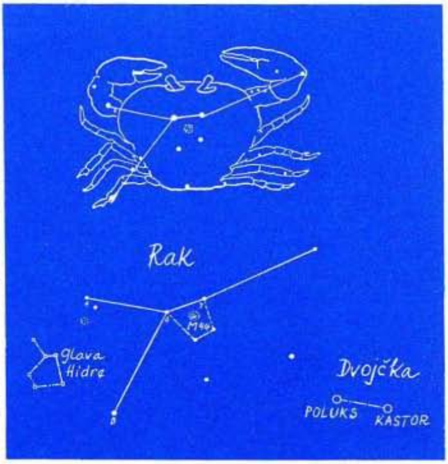
Ozvezdje Rak sestavljajo same šibke zvezde. Samo ozvezdje je zelo nerazločno, zato ga težko razpoznamo. Če pa se dobro pripravimo na opazovanje in smo vztrajni, ga v jasni brezlunini spomladanski noči izsledimo med ozvezdjema Lev in Dvojčka.



Sredina aprila pozno zvečer

Slika 1. Lega ozvezdja Rak na spomladanskem nebu. Z dobro pripravo ali nekaj izkušenj ga izsledimo približno na sredini med zvezdo Regulus (α Leva) in zvezdama Kastor in Poluks (Dvojčka).

V ozvezdju Rak leži zelo znana zvezdna kopica *Jasli* (M 44). To je ena najlepših razsutih ali odprtih zvezdnih kopic. Tisti z zelo ostrim vidom jo utegnejo videti s prostim očesom, sicer pa jo dobro vidimo že z manjšim lovskim daljnogledom, v močnejšem daljnogledu pa je videti prav sijajna. V njej lahko naštejete od 30 do 40 zvezd. Fotografija jih pokaže še dosti več.



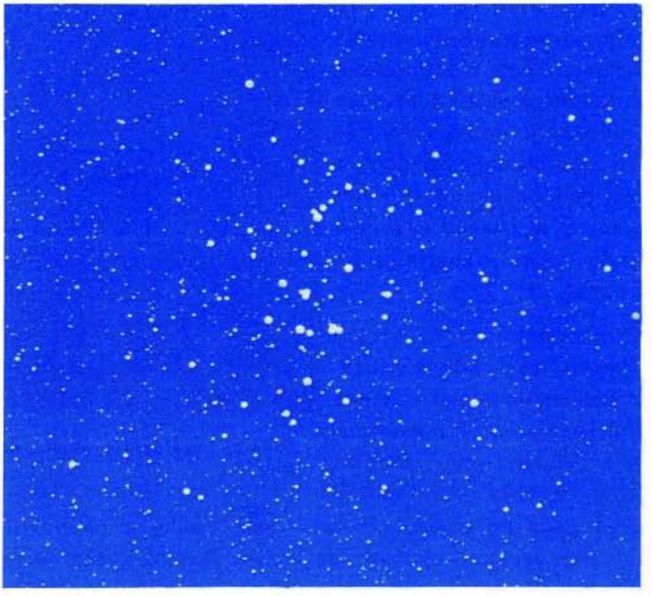
Slika 2. Lega Jasli in obeh Oslov v ozvezdju Rak.

Stari astronomi so to kopico imeli za zvezdo, res da bolj razmazano. V zvezdnem katalogu velikega tadžikistanskega pesnika in astronoma Omarja Hajjama (ok. 1040 do 1123) so to "zvezdo" poimenovali kot *Srednja pega na oklepu* (Raka). Šele Galilei je okoli 1610 s svojim preprostim daljnogledom ugotovil, da je tam skupina zvezd. V njej je naštel 36 zvezd.

V slovenščino je ime Jasli prišlo iz posrednega prevoda grške besede Fatnes v latinsko Praesepe, kar pomeni krmilnica (korito za živino) ali jasli. Tako poimenovanje je prav smiselno, saj v bližini Jasli ležita dve zvezdi Gama in Delta Raka, imenovani *Osla*. Oba naj bi se hranila pač pri jaslih. Zvezdo Gama pogosto imenujejo tudi Severni osel, zvezdo Delta pa Južni osel, obe pa tudi Osel in Oslica. Kako sta Osla prišla na nebo, pripoveduje naslednja mitološka zgodba.

Bogu vina, vinogradništva in veselja Dionizu je pijača tako zmešala glavo, da je ponorel. Da bi se pozdravil, se je odpravil v Zevsovo svetišče. Pot, po kateri je šel, ga je pripeljala do obsežnega močvirja. Razmišljal je, kako bi prišel čez, da si ne bi zmočil nog. V bližini sta se pasla osla. Eden od njiju ga je prostovoljno ponesel čez. V zahvalo za to uslugo je sončni bog Apolon, ki je bil zelo naklonjen Dionizu, spremenil oba osla v zvezdi. Postavil ju je na nebo v bližino nebesne krmilnice, da bi bila za večno preskrbljena s hrano.

Severni osel (Asellus Borealis) in Južni osel (Asellus Australis) sta torej dve zvezdi blizu zvezdne kopice Jasli, ki v tej zgodbi predstavlja krmilnico, pri kateri naj bi se osla hranila.



Slika 3. Zvezdna kopica M 44 - Jasli, ki leži v sredini ozvezdja Rak. Od nas je oddaljena dobrih 500 svetlobnih let. V zelo jasnih nočeh brez Lune jo je mogoče videti s prostim očesom kot drobno, komaj vidno svetlobno pegico. Opazujte to prelepo kopico z daljnogledom in poskusite izslediti Osla.

Namen prispevka je spodbuditi k opazovanju zvezdnega neba. Zato predlagamo, da poskusite najprej:

- s prostim očesom izslediti ozvezdje Rak (če vam to uspe, vam že čestitam);
- nato z daljnogledom opazovati prekrasno zvezdno kopico Jasli (če vam uspe še prešteti kakih 20 zvezd v njej, ponovno čestitam)
- in končno z daljnogledom izslediti oba Osla (če pa vam še to uspe, ste že strokovnjak v opazovalni astronomiji).

Vsa tri predlagana opazovanja so res nekoliko zahtevna, vendar jih ni težko izvesti, če se ravnate po napotkih, navedenih v tem prispevku, ste zavzeti in imate veselje do raziskovanja.

Marijan Prosén

NALOGE

POPOTOVANJE Z LETALOM

Svetovni popotnik Mavricij ima spet čas in denar! Tokrat se je odločil za popotovanje po Ajski, Betanu, Ceniji, Deneji, Eziji in F'nanonu. Pri tem namerava uporabljati zgolj letalske povezave med njimi. Žal pa nimajo prav vse države medsebojnih letalskih povezav, zato si je Mavricij napravil njihov spisek:

	Ajska	Betan	Cenija	Deneja	Ezija	F'nanonj
Ajska		◊				◊
Betan			◊	◊		◊
Cenija				◊		
Deneja					◊	◊
Ezija						◊
F'nanon						

Z znakom ◊ je označil obstoječe linije, ki potekajo v vseh primerih v obe smeri. Kmalu zatem pa je še "ugotovil", da pravzaprav ne bi bilo zanimivo obiskati samo vseh šest držav, pač pa tudi izkoristiti za vožnjo vseh devet navedenih linij (vsako samo enkrat) - pa četudi bi bilo treba pri tem kakšno državo obiskati večkrat.

Na koliko različnih načinov lahko izvede Mavricij to nenavadno potovanje?

Vilko Domajnko

BARVANJE KOCK

Taborniki tekmujejo v barvanju kock. Eno stranico kocke lahko tabornik pobarva v 5 sekundah. Kolikšen je najkrajši čas, v katerem lahko ekipa 3 tabornikov pobarva 4 enake kocke, če upoštevamo, da dva tabornika ne moreta barvati istočasno iste kocke?

Dragoljub M. Milošević - prev. in prir. Barbara Japelj

PALIČICE -Rešitev s str. 222

List papirja obrnemo za 180°. (Dobimo X = I + IX .)

Dragoljub M. Milošević - prev. in prir. Barbara Japelj

ZA PRAVE UPORABNIKE

Gotovo poznate grafično okolje Windows. Ste se že kdaj vprašali, kaj je najkoristnejša stvar, ki jo je prineslo to okolje? No, odgovor ni preprost. Nekateri so mnenja, da je najpomembnejša pridobitev enostavno upravljanje programov z miško, drugi mislijo, da je pomembnejši lep izgled programov (ikone, menuji, dialogi), tretji spet hvalijo možnost poganjanja več programov istočasno (vsak program v svojem oknu). Vendar pa sta med "pravimi" uporabniki mogoča le dva odgovora: pasjansa (igra `Solitaire`) ali mine (igra `Minesweeper`).

Po tehtnem razmisleku sva se odločila, da so mine pomembnejša pridobitev. Naj to izbiro nekoliko pojasniva. Izkušen igralec min mora imeti kopico danih in pridobljenih umskih in motoričnih spretnosti, ki mu vse koristijo tudi pri običajnem delu: odlično tehniko dela z miško, izostren vid, dobro orientacijo in izvrsten pregled nad zaslonom, hitre in pravilne reakcije, jeklene živce, popolno koncentracijo in seveda poudarjeno zmožnost logičnega sklepanja. Z nekaj vaje potem ni težko doseči časov okoli 50 sekund na srednjem in 180 sekund na velikem minskem polju. Toda če želimo postati izkušeni in uspešni igralci, skratka pravi uporabniki, ki dosegajo čase, ki so približno za tretjino boljši od omenjenih, samo gornje lastnosti ne zadoščajo. Potrebno je vsaj še brezhibno avtomatično prepoznavanje tipičnih osnovnih razporeditev, ki nastopijo med igranjem.

Da vam olajšava prehod med prave uporabnike, sva se odločila sestaviti kratek pregled nekaterih osnovnih razporeditev, ki se večkrat pojavijo med igranjem. Seveda bo potrebno še precej vaje in dodatnega dela, da boste dosegli želeno spretnost in zanesljivost.

Pravila igre in označevanje

Mine igramo na pravokotni mreži, ki predstavlja minsko polje. Na začetku jo sestavljajo sama zaprta polja. Na nekaterih poljih so skrite mine. Naloga igralca je označiti vsa tista polja, pod katerimi so skrite mine, in odpreti vsa ostala polja. Pri iskanju min so nam v pomoč številke, ki jih vidimo v odprtih poljih. Številka nam pove, koliko min je na sosednjih poljih (možne vrednosti so od 1 do 8). Namesto odprtega polja s številko 0 vidimo prazno polje. Povejmo še, da je srednje minsko polje velikosti 16×16 in skriva 40 min, veliko pa meri 30×16 polj in ima 99 min. Na srednjem polju tako mine pokrivajo dobrih 16% površine, na velikem pa dobrih 20%. Ker je veliko polje večje in bolj zapolnjeno z minami, je seveda njegovo čiščenje precej bolj zamudno in zahtevno.

Za prikaz razporeditev na minskem polju bomo uporabljali naslednje oznake:

$\boxed{1}$, ..., $\boxed{8}$	odprto polje z določeno številko,
$\boxed{\circ}$	odprto polje s katerokoli številko,
$\boxed{\times}$	zaprto polje,
$\boxed{\bullet}$	označeno polje (tu je mina).

Da poenostavimo razlago, bomo na slikah stolpce označili s števili, vrstice pa s črkami.

Osnovne razporeditve

Vsak začetnik takoj ugotovi, da se mu takrat, ko je okoli odprtega polja s številko n natanko n zaprtih ali označenih polj, izplača označiti vsa zaprta polja. Prav tako mora tedaj, ko je okoli odprtega polja s številko n že n označenih polj, odpreti vsa še zaprta polja.

Veliko je igralcev, ki pri iskanju min uporabljajo samo zgornji osnovni pravili. Slej ko prej pa se pojavi razporeditev, v kateri nobenega od teh pravil ne moremo več uporabiti. Tedaj lahko poskusimo "na slepo" odpreti kako zaprto polje in nadaljevati z osnovnima praviloma. Vendar se takšni poskusi ponavadi nesrečno končajo. Bolj varno je v nastali situaciji malo premisliti: "Če označim to polje, potem lahko odprem sosednji dve; vendar obeh hkrati ne smem odpreti, ker mi potem okoli tistega polja ostane premalo zaprtih polj, torej začetnega polja ne smem označiti in ga lahko zato odprem." Razložimo natančneje nekaj podobnih premislekov:

	1	2	3	
A	×	○	○	
B	×	1	○	
C	×	2	○	
D	×	○	○	

Slika 1.

	1	2	3	
A	○	○	×	
B	•	3	×	
C	○	2	×	
D	○	○	×	

Slika 2.

1. Poglejmo sliko 1. Dvojka na polju $C2$ pravi: "Na poljih $B1$, $C1$ in $D1$ sta natanko dve mini." Ker pa na obeh poljih $B1$ in $C1$ zaradi enice na polju $B2$ ne moreta biti mini, je ena mina na polju $D1$. Druga je torej

na polju $B1$ ali $C1$. Ker pa sta ti dve polji sosednji s poljem $B2$, na katerem je enica, je polje $A1$ prazno.

2. Razporeditev s slike 2 lahko razrešimo podobno kot prejšnjo. Mina na polju $B1$ vpliva na številki na poljih $B2$ in $C2$. Če je ne bi bilo, bi bili številki za ena manjši, tako dobljena razporeditev pa ravno za 180 stopinj zasukana razporeditev s slike 1. Prilagojen prejšnji sklep tako pove, da je mina na polju $A3$, polje $D3$ pa je prazno. Pozorni bralec je gotovo opazil, da vse povedano velja tudi tedaj, ko je mina namesto na polju $B1$ na polju $C1$.

	1	2	3
A	∘	∘	∘
B	∘	1	∘
C	×	1	×
D	×	×	×

Slika 3.

	1	2	3
A	∘	∘	∘
B	×	a	×
C	×	a	×
D	×	×	×

Slika 4.

3. Oglejmo si sliko 3. Enica na polju $B2$ pravi: "Na poljih $C1$ in $C3$ je natanko ena mina." Enica na polju $C2$ pa pravi: "Na poljih $C1$, $C3$, $D1$, $D2$ in $D3$ je natanko ena mina." Od tod lahko sklepamo, da na poljih $D1$, $D2$ in $D3$ ni nobene mine, saj je edina že na polju $C1$ ali $C3$. Vsa tri polja $D1$, $D2$ in $D3$ lahko torej brez skrbi odpremo.

4. Kaj pa lahko sklepamo iz razporeditve s slike 4? Pravzaprav je to samo posplošitev prejšnjega primera. Številka a na polju $B2$ pravi: "Na poljih $B1$, $B3$, $C1$ in $C3$ je natanko a min." Številka a na polju $C2$ pa pravi: "Na poljih $B1$, $B2$, $C1$, $C3$, $D1$, $D2$ in $D3$ je natanko a min." Torej na poljih $D1$, $D2$ in $D3$ ni nobene mine, saj je a min že na poljih $B1$, $B3$, $C1$ in $C3$. Zato lahko hitro odpremo polja $D1$, $D2$ in $D3$.

	1	2	3	4	5
A	∘	∘	∘	∘	∘
B	∘	1	2	1	∘
C	×	×	×	×	×

Slika 5.

	1	2	3	4	5	6
A	∘	∘	∘	∘	∘	∘
B	∘	1	2	2	1	∘
C	×	×	×	×	×	×

Slika 6.

5. Kaj lahko povemo o razporeditvi na sliki 5? Če bi bila na polju $C3$ mina, potem bi morali biti zaradi enic na poljih $B2$ in $B4$ polji $C2$ in $C4$ prazni. To pa ni mogoče, ker morata biti na poljih $C2$, $C3$ in $C4$ natanko dve mini. Torej je polje $C3$ prazno. Sedaj lahko nadaljujemo z osnovnima praviloma, kar nam na koncu da še označeni polji $C2$ in $C4$ ter odprti polji $C1$ in $C5$. Morda ste opazili, da bi lahko gornjo razporeditev razrešili tudi s pomočjo slike 1 in osnovnih pravil.

6. Razporeditev na sliki 6 je podobna tisti s slike 5. Tudi razmišljamo lahko na podoben način, kar nas pripelje do naslednje ugotovitve: označiti je treba polji $C3$ in $C4$, odpreti pa polja $C1$, $C2$, $C5$ in $C6$.

	1	2	3	4	5
A	×	×	×	×	×
B	×	1	2	1	×
C	×	×	×	×	×

Slika 7.

	1	2	3	4
A	×	×	×	•
B	×	1	2	○
C	×	×	×	○

Slika 8.

7. Razmislek o razporeditvi na sliki 7 prepuščava bralcu. Najbrž ne bo težko ugotoviti, da lahko odpremo polja $A1$, $A3$, $A5$, $B1$, $B5$, $C1$, $C3$ in $C5$. Vendar pa tokrat za razliko od razporeditve s slike 5 ne moremo določiti, pod katerima poljema se skrivata mini.

8. Razporeditev na sliki 8 se med čiščenjem kar pogosto pojavi. Razrešimo jo podobno kot prejšnje. Ker je na polju $A4$ mina, številka 2 na polju $B3$ pove, da je na poljih $A2$, $A3$, $C2$ in $C3$ natanko ena mina. Ker so vsa ta polja sosednja s poljem $B2$, na katerem je enica, morajo biti polja $A1$, $B1$ in $C1$ prazna. Mimogrede tudi opazimo, da bi mina namesto na polju $A4$ lahko bila tudi na polju $B4$ ali $C4$.

	1	2	3	4	5
A	×	×	×	○	○
B	×	*a*	×	*a*	○
C	×	×	×	○	○

Slika 9.

	1	2	3	4
A	×	×	×	×
B	•	2	2	○
C	○	○	○	○

Slika 10.

9. Razporeditev s slike 9 na prvi pogled ni podobna nobeni od prejšnjih, saj vsebuje (morebitno) osamljeno polje $B2$. Vendar tudi tokrat razmislek ni težak. Številka a na polju $B4$ pove, da je na poljih $A3$, $B3$ in $C3$ natanko a min. To pa so tudi vse mine, ki jih potrebuje številka a na polju $B2$. Torej lahko brez strahu odpremo polja $A1$, $A2$, $B1$, $C1$ in $C2$.
10. Razporeditev s slike 10 gotovo prepoznate. Gre za na zelo podoben način kot na sliki 2 spremenjeno (in zasukano) razporeditev s slike 1. Polje $A1$ je torej prazno, na polju $A4$ pa je mina.

	1	2	3
A	×	×	×
B	×	2	×
C	×	5	×
D	×	×	×

Slika 11.

	1	2	3	4
A	∘	∘	∘	×
B	∘	∘	2	×
C	•	2	2	×
D	∘	×	×	×

Slika 12.

11. Če pogledamo sliko 11, opazimo, da sta lahko na poljih $B1$, $B3$, $C1$ in $C3$ največ dve mini. Ker je na polju $C2$ številka 5, moramo označiti polja $D1$, $D2$ in $D3$. Številka 5 tudi zahteva, da sta še dve mini na poljih $B1$, $B3$, $C1$ in $C3$. Torej so polja $A1$, $A2$ in $A3$ prazna. Na gornjo razporeditev v prikazani obliki redko naletimo, večkrat pa jo srečamo, ko je nekaj polj okoli dvojke že odprtih.
12. Oglejmo si še zadnjo sliko. Ker je na polju $C1$ mina, na polju $C2$ pa številka 2, je na poljih $D2$ in $D3$ natanko ena mina. Številka 2 na polju $C3$ ima torej eno mino na polju $D2$ ali $D3$, druga pa je na enem od polj $D4$, $C4$ ali $B4$. Ker je na poljih $B4$ in $C4$ največ ena mina, nam številka 2 na polju $B3$ pove, da je na polju $A4$ mina. Če ponovno pogledamo številko 2 na polju $C3$, vidimo, da ima prvo mino na enem od polj $D2$ ali $D3$, drugo pa na enem od polj $B4$ ali $C4$. Polje $D4$ je zato prazno in ga lahko odpremo.

To je bil pregled nekaterih razporeditev, ki se pogosto pojavijo med igranjem. Seveda moramo upoštevati, da se lahko vsaka od teh razporeditev pojavi tudi drugače zasukana ali prezrcaljena, lahko pa leži tudi ob robu mreže. V zadnjem primeru je treba na rob gledati, kot da so tam odprta polja, le da ne poznamo številk, ki so zapisane v njih. Seveda pa se kljub uporabi zgornjih pravil lahko zgodi, da moramo včasih polja odpirati "na slepo".

Naj dodava še nekaj nasvetov za tiste, ki bi radi dosegali čim boljše čase. Izključite možnost označevanja polj z vprašaji. Pri hitrem igranju se namreč pogosto zgodi, da kakšno polje napačno označimo. Ko želimo oznako spremeniti, je dovolj, da ga kliknemo samo enkrat (namesto dvakrat, kolikorkrat ga je treba, če je označevanje z vprašaji vključeno). Uporabljajte barvni monitor. Igrali boste precej lažje in bolj zanesljivo, saj je v barvah minsko polje veliko bolj pregledno. Pazite tudi, da pri igri ne "preobremenite" miške.

Zdaj morate samo še prižgati računalnik in začeti nabirati izkušnje. Vendar pazite, da ne stopite na mino.

Martin Juvan, Matjaž Zaveršnik

DVE VPRAŠANJI ZA FIZIKE IN ASTRONOME

1. Vsako jutro si skuham kavo. Lonček z vodo dam na plinski gorilnik in voda se segreva dokaj hitro, brez kakega vidnega izparevanja. Ko je voda že precej vroča ($T \approx 90^\circ$ C), zaprem plin. Točno takrat pa se začne iz lončka močno kaditi. Pojava ne razumem; imam sicer več domnev, pa se mi nobena ne zdi preveč prepričljiva. Zato predlagam eksperimentalcem med bralci Preseka, da pojav proučijo in razložijo.

2. Vzel sem v roke Presekove astronomske efemeride za leta 1983 - 89 in v rubriki Pregled nebesnih pojavov poiskal čase perihelijev (perihelij je točka, v kateri je Zemlja Soncu najbliže). Ti časi so:

   2. 1. 1983 ob 17. uri
   3. 1. 1984 ob 23. uri
   3. 1. 1985 ob 21. uri
   2. 1. 1986 ob 6. uri
   4. 1. 1987 ob 23. uri
   4. 1. 1988 ob 1. uri
   1. 1. 1989 ob 23. uri.

   Časi od enega do drugega perihelija bi morali biti enaki, namreč 365 d 6 h, saj je gibanje Zemlje okoli Sonca v okviru naše natančnosti popolnoma periodično. Namesto tega pa dobimo po vrsti: 366 d 6 h, 365 d 22 h, 363 d 9 h, 367 d 17 h, 364 d 2 h, 363 d 22 h.
   Kje je vzrok te sistematične nepravilnosti? Mimogrede, tudi afeliji (v začetku julija) so nametani enako nepravilno.

Anton Cedilnik

KAKO RAZREŽEMO KVADRAT NA TRIKOTNIKE Z RACIONALNIMI STRANICAMI

Kvadrat s stranico a ima diagonalo $d = a\sqrt{2}$. Ker je $\sqrt{2}$ iracionalno število, je razmerje med diagonalo in stranico kvadrata iracionalno. Če se torej stranica a izraža z racionalnim številom, se diagonala d z iracionalnim in obratno, pri racionalnem d je a iracionalen.

Diagonala razdeli kvadrat na dva enaka trikotnika. Po pravkar povedanem ta dva trikotnika nimata nikoli vseh stranic racionalnih. Ali se da morda kvadrat razrezati na več trikotnikov, ki imajo vsi same racionalne stranice? Denimo, da smo neki kvadrat tako razrezali. Njegova stranica je v tem primeru racionalna, ker je vsota nekaterih stranic trikotnikov, ki sestavljajo kvadrat, namreč tistih, ki leže na stranici kvadrata. Zaznamujmo z v najmanjši skupni imenovalec vseh ulomkov, s katerimi se izražajo dolžine stranic teh trikotnikov. Če pomnožimo stranico kvadrata in stranice vseh trikotnikov z v, dobimo večji kvadrat, ki je razrezan na trikotnike, podobne trikotnikom, s katerimi smo razrezali prvotni kvadrat. Vse stranice so zdaj cela števila. Če pa delimo vse stranice trikotnikov z dolžino stranice kvadrata, dobimo kvadrat s stranico $a = 1$, ki je spet na podoben način razrezan na trikotnike, toda le-ti nimajo več celih temveč le racionalne stranice. Iz tega izhaja, da je naloga, razrezati kvadrat s stranico $a = 1$ na trikotnike z racionalnimi stranicami, enakovredna nalogi, poiskati kak kvadrat, ki se da razrezati na trikotnike s celimi stranicami.

Brez dokaza povejmo, da kvadrata ni mogoče razrezati na tri trikotnike z racionalnimi stranicami. Zato bi zaman iskali na osnovnici AB kvadrata s stranico $a = 1$ tako točko E, da bi bili razdalji te točke od oglišč C in D racionalni števili. Denimo namreč, da smo tako točko E našli (slika 1). Zaznamujmo $\overline{AE} = x$, tako da je $\overline{EB} = 1 - x$ (zaradi $\overline{AB} = a = 1$), nadalje $\overline{ED} = u$ in $\overline{EC} = v$. Iz pravokotnih trikotnikov AED in EBC dobimo po Pitagorovem izreku enačbi

$$1 + x^2 = u^2, \quad 1 + (1 - x)^2 = v^2.$$

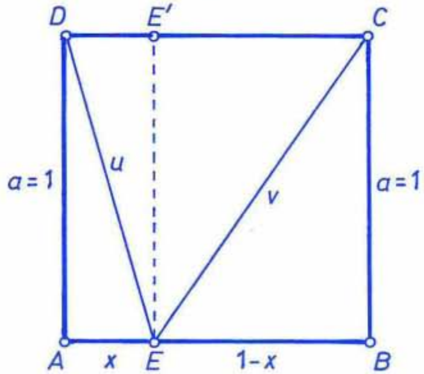
Če odštejemo drugo od prve, imamo

$$2x - 1 = u^2 - v^2,$$

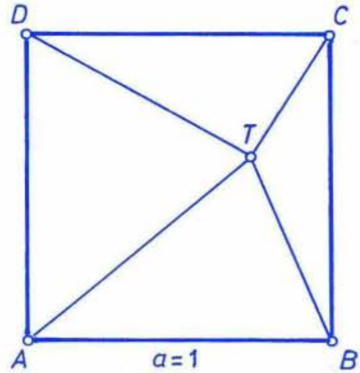
torej

$$x = \frac{1}{2}(u^2 - v^2 + 1).$$

Vidimo, da je pri racionalnih u in v tudi x racionalen. Kvadrat $ABCD$ razpade na tri trikotnike AED, EBC in ECD s samimi racionalnimi stranicami. Povedali pa smo, da kvadrata ni mogoče tako razrezati. Zato točke E z omenjeno lastnostjo na stranici AB ni. To dejstvo lahko izrazimo tudi takole: Kvadrat z racionalno stranico se ne dá razrezati na dva pravokotnika tako, da bi bile vse diagonale teh pravokotnikov racionalne. Če namreč razdelimo kvadrat $ABCD$ na pravokotnik $AEE'D$ z diagonalo u in pravokotnik $EBCE'$ z diagnoalo v (slika 1), sta u in v razdalji točke E od oglišč D in C. Ti razdalji pa nista nikoli obe racionalni.



Slika 1.



Slika 2.

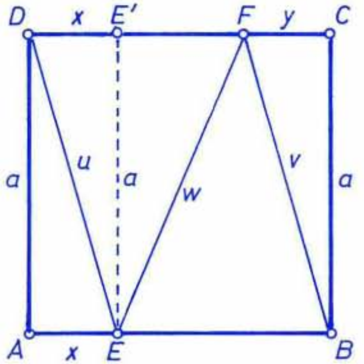
Poskušajmo zdaj rešiti nalogo s štirimi trikotniki. Imejmo spet kvadrat s stranico $a = 1$ in oglišči A, B, C, D. Če bi se nam posrečilo najti v njegovi notranjosti tako točko T, da bi bile razdalje te točke od vseh štirih oglišč racionalne, bi nalogo rešili: Trikotniki ABT, BCT, CDT in DAT z racionalnimi stranicami sestavljajo kvadrat $ABCD$ (slika 2). Žal ni znano, ali obstaja v ravnini kvadrata točka T, za katero so vse razdalje od oglišč racionalne. Po tej poti torej najbrž ne bomo uspeli.

Razrežimo zdaj kvadrat na štiri trikotnike, kakor kaže slika 3. Tu je spet E točka na osnovnici AB, F pa na nasprotni stranici CD. Kvadrat razpade na trikotnike AED, EBF, BCF in EFD. Morda lahko E in F izberemo tako, da se daljice $\overline{AE}, \overline{CF}, \overline{ED}, \overline{BF}$ in $\overline{EF}$ izražajo z racionalnimi števili? (Pri tem seveda privzamemo, da je stranica kvadrata $\overline{AB} = a$ racionalna.) V tem primeru imajo imenovani trikotniki vse stranice racionalne. Denimo, da se nam je to posrečilo. Kot smo omenili na začetku, lahko kvadrat primerno povečamo in s tem dosežemo, da se izražajo vse naštete daljice s celimi števili.

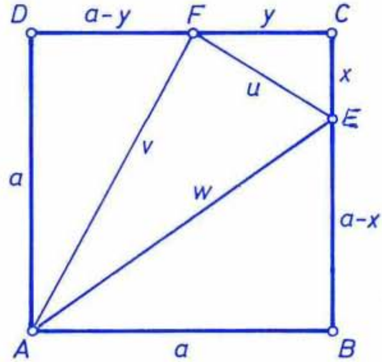
Zaznamujmo njihove dolžine takole:

$$\overline{AB} = a,\ \overline{AE} = x,\ \overline{CF} = y,\ \overline{ED} = u,\ \overline{BF} = v,\ \overline{EF} = w.$$

Ker leži E na daljici AB in F na CD, mora biti $x < a$ in $y < a$. Naj bo E' točka na stranici CD z lastnostjo, da je zveznica EE' vzporedna s stranico AD.



Slika 3.



Slika 4.

Iz pravokotnih trikotnikov AED, BCF in EFE' dobimo po Pitagorovem izreku enačbe

$$a^2 + x^2 = u^2,\ a^2 + y^2 = v^2,\ a^2 + (a - x - y)^2 = w^2. \tag{1}$$

(Kateta $E'F$ v trikotniku EFE' je enaka $|a - x - y|$.) Če nam uspe najti rešitev tega sistema enačb v naravnih številih a, x, y, u, v, w, pri kateri je $x < a$ in $y < a$, smo razrezali kvadrat s stranico a na štiri trikotnike s celimi stranicami, kakor kaže slika 3.

Sistem (1) sestavljajo tri enačbe, v njih pa nastopa kar šest neznank, torej več, kakor je enačb. Če ne postavimo nobenih pogojev glede narave neznank, zlahka dobimo nešteto rešitev: Za a, x in y izberemo poljubna števila in potem iz enačb (1) izračunamo u, v, w. Toda dobljeni u, v, w v splošnem ne bodo cela števila, tudi tedaj ne, kadar so a, x, y cela. Vzemimo npr. $a = 4$, $x = y = 3$. Iz (1) dobimo $u^2 = v^2 = 25$ in $w^2 = 20$, torej $u = v = 5$ in $w = \sqrt{20} = 2\sqrt{5}$. Števili u in v sta sicer celi, toda w je iracionalen. Vendar rešitve sistema (1) v naravnih številih obstajajo. Ena je npr.

$$a = 24,\ x = y = 7,\ u = v = 25,\ w = 26. \tag{a}$$

Ker je tu $x < a$ in prav tako $y < a$, določa ta rešitev razrez kvadrata s stranico $a = 24$ na štiri trikotnike s samimi celimi stranicami. Zaradi $x = y$ sta dva trikotnika tega razreza enaka, namreč AED in BCF, pa seveda tudi ostala dva. Podobna reštitev

$$a = 24,\ x = 7,\ y = 10,\ u = 25, v = 26,\ w = 25$$

pa nam dá razrez, pri katerem trikotnika AED in BCF nista enaka.

Če pomnožimo vsa števila a, x, y, u, v, w v kakšni celoštevilski rešitvi sistema (1) z istim naravnim številom, dobimo spet celoštevilsko rešitev tega sistema in z njo razrez kvadrata. Vendar ta razrez ni v bistvu nov, saj smo le kvadrat in trikotnike prejšnjega razreza podobno povečali. Brez dokaza povejmo, da premore sistem (1) nešteto rešitev v naravnih številih, kjer so a, x in y brez skupnega faktorja. Torej obstaja nešteto bistveno različnih razrezov kvadrata na trikotnike s celimi stranicami v smislu slike 3. Navedimo še eno rešitev. Precej velika je

$$a = 2280,\ x = 117,\ y = 1078,\ u = 2283,\ v = 2522,\ w = 2525. \qquad \text{(b)}$$

Poskušajmo rešiti nalogo še nekoliko drugače, in sicer tako, kakor kaže slika 4. Točki E in F izberemo zdaj na sosednjih stranicah BC in CD. Kvadrat potem razrežemo na štiri trikotnike ABE, ECF, AFD in AEF. Zaznamujmo

$$\overline{EC} = x,\ \overline{CF} = y,\ \overline{EF} = u,\ \overline{AF} = v,\ \overline{AE} = w.$$

Ker so ABE, ECF in AFD pravokotni trikotniki, veljajo enačbe

$$x^2 + y^2 = u^2,\ a^2 + (a - x)^2 = w^2,\ a^2 + (a - y)^2 = v^2. \qquad (2)$$

Spet iščemo rešitev tega sistema v naravnih številih a, x, y, u, v, w. Ker leži točka E na stranici BC in F na stranici CD, mora seveda biti $x < a$ in $y < a$.

Celoštevilska rešitev sistema (2) z razmeroma majhnimi števili je

$$a = 12,\ x = 21,\ y = 28,\ u = 35,\ v = 20,\ w = 15.$$

Žal za naš namen ni dobra, ker v njej nista x in y manjša od a. Pač pa rešitev

$$a = 960,\ x = 240,\ y = 161,\ u = 289,\ v = 1249,\ w = 1200 \qquad \text{(c)}$$

zadošča vsem pogojem in zato dá razrez kvadrata na štiri trikotnike s celimi stranicami v smislu slike 4.

Najmanjši pravokotni trikotnik s celimi stranicami ima kateti 3 in 4 ter hipotenuzo 5. Pri rešitvi (c) sta v trikotniku ABE kateti $\overline{BE}$ in $\overline{AB}$ v razmerju $720 : 960 = 3 : 4$ in je zato ta trikotnik podoben trikotniku s stranicami 3, 4, 5. Ali obstajajo rešitve, pri katerih je v trikotniku ECF razmerje katet $\overline{EC} : \overline{CF} = 3 : 4$? Obstajajo. Ena takih rešitev je

$$\begin{gathered} a = 11641212,\ x = 201621 = 3 \times 67207,\ y = 268828 = 4 \times 67207, \\ u = 336035,\ v = 16274180,\ w = 16321215. \end{gathered} \tag{d}$$

Piscu ni znano, ali je to najmanjša rešitev z omenjeno lastnostjo.

Kako pridemo do celoštevilskih rešitev sistemov (1) in (2)? S poskušanjem in nekoliko sreče bi verjetno kaj kmalu našli rešitev (a), s pomočjo žepnega računalnika morda tudi rešitev (b). Potrebovali pa bi izredno zmogljiv računalnik, da bi dobili s poskušanjem rešitev (d) sistema (2). Tu ne bomo opisali metod, ki nas privedejo do rešitev. Povejmo le tole: Pri obravnavanju sistemov (1) in (2) smemo privzeti, da je $a = 1$ in iščemo potem rešitve v racionalnih številih x, y, u, v, w. Tako sistem (1) kakor sistem (2) lahko prevedemo na eno samo enačbo. Ta enačba pa je taka, da zanjo obstajajo metode, ki omogočajo priti iz dane racionalne rešitve do nove racionalne rešitve. Če izhajamo iz neke začetne rešitve, ki jo po navadi uganemo, dobimo neskončno zaporedje različnih racionalnih rešitev.

Naloge.

1. V sistem (1) vstavimo $a = 7800, x = y = 2921$. Kakšni so pripadajoči u, v, w?
2. Razreži kvadrat na tri pravokotnike z racionalnimi stranicami in racionalnimi diagonalami!
3. Naj bodo naravna števila p, q, r pitagorejska trojica, se pravi, da je med njimi zveza $p^2 + q^2 = r^2$. Postavimo

$$a = pq,\ x = p(p+q),\ y = q(p+q).$$

Dokaži, da tako izbrani a, x in y določajo rešitev sistema (2) v naravnih številih. Kako se izražajo u, v, w? Ali dá ta rešitev razrez kvadrata v smislu slike 4?

Ivan Vidav

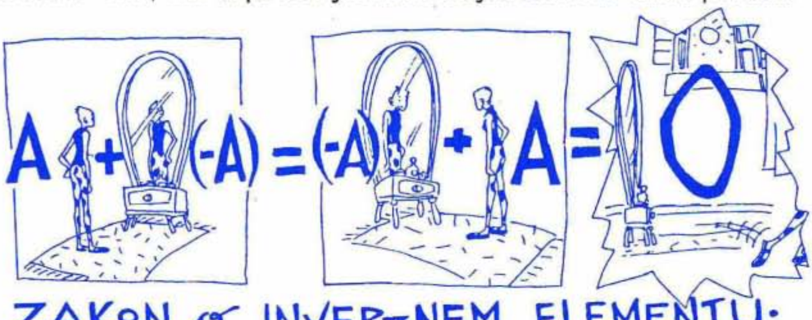
NOVE KNJIGE

Zlatko Šporer, MATEMATIČNI LEKSIKON ZA NEMATEMATIKE, prevedla Marija Vencelj, DMFA Slovenije, Knjižnica Sigma 56, Ljubljana 1994, 244 str.

Zlatka Šporerja, urednika Školske knjige v Zagrebu, že poznamo kot pisca imenitne knjige *Oh, ta matematika*, katere prevod v slovenščino je izšel v Presekovi knjižnici kot dvojna (5. in 6.) številka Preseka pred enajstimi leti. Mimogrede – knjigo je še vedno moč kupiti pri Komisiji za tisk DMFA Slovenije.

Prejšnji mesec je pri zbirki Sigma izšel prevod *Matematičnega leksikona* za nematematike, še ene izmed njegovih nenavadnih matematičnih knjig, namenjenih nematematikom. Že sam naslov je nenavaden, saj na kar 240 straneh uvaja samo 26 matematičnih gesel od aksioma in algoritma, preko funkcije, poligona, relacije in drugih, do vektorja in verjetnosti. Knjiga bi lahko z vso pravico nosila tudi naslov *Šestindvajset prvovrstnih učnih ur, primernih kot uvod v posamezna matematična poglavja.* Delo je v prvi vrsti namenjeno nematematikom; učencem, dijakom, njihovim staršem, ljubiteljem. Avtor v ljubeznivem pogovoru z namišljenimi učenci bralce na nevsiljiv način seznanja z novimi in manj novimi matematičnimi pojmi in s pretanjenim občutkom za pravšnjo mero konča z razlago tisti hip, ko postanejo stvari pretežke.

Kaj pa matematiki? Ti v knjigi ne bodo našli nič novega, mislim pa, da jim bo kljub temu všeč. Učitelji matematike utegnejo najti v njej pota, ki jih sami ubirajo pri pouku, morda pa tudi naleteti na idejo, ob kateri bodo pomislili: 'Aha, tole bi pa tudi jaz lahko svojim učencem takole povedal.'

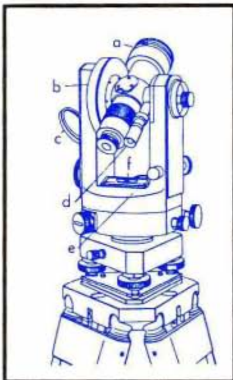


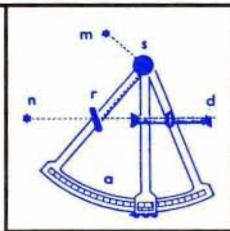
ZAKON O INVERZNEM ELEMENTU.

Knjigo dopolnjujejo duhovite in s tekstom tesno povezane ilustracije avtorja številnih stripov in risank Krešimirja Zimonića ter ilustratorke Magde Dulčić.

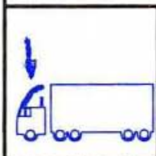
Marija Vencelj

ASTRONOMSKA KRIŽANKA



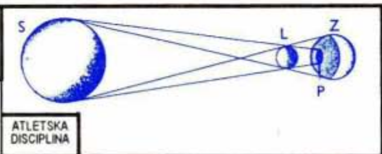


AVTOR MARKO BOKALIĆ
ŽENSKA, KI POKLICNO PEČE KRUH
PRIOČESNA LEČA PRI OPTIČNIH NAPRAVAH
MESTO JV OD TORINA
NIKOLA TESLA
KRADL
VSEBINSKO BISTVO
STAR PERZ. PESNIK
NJIVSKO STRAŠILO
VELIK NEBESNI KROG
ZNAK OSTRIVEC
OLIVER TWIST
SPARTAN. ELEGIK
MOČAN EKSPLOZIV
VR HIŠ



PREMOŽENJE PODJETJA
RUTENIJ
VESLAŠKI REKVIZIT
TONE LAPAJNE
POLJSKI ASTRONOM (NIKOLAJ)
OZNAKA PESCARE
MOČNA KRVAVITEV
IGRALKA MEŠKO
TIPKANA VISOKOŠOL. PREDAVANJA
ETILNI ALKOHOL
POLJ. FILM. REŽISER (ROMAN)
STARORIMSKI DRŽAVNIK
GR. ČRKA
ZIDARSKI DELOVODJA
STAF KOT
ŠV DF
PREDSTOJNIK SAMOSTANA
TIP AM. VESOLJSKIH PLOVIL
JAPONSKI DENAR (MNOŽINA)
IZOBRAŽ. USTANOVA
ZDRAVILO ZA ANGINO
EDVARD KOCBEK
KAMP PRI MALEM LOSINJU
LOJZE ROZMAN
MEDVEDEK VREČAR
RAČ. STROK. ZAKRAJŠEK
HRASTOVO LUBJE
AM. SKLAD. (JEROME)
VERGILOV JUNAK ENEJ (ORG.)
JUŽNOAM. INDIJANCI
OČE
ME PIR FF
OSLOV GLAS
ASTRONOM. MER. ENOTA
KRAVJI GLAS
PR POF

TVORBA NA LUNINEM POVRŠJU
ČLANICA SAMOSTAN. REDA
NOGOM. KLUB IZ MILANA

JIVEC	AMERIŠKA KUKAVICA						VRTNI ŠKODLJIVEC BRAMOR	STARE GERMANSKE PISMENKE	NAJVEČJI GRŠKI OTOK			
		ATLETSKA DISCIPLINA										
			MREŽASTA TKANINA ZA ZAVESE	LETNI POSEK GOZDA	SLOV. AMAT. ASTRONOM. DRUŠTVO	ČAPKOVA DRAMA						
						ŠVIC. PISEC, AVTOR "ARIANE" (CLAUDE)					USTANOVA ZA ASTRONOM. OPAZOVANJA	PREKLA
TNA ICA	MESTO NA JAP. OTOKU KJUŠUJU					ZVEZDNI UTRINEK / PRVI KRŠČ. ZAKRAMENT						
	MINISTER GABER / 3. OSEBA SR. SPOLA							ŠPANSKI VOJVODA V 16. STOL.				
			NEKD. ENOTA ZA ZRAČNI TLAK / LOVRO TOMAN					STROKOVNJAK ZA ŽIVA BITJA	ŠKOTSKA REKA / NRAVNO STROG ČLOVEK			
				ROMAN SAVNIK / TEČAJNA RAZLIKA			MESTO V ŠVICI					
. ASTR. OMER / EDSKI OBIŽ							ŽAREČ DROBEC					
	NEMŠKI ASTRONOM (JOHANNES)		ŽARKO IGNJATOVIĆ / REVNA ČETRT			JADRANSKI OTOK	KOVINSKA VEZ / INSTRUM. SKLADBA					VESOLJSKI IZSTRELEK
		KAČJI GLAS / REKA V NEMČIJI				GOLJUF / REŽISER HADŽIĆ						
					ANG. MERA, ČEVELJ / REKA V ČRNI GORI					TANTAL / IGRALEC CIGOJ		
TO POD ENEJI V JUŽNI ANCIJI				STARA KIT. DINASTIJA / HITER UMIK					DEL KROŽNICE / PTIČ PEVEC			
ED LETI ULAREN PLES / ELUR								ZAREBRNICA / ROMAN KONČAR				
			RDEČA KRVNIČKA									
			ZVEZDNI SESTAV									

CONRAD WILHELM RÖNTGEN

Ob stopetdesetletnici rojstva in stoletnici žarkov X

Od vseh obletnic v letu 1995 bo največ pozornosti pritegnila dvojna Röntgenova. Röntgen, ki je bil rojen pred poldrugim stoletjem, je pred stoletjem odkril žarke X.

V zadnjem desetletju prejšnjega stoletja so si sledila odkritja, ki so veliko prispevala k znanju o zgradbi snovi. Leto po Röntgenovemu odkritju je Henri Becquerel odkril radioaktivnost in dve leti pozneje so John Joseph Thomson in drugi odkrili elektron.

Conrad Wilhelm Röntgen (slika 1) je bil rojen leta 1845 v Lennepu ob Reni. Kmalu se je družina preselila v nizozemski Apeldoorn. Po študiju na Nizozemskem se je Röntgen odpravil študirat strojništvo na državno tehniško visoko šolo v Zürichu. Tu je bil njegov učitelj najprej Rudolf Clausius in nato August Kundt. Diplomiral je leta 1868 in naslednje leto doktoriral na univerzi v Zürichu. Postal je asistent pri Kundtu, z njim je prešel na univerzo v Würzburgu in nato na univerzo v Strassburgu. Leta 1875 je Röntgen postal profesor na univerzi v Giessnu. Nato je predaval na drugih nemških univerzah in se leta 1888 vrnil na univerzo v Würzburgu, kjer je bil prej Kundtov asistent.

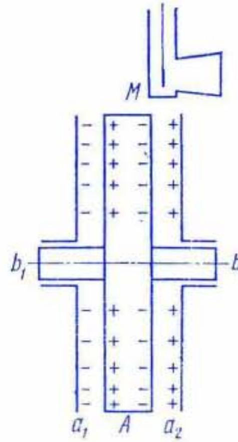
Slika 1. Conrad Wilhelm Röntgen (1845 do 1927)

Tam mu je proti koncu leta 1895 uspelo odkritje, zaradi katerega je postal v kratkem času znan po vsem svetu. Röntgen je bil spreten amaterski fotograf in je naredil z novimi žarki več fotografij. Priložil jih je kopijam svojega članka, ki ga je poslal znanim fizikom. V kratkem so delali poskuse z žarki po vsem svetu. Takoj so uvideli njihovo uporabnost v medicini. Marsikatera kronana glava se je zanimala zanje in želela videti poskuse z žarki. Tudi Röntgena, ki je odklanjal vsa povabila na predavanja, da bi lahko nemoteno nadaljeval delo v laboratoriju, je cesar Wilhelm II povabil na dvor. Kot vse druge je tudi Röntgena skrbelo, da bo šlo pri poskusih kaj narobe. Tedanje cevi so bile zelo občutljive in vsako novo cev je bilo treba evakuirati več dni. Toda poskusi pred cesarjem so lepo uspeli. Noben fizik se ni pritožil, da bi mu šlo kaj narobe, ko je moral v podobnih okoliščinah delati poskuse z Röntgenovimi žarki. Po tem je imel Röntgen o žarkih samo še javno predavanje, na katerem ga je spremljalo viharno odobravanje.

Leta 1896 so objavili več kot tisoč člankov o žarkih. Röntgen sam je napisal o njih le še dva, nato se je vrnil k drugim poskusom. Leta 1900 je postal direktor inštituta za eksperimentalno fiziko v Münchnu. Naslednje leto so mu podelili prvo Nobelovo nagrado za fiziko. Leta 1914 je podpisal deklaracijo, s katero so nekateri nemški raziskovalci podprli vojne cilje oblasti, a je pozneje ta korak obžaloval. Precej sta ga prizadeli prva svetovna vojna in inflacija, ki ji je v Nemčiji sledila. Umrl je leta 1923 v Münchnu.

Röntgen je naredil še druge poskuse. Poleg merjenja specifičnih toplot je znan predvsem poskus iz leta 1888. Z njim je pokazal, da ima gibajoč se naelektren izolator enak učinek kot električni tok po vodniku (slika 2). To se zdi danes razumljivo samo po sebi, a tedaj ni bilo tako. Ne gre pozabiti, da je prej Michaela Faradaya stalo precej truda, preden se je prepričal, da je električni tok, ki ga požene Voltov člen, v osnovi enak električnemu toku v stroju za elektrenje.

Do odkritja Röntgenovih žarkov je pripeljalo raziskovanje električnega toka v plinih. Michael Faraday je že leta 1838 opazoval razelektrenje teles v razredčenih plinih. Sredi šestdesetih let so naredili prve razredčevalke, s katerimi so zmanjšali zračni tlak v steklenih ceveh na milibar. Nemca Julius Plücker in Johann Wilhelm Hittorf sta začela



Slika 2. Poenostavljena risba naprave, s katero je Röntgen leta 1888 ugotovil magnetno polje gibajočega se naboja na izolatorju. Steklen ali ebonitni valj (A) se je vrtel med ploščama (a_1 in a_2) kondenzatorja. Magnetnica (M) je z odklonom pokazala magnetno polje. Natančnost pa je bila preslaba, da bi bilo mogoče določiti, kako je gostota magnetnega polja odvisna od frekvence valja in drugih podatkov.

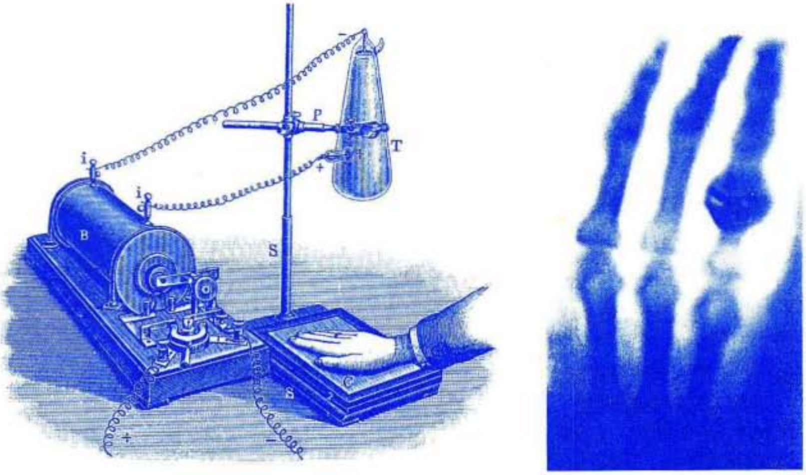
opazovati tok po takih ceveh, v katere sta vtalila dve elektrodi: katodo in anodo. Prvi je ugotovil, da se steklena cev v bližini katode svetlika, drugi pa, da se s katode premo širijo "žarki". Eugen Goldstein jih je imenoval *katodne žarke.* O naravi teh žarkov je tekla razgreta razprava. Anglež William Crookes jih je imel za molekule, večina pa je tej zamisli nasprotovala. John Joseph Thomson je leta 1897 z odklanjanjem katodnih žarkov v električnem in magnetnem polju pokazal, da jih sestavljajo negativno naelektreni delci, ki jih zdaj imenujemo elektrone.

Katodne žarke so raziskovali v vseh fizikalnih laboratorijih, ki so kaj dali nase. Preden se je Röntgen lotil raziskovanja, je poiskal nasvet pri najbolj izkušenem raziskovalcu katodnih žarkov Philippu Lenardu. Leta 1894 mu ni bilo treba več izdelati lastne cevi, kakor so si jo izdelali dotlej vsi raziskovalci, ker so tedaj prišle na tržišče prve Lenardove cevi. S kupljeno cevjo je najprej ponovil Lenardove poskuse. Lenard je cev pregradil s tankim aluminijevim lističem in ločil del cevi, v katerem so žarki nastali, od dela, v katerem je delal z njimi poskuse. Ugotovil je tudi, da žarki lahko izstopijo skozi aluminijevo okence na prosto.

Potem je Röntgen postal rektor univerze v Würzburgu in mu za raziskovanje ni preostalo nič časa. Proti koncu leta 1895 pa se je znova lotil poskusov s Hittorfovo cevjo. Nekega novembrskega večera je cev pokril s črno lepenko in delal poskuse v zatemnjenem laboratoriju. Nedaleč od cevi je na mizi ležal z raztopino barijevega platincianida namazan list. Na Röntgenovo presenečenje se je list zasvetil, ko je priključil cev na napetost. Sklepal je, da je nekaj zadelo papir in povzročilo njegovo sevanje. Zaradi črne lepenke to niso mogli biti ne katodni žarki ne vidna svetloba. Röntgen je pojav podrobneje raziskal. Papir se je svetil tudi, ko ga je Röntgen oddaljil od cevi. Svetil se je tudi še, ko je dal med njega in cev razne predmete. Na njem se je pokazala slika kosti, ko je premaknil predenj roko (slika 3). Tako je odkril "novo vrsto žarkov".

Röntgen je delal sam in je nadaljeval delo še nekaj dni, ne da bi komu omenil kaj o svojem odkritju. Tudi ženi ni povedal, za kaj gre, čeprav je opazila njegovo vnemo. Šele potem, ko je podprl ugotovitve s fotografijami, je proti koncu leta 1895 izročil rokopis članka *O novi vrsti žarkov* Fizikalno-medicinski družbi v Würzburgu, ki ga je objavila še istega leta:

> Če priključimo velik Ruhmkorffov induktor na Hittorfovo ali dovolj evakuirano Lenardovo, Crookesovo ali podobno napravo in pokrijemo cev s prilegajočim plaščem iz tenke črne lepenke, opazimo v popolnoma zatemnjenem prostoru, da se papir, namazan z barijevim platinocianidom, močno zasveti in se sveti enako, ne glede na to, ali je obrnjen proti cevi z namazano ali drugo stranjo.



Slika 3. Röntgenov poskus (levo) in fotografija kosti v roki (desno). Fotografijo je Röntgen priložil kopijam svojega članka.

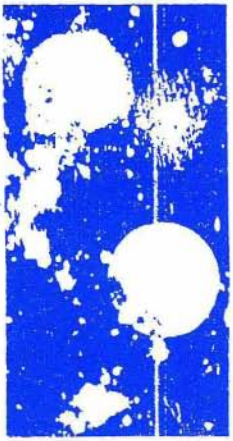
Fotografske plošče so bile občutljive za žarke. Nekateri predmeti so jih prepuščali, drugi ne. Žarki so izvirali iz dela cevi, v katerem so katodni žarki zadeli steklo. Ni jih bilo mogoče odkloniti z magnetnim poljem in ni bilo mogoče opaziti, da bi se odbijali ali lomili. Na koncu je Röntgen domneval, da utegnejo biti žarki longitudinalno elektromagnetno valovanje. Svetloba in druge vrste elektromagnetnega valovanja so transverzalne, to pomeni, da sta električno in magnetno polje pravokotni na smer potovanja. V novih žarkih pa naj bi imeli polji smer potovanja. Na tedaj običajno vprašanje "Ali delci ali valovanje?" so odgovorili šele leta 1911 Max von Laue in njegova sodelavca. Interferenčni poskusi so pokazali, da gre za navadno elektromagnetno valovanje, le da je valovna dolžina še manjša kot pri ultravijolični svetlobi, denimo, manjša kot nekaj milijardin metra. Zato danes govorimo o *rentgenski svetlobi*. Röntgen sam je uporabljal ime *žarki X*, ki se je obdržalo v angleščini. Glede longitudinalnega elektromagnetnega valovanja se je Röntgen motil. Vendar se mu je vprašanje o naravi žarkov zdelo manj pomembno.

O plazu odobravanja se je v pismu potožil prijatelju.

> Prvega januarja sem poslal kopije in potem je bilo treba plačati vragu. Dunajski časopis je prvi zatrobil na reklamno trobento in drugi so mu sledili. V nekaj dneh se mi je vsa zadeva uprla. V poročilih nisem mogel nič več prepoznati svojega lastnega dela. Fotografija je bila zame samo sredstvo, da sem dosegel svoj namen, toda iz nje so naredili najpomembnejšo zadevo. Postopno sem se na pretrese navadil, toda vihar me je stal veliko časa. Natanko štiri tedne nisem mogel narediti niti enega samega poskusa. Drugi so lahko delali poskuse, a sam jih nisem mogel. Nimaš pojma, kako napete so bile stvari tukaj.

Röntgenovo odkritje spodbuja razpravo o vlogi naključja. Večinoma ga imajo namreč za naključnega. Vendar stvari niso tako preproste.

Zakaj drugi fiziki niso odkrili rentgenske svetlobe? Pri poskusih s katodnimi žarki, se pravi s curki elektronov v vakuumu, se je namreč izdatno pojavila. Crookes je leta 1879 s curkom elektronov talil platino in iridij. Sicer je opazil, da so bile osvetljene v črn papir zavite fotografske plošče, ki so ležale v bližini, a se je menda samo pritožil pri izdelovalcu. Goldstein je leta 1880 na javnem predavanju pokazal, da se v katodni cevi svetijo drobni predmeti, čeprav jih ne zadenejo ne elektroni ne kako drugo znano sevanje. Thomson je opazil svetlikanje stekla precej daleč od cevi, čeprav se je prepričal, da ga ne zadene ultravijolična svetloba. Zapisal je, da je v okolici cevi obilo *žarkov, ki povzročajo svetenje*. To je bilo torej prvo ime za neprepoznano rentgensko svetlobo. Neki Američan je leta 1890 nehote in nevede naredil prvo fotografijo z rentgensko svetlobo (slika 4). Lenard je rentgensko svetlobo leta 1893 celo meril, ne da bi se tega zavedal. Zdelo se mu je, da gre za postranski pojav, do katerega je prišlo zaradi velike občutljivosti merilnikov. Röntgenovo odkritje ga najprej ni sploh vznemirilo. Mislil je, da gre za učinke katodnih žarkov, in je ponovil Röntgenove poskuse. Z Röntgenom je celo skupaj prejel nekaj priznanj. Toda pozneje je zaman



Slika 4. Prva fotografija z rentgensko svetlobo, ki jo je Američan Goodspeed naredil nevede in nehote leta 1890. Na fotografiji je videti senci dveh kovancev, ki sta ležala na fotografski plošči, zaviti v črn papir.

poskušal uveljaviti svoje prvenstvo. Za raziskovanje katodnih žarkov je vseeno dobil Nobelovo nagrado leta 1905.

Čeprav je Röntgen rentgensko svetlobo morda odkril po "naključju", se je moral vendar po nečem razlikovati od drugih fizikov. Vse kaže, da je bilo to zanimanje za prostor zunaj cevi. Domneval je, da je pri dovolj visoki napetosti morda zunaj cevi poleg katodnih žarkov opaziti še druge pojave. Iskal je "dejavnik, ki lahko zapusti cev". Zakaj bi sicer pokril cev s črno lepenko? Pred odločilnim poskusom je v laboratorijski dnevnik zapisal, da je v zatemnjeni sobi poleg lesenih vrat, za katerimi je bila nameščena Hittorfova cev, zaznal šibko svetlobo po vsem vidnem polju, ko je vključil tok po cevi. Kako je do tega prišlo, ne vemo. Prav tako ne vemo, zakaj je namesto Lenardove cevi z aluminijevim okencem kupil "absolutno evakuirano cev" z običajno debelo stekleno steno in zakaj je namesto snovi, ki mu jo je priporočil Lenard, papir obdelal z barijevim platinocianidom. Vse to kaže, da je treba besedo naključen v zvezi z odkritji uporabljati previdno.

Današnje rentgenske cevi priključimo na visoko izmenično napetost, ki jo dobimo s transformatorjem. Ni nujno, da napetost prej usmerimo. V Röntgenovih časih seveda niso imeli izmeničnega toka. Visoko napetost so dobili z *induktorjem*. (Röntgen je uporabljal Ruhmkorffov induktor z dolžino 50 cm in s premerom 20 cm.) Na prvo tuljavo, navito okoli železnega jedra, so priključili baterijo. Na drugi tuljavi, naviti okoli prve, konstantni tok po prvi ne bi povzročil nobene napetosti. Zato so tok po prvi tuljavi prekinjali s pripravnim, dostikrat z mehaničnim prekinjalom. Sprememba magnetnega polja zaradi spremembe toka po prvi tuljavi je v drugi inducirala sunke inducirane napetosti. Če je bilo število ovojev druge tuljave veliko večje od števila ovojev prve tuljave, so lahko na drugi tuljavi dosegli visoko inducirano napetost. Na to tuljavo so priključili vakuumsko cev.

Janez Strnad

NEZNANA OSNOVA

Ali obstaja tako naravno število $b \geq 2$, da bi pri zapisu v osnovi b veljala enakost

$$x + xx + xxx = 1000\,,$$

kjer je x ena od števk $0, 1, \ldots, b-1$?

Martin Juvan

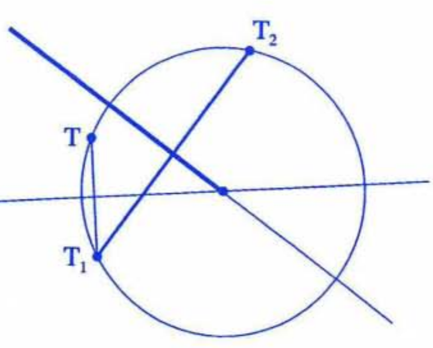
REŠITVE NALOG

NAJMANJŠI KROG - Rešitev s str. 213

Eden najpomembnejših korakov pri reševanju dobro postavljenega problema z računalnikom je izbira ustreznega algoritma. Če izberemo še primerno programsko orodje, ki ga dobro obvladamo, je kodiranje algoritma v učinkovit program večinoma rutinsko opravilo. Tudi na računalniških tekmovanjih večkrat naletimo na naloge, ki zahtevajo opis algoritma, ne pa zapisa programa. Taka zahteva poenostavi nalogo in poudari pomen razumevanja problema, zmanjša pa težo znanja programiranja.

Oglejmo si, kako je določen najmanjši krog, ki vsebuje dano končno množico točk A v ravnini. Če na svojem robu ne vsebuje nobene točke iz množice A, ga lahko skrčimo in tako dobimo manjši krog. Tudi če na robu vsebuje le eno točko iz A, ga lahko skrčimo, le da tokrat za središče skrčitve vzamemo točko z roba. Najmanjši krog mora torej na svojem robu vsebovati vsaj dve točki iz množice A. Za vsak par različnih točk iz množice A tako poiščemo najmanjši krog, ki vsebuje množico A in ima izbrani točki na robu. Če tak krog obstaja, bo na svojem robu imel vsaj tri točke iz množice ali pa bosta obe izbrani točki na njegovem robu diametralno nasprotni. Med temi krogi nato izberemo tistega, ki ima najmanjši polmer.

Opišimo še, kako pri izbranih točkah $T_1, T_2 \in A$ ugotovimo, ali tak krog obstaja. Vsi krogi, ki imajo točki T_1 in T_2 na robu, imajo središče na simetrali zveznice teh dveh točk. Naj bo $T \in A$ poljubna točka. Ugotoviti želimo, kateri krogi s središčem na simetrali zveznice točk T_1 in T_2 vsebujejo tudi točko T. Pri tem bomo ločili nekaj možnosti. Če točka T leži na zveznici, potem je vsebovana v vsakem takem krogu. Če pa leži na premici skozi T_1 in T_2, vendar ne na zveznici, potem ni vsebovana v nobenem krogu, ki ima točki T_1 in T_2 na svojem robu. Ostane še možnost, ko točke T, T_1 in T_2 določajo neizrojen trikotnik. Središče temu trikotniku očrtanega kroga razdeli simetralo zveznice točk T_1 in T_2 na dva poltraka. Točko T vsebujejo natanko tisti krogi, ki imajo središče na tistem od obeh poltrakov, katerega neskončni del leži na isti strani zveznice kot točka T. Ta možnost je prikazana tudi na sliki.



Če je za izbrani točki T_1 in T_2 presek vseh tako dobljenih delov simetrale neprazen, je točka preseka, ki leži najbližje razpolovišču zveznice, središče iskanega kroga. Če pa je presek prazen, noben krog, ki ima točki T_1 in T_2 na svojem robu, ne vsebuje vseh točk iz množice A.

Da poiščemo najmanjši krog, pregledamo vseh $\binom{|A|}{2} = \frac{|A|(|A|-1)}{2}$ parov točk, pri vsakem paru pa moramo pregledati še vse ostale točke. Skupno število operacij je torej sorazmerno s kubom moči vhodne množice A. Seveda obstajajo tudi postopki, ki porabijo bistveno manj operacij, vendar pa so zato precej bolj zapleteni.

Martin Juvan

IZPOLNJEVANKA Z MATEMATIČNIMI POJMI - Rešitev s str. 224

1	P	R	E	M	I	K				
2	P	R	E	M	I	C	A			
3	P	R	E	D	N	O	S	T		
4	P	R	E	S	E	K				
5	P	R	E	M	E	R				
6	P	R	E	S	L	I	K	A	V	A
7	P	R	E	D	I	K	A	T		
8	P	R	E	Č	N	I	C	A		
9	P	R	E	D	N	I	K			
10	P	R	E	D	Z	N	A	K		

Jakob Andrejčič

TRI ANEKDOTE O DAVIDU HILBERTU

Nemški matematik **David Hilbert** se je rodil leta 1862 v tedaj pruskem Königsbergu, umrl pa leta 1943 v nemškem univerzitetnem mestu Göttingen. Velja za enega "prelomnih" matematikov, saj z njegovim delom ponavadi povezujejo začetek t.i. moderne dobe v matematiki.

Uspešen je bil na številnih področjih matematike, bržkone največ slave pa je požel z leta 1899 izdano knjigo *Temelji geometrije*. V njej je na novo sestavil Evklidovo aksiomatiko geometrije, pri čemer je uspel iz nje odstraniti vse Evklidove nedoslednosti. Zaradi tega dela se je med matematiki precej spremenil tudi pogled na aksiomatske sisteme oz. matematične teorije in se že močno približal današnjemu.

Tu vam ponujamo v branje tri zanimive anekdote o Hilbertu.

– – –

Novinar je vprašal Hilberta, kako mu je uspelo, da je tako temeljito posegel na številna področja matematike. Hilbert mu je razložil: "Na srečo imam slab spomin. Ko na kakšnem področju končam z delom, kmalu vse pozabim. Tedaj nastane v možganih spet nov prostor."

"In kako se potem vpeljete v novo področje?"

"Vprašam kakšnega prijatelja, katero knjigo naj preberem, da bi se seznanil z željenim področjem. Ko knjigo dobim, preberem samo njeno kazalo in jo nato odložim. Raje sam zase premišljujem o tem, kaj vse bi utegnilo biti v knjigi s takšnim kazalom. Ponavadi kmalu zatem vzamem še papir in zapišem razmislek. Ko ga pokažem svojim prijateljem, so ti največkrat navdušeni. Strinjajo se, da je na njem obilo stvari, ki so bile v matematiki do takrat še neznane. Seveda kmalu zatem pisanje tudi objavijo."

– – –

Nekoč je bil Hilbert izvoljen v mestni svet v Göttingenu. Ko ga je kasneje eden izmed prijateljev vprašal, kako se kaj znajde v tem svetu nematematikov, mu je Hilbert pojasnil: "Seveda, kakor povsod, najde človek tudi tam posebneže: imajo horizont s polmerom nič in imenujejo ga *svoje stališče*."

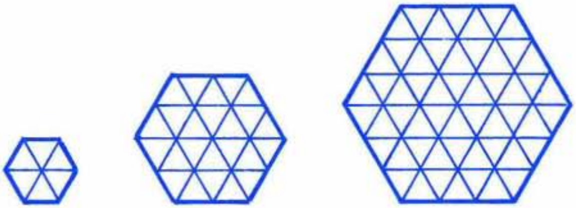
– – –

O enem izmed svojih doktorandov Hilbert v nekem obdobju že zelo dolgo ni ničesar slišal. Ko je nekoč po naključju srečal njegovega asistenta, ga je povpraševal med drugim tudi o tem, kam se je omenjeni doktorand izgubil. Ta mu je pojasnil, da je mladi doktor medtem žal zapustil matematiko in se raje posvetil pisanju romanov. Hilbertu je ušlo: "Ja, ja, pravzaprav sem imel pri njem zmeraj tak vtis, da ima za matematiko premalo domišljije. Vendar je utegne imeti dovolj vsaj za romane."

Vilko Domajnko

KOLIKO ŠESTKOTNIKOV?

Šestkotni lik, sestavljen iz enakostraničnih trikotnikov, ki ima na stranicah po n trikotnikov, imenujemo n-šestkotnik. Na sliki so narisani 1, 2 in 3-šestkotnik:



Koliko pravilnih šestkotnikov se skriva v n–šestkotniku?

Ciril Pezdir

AVTOMOBILSKA - Rešitev s str. 199

Mednarodna avtomobilska oznaka Italije je $\boxed{\text{I}}$, Nemčije $\boxed{\text{D}}$, za avtomobile diplomatskih predstavništev pa $\boxed{\text{CD}}$. To pa so ravno rimske številke 1, 500 in 400, zadnja pa je tudi rešitev uganke.

Martin Juvan

NOVICE

TEST IZ FIZIKE

Pri pregledovanju novembrske številke letnika 92 revije The Physics Teacher sem opazil test iz fizike Centra za sprejemne izpite japonske univerze. Test so kot del sprejemnega izpita na univerzo reševali japonski in kitajski (Tajvan) dijaki v januarju leta 1990. Sprejemnega izpita se je udeležilo več kot 130 000 kandidatov, za reševanje testa so imeli 60 minut časa. Od možnih 100 točk so kandidati dosegli povprečno 74 točk.

Kot učitelju fizike so mi bile naloge zanimive, vsebina nalog pa primerna tudi za naše dijake srednjih šol. Zato sem besedilo testa prevedel in ga opremil s skicami. Test so reševali dijaki zaključnega letnika naravoslovne usmeritve na Jesenicah v marcu leta 1993. Reševalo ga je 60 dijakov, od možnih 100 točk so dosegli povprečno 67 točk, čas reševanja pa je bil 60 minut.

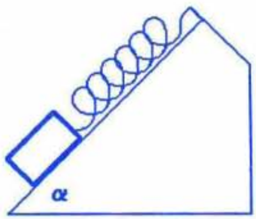
Rezultat testa je dober. Naši dijaki niso posebej utrjevali učne snovi nižjih letnikov, reševali pa so ga dijaki z različnimi študijskimi namerami.

Bralci PRESEKA, preizkusite se še vi!

Rajko Peternel

TEST:

1. naloga. Na vrhu klanca z naklonskim kotom $\alpha = 45^\circ$ je pripeta lahka vijačna vzmet s koeficientom vzmeti k. Na vijačno vzmet pripnemo majhen kvader z maso m (skica 1).



Skica 1.

Na zastavljena vprašanja od 1 do 6 (28 točk) določi pravilnega od predloženih odgovorov, pripadajočo številko odgovora vpiši v oglati oklepaj!

A. Ko kvader spustimo, začne drseti, vzmet se razteza. Z s označimo raztezek vzmeti, k_l je koeficient lepenja, k_t koeficient trenja, g pa težni pospešek.

1. vprašanje: Kolika je rezultanta sil F, ki delujejo na kvader pri raztezku vzmeti s? Smer rezultante je po klancu navzdol.

(1) $mg + ks - k_t mg$ (2) $mg - ks - k_t mg$

(3) $\frac{\sqrt{2}}{2} mg + ks - \frac{\sqrt{2}}{2} k_t mg$ (4) $\frac{\sqrt{2}}{2} mg - ks - \frac{\sqrt{2}}{2} k_t mg$

(4) $\sqrt{2} mg + ks - \sqrt{2} k_t mg$ (6) $\sqrt{2} mg - ks - \sqrt{2} k_t mg$

Odgovor 1: $F =$ [ ]

2. vprašanje: Koliko dela A_g prejme kvader od sile teže pri premiku s od začetne lege?

(1) mgs (2) $\sqrt{2}mgs$ (3) $\frac{\sqrt{2}}{2}mgs$

(4) $-mgs$ (5) $-\sqrt{2}mgs$ (6) $-\frac{\sqrt{2}}{2}mgs$

Odgovor 2: $A_g = [\quad]$

3. vprašanje: Koliko dela A_t prejme kvader zaradi sile trenja med kvadrom in klancem?

(1) $-k_t mgs$ (2) $-\sqrt{2}k_t mgs$ (3) $-\frac{\sqrt{2}}{2}k_t mgs$ (4) 0

Odgovor 3: $A_t = [\quad]$

4. vprašanje: Izrazi kinetično energijo W_k kvadra pri premiku s z delom sile teže A_g, delom sile trenja A_t in delom sile napenjanja vzmeti $A_k = -\frac{1}{2}ks^2$.

(1) A_g (2) A_t (3) A_k (4) $A_g + A_t$

(5) $A_g + A_k$ (6) $A_t + A_k$ (7) $A_g + A_t + A_k$

Odgovor 4: $W_k = [\quad]$

5. vprašanje: Kvader drsi po klancu navzdol, v določeni legi se kvader ustavi. Kolik je koeficient a, če je največji premik kvadra podan z enačbo: $S_{\max} = a\frac{mg}{k}$?

(1) $1 - k_t$ (2) $\sqrt{2}(1 - k_t)$ (3) $\frac{1 - k_t}{\sqrt{2}}$

(4) 1 (5) $\sqrt{2}$ (6) $\frac{1}{\sqrt{2}}$

(7) $1 + k_t$ (8) $\sqrt{2}(1 + k_t)$ (9) $\frac{1 + k_t}{\sqrt{2}}$

Odgovor 5: $a = [\quad]$

B. Kvader položimo na klanec pri tako napeti vzmeti, da se zaradi lepenja ne premakne. Podaljšek vzmeti naj bo v tem primeru s_l.

6. vprašanje: Območje mirovanja kvadra je podano z izrazom $b\frac{mg}{k} \leq s_l \leq$ $\leq c\frac{mg}{k}$. Med predlaganimi možnostmi izberi pravilne vrednosti koeficientov b in c!

(1) k_l (2) $\frac{k_l}{\sqrt{2}}$ (3) $1 - k_l$

(4) $\frac{1 - k_l}{\sqrt{2}}$ (5) $1 + k_l$ (6) $\frac{1 + k_l}{\sqrt{2}}$

Odgovor 6: $b = [\quad]$
Odgovor 7: $c = [\quad]$

2. naloga. Upoštevajmo valovne lastnosti zvoka!

Na zastavljena vprašanja od 1 do 5 (25 točk) določi pravilnega od predloženih odgovorov!

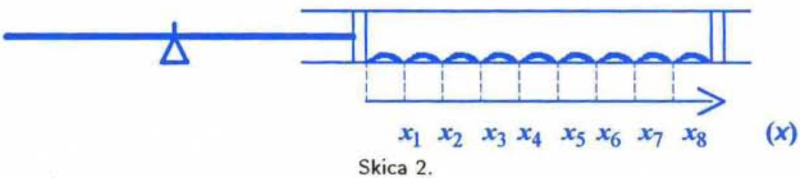
A. Zvok, ki ga slišimo, se širi od izvira zaradi nihanja molekul zraka.

1. vprašanje: Izberi *napačenega* od predloženih opisov, ki podajajo pojave pri širjenju zvočnega valovanja po zraku!

(1) Zvočno valovanje je longitudinalno, pri širjenju se spreminja gostota zraka; govorimo o zgoščinah in razredčinah.
(2) Pri zvočnem valovanju opazimo pojave: odboj, lom, uklon.
(3) Hitrost zvoka se poveča, ko je temperatura zraka višja.
(4) Kadar se izvir zvoka giblje, se hitrost zvoka spremeni.
(5) Kadar se izvir zvoka giblje, je frekvenca, ki jo sliši poslušalec drugačna od frekvence izvira.

Odgovor 8: [ ]

B. Skica 2 je shematični diagram poskusa s Kundtovo cevjo. Kovinska palica dolžine L je vpeta na sredini. Na koncu palice je zamašek, ki zapira en konec steklene cevi, v kateri je enakomerno posut cvetni prah. Tudi drugi konec steklene cevi je zaprt z zamaškom. Ko prosti konec kovinske palice podrgnemo s krpo, da zazveni, v palici nastane stoječe valovanje z vozlom na sredi in hrbtoma na konceh palice. Nastali zvok se prenese na zračni stolpec v stekleni cevi.



Skica 2.

S premikanjem zamaška spreminjamo dolžino zračnega stolpca toliko časa, da je stoječe valovanje zvoka v stekleni cevi v resonanci z osnovno frekvenco stoječega valovanja kovinske palice. Delci cvetnega prahu v stekleni cevi nihajo, le v določenih točkah – vozlih stoječega valovanja – mirujejo (skica 2). Lege vozlov so izmerjene, vrednosti so podane v tabeli 1:

x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	x_6	x_7	x_8
0,0 cm	10,3 cm	19,9 cm	30,7 cm	40,3 cm	50,9 cm	59,9 cm	69,8 cm

Tabela 1.

2. vprašanje: Za računanje valovne dolžine λ zvočnega valovanja v zraku uporabimo v enačbi

$$\lambda = k((x_5 - x_1) + (x_6 - x_3) + (x_7 - x_2) + (x_8 - x_4))$$

podatke iz tabele 1. Kolika je vrednost k?

(1) $\frac{1}{3}$ (2) $\frac{1}{4}$ (3) $\frac{1}{6}$ (4) $\frac{1}{8}$ (5) $\frac{1}{12}$ (6) $\frac{1}{16}$

Odgovor 9: $k = [\quad]$

3. vprašanje: Izračunaj frekvenco zvočnega valovanja v zračnem stolpcu! Uporabi podatke iz tabele 1, hitrost zvoka v zraku je 340 m/s.

(1) 120Hz (2) 170Hz (3) 340Hz
(4) 1200Hz (5) 1700Hz (6) 3400Hz

Odgovor 10: $\nu = [\quad]$

4. vprašanje: Določi hitrost longitudinalnih valov c_k v kovinski palici, če je L dolžina palice, λ valovna dolžina, določena s stoječim valovanjem zračnega stolpca, in c hitrost zvoka v zraku! V kovinski palici je osnovno stoječe valovanje.

(1) Lc/λ (2) $2Lc/\lambda$ (3) $3Lc/\lambda$ (4) $4Lc/\lambda$
(5) $\lambda c/L$ (6) $2\lambda c/L$ (7) $3\lambda c/L$ (8) $4\lambda c/L$

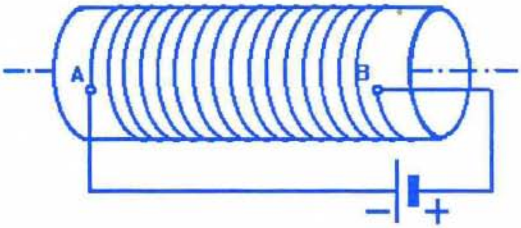
Odgovor 11: $c_k = [\quad]$

5. vprašanje: Poskus ponovimo s krajšo kovinsko palico. Upoštevaj, da je hitrost valovanja v palici enaka kot prej. Izmed šestih trditev izberi dve pravilni, njuni številki vpiši v oglata oklepaja! Vrstni red številk v oglatih oklepajih je poljuben.

(1) Osnovna frekvenca palice se poveča.
(2) Osnovna frekvenca palice se ne spremeni.
(3) Osnovna frekvenca palice se zmanjša.
(4) Razdalja med mesti, kjer cvetni prah miruje, se poveča.
(5) Razdalja med mesti, kjer cvetni prah miruje, je enaka.
(6) Razdalja med mesti, kjer cvetni prah miruje, se zmanjša.

Odgovora 12 – 13: [ ] – [ ]

3. naloga. Dolgo tuljavo dolžine l z N ovoji priključimo na enosmerno napetost (skica 3). Upornost žice tuljave naj bo R, napetost med priključkoma tuljave pa U.



Skica 3.

Na zastavljena vprašanja od 1 do 4 (27 točk) določi pravilnega od predloženih odgovorov!

1. vprašanje: Kakšno moč P troši žica?

$$(1)\ \frac{U}{R} \qquad (2)\ \frac{U^2}{R} \qquad (3)\ \frac{U}{R^2} \qquad (4)\ \frac{R}{U} \qquad (5)\ \frac{R}{U^2} \qquad (6)\ \frac{R^2}{U}$$

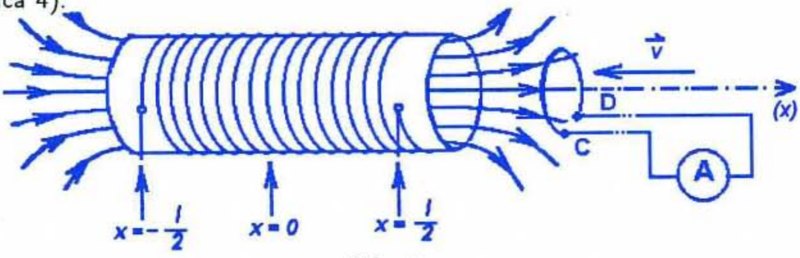
Odgovor 14: $P = [\ \ ]$

2. vprašanje: Ugotovi smer magnetnega polja in določi enačbo za gostoto magnetnega polja v notranjosti tuljave!

št. odg. ⟶	smer B	velikost B	smer B	⟵ št. odg.
(1)	na desno	$\frac{\mu_0 NU}{lR}$	na levo	(4)
(2)	na desno	$\left(\frac{N}{l}\right)^2 \mu_0 \frac{U}{R}$	na levo	(5)
(3)	na desno	$N^2 \mu_0 \frac{U}{r}$	na levo	(6)

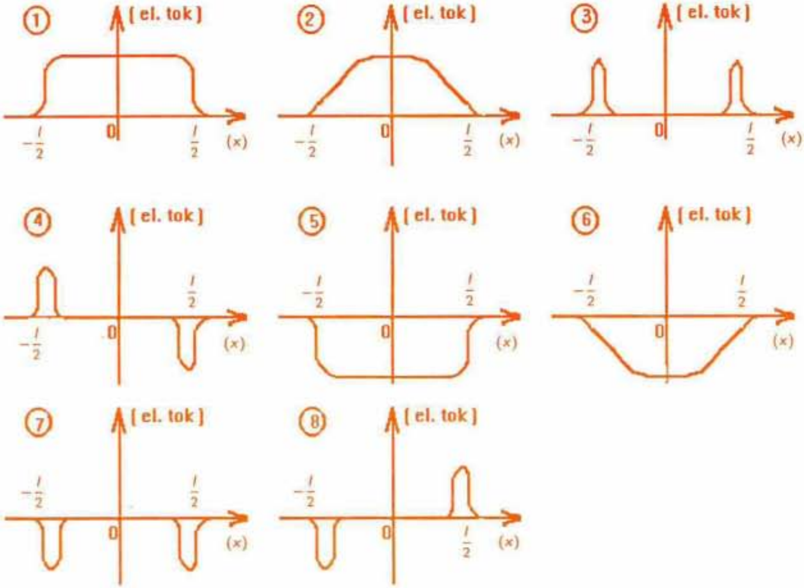
Odgovor 15: [ ]

B. Magnetno polje dolge tuljave je prikazano na skici 4. Okroglo zanko vodnika, ki je pravokotna na os tuljave, premikamo v smeri osi x. Na konca zanke C in D priključimo galvanometer. C priključek je spredaj, D zadaj (skica 4).



Skica 4.

3. vprašanje: Okrogla zanka vodnika se giblje z enakomerno hitrostjo od desne proti levi strani tuljave. Kako se spreminja električni tok v zanki, ko se zanka giblje? Izberi graf, ki prikazuje spremembo toka med gibanjem zanke! Upoštevaj, da je pozitivna smer toka od C k D. Koordinata x določa lego zanke, sredina tuljave je pri $x = 0$.



Odgovor 16: graf [ ]

4. vprašanje: Naj bo polmer zanke 10 mm. Zanka je v notranjosti tuljave pri $x = 0$ (skica 4). Magnetna poljska gostota B naraste v eni sekundi za 0,02 T zaradi spremembe električnega toka skozi tuljavo. Izračunana vrednost inducirane napetosti je zapisana v obliki $U_i = a \cdot 10^b$ V. Ugotovi vrednosti števil a in b. Lastno indukcijo tuljave zanemari!

Predlogi za število a:

(1) 1,3 (2) 2,0 (3) 3,1 (4) 6,3 (5) 7,9 (6) 9,4

Odgovor 17: $a =$ [ ]

Predlogi za število b:

(1) −1 (2) −2 (3) −3 (4) −4 (5) −5 (6) −6 (7) −7 (8) −8

Odgovor 18: $b =$ [ ]

4. naloga. *(Vprašanja od 1 do 3, 20 točk)*

Preberi spodnji tekst!

Plin vsebuje veliko število molekul, ki se neurejeno gibljejo v vseh smereh prostora. Mislimo si, da so molekule plina majhne kroglice z maso m in zaprte v posodi s prostornino V. Sila, s katero deluje molekula na steno posode, je enaka produktu **Odgovor 19:** [ ], s katerim deluje stena na molekulo pri vsakem prožnem trku, in števila trkov molekule v časovni enoti. Tlak plina p (sila, s katero delujejo molekule plina na ploskovno enoto) lahko izrazimo z enačbo: $p = \frac{Nm\overline{v^2}}{3V}$, kjer je $\overline{v^2}$ srednja vrednost kvadratov hitrosti vseh molekul. Za idealni plin je enačba stanja $pV =$ **Odgovor 20** : [ ], kjer je R splošna plinska konstanta. Tako ugotovimo, da je $\overline{v^2}$ sorazmerna z absolutno temperaturo T.

1. vprašanje: Izberi pravilna izraza med spodaj predloženimi, ki dopolnjujeta gornji tekst in njuni številki vpiši v oglata oklepaja!

(1) hitrost (2) sunek sile (3) kinetična energija (4) potencialna energija

(5) $n\frac{R}{t}$ (6) $n\frac{T}{R}$ (7) nRT

2. vprašanje: Pri enačbi $\overline{v^2} = aT$ določi sorazmernostni koeficient a! N_A je Avogadrovo število. Izberi pravilni izraz med predloženimi in pripadajočo številko izraza vpiši v oglati oklepaj!

(1) $6mN_AR$ (2) $3mN_AR$ (3) $2mN_AR$

(4) $\frac{6R}{mN_A}$ (5) $\frac{3R}{mN_A}$ (6) $\frac{2R}{mN_A}$

Odgovor 21: $a =$ [ ]

3. vprašanje: Privzemimo, da je zrak idealen plin iz molekul, katerih povprečna relativna molekulska masa je 30, splošna plinska konstanta R je 8300 J/K. Z računom oceni povprečno hitrost $\sqrt{\overline{v^2}}$ molekul zraka pri temperaturi 300 K. Produkt Avogadrovega števila N_A in mase molekule m je enak molekulski masi z enoto kilogram. *Izberi pravilni izraz med predloženimi!*

(1) 6000 m/s (2) 2000 m/s (3) 1000 m/s (4) 700m/s

(5) 500 m/s (6) 300 m/s (7) 100 m/s

Odgovor 22: $\sqrt{\overline{v^2}} =$ [ ]

TOČKOVANJE IN REŠITVE NALOG

Naloga (št. točk)	A/B	Vprašanje (št. točk)	Zap.štev. odg.	Pravilni odg.
1. naloga (28)	A	1 (5)	1	4
		2 (5)	2	3
		3 (4)	3	3
		4 (4)	4	7
		5 (4)	5	2
	B	6 (6)	6	4
			7	6
2. naloga (25)	A	1 (5)	8	4
	B	2 (5)	9	4
		3 (5)	10	5
		4 (5)	11	2
		5 (5)	12 - 13	1, 6
3. naloga (27)	A	1 (6)	14	2
		2 (7)	15	1
	B	3 (6)	16	8
		4 (8)	17	4
			18	6
4. naloga (20)		1 (10)	19	2
			20	7
		2 (5)	21	5
		3 (5)	22	5

SPET ENA LOGIČNA

V stolpnici sredi mesta so pisarne treh prijateljic: Novakove, Kraljeve in Polakove. Ena med njimi je zdravnica, drugi pravnica, tretja pa arhitektka. Vsaka ima svojo tajnico, njihova imena pa so Sanja, Roza in Valerija.

- Pravnica ima pisarno v pritličju.
- Rozina šefica nikoli ne je malice, zato hodi Roza na malico vsak dan s Polakovo.
- Ob desetih dopoldne se Sanja odpravi gor k tajnici Kraljeve na kavico.
- Novakova kar naprej pošilja svojo tajnico dol v arhitektkino pisarno po modne časopise.

Kakšen poklic opravlja vsaka izmed dam in kako se imenuje njena tajnica?

Neža Mramor - Kosta

REŠITVE NALOG

ŠIFRIFANO PISEMCE ZA MLAJŠE BRALCE - Rešitev s str. 225

Naloga res ni bila težka. Vsakemu paru števil iz pisemca je treba poiskati v mreži točko, ki ima ti števili za koordinati, in ga zamenjati s črko, ki stoji ob točki. Vsebina pisemca se glasi: DANES SE BOVA Z ROKOM SKUPAJ UČILA MATEMATIKO.

Marina Rugelj

Kot odmev na to nalogo smo dobili kar nekaj pošte, v kateri nam bralci sporočajo o svojih podobnih poskusih uporabe koordinatnih mrež. Vsem se za pošto lepo zahvaljujemo.

Iz uredništva

SAM SEBE - Rešitev s str. 225

Z uporabo datotek ni težko napisati programa, ki izpiše samega sebe. Odpremo datoteko, na kateri je program zapisan, v našem primeru bo to datoteka SAMSEBE.PAS, in jo izpišemo na zaslon. Tule je program:

```
program IzpisemSamegaSebe1;
{ Program izpiše datoteko SAMSEBE.PAS na zaslon. }
  const
    mojeIme='SAMSEBE.PAS';
  var
    f: text;
    vrstica: string;
begin
  assign(f,mojeIme);
  {$I-} reset(f); {$I+}
  if IOResult<>0 then
    writeln('Barabe, pobrisali ste me!',chr(7),chr(7))
  else begin
    while not eof(f) do
      begin readln(f,vrstica); writeln(vrstica); end;
    close(f);
  end;
end.
```

Precej težje, a ne nemogoče, pa je sestaviti rešitev, ki si ne pomaga z branjem z datoteke. Z nekaj truda se lahko dokopljemo do programa, podobnega spodnjemu.

```
program IzpisemSamegaSebe2;
{ Program izpiše samega sebe brez uporabe datotek. }
  var
    ukaz: array[1..13] of string;
    i: integer;
begin
  ukaz[1] := 'program IzpisemSamegaSebe2;';
  ukaz[2] := '{ Program izpiše samega sebe brez uporabe datotek. }';
  ukaz[3] := '  var';
  ukaz[4] := '    ukaz: array[1..13] of string;';
  ukaz[5] := '    i: integer;';
  ukaz[6] := 'begin';
  ukaz[7] := '  for i:=1 to 6 do writeln(ukaz[i]);';
  ukaz[8] := '  for i:=1 to 13 do';
  ukaz[9] := '    writeln(#  ukaz[#,i,#] := ###,ukaz[i],###;#);';
  ukaz[10] := '  for i:=1 to Length(ukaz[9]) do';
  ukaz[11] := '    if ukaz[9][i]=chr(35) then ukaz[9][i] := chr(39);';
  ukaz[12] := '  for i:=7 to 13 do writeln(ukaz[i]);';
  ukaz[13] := 'end.';
  for i:=1 to 6 do writeln(ukaz[i]);
  for i:=1 to 13 do
    writeln('  ukaz[',i,'] := ''',ukaz[i],''';');
  for i:=1 to Length(ukaz[9]) do
    if ukaz[9][i]=chr(35) then ukaz[9][i] := chr(39);
  for i:=7 to 13 do writeln(ukaz[i]);
end.
```

Kot ste gotovo opazili, je osnovna ideja v tem, da lahko prireditvene stavke, s katerimi v tabelo `ukaz` vpišemo potrebne nize, izpišemo z zanko `for`. To je mogoče zato, ker je njihova oblika preprosta in vedno enaka. Tako zadošča v tabelo `ukaz` shraniti le del programa pred prireditvenimi stavki in del programa za njimi, pa še vedno lahko izpišemo celotni program.

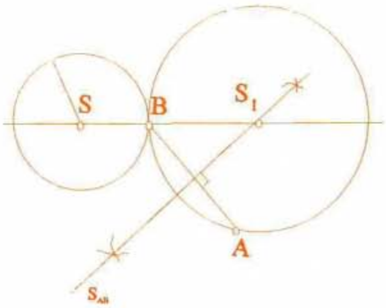
Vendar pa se pri izvedbi pojavijo nekatere težave. Izpis v zanki `for`, s katero izpisujemo prireditvene stavke, vsebuje tudi enojne narekovaje. Seveda moramo tudi ta stavek shraniti v enega od nizov v tabeli `ukaz`. Če želimo, da bo tudi enojni narekovaj del niza, moramo v pascalu napisati dva enojna narekovaja. S tem pa zaidemo v težave, saj bi imeli v programu dva, na zaslonu pa bi videli le en enojni narekovaj. To težavo zaobidemo tako, da v niz `ukaz[9]` najprej vpišemo "nadomestni znak" `#`. Ko z drugo zanko `for` izpišemo prireditvene stavke, v tretji zanki znake `#`, ti imajo kodo 35, v nizu `ukaz[9]` zamenjamo z enojnimi narekovaji, ti imajo kodo 39. Seveda pri zamenjavah uporabljamo funkcijo `chr`, saj bi sicer zopet zapletli reševanje. Tako se izognemo težavam z večkratnimi narekovaji in dosežemo želeni izpis.

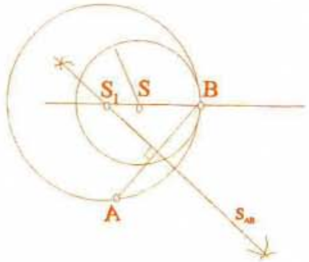
Martin Juvan

3. DRŽAVNO TEKMOVANJE OSNOVNOŠOLCEV V ZNANJU MATEMATIKE - Rešitve s str. 241

7. razred

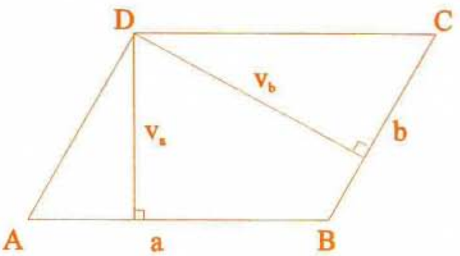
1. Število možnih zadetkov: $\frac{138}{23} \cdot 100 = 6 \cdot 100 = 600$.
   Število tekmovalcev: $600{:}15 = 40$.
   Tekmovalo je 40 članov strelskega društva.
2. $a(a+b)(a+c) = a^3 + a^2b + a^2c + abc = a^2(a+b+c) + abc =$
   $= a^2 \cdot 0 + 1994 = 1994$.
3. V prvih dveh dneh je prevozil $\frac{3}{8} + \frac{5}{12} = \frac{19}{24}$ celotne poti.
   Tretji dan mora prevoziti $\frac{5}{24}$ celotne poti.
   $\frac{1}{24}$ celotne poti $(\frac{5}{24} - \frac{1}{6} = \frac{1}{24})$ je 45 km.
   Celotna pot: $24 \cdot 45$ km $= 1080$ km.
4. Naloga ima dve rešitvi:





   Narišemo krog s središčem S in polmerom 2 cm ter točki A in B. Presečišče poltraka SB in simetrale daljice AB je središče iskane krožnice.

5. $p = av_a = bv_b$
   $a = 1,5 \cdot b$
   $40 = 3b + 2b$
   $b = 8$ cm
   $p = 60$ cm^2

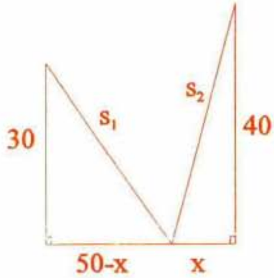


8. razred

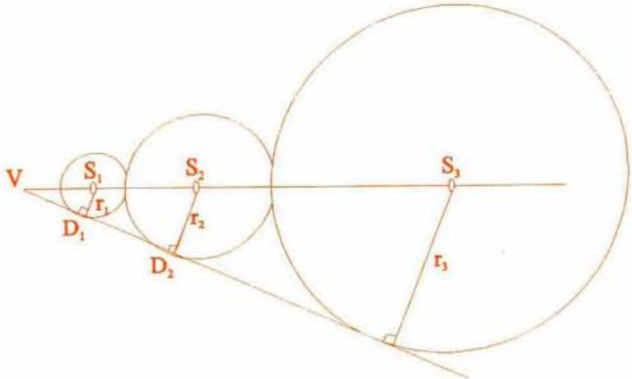
1. Če bi x šahistov vztrajalo do konca, bi odigrali $\frac{x(x-1)}{2}$ partij.
   Ker sta dva odstopila, dobimo: $\frac{(x-2)(x-3)}{2} + 6 = 84$, od tod pa $(x-2)(x-3) = 156$. Produkt dveh zaporednih števil je 156, torej $12 \cdot 13 = 156$, zato $x = 15$. Na turnirju je igralo 15 šahistov.

2. Ker je $\frac{a}{b} = \frac{c}{d} = k$, zapišemo $a = kb$ in $c = kd$. Zato je $\frac{(a+c)(b+d)}{a+b+c+d} - \frac{ab}{a+b} - \frac{cd}{c+d} = \frac{(kb+kd)(b+d)}{kb+b+kd+d} - \frac{kb^2}{b(k+1)} - \frac{kd^2}{d(k+1)} = \frac{k(b+d)^2}{(k+1)(b+d)} - \frac{kb}{k+1} - \frac{kd}{k+1} = \frac{k(b+d)}{k+1} - \frac{kb}{k+1} - \frac{kd}{k+1} = \frac{kb+kd-kb-kd}{k+1} = 0$.

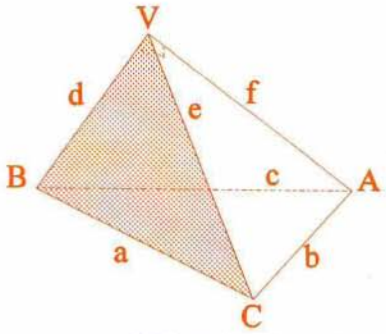
3. $s_1 = s_2$
   $s_1 = \sqrt{30^2 + (50-x)^2}$,
   $s_2 = \sqrt{40^2 + x^2}$
   $30^2 + (50-x)^2 = 40^2 + x^2$
   $x = 18$
   Vodnjak je oddaljen 18 korakov od 40 korakov visokega stolpa in 32 korakov od nižjega stolpa.



4. Zaradi $\triangle VS_2D_2 \sim \triangle VS_1D_1$ je $\overline{S_2D_2} : \overline{S_1D_1} = \overline{S_2V} : \overline{S_1V}$ in $\overline{S_1D_1} = r_1$, $\overline{S_2D_2} = r_2$ ter $\overline{S_1V} = \overline{S_2V} - (r_1 + r_2)$ je $r_2 : r_1 = \overline{S_2V} : (\overline{S_2V} - (r_1 + r_2))$ in $1 : r_1 = 3 : (2 - r_1)$, od tod pa $r_1 = \frac{1}{2}$ cm = 5mm. Polmer spodnje kroglice je 5 mm.



5. Stranske ploskve: $\frac{de}{2} = 6\,\mathrm{cm}^2$, $\frac{ef}{2} = 4\ \mathrm{cm}^2$ in $\frac{fd}{2} = 3\ \mathrm{cm}^2$. Stranski robovi so od tod $d = 3$ cm, $e = 4$ cm in $f = 2$ cm, prostornina pa $V = \frac{p_{BCV} \cdot f}{3} = \frac{def}{6} = 4\ \mathrm{cm}^3$.



Aleksander Potočnik

REŠITVE NALOG Z DRŽAVNEGA TEKMOVANJA IZ SREDNJEŠOLSKE FIZIKE – 2. del – s strani 180

Skupina C

1. Postavimo koordinatni sistem tako, da z os sovpada s smerjo nemotenega elektronskega curka. Prvi kondenzator odklanja elektrone v x smeri in drugi v y smeri. Hitost elektronov v z smeri je $v_z = \sqrt{2eU_d/m}$. Za odklon na zaslonu dobimo

$$d = \frac{alU_\alpha}{2bU_d}; \qquad \alpha \in \{x, y\},$$

kjer je a stranica plošče, b razmik med njima, l oddaljenost središča kondenzatorja od zaslona in U_α napetost na njem. Če naj bo slika na zaslonu elipsa, je ena od možnosti za napetosti

$$U_x = U_{x0} \cos \omega t \qquad \text{in} \qquad U_y = U_{y0} \sin \omega t.$$

V odvisnosti od tega, ali je krajša polos v x ali v y smeri, dobimo dve rešitvi:

$$U_{x0} = U_0 A/l_1 = 7,6\mathrm{V}, \qquad U_{y0} = U_0 B/l_2 = 18,5\mathrm{V},$$

in

$$U_{x0} = U_0 B/l_1 = 15,2\mathrm{V}, \qquad U_{y0} = U_0 A/l_2 = 9,3\mathrm{V},$$

kjer je $A = 1$ cm, $B = 2$ cm, $l_1 = 33$ cm, $l_2 = 27$ cm in $U_0 = 2bU_d/a = 250$ V. Frekvenca obnavljanja slike $\omega/2\pi$ mora biti dovolj majhna, da se napetost na kondenzatorju med preletom elektrona le malo spremeni.

2. Na plovec delujejo sila vrvice, teža in vzgon. Na zgornjo ploščo kondenzatorja delujejo sila vrvice, teža in spodnja plošča z električno silo. V ravnovesju velja:

$$m_P g + \frac{e^2}{2\varepsilon_0 S} + \varrho_V \pi r^2 (h_1 - h_0) g = \varrho_{valj} g \pi r^2 h_1 .$$

Iz enačbe in dimenzij, podanih v nalogi, izračunamo razdaljo l_0 med ploščama kondenzatorja in napetost na kondenzatorju:

$$U = l_0 \frac{e}{\varepsilon_0 S} = 8,2 \text{ mV}.$$

Izračunajmo še položaj gladine, če imamo za 1 mV večjo ali manjšo napetost. Pri napetosti $U = 9$ mV je gladina za 0,7 mm niže, pri napetosti $U = 7$ mV pa je za 1,1 mm više. Napetost pri dvigu gladine za 0,5 cm je 2,6 mV.

3. Žičko v mislih razrežemo na rezine debeline Δl in jih nadomestimo z valji. Prvič vzamemo za osnovno ploskev večjo, drugič pa manjšo ploskev. Na ta način dobimo spodnjo in zgornjo mejno vrednost za posamezen odsek.

$$R_i = \zeta \frac{\Delta l}{S_i}, \qquad S_i = \pi r_i^2, \qquad r_i = r_0 + (r_1 - r_0)\frac{i}{n},$$

kjer je n število valjev, na katere razrežemo žičko. Za spodnjo mejo dobimo

$$R_{sp} = \sum_{i=1}^{n} R_i,$$

za zgornjo pa

$$R_{zg} = \sum_{i=0}^{n-1} R_i.$$

Ena izmed možnosti je tudi približek s srednjim radijem.

$$R \approx \zeta \frac{l}{\pi \left(\frac{r_0 + r_1}{2}\right)^2}.$$

4. Pogoj, da žička zdrsne, je podan z enačbo

$$F_m \cos\alpha = mg \sin\alpha + k(F_m \sin\alpha + mg\cos\alpha),$$

kjer je

$$F_m = \frac{UlB}{R}, \qquad R = \frac{\zeta(d+2l)\varrho d}{m}.$$

Iz tega izračunamo $U = 0,57$ V. Pri obrnjeni polariteti žička odskoči od podlage, pade nekje niže nazaj na podlago, zopet odskoči itd. To se zgodi, ker je izpolnjen pogoj

$$F_m \sin\alpha > mg\cos\alpha.$$

Pri dvakrat večji napetosti se žička ne ustavi pri pogoju za ravnovesje sil (ki je na dolžini 105 cm od prvotne lege), ampak pride še nekaj više, ker ima v tej točki še neko od nič različno hitrost.

Skupina D

1. d = 10 cm, c_z= 340 m/s, c_v= 1480 m/s. Z α označimo kot, pod katerim mora netopir poslati pisk, z β pa lomni kot v slapu. Zaradi majhnih kotov lahko zapišemo lomni zakon v obliki:

$$\frac{\alpha}{\beta} = \frac{c_z}{c_v} = \frac{1}{n}.$$

Netopir ne zazna žuželke na pravem položaju zaradi vmesne plasti vode - planvzporedne plasti, ki je zaradi loma zvoka navidezno debela $d/n = 2,3$ cm. Zaradi tega zazna netopir žuželko za 8 cm bliže, kot je dejanska oddaljenost. Iz poteka žarkov skozi planvzporedno plast in prej zapisanega lomnega zakona izračunamo še vertikalni pomik zvočne podobe žuželke, kot jo zazna netopir. Zvočna podoba žuželke je 7 mm niže od njenega dejanskega položaja.

2. Stanje plina v točkah od 1 do 4 je:

točka 1:	$p = p_0$	$V = V_0$	$T = T_1,$
točka 2:	$p = p_0\beta$	$V = V_0$	$T = \beta T_1,$
točka 3:	$p = p_0\beta/\alpha$	$V = \alpha V_0$	$T = \beta T_1,$
točka 4:	$p = p_0/\alpha$	$V = \alpha V_0$	$T = T_1,$

kjer pomeni $\alpha = V_1/V_0$ in $\beta = T_2/T_1$. Energijska bilanca plina pri posameznih spremembah je

$1 \to 2$:	$\Delta W_n = mc_v T_1(\beta - 1)$	$A_{12} = 0$	$Q_{12} = mc_v T_1(\beta - 1)$,
$2 \to 3$:	$\Delta W_n = 0$	$A_{23} = -p_0 V_0 \beta \ln \alpha$	$Q_{23} = p_0 V_0 \beta \ln \alpha$,
$3 \to 4$:	$\Delta W_n = -mc_v T_1(\beta - 1)$	$A_{34} = 0$	$Q_{34} = -mc_v T_1(\beta - 1)$,
$4 \to 1$:	$\Delta W_n = 0$	$A_{41} = p_0 V_0 \ln \alpha$	$Q_{41} = p_0 V_0 \ln \alpha$.

Dovedena toplota je le Q_{23}, ker toploto Q_{12} dobimo iz toplotnega izmenjevalca $-Q_{34}$. Opravljeno delo v enem ciklu pa je $-(A_{23} + A_{41})$. Dobimo:

$$Q^+ = p_0 V_0 \beta \ln \alpha, A = p_0 V_0(\beta - 1) \ln \alpha \implies$$
$$\implies \eta = \frac{A}{Q^+} = 1 - \frac{1}{\beta} = 1 - \frac{T_1}{T_2} = \eta_{Carnot}.$$

3. Tik preden se telo odlepi od valja velja:

- zaradi radialne rezultante sil telo kroži in velja $mg \cos \varphi_0 - N = \frac{mv_0^2}{R}$, kjer je N pravokotna komponenta sile podlage,
- rezultanta sil v tangentni smeri vrti telo s kotnim pospeškom α

$$(mg \sin \varphi_0 - kN)R = mR^2 \alpha,$$

- celotni navor okoli osi valja pospešuje sistem valj-telo s kotnim pospeškom α

$$mgsin\varphi_0 R = J\alpha, \qquad J = \frac{MR^2}{2} + mR^2 = 2mR^2,$$

- ohranja se energija sistema valj-telo

$$\frac{J\omega^2}{2} = mgR(1 - \cos \varphi_0).$$

Iz sistema enačb dobimo

$$\sin \varphi_0 = 2k(2 \cos \varphi_0 - 1), \qquad \text{oziroma} \qquad \varphi_0 = 33^\circ.$$

Za večje kote telo drsi brez trenja po valju. Izrek o ohranitvi energije zapišemo kot

$$\frac{mv_0^2}{2} + mgR \cos \varphi_0 = \frac{mv_1^2}{2} + mgR \cos \varphi_1.$$

Telo odleti z valja, ko postane sila podlage enaka nič, ko je torej radialna komponenta teže enaka centripetalni sili: $mg\cos\varphi_1 = mv_1^2/R$. Dobimo enačbo $1+\cos\varphi_0 = 3\cos\varphi_1$ z rešitvijo $\varphi_1 = 52°$.

Jure Bajc, Ciril Dominko

38. MATEMATIČNO TEKMOVANJE SREDNJEŠOLCEV SLOVENIJE – Rešitve s str. 250

Prvi letnik

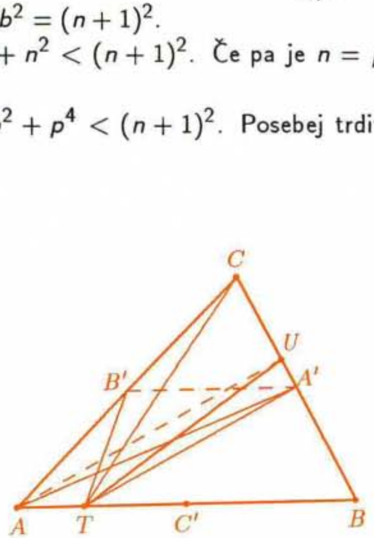
1. Vrednosti posameznih členov vsote so 1 ali -1. Ker je vsota enaka nič, mora biti členov, enakih 1, prav toliko kot členov, enakih -1.

Če zmnožimo vse člene vsote, dobimo $e_1^2 e_2^2 \cdots e_n^2 = 1$, zato mora biti členov, enakih -1, sodo mnogo. Vseh členov pa je ravno dvakrat več, torej je n deljivo s štiri.

2. Če je v razcepu števila n na prafaktorje več kot eno praštevilo ali pa je potenca katerega praštevila večja od 2, najdemo med sabo različni naravni števili a in b (večji od 1), da je $n = ab$. Potem je $\sum_{d_i|n} d_i^2 \geq$
$\geq 1 + a^2 + b^2 + a^2b^2 > 1 + 2ab + a^2b^2 = (n+1)^2$.

Če je n praštevilo, je $\sum_{d_i|n} d_i^2 = 1 + n^2 < (n+1)^2$. Če pa je $n = p^2$, kjer je p praštevilo, je $\sum_{d_i|n} d_i^2 = 1 + p^2 + p^4 < (n+1)^2$. Posebej trditev preverimo še za $n = 1$.

3. Naj $S(XYZ)$ pomeni ploščino trikotnika XYZ. Označimo z A', B' in C' razpolovišča stranic BC, CA in AB ter predpostavimo, da točka T leži na daljici AC'. Velja: $\frac{S(ATB')}{S(ATC)} = \frac{1}{2}$ in $\frac{S(TBA')}{S(TBC)} = \frac{1}{2}$. Ker je AB vzporedna $B'A'$, je $S(ATB') = S(ATA')$. Potegnimo vzporednico k TA' skozi A in njeno presečišče z BC označimo z U. Potem je $S(ATA') = S(UTA')$.



Torej je $S(TBU) = S(TBA') + S(UTA') = S(TBA') + S(ATB') = \frac{1}{2}(S(TBC) + S(ATC)) = \frac{1}{2}S(ABC)$. Rešitev naloge je torej premica skozi T in U.

4. Oglejmo si vse neurejene pare (tj. dvoelementne množice), ki jih lahko sestavimo iz teh 20 učencev. Za poslano pismo bomo rekli, da pripada danemu paru, če je en član tega para poslal pismo drugemu. Vseh parov je $20 \cdot 19/2 = 190$, vseh pisem pa je $20 \cdot 10 = 200$. Ker vsako pismo pripada kakemu paru, obstaja vsaj en par, ki mu pripadata dve pismi, torej par, ki si je pismi izmenjal.

Drugi letnik

1. Ker je $mn = 24k - 1$ za neki $k \in \mathbb{N}$, m ni deljiv niti z 2 niti s 3, torej je oblike $m = 6x \pm 1$; enako sklepamo za n in dobimo $n = 6y \pm 1$ ($x, y \in \mathbb{N}$). Ker m in n nastopata simetrično, ločimo le tri možnosti:

(a) Če velja $m = 6x+1$ in $n = 6y+1$, je $mn+1 = 3(12xy+2(x+y))+2$. Torej $mn + 1$ ni deljivo s 3, zato ta možnost ni dobra.

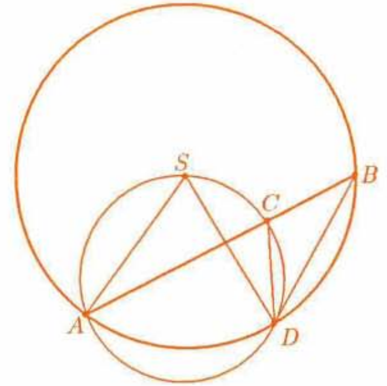
(b) Če velja $m = 6x-1$ in $n = 6y-1$, je $mn+1 = 3(12xy-2(x+y))+2$. Torej $mn + 1$ ni deljivo s 3, zato ta možnost ni dobra.

(c) Če velja $m = 6x + 1$ in $n = 6y - 1$, je $mn + 1 = 6(6xy + y - x)$. Ker je $mn + 1$ deljivo s 24, mora biti $6xy + y - x$ deljivo s 4. Naj bo $x + y = 4t + s$, pri čemer je $t \in \mathbb{N}$ in $s \in \{0, 1, 2, 3\}$. Potem velja $6xy + y - x = 4(6tx + t) - 2x(3x + 1) + s(6x + 1)$. Število $x(3x + 1)$ je sodo, zato je $s(6x + 1)$ deljivo s 4. Ker je $6x + 1$ liho, je s deljivo s 4, zato velja $s = 0$ in $x+y = 4t$. Od tod dobimo $m+n = 6(x+y) = 24t$, torej je $m + n$ res deljivo s 24.

2. Vsako napisano število je nenegativno (je absolutna vrednost nečesa), vsaj eno število pa je različno od 0 (saj je vsota 1994). Naj bo a največje napisano število, b in c pa števili tik pred njim. Potem je $a = |b - c|$ in velja $a = b - c$ ali pa $a = c - b$. V prvem primeru dobimo, da je $c = 0$ (sicer bi bil b večji od a), v drugem pa, da je $b = 0$. Torej se nekje pojavita zaporedoma a in 0. Če ta premislek nadaljujemo, dobimo: $\ldots$ a, a, 0, a, a, 0$\ldots$ V krogu se nekajkrat ponovijo trojice a, a, 0, zato je število stolov deljivo s 3.

3. Ugotovimo, da je $x < z$ in $y < z$ ter $x \neq y$. Zaradi simetrije lahko predpostavimo, da je $x < y$. Dobimo: $x^n = z^n - y^n = (z - y)(z^{n-1} + z^{n-2}y + \cdots + y^{n-1}) > ny^{n-1} > y^n$. Dokaz je tako sklenjen, kajti dobili smo $x^n > y^n$, kar je v nasprotju s predpostavko $x < y$.

4. Kot $\sphericalangle ASD$ je dvakrat večji od kota $\sphericalangle ABD$, saj sta to kota nad istim lokom $\widehat{AD}$ kroga s središčem S. Po drugi strani pa sta $\sphericalangle ASD$ in $\sphericalangle ACD$ obodna kota nad istim lokom kroga, očrtanega trikotniku SAC, zato sta enaka. Od tod pa sledi, da sta $\sphericalangle CDB$ in $\sphericalangle CBD$ enaka, trikotnik DBC je enakokrak in $|CD| = |CB|$.



Tretji letnik

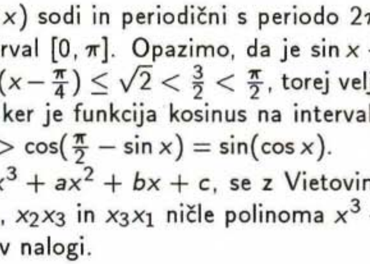
1. Naj bo $2n+1 = a^2$ in $3n+1 = b^2$. Potem je $a = 2k+1$, saj je kvadrat sodega števila sodo število. Od tod dobimo, da je $n = 2k(k+1)$, torej je n deljiv s 4 in zapišemo $n = 4m$. Ker je $b^2 = 6m+1$, je tudi b liho število: $b = 2h+1$. Sledi, da je $3m = h(h+1)$, torej je m deljiv z 2 in tako je n deljiv z 8.

Ker je n sod, lahko pišemo $n = 10r + s$, pri čemer je $s \in \{0, \pm 2, \pm 4\}$. Če bi bil $s = \pm 2$, bi bila zadnja števka enega od števil a^2 ali b^2 enaka 7; če bi bil $s = \pm 4$, pa bi bila zadnja števka enega od števil a^2 ali b^2 enaka 3. Noben od teh primerov ni možen, saj je zadnja števka kvadrata lahko le 1, 4, 5, 6 ali 9. Torej je $s = 0$, n je deljiv tudi s 5, zato je n deljiv s 40.

2. Ker sta funkciji $\cos(\sin x)$ in $\sin(\cos x)$ sodi in periodični s periodo 2π, je dovolj, da dokažemo to trditev za interval $[0, \pi]$. Opazimo, da je $\sin x + \cos x = \sin x + \sin(\frac{\pi}{2} - x) = 2\sin\frac{\pi}{4}\cos(x - \frac{\pi}{4}) \leq \sqrt{2} < \frac{3}{2} < \frac{\pi}{2}$, torej velja $0 \leq \sin x < \frac{\pi}{2} - \cos x < \frac{\pi}{2} + 1 < \pi$ in ker je funkcija kosinus na intervalu $[0, \pi]$ padajoča, takoj dobimo $\cos(\sin x) > \cos(\frac{\pi}{2} - \sin x) = \sin(\cos x)$.

3. Če so x_1, x_2 in x_3 ničle polinoma $x^3 + ax^2 + bx + c$, se z Vietovimi formulami zlahka prepričamo, da so x_1x_2, x_2x_3 in x_3x_1 ničle polinoma $x^3 - bx^2 + acx - c^2$. Od tod sledi trditev v nalogi.

4. Označimo z E razpolovišče daljice AD in z S presečišče težiščnice iz B in višine iz D. Zaradi $SD \parallel BC$ je $|BS| : |SE| = |CD| : |DE|$. Iz $|AE| = |ED|$ in $|AB| = |CD|$ pa sledi $|AB| : |AE| = |BS| : |SE|$. Torej je AS simetrala kota pri A trikotnika ABE in leži zato S na simetrali kota pri A trikotnika ABD.



Četrti letnik

1. Označimo $a = f(0)$. Očitno je $a \neq 0$. Če je $a > 0$, je:

$$\begin{array}{rcl} f(0) = a & & f(a) = 1 \\ f(1) = a+1 & & f(a+1) = 2 \\ \vdots & & \vdots \\ f(a) = 2a & & \end{array}$$

od koder dobimo, da je $2a = 1$, kar očitno ni res. Če je $a < 0$, pa je:

$$\begin{array}{rcl} f(a) = 1 & & f(1) = a+1 \\ f(a+1) = 2 & & f(2) = a+2 \\ \vdots & & \vdots \\ f(0) = 1-a & & \end{array}$$

od koder dobimo, da je $a = 1 - a$ oziroma $2a = 1$, kar spet ni res. V obeh primerih smo dobili protislovje, torej taka funkcija ne obstaja.

2. Če postavimo nad ničlo število a, je nad njim $2a$. Postavimo desno od $2a$ še b, pa imamo pod njim $2b - 74$. Ker imamo v vseh vrsticah in vseh stolpcih aritmetična zaporedja, mora veljati $(2b - 74) - a = 103 - (2b - 74)$ in $b + 3 \cdot (b - 2a) = 186$, ti dve enačbi pa dasta $a = 13$ in $b = 66$. Preostane nam še, da tabelo dopolnemo.

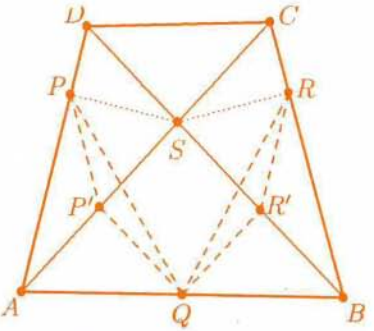
52	82	112	142	172
39	74	109	144	179
26	66	106	146	186
13	58	103	148	193
0	50	100	150	200

3. Naj bo $a_n = \overbrace{4\ldots4}^{n}\overbrace{8\ldots8}^{n-1}9$. Potem je

$$\begin{aligned} a_n &= 4\frac{10^{2n}-1}{9} + 4\frac{10^n-1}{9} + 1 = \\ &= \frac{1}{9}\left(4 \cdot 10^{2n} + 4 \cdot 10^n + 1\right) = \\ &= \left(\frac{2 \cdot 10^n + 1}{3}\right)^2. \end{aligned}$$

Ker je vsota števk števila $2 \cdot 10^n + 1$ enaka 3, je to število deljivo s 3 in je a_n res popolni kvadrat.

4. Označimo s P' in R' razpolovišči daljic AS oziroma BS. Potem je $AS \parallel QR'$ in $BS \parallel QP'$ in je zato štirikotnik $P'QR'S$ paralelogram. Sledi: $|P'S| = |QR'|$, $|QP'| = |R'S|$ in $\sphericalangle QP'S = \sphericalangle QR'S$. Ker je trikotnik ASP pravokoten, je P' središče temu trikotniku očrtane krožnice in je zato $|PP'| = |P'S|$. Analogno je $|RR'| = |R'S|$.



Zaradi tetivnosti štirikotnika $ABCD$ je $\sphericalangle DAC = \sphericalangle DBC$ in sta zato trikotnika ASP in BSR podobna. Torej je $\sphericalangle PP'S = \sphericalangle RR'S$ in nadalje $\sphericalangle QP'P = \sphericalangle QR'R$. Naloga je tako rešena, saj sta zaradi $|PP'| = |QR'|$ in $|P'Q| = |R'R|$ trikotnika $PP'Q$ in $QR'R$ skladna.

Darjo Felda

PRESEK

list za mlade matematike, fizike, astronome in računalnikarje

22. letnik, šolsko leto 1994/95, številka 5, strani 257–320

Dopisi in naročnine: Društvo matematikov, fizikov in astronomov Slovenije - Podružnica Ljubljana - Komisija za tisk, Presek, Jadranska c. 19, 61111 Ljubljana, p.p. 64, tel. (061) 1232-460, št. ŽR 50101-678-47233. Naročnina za šolsko leto 1994/95 je za posamezne naročnike **1100 SIT**, za skupinska naročila šol **880 SIT**, posamezna številka **220 SIT**, za tujino 21000 LIT, devizna nakazila SKB banka d.d. Ljubljana, val-27621-42961/9, Ajdovščina 4, Ljubljana.

List sofinancirajo MZT, MŠŠ in MK

Ofset tisk DELO - Tiskarna, Ljubljana

Po mnenju MZT št. 415-52/92 z dne 5.2.1992 šteje revija med proizvode iz 13. točke tarifne št. 3 zakona o prometnem davku, za katere se plačuje 5% davek od prometa proizvodov.

NALOGE

BAZEN - BURKALNIK?

Na urejenih morskih plažah pogosto naletimo na otroške bazene, ki so ob plimi povezani z morjem. Tu so otroci na varnem, saj so bazeni plitvi, vodna gladina pa je manj valovita kot na odprtem. Na sliki na naslovni strani je posnet tak bazen okrogle oblike, ki je ob plimi povezan z morjem. Morje je bilo nekoliko valovito, vendar se ob obali valovi niso nikjer lomili. V bazenu pa je bila gladina precej bolj burna. Na sliki spodaj vidimo pravcati izbruh vode. Gladino v bazenu sem opazoval dlje časa in ugotovil, da so bili izbruhi vode vedno na približno istem mestu. Domnevna razlaga je bila hitro pri roki: tam je verjetno kakšna skala in se valovi lomijo ob njej. Toda dno bazena je bilo povsem gladko. Ali je kdo od bralcev opazil kaj podobnega? Ali zna kdo pojav razložiti?

Andrej Likar

Zaradi vodnega izbruha je bila deklica na desni še posebej previdna, preden je stopila v vodo (foto Andrej Likar).

ISSN 0351-6652