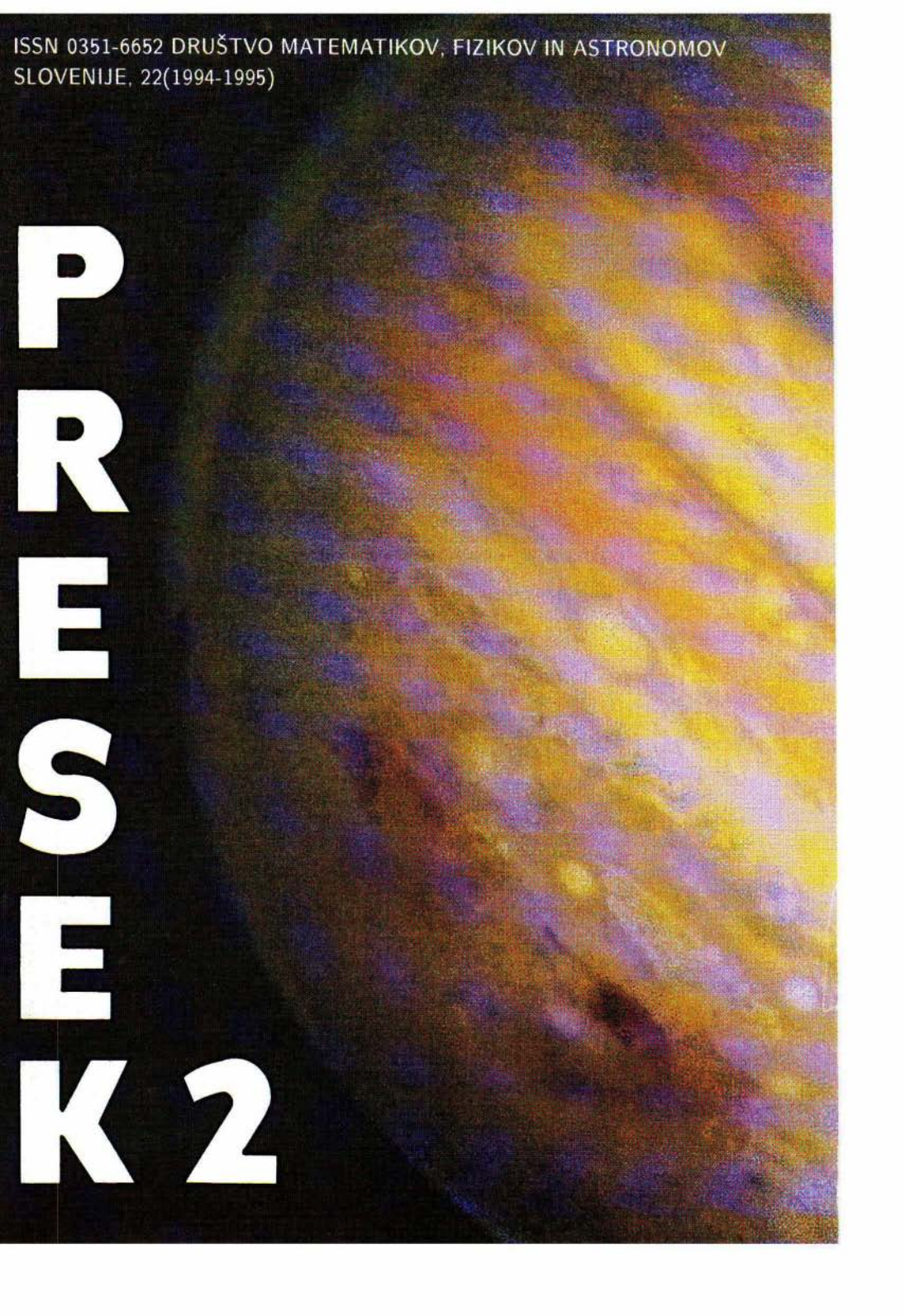


ISSN 0351-6652 DRUŠTVO MATEMATIKOV, FIZIKOV IN ASTRONOMOV
SLOVENIJE, 22(1994-1995)

P R E S E K 2



PRESEK - list za mlade matematike, fizike, astronome in računalnikarje
22. letnik, leto 1994/95, številka 2, strani 65-128

VSEBINA

MATEMATIKA	O številu π (Ivan Vidav)	68-69
	Nekomutativne in neasociativne operacije (Anton Cedilnik)	92-95
	Povrnimo se na Otok zakladov (ali sestavljajmo rotacije) (Drago Bajc)	98-101
	Zanimiva lastnost naravnih števil (Jože Grasselli)	104-109
FIZIKA	Klepec (Andrej Likar)	70-73
	Trzaj - sprememba pospeška v času (Janez Strnad)	116-124
ASTRONOMIJA	Bombni napad na planet Jupiter (Matjaž Vencelj)	66-67
	Prijatelja (Marijan Prosén)	90-91
	Štetje zvezd (Marijan Prosén)	126
RAČUNALNIŠTVO	Množice iz računalnika (Franc Savnik)	80-83
TEKMOVANJA	14. področno tekmovanje iz fizike za osnovnošolce (Zlatko Bradač, Mirko Cvahte)	74-76
	Naloge za ogrevanje (Aleksander Potočnik)	83-85
	Izbirno tekmovanje iz matematike za srednješolce (Matjaž Željko)	102-103
	Naloge s predtekmovanja iz srednješolske fizike (Jure Bajc, Ciril Dominko, Bojan Golli)	111-115
NALOGE	Račun z znaki (Martin Juvan)	65
	Daljnosežne posledice preproste enačbe (Jurij Kovič)	76
	Aritmetična števila (Martin Juvan)	77
	Trisekcija (Martin Juvan)	89
	Trgi in ulice (D.M.Milošević, prev. B. Japelj)	111
	Premeščanje števč (D.M.Milošević, prev. B. Japelj)	125
	Konstruktorska naloga (Marija Vencelj)	126
RAZVEDRILO	Križanka Ob I. kongresu matematikov, fizikov in astronomov Slovenije (Marko Bokalič)	96-97
REŠITVE NALOG	Povezanost - s str. 2 (Vilko Domajnko)	73
	Igra "LEGO" - s str. 26 (Mitja Rosina)	77-78
	Zabava - s str. 42 (Mateja Rojc)	78-79
	Novi neznani liki, 1. del - s str. 17 (Martin Juvan)	79
	Dolgčas - s str. 61 (Vilko Domajnko)	109
	Križanka Fizikalne enote - s str. 32 (Marko Bokalič)	109
	O treh črnih čepicah - s str. 52 (Matevž Bren)	124
	Groza - s str. 17 (Vilko Domajnko)	125
NOVICE	Lavoisier in Helmholtz - Ob dvestoletnici in stoletnici smrti (Janez Strnad)	86-89
	Popolna zakladnica logaritmov (Agata Tiegl)	110-111
	Mednarodni kongres matematikov - Zürich 1994 (Dušan Repovš)	128,III
NA OVITKU	Pogorišči kosov D in G kometa Shoemaker-Levy 9 po trku z Jupitrom letos julija; posneto z vesoljskim teleskopom Hubble. Glej tudi članek na strani 66 in slike na predzadnji in zadnji strani ovitka.	I,III,IV

RAČUN Z ZNAKI

$$\begin{array}{r}
 \clubsuit \nabla + \bullet \bullet \spadesuit \heartsuit = \bullet \bullet \triangle \triangle \\
 \cdot \quad \quad \quad - \quad \quad \quad + \\
 \clubsuit \diamond + \bullet \bullet \heartsuit \odot = \bullet \bullet \spadesuit \diamond \\
 \hline
 \bullet \heartsuit \spadesuit \cdot \quad \quad \quad \clubsuit \heartsuit = \bullet \bullet \otimes \odot
 \end{array}$$

V gornjem računu nadomesti vsak znak razen znaka $\bullet$ s svojo števk tako, da bo veljalo vseh šest enačb. Znak $\bullet$ lahko nadomestiš s poljubno števk. Seveda se nobeno število ne začne s števk 0. Ali ima naloga več rešitev?

Martin Juvan

PRESEK

list za mlade matematike, fizike, astronome in računalnikarje
22. letnik, šolsko leto 1994/95, številka 2, strani 65–128

UREDNIŠKI ODBOR: Vladimir Batagelj, Tanja Bečan (jezikovni pregled), Dušica Boben (oblikovanje teksta), Mirko Dobovišek (glavni urednik), Vilko Domajnko, Roman Drnovšek (novice), Darjo Felda (tekmovanja), Bojan Golli, Marjan Hribar, Boštjan Jaklič (tehnični urednik), Martin Juvan (računalništvo), Sandi Klavžar, Boris Lavrič, Andrej Likar (fizika), Matija Lokar, Franci Oblak, Peter Petek, Marijan Prosén (astronomija), Marjan Smerke (svetovalec za fotografijo), Miha Štalec, Jana Vrabec (nove knjige), Marija Vencelj (matematika, odgovorna urednica).

Dopisi in naročnine: Društvo matematikov, fizikov in astronomov Slovenije - Podružnica Ljubljana - Komisija za tisk, Presek, Jadranska c. 19, 61111 Ljubljana, p.p. 64, tel. (061) 1231-460, št. ŽR 50101-678-47233. Naročnina za šolsko leto 1994/95 je za posamezne naročnike **1100 SIT**, za skupinska naročila šol **880 SIT**, posamezna številka **220 SIT**, za tujino 21000 LIT, devizna nakazila SKB banka d.d. Ljubljana, val-27621-42961/9, Ajdovščina 4, Ljubljana.

List sofinancirajo MZT, MŠŠ in MK
Ofset tisk DELO - Tiskarna, Ljubljana

Po mnenju MZT št. 415-52/92 z dne 5.2.1992 šteje revija med proizvode iz 13. točke tarifne št. 3 zakona o prometnem davku, za katere se plačuje 5% davek od prometa proizvodov.

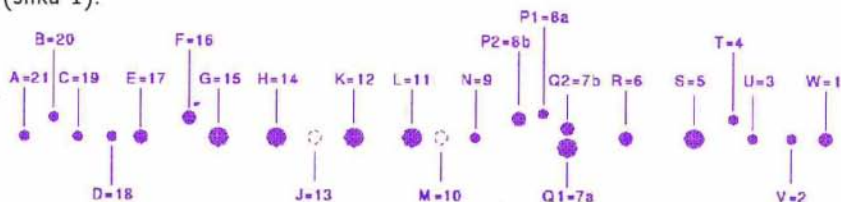
© 1994 Društvo matematikov, fizikov in astronomov Slovenije – 1216

ASTRONOMIJA

BOMBNI NAPAD NA PLANET JUPITER

Sredi letošnjega julija smo dočakali napovedani ognjeni spektakel na Jupitru. Kosi razpadlega kometa *Shoemaker-Levy 9* so z veliko hitrostjo popadali v Jupitrovo atmosfero in končali v strahovito močnih eksplozijah.

Komet so odkrili Gene in Carolyn Shoemaker ter David Levy, in sicer na fotografiji, ki so jo posneli 24. marca 1993 s 40-centimetrskim teleskopom na Mt. Palomarju v ZDA. Drugi astronomi so nato ugotovili, da kroži komet okrog Jupitra, da se mu je zelo približal že poleti leta 1992 in da se je takrat razdrobil na 21 večjih kosov. Označili so jih s črkami angleške abecede od A do W, brez I in O. Največji med njimi so imeli premer od tri do štiri kilometre (slika 1).



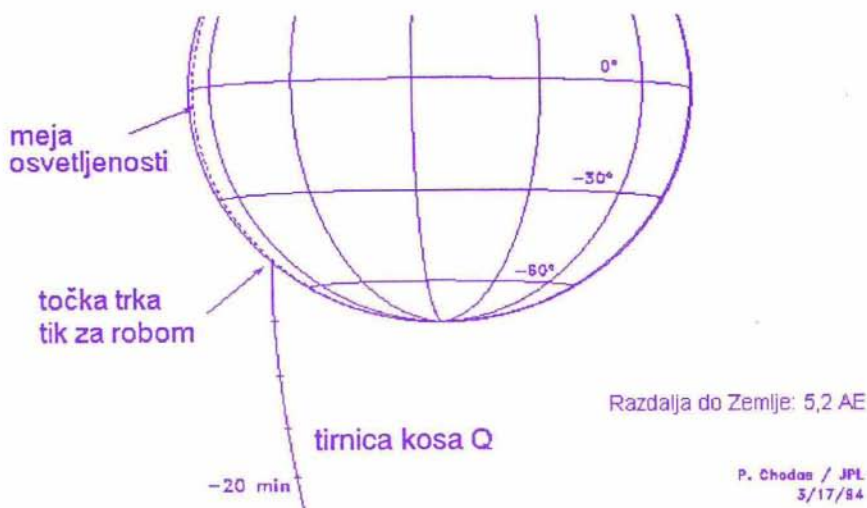
Slika 1.

Že konec maja 1993 je bilo moč napovedati letošnji trk kometovih kosov z Jupitrom.

Ta 'vlak' ledenega kamenja (slika 3 na predzadnji strani ovitka) je bil ob odkritju viden z Zemlje pod kotom 51", kar je pomenilo približno 160.000 km dolžine. Do dneva, ko je prvi kos trčil z Jupitrom, pa je bil viden že pod kotom dobrih 20', kar pomeni, da se je vlak 'raztegnil' na pet milijonov kilometrov.

Enaindvajset glavnih kosov kometa (vmes pa še manjši drobiž) je v dneh od 16. do 22. 7. 1994 popadalo na Jupiter, drug za drugim, na območje ob 44° južne jupitrske širine. Le manjši kosi z zadnjega konca kometa so zgrešili Jupiter, vendar se okrog planeta še gibljejo. Z Zemlje trkov nismo mogli neposredno videti, saj so bili na zadnji, od Sonca neosvetljeni in nam nevidni strani planeta. Vendar pa so se trki dogajali 'tik za robom', tako da so čez nekaj minut zaradi Jupitrovega vrtenja z močnejšimi daljnogledi že lahko opazovali njihove posledice (slika 2).

Bliske ob padcu posameznih kosov v Jupitrovo atmosfero so zabeležili z vesoljskih plovil Galileo in Voyager 2, z Zemlje pa le posredno kot rahel odblesk z Jupitrovih satelitov. Z Zemlje je bilo učinke eksplozij zelo težko zaznati tudi zato, ker je Jupiter zelo daleč. V dneh trkov je bil od nas oddaljen kar okoli 770 milijonov kilometrov.



Slika 2.

Večji kosi kometa so imeli ob trku tako veliko kinetično energijo (okoli deset milijonov megaton TNT), da je po kratkemu blisku ob prehodu posameznega kosa kometa skozi vrhnje plasti atmosfere nastala ogromna krogla razbejlenih plinov, ki se je dvignila nekaj sto kilometrov visoko in kakšno minuto ali več močno svetila v infrardeči svetlobi (sliki 4 in 5 na zadnji strani ovitka).

Eksplodije so močno vplivale na Jupitrovo 'vreme' in magnetno polje. Povzročile so tudi motnje v radijskem sevanju planeta. Po moči in obsegu bi lahko primerjali posledice teh trkov s tistimi, ki naj bi pred nekaj deset milijoni let na Zemlji povzročile izginotje dinosavrov. Nekateri napovedujejo, da bi zaradi niza trkov celo utegnil nastati prašni prstan okrog Jupitra.

Opomba: Številne fotografije in bogat opazovalni material, povezan s trkom tega kometa z Jupitrom, lahko dobimo preko računalniškega omrežja Internet na najdišču za anonimni FTP: SEDS.LPL.arizona.edu, v direktoriju /pub/astro/SL9. Od tam so vzete tudi slike za prvo in zadnjo stran ovitka Preseka.

Zadnja vest pred tiskom: Na 1. kongresu matematikov, fizikov in astronomov Slovenije (20. in 21. 10. 1994 v Ljubljani) je astrofizik Janez Zorec, ki deluje na astronomskem observatoriju v Parizu, povedal, da so, tik pred njegovim odhodom na kongres, na neki fotografiji odkrili, da Shoemaker-Levy 9 morda ni bil komet (ledena gmeta), ampak asteroid (kamnita gmeta).

Matjaž Vencelj

MATEMATIKA

O ŠTEVILU π

Število π je od nekdaj vzbujalo veliko zanimanja tako pri matematikih kakor pri nematematikih. Je namreč razmerje med obsegom in premerom kroga, krog pa velja za najpopolnejšo krivuljo.

Že v starem veku je Arhimed izračunal, da je π približno enak $\frac{22}{7} = 3\frac{1}{7}$. Veliko boljši približek je ulomek $\frac{355}{113}$. Vendar števila π ni mogoče predstaviti z nobenim ulomkom, ker ni racionalno temveč iracionalno število. To dejstvo je dokazal leta 1761 švicarski matematik Lambert. (Tudi razmerje med diagonalo in stranico kvadrata, ki je enako $\sqrt{2}$, je iracionalno število. To so odkrili že stari Grki v starem veku.)

Če razvijemo π v decimalni ulomek, dobimo

$$\pi = 3.141\ 592\ 653\ 589\ 793\ 238\ 46 \dots$$

Za decimalno piko sledi neskončno decimalk, ki se ne ponavljajo periodično, ker π ni racionalen. Zato v njegovem desetiškem zapisu ne moremo razbrati nobene zakonitosti med števki. Isto seveda velja, če razvijemo π v dvojiškem ali kakem drugem številskem sistemu. Ljudje z bujno domišljijo so zato prišli na misel, da je morda v zaporedju števk števila π na neki skriti način zapisana usoda sveta, oziroma, da tiči v njem kako pomembno sporočilo. Do tega sporočila bi prišli, če bi odkrili ključ, v katerem je šifrirano, in seveda izračunali dovolj decimalk števila π . Včasih je bilo to računanje sila zamudno delo. Danes so ga olajšali zmogljivi računalniki in z njimi so izračunali π na milijone mest natančno.

Kakor rečeno, v zaporedju števk števila π ni kakšne razvidne zakonitosti niti v desetiškem niti v kakem drugem sistemu. Pred kratkim pa je R. J. Duffin z univerze Carnegie Mellon, Pittsburgh, opisal, bolj za šalo kakor za res, neki razvoj za realna števila, v katerem se π izraža na videz presenetljivo preprosto. Oglejmo si ta razvoj!

Naj bo x dano pozitivno število. Pomnožimo ga zaporedoma z vsemi naravnimi števili 1, 2, 3, ... Denimo, da smo x pomnožili z n . Od produkta nx odštejemo njegov celi del, ostanek, ki leži med 0 in 1, označimo z (nx) . (Celi del danega realnega števila je največje celo število, ki ne presega tega števila.) Če je nx celo število, je seveda celi del enak nx in je v tem primeru ostanek $(nx) = 0$. V splošnem pa velja $0 \leq (nx) < 1$. Pomnožimo zdaj (nx) s 7 in si oglejmo celi del produkta $7(nx)$. Ta celi del označimo z a_n . Ker je $7(nx) < 7$, je a_n eno izmed števil 0, 1, 2, 3, 4, 5, 6. Na opisani način dobimo za vsak n neko število a_n , ki ga imenujemo n -ta števka števila x .

Zapišimo lepo po vrsti vse številke

$$a_1 \ a_2 \ a_3 \ a_4 \dots$$

Temu zaporedju bomo rekli Duffinov razvoj števila x .

Za zgled poiščimo Duffinov razvoj od $x = \frac{1}{3}$. Pri $n = 1$ imamo $(nx) = (x) = \frac{1}{3}$. Največje celo število, ki ne presega produkta $7(x) = \frac{7}{3} = 2\frac{1}{3}$, je 2 in je zato $a_1 = 2$. Pri $n = 2$ imamo $(2x) = \frac{2}{3}$ in $7(2x) = \frac{14}{3} = 4\frac{2}{3}$, torej $a_2 = 4$. Nadalje je $3x = 1$, $(3x) = 0$, $7(3x) = 0$, tako da je $a_3 = 0$. Podobno izračunamo $a_4 = 2$, $a_5 = 4$, $a_6 = 0$ itd. Duffinov razvoj za $x = \frac{1}{3}$ se glasi

$$240 \ 240 \ 240 \dots$$

Trojka števk 240 se periodično ponavlja.

Oglejmo si zdaj razvoj za π . V tem primeru je $(\pi) = \pi - 3 = 0.14159\dots$ in $7(\pi) = 0.99114\dots$, torej $a_1 = 0$. Nadalje imamo $(2\pi) = 0.28318\dots$ in $7(2\pi) = 1.98229\dots$, tako da je $a_2 = 1$. Podobno izračunamo $(3\pi) = 0.42477\dots$, $7(3\pi) = 2.97344\dots$, se pravi $a_3 = 2$. Če tako nadaljujemo, dobimo po vrsti $a_4 = 3$, $a_5 = 4$, $a_6 = 5$, $a_7 = 6$, potem pa spet od začetka: $a_8 = 0$, $a_9 = 1$ itd. Za π smo našli tale Duffinov razvoj

$$0123456 \ 0123456 \ 0123456 \ 012\dots$$

Sedmerica zaporednih števk 0123456 se periodično ponavlja. Dobljeni razvoj je res zelo pregleden. Pa teče to tako lepo v nedogled? Žal moramo povedati, da je imel tu vrag svoje prste vmes in je red pokvaril. Šestnajstkrat se ponovi omenjena sedmerica števk, na stotrinajstem mestu se red podre, namesto 0 se tam pojavi številka 6.

Na koncu postavimo bralcu nekaj vprašanj:

1. Kakšen je Duffinov razvoj za $x = 3\frac{1}{7}$?
 2. Kje tiči razlog, da se v razvoju števila π sedmerica števk 0123456 ponovi šestnajstkrat? (Arhimedov približek $3\frac{1}{7}$ za π je nekoliko prevelik, ulomek $\frac{355}{113}$ nekoliko premajhen. Pišimo $\pi = 3 + \frac{1-\epsilon}{7}$, kjer je ϵ pozitiven. Ocenimo ϵ .)

3. Denimo, da poznamo celi del števila x in njegov Duffinov razvoj. Ali je s temi podatki x določen?

Literatura:

R. J. Duffin, The Patron Saint of Mathematics. The Math. Intelligencer, Vol. 15, No. 1, str. 52.

Ivan Vidav

KLEPEC

V hribovitih krajih je ponekod potrebno dvigniti vodo iz izvira v višji zbiralnik. Če tam ni električne napeljave, uporabijo črpalko - klepec, ki jo poganja voda iz izvira. Tako napravo imajo pri Kocbekovem domu na Korošici v Kamniških Alpah.

Vse vode iz izvira seveda taka črpalka ne more dvigniti v zbiralnik. Voda z maso m , ki privre iz izvira s hitrostjo v , ima kinetično energijo $W_k = \frac{1}{2}mv^2$. Enaka masa vode v zbiralniku ima potencialno energijo glede na izvir $W_p = mgh$, kjer smo s h označili višinsko razliko med zbiralnikom in izvirom. Če črpalka vso razpoložljivo kinetično energijo W_k porabi le za premagovanje teže pri dvigu vse vode v zbiralnik, velja

$$W_k = W_p,$$

saj voda v zbiralniku miruje. Od tod dobimo

$$h_0 = \frac{v^2}{2g}.$$

Hitrost vode iz izvira je, denimo, 1 ms^{-1} . Višina h_0 je v tem primeru le nekaj centimetrov.

Če naj bo višina h nekaj metrov, lahko črpalka dvigne le del vode z maso m_1 . V tem primeru velja

$$W_k = W_{p1} = m_1gh$$

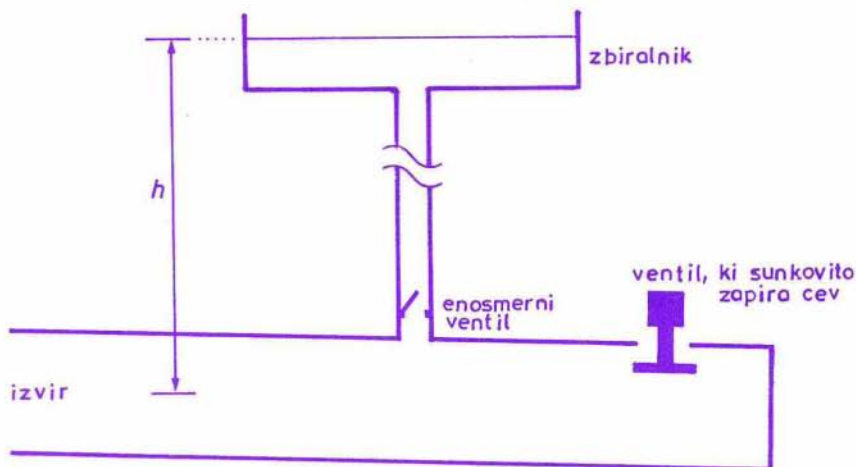
ali

$$h = \frac{m}{m_1} \frac{v^2}{2g} = \frac{m}{m_1} h_0.$$

Pri zbiralniku z višinsko razliko $h = 5 \text{ m}$, lahko črpalka dvigne največ en odstotek vse vode iz izvira.

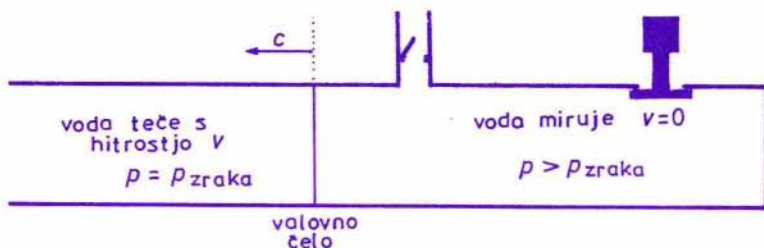
Delovanje klepca je prav zanimivo. Slika 1 kaže močno poenostavljeno in nekoliko prirejeno zgradbo črpalke. Po zelo dolgi, rahlo nagnjeni cevi priteče voda iz izvira s hitrostjo v . Ta pritočna cev je na koncu zaprta z navpično steno, voda odteka skozi odprtino na zgornjem delu cevi. Poseben čep v cevi v rednih presledkih sunkovito zapira odtok vode zaradi široke ploščice, ki jo voda s čepom vred potisne navzgor, ko doseže dovolj veliko hitrost. Čep spet potone, ko postane tlak vode v cevi enak zračnemu. Voda v cevi spet začne teči in igra se ponovi. Čep pri zapiranju cevi odda zvok, ki spominja na

klepanje kose, od tod ima črpalka ime (klepec je kladivo, s katerim klepljemo koso). Blizu čepa je vgrajena navpična cev s premerom, ki je zelo majhen v primeri s premerom pritočne cevi. V to cev je vgrajen enosmerni ventil, ki omogoča le tok vode navzgor, na zgornjem koncu te cevi pa je zbiralnik.



Slika 1. Poenostavljena zgradba klepca. Pritočna cev je zelo dolga in ima precej večji presek kot cev, ki vodi do zbiralnika. Pri računu tlaka za valovnim čelom tako te cevi ni treba upoštevati, prav tako se izognemo vprašanju odbojev na koncu pritočne cevi. Prav tako privzamemo, da čep zapre odtok vode hipoma.

V trenutku, ko čep zapre cev, se tlak vode v cevi močno poveča. Denimo, da čep hipoma zapre cev. Po cevi od čepa navzgor potuje motnja v obliki *valovnega čela*. Pred valovnim čelom voda še vedno potuje s hitrostjo v , njen tlak pa je enak zunanjemu. Za valovnim čelom, to je predelom med valovnim čelom in čepom, voda miruje, njen tlak pa je povišan (slika 2). Valovno čelo je torej meja med mirujočo vodo pri večjem tlaku, kot je zunanji, in gibajočo se vodo pri zunanjem tlaku. Valovno čelo se giblje v cevi zelo hitro. Če privzamemo, da so cevi toge, je njegova hitrost ravno enaka hitrosti zvoka v vodi, $c \approx 1400 \text{ ms}^{-1}$. Tlak za valovnim čelom v zaustavljeni vodi presega hidrostatični tlak vode v navpični cevi. Enosmerni ventil se zato odpre in spusti nekaj vode v zbiralnik. Tudi po navpični cevi se širi valovno čelo, le da se v tem primeru voda za čelom giblje, pred čelom pa miruje.



Slika 2. Valovno čelo loči del vode, ki miruje pri povečanem tlaku, od vode, ki se giblje z nemoteno hitrostjo v pri zunanjem tlaku. Motnja se giblje z desne proti levi s hitrostjo zvoka v v vodi. Zadnja stena cevi deluje na vodo s silo $F = pS$.

Tlak vode za valovnim čelom lahko preprosto izračunamo iz izreka o gibalni količini. Denimo, da je od sunkovitega zaprtja cevi pretekel čas t . Valovno čelo se je v tem času oddaljilo za ct , kjer je c hitrost valovnega čela. Masa ustavljene vode je tedaj

$$m = Spct,$$

kjer je S presek cevi, ρ pa gostota vode. Sila, ki je to vodo v času t ustavila, je sila navpične stene cevi

$$F = pS.$$

Po izreku o gibalni količini je sunek te sile enak spremembi gibalne količine vode mv

$$Ft = mv$$

ali

$$pSt = Spctv.$$

Iz zadnje enačbe sledi

$$p = \rho cv.$$

Pri hitrostih $v = 1 \text{ ms}^{-1}$ in $c = 1400 \text{ ms}^{-1}$ dobimo $p = 1,4 \cdot 10^6 \text{ Nm}^{-2}$. To je v primeri s hidrostatičnim tlakom vode iz zbiralnika pri enosmernem ventilu $p = \rho gh = 5 \cdot 10^4 \text{ Nm}^{-2}$ kar za velikostno stopnjo več. Zares je tlak vode v cevi klepca manjši. Upoštevati moramo, da čep ne zapre cevi hipoma in da je pritočna cev dolga le nekaj metrov ($L \approx 5 \text{ m}$). Zato se motnja na začetku cevi odbije in po času L/c spremeni hitrost in tlak v pritočni cevi. Kljub

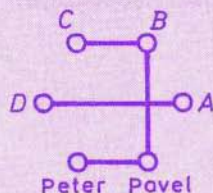
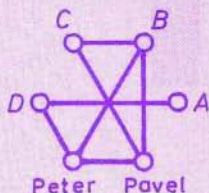
temu je tlak dovolj časa večji od hidrostaticnega in klepec deluje. Navedimo še nekaj podatkov. Dolžina pritočne cevi je med 5 in 15 m, hitrost vode v dotočni cevi pa med 3 in 10 ms^{-1} . Pritočna in navpična cev sta navadno enakih premerov, zato so razmere ob stiku teh cevi bolj zapletene kot v našem poenostavljenem klepcu. Frekvenca zapiranja cevi je med 1 in 5 Hz, najbolj ugodno razmerje med h in h_0 pa je 6. V tem primeru je izkoristek naprave okoli 40%.

Andrej Likar

POVEZANOST - Rešitev s str. 2

Pomagajmo si z grafom. Prijatelje označimo s točkami, njihova medsebojna srečanja pa s povezavami med točkami.

Če je graf srečanj povezan, torej tak, da se je po njegovih povezavah mogoče sprehoditi od poljubno izbrane točke do katerekoli izmed preostalih petih (glej primer na spodnji levi risbi), se bo vseh šest prijateljev zagotovo srečalo že na Petrovem sestanku. Preostane nam le še dokaz, da se bodo v nasprotnem primeru vsi zagotovo srečali pri Pavlu.



Če graf srečanj ni povezan, razpade v vsaj dve med seboj nepovezani komponenti (glej primer na desni risbi). Na Pavlovem sestanku se bodo zagotovo znašli vsi tisti prijatelji, ki niso v njegovi komponenti povezanosti (na primer z desne risbe sta to D in A). Teh namreč Pavel med počitnicami ni srečal in jih bo že sam povabil. Vsak izmed prijateljev iz Pavlove komponente povezanosti (na risbi B , C in Peter) pa bo prejel povabilo slehernega prijatelja iz ne-Pavlove komponente in bo zaradi tega tudi na Pavlovem sestanku. Očitno bo v vsakem primeru na tem sestanku vsa šesterica prijateljev.

Poskusi dokazati, da velja pravkar dokazana lastnost - da bodo vsi prijatelji iz družbe povabljeni na vsaj enega izmed obeh sestankov - tudi pri poljubnem številu prijateljev, če sta le med njimi vsaj Peter in Pavel, ki vabita na sestanke po opisanem pravilu.

Vilko Domajnko

14. PODROČNO TEKMOVANJE IZ FIZIKE ZA OSNOVNOŠOLCE

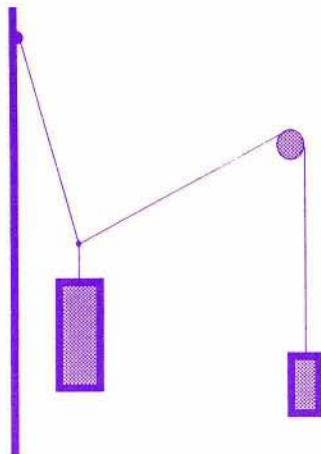
7. razred

1. Oцени, kolikokrat lahko s črnilom ene bombice napišeš napis

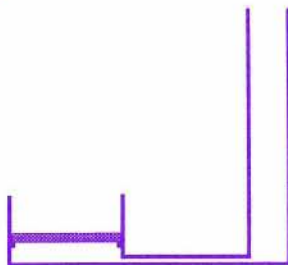
FIZIKA.

Prostornina bombice je $0,95 \text{ cm}^3$, preden se črnilo posuši sta širina in višina črte $0,4 \text{ mm}$ in $0,03 \text{ mm}$. Računaj, da vsako črto potegneš samo enkrat.

2. Na levi strani je vrv pritrjena na steno, na desni pa je napeljana preko škripca, kot kaže slika. Vrv in obe uteži mirujejo. Kolikšna je masa leve uteži, če je masa desne uteži $3,0 \text{ kg}$. Vrvica je lahka, trenje v škripcu lahko zanemarimo. Obliko vrvi si natančno preriši (ali prekopi-rāj) na svoj list. Nalogo rešuj z grafičnim načrtovanjem sil.



3. Dve valjasti posodi, prva z višino 12 cm in presekom 10 cm^2 , druga z višino 1 m in presekom $2,5 \text{ cm}^2$, sta spodaj povezani s tanko cevko. V širši posodi je $2,0 \text{ cm}$ od dna bat z maso $0,40 \text{ kg}$. Nato začnemo v ožjo posodo natakati vodo, pri čemer je volumni pretok $1,25 \text{ cm}^3/\text{s}$.



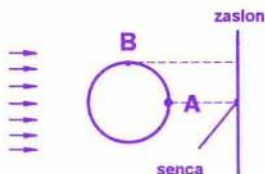
- a) Čez koliko časa se bo bat začel premikati?
b) Kolikšno največjo višino doseže voda v ožji posodi? Bat se vodotesno prilaga steni posode, zrak pa lahko uhaja, trenje med batom in steno posode smeš zanemariti. Ko potisne voda bat do vrha posode, začne tam voda iztekati.

4. Miha je v prvo menzuro nalil 48 cm^3 vode, v enako drugo pa 48 cm^3 olja. Pripravil si je priročen areometer iz 22 cm dolge slamice, vanjo je na enem koncu potisnil svinčeno kroglico z maso $8,0 \text{ g}$, nakar je oba konca slamice zatesnil. Slamico je postavil najprej v prvo, nato pa še v drugo menzuro. Kolikšna dolžina slamice gleda iz prve in kolikšna iz druge kapljevine? Presek slamice je $0,5 \text{ cm}^2$, presek posamezne menzure $3,0 \text{ cm}^2$, gostota olja $0,80 \text{ g/cm}^3$, gostota vode $1,0 \text{ g/cm}^3$, masa slamice je zanemarljiva glede na maso svinčene kroglice.

5. Mrežo kocke sestavimo iz $1,000 \text{ m}$ dolgih palic, in sicer so vse vodoravne palice iz aluminija, navpične pa jeklene. Za koliko se spremeni prostornina, ki jo palice določajo, če vse skupaj segrejemo za 100 K ? Podatke o razteznanju palic poišči v učbeniku.

8. razred

1. Majhna kroglica enakomerno kroži po krožnici, ki leži v navpični ravnini in ima polmer 20 cm . Kroglica napravi 20 obhodov v minuti. Kroglico osvetlmo z vzporednim snopom svetlobe, kot kaže slika, in opazujemo gibanje sence na zaslonu. Senca pri tem potuje gor in dol.

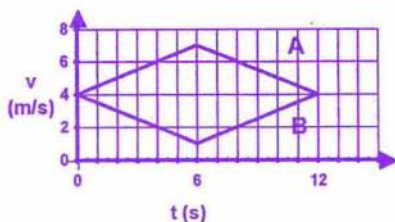


- S kolikšno hitrostjo se premika senca po zaslonu, ko je kroglica v legi A?
- S kolikšno hitrostjo pa se premika senca po zaslonu, ko je kroglica v legi B?

2. Gibanji avtomobilov A in B sta predstavljeni na skupnem diagramu $v=v(t)$.

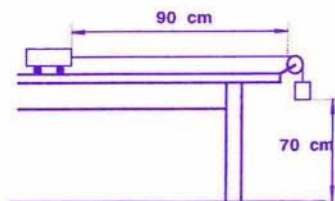
- Kolikšna je razdalja med avtomobiloma na koncu, če sta bila ob začetku gibanja skupaj?

- Kolikšno hitrost avtomobila A izmeri voznik v avtomobilu B ob časih $t_1 = 0 \text{ s}$, $t_2 = 6 \text{ s}$ in ob $t_3 = 12 \text{ s}$?

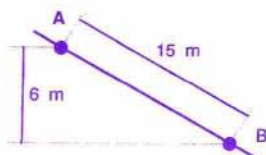


3. Voziček z maso 100 dag najprej držimo v razdalji 90 cm od škripca, kot kaže slika, nato pa ga spustimo. Masa majhne uteži je 30 g , vrstica in škripec pa sta zelo lahka. Med gibanjem voziček zavira sila trenja, ki je enaka 2% teže vozička.

- a) Izračunaj pospešek vozička, ko se je premaknil 10 cm iz začetne lege.
 b) Izračunaj pospešek vozička, ko je bil 10 cm oddaljen od škripca.
 c) S kolikošno hitrostjo se je voziček zaletel v škripec, če je celotno gibanje trajalo 4,4 sekund?

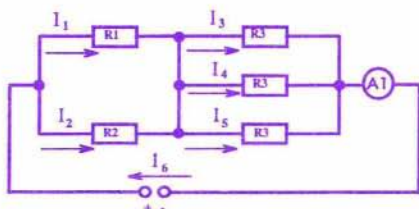


4. Slovenska smučarka je na olimpijskem smuku drvela po strmini z naklonom, ki je prikazan na sliki. V točki A je imela hitrost 100 km/h, hitrost pa se ji je vsako desetinko sekunde povečala za 1 km/h. 0,50 sekunde kasneje se je peljala mimo točke B, ki je bila od točke A oddaljena 15 m. Masa smučarke skupaj s smučmi je bila 70 kg.



- a) Za koliko se je smučarki skupaj s smučmi povečala kinetična energija med točkama A in B?
 b) Približno kolikšna je bila sila upora zraka na smučarko med točkama A in B? Pri tako veliki hitrosti je sila trenja zanemarljiva proti sili upora zraka.

5. Imamo tri različne vrste upornikov: R_1 , R_2 in R_3 . Z napetostnim izvirom in ampermetrom A1 jih povežemo v vezje, ki je prikazano na sliki.



- a) Nariši, kam bi moral vezati ampermetr A2, če bi želel določiti vse tokove od I_1 do I_6 !
 b) Zapiši, katera dva tokova bi meril s priključenima ampermetroma. Napiši tudi enačbe, po katerih bi lahko izračunal vse preostale tokove.

Zlatko Bradač, Mirko Cvahte

DALJNOSEŽNE POSLEDICE PREPROSTE ENAČBE

S pomočjo enačbe $A^2 + B^2 = (A + B)^2 - 2AB$ dokaži:

- a) Nobeno število oblike $a^4 + 4b^4$, večje od 5, ni praštevilo.
 b) Nobeno število gornje oblike ni potenca praštevila.
 c) Število $2^{58} + 1$ ni praštevilo!

Jurij Kovič

ARITMETIČNA ŠTEVILA

V programskem jeziku logo sestavi ukaz zaporedja :n, ki kot parameter dobi naravno število n in vrne vse zapise števila n v obliki vsote prvih nekaj členov aritmetičnega zaporedja z začetnim členom 1 in celoštevilsko razliko med zaporednimi členi. Rezultat naj bo podan kot seznam parov, par je zopet seznam z dvema elementoma, kjer posamezni par $[k \ d]$ predstavlja zapis števila n v obliki vsote prvih k členov aritmetičnega zaporedja z razliko d med zaporednimi členi. V vsoti naj vedno nastopata vsaj dva člena. Tako klic zaporedja 15 vrne seznam $[[2 \ 13] \ [3 \ 4] \ [5 \ 1] \ [15 \ 0]]$, ki predstavlja vsote

$$\begin{aligned} 15 &= 1+14 \\ &= 1+5+9 \\ &= 1+2+3+4+5 \\ &= 1+1+1+1+1+1+1+1+1+1+1+1+1 \end{aligned}$$

Rešitev naj bo karseda preprosta in hitra.

Martin Juvan

IGRA "LEGO" – Rešitve s str. 26

- O₂: Drugi igralec lahko vedno položi kvader na središčno simetrično mesto kot prvi.
- O₃: Prvi igralec položi kvader na nasprotno stran kot v prvi potezi. S tem prevede problem na zgled O₁ ter zmaga.
- O₄: Prvi igralec položi kvader v sredino in zreducira problem na zgled O₁.
- K₃: Zmaga prvi igralec s potezo (1,2;5,6), saj razdeli polje nepravilne oblike na dve enaki polji in dobi končnico K₂.
- K₄: Zmaga prvi igralec s potezo (1,2;7,8). Nastali polji sicer nista enake oblike, vendar lahko tudi tu odgovarja prvi igralec drugemu igralcu podobno kot v končnici K₂ (upognjeno polje si misli zravnano).
- K₅: Zmaga prvi igralec s potezo (9,10;1,2). Na potezo drugega igralca vedno najde tak odgovor, da dobi paroma enaka ali enakovredna polja. Imenujmo A polje z 2×2 ali 2×3 čepki, B polje z 2×4 čepki in C polje z 2×8 čepki. Značilno za polje A je, da ga poteza uniči; polje B

REŠITVE NALOG

nudi izbiro, poteza ga spremeni bodisi v A bodisi v 0 . Podobno gre C v $(A + B)$ ali v $(A + A)$. Polje z 2×5 čepki je enakovredno ločenima poljema $(A + A)$, saj ga katerakoli poteza spremeni v A . Polje z 2×6 čepki pa je enakovredno $(A + B)$; isto velja za polje s 4×4 čepki s pokritim vogalom 2×2 . Poglejmo sedaj odgovore. V vsaki vrstici je levo poteza drugega, desno pa odgovor prvega. Velja tudi obratno z zamenjano vlogo desno-levo. Na koncu je zmagovita pozicija, ki jo je dosegel prvi.

$(2,3;8,9) \leftrightarrow (9,10;6,7)$ ali $(9,10;4,5) : (A + A)$

$(1,2;7,8) \leftrightarrow (9,10;3,4)$ ali $(9,10;5,6) : (A + B) + (A + B)$

$(2,3;7,8) \leftrightarrow (1,2;9,10) : A + C$

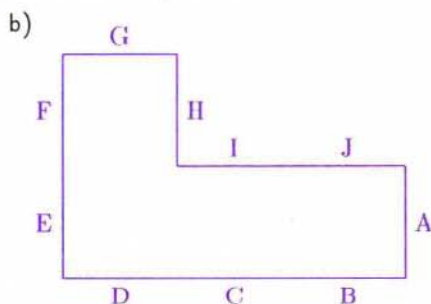
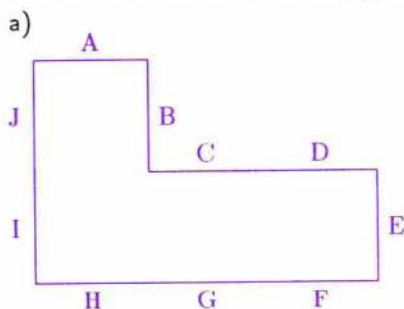
Slednja pozicija je tudi zmagovita, saj če nasprotnik uniči A , napravi prvi $C \rightarrow (A + A)$ (ali obratno), na nasprotnikov $C \rightarrow (A + B)$ pa prvi uniči B .

Pripomba: Seveda najdemo več enakovrednih rešitev, ki so zrcalne zgornjim.

Mitja Rosina

ZABAVA – Rešitev s str. 42

Ker so vsi povabljeni sedeli po abecedi v smeri urnega kazalca (1) in ker je gostitelj sedel na koncu mize (6), sta možni dve razporeditvi:



a) Najprej predpostavimo, da so povabljeni sedeli za mizo po prvi razporeditvi.

Ker sta morilec in žrtev povabljenca (8) in sta si sedela nasproti (2), sledi, da v umoru nista udeležena niti gostitelja Andrej in Barbara niti povabljenca, ki sta jima sedela nasproti - Helena in Jasna. Možni pari morilec-žrtev ali žrtev-morilec so naslednji: Cene-Gregor, Darja-Freda in Ivan-Edvard.

Denimo, da je v umoru sodeloval par Cene-Gregor. Njuni soprogi sta potemtakem Darja in Freda, saj si morata tudi oni dve sedeti nasproti (3). Ker pa drug poleg drugega sedita samo gostitelja (4) in ker tudi žrtev ne sedi poleg morilčevega partnerja (5), je nemogoče, da bi bil par Cene-Gregor udeležen pri umoru. Prav tako je nemogoče po podobnem premisleku, da bi bil v umoru udeležen par Darja-Freda.

Preostane nam še par Edvard-Ivan. Tedaj iz trditve (7) sledi, da je morilec Ivan, žrtev pa Edvard. Njuni soprogi sta lahko samo Darja in Freda (3). Ker pa žrtev ne sedi niti poleg svoje (4) niti poleg morilčeve soproge (5), lahko tudi ta par izločimo.

Potemtakem ta razporeditev ni možna.

b) Podobno kot prej iz trditve (8) in (2) sledi, da Andrej, Barbara, Edvard in Jasna niso udeleženi pri umoru. Preostanejo še pari Darja-Gregor, Freda-Helena in Cene-Ivan.

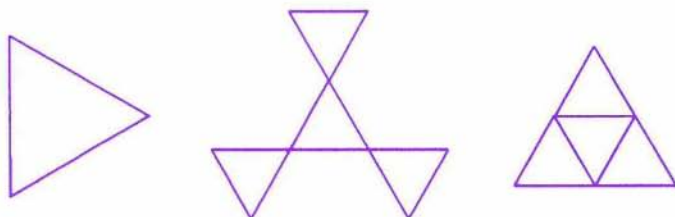
Par Darja-Gregor ni sodeloval pri umoru, saj za mizo ni več para, v katerem bi sedela nasproti moški in ženska.

Vzemimo par Freda-Helena. Ker morilec ne sedi sam ob eni stranici mize (7), je morilka Freda, žrtev pa Helena. Iz (3) sledi, da sta lahko njuna zakonska partnerja samo par Cene-Ivan. Ker pa žrtev ne sedi niti poleg svojega partnerja (4) niti poleg morilčevega (5), lahko tudi ta par izločimo.

Torej je morilski par Cene-Ivan, Freda in Helena pa sta njuni soprogi. Potem iz (4) in (5) sledi, da je edina možna razporeditev takšna, pri kateri morilec sedi poleg žrtvinega zakonskega partnerja. Tako je Ivan morilec, Freda je njegova soproga, Cene je bil žrtev in Helena njegova soproga.

Mateja Rojc

NOVI NEZNANI LIKI - 1. del – Rešitev s str. 17



Začetni položaj želve je na slikah označen s krožcem.

Martin Juvan

RAČUNALNIŠTVO

MNOŽICE IZ RAČUNALNIKA

Na stikih med raznorodnimi vedami se že od nekdaj dogajajo posebno zanimive stvari. To velja tudi za znanosti, ki mejijo na matematiko; mednje tradicionalno uvrščajo astronomijo, fiziko in tehniko. V zadnjih nekaj desetletjih pa so začeli matematične metode uporabljati tudi v kemiji, biologiji, jezikoslovju, sociologiji in v številnih drugih znanostih, za katere je pred tem veljalo mnenje, da z matematiko nimajo nobene zveze. Precej zaslug za vstop matematike kot pomožne vede v te znanstvene panoge ima *kombinatorika*, o kateri zgodovina matematike poroča, da ima svoje korenine med ugankami in razvedrilno matematiko, v raznih igrah (tudi tistih za denar), v začetkih verjetnostnega računa in da je nasploh dolgo životarila na meji med znanostjo in razvedrilom.

Dandanes pravimo, da se *kombinatorika ukvarja z vprašanji, ki so povezana z razmeščanjem elementov končnih množic*. Njene rezultate izdatno uporabljajo tudi v računalništvu, saj so kombinatorični algoritmi podlaga številnim računalniškim programom. V sestavku se bomo dotaknili predstavitve dane končne množice v računalniku in si ogledali dva postopka za oblikovanje podmnožic množice prvih n naravnih števil.

V računalniku

Imejmo naravno število n in označimo z $\mathbb{I}N_n$ množico vseh naravnih števil od 1 do n . Vprašamo se: Kako predstaviti v računalniku poljubno podmnožico množice $\mathbb{I}N_n$?

Ena izmed možnosti je, da za vsako naravno število od 1 do n preverimo, ali pripada množici S . Odgovor *Da* označimo z 1, odgovor *Ne* pa z 0. Odgovore zapišemo po vrsti z desne proti levi; tako dobimo za vsako podmnožico S množice $\mathbb{I}N_n$ natanko določeno zaporedje enic in ničel.

Zgled: $n = 8$,

$$\mathbb{I}N_8 = \{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8\},$$

$$S = \{1, 2, 3, 6\}.$$

Množici S ustreza zaporedje odgovorov 00100111.

8	7	6	5	4	3	2	1
0	0	1	0	0	1	1	1

Mimogrede omenimo, da *turbo pascal* namenja takšni predstavitvi množice največ 32 krat 8 bitov in s tem omogoča uporabo osnovne množice, ki ima največ 256 elementov.

Nabor ničel in enic, ki smo jih priredili množici S , lahko razumemo kot dvojiški zapis števila; imenujmo ga *število množice* S in ga označimo s $\sigma(S)$. S tem je vsaki podmnožici množice $\mathbb{I}N_n$ prirejeno natanko določeno število in vsaki n -mestni dvojiški številki ustreza natanko določena podmnožica množice $\mathbb{I}N_n$. Množica $\mathbb{I}N_n$ ima torej toliko podmnožic, kot je števil $0, 1, \dots, 2^n - 1$, ki se jih da zapisati z n -mestnimi dvojiškimi številkami. Ker je takih števil 2^n , lahko rečemo: *Množica z n elementi ima natanko 2^n podmnožic.*

Zgled: Podmnožice množice $\mathbb{I}N_3$ in njihova dvojiško zapisana števila:

S	$\emptyset$	$\{1\}$	$\{2\}$	$\{1, 2\}$	$\{3\}$	$\{1, 3\}$	$\{2, 3\}$	$\{1, 2, 3\}$
$\sigma(S)$	000	001	010	011	100	101	110	111

Iz računalnika

Pri oblikovanju podmnožic množice $\mathbb{I}N_n$ si najprej izberemo *prvo* podmnožico — običajno je to *prazna* množica — in pravilo, ki vsaki pravi podmnožici $S \subset \mathbb{I}N_n$ priredi njeno *neposredno naslednico* S' . Za začetek oblikujmo postopek, ki izpiše vse podmnožice množice $\mathbb{I}N_n$ po njihovih naraščajočih številih.

Naj bo S prava podmnožica množice $\mathbb{I}N_n$ in $\sigma(S)$ njeno število. Kako poiskati množico S' , ki ima število $\sigma(S) + 1$? Pomislimo na dvojiško zapisano število $\sigma(S)$ in na to, kako mu prištejemo 1:

- Med ničlami številke $\sigma(S)$ poiščemo tisto, ki leži skrajno desno; takšna ničla zagotovo obstaja, ker je S *prava* podmnožica množice $\mathbb{I}N_n$.
- Najdeno ničlo zamenjamo z enico, vse enice, ki ležijo desno od nje, pa zamenjamo z ničlami.

Enici, s katero smo zamenjali skrajno desno ničlo številke $\sigma(S)$, ustreza najmanjši element množice $\mathbb{I}N_n \setminus S$. Označimo ga s k ; enicam, ki smo jih zamenjali z ničlami, ustreza tedaj množica $\{1, 2, \dots, k - 1\}$.

Zgled: $n = 8$, $S = \{1, 2, 3, 5, 6\}$; množica S ima številko $\sigma(S) = 00110111$. Nadalje je $k = \min(\mathbb{I}N_8 \setminus S) = \min\{4, 7, 8\} = 4$ in je $S' = S \cup \{4\} \setminus \{1, 2, 3\}$, torej $S' = \{4, 5, 6\}$. Potem je $\sigma(S') = 00111000 = \sigma(S) + 1$.

Imamo

```

postopek Naredi_podmnožice_1( $IN_n$ : množica);
 $k$ : naravno število;
 $S$ : množica;
od tod
 $S \leftarrow \emptyset$ ;
izpiši_množico( $S$ );
ponavljaj
 $k \leftarrow \min(IN_n \setminus S)$ ;
 $S \leftarrow S \cup \{k\} \setminus \{1, 2, \dots, k-1\}$ ;
izpiši_množico( $S$ );
do izpolnitve pogoja  $S = IN_n$ ;
do tod.

```

Oglejmo si še postopek, ki izpiše podmnožice množice IN_n v *leksikografskem* vrstnem redu. Ime izvira iz grških besed *lexis* (beseda) in *graphein* (pisati) in označuje vrstni red, ki ga uporabljamo pri razvrščanju besed v slovarjih. Naj bosta $S_1 = \{i_1, i_2, \dots, i_p\}$ in $S_2 = \{j_1, j_2, \dots, j_r\}$ različni podmnožici dane množice IN_n , ki smo jima elemente zapisali *po velikosti* od najmanjšega do največjega. Za množico S_1 rečemo, da je *leksikografsko pred* množico S_2 , če je prazna ali če obstaja takšno naravno število k , da se množici S_1 in S_2 ujemata v prvih $k-1$ elementih in je $i_k < j_k$.

Zgled: Podmnožice množice IN_3 leksikografsko uredimo v zaporedje $\emptyset, \{1\}, \{1, 2\}, \{1, 2, 3\}, \{1, 3\}, \{2\}, \{2, 3\}, \{3\}$.

Naj bo S kaka prava podmnožica množice IN_n in m njen največji element; če je množica S prazna, vzemimo $m = 0$. Podmnožice množice IN_n , ki leksikografsko sledijo množici S , naredimo tako, da

za vsak naravni k od $m+1$ do n priključimo množici S število k in naredimo vse podmnožice množice IN_n , ki imajo množico $S \cup \{k\}$ za svoj začetni del.

Glede na to, da je prazna množica podmnožica vsake množice, je delo smiselno začeti z $S = \emptyset$; uporabimo

```

postopek Naredi_podmnožice_2( $m, n$ : celi števili;  $S$ : množica);
 $k$ : naravno število;
od tod
izpiši_množico( $S$ );
za vsak  $k$  od  $m+1$  do  $n$  ponovi
  Naredi_podmnožice_2( $k, n, S \cup \{k\}$ );
do tod.

```

Postopek sprožimo s klicem $\text{Naredi_podmnožice_}2(0, n, \emptyset)$.

Vabim vas, da poskusite napisati postopke, ki izpišejo podmnožice množice $\mathbb{N}_n$ še v kakem drugem vrstnem redu, na primer

- po naraščajočem številu elementov, pri čemer so množice z enakim številom elementov razvrščene po svojih številkah ali pa leksikografsko,
- tako, da se vsaki dve sosednji množici razlikujeta natanko v enem elementu.

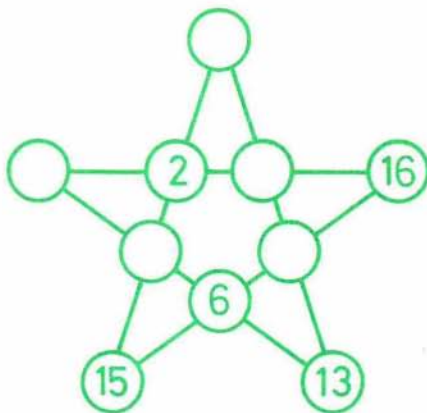
Franc Savnik

NALOGE ZA OGREVANJE

Naloge so v letu 1994 reševali učenci osnovnih šol v občini *Ljubljana Moste Polje* na šolskem tekmovanju za bronasto Vegovo priznanje. Tudi letos smo jih izbrali, priredili oziroma sestavili učitelji na sestanku občinskega aktiva.

5. razred

1. Na tej magični zvezdi je vsota števil na vsaki ravni črti enaka 40. Vpiši manjkajoča števila.

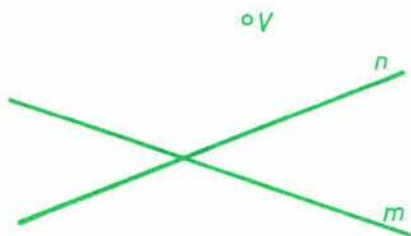


2. Barbara je po razredih prodajala vstopnice za šolski ples. V vsakem razredu je prodala eno vstopnico manj kot polovico vstopnic, ki jih je imela ob vstopu v razred v roki. Po obiskih v štirih razredih ji je ostalo še pet vstopnic. Koliko vstopnic je imela na začetku?

3. Izračunaj vrednost izraza

$$(((130 + 74 \cdot 2) - 34) + 124 \cdot 5) - 340 =$$

4. Preriši sliko, nato pa na premicah m in n poišči vse točke, ki so od točke V oddaljene 3 cm. Zapiši množico rešitev.



5. Če od količnika števil 288 in 6 odštejemo neznano število, dobimo vsoto produkta števil 5 in 6 ter količnika števil 28 in 2. Zapiši enačbo, poišči neznano število in napravi preizkus.

6. razred

1. Določi število x :

a) $\frac{x+2}{5} = \frac{18}{10}$

b) $\frac{1}{x} + 0,75 = \frac{5}{6}$

2. Načrtaj deltoid: $e=5$ cm, $f=8$ cm, $\delta=120^\circ$ in opiši potek načrtovanja. Uporabljal le šestilo in ravnilo.
3. Mojca, Ana in Špela obiskujejo babico: Mojca vsak četrti dan, Ana vsak osmi dan in Špela vsak deseti dan. Dne 6. aprila so bile na obisku vse tri. Čez koliko dni se bodo spet srečale pri babici in katerega dne bo to?
4. Trije avtomobili so istočasno odpeljali iz mesta A proti mestu B . V dveh urah je prvo vozilo prevozilo 62,5 % celotne poti, drugo $\frac{7}{9}$ in tretje 0,8 poti. Kako dolga je cesta med tema mestoma, če je tedaj imelo vozilo, ki je bilo najbližje cilju, pred seboj še 36 km poti?
5. Za oštevilčenje strani neke knjige je bilo potrebno izpisati 582 števk (cifer). Koliko strani ima ta knjiga?

7. razred

1. Izračunaj vrednosti izrazov :

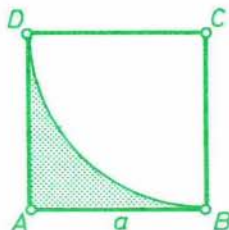
a) $15 : \frac{(0,6+0,425-0,065):0,01}{30\frac{5}{9}+3\frac{4}{9}} =$

b) $\sqrt{\frac{3}{4} : (\frac{1}{3} + 1)} + \sqrt{\frac{1}{2} : 2 \cdot (\frac{3}{2})^2} =$

2. Avto porabi 8 litrov bencina na 100 km. Liter bencina stane 68 SIT. Kolikšni so stroški potovanja na osebo, če štiri osebe s tem avtomobilom prepotujejo 1000 km?
3. Tri in pol kače pojé tri in pol podgan v tri in pol minutah. Koliko podgan pojé 14 kač v 14 minutah?
4. Kvadrat $ABCD$ ima stranico $a=2$ cm. Narišemo krožni lok, ki poteka od oglišča B do oglišča D in ima središče v oglišču C .

Glej skico in izračunaj:

- a) dolžino loka BD ,
 b) ploščino osenčenega dela kvadrata,
 c) koliko % ploščine kvadrata zavzema ploščina osenčenega dela.



8. razred

1. Premici sta dani z enačbama $f(x) = 2x - \frac{a+5}{3}$ in $g(x) = (\frac{1}{b} - 3) \cdot x + 2$.
 a) Pri kateri vrednosti števila a se dani premici sekata na ordinatni osi?
 b) Pri katerih vrednostih števil a in b je $f(x) = g(x)$?
2. Poenostavi izraz

$$\frac{a(a+1)}{a^2+2a+1} - \frac{a^2-2a+1}{a^2-1} + \frac{2a^2-12a+18}{a^2-6a+9}$$

3. Na gostovanju v Münchnu so gledališčniki prodajali vstopnice po 8 DEM in 5 DEM. Prodali so 1300 vstopnic in iztržili 8900 DEM. Koliko dražjih vstopnic so prodali?
4. Ploščina pravokotnega trapeza $ABCD$ ($a=7$ cm, $c=5$ cm, $\alpha=60^\circ$) meri $12\sqrt{3}$ cm². Izračunaj njegov obseg.
5. Kvader ima robove v razmerju $a : b : c = 3 : 4 : 12$ in površino 384 cm². Izračunaj dolžino telesne diagonale tega kvadra.

Aleksander Potočnik

LAVOISIER IN HELMHOLTZ

Ob dvestoletnici in stoletnici smrti

Londonska Nature na začetku leta že sedmič objavlja pregled znamenitih obletnic v tekočem letu. Za obletnico leta 1994 sta J.L.Heilbron in W.F.Bynum, ki pišeta prispevke, izbrala stoletnico smrti Hermanna von Helmholtza. Z njim je Nemčija na mah izgubila najznamenitejšega fizika in fiziologa. Na drugo mesto sta postavila dvestoletnico smrti Antoina Laurenta Lavoisiera. Velja za očeta kemije, ki pa tedaj še ni bila ostro ločena od fizike. Za bralce Preseka utegneta biti zanimivi življenjski poti obeh mož in njuni glavni uspehi, čeprav njuni usodi in delo nista povezani.

Antoine Laurent Lavoisier (slika 1) je bil rojen leta 1743 v Parizu. Starši so mu omogočili dobro izobrazbo z željo, da bi postal pravnik kot oče. Vendar se je raje odločil za naravoslovje in preko astronomije in geologije prišel do kemije.

Enaindvajsetleten je raziskal, kaj se je primerilo s sadro, ko jo je segrel, in pri tem natančno tehtal. S tem se je ukvarjal v naslednjih letih in na to pot spravil tudi druge. Tedaj še niso povsem opustili antičnega pojmovanja, da se element lahko spremeni v drugega. Zagotavljali so, da se voda v stekleni posodi po dolgotrajnem segrevanju spremeni v zemljo. Lavoisier je sto dni segreval vodo v stekleni posodi, da je na eni strani izparevala in se na drugi zopet utekočinjala. Zares je nastala usedlina, a zato se je masa posode zmanjšala. Usedlina je morala torej priti iz posode.



Slika 1. Antoine Laurent Lavoisier, Pariz, 26.november 1743, Pariz, 8.maj 1794

Nasprotoval je zamisli, da se kovina spremeni v oksid, ko odda hipotetično snov *flogiston*, in da iz oksida nastane zopet kovina, ko se oksid zveže s flogistonom. Začel je sežigati razne snovi. Na diamant je usmeril z lečo zbrano sončno svetlobo, da je zginil. Brez zraka pa ni zgorel. Sežgal je fosfor in žveplo in ugotovil, da imata oksida večjo maso od začetnih snovi. Predlog, da ima flogiston negativno maso, je zavrnil. V zaprti posodi z zrakom je segrel kositer in svinec. Na njima je nastala plast oksida, ne da bi se spremenila masa posode. Ko je odprl posodo, je vdrl zrak vanjo. Tudi masa svinca, ki ga je sežgal s sončno svetlobo, se je povečala. Ko je segreval nastali svinčev oksid, je nastal svinec in plin. Poskus je ponovil z živim srebrom. Tako je ugotovil, da kovine vežejo neko sestavino zraka. To ga je pripeljalo na misel, da sestavljata zrak dva plina, ki ju dandanes imenujemo dušik in kisik. To je slutil že prej Scheele in kisik je pred Lavoisierom odkril Priestley. Henry Cavendish je dobil vodo s sežigom vodika, a je pojav pojasnil s flogistonom. Lavoisier je z natančnim tehtanjem ugotovil, da nastane voda, ko se spojita vodik in kisik. Podobne zamisli kot Lavoisier je imel več deset let pred tem Mihail Lomonosov. Lavoisier je ob sodelovanju drugih francoskih kemikov zasnoval kemijsko poimenovanje, ki sega do današnjih dni. Z *Osnovnim učbenikom kemije* je leta 1789 postavil temelje kemiji in v njem navedel seznam elementov v današnjem pomenu. Postavil je *zakon o ohranitvi mase*, ki velja v klasični fiziki: masa telesa se ne spremeni, če mu nič snovi ne dodamo ali je od njega ne odvzamemo. Z Pierrom Simonom de Laplaceom je izumil ledni kalorimeter in delal z njim poskuse. Knjigo o tem sta objavila leta 1783. Izmerila sta več specifičnih toplot in tudi toploto, ki so jo v kalorimetru pri 0 °C oddajale male živali. Življenje je povezal z gorenjem.

Leta 1794 je Lavoisier umrl pod giljotino. Smrtna obsodba ni povezana z njegovim znanstvenim delom, ampak s tem, da je bil davčni zakupnik. Davčni zakupniki so od države zakupili pravico za pobiranje davkov in so si obdržali, kar so več izterjali od davkoplačevalcev. Čeprav je nekajkrat pomagal drugim in del denarja vložil v javna dela, del pa v dobro opremljen laboratorij, ki je zbujal zanimanje znanih mož, je bil kot davčni zakupnik skrajno nepriljubljen. Poročen je bil s hčerko glavnega davčnega zakupnika, ki mu je pomagala v laboratoriju in podpirala njegovo delo. Poleg tega se je zameril, ko je nasprotoval izvolitvi Jean-Paula Marrata v Akademijo znanosti. Po revoluciji mu je Marrat naprtil nesmiselne zločine proti ljudstvu. Lavoisiera so skupaj z drugimi davčnimi zakupniki obsodili na smrt. Na njegovo pripombo, da je znanstvenik, mu je oficir odgovoril, da "republika ne potrebuje znanstvenikov." Toda kmalu se je politični veter preobrnil in so Lavoiseirovo smrt obžalovali ter mu postavljali spomenike.

Hermann von Helmholtz

(slika 2) je bil rojen leta 1821 v Potsdamu v učiteljski družini. Po končanem študiju medicine je delal kot kirurg v pruski vojski. Osemindvajsetleten je postal profesor fiziologije na univerzi v Königsbergu (Kaliningradu). Leta 1858 je prešel na univerzo v Heidelbergu kot profesor anatomije in leta 1871 kot profesor fizike na univerzo v Berlinu.

Kot fiziolog je bistveno prispeval k razumevanju tega, kako vidimo in slišimo. Kemik John Dalton - umrl je pred 150 leti - je bil barvno slep. Pripovedujejo, da se je na resnem srečanju pojavil v svetlordečih nogavicah, ki jih je imel za sive. Dalton je trdil, da ima v očeh modro barvilo, ki ga v normalnih očeh ni. Toda fizik in zdravnik Thomas Young je zadevo pojasnil, da imamo v mrežnici čutne celice za rdečo, zeleno in modro svetlobo in da Dalton pač nima prvih. Helmholtz je sliko izpopolnil, tako da je ostala uporabna do današnjih dni. Iznašel je še *oftalmoskop* za opazovanje očesnega ozadja.

Tudi njegovo razumevanje delovanja ušesa sega v današnji čas. Zvok zaznavamo s čutnimi celicami v polžu; v njem zanihajo vse manjša nihala, katerih lastna frekvenca se ujema s frekvenco vpadnega zvoka. Višina zvoka je odvisna od tega, katera nihala najmočnejše zanihajo, barva pa od tega, kako so vzbujena nihala s frekvencami, ki so večkratniki osnovne. Ali zveni zvok blagoglasno ali ne, je odvisno od frekvence utripanja, ki je podana z razliko frekvenc sestavin zvoka. Izmeril je hitrost potovanja dražljaja po živcu, tako da je dražil živec žabe bližje in dalje od mišice. Ugotovil je, da oddajajo živali toploto v glavnem zaradi dela mišic. Pri tem je nastajala kislina, ki jo danes poznamo kot mlečno kislino.

Ta raziskovanja so Helmholtza napeljala na energijski zakon, ki ga je izrazil leta 1847 v razpravi *O ohranitvi sile*. Pri tem je s silo mislil na količino, ki jo dandanes imenujemo energija. Helmholtz ni vedel za prispevka Roberta



Slika 2. Hermann von Helmholtz, Potsdam, 31. avgust 1821, Charlottenburg pri Berlinu, 8. september 1894

Juliusa Mayerja in Jamesa Prescottta Joula, ki sta že prej imela podobne misli. Dandanes mislimo, da so vsi trije možje odkrili energijski zakon, ki velja za enega najpomembnejših zakonov fizike. Tedanji fiziki ga niso zlahka sprejeli, ker se jim je zdel preširok, saj je povezoval vse dele fizike. Tako je tudi Helmholtz, podobno kot Mayer, le s težavo objavil svoje delo. Za razliko od drugih dveh je Helmholtz, ki je tudi dobro obvladal matematiko, zakonu dal dokaj trdno matematično osnovo. Pri tem je prvi jasno vpeljal potencialno energijo. Misli, da delujejo živa bitja kot toplotni stroji, je dal trdnejšo podlago, kot jo je imela dotlej.

Vprašal se je tudi po izvoru sončne energije. Edina možnost se mu je zdela gravitacijska potencialna energija, ki se zmanjšuje, ko se deli Sonca bližajo središču. Vendar je njegov račun, ki ga je podprl tudi lord Kelvin, pokazal, da bi bilo tako Osončje lahko staro komaj kakih 25 milijonov let. S tem je spravil v zadrego geologe, ki so imeli Zemljo za znatno starejšo. Vprašanje so rešili šele, ko so ugotovili, da se zlivajo v zvezdah lahka atomska jedra. Helmholtz se je izkazal tudi kot teoretični fizik v hidrodinamiki in elektrodinamiki. Vzpodbudil je svojega asistenta Heinricha Hertza, da se je začel ukvarjati z Maxwellovo elektrodinamiko in je odkril radijske valove. Ustanovil je in dolga leta vodil Državno fizikalno-tehnično ustanovo, na kateri so naredili veliko pomembnih merjenj.

Janez Strnad

TRISEKCIJA

Napiši podprogram, ki kot vhod dobi celoštevilsko tabelo z n elementi in celo število x ter vrne tabelo preurejeno tako, da bodo na začetku elementi, ki so strogo manjši od x , nato tisti, ki so enaki x , nazadnje pa elementi, ki so strogo večji od x . Tako klic s parametrom $x = 5$ lahko preuredi tabelo

1	3	5	7	6	5	4	2
---	---	---	---	---	---	---	---

v

1	3	2	4	5	5	6	7
---	---	---	---	---	---	---	---

Dobra rešitev seveda ne potrebuje dodatne tabele.

Martin Juvan

ASTRONOMIJA

PRIJATELJA

Sedaj imate idealno priložnost, da si najdete dva prijatelja ali pa dve prijateljici. Vendar se bo treba, kot za vsako dragoceno stvar, nekoliko potruditi. Poiskati ju bo treba nikjer drugje kot na nebu! Tam, v ozvezdju *Trikotnik*, ležita dve zvezdi (α in β), ki so ju stari Arabci poimenovali *Anisan* - *dva prijatelja*, verjetno zato, ker trdno držita skupaj in tako oblikujeta krajišči ene trikotnikove stranice. Namen tega prispevka je, da spodbudi k opazovanju, vas pripelje do teh dveh zvezd in vas obogati za drobno, a zanimivo spoznanje.

V jasnih jesenskih večerih in nočeh z lahkoto najdemo in opazujemo visoko na južnem delu neba prelepo ozvezdje Andromeda. Pod njo izsledimo majhno ozvezdje Trikotnik, sestavljeno iz treh zvezd, ki oblikujejo ozek skoraj enakokrak trikotnik ali predstavljajo grško veliko črko delta. To črko so včasih poznali kot Deltotum. Pomenil naj bi otok Sicilijo, ki je trikotne oblike. Na nebo naj bi ga postavili na željo Demetre, boginje poljedelstva. Sicilija je bila namreč dežela, ki jo je Demetra zelo cenila zaradi kakovostnega pridelka, pa tudi zaradi številnih svetišč, ki so jih ljudje postavili tam njej na čast.

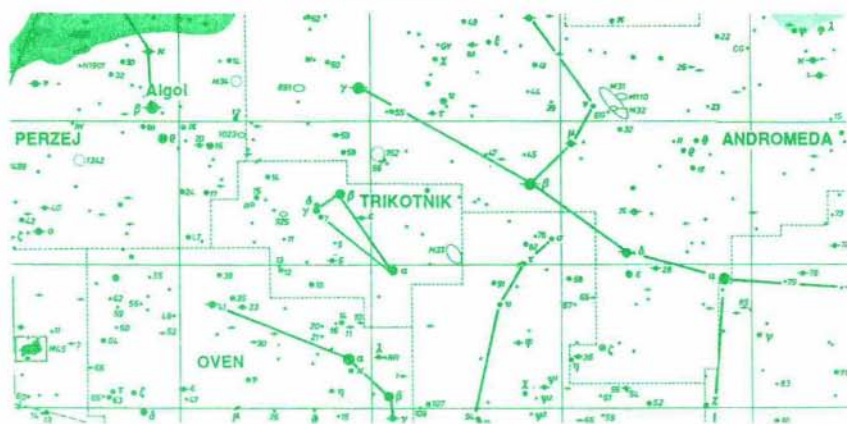
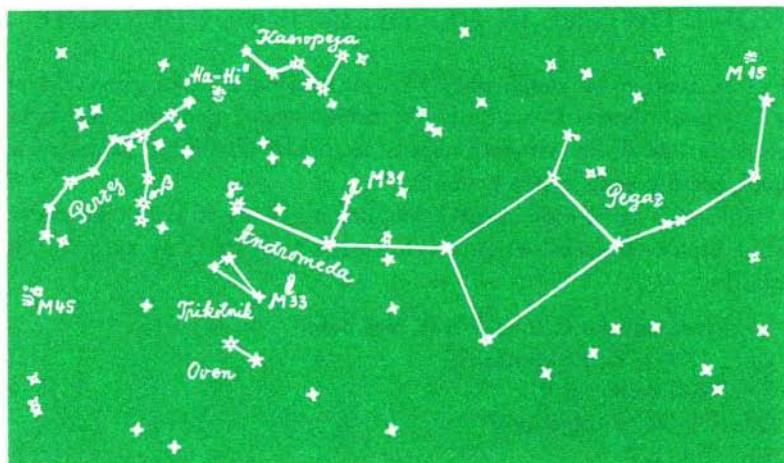
Pravijo tudi, da naj bi ozvezdje Trikotnik predstavljalo delto reke Nil in naj bi bilo postavljeno na nebo v čast aleksandrijske znanosti, ki se je razcvetela prav v mestu ob Nilovi delti.

Naj bo tako ali drugače, predlagam, da poskusite s prostim očesom pod zvezdama Gama in Beta Andromede izslediti:

- oba prijatelja,
- vse tri glavne zvezde ozvezdja Trikotnik.



Slika 1. Takole je poljski astronom J. Hevelius v svojem znamenitem zvezdnem atlasu (1690) narisal ozvezdje Trikotnik - Triangulum Majus. Danes ga rišemo bolj ozko. Slika je narisana zrcalno simetrično glede na opazovanje s prostim očesom (levo je na desni).



Slika 2. **Zgoraj:** Del jesenskega zvezdnega neba, kjer ob jasni brezmesčni noči brez težav izsledimo ozvezdje Trikotnik. Sicer pa to ozvezdje lahko zvečer opazujemo od oktobra do januarja. **Spodaj:** Takole pa prikazuje ozvezdje Trikotnik moderna zvezdna karta. Zvezdi α in β sta prijatelja. Glavna zvezda α se imenuje tudi Elmuthalleth ali Mothallah, kar v arabščini pomeni konica (trikotnika).

Za dobre oči to ne bo težko. Če pa slabo vidite ali če je vidljivost slabša, si pomagajte z daljnogledom. Z njim se lahko še nadalje sprehajate po nebu in pri tem ne pozabite pogledati znamenite galaksije M 31 v ozvezdju Andromeda. Če vas prijatelja nista navdušila, vas bo pogled na galaksijo prav gotovo očaral.

Marijan Prosén

MATEMATIKA

NEKOMUTATIVNE IN NEASOCIATIVNE OPERACIJE

Živo se še spominjam svojih občutkov, ko sem na začetku gimnazije prvič slišal za komutativnost in asociativnost seštevanja in množenja. Ne da bi ne verjel, da res veljajo te lastnosti; nasprotno, preveč sem verjel vanje, da bi se mi sploh zdelo vredno o tem govoriti.

Da niso bili samo moji občutki taki, dokazuje šala, ki je že tako stara, da je večina bralcev Preseka verjetno ne pozna, pa naj mi jo bo zato dovoljeno povedati!

Smrkavec priveka iz šole: "Cvek sem dobil!"

Oče: "Kaj si bil pa vprašan?"

Sin: "Koliko je 3×4 ."

Oče: "In kaj si odgovoril?"

Sin: "Ja, 12!"

Oče: "Dobro. Kaj pa je bilo potem?"

Sin: "Učiteljica je vprašala, koliko je 4×3 ."

Oče skomigne: "Isto sranje."

Sin še bolj zajoka: "No, ata, jaz sem tudi tako rekel!"

Da razmišljanje o komutativnosti in asociativnosti ni od muh, se zavemo šele takrat, ko naletimo na operacije, ki teh lastnosti nimajo. Namen tega zapisa je pokazati, da je takšnih operacij nič koliko in da nekatere spoznamo celo že v osnovni šoli. Preden pa začnemo s primeri, razčistimo s terminologijo: Kaj je operacija in kaj asociativnost?

Imejmo neprazni množici A in B . **Premi (kartezični) produkt** $A \times B$ je množica vseh urejenih parov elementov iz teh dveh množic:

$$A \times B := \{(a, b) \mid (a \in A) \wedge (b \in B)\}.$$

Z izrazom urejeni par hočemo povedati, da je točno določeno, kateri element v paru je prvi in kateri drugi.

Dvočlena (binarna) operacija je povsod na $A \times B$ definirana preslikava v neko tretjo množico C , torej predpis, ki vsakemu paru iz $A \times B$ priredi točno določen element iz C . Elementoma iz para recimo **operanda**, njima predpisani element C pa **rezultat**. Pri konkretnih operacijah so imena seveda tudi konkretna. Tako sta naprimer pri seštevanju operanda seštevanca, rezultat pa vsota; pri odštevanju je prvi operand zmanjševanec, drugi je odštevaneč in rezultat razlika. Rezultat često označimo tako, da med operanda vstavimo kak znak: $a + b$, $a \cdot b$ ($= ab$), $a \circ b$, a/b , ...

Vzemimo sedaj, da je $\mathcal{B} = \mathcal{A}$ in da neka operacija vsakemu paru $(a, b) \in \mathcal{A} \times \mathcal{A}$ priredi rezultat $a * b \in \mathcal{C}$. Ta operacija je **komutativna**, če velja enačba

$$a * b = b * a$$

za poljubna a, b iz $\mathcal{A}$. Mimogrede, enačbi, ki velja za vse vrednosti spremenljivk v njej, pravimo **identiteta**.

Zahtevajmo še $\mathcal{C} = \mathcal{A}$. Potem je **asociativnost** operacije definirana z identiteto

$$(a * b) * c = a * (b * c).$$

V nadaljevanju bom navedel 16 operacij tipa $\mathcal{A} \times \mathcal{A} \longrightarrow \mathcal{A}$; nekatere so asociativne ali komutativne, druge ne. Predlagam bralcu, da izdela dokaze za tiste lastnosti, ki veljajo. Oglejmo pa si protiprimerje za tiste, ki ne veljajo:

Najprej štiri komutativne asociativne operacije.

1. $\mathcal{A} = \mathbb{Z}^+$ (pozitivna cela števila); $a * b := m(a, b)$ (najmanjša skupna mera),
2. $\mathcal{A} = \mathbb{R}$ (realna števila); $a * b := \min\{a, b\}$ (manjši od obeh),
3. $\mathcal{A} = \mathbb{C}$ (kompleksna števila); $a * b := a + b - ab$ (kvaziprodukt),
4. $\mathcal{A} = \mathcal{M}_2(\mathbb{R})$ (realne kvadratne matrike z dvema vrsticama);

$$\begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} w & x \\ y & z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a+w & b+x \\ c+y & d+z \end{bmatrix} \quad (\text{vsota matrik})$$

Naslednje štiri operacije so asociativne, niso pa komutativne.

5. $\mathcal{A}$ je poljubna množica z vsaj dvema elementoma; $a * b := a$ (prvi operand). Protiprimer:

$$p \neq q; \quad p * q = p; \quad q * p = q.$$

6. $\mathcal{A} = \mathcal{M}_2(\mathbb{R})$;

$$\begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} w & x \\ y & z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} aw + by & ax + bz \\ cw + dy & cx + dz \end{bmatrix} \quad (\text{produkt matrik})$$

Protiprimer:

$$\begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 2 \end{bmatrix}; \quad \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$$

7. $\mathcal{A} = \mathbb{R}^{\mathbb{R}}$ (povsod definirane realne funkcije); $(f \circ g)(x) := f(g(x))$ (kompozitum dveh funkcij). Protiprimer:

$$f(x) = x^2, \quad g(x) = x + 1;$$

$$(f \circ g)(x) = (x + 1)^2; \quad (g \circ f)(x) = x^2 + 1.$$

8. $\mathcal{A} = G(\mathbb{R}^2)$ (gibanja v ravnini; to so preslikave, ki ohranjajo razdalje med točkami in kote med premicami; mednje spadajo tudi vzporedni premiki, vrtenja in zrcaljenja); če sta operanda g_1 in g_2 dve gibanji, naj bo rezultat $g_1 g_2$ sestavljeno gibanje: najprej g_2 , nato pa g_1 .

Protiprimer: Imejmo na ravnini ortonormiran koordinatni sistem, g_1 naj bo premik za 1 v pozitivni smeri abscisne osi, g_2 pa zrcaljenje preko ordinatne osi;

$$g_1 g_2 : O(0, 0) \xrightarrow{g_2} O(0, 0) \xrightarrow{g_1} A(1, 0);$$

$$g_2 g_1 : O(0, 0) \xrightarrow{g_1} A(1, 0) \xrightarrow{g_2} B(-1, 0).$$

Naslednji štiri primeri so komutativni, niso pa asociativni.

9. $\mathcal{A} = \mathbb{R}$; $a * b := (a + b)/2$ (aritmetična sredina).
Protiprimer: $(1 * 0) * 2 = 5/4$; $1 * (0 * 2) = 1$.
10. $\mathcal{A} = \mathbb{R}$; $a * b := |a - b|$ (razdalja med operandoma).
Protiprimer: $(1 * 1) * 2 = 2$; $1 * (1 * 2) = 0$.
11. $\mathcal{A}$ naj bo množica, ki vsebuje število 0 in vsa tista racionalna števila, ki jih lahko napišemo z decimalnim zapisom

$$\pm 0, d_1 d_2 d_3 \cdot 10^a,$$

pri čemer so d_1, d_2, d_3 poljubne tri decimalke, le $d_1 \neq 0$, eksponent a pa je poljubno celo število. S temi števili računamo kot z vsemi realnimi števili, le da rezultat spet spravimo v zahtevano obliko in pri tem po potrebi zaokrožimo; takemu računanju pravimo aritmetika s plavajočo vejico. Še operacija: kar običajno seštevanje! Protiprimer:

$$[(-0,500) \cdot 10^2 + 0,501 \cdot 10^2] + 0,499 \cdot 10^{-1} = 0,150 \cdot 10^0$$

$$(-0,500) \cdot 10^2 + [0,501 \cdot 10^2 + 0,499 \cdot 10^{-1}] = 0,100 \cdot 10^0.$$

12. $\mathcal{A}$ naj bo množica vseh racionalnih števil, ki imajo v decimalnem zapisu cela mesta in prve tri decimalke poljubne, ostala decimalna mesta pa zasedajo ničle in jih zato sploh ne pišemo. Z njimi računamo tako kot z realnimi števili, le rezultat vedno zaokrožimo na tri decimalke. Takemu računanju pravimo aritmetika z nepremično vejico. Operacija naj bo tokrat kar navadno množenje. Protiprimer:

$$(0,100 \cdot 0,002) \cdot 50,000 = 0,000;$$

$$0,100 \cdot (0,002 \cdot 50,000) = 0,010.$$

Pripomba! Zadnja dva primera operacij sta še posebej zanimiva, saj v praksi vedno računamo na en ali drug način. Neasociativnost torej srečamo tako rekoč na vsakem koraku.

Zadnje štiri operacije, ki pa niso niti komutativne niti asociativne.

13. $\mathcal{A} = \mathbb{Z}$ (cela števila); operacija je odštevanje. Protiprimer:

$$1 - 0 = 1; 0 - 1 = -1.$$

$$(1 - 0) - 1 = 0; 1 - (0 - 1) = 2.$$

14. $\mathcal{A} = \mathbb{Q}^*$ (neničelna racionalna števila); operacija je deljenje. Protiprimer:

$$1 : 2 = \frac{1}{2}; 2 : 1 = 2.$$

$$(2 : 1) : 2 = 1; 2 : (1 : 2) = 4.$$

15. $\mathcal{A} = \mathbb{R}^+$ (pozitivna realna števila), $a * b := a^b$. Protiprimer:

$$1 * 2 = 1; 2 * 1 = 2.$$

$$(2 * 1) * 3 = 8; 2 * (1 * 3) = 2.$$

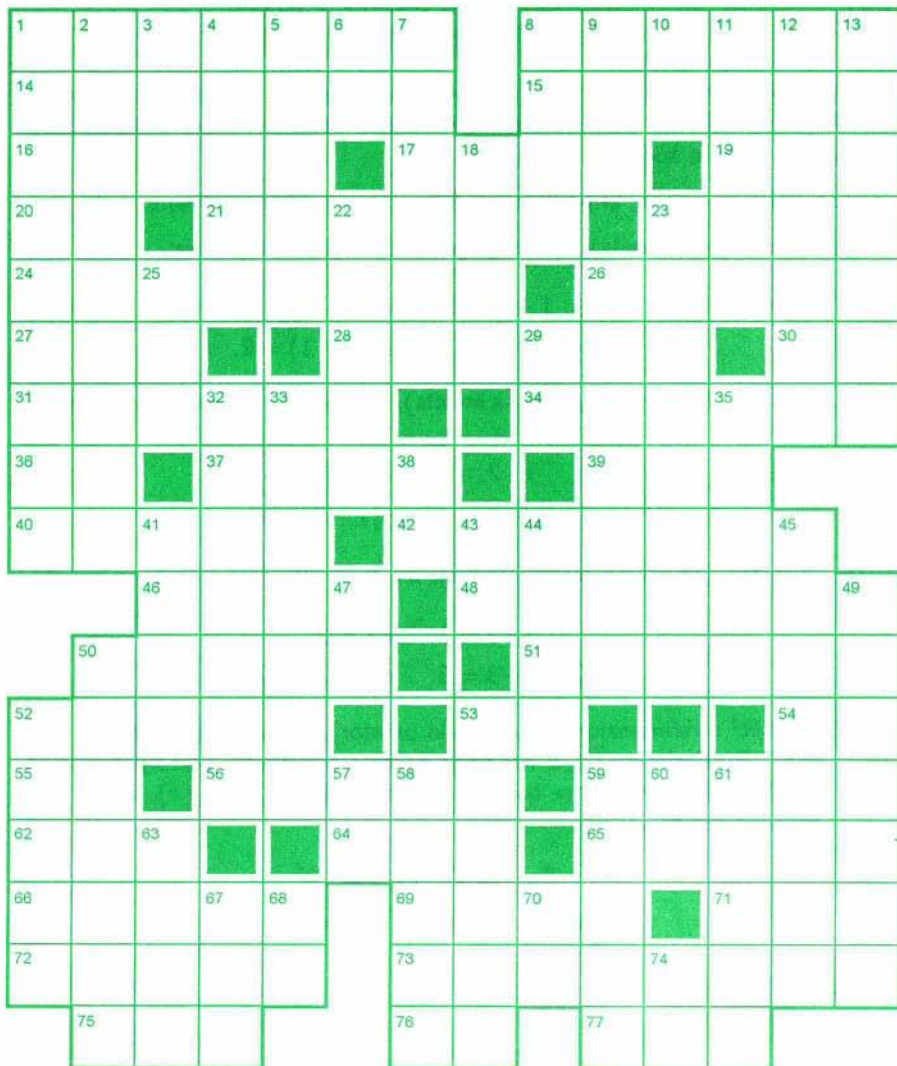
16. $\mathcal{A} = \mathbb{R}^3$ (tridimenzionalni vektorski prostor), operacija je vektorski produkt. Protiprimer: $\vec{i}, \vec{j}, \vec{k}$ naj bodo paroma pravokotni vektorji z dolžino 1, ki ležijo zaporedoma na koordinatnih oseh $(x), (y), (z)$, z isto orientacijo kot te osi.

$$\vec{i} \times \vec{j} = \vec{k}; \vec{j} \times \vec{i} = -\vec{k}.$$

$$(\vec{i} \times \vec{j}) \times \vec{j} = -\vec{i}; \vec{i} \times (\vec{j} \times \vec{j}) = \vec{0}.$$

KRIŽANKA OB I. KONGRESU MATEMATIKOV, FIZIKOV IN ASTRONOMOV SLOVENIJE

V dneh od 20. do 22. oktobra 1994 je v Ljubljani v Cankarjevem domu potekal I. slovenski kongres s področij matematike, fizike in astronomije. V križanki, sestavljeni ob tej priliki, boste našli 13 priimkov znanih slovenskih matematikov, fizikov in astronomov.



VODORAVNO:

1. slovenski matematik svetovnega slovesa, vzgojitelj vrste sodobnih slovenskih matematikov (Josip), 8. slovenski fizik, avtor univerzitetnih učbenikov (Janez), 14. manjši upor, glasno negodovanje, 15. sklep med stegnom in golenjo, 16. staro ljudstvo na Apeninskem polotoku, po katerem je dobila ime današnja Italija, 17. stotina avstrijskega šilinga, 19. ena igra pri tenisu, 20. začetnici igralka Avbelj, 21. slovenski matematik, strokovnjak za verjetnostni račun (Rajko), 23. italijanski skladatelj, avtor prve opere (Jacoppo), 24. nezmožnost branja zaradi možganske okvare, 26. obdobje paleozoika, 27. del železniške proge, po katerem vozi vlak, 28. francoski renesančni arhitekt, ki je zgradil levo krilo Louvra v Parizu (Pierre), 30. začetnici fizika Kuščerja, 31. prepasnica, 34. ptičje domovanje, 36. začetnici fizika Čermelja, 37. kost podlahtnica, 39. zemeljska ožina na Malajskem polotoku, 40. ime temnopoltega atleta Owensa, ki je blestel na olimpijskih igrah leta 1936 v Berlinu, 42. rusko mesto ob izlivu Tobola v Irliš, 46. pesniški izraz za divljo raco, 48. turistično razvita morsk obala, 50. slovenski fizik, vrhunski strokovnjak na področju feromagnetizma (Robert), 51. bančnik, 52. preprosta skica, osnutek, 53. začetnici starejšega izmed glasbenikov bratov Avenik, 54. zadnja in prva črka abecede, 55. začetnici telovadca Štuklja, 56. središče bombažnega področja v Indiji, 59. slovenski matematik, pisec številnih matematičnih knjig in vrhunski strokovnjak za funkcionalno analizo (Ivan), 62. največji pritok Rena iz Avstrije, 64. valjasta posoda za tekočine, 65. Ljubljana v rimskih časih, 66. prejšnje ime jezera Malavi v Afriki, 69. latinski izraz za janež, 71. najdaljša afriška reka, vir življenja v Egiptu, 72. slovenski astronom (Andrej), 73. na palčke nabodeno meso, pečeno na žaru, 75. del dneva, ko je sonce pod obzorjem, 76. simbol za aluminij, 77. prostor izven športnega igrišča.

NAVPIČNO:

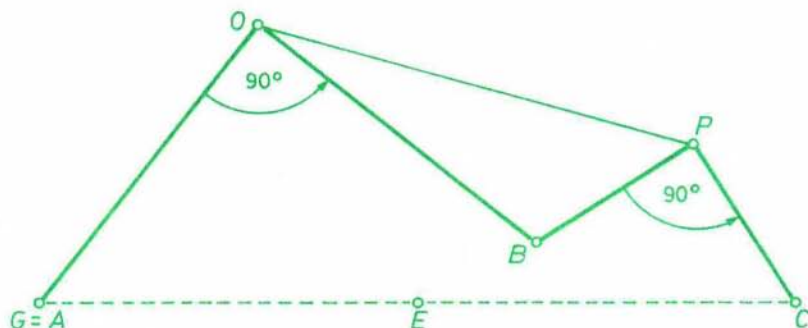
1. slovenski matematik, avtor učbenikov iz logike (Niko), 2. aerodrom, 3. ime TV voditeljice Longyke, 4. slovenski jedrski fizik in strokovnjak za merjenje (Anton), 5. ime nemškega pisatelja židovskega rodu Canettija, 6. začetnici igralka Turner, 7. ovčji mladič, 8. dvig telesa z odzivom od tal, pomemben element pri košarki in odbojki, 9. slovenski veleposlanik v Egiptu (Peter), 10. oznaka Libanona, 11. puščavska pokrajina na jugu Izraela, 12. barometer v kovinski škatli s kazalcem, 13. slovenski astronom, ustanovitelj observatorija v Ljubljani (Fran), 18. polkrožen morski zaliv, ki nastane, ko morje zalije ustje reke, 22. ime predsednika Kučana, 23. lani umrli slovenski fizik, ustanovitelj inštituta Jožef Stefan v Ljubljani (Anton), 25. dolgo časovno obdobje, vek, 26. odlična bolgarska tekačica čez visoke ovire (Jordanka), 29. začetnici francoskega skladatelja Gounoda, 32. grobo izdelano zidovje, 33. slovenski fizik, avtor osnovnošolskih učbenikov (France), 35. zarez na narejena s sekiro, 38. začetnici teologa in psihologa Trstenjaka, 41. del skladbe, ki ga kdo izvaja sam, samospjev, 43. začetnici TV voditeljice Rems, 44. otriški izraz za živalco, ki leze, 45. slovenski matematik, avtor srednješolskih in univerzitetnih učbenikov (France), 47. simbol za aktinij, 49. pogorje v Indijski državi Radžastan, 50. vzpenjava ali plazeča se zimzelena rastlina, 52. oklepanje nasprotnika pri boks, 53. slovenski matematik, strokovnjak za uporabo matematike v ekonomiji (Alojzij), 57. negibna premica pri vrtenju, 58. najdaljša francoska reka, 59. star slovenski film režiserja Františka Čapa, 60. začetnici igralca in peva Mlakarja, 61. tovarna tesnil v Medvodah, 62. ime TV urednika Ambrožiča, 67. urin, 68. začetnici literarnega zgodovinarja Žigona, 70. otok med Ugljanom in Dugim otokom, 74. začetnici matematika Vege.

Marko Bokalič

POVRNIMO SE NA OTOK ZAKLADOV (ALI SESTAVLJAJMO ROTACIJE)

V daljnem Preseku XIII/3 je Matjaž Željko prispeval uganko Otok zakladov, ki sega do slavnega fizika Gamowa (v knjigi *One, two, three ... infinity*). Uganko bomo tu za naše namene primerno priredili.

Star pergament vsebuje navodila o zakladu, pokopanem na samotnem otoku: "... zagledal boš gavg G . Od G pojdi do oljke O in preštej korake. Pri O zavij pravokotno na desno in prehodi enako število korakov. Tako boš prišel v B ($GO = OB$). Od B pojdi do palme P in spet zavij pravokotno na desno do C ($BP = PC$). V točki E sredi med G in C te čaka zaklad." (slika 1)



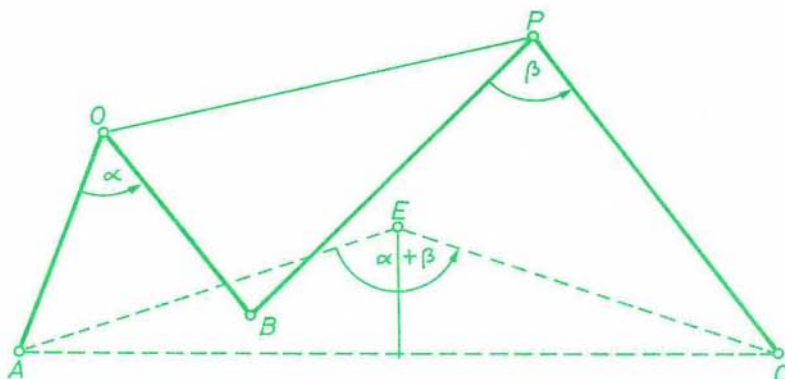
Slika 1.

Mornar pripluje na otok, ker pa gavg ne najde - so pač strohnele, z dolgim nosom odide. Tega bi ne smel storiti, saj bi prišel do zaklada, ne glede na to, iz katere točke A (ne nujno G) bi se odpravil. Bralca spodbujamo, da to "dokaže" tako, da začne risanje pri različnih A ; končna točka E bo vedno ista.

Gamow je rešil nalogo s kompleksnimi števili, Željko pa z analitično geometrijo. Rešitvama dodajamo tretjo, ne samo zato, da pojasnimo, zakaj gavg niso potrebne oz. da lahko začnemo pri poljubni točki, ampak tudi z namenom, da si izmislimo druge podobne uganke. Saj je od reševanja uganek lepše le še njihovo zastavljanje!

Iz A v B lahko pridemo namesto z opisanim sprehodom še z rotacijo okoli O za 90° , kar bomo označili z $(O, 90^\circ)$, iz B v C pa z rotacijo $(P, 90^\circ)$.

Gibanje, sestavljeno iz rotacij (O, α) in (P, β) , je torej rotacija $(E, \alpha + \beta)$, kjer novo os E dobimo s konstrukcijo, ki je razvidna s slike 2. Drugo, enakovredno konstrukcijo podaja slika 3.



Slika 3.

Vrnimo se za trenutek k začetni nalogi. Tam je $\alpha = 90^\circ$ in $\beta = 90^\circ$, sestavljena rotacija zavrti torej za 180° . Če je začetna točka G znana in je C njena slika po sestavljeni rotaciji, je središče E daljice GC nujno os te sestavljene rotacije. Toda os je ena sama, zato bo E vedno na istem mestu, ne glede na to, kje bi začeli.

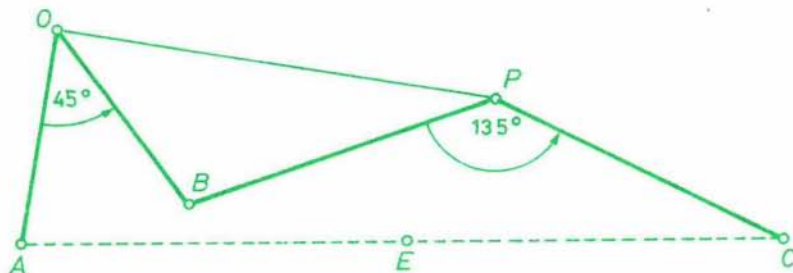
Ne samo, da gavge za najdbo zaklada niso potrebne, tudi sprehod $AOBPC$ je odveč. Vsota rotacij $(O, 90^\circ)$ in $(P, 90^\circ)$ je namreč $(E, 180^\circ)$ in E je vrh enakokrakega trikotnika nad OP s kotom 45° ob osnovnici OP .

Sedaj je čas, da si izmislimo nekaj novih ugank:

1. Najprej ni treba, da sta kota vsak po 90° , kot se to dogaja v začetni nalogi. Dovolj je, da sta suplementarna. Na sliki 4 sta to 45° in 135° . Ostalo je enako kot v dani uganki.

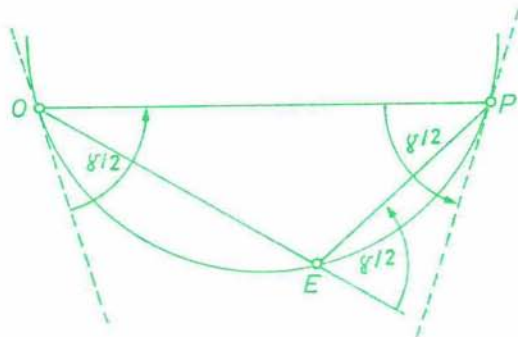
Zanimive so tudi uganke z bolj skopimi navodili, ki nam lege zaklada sicer popolnoma ne določijo, vendar pa jo zelo približajo, tako da nam ni treba počez prekopavati otoka. Na primer:

2. α in β sta enaka, pa poljubno velika. Zaklad se nujno nahaja na osi daljice OP (glej sliko 2).



Slika 4.

3. α in β sta majhna, sicer pa neznana. Dovolj je, da kopljemo (glej spet sliko 2) v bližini daljice OP .
4. Če kota obeh rotacij nista znana, znana pa je njuna vsota γ , potem moramo iskati zaklad na krožnem loku, razvidnem s slike 5. Ta ima v točkah O in P za tangenti premici, ki tvorita kota velikosti $\gamma/2$ z OP . Res je takrat zunanji kot ob E trikotnika OEP (E je poljubna točka loka) prav $\gamma/2$ oz. $(\alpha + \beta)/2$, kar potrebujemo (glej sliko 2).



Slika 5.

Novih ugank si lahko izmisli prizadevni bralec še sam.

Drago Bajc

TEKMOVANJA

IZBIRNO TEKMOVANJE IZ MATEMATIKE ZA SREDNJEŠOLCE

Na izbirnem tekmovanju iz matematike 19. marca 1994 se je skoraj 3500 srednješolcev spoprijelo z naslednjimi nalogami:

Prvi letnik

1. Poišči vsa realna števila x , za katera je $1 + \frac{x}{3} > \sqrt[3]{1+x}$.
2. Dokaži, da sta si števili

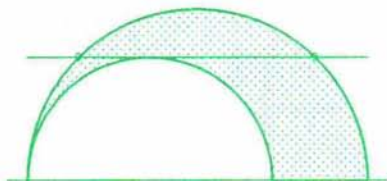
$$1 \cdot 2 \cdot 3 \cdots (n-1) \cdot n \cdot (n+1) + 1$$

in

$$1 \cdot 2 \cdot 3 \cdots (n-2) \cdot (n-1) \cdot n + 1$$

tuji za vsako naravno število n .

3. Dani sta polkrožnici kot na sliki. Tangenta na manjšo polkrožnico, ki je vzporedna z nosilko premerov obeh polkrožnic, seka večjo polkrožnico v točkah, ki sta na razdalji 24. Kolikšna je ploščina osenčenega dela?



4. Tabla dimenzije 1993×1994 je pokrita z dominami 2×1 . Ali jo lahko prekrijemo tako, da vsako domino, ki je pri prejšnjem pokrivanju ležala vodoravno, postavimo na tablo navpično, vsako domino, ki je ležala navpično, pa postavimo vodoravno?

Drugi letnik

1. Poišči vse trojice (x, y, z) naravnih števil, ki rešijo enačbo

$$xyz + xy + xz + yz + x + y + z = 1000.$$

2. V trikotniku ABC je stranica AB dolga 3 in AC 2 enoti. Višina na AB razpolavlja težiščnico na BC . Koliko meri kot $\sphericalangle CAB$?
3. Paralelogramu včrtamo štirikotnik tako, da ima po eno oglišče na vsaki od stranic paralelograma in da je njegova ploščina enaka polovični ploščini paralelograma. Dokaži, da je vsaj ena diagonala včrtanega štirikotnika vzporedna stranici paralelograma.

4. Na kvadratno šahovnico (z 8×8 polji) je postavljena trdnjava, ki se lahko premika navpično in vodoravno. Ali lahko naredi tak sprehod po šahovnici, da prestopi vsako mejo med sosednjima poljema natanko enkrat? (Polji sta sosednji, če imata skupen rob; če imata skupno le oglišče, nista sosednji.)

Tretji letnik

1. Naj funkcija f paru realnih števil priredi realno število (tako je $f(x, y)$ realno število pri poljubnih realnih x in y). Koliko je $f(19, 94)$, če za poljubna tri realna števila x, y in z velja $x + f(y, z) = f(x, y) + f(x, z)$?
2. Naj bosta u in v od -1 različni realni števili in naj bodo u, v in uv koreni kubičnega polinoma z racionalnimi koeficienti. Pokaži, da je produkt uv racionalno število.
3. Naj bo D točka na stranici BC trikotnika ABC , da je $|CD| = 2|BD|$. Določi kota $\sphericalangle CAB$ in $\sphericalangle ACB$, če je $\sphericalangle ABC = 45^\circ$ in $\sphericalangle ADC = 60^\circ$.
4. Naj bodo α, β in γ koti trikotnika, ki ni topokoten, in naj velja $\sin^2 \alpha + \sin^2 \beta = \sin \gamma$. Dokaži, da je trikotnik pravokoten.

Četrty letnik

1. Poišči vse realne rešitve enačbe $x = \sqrt{x - \frac{1}{x}} + \sqrt{1 - \frac{1}{x}}$.
2. Dano je zaporedje naravnih števil z začetnim členom $a_1 = 3$ in rekurzivnim predpisom $a_{n+1} = a_n^2 - 2$. Dokaži, da je kvečjemu en člen tega zaporedja deljiv s p , kjer je p poljubno praštevilo.
3. Poišči vse funkcije $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R} \setminus \{0\}$, za katere velja

$$f(y) + f(x+y) + f(xy) = \frac{f^2(x) + f(y)}{f(x-y)} + 1.$$

4. V ravnini ležita dve različni točki in premica, ki ne vsebuje nobene od njiju. Konstruiraj točko, ki je enako oddaljena od obeh točk in od premice. Obravnavaj vse primere!

Na državno tekmovanje, ki je bilo 23. aprila 1994 v Kočevju, je tekmovalna komisija povabila 160 mladih matematikov.

Matjaž Željko

ZANIMIVA LASTNOST NARAVNIH ŠTEVIL

Pavle obišče sošolca Petra. Reče mu: "Daj mi kakšno knjigo, pokazal ti bom nekaj zanimivega!" Peter pripravlja domačo nalogo o ljudskem pesništvu. Na mizi mu leži knjiga *Ljudske pesmi*, ki je izšla leta 1972 v zbirki Naša beseda. Izroči jo Pavletu, ki jo na hitro prelista. Ko jo vrne, reče: "Nisem vedel za to knjigo. Dobra bo, začniva z igro! Vzemsi list papirja in svinčnik in skrij pred mano, kar boš pisal!"

Pavle naroča Petru korake:

a) Zapiši trimestno število, v katerem se prva in zadnja števka razlikujeta vsaj za dve.

b) V številu iz a) zamenjaj med seboj prvo in zadnjo števko.

c) Manjše od števil iz a) in b) odštej od večjega.

č) V razliki iz c) zamenjaj med seboj prvo in zadnjo števko.

d) Seštej števili iz c) in č).

e) V številu iz d) postavi pred zadnjo števko decimalno vejico.

Ko Peter vse to naredi, ga Pavle vpraša, koliko je dobil. Odgovor: "108,9." Po kratkem premisleku Pavle izjavi: "V knjigi, ki si mi jo dal, je na strani 108 kot deveta natisnjena beseda **je**." Peter pogleda v knjigo in vidi, da je res tako. V *Ljudskih pesmih* se stran 108 namreč začinja z verz:

na stran je pustil krajnega,

udari ravno srednjega.

Je njemu pravo glavo vzel ... ,

ki so iz pesmi o Pegamu in Lambergarju.

Peter je nekoliko začuden. A Pavle že nadaljuje. Namesto koraka a) naroča:

a') Zapiši trimestno število, v njem naj se prva in zadnja števka razlikujeta za ena.

Drugi napotki so isti kot zgoraj. Peter je sedaj prišel do števila 19,8 in Pavle pove, da je v *Ljudskih pesmih* na strani 19 osma beseda **gorah**. Peter ugotovi, da tudi to drži. Igro bi Peter še rad nadaljeval, a Pavle nima niti trenutka časa več in se posloví. Petru ne da miru misel, kako je mogel Pavle uganiti obe besedi. Odloči se podrobneje preiskati Pavletovo navodilo. Sledimo Petrovi razčlembi. Takole razmišlja:

Po a) in a') izhajam iz trimestnega števila, v katerem prva in zadnja števka nista enaki. Po b) in c) zamenjam prvo in zadnjo števko in od večjega števila odštejem manjše; zato smem vzeti, da je že v prvotnem številu prva

števka večja od zadnje. Imam tedaj število

$$(a + h) \cdot 10^2 + b \cdot 10 + a. \quad (1)$$

Tu je b vzet izmed števk 0, 1, 2, ..., 9, za a so možnosti 0, 1, 2, ..., 8 in h je tako pozitivno celo število, da je

$$1 \leq a + h \leq 9.$$

Ko zamenjam prvo in zadnjo števko v (1) (korak b)), dobim število

$$a \cdot 10^2 + b \cdot 10 + (a + h) \quad (2)$$

in razlika med (1) in (2) (korak c)) je

$$h \cdot 10^2 + (-h). \quad (3)$$

Kadar je $h \geq 2$, se v (1) prva in zadnja števka razlikujeta vsaj za dve. Ker je $10^2 = 9 \cdot 10 + 10$, se da (3) v tem primeru pisati

$$(h - 1) \cdot 10^2 + 9 \cdot 10 + (10 - h). \quad (4)$$

Zamenjam prvo in zadnjo števko v (4) (korak č)) in pridem do števila

$$(10 - h) \cdot 10^2 + 9 \cdot 10 + (h - 1). \quad (5)$$

Vsota za (4) in (5) (korak d)) je

$$9 \cdot 10^2 + 18 \cdot 10 + 9 = 10^3 + 8 \cdot 10 + 9 = 1089.$$

Kadar je $h = 1$, ima (3) vrednost 99, ko zamenjam števki je spet 99 in

$$99 + 99 = 198.$$

Stvar je jasna! Trimestnih števil z različno prvo in zadnjo števko je 810. (Trimestnih števil je 900, takih, ki se začenjajo in končujejo z isto števko pa 90.) Pri vsakem teh števil računanje po Pavletovem navodilu pripelje ali do števila 1089 ali do števila 198 in potem do 108,9 ali do 19,8. Tu je razlog, da je Pavle igro prekinil. In kako je uganil besedi? Ko je listal po knjigi, ju je neopazno poiskal.

Vidimo: Če uporabimo Pavletovo navodilo (brez koraka e)) na trimestno število z različnima prvo in zadnjo števko, ne najdemo drugačnih števil kot 1089 in 198.

Pustimo zdaj Pavleta in Petra in se vprašajmo: Kaj pa če izhajamo iz števila, ki ima več kot tri mesta? Zamenjava prve in zadnje števk v trimestnem številu se ujema z zrcaljenjem števk glede na srednjo števko. Pri številu z več kot tremi mesti je zmeraj mogoče zrcaliti števk glede na sredino števila. Pri tem npr. iz 5164 dobimo 4615, iz 41537 pa 73514. Nadomestimo v Pavletovem navodilu trimestno število s številom, ki ima več ko tri mesta, zamenjavo prve in zadnje števk pa z zrcaljenjem števk glede na sredino števila. Do kakšnih vrednosti pripelje to navodilo?

Imejmo najprej število z liho mnogo števkami:

$$a_{2j} \cdot 10^{2j} + a_{2j-1} \cdot 10^{2j-1} + \dots + a_j \cdot 10^j + \dots + a_1 \cdot 10 + a_0, \quad j \geq 2. \quad (6)$$

Števke so izmed števil $0, 1, \dots, 9$ in $a_{2j} \neq 0$. V sredini števila stoji števka a_j . Omejimo se še na primer, ko števk v (6) izpolnjujejo pogoje

$$\begin{aligned} a_{2j} &= a_0 + h_0, \quad a_{2j-1} = a_1 + h_1, \dots, \quad a_{j+2} = a_{j-2} + h_{j-2}, \quad a_{j+1} = a_{j-1} + h_{j-1} \\ h_0 &\geq 1, \quad h_1 \geq 1, \dots, \quad h_{j-2} \geq 1, \quad h_{j-1} \geq 1. \end{aligned} \quad (7)$$

Imamo torej število

$$(a_0 + h_0) \cdot 10^{2j} + \dots + (a_{j-1} + h_{j-1}) \cdot 10^{j+1} + a_j \cdot 10^j + a_{j-1} \cdot 10^{j-1} + \dots + a_0 \quad (8)$$

in po zrcaljenju število

$$a_0 \cdot 10^{2j} + \dots + a_{j-1} \cdot 10^{j+1} + a_j \cdot 10^j + (a_{j-1} + h_{j-1}) \cdot 10^{j-1} + \dots + (a_0 + h_0). \quad (9)$$

Razlika med (8) in (9) je

$$\begin{aligned} h_0 \cdot 10^{2j} + h_1 \cdot 10^{2j-1} + \dots + h_{j-1} \cdot 10^{j+1} + (-h_{j-1}) \cdot 10^{j-1} + \dots + \\ + \dots + (-h_1) \cdot 10 + (-h_0). \end{aligned} \quad (10)$$

Da se znebimo negativnih vrednosti, upoštevamo, da je

$$10^{j+1} = 9 \cdot 10^j + 9 \cdot 10^{j-1} + \dots + 9 \cdot 10 + 10 \quad (11)$$

in število (10) potem zapišemo

$$\begin{aligned} h_0 \cdot 10^{2j} + \dots + h_{j-2} \cdot 10^{j+2} + (h_{j-1} - 1) \cdot 10^{j+1} + 9 \cdot 10^j + (9 - h_{j-1}) \cdot 10^{j-1} + \dots + \\ + \dots + (9 - h_1) \cdot 10 + (10 - h_0). \end{aligned} \quad (12)$$

Od tod pridemo po zrcaljenju števk do števila

$$(10 - h_0) \cdot 10^{2j} + (9 - h_1) \cdot 10^{2j-1} + \dots + (9 - h_{j-1}) \cdot 10^{j+1} + 9 \cdot 10^j + \\ + (h_{j-1} - 1) \cdot 10^{j-1} + h_{j-2} \cdot 10^{j-2} + \dots + h_1 \cdot 10 + h_0. \quad (13)$$

Vsota števil (12) in (13) je

$$10^{2j+1} + 9 \cdot 10^{2j-1} + \dots + 9 \cdot 10^{j+2} + 8 \cdot 10^{j+1} + 18 \cdot 10^j + 8 \cdot 10^{j-1} + \\ + 9 \cdot 10^{j-2} + \dots + 9 \cdot 10 + 10. \quad (14)$$

Ker je

$$18 \cdot 10^j = 10^{j+1} + 8 \cdot 10^j$$

in podobno kot v (11) velja

$$9 \cdot 10^{j-2} + 9 \cdot 10^{j-3} + \dots + 9 \cdot 10 + 10 = 10^{j-1},$$

dobi število (14) zapis

$$10^{2j+1} + 9 \cdot 10^{2j-1} + \dots + 9 \cdot 10^{j+1} + 8 \cdot 10^j + 9 \cdot 10^{j-1} \quad (15)$$

ali na kratko

$$10 \underbrace{9 \dots 9}_{j-1} \underbrace{890 \dots 0}_{j-1}. \quad (16)$$

Števki 9 in 0 se na naznačenih mestih ponovita $(j-1)$ -krat. Pri petmestnem številu (7) je $j = 2$ in (16) se glasi 109890.

Naj bo sedaj v številu sodo mnogo števk

$$a_{2j+1} \cdot 10^{2j+1} + a_{2j} \cdot 10^{2j} + \dots + a_1 \cdot 10 + a_0, \quad j \geq 1$$

in števke naj ustrezajo pogoju

$$a_{2j+1} = a_0 + h_0, \quad a_{2j} = a_1 + h_1, \dots, a_{j+1} = a_j + h_j, \\ h_0 \geq 1, \quad h_1 \geq 1, \dots, h_j \geq 1. \quad (17)$$

Podobno kot zgoraj ugotovimo, da sedaj navodilo pripelje do števila

$$10^{2j+2} + 9 \cdot 10^{2j} + \dots + 9 \cdot 10^{j+2} + 8 \cdot 10^{j+1} + 9 \cdot 10^j, \quad (18)$$

ali krajše zapisano

$$10 \underbrace{9 \dots 9}_{j-1} 890 \underbrace{\dots 0}_j. \quad (19)$$

Za desetmestno število je $j = 4$ in če števke izpolnjujejo pogoj (17), pristanemo glede na (19) pri številu 10999890000.

Zaradi korakov b), c) dobimo isti izid (16), če namesto (7) velja za števke pogoj

$$a_0 = a_{2j} + h_0, \quad a_1 = a_{2j-1} + h_1, \dots, a_{j-1} = a_{j+1} + h_{j+1}, \\ h_0 \geq 1, h_1 \geq 1, \dots, h_{j-1} \geq 1. \quad (20)$$

Prav tako je izid (19), če izhajamo iz števila, pri katerem za števke namesto pogoja (17) drži pogoj

$$a_0 = a_{2j+1} + h_0, \quad a_1 = a_{2j} + h_1, \dots, a_j = a_{j+1} + h_j, \\ h_0 \geq 1, h_1 \geq 1, \dots, h_j \geq 1. \quad (21)$$

Povzemimo: Naj bo a naravno število, pri katerem so vse števke do sredine števila večje ali vse te števke manjše od zrcalnih števk. Ko izvršimo navodilo, najdemo število

$$10 \underbrace{9 \dots 9}_{j-1} 890 \underbrace{\dots 0}_{j-1},$$

kadar a premore $2j + 1$ števk, $j = 2, 3, \dots$ in število

$$10 \underbrace{9 \dots 9}_{j-1} 890 \underbrace{\dots 0}_j,$$

kadar v a nastopa $2j + 2, j = 1, 2, \dots$ števk.

Če v številu nekatere števke izpolnjujejo pogoj (7), nekatere pa pogoj (20), navodilo ne daje vrednosti (16). Prav tako ne dobimo (19), če za nekaj števk velja (17), za nekaj pa (21). Izidov, do katerih navodilo pripelje, je tukaj več. Njihov seznam je že pri šestmestnih številih precej obsežen.

Naloge.

1. Do katerih vrednosti prideš, če uporabiš navodilo na številih 624312, 624542, 624512, 663721?

2. Izhajaj iz štirimestnega števila $a \cdot 10^3 + b \cdot 10^2 + c \cdot 10 + d$, za njegove številke naj velja $a = d + h$, $c = b + k$, $h \geq 1$, $k \geq 1$. Takih števil je 2025. Pokaži, da navodilo pripelje le do tehle deset vrednosti: 1818, 1737, 1656, 1575, 1494, 1413, 1332, 1251, 1170, 9999.

3. Če uporabiš navodilo na taka petmestna števila, pri katerih nobeni zrcalni številki nista enaki, prideš razen na 109890 le še na deset drugih vrednosti. Poišči jih!

4. Kaj dobiš, če na l -mestno število uporabiš Pavletovo navodilo? (Zamenjavaš v posameznih korakih med seboj le prvo in zadnjo številko, vmesne številke ostanejo na svojih mestih.)

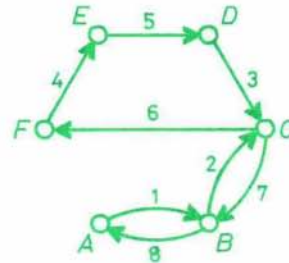
Jože Grasselli

DOLGČAS - Rešitev s str. 61

V grafu na desni predstavljajo točke prijatelje A, B, C, D, E in F ; povezave med točkami predstavljajo posamezne telefonske pogovore; številke, s katerimi so označene povezave, pa določajo zaporedje teh pogovorov. Vidimo, da za popolno izmenjavo šal med prijatelji zadošča že 8 pogovorov.

Poskusite dokazati, da se lahko v splošnem n prijateljev ($n \geq 4$) pogovori že z $2n - 4$ telefonskimi pogovori tako, da vsak od njih pri tem zve šale vseh preostalih prijateljev.

Vilko Domajnko



KRIŽANKA FIZIKALNE ENOTE – Rešitev s str. 32

Vodoravno: kelvin, basist, Iranka, parožek, liter, farad, KA, (O)liver (T)wist, meter, Kabul, grba, ars, Ank, Rea, lumen, Anda, Ajdna, Ika, Pia, mamut, vpoj, inercija, Ail, kna, amper, No, vat, bes, meča, znoj, Aristid, odnos, alpinist, Re, uta, ol, usad, Lulik, newton, afekt, Trani.

Navpično: 61. (T)atjana (D)remelj, 68. (U)go (F)oscolo, 70. (W)illiam (R)ogers.

POPOLNA ZAKLADNICA LOGARITMOV

Letos mineva dvesto let od izida Vegovega najpopolnejšega in najznamenitejšega dela, velikega desetdecimalnega logaritmovnika, ki je izšel v Leipzigu v latinskem in nemškem jeziku z naslovom: *Thesaurus logarithmorum completus - Vollständige Sammlung grösserer logarithmisch-trigonometrischer Tafeln*.

Delo, ki obsega preko 700 strani, je avtor dovršil na bojišču v Gornjem Porenju. Recenzent, znani matematik A. G. Kästner, je tedaj zapisal: "Ob tem delu pomisli človek na Arhimeda iz Sirakuz in si zaželi, da bi matematik in domovina doživela boljšo usodo." Laskave so bile tudi strokovne ocene. Takrat vodilni astronom Lalande je ob izidu dela zapisal: "Delo je pravi zaklad, s katerim je Vega storil znanosti veliko uslugo." Matematik Klügel pa je v *Mathematisches Wörterbuch* zapisal: "Delo zasluži naslov: *Zakladnica vseh logaritmov*."

V knjigi je Vega izboljšal, na novo uredil, razširil in združil dve pomembni in takrat že redki Vlackovi deli: *Arithmetica Logarithmica* (Gouda, 1628) in *Trigonometria artificialis* (Gouda, 1633). Takrat so imeli v Evropi od teh dveh del le še skrajšane ponatise, vse zahtevnejša praksa pa je tudi že pokazala mnoge njune pomanjkljivosti, zlasti napačno izračunane logaritme in neugodno razporeditev.

V Vegovem delu je nakopičenega veliko gradiva, tako Briggsovi logaritmi naravnih števil od 1 do 100.999 na 10 decimalk in logaritmi trigonometričnih funkcij, tudi na 10 decimalk. Poleg tega vsebuje še Wolframovo tabelo naravnih logaritmov praštevil na 48 decimalk in razne druge tabele ter zbirke obrazcev.

Delo pa ni samo ponatis, ampak sta bila oba izvirnika skrbno in temeljito na novo preračunana, številne napake pa odpravljene.

Na koncu prvega poglavja je baron Vega dostavil logaritme števil od 100.000 do 100.999, v drugem poglavju pa je logaritme trigonometrijskih funkcij razširil na vsako sekundo za prvi dve stopnji. Dodal je precej svojega gradiva, na primer število π , izračunano na 140 decimalk; ta zapis je nekoliko spremenjen in izboljšán posnetek razprave, ki jo je Vega poslal pet let prej časopisu petrograjske Akademije.

In še drobna zanimivost: Osrednja matematična knjižnica v Ljubljani hrani izvod prve izdaje Vegovega *Thesaurusa*, ki si ga je pridobila z antikvaričnim nakupom pred 24 leti. Knjiga nima pečatov kakih drugih knjižnic, pač

pa je na spodnjem delu prvega lista podpis G. S. Ohm. Kar radi bi verjeli, da je bila ta knjiga nekoč last slavnega fizika. – *Vsaka knjiga ima svojo usodo ... (latinski pregovor).*

Agata Tiegl

TRGI IN ULICE

Ožji center mesta sestavlja več trgov. Vsak trg je povezan z ostalimi trgi. Od vsakega trga tečejo ulice na štiri strani. Vsaka dva trga sta med seboj povezana s samo po eno ulico. Koliko trgov in ulic ima ožji center mesta?

Dragoljub M. Milošević - prev. in prir. Barbara Japelj

NALOGE S PREDTEKMOVANJA IZ SREDNJEŠOLSKE FIZIKE

Naloge so reševali 16.4.1994 dijaki v 51 srednjih šolah. Na podlagi doseženih rezultatov so posamezne šole sestavile ekipe za državno tekmovanje.

Skupina A

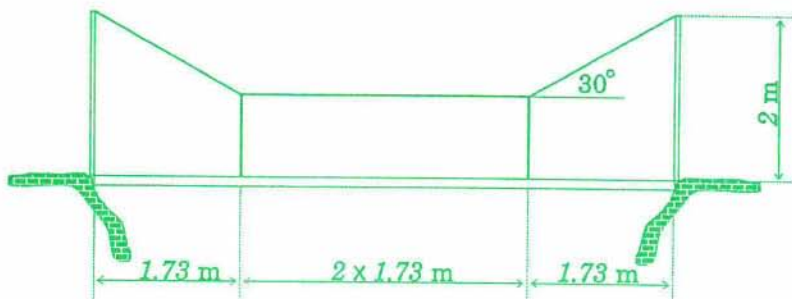
- Opazovalec hkrati gleda skozi okno in posluša radijski prenos nogometne tekme na bližnjem stadionu. Bližajočo nevihto zazna na tri načine:
 - Vidi strelo,
 - 3,00 s kasneje zasliši grom preko radia,
 - 4,43 s po tem, ko je videl blisk, zasliši grom "v živo".

Po predhodnih meritvah ve, da se nahaja točno 1,12 km severno od radijskega oddajnika na stadionu. Kako daleč od stadiona in v kateri smeri (jug, sever ali zahod) je kraj, kjer je udarila strela? Kakšno napako zagrešiš pri izračunu razdalje, če računaš, kot da je hitrost svetlobe neskončna? Hitrost svetlobe je $3 \cdot 10^8$ m/s, hitrost zvoka v zraku pa 344 m/s.

- Na klancu z nagibom 30° stoji avto teže 5000 N. Koeficient trenja med kolesi in tlemi je 0,5 in je premajhen, da bi avto obstal na klancu. Kolo avtomobila podložimo s klado teže 300 N, ki je prisekana pod kotom 45° . Kolikšen mora biti koeficient lepenja med klado in tlemi, da avto ne zdrsne? Kolesa avtomobila so blokirana (ne morejo se vrteti).

TEKMOVANJA

3. V Trenti so preko Soče postavljeni viseči mostovi, kot kaže slika (za prikazano konstrukcijo je zakrita še ena prav taka konstrukcija). Most mora na sredini zdržati silo 10^4 N. Kolikšno silo mora zdržati jeklena vrv, če se sila enakomerno razdeli med štiri navpične vrvi? Kolikšen navor mora zdržati vsak od štirih stebrov na obali? Teže sestavnih delov mostu ni treba upoštevati.

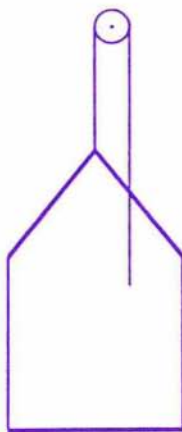


4. Lesena palica pravokotnega preseka iz bora (dimenzij $100\text{ cm} \times 2\text{ cm} \times 3\text{ cm}$) se v vodi potopi do polovice, enaka palica iz mahagonija pa do $2/3$. Palici zložimo drugo ob drugo, da dobimo debelejšo sestavljeno palico. Skupaj ju tesno spnemo tako, da eno krajišče sestavljene palice vtaknemo v 5 cm dolg kos okrogle železne cevi zunanjega premera 6 cm. Koliko tako sestavljene palice moli iz vode, ko jo damo vanjo? Gostota železa je 7800 kg/m^3 , gostota vode pa 1000 kg/m^3 .

Skupina B

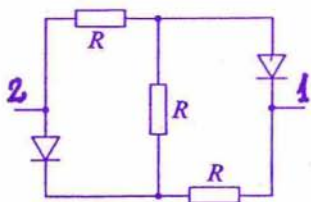
1. Tarzan se na 10 m dolgi liani, ki je vpeta 5 m nad njim, spusti proti 3 m nižji veji na drugem drevesu. Ko je v najnižji točki svoje poti, ujame Čito, ki se je z veje, na katero je namenjen, vodoravno odrinila proti njemu. Obe veji sekata krožni lok, ki ga opiše Tarzan, ko se "zaguga" z liano. Ali Tarzan in Čita dosežeta vejo, na katero je bil namenjen Tarzan? Tarzan tehta 90 kg, Čita pa 20 kg. Odgovor utemelji z računom!
2. Asteroid Toro je bil odkrit leta 1964. Njegov radij je 5,0 km, njegova masa pa $2 \cdot 10^{15}\text{ kg}$. Ali lahko (navaden) Zemljan zgolj s tekom pride v asteroidovo orbito? Gravitacijska konstanta $\kappa = 6,67 \cdot 10^{-11}\text{ m}^3/(\text{s}^2\text{kg})$.

3. V rudniškem jašku je dvigalo z maso 50 kg. Lahka nosilna vrv, na katero je dvigalo pričvrščeno, je speljana navzgor preko škripca na vrhu jaška in nazaj navzdol v dvigalo (slika). Rudar z maso 80 kg se želi dvigniti z dvigalom, zato povleče vrv s silo 750 N. S kolikšnim pospeškom se začne gibati dvigalo? S kolikšno silo pritiska rudar na tla dvigala?
4. Alpinist, ki ima skupaj z opremo maso 100 kg, pade z višine, ki je 20 m nad mestom, kjer je nazadnje vpel vrv. Kako globoko pade, če se vrv pri sili 10^4 N podaljša za 10 m? Kolikšen je največji pojemek? Kolikšno silo mora zdržati vrv, da se pri padcu ne pretrga?



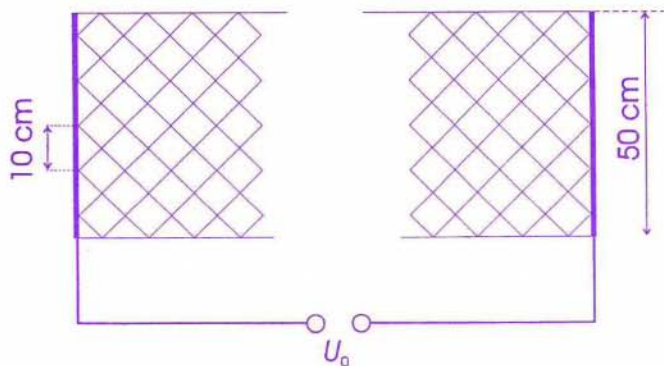
Skupina C

1. Vezje (glej sliko) je sestavljeno iz dveh idealnih diod in treh enakih uporov. Vrednost posameznega upora je $5,0 \text{ k}\Omega$, vezje pa je med točkama 1 in 2 priključeno na izvir sinusne izmenične napetosti z efektivno napetostjo 220 V. Kolikšno povprečno moč trošijo upori? Opomba: Ob narisani polariteti na diodi (slika) dioda prevaja, ob nasprotni ne prevaja. Ko idealna dioda prevaja, je njen upor nič, ko pa ne prevaja, je njen upor neskončno velik.



2. Na klancu z naklonskim kotom 30° leži prevoden okvir kvadratne oblike s stranico 15 cm, tako da sta dve stranici vodoravni. Okvir se nahaja v navpičnem magnetnem polju z gostoto 1,5 T. Masa okvira je 40 g. Kolikšen najmanjši tok mora steči po okviru, da se ta prevrne okrog spodnje vodoravne stranice? Koeficient lepenja med klancem in okvirjem je tako velik, da okvir po klancu ne more drseti.

3. Na lahkih izoliranih nitkah z dolžino 1 m, razmaknjenih za 10 cm, sta obešeni dve krogli z maso po 1 g in radijem 3 cm. Prvo kroglo previdno naelektrimo z nabojem $2,8 \cdot 10^{-8}$ As, drugo pa z negativnim nabojem. Na koncu poskusa sta krogli na razdalji 12 cm (merjeno med središčema krogel).
- (a) Kolikšna sta na koncu naboja na kroglih?
- (b) S kolikšnim nabojem smo na začetku naelektrili drugo kroglo? Kakšen je na koncu predznak nabojev na kroglih?
4. Pašnik je ograjen z 1 km dolgo mrežasto ograjo (slika). Ograja je visoka 0,5 m, na vsakih 10 cm pa je pričvrščena po ena žica s specifično upornostjo $2,8 \times 10^{-8} \Omega\text{m}$ in presekom 1 mm^2 . Kolikšen je celotni tok po ograji, če konca priključimo na napetost 6 V?



Skupina D

1. Hitrost vetra merimo s posebno napravo, ki je narejena iz dveh kovinskih plošč s ploščino po 100 cm^2 . Ena plošča je fiksno pritrjena na posebno vrtljivo palico, druga pa je na isto palico pritrjena z dvema vzmetema, ki imata skupni prožnostni koeficient 10 N/m (glej sliko). Vrtljiva palica skrbi za to, da sta plošči vseskozi obrnjeni natančno proti vetru, ki zadeva zgornjo ploščo, vendar se od nje ne odbija. Vsaka od plošč je nabita s stalnim nabojem 10^{-13} As oz. -10^{-13} As. Napetost med ploščama merimo z voltmetrom. Nariši graf, ki kaže napetost med ploščama v odvisnosti od hitrosti vetra! Kolikšna je napetost pri hitrosti vetra 10 m/s ? V brezvetrju je razdalja med ploščama 20 cm . Gostota zraka je $1,2 \text{ kg/m}^3$.



2. Točkasto svetilo pritrdimo na sredino osnovne ploskve polnega steklenega valja (lomni kvocient je 1,5), katerega premer je enak višini. Vse skupaj pritrdimo na sredino stropa razsežne valjaste sobe, katere višina je enaka dvojni višini valja, tako da se svetilo dotika stropa sobe. Določi meje območij na tleh, ki so različno osvetljena! (Osvetljenost se tam skokovito - nezvezno spremeni.)
3. Na vodi plavata enaki leseni deski z masama po 1 kg. Na sredini prve deske stoji žaba mase 0,1 kg. Žaba odskoči s prve deske in pristane na sredini druge deske. Po skoku se deski medsebojno oddaljujeta v vodoravni smeri in nihata v navpični smeri. Kolikšno je razmerje frekvenc nihanja prve in druge deske? Pri računanju zanemari upor vode in površinsko napetost.
4. Na klancu z naklonom 30° leži bakren okvir kvadratne oblike s stranico 10 cm in presekom žice 10 mm^2 , tako da sta dve stranici vodoravni. Okvir na podlagi ne spodrsava. Vse skupaj leži v magnetnem polju z gostoto 0,2 T, ki kaže v vodoravni smeri, tako da je pravokotno na vodoravni stranici okvira. Polje v 0,01 s linearno zmanjšamo na nič. Specifični upor bakra je $0,017 \text{ } \Omega\text{mm}^2/\text{m}$ in gostota $8,9 \text{ g/cm}^3$.
 - (a) Kolikšen tok steče po okviru?
 - (b) Nariši sile, ki delujejo na okvir.
 - (c) Kaj se zgodi z okvirom? ((i) Ostane v isti legi, prevrne se (ii) okoli spodnje stranice, (iii) okoli zgornje stranice, (iv) okoli stranske stranice). Odgovor utemelji z računom.

Jure Bajc, Ciril Dominko, Bojan Golli

**PRI NASTAJANJU PRESEKA POMAGAJO S PROGRAMSKO
OPREMO PODJETJA:
MARAND, MARMIS IN SKUPINA ATLANTIS**

TRZAJ – SPREMEMBA POSPEŠKA V ČASU

Študenti pri nas učitelja ne zasipajo z vprašanji, zato jih učitelj – na splošno – spodbuja, naj sprašujejo. Pred časom me je po takšnem spodbujanju presenetilo vprašanje: "Zakaj v Newtonovem zakonu ni tretjega odvoda koordinate po času?" Pogovor je razkril, da je študent primerjal zakon gibanja z zakonom o temperaturnem raztezanju ali kakim drugim zakonom, ki vsebuje snovno lastnost. Relativno spremembo prostornine telesa postavimo sorazmerno spremembi temperature, sorazmernostni koeficient je prostorninski raztezek. Zveza velja, če je sprememba temperature dovolj majhna. Pri večji temperaturni spremembi dodamo člen, sorazmeren s kvadratom temperaturne spremembe, pri še večji člen s kubom temperaturne spremembe ...

Zakon o temperaturnem raztezanju.

Prostornina telesa je odvisna od temperature: $V = V(T)$. Funkcijo razvijemo okoli temperature T_0 v Taylorjevo vrsto:

$$V(T) = V(T_0) + (dV/dT)_0 \Delta T + \frac{1}{2}(d^2V/dT^2)_0 (\Delta T)^2 + \frac{1}{6}(d^3V/dT^3)_0 (\Delta T)^3 + \dots$$

Pri tem je $T - T_0 = \Delta T$, $V - V_0 = \Delta V$ indeks 0 pa nakaže, da vzamemo količino pri temperaturi T_0 , na primer $V_0 = V(T_0)$. Iz tega izhaja zakon o temperaturnem raztezanju

$$\Delta V/V_0 = \beta \Delta T + \beta' (\Delta T)^2 + \beta'' (\Delta T)^3 + \dots,$$

kjer je $\beta = (dV/VdT)_0$, $\beta' = (d^2V/2VdT^2)_0$, $\beta'' = (d^3V/6VdT^3)_0$... Pri dovolj majhni temperaturni razliki se zadovoljimo s prvim členom, s konstantnim prostorninskim raztezkom β .

Zaradi lažjega pripovedovanja mislimo na točkasto telo, ki se giblje v eni razsežnosti, denimo, po osi x . Po študentovi zamisli naj bi silo drugega telesa na to telo izrazili kot vsoto členov: koeficient krat koordinata, koeficient krat odvod koordinate po času, to je hitrost, koeficient krat drugi odvod koordinate po času, to je pospešek, ... Sila se ne sme spremeniti, če prestavimo izhodišče po osi x ; zato mora biti koeficient prvega člena enak nič. Sila se ne sme spremeniti, če opazujemo telo iz vozečega vlaka; zato mora biti koeficient drugega člena enak nič. (Aristotel je z današnjega vidika predvidel zakon gibanja, po katerem bi bila sila sorazmerna s hitrostjo. Ni vedel za

ugotovitev, do katere se je pozneje dokopal Galileo Galilei.) Tretji koeficient je masa in zakon gibanja je Newtonov zakon: sila je masa krat pospešek. Študenta je zanimal razlog, zaradi katerega so koeficienti četrtega člena in vseh nadaljnjih členov enaki nič. Opozoril sem ga na to, da je pri razmišljanju zavil na napačno pot. Newtonov zakon ni nekakšna Taylorjeva vrsta, ampak tak, kot je, zakon narave, ki ga podpirajo opazovanja in merjenja, če je hitrost teles dovolj majhna in so telesa dovolj velika.

Newtonov zakon po študentovo?

Koordinata gibajočega se telesa je odvisna od časa: $x = x(t)$. Funkcijo razvijemo okoli vrednosti t_0 v Taylorjevo vrsto:

$$\begin{aligned} x(t) &= x(t_0 + \Delta t) = \\ &= x(t_0) + (dx/dt)_0 \Delta t + \frac{1}{2}(d^2x/dt^2)_0 (\Delta t)^2 + \frac{1}{6}(d^3x/dt^3)_0 (\Delta t)^3 + \dots \end{aligned}$$

Indeks 0 nakaže, da vzamemo količino pri času $t = t_0$. Prestavimo ga od odvodov k časovnim razlikam, pa dobimo za silo F :

$$F \stackrel{?}{=} Kx + K'v + ma + K''b + \dots,$$

če so K , K' , K'' , ... konstantni koeficienti. Navedli smo razloga, zaradi katerih je $K = 0$ in $K' = 0$. Zakaj pa naj bi bil nič tudi koeficient K'' ?

Indeksa seveda ne smemo tako prestaviti in tu je napaka! Ni osnove za misel, da bi upoštevali v zakonu gibanja tretji odvod koordinate po času ali kateri koli višji odvod.

Odslej sem se vedno, ko sem zasledil kako misel o spreminjanju pospeška s časom, spomnil tega študenta. Ali niso najbolj nerodna vprašanja najboljša? O spreminjanju pospeška več razpravljajo, kakor bi pričakovali. A razprava teče v okviru veljavnosti Newtonovega zakona, nihče ne pride na misel, da bi mu dodal člen te vrste.

Hitrost točkastega telesa meri spreminjanje koordinate s časom in pospešek spreminjanje hitrosti s časom. V nadaljnjem koraku vpeljejo količino, ki meri spreminjanje pospeška s časom. Imenujejo jo *trzaj* (angleško *jerk*, nemško *Ruck*). Po *Slovarju slovenskega knjižnega jezika* je *trzaj* sunkovit premik zaradi nehotenega krčenja mišic in s tem kar dober prevod angleškega in nemškega izraza. Upoštevati moramo, da je beseda "sunek" zasedena na primer s produktom sile in časa, če je sila konstantna.

Menda je količino prvi vpeljal francoski geometer A. Transon leta 1845. Pozneje so o njej precej razpravljali drugi, ne da bi omenili, zakaj je koristna. Leta 1928 je nemški inženir P. Melchior menil, da jo je smiselno vpeljati zaradi tega, ker med gibanjem čutimo spreminjanje pospeška. Po izkušnjah pri telovadbi in vožnji z železnico je določil, kolikšen najmanjši trzaj zaznamo in kolikšen zbudi neugodnost ali nam celo škoduje. Človek naj bi brez škode prenesel še trzaj $2 \cdot 10^4 \text{ m/s}^3$. Sledila je razprava o tem, ali zares občutimo trzaj ali ne. Nekateri so predlagali, naj imenujemo trzaj le nenadno spremembo pospeška. Ostalo pa je pri starem. Ni malo učbenikov mehanike, ki obravnavajo trzaj. V posameznih knjigah o merilnikih najdemo tudi opise merilnikov trzaja. V redno poučevanje fizike trzaj zagotovo ne sodi. Morda pa bo kratek zapis o njem pritegnil katerega od Presekovih bralcev.

Začnimo s tem, da nadaljujemo po običajni poti, po kateri lahko vpeljemo hitrost in pospešek točkastega telesa pri *prem gibanju*. Vzemimo, da se telo giblje po osi x . Koordinata točkastega telesa, ki miruje, se ne spreminja s časom. Pri najpreprostejši spremembi koordinata s časom enakomerno narašča. To je *enakomerno premo gibanje*, pri katerem lahko vzamemo, da je koordinata sorazmerna s časom in sorazmernostni koeficient hitrost v (slika 1a):

$$x = vt, \quad v = x/t.$$

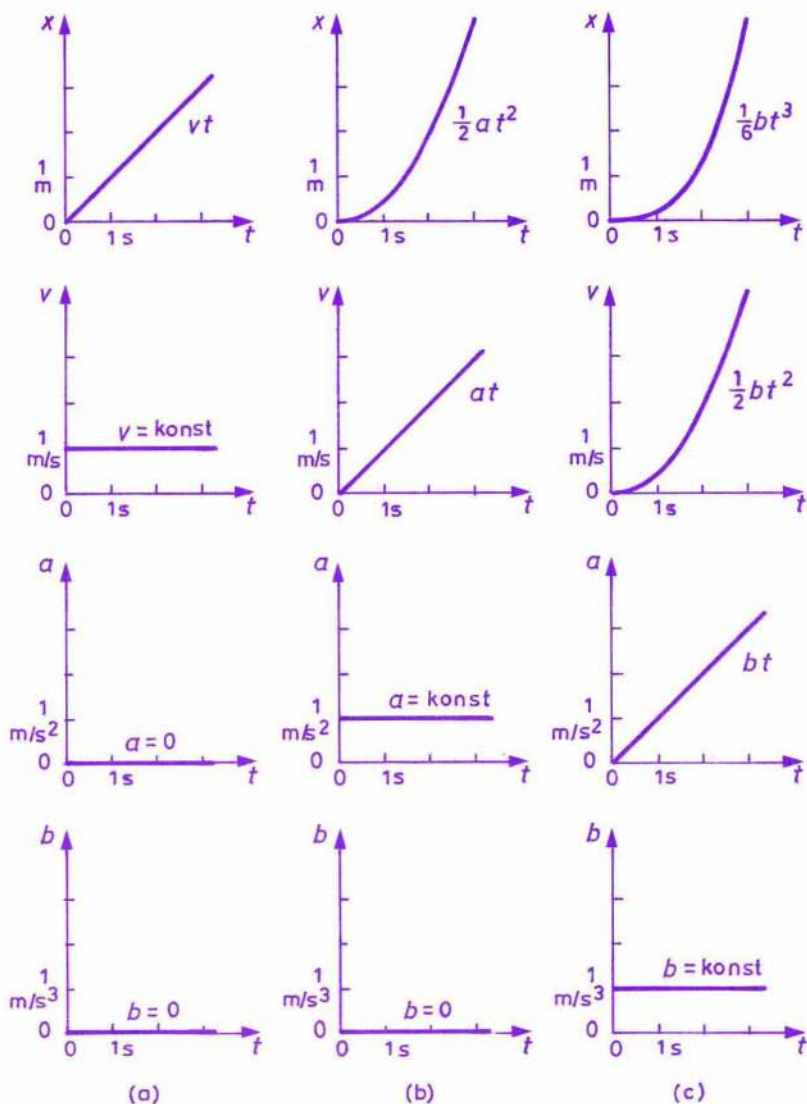
Enota hitrosti je m/s . Pospešek je pri takem gibanju enak nič. Pri *enakomerno pospešenem prem gibanju* hitrost s časom enakomerno narašča. Vzamemo lahko, da je hitrost sorazmerna s časom in je sorazmernostni koeficient pospešek a (slika 1b):

$$v = at, \quad a = v/t.$$

Enota pospeška je m/s^2 . Trzaj je pri takem gibanju enak nič. Pri *gibanju s konstantnim trzajem* pospešek enakomerno narašča s časom. Vzamemo lahko, da je pospešek sorazmeren s časom in je sorazmernostni koeficient trzaj b (slika 1c):

$$a = bt, \quad b = a/t.$$

Enota trzaja je m/s^3 . Gibanje je še bolj zapleteno, če se trzaj spreminja s časom.



Slika 1. Koordinata, hitrost, pospešek in trzaj pri premem gibanju v odvisnosti od časa: za enakomerno gibanje (a), enakomerno pospešeno gibanje (b) in gibanje s konstantnim trzajem (c). Da je diagrame lažje risati, smo izbrali $v = 1 \text{ m/s}$, $a = 1 \text{ m/s}^2$ in $b = 1 \text{ m/s}^3$. Pri drugih podatkih so risbe uporabne, če na navpični osi uporabimo različne enote.

Ostanimo pri premem gibanju. Zanimivo premo gibanje je *sinusno nihanje*. Tako bi se gibala drobna utež, obešena na vijačno vzmet, ko bi jo premaknili iz ravnovesne lege in spustili, če ne bi bilo treba upoštevati zračnega upora. Odmik od ravnovesne lege se spreminja takole (slika 2):

$$x = x_0 \cos \omega_0 t,$$

če je x_0 *amplituda odmika*, $\omega_0 = 2\pi/t_0$ *krožna frekvenca* in t_0 *nihanjski čas*. Hitrost je

$$v = -\omega_0 x_0 \sin \omega_0 t.$$

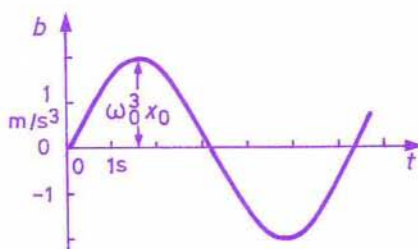
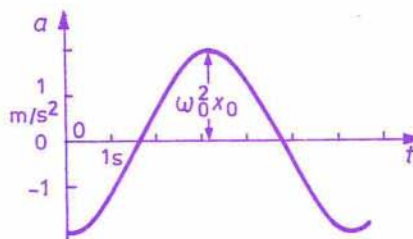
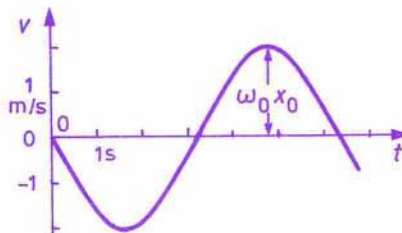
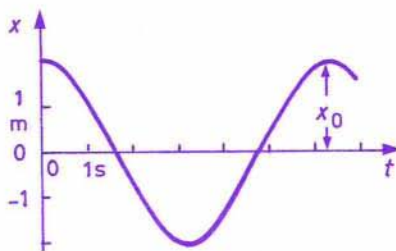
Amplituda hitrosti je $\omega_0 x_0$. Za pospešek dobimo

$$a = -\omega_0^2 x_0 \cos \omega_0 t.$$

Amplituda pospeška je $\omega_0^2 x_0$. Za trzaj dobimo

$$b = \omega_0^3 x_0 \sin \omega_0 t.$$

Amplituda trzaja je $\omega_0^3 x_0$. Upoštevali smo, da je hitrost odvod koordinate po času $v = dx/dt$, pospešek odvod hitrosti po času $a = dv/dt$ in trzaj odvod pospeška po času $b = da/dt$. Pospešek je torej drugi, trzaj pa tretji odvod koordinate po času. (V pomoč pri odvajanju povejmo, da je odvod $\cos \omega_0 t$ in $\sin \omega_0 t$ po času $-\omega_0 \sin \omega_0 t$ in $\omega_0 \cos \omega_0 t$.)

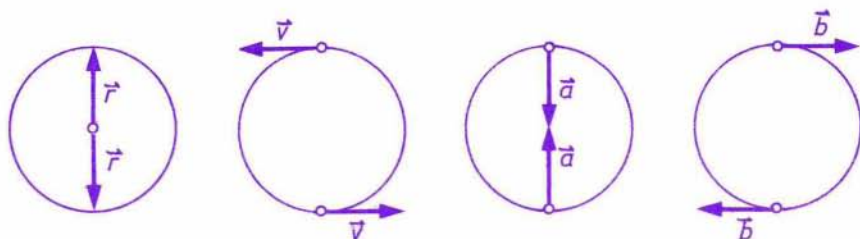


Slika 2. Odmik od ravnovesne lege, hitrost, pospešek in trzaj pri premem sinusnem nihanju. Izbrali smo $\omega_0 = 1 \text{ s}^{-1}$, da so vse amplitude enake.

Enačbe postanejo zanimivejše, a tudi bolj zapletene, ko od premega gibanja preidemo k ravninskemu. Dobra pot za ta prehod je kroženje. Kroženje si lahko mislimo sestavljeno iz dveh nihanj v pravokotnih smereh, ki sta drugo glede na drugo zakasnjeni za četrtno nihajnega časa. V ravnini vpeljimo koordinatni sistem z osema x in y . Začnimo z *enakomernim kroženjem*, pri katerem narašča zasuk sorazmerno s časom: $\omega_0 t$. Za komponente na osi x lahko kar prevzamemo zapisane izraze, le x_0 zamenjamo z radijem kroga r_0 , komponente na osi y pa dobimo s premikom za četrtn nihanja:

$$\begin{aligned}x &= r_0 \cos \omega_0 t & y &= r_0 \sin \omega_0 t, \\v_x &= -\omega_0 r_0 \sin \omega_0 t & v_y &= \omega_0 r_0 \cos \omega_0 t, \\a_x &= -\omega_0^2 r_0 \cos \omega_0 t & a_y &= -\omega_0^2 r_0 \sin \omega_0 t, \\b_x &= \omega_0^3 r_0 \sin \omega_0 t & b_y &= -\omega_0^3 r_0 \cos \omega_0 t.\end{aligned}$$

Narišimo dobljene vektorje: krajevni vektor $\mathbf{r} = (x, y)$, vektor hitrosti $\mathbf{v} = (v_x, v_y)$, vektor pospeška $\mathbf{a} = (a_x, a_y)$ in vektor trzaja $\mathbf{b} = (b_x, b_y)$ (slika 3).



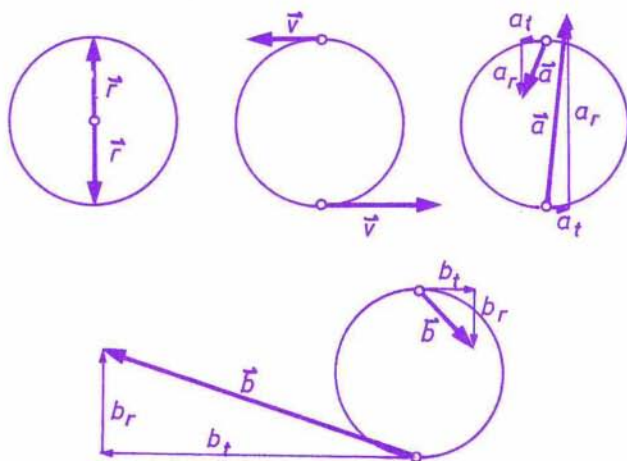
Slika 3. Krajevni vektor, vektor hitrosti, vektor pospeška in vektor trzaja pri enakomernem kroženju. Vektorji se vrtijo, ne da bi se spreminjale njihove velikosti. Izbrali smo $\omega_0 = 1 \text{ s}^{-1}$, da so vsi vektorji enako veliki. Pri drugih podatkih so risbe uporabne, če na oseh v različnih risbah uporabimo različne enote.

Pri *enakomerno pospešenem kroženju* narašča zasuk sorazmerno s kvadratom časa $\frac{1}{2}\alpha_0 t^2$, če je α_0 konstantni kotni pospešek. Produkt funkcij odvajamo tako, da drugo funkcijo pomnožimo z odvodom prve in prištejemo s prvo funkcijo pomnoženi odvod druge: $d(fg)/dx = gdf/dx + f dg/dx$.

Odvod t^2 je $2t$ in odvod t je 1. Naposled dobimo:

$$\begin{aligned}x &= r_0 \cos \frac{1}{2} \alpha_0 t^2, & y &= r_0 \sin \frac{1}{2} \alpha_0 t^2; \\v_x &= -\alpha_0 t r_0 \sin \frac{1}{2} \alpha_0 t^2, & v_y &= \alpha_0 t r_0 \cos \frac{1}{2} \alpha_0 t^2; \\a_x &= -(\alpha_0 t)^2 r_0 \cos \frac{1}{2} \alpha_0 t^2 - \alpha_0 r_0 \sin \frac{1}{2} \alpha_0 t^2, \\a_y &= -(\alpha_0 t)^2 r_0 \sin \frac{1}{2} \alpha_0 t^2 + \alpha_0 r_0 \cos \frac{1}{2} \alpha_0 t^2; \\b_x &= -3\alpha_0^2 t r_0 \cos \frac{1}{2} \alpha_0 t^2 + (\alpha_0 t)^3 r_0 \sin \frac{1}{2} \alpha_0 t^2, \\b_y &= -3\alpha_0^2 t r_0 \sin \frac{1}{2} \alpha_0 t^2 - (\alpha_0 t)^3 r_0 \cos \frac{1}{2} \alpha_0 t^2.\end{aligned}$$

Narišemo dobljene vektorje in jih še razstavimo na *radialno komponento* v smeri zveznice točkastega telesa z izhodiščem in *tangentno komponento* pravokotno na to (slika 4). Hitrost ima smer tangente, pospešek ima radialno komponento $(\alpha_0 t)^2 r_0$ proti izhodišču in tangentno komponento $\alpha_0 r_0$ v smeri hitrosti, trzaj pa radialno komponento $3\alpha_0^2 t r_0$ proti izhodišču in tangentno komponento $(\alpha_0 t)^3 r_0$ v nasprotni smeri hitrosti.



Slika 4. Krajevni vektor, vektor hitrosti, vektor pospeška in vektor trzaja pri enakomerno pospešenem kroženju in njihove radialne in tangentne komponente. Izbrali smo trenutka, ko je $\frac{1}{2} \alpha_0 t^2$ enako $\frac{1}{2} \pi$ in $\frac{3}{2} \pi$ ter $\alpha_0 = \frac{1}{4} \text{ s}^{-2}$.

Zanimivo bi bilo obdelati še kako bolj zapleteno gibanje. Od mogočih zgledeov nam pridejo na misel gibanje po *Arhimedovi spirali*, ko zveznica

točkastega telesa z izhodiščem enakomerno kroži, njena dolžina pa narašča sorazmerno s časom: $r = v_r t$:

$$x = v_r t \cos \omega_0 t, \quad y = v_r t \sin \omega_0 t,$$

gibanje po eni od *Lissajousovih* krivulj:

$$x = x_0 \cos n_x \omega_0 t, \quad y = y_0 \sin n_y \omega_0 t,$$

če sta n_x in n_y majhni celi števili, gibanje planeta po elipsi. Vendar z računanjem ne kaže pretiravati.

Ne kaže zamolčati, kako občutimo pospešek in trzaj. Mislimo si, da se peljemo v avtobusu po gladki in ravni cesti. Po poskusih v avtobusu ne moremo ugotoviti, kako hitro se giblje, dokler se giblje s konstantno hitrostjo. Potnik lahko določi hitrost le tako, da pogleda iz avtobusa, poskusi v njem pa potekajo enako, kot če bi avtobus miroval. Opazovalni sistem, ki ga vpelje potnik v avtobusu, je enakovreden sistemu opazovalca s ceste. Oba sta *inercialna opazovalna sistema*. To Galilejevo spoznanje, ki ga lahko imenujemo *zakon relativnosti*, smo že omenili.

Drugače je, če se avtobus giblje s konstantnim pospeškom, ker pač nanj delujejo telesa iz okolice s konstantno vsoto zunanjih sil. Potnik v avtobusu še naprej opazuje pojave s svojega stališča, zase on miruje. Vidi, da se telesa ob cesti gibljejo s konstantnim pospeškom v nasprotni smeri vožnje, in upošteva ta pospešek kot *sistemski pospešek*. S tem pospeškom poveže *sistemsko silo*. Sistemski pospešek in sistemska sila imata enako velikost, a nasprotno smer kot pospešek avtobusa in vsota vseh zunanjih sil, s katero delujejo telesa iz okolice na avtobus. Sistemski pospešek in sistemska sila imata smer vožnje, če avtobus zavira. Po sistemskem pospešku in sistemski sili sklepa potnik v avtobusu, da se giblje pospešeno. (Glej še članek A. Likarja *Vrteči se opazovalni sistem*, Presek 6 (1979) 145.)

Mislimo si, da pospešek avtobusa enakomerno narašča, torej da je trzaj avtobusa konstanten in ima smer vožnje. Po tem, kar smo ugotovili, tudi sistemski pospešek in sistemska sila v nasprotni smeri vožnje enakomerno naraščata. Potnik v avtobusu vpelje sistemski trzaj, ki je enako velik kot trzaj avtobusa, a ima nasprotno smer. Ta sistemski trzaj občuti potnik, ki se giblje z naraščajočim pospeškom.

V tem prispevku se zadovoljimo z obdelanimi preprostimi zgledi za premo gibanje in gibanje v ravnini. Na eni strani smo se vadili v odvajanju, na drugi pa izračunali ne samo hitrost in pospešek, ampak tudi mnogo manj znani

trzaj. Prvi dve količini moramo poznati, za trzaj pa si lahko mislimo, da smo ga dodali, ne da bi ga morali poznati, in ga lahko spustimo – kot tisti, ki se je od časa do časa udaril po prstu, zato da mu je bilo bolje, ko se ni udaril.

Obravnavali smo samo gibanje in se nismo spraševali po vzroku zanj. Ni težko vključiti Newtonovega zakona, samo pospešek pomnožimo z maso, pa dobimo silo, s katero deluje na opazovano točkasto telo drugo telo in ki povzroča opisano gibanje. Da bi spoznali globlje ozadje trzaja, pa bi morali gnati razpravo še precej dlje.¹

Janez Strnad

¹ Bralcu, ki ga to zanima, priporočamo članek Stevena H. Scotta, *Jerk: The time rate of change of acceleration*, American Journal of Physics **46** (1978) 1090. Zanimiv je tudi članek T. R. Sandina, *The jerk*, The Physics Teacher **28** (1990) 36, v katerem je obdelan trzaj tudi v teoriji relativnosti. V Newtonovi mehaniki se trzaj pri prehodu iz inercialnega opazovalnega sistema v drug tak sistem sploh ne spremeni. V posebni teoriji relativnosti pa je enačba, ki opiše prehod veliko bolj zapletena. V nekem inercialnem opazovalnem sistemu je lahko trzaj enak nič, pa je v drugem od nič različen.

O TREH ČRNIH ČEPICAH - Rešitev s str. 52

Kako razmišlja Miha? Na glavi ima ali rjavo ali črno čepico. Predpostavi, da ima rjavo, in premišljuje o igri soigralcev: ker je Boltežar tudi drugič rekel, da ne ve, vidi vsaj eno črno čepico (če igra smiselno in v teoriji iger igralci vedno igrajo logično in na zmago). Če ima rjavo, bi moral Gašper, ki enako kot Miha premišljuje o Boltežarjevi igri, oditi. Pa ni!

Predpostavka, da ima na glavi rjavo čepico, je Miho pripeljala do protislovja. Tako res ve, da ima črno, in lahko odide.

Nadaljevanje. Da je v sobi vsaj ena črna čepica, je bilo pred voditeljevo izjavo le vsem trem znano dejstvo, ne pa pravilo igre.

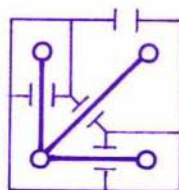
Pojasnimo to natančneje: V drugem krogu igralci v svojih razmišljanjih o igri soigralcev upoštevajo, da le-ti v svojih sklepih uporabljajo pravilo igre. Gašper in Miha tako iz Boltežarjevega odgovora razbereta, da vidi vsaj eno črno čepico (kar sicer že vesta in tako že vnaprej poznata Boltežarjevo ugotovitev). Ker pa Gašper tudi drugič izjavi *Jaz ne vem*, Miha pa ve, da bi Gašper iz rjave čepice na njegovi glavi uspel ugotoviti barvo svoje, lahko Miha zaključi, da nima rjave, ampak črn

Matevž Bren

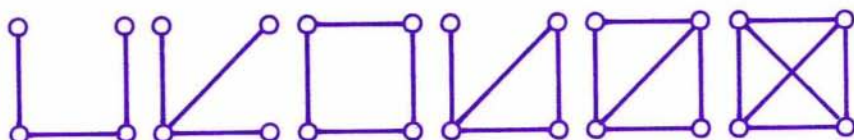
REŠITVE NALOG

GROZA - Rešitev s str. 17

Vsakemu prostoru hiše priredimo točko. Točki naj bosta med seboj povezani natanko takrat, kadar sta z vrati povezana prostora, ki ju točki označujeta. Risba na desni prikazuje izbran primer neke razporeditve prostorov v hiši s tako prirejenim grafom.



Ni se težko prepričati, da lahko ob vseh možnih razporeditvah štirih prostorov v hiši dobimo kvečjemu teh šest med seboj bistveno različnih grafov:



Opazimo lahko, da vsak graf vsebuje zgolj sodo število tistih točk, do katerih vodi liho število povezav, ali pa je sploh brez njih.

Upoštevati moramo seveda še vhodna vrata v hišo. To lahko storimo tako, da privzamemo tudi zunanost hiše za enega izmed njenih prostorov. Če na grafu hiše tudi zunanosti priredimo točko, se s tem v vsakem izmed zgornjih šestih grafov spremeni parnost natanko eni izmed njegovih točk. Očitno torej ostane (ali nastane) v vseh tako spremenjenih grafih vsaj po ena točka z lihim številom povezav.

Obravnavati je treba še primer, v katerem sta kakšni sobi v hiši povezani z več kakor enimi vrati. Vendar nas tudi ta obravnava hitro pripelje do istih zaključkov, kakor smo jih navedli zgoraj.

Popotnik lahko torej v vsakem primeru prespi v eni izmed sob hiše, ne da bi se mu bilo treba bati strašljivega duha.

Poskusi dokazati, da lahko popotnik prespi v hiši brez bojazni pred duhom tudi v primeru, ko je v njej poljubno število prostorov, ki so poljubno razporejeni.

Vilko Domajnko

PREMEŠČANJE ŠTEVK

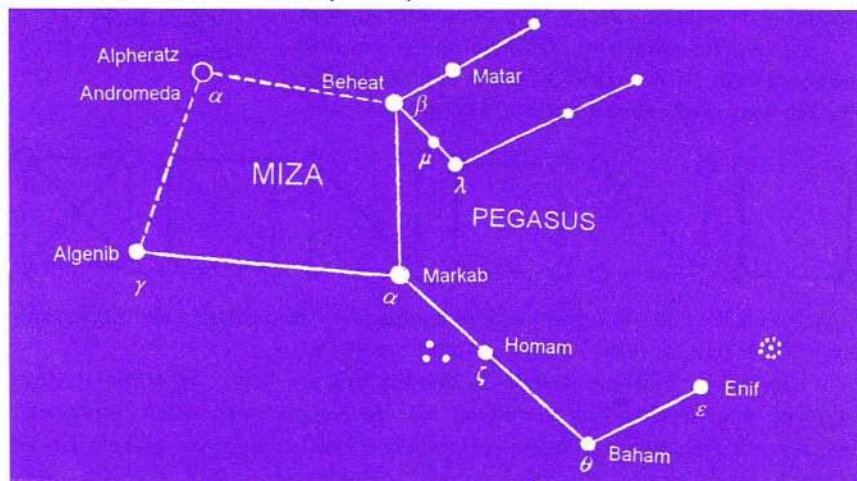
Rok trdi, da se da enakost $10001 - 1002 = 1$ s premeščanjem ene same števke popraviti tako, da bo pravilna. Kako se to naredi?

Dragoljub M. Milošević - prev. in prir. Barbara Japelj

ASTRONOMIJA

ŠTETJE ZVEZD

Glavna značilnost jesenskega ozvezdja Pegaz je, da ima približno obliko velikega kvadrata, v čigar ogliščih so precej svetle zvezde, več kot 15° narazen. Temu nebesnemu kvadratu rečemo tudi *Miza*. Opazujemo jo lahko vso jesen visoko na južnem delu neba (slika 1).



Slika 1. Mizo sestavljajo zvezde Alfa, Beta in Gama Pegaza ter Alfa Andromede. Pri nas jo lahko zvečer opazujemo vso jesen in zimo.

Jasnega jesenskega večera brez Lune na nebu pojdite s prijatelji na odprt prostor daleč od moteče svetlobe. Vsak zase naj poskuša prešteti vse zvezde, ki jih s prostim očesom vidi znotraj Mize. Najboljši opazovalci neba so znotraj Mize našteali 30 zvezd. To število, ki naj bo neke vrste tajnost, lahko vzamemo za zgornjo mejo naštetih zvezd v Mizi.

Vsak, ki jih našteje več, laže ali pa se je zmotil in naj štetje ponovi.

Marijan Prosén

KONSTRUKCIJSKA NALOGA

Zadnjič sem srečala družčino, ki se je ubadala z nalogo, ali se da le z uporabo šestila in ravnila narisati pravokotni trikotnik, če je dana dolžina ene njihovih katet in dolžina pravokotne projekcije druge katete na hipotenuzo.

No, naloga je rešljiva. Poskusite najti rešitev.

Marija Vencelj



**VSAK MESEC NOVA, BARVNA ŠTEVILKA REVJE ZA LJUBITELJE ASTRONOMIJE,
KI PRINAŠA NOVICE, VSE O SONCU, PLANETIH, ZEMLJI, ZVEZDAH,
GALAKSIJAH, ASTROFIZIKI, KOZMOLOGIJI, ASTRONAVTIKI,
ASTROFOTOGRAFIJI, ARHEOASTRONOMIJI...
ZA AMATERJE MESEČNO SVEŽE EFEMERIDE IN ZVEZDNA KARTA,
O TELESKOPIH, UPORABNIH PROGRAMIH...
IN ŠE OSNOVE ZA ZAČETNIKE, RAZISKOVALNI KOTIČEK, TESTI,
ZNANSTVENA FANTASTIKA, MALI OGLASI TER NAGRADNA IGRA!**

Revijo naročajte na naslov: Spika, Poštni predal 9, 61109 Ljubljana. Četrletna naročnina (15% popusta) je 1070,00 SIT, polletna naročnina (20% popusta) je 2015,00 SIT, celoletna naročnina (25% popusta) je 3780,00 SIT.

MEDNARODNI KONGRES MATEMATIKOV – ZÜRICH 1994

Matematiki se tako kot tudi drugi znanstveniki redno srečujejo na številnih konferencah, delavnicah in simpozijih, kjer v večjem ali manjšem krogu obravnavajo ožja strokovna vprašanja in predstavljajo svoje najnovejše rezultate, probleme in domneve. Že bežen pogled v, denimo, *Notices of the American Mathematical Society*, glasilo največjega matematičnega društva na svetu, nam pove, da je vsako leto vsaj nekaj sto različnih srečanj širom po svetu, od Amerike do Avstralije. Na številnih izmed njih sodelujejo tudi slovenski matematiki, pogosto celo z vabljenimi plenarnimi predavanji, kar med drugim tudi priča o našem ugledu v svetu.

Vendar pa je le en kongres resnično namenjen vsem matematikom. To je *Mednarodni kongres matematikov*, ki ga prirejamo vsaka štiri leta. Na njem se običajno zbere od tri do štiri tisoč udeležencev, ki nato v desetih dneh, kolikor srečanje traja, poslušajo predavanja z različnih področij moderne matematike: logike, kombinatorike, algebre, analize, geometrije, topologije, verjetnosti in statistike, numerične analize, matematične fizike, zgodovine matematike ter poučevanja matematike.

Najbolj težko pričakovani trenutek je vsakokrat podelitev *Fieldsovih medalj*. To so priznanja, ki jih upravičeno primerjajo z Nobelovimi nagradami (ki jih za matematiko ne podeljujejo). Dobijo jih tisti matematiki, ki so v zadnjih letih dosegli največje uspehe pri svojem raziskovalnem delu. Obstaja tudi starostna omejitev – 40 let, kar samo še povečuje težo tem nagradam. Sprva so podeljevali po eno ali dve nagradi, sedaj pa jih podeljujejo tudi po štiri. Nagrada nosi ime po kanadskem matematiku *Johnu Charlesu Fieldsu* (1863–1932). Od leta 1983 podeljujejo še eno priznanje, ki nosi ime po finskem matematiku *Rolfu Nevanlinni*, in sicer za odkritja s področja matematične logike, informatike in teoretičnega računalništva.

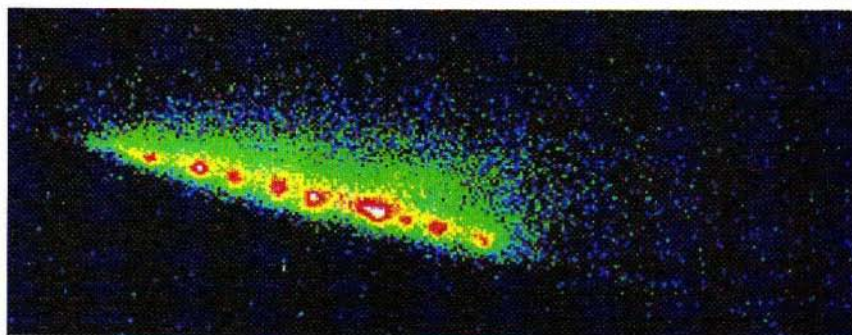
Letos je bil v Zürichu v Švici od 3. do 11. avgusta XXII. mednarodni kongres matematikov. Prvi dan so podelili Fieldsove medalje, in sicer so jih dobili: 40-letni Belgijec *Jean Bourgain* s področja analize, 38-letni Francoz *Pierre-Louis Lions* s področja parcialnih diferencialnih enačb, 37-letni Francoz *Jean-Christophe Yoccoz* s področja dinamičnih sistemov ter 39-letni Rus *Efim Zel'manov* s področja algebre. Nevanlinnino nagrado pa je dobil 38-letni Izraelec *Avi Wigderson* s področja teorije formalnih dokazov.

Delo nagrajencev so na kratko predstavili ugledni matematiki z različnih koncev sveta, pa tudi sami nagrajenci so imeli plenarna predavanja. Poleg tega

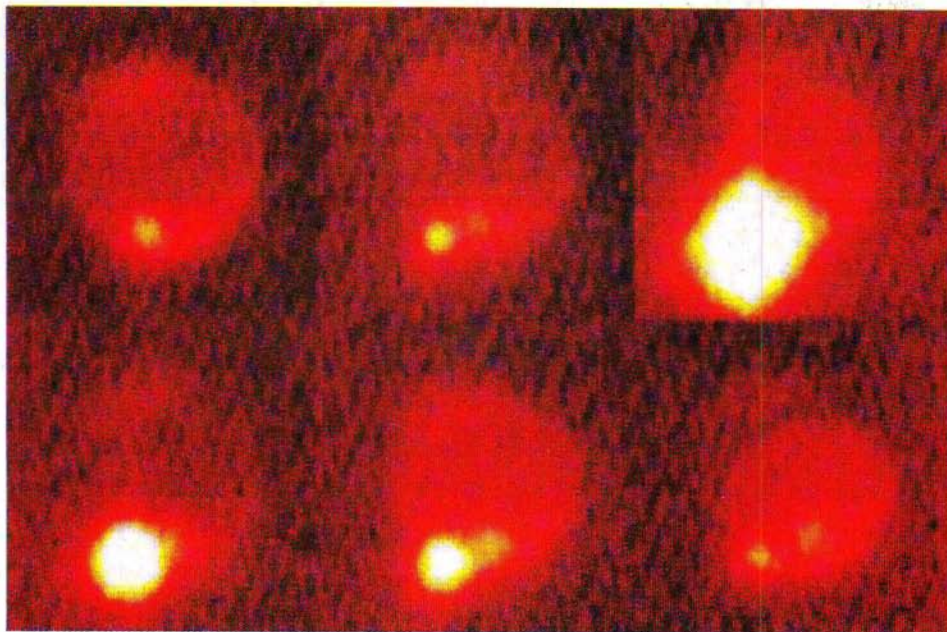
je bilo okoli 140 drugih vabljenih predavateljev, veliko udeležencev pa je svoje raziskave predstavilo na posterjih. Različne fundacije so finančno podprle udeležence iz manj razvitih dežel, tako da je bilo na kongresu zastopanih okoli sto držav z vseh petih kontinentov.

Naslednji mednarodni kongres matematikov bo čez štiri leta v Nemčiji, nato pa se bo štiri leta kasneje preselil v daljno Avstralijo.

Dušan Repovš



Slika 3. Komet Shoemaker-Levy 9 nekaj mesecev pred trkom z Jupitrom.



Slika 4. Zaporedni posnetki eksplozije kosa L; posneto z Antarktike (SPIREX, University of Chicago).



Slika 5. Kometov kos G, 12 minut po trku; posnet v infrardeči svetlobi (2340 nm) z 2,3 metrskim CASPIR teleskopom na Siding Springu v ZDA.