

PRESEK

1

ISSN 0351-6652 DRUŠTVO MATEMATIKOV, FIZIKOV IN ASTRONOMOV SLOVENIJE, 22(1994-1995)

VSEBINA

UVODNIK	Novemu letniku Preseka na pot (Marija Vencelj)	1
MATEMATIKA	Verižno merjenje dolžin (Jože Malešič)	4-9
	Malo harmonične geometrije (Neža Mramor)	54-61
FIZIKA	Ali se zemlja giblje? (Janez Strnad)	34-42
ASTRONOMIJA	Sedem sester (Marijan Prosen)	62-III
RAČUNALNIŠTVO	Posplošeni hanojski stolp (Ciril Pezdir)	10-16
TEKMOVANJA	Državno tekmovanje iz fizike za Zlata Stefanova priznanja 1993/94 (Mirko Cvahte, Zlatko Bradač)	16-17
	30. tekmovanje za Zlato Vegovo priznanje (Aleksander Potočnik)	25
	38. matematično tekmovanje srednješolcev Slovenije (Darja Žužek Delač)	28-29
	32. tekmovanje iz srednješolske fizike (Ciril Dominko)	30-31
	15. mednarodno matematično tekmovanje mest - pomladanski krog - rešitve iz XXI/P-6, str. 359 (Matjaž Željko)	43-47
	18. državno tekmovanje srednješolcev iz računalništva (iz uredništva)	53
NALOGE	Povezanost (Vilko Domajnko)	2
	Groza (Vilko Domajnko)	17
	Novi neznani liki, 1. del (Martin Juvan)	17
	Zabava (Mateja Rojc)	42
	O treh črnih čepicah (Matevž Bren)	52
	Dolgčas (Vilko Domajnko)	61
RAZVEDRILO	Igra "LEGO" (Mitja Rosina)	26-28
	Križanka Fizikalne enote (Marko Bokalič)	32-33
	Popolne številske besede v slovenščini (Tomaž Pisanski) ...	48-52
REŠITVE NALOG	Križanka Krog - iz XXI/P-6, str. 352 (Marko Bokalič)	47
NOVICE	Frekvenca nihajnega kroga (Janez Strnad)	3
	Matematični učbeniki Jurija Vege (Peter Legiša)	18-24
NA OVITKU	Plejade - najbolj znana, za marsikoga pa tudi najlepša zvezdna kopica (M 45). Pojavlja se že v septembrskih večerih nizko nad vzhodnim delom obzorja. Lepo je vidna vso jesen in zimo. Sredi novembra je okoli polnoči najvišje na nebu na jugu. Šele v aprilu postane kopica neprimerna za opazovanje.	I,IV

NOVEMU LETNIKU PRESEKA NA POT

Spet je tu novo šolsko leto in z njim prva letošnja številka Preseka, ki stopa tako že v dvaindvajseto leto izhajanja. Napolnili smo jo z vsakega po malem, kot se za revijo za mlade matematike, fizike, astronome in računalnikarje pač spodobi. S posameznega področja po članek, dva, pa kopica nalog - to pot iz logike, teorije grafov in računalništva. Nekaj zanimivih matematičnih nalog lahko najdete v prispevku o matematičnih učbenikih Jurija Vege, za prihodnje številke pripravljamo tudi fizikalne naloge. Naučili se boste, kako lahko z metrsko palico brez kakršnihkoli oznak, kot edinim pripomočkom, merimo razdalje do poljubne natančnosti, v razvedrilni rubriki pa vas čaka pravi pravcati matematični dokaz, da je število 13 v angleščini nesrečno število, v slovenščini pa ne. Posebej za Presek si je naš sodelavec izmislil igrico LEGO in vas sprašuje po zmagovalni strategiji, naš enigmatik pa je to pot pripravil namesto slikovne običajno tematsko križanko. Videli boste, da je imenitna.

Ker je med našimi bralci veliko učencev in dijakov, ki preskušajo svoje znanje na tekmovanjih iz matematike, fizike in računalništva, povejmo tokrat nekaj več o naši tekmovalni rubriki. V njej smo že lani uvedli spremembe, ki jih ohranjamo tudi letos. Tako objavljamo v prvi številki poročila z državnih prvenstev v šolskem letu 1993/1994 z imeni najboljših tekmovalcev, v naslednjih številkah pa si bodo po težavnostni stopnji za posamezne skupine sledile naloge in rešitve z lanskoletnih tekmovanj za Vegova in Stefanova priznanja za osnovnošolce in z raznih tekmovanj za srednješolce. Naloge so namenjene predvsem tistim, ki se za ustrezna tekmovanja šele pripravljajo, in seveda njihovim mentorjem. Menimo, da je koristneje, če se z nalogami najprej spoprimate sami, ne da bi prehitro pokukali v uradne rešitve. Zato bomo rešitve objavljali z zamikom ene številke za zastavljenimi nalogami, pa vendar dovolj zgodaj, da jih boste lahko primerjali s svojimi še pred ustreznim tekmovanjem v tekočem šolskem letu. Vsekakor bomo, kakor hitro bo znan, objavili tudi urnik tekmovanj za tekoče šolsko leto - to je predvidoma v tretji ali četrti številki Preseka.

Seveda si želimo veliko naročnikov. Ne le zato, ker bi bila s tem naročnina Preseka za vas nižja, ampak tudi, ker bi radi, da bi prispevke, ki jih z veliko vneme pripravljajo naši sodelavci, bralo in se ob njih izpopolnjevalo čimveč mladih bralcev. Učitelje matematike, fizike in računalništva, Presekove poverjenike na slovenskih šolah, vabimo, da nam pri tem pomagajo.

Marija Vencelj

POVEZANOST

Žal je zaključek šolanja za šesterico vrsto let nerazdružljivih šolskih prijateljev pomenil tudi to, da so se naposled le morali raziti. Vendar so se nekateri občasno srečevali še tudi potem, ko so že hodili vsak na svojo šolo.

In tako je Peter, najstarejši med njimi, po enem letu sklenil organizirati sestanek, na katerega bo povabil samo vse tiste prijatelje iz šesterice, ki jih je srečal v preteklem letu. Toda vsak njegov povabljenec naj bi povabil še vse tiste prijatelje iz šesterice, ki jih je sam srečal v preteklem letu.

Kmalu je podobno storil tudi njegov prijatelj Pavel. Zamislil si je sestanek, na katerega pa bo povabil samo vse tiste prijatelje iz šesterice, ki jih v preteklem letu ni srečal. Pri tem pa bi naj tudi vsak povabljenec povabil še vse tiste prijatelje iz šesterice, ki jih v preteklem letu sam ni srečal.

Dokaži, da bo vsaj na enega izmed obeh sestankov zagotovo povabljenih vseh šest prijateljev.

Vilko Domajnko

PRESEK

list za mlade matematike, fizike, astronome in računalnikarje
22. letnik, šolsko leto 1994/95, številka 1, strani 1-64

UREDNIŠKI ODBOR: Vladimir Batagelj, Tanja Bečan (jezikovni pregled), Dušica Boben (oblikovanje teksta), Mirko Dobovišek (glavni urednik), Vilko Domajnko, Roman Drnovšek (novice), Darjo Felda (tekmovanja), Bojan Golli, Marjan Hribar, Boštjan Jaklič (tehnični urednik), Martin Juvan (računalništvo), Sandi Klavžar, Edvard Kramar, Boris Lavrič, Andrej Likar (fizika), Matija Lokar, Franci Oblak, Peter Petek, Pavla Ranzinger (astronomija), Marjan Smerke (svetovalec za fotografijo), Miha Štalec, Jana Vrabec (nove knjige), Marija Vencelj (matematika, odgovorna urednica).

Dopisi in naročnine: Društvo matematikov, fizikov in astronomov Slovenije - Podružnica Ljubljana - Komisija za tisk, Presek, Jadranska c. 19, 61111 Ljubljana, p.p. 64, tel. (061) 265-061/53, št. ŽR 50101-678-47233. Naročnina za šolsko leto 1994/95 je za posamezne naročnike **1100 SIT**, za skupinska naročila šol **880 SIT**, posamezna številka **220 SIT**, za tujino 21000 LIT, devizna nakazila SKB banka d.d. Ljubljana, val-27621-42961/9, Ajdovščina 4, Ljubljana.

List sofinancirajo MZT, MŠŠ in MK
Ofset tisk DELO - Tiskarna, Ljubljana

Po mnenju MZT št. 415-52/92 z dne 5.2.1992 šteje revija med proizvode iz 13. točke tarifne št. 3 zakona o prometnem davku, za katere se plačuje 5% davek od prometa proizvodov.

© 1994 Društvo matematikov, fizikov in astronomov Slovenije - 1208

FREKVENCA NIHAJNEGA KROGA

Nihajni krog brez izgub sestavlja kondenzator s kapaciteto C in tuljava z induktivnostjo L . Energija v nihajnem krogu se ne spreminja s časom. K njej prispevata energija električnega polja kondenzatorja in energija magnetnega polja tuljave:

$$\frac{1}{2}CU^2 + \frac{1}{2}LI^2 = W, \quad \left(\sqrt{\frac{C}{2W}}U\right)^2 + \left(\sqrt{\frac{L}{2W}}I\right)^2 = 1.$$

Napetost na kondenzatorju U in tok skozi tuljavo I se s časom spreminjata. Ali preurejena enačba na desni ne spominja na znano zvezo $\sin^2 \omega t + \cos^2 \omega t = 1$, ki je izpolnjena ob vsakem času? Po njej sklepamo, da velja

$$U = -\sqrt{\frac{2W}{C}} \sin \omega t = -U_0 \sin \omega t \quad \text{in} \quad I = \sqrt{\frac{2W}{L}} \cos \omega t = I_0 \cos \omega t.$$

Indukcijski zakon $U = LdI/dt$ pripelje do zveze $-\sqrt{2W/C} \sin \omega t = -L\sqrt{2W/L} \omega \cos \omega t$, iz katere sledi za krožno frekvenco nihajnega kroga *Thomsonova enačba*

$$\omega = \sqrt{\frac{1}{LC}}.$$

Krožna frekvenca nihajnega kroga in frekvenca $\nu = \omega/2\pi$ sta tem večji, čim manjši sta kapaciteta kondenzatorja in induktivnost tuljave. Z amplitudama napetosti U_0 in toka I_0 izrazimo energijo:

$$W = \frac{1}{2}CU_0^2 = \frac{1}{2}LI_0^2.$$

V nihajnem krogu se energija preliva iz električnega polja kondenzatorja v magnetno polje tuljave. V nekem trenutku je vsa v električnem polju, po četrtni nihaji pa je vsa v magnetnem polju.

Ta zapis je pokora za grdobijo tiskarskega škrata v članku o Heinrichu Hertzmu v rubriki *Novice* četrte številke lanskega letnika: frekvenca ni tem višja, čim višji sta kapaciteta in induktivnost.

Janez Strnad

**PRI NASTAJANJU PRESEKA POMAGAJO S PROGRAMSKO
OPREMO PODJETJA:
MARAND, MARMIS IN SKUPINA ATLANTIS**

MATEMATIKA

VERIŽNO MERJENJE DOLŽIN

Denimo, da pri roki nimamo nikakršnega merila, le palico, za katero vemo, da je dolga ravno en meter. Ali je mogoče s tako palico meriti dolžine vsaj na centimeter natančno? Ena od rešitev bi bila, da bi iz palice naredili merilo: razdelili bi jo najprej na deset delov, potem pa še vsakega od teh spet na deset in bi dobili centimetre. Z nekaj znanja geometrije in z nekaj iznajdljivosti se to da narediti, zahteva pa dosti časa. Precej hitreje pa dolžine lahko merimo po verižnem postopku, ki je razložen v naslednjem primeru:

1. primer

Narisani sta daljica z neznano dolžino in 1m dolga daljica (seveda pomanjšani).



Slika 1

Da bomo merili kolikor mogoče natančno, bomo uporabljali šestilo:



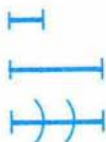
Slika 2

Daljica je torej dolga 2m in še nekaj ostane. Koliko ostane? Na prvi pogled se ostanka ne da izmeriti, saj nimamo drugega merila razen 1m dolge daljice. Vendar je rešitev prav enostavna: z *ostankom* izmerimo *metrsko daljico*:



Slika 3

Vidimo, da je metrska daljica nekoliko daljša od štirih ostankov. Torej je ostanek nekoliko krajši od četrtnine metra. Dobili smo natančnejši rezultat, pa še vseeno ne dovolj natančen. Spet uporabimo zgornjo idejo – stari ostanek izmerimo z novim:



Slika 4

Zdaj se nam je merjenje izšlo: novi ostanek je ravno tretjina starega. Rezultate vseh treh meritev zapišimo v obliki ulomkov:

$$1\text{m} = 4 + \frac{1}{3} \text{ starega ostanka.}$$

Zato je

$$\text{stari ostanek} = \frac{1}{4 + \frac{1}{3}}\text{m}$$

in od tod

$$\text{dolžina daljice} = 2 + \frac{1}{4 + \frac{1}{3}} \text{ m.}$$

Ker je

$$\frac{1}{4 + \frac{1}{3}} = \frac{1}{\frac{13}{3}} = \frac{3}{13}$$

in je

$$\frac{3}{13} = 0,2307\dots,$$

je torej daljica dolga nekaj več kot 2m in 23cm.

Takim ulomkom, kot je

$$2 + \frac{1}{4 + \frac{1}{3}},$$

pravijo zaradi značilne oblike *verižni ulomki*. Pravkar opisanemu načinu merjenja dolžin pa recimo *verižno merjenje*.

2. primer

Premislamo, ali opisano verižno merjenje vedno pripelje do rezultata. Če je mersko število dolžine daljice ulomek, gotovo. To vidimo v naslednjem primeru. Denimo, da je daljica dolga $\frac{267}{77}$ metra. Nekdo, ki njene dolžine ne pozna, jo verižno meri. Vmesne rezultate merjenja lahko predvidimo z naslednjimi računi. Najprej ulomek razcepimo na celi del in ostanek:

$$\frac{267}{77} = 3 \frac{36}{77}.$$

Torej bo najprej ugotovil, da je daljica dolga nekaj več kot 3 metre. Nato bo metrsko daljico meril z ostankom. Zato moramo obratno vrednost $\frac{77}{36}$ ostanka razcepiti na celi del in nov ostanek:

$$\frac{77}{36} = 2 \frac{5}{36}.$$

Obratno vrednost novega ostanka pa spet razcepimo na celi del in ostanek:

$$\frac{36}{5} = 7 \frac{1}{5}.$$

Merilec bo dobil rezultat

$$3 + \frac{1}{2 + \frac{1}{7 + \frac{1}{5}}}.$$

Če je mersko število daljice ulomek (v posebnem primeru lahko tudi desetiški s končno mnogo decimalkami), se verižno merjenje po nekaj korakih vedno konča, saj imajo ostanki čedalje manjše števce in prej ali slej pridemo do števca 1.

3. primer

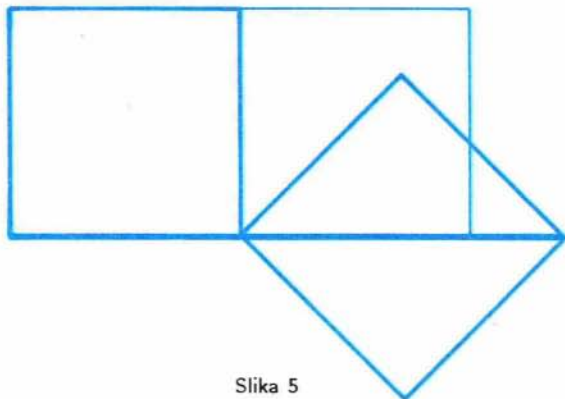
Sam verižno izmeri diagonalo kvadrata, pri čemer naj bo merska enota stranica kvadrata (ni treba, da stranica kvadrata meri ravno 1m). Dobil boš rezultat

$$1 + \frac{1}{2 + \frac{1}{2 + \frac{1}{?}}}.$$

Vprašaj pomeni, da so na tem mestu ostanki že tako majhni, da se nadaljnja števila ne dajo več natančno določiti. Izmeril si, da je dolžina diagonale enaka približno

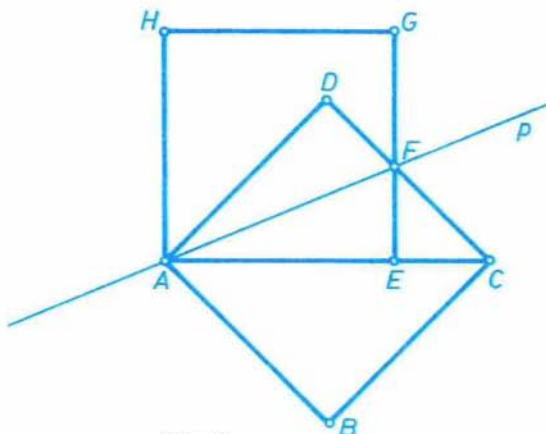
$$1 + \frac{1}{2 + \frac{1}{1}} = 1,4 \text{ dolžine stranice.}$$

Rezultat se kar dobro ujema z znanim pravilom, da je dolžina diagonale enaka dolžini stranice, pomnoženi s $\sqrt{2}$, saj je $\sqrt{2} = 1,4142 \dots$. Števila na mestu vprašaja bomo zdaj natančno določili z geometrijskim sklepanjem. Mislimo si, da ne merimo diagonale s stranico, ampak vsoto diagonale in stranice s stranico:



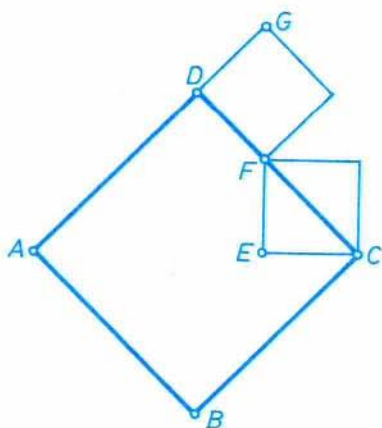
Slika 5

Dobimo dve dolžini stranice in ostanek. Na naslednji sliki si natančneje ogledimo ostanek:



Slika 6

Ostanek EC je skladen z daljico EF , ker je trikotnik $\triangle ECF$ enakokrak. Skozi točki A in F potegnimo premico p . Pri zrcaljenju čez premico p dobimo iz kvadrata $ABCD$ kvadrat $AEGH$. Zato je tudi daljica FD skladna z ostankom EC . Torej je stranica kvadrata (v našem primeru stranica CD) enaka vsoti stranice in diagonale manjšega kvadrata, ki ima za stranico ravno ostanek EC :



Slika 7

Vidimo, da se pri verižnem merjenju začetna slika (slika 5) kar naprej ponavlja. Zato je rezultat verižni ulomek

$$2 + \frac{1}{2 + \frac{1}{2 + \frac{1}{2 + \dots}}},$$

ki se nikoli ne konča. Če merimo samo diagonalo s stranico, pa je seveda rezultat verižni ulomek

$$1 + \frac{1}{2 + \frac{1}{2 + \frac{1}{2 + \dots}}},$$

ki se tudi nikoli ne konča. Čimveč dvojk vzamemo v tem ulomku, tem natančnejši rezultat dobimo. Na primer, če vzamemo pet dvojk, dobimo ulomek

$$1 + \frac{1}{2 + \frac{1}{2 + \frac{1}{2 + \frac{1}{2 + \frac{1}{2}}}}} = 1\frac{29}{70} = 1,41428\dots,$$

ki se na štiri decimalke ujema s številom $\sqrt{2}$.

Spotoma smo ugotovili še nekaj: $\sqrt{2}$ ni racionalno število. Če bi bil $\sqrt{2}$ racionalno število, bi ga lahko izrazili z ulomkom. Iz ulomka pa, kot vemo iz 2. primera, dobimo vedno končen verižni ulomek.

4. primer

Sam poskusi izmeriti obseg kroga z njegovim premerom. En način je, da krog narišeš na karton in ga izrežeš. Na obodu si označi točko in krog kotali po ravni črti. S tem dobiš daljico, katere dolžina je enaka obsegu kroga. Nato s šestilom verižno meri obseg s premerom kroga. Dobil boš rezultat

$$3 + \frac{1}{7 + \frac{1}{?}}$$

Obseg kroga je potemtakem približno $\frac{22}{7}$ premera. Številu $\frac{22}{7}$ pravijo Arhimedov približek za število π . Arhimed je ta približek ugotovil z dolgotrajnim geometrijskim sklepanjem (glej njegova zbrana dela). Arhimed ni bil samo teoretik, znani so njegovi tehnični izumi in odkritje zakona o vzgonu. Zato je čisto mogoče, da je vendarle obseg kroga najprej dobil eksperimentalno, z verižnim merjenjem, in nato dobljeni rezultat utemeljil z geometrijskim sklepanjem.

5. primer

Izračunaj še nekaj nadaljnjih števil v verižnem ulomku, ki predstavlja število π . Upoštevaj, da je

$$\pi = 3,1415926\dots \approx 3\frac{1415926}{10000000},$$

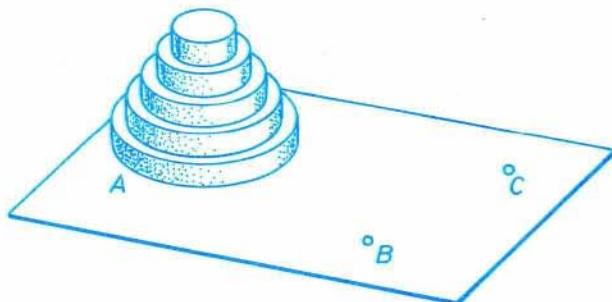
in računaj tako, kot smo računali v drugem primeru.

Jože Malešič

RACUNALNIŠTVO

POSPLOŠENI HANOJSKI STOLP

Hanojski stolp verjetno večina bralcev že pozna (slika spodaj). Vendar se v prispevku ne bomo ukvarjali le z osnovno verzijo hanojskega stolpa, temveč bomo nalogo nekoliko posplošili.



Najprej pa nekaj uvodnih besed za tiste, ki se boste s tem stolpom srečali prvič. Kot je razvidno z zgornje slike, hanojski stolp sestavljajo okrogle ploščice različnih velikosti, zložene na položaju z oznako A. Naloga zahteva, da prestavimo stolp z n ploščicami na položaj C, pri čemer si lahko pomagamo s pomožnim položajem B. Pri prestavljanju pa moramo upoštevati naslednji pravili:

1. na vsaki ploščici lahko ležijo le manjše ploščice;
2. hkrati lahko prestavimo le po eno vrhno ploščico.

Najprej poskusimo prestaviti stolp z majhnim številom ploščic, potem pa število ploščic povečujemo. Pri večjem številu ploščic izgubimo pregled in nalogi nismo več kos brez papirja in svinčnika. Program, napisan v pascalu, nam pomaga prestaviti stolp z veliko ploščicami:

```
program Hanojski_stolp;  
  var n: integer;                                     { velikost stolpa }  
  
procedure Prestavi(izvor, pomozni, cilj: char; n: integer);  
{ Prestavi n ploščic s položaja izvor na položaj cilj, }  
{ pri čemer si pomaga s pomožnim položajem pomozni. }  
begin  
  if n>0 then begin  
    Prestavi(izvor, cilj, pomozni, n-1);  
    writeln('Prestavi ploščico s položaja ',izvor,' na položaj ',cilj,'. ');  
    Prestavi(pomozni, izvor, cilj, n-1);  
  end;  
end;
```

```

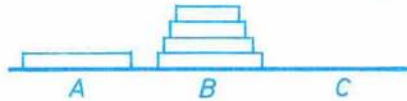
begin { glavni program }
  write('Vnesi velikost stolpa: '); readln(n);
  Prestavi('A', 'B', 'C', n);
end.

```

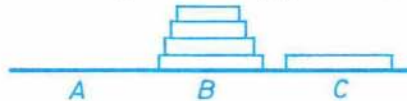
Način reševanja naloge je rekurziven. Vidimo, da podprogram *Prestavi* kliče sam sebe, vendar z drugačnimi parametri. Delovanje podprograma lahko razložimo takole:



Prestaviti želimo stolp z n ploščicami s položaja A na položaj C preko pomožnega položaja B; klic *Prestavi*('A', 'B', 'C', n) v glavnem programu.



To storimo takole: Najprej prestavimo stolp z $n - 1$ ploščicami na pomožni položaj; klic *Prestavi*(izvor, cilj, pomocni, $n-1$) v podprogramu.



Potem prestavimo spodnjo ploščico na ciljni položaj; izpis *writeln*('Prestavi ploscico s položaja ',izvor,' na položaj ',cilj,') v podprogramu.



Nazadnje stolp z $n - 1$ ploščicami prestavimo s pomožnega na ciljni položaj; klic *Prestavi*(pomozni, izvor, cilj, $n-1$) v podprogramu.

Premik stolpa z $n - 1$ ploščicami seveda opravimo rekurzivno na enak način, le izvorni, ciljni in pomožni položaj so drugače razporejeni. Rekurzijo končamo, ko nam ni več potrebno prestaviti nobene ploščice.

Izračunajmo še število potrebnih premikov za prestavitve stolpa n ploščic. Označimo to število z $N(n)$. Iz podprograma *Prestavi* zlahka razberemo $N(1) = 1$ in rekurzivno zvezo

$$N(n) = N(n-1) + 1 + N(n-1) = 2 \cdot N(n-1) + 1.$$

Tako je

$$\begin{aligned}
 N(n) &= 2 \cdot N(n-1) + 1 = 2 \cdot (2 \cdot N(n-2) + 1) + 1 \\
 &= 2 \cdot (2 \cdot (2 \cdot N(n-3) + 1) + 1) + 1 \\
 &= 2 \cdot (2 \cdot (2 \cdot \dots \cdot (2 \cdot (2 \cdot N(1) + 1) + 1) + \dots + 1) + 1) + 1 \\
 &= 2^{n-1} + 2^{n-2} + \dots + 8 + 4 + 2 + 1 = 2^n - 1
 \end{aligned}$$

Zadnjo enakost dobimo, če v zvezo $a^n - b^n = (a - b)(a^{n-1} + a^{n-2}b + \dots + ab^{n-2} + b^{n-1})$ vstavimo $a = 2$ in $b = 1$. To je tudi najmanjše možno število premikov, kar se da lepo dokazati z matematično indukcijo.

Pa povečajmo število položajev. Kako si lahko sedaj, z večjim številom pomožnih položajev pomagamo pri prestavljanju stolpa? Navedeni program poišče rešitev, ki zaradi uporabe dodatnih pomožnih položajev potrebuje precej manj premikov kot rešitev, ki jo poišče prejšnji program.

```

program Posploseni_hanojski_stolp;
  var
    n: integer;
    k: integer;
    izvor, cilj: integer;
    { velikost stolpa }
    { skupno število položajev }
    { začetni in končni položaj }

  function Pomozni(i, izvor, cilj: integer): integer;
  { Poišče številko i-tega pomožnega položaja, }
  { če izvozimo položaja izvor in cilj. }
  begin
    if i >= izvor then i := i + 1;
    if i >= cilj then i := i + 1;
    if i = izvor then i := i + 1;
    Pomozni := i;
  end;

  procedure Prestavi(izvor, cilj, n, k: integer);
  { Prestavi n ploščic s položaja izvor na položaj cilj, }
  { pri čemer si pomaga s k-2 pomožnimi položaji. }
  var i, maxPom: integer;
  begin
    if n > 0 then begin
      Prestavi(izvor, Pomozni(1, izvor, cilj), n - (k - 2), k);
      if n < (k - 2) then maxPom := n else maxPom := k - 2;
      for i := 2 to maxPom do
        writeln('Prestavi ploščico s položaja ', izvor, ' na položaj ',
          Pomozni(i, izvor, cilj), '.');
      writeln('Prestavi ploščico s položaja ', izvor, ' na položaj ', cilj, '.');
      for i := maxPom downto 2 do
        writeln('Prestavi ploščico s položaja ', Pomozni(i, izvor, cilj),
          ' na položaj ', cilj, '.');
      Prestavi(Pomozni(1, izvor, cilj), cilj, n - (k - 2), k);
    end;
  end;

```



```

begin { glavni program }
  write('Vnesi stevilo položajev: '); readln(k);
  write('Vnesi številko začetnega položaja: '); readln(izvor);
  write('Vnesi številko končnega položaja: '); readln(cilj);
  write('Vnesi velikost stolpa: '); readln(n);
  Prestavi(izvor, cilj, n, k);
end.

```

Položaje oštevilčimo s števili od 1 do k . Funkcija $Pomožni(i, izvor, cilj)$ vrne številko i -tega pomožnega položaja. Če je na primer $izvor = 2$, $cilj = 4$, potem z indeksom i takole naslovimo ostale, to je pomožne, položaje:

		izvor		cilj					
položaji	1	2	3	4	5	...	$k-1$	k	
i	1		2		3	...	$k-3$	$k-2$	

Spremenljivka $maxPom$ v podprogramu $Prestavi$ predstavlja največji indeks pomožnega položaja, ki ga bomo uporabili. Če je ploščic manj kot je vseh pomožnih položajev ($n < k - 2$), potem je $maxPom = n$, sicer pa je $maxPom = k - 2$.

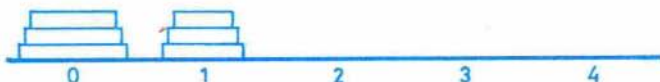
Delovanje podprograma $Prestavi$ lahko prikažemo na podoben način kot v prejšnjem primeru.



Prestaviti želimo stolp z n ploščicami z izvora na cilj; klic

$Prestavi(izvor, cilj, n, k)$

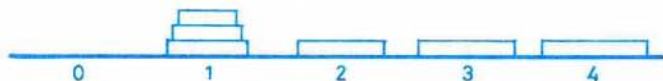
v glavnem programu.



To naredimo takole: Najprej prestavimo stolp z $n - (k - 2)$ ploščicami na prvi pomožni položaj; klic $Prestavi(izvor, Pomožni(1, izvor, cilj), n - (k - 2), k)$ v podprogramu. Na začetnem položaju ostane še $k - 2$ (oziroma n , če je $n < k - 2$) ploščic.



V drugem koraku na ostale pomožne položaje (teh je ravno $k - 3$) razporedimo po eno ploščico z izvora; zanka **for** $i:=2$ **to** maxPom **do** `writeln('Prestavi ploscico s položaja ',izvor,' na položaj ', Pomozni(i,izvor,cilj),'.')` v podprogramu. Na začetnem položaju tako ostane le še ena ploščica, ciljni položaj pa je še vedno prost.



Z izvora prestavimo največjo ploščico na cilj; izpis `writeln('Prestavi ploscico s položaja ',izvor,' na položaj ',cilj,'.')` v podprogramu.



Z ostalih pomožnih položajev v obratnem vrstnem redu prestavljamo ploščice na cilj; zanka **for** $i:=\text{maxPom}$ **downto** 2 **do** `writeln('Prestavi ploscico s položaja ',Pomozni(i,izvor,cilj),' na položaj ',cilj,'.')` v podprogramu.



Stolp s prvega pomožnega položaja prestavimo na cilj; klic `Prestavi(Pomozni(1, izvor, cilj), cilj, n-(k-2), k)` v podprogramu.

Premik stolpa z $n - (k - 2)$ ploščicami zopet opravimo na enak način, le da so izvor, cilj in pomožni položaj drugače razporejeni.

Pri vrednostih $k = 3$, $\text{izvor} = 1$ in $\text{cilj} = 3$ je delovanje drugega programa enako prvemu.

Preštejmo še število potez, ki jih potrebuje gornji program za rešitev posplošene naloge hanojskega stolpa. Z nekaj sistematičnega dela, pri katerem nam je računalnik v pomoč, sestavimo naslednjo tabelo, v katero vpišemo število potez $N(k, n)$ v odvisnosti od števila ploščic n in števila položajev k :

$n \backslash k$	3	4	5	6
1	1	1	1	1
2	3	3	3	3
3	7	5	5	5
4	15	9	7	7
5	31	13	11	9
6	63	21	15	13
7	127	29	19	17
8	255	45	27	21

Iz tabele lahko uganemo tele formule, ki veljajo za poljuben n :

$$N(3, n) = \sum_{i=1}^n 2^{i-1}, \quad N(4, n) = \sum_{i=1}^n 2^{i \operatorname{div} 2},$$

$$N(5, n) = \sum_{i=1}^n 2^{(i+1) \operatorname{div} 3}, \quad N(6, n) = \sum_{i=1}^n 2^{(i+2) \operatorname{div} 4}.$$

Z natančnim pregledom programa lahko razberemo tudi splošno formulo, ki velja za poljubna k in n :

$$N(k, n) = \sum_{i=1}^n 2^{(i+k-4) \operatorname{div} (k-2)}$$

$$= 2^{1+(n-1) \operatorname{div} (k-2)} (k-2 + (n-1) \bmod (k-2)) - (2k-5).$$

Če vstavimo $k = 3$, dobimo ravno $2^n - 1$.

Seveda se lahko vprašamo, ali je postopek optimalen glede števila potez, ali pa mogoče obstaja postopek, s katerim bi prestavili stolp z manjšim številom potez. Žal odgovora ne poznam.

TEKMOVANJA

Za konec pa še legenda, ki sem jo slišal o hanojskem stolpu. Legenda pravi, da je v Hanoju tempelj, v katerem menihi predstavljajo stolp iz 68 ploščic. Ko bodo stolp prestavili, naj bi bilo konec sveta. Poskusite oceniti, kdaj naj bi do tega prišlo. Koliko časa pa bi potreboval izjemno hiter računalnik? Koliko potez na sekundo bi moral narediti, da bi prestavil tak stolp v sto letih? Bo to kdaj možno?

Ciril Pezdur

DRŽAVNO TEKMOVANJE IZ FIZIKE ZA ZLATA STEFANOVA PRIZNANJA 1993/94

Oddelek za fiziko Pedagoške fakultete v Mariboru in Društvo matematikov, fizikov in astronomov sta bila organizatorja tekmovanja iz fizike za osnovnošolce. V predavalnicah in laboratorijih Pedagoške fakultete v Mariboru se je 7. maja 1994 v znanju fizike pomerilo 64 dvočlanskih ekip.

Pred državnim tekmovanjem so bila 9. aprila 1994 področna tekmovanja v devetih mestih Slovenije. Sodelovalo je 312 ekip iz 7. razredov in 352 ekip iz 8. razredov, skupaj 1328 učencev. Tekmovalci so reševali pet teoretičnih nalog. Najbolje uvrščeni so prejeli srebrna Stefanova priznanja.

Na državnem tekmovanju so tekmovalci reševali tri teoretične in dve eksperimentalni nalogi. Naloge za področna in državno tekmovanje sta pripravila Mirko Cvahte in Zlatko Bradač, pri organizaciji je pomagala Jelislava Sakelšek.

Zlata Stefanova priznanja so prejeli (dodano je število doseženih točk od 20 možnih):

7. razred

1. nagrada: Miha Erjavec, Matej Rozman, 17.5, OŠ Koroški jeklarji, Ravne;
3. nagrada: David Martinčič, Ernest Žejn, 15.5, OŠ Prežihovega Voranca, Jesenice; Tomaž Weiss, Marko Čerič, 15.5, OŠ Tabor I, Maribor;

Priznanja: Matevž Juršič, Žarko Manojlovič, 15, OŠ Šmihel, Novo mesto; Miha Kadunc, Miha Žemva, 14.5, OŠ Prof.dr. J. Plemlja, Bled; Jure Kokalj, Primož Meglič, 14.5, OŠ Bistrica, Tržič; Samo Juretič, Gorazd Karer, 14.5, OŠ Milojke Štrukelj, N. Gorica; Gašper Fele-Žorž, Luka Stepan, 14.5, OŠ Franceta Prešerna, Kranj; Matevž Harlander, Katja Šturm, 14, OŠ Grm, Novo mesto; Tina Komel, Matjaž Končan, 14, OŠ Horjul; Jernej Stibilj, Marko Pipan, 13.5, OŠ Dobravlje; Alen Stanojevič, Tanja Lorenčič, 13.5, OŠ Lenart;

8. razred

1. nagrada: Matija Mazi, Andrej Trojar, 20, OŠ Preserje; Martin Knapič, Ana Kolenbrand, 20, OŠ Preska, Medvode;

3. nagrada: Simon Rankel, Uroš Logonder, 17.5, OŠ Lucijana Seljaka, Kranj; Gregor Černivec, Matej Reberšek, 17.5, OŠ Mengeš;

Priznanja: Tomaž Orozel, Petra Kocbek, 17, OŠ Franca Rozmana- Staneta, Maribor; Matjaž Turk, Miha Bartolič, 17, OŠ Šempeter pri Gorici; Marko Žugman, Blanka Mlakar, 17, OŠ Lenart; Primož Berlič, Robert Mohorič, 17, OŠ Borisa Zihlerla, Ljubljana; Žane Logar, Igor Križnar, 16.5, OŠ Toneta Čufarja, Ljubljana; Blaž Zupančič, Darko Ogorevc, 16.5, OŠ Brežice; Andrej Fabjan, Tanja Deržič, 16, OŠ Lucijana Seljaka, Kranj; Matjaž Sokač, Jure Kozin, 15.5, OŠ Vič, Ljubljana.

Tekmovalkam in tekmovalcem čestitamo za dosežene rezultate.

Zlatko Bradač, Mirko Cvahte

GROZA

V stari zapuščeni hiši je bilo nekoč priljubljeno prenočišče, sedaj pa se ji izogne, kdor le more. Pravijo, da je v slehernem izmed njenih prostorov, kamor vodi sodo število vrat, zlobni duh, ki ponoči tam ves čas neusmiljeno straši.

Neke nevihtne noči pa je popotnika zanesla pot prav mimo te hiše. Najprej je nekoliko okleval, ali naj kljub vsemu prenoči v njej ali ne. Pa se mu je zdela pot do najbližjega naselja le predolga, tako da je naposled vendarle vstopil. Kajti ves čas mu je nekaj prišepetavalo, da se mu pri štirih prostorih, za kolikor je vedel, da jih premore hiša, in enem samem zunanjem vhodu, ni treba bati nobenih duhov.

Dokaži, da lahko popotnik zares v vsakem primeru, ne glede na razporeditev prostorov v hiši, prespi v eni izmed sob, kjer ne straši.

Vilko Domajnko

NOVI NEZNANI LIKI – 1. del

Ugotovi, kakšne like narišejo naslednja zaporedja logovih ukazov.

- a) CS REPEAT 3 [FD 100 RT 120 FD 100]
- b) CS RT 30 REPEAT 3 [FD 80 REPEAT 3 [FD 80 LT 120] RT 120]
- c) CS RT 30 REPEAT 3 [REPEAT 3 [FD 100 RT 60] RT 60]

Martin Juvan

MATEMATIČNI UČBENIKI JURIJ VEGA

Letos slavimo dvestoletnico prve izdaje Vegove Popolne zakladnice logaritmov, to je velikih desetmestnih tabel logaritmov. Poleg sedemmestnih tabel logaritmov je to najbolj znano Vegovo delo.

Prva Vegova knjiga pa je imela naslov Predavanja iz matematike in je bila izdana že leta 1782. To je bil začetek serije štirih učbenikov, ki so bili zelo uspešni. Letnice zadnjih (deloma prirejenih) izdaj so: za prvo knjigo 1850, za drugo knjigo 1848, za tretjo knjigo 1835, za četrto knjigo 1819.

Poglejmo si nekaj vtisov o prvih dveh zvezkih Vegovih matematičnih predavanj. Knjigi sta manjšega formata, vendar prva obsega 550 strani, druga pa približno 660 strani in čez 200 slik. Tretja in četrta knjiga obsegata bolj fizikalno snov, zato o njiju tu ne bomo govorili podrobneje.

Prva knjiga ima naslov: Računstvo in algebra. Avtor, Jurij baron plemeniti Vega, je v četrti izdaji (1821) naveden z vsemi svojimi nazivi: član deželnih stanov Vojvodine Kranjske, vitez vojaškega reda Marije Terezije, podpolkovnik cesarsko-kraljevega četrtega pehotnega topniškega polka, član znanstvenih družb v Berlinu, Erfurtu, Göttingenu in Pragi. Uradni naslov knjige je: Predavanja iz matematike, tako za širjenje matematičnih znanj v cesarsko-kraljevih deželah kot tudi posebej za uporabo v cesarsko-kraljevem artilerijskem korpusu.

V uvodu, naslovljenem na celotni artilerijski korpus, pravi med drugim: "Moj namen je dati v roke trdno nit tistim, ki imajo željo v prostem času osvojiti nujno potrebno znanje iz višje in uporabne matematike... Ne dajem novih poti; tako delo ne dopušča novosti, razen tistih, ki imajo izvor v razliki povezav, razvoju in uporabi nekaterih izrekov... Če Vam bo (knjiga) všeč, je moj trud poplačan in moj zagon za nadaljevanje tega dela podvojen. Dunaj, februarja 1782."

V uvodu k drugi izdaji (1792) se Vega pohvali, da je s knjigo imel uspeh tudi pri ljudeh brez prave izobrazbe in da so nekateri s tem učbenikom prišli celo tako daleč, da so lahko inštruirali druge.

V uvodu k tretji izdaji pove, da so knjigo uspešno prodajali tudi v tujino in da jo uporabljajo v mornariški šoli. Zanimiva je tudi izjava, da je po 13 letih vojskovanja ugotovil "da je matematika najtrdnejša osnova prave vojne znanosti" in da so to spoznali vsi kulturni narodi. V vojnih pohodih proti Visoki porti in Franciji je ugotovil, da so se študenti, ki so se zagnano

lotili študija matematike, odlikovali tudi na bojišču s pametno vztrajnostjo in pogumom.

Knjige so, zlasti v začetku, dejansko predavanja, sestavljena iz obširne razlage in mnogih zgledov, medtem ko je vaj sorazmerno malo.

Zanimivo je, da so potence in koreni vpeljani obenem. Tu so seveda postopki za računanje kvadratnih in kubičnih korenov, ki pa danes niso več posebno aktualni. Vpeljana so tudi kompleksna števila.

Obširno poglavje je posvečeno razmerjem in procentom. Zgledi so predvsem v preračunavanju raznih mer. Na tem področju je namreč takrat vladala prava zmešnjava. Vsako večje italijansko mesto je imelo svoje mere. V Genovi so imeli celo dva funta: težkega in lahkega. V Padovi pa so se ponašali z velikim in malim funtom. Odgovor na vprašanje, zakaj je sedanja italijanska država tako centralizirana, lahko iščemo prav v upravni zmedi, ki je vladala pred združitvijo italijanskih pokrajin in mest. Drugod ni bilo dosti bolje. Tudi v Avstriji so se mere razlikovale od pokrajine do pokrajine.

Naslednja obravnavana tema so enačbe prve in druge stopnje ter uporaba, nato pa sistemi enačb prve stopnje. Navedimo nekaj zanimivih zgledov in nalog:

* Prej je moral lastnik hiše na Dunaju od dobljene najemnine letno dajati eno sedmino davka. Zdaj pa mora za davek dajati eno šestino najemnine. Za kakšen delež mora povečati najemnino, da bo imel enake dohodke kot prej?

Odgovor: Za eno petintridesetino.

* Poganka je šla v Jupitrov tempelj in ga prosila, naj ji podvoji denar, ki ga je imela pri sebi. Jupiter ji je ugodil. V zahvalo je darovala dva zlatnika. Z ostankom denarja je šla v Apolonov tempelj, spet prosila za podvojitev, bila uslišana in darovala dva zlatnika. Ko je prišla domov, je imela le en zlatnik. Koliko denarja je imela na začetku?

Odgovor: Zlatnik in tričetr.

* Umirajoči je zapustil nosečo ženo in 9000 goldinarjev. Njegova zadnja želja je bila: Če boš rodila sina, naj dobi trikrat toliko kot ti; če pa boš rodila hčerko, si vzemi dvakrat toliko kot ona. Žena je rodila sina in hčerko. Kako naj se razdeli premoženje?

Odgovor: Sin dobi 6000, žena 2000, hčerka 1000 goldinarjev.

* Dva kmeta sta skupaj porabila 24 mernikov semena. Prvi reče drugemu: Če mi vsak mernik prinese toliko, kot si ti posejal, bom pridelal 135 mernikov. Koliko je posejal vsak?

Odgovor: Eden 9, drugi 15 mernikov.

* Trговец letno poveča svoje premoženje za tretjino. Konec vsakega leta pa vzame 1000 goldinarjev za preživljanje svoje družine. Na koncu tretjega leta ima dvakrat tolikšno premoženje kot na začetku prvega leta. Kolikšno premoženje je imel na začetku prvega leta?

Odgovor: 11100 goldinarjev.

* Osem konjev je v sedmih tednih do golega popaslo travnik, ki je meril 400 kvadratnih sežnjev (t.j., popasli so vso travo, ki je tam že bila, pa tudi tisto, ki je medtem zrasla). V enakih pogojih je devet konjev v osem tednih popaslo travnik v izmeri 500 kvadratnih sežnjev. Koliko konjev bi na ta način preživel za 12 tednov travnik s 600 kvadratnimi sežnji?

Odgovor: Osem.

Šesto poglavje ima naslov: O vrstah in uporabi. Na začetku imamo končne vsote. Med "uporabnimi" nalogami so posebej opazne tiste o sestavljanju piramid iz topovskih krogel. Te so bile namreč takrat res okrogle in so jih sestavljali v umetelno narejene kopice.

Tu imamo tudi kar nekaj snovi iz kombinatorike. Primeri so predvsem iz iger na srečo.

Za računanje so bili takrat izredno pomembni logaritmi, ki jim je posvečeno precej prostora. Zanimive so "uporabne" naloge:

* Nekdo ima sod vina s prostornino 100 veder. Vsako vedro stane 32 krajcarjev. Iztoči eno vedro vina in dotoči 1 vedro vode. Spet iz sode iztoči vedro in dotoči vedro vode. Kolikokrat lahko to ponovi, ne da bi vrednost vedra iz sode padla pod 24 krajcarjev?

Odgovor: Največ štiridesetkrat.

* V neki pokrajini je dva milijona ljudi. Če se zdaj to število letno poveča za eno petdesetino, t.j. za 2 procenta, koliko bo ljudi čez 100 let?

Odgovor: Približno 14 490 000.

* Banka posodi nekomu 600 goldinarjev in si da za to izstaviti zadolžnico za 800 goldinarjev, izplačljivo čez tri leta brez obresti. Kolikšne so odgovarjajoče letne obresti?

Odgovor: Dobrih 10 procentov.

* Koliko časa mora ležati kapital, naložen s štiri procentno obrestno mero, da se bo podvojil?

Odgovor: Približno 18 let.

* Trговец se je obvezal, da bo 6 let zaporedoma v začetku vsakega leta plačal 4000 goldinarjev. Ni pa plačal ničesar. Koliko je dolžan na koncu šestega leta, če je obrestna mera 4 procenete?

Odgovor: 27593 goldinarjev.

Knjiga vsebuje tudi neskončne vrste. Avtor brez posebne zadrege uporablja tudi vrste iz potenc spremenljivke x , kar bi danes uvrstili v višjo matematiko, in to ne prav na njen začetek. Takrat so se pač držali načela, da je važno, da stvar deluje, pa čeprav morda ni povsem jasno, kako.

Sledi še obravnava interpolacije in enačb višjih redov. K temu je Vega dodal še razlago matematične indukcije. Na koncu pa imamo tablice prafaktorjev števil do 10000, tablice kvadratov, kubov, kvadratnih in kubičnih korenov. Namesto kazala je kratek pregled vsebine.

Čeprav je knjiga vsebovala precej osnovnošolske in srednješolske snovi, je bila namenjena odraslim in je ponekod krepko presegla srednješolski nivo. Simpatično je bilo predvsem, da si je avtor prizadeval svoje učence brez večjih ovinkov pripeljati do dokaj zahtevne in raznolike uporabe matematike. Sodeč po več izdajah mu je to tudi uspevalo.

Druga knjiga predavanj vsebuje po avtorju: teoretično in praktično geometrijo, navadno in sferično trigonometrijo, višjo geometrijo in infinitezimalni račun. Zanimivo je rešen problem slik. Zelo lepi bakrorezi so prilepljeni na koncu knjige, tako da jih lahko razvijemo izven nje. V tekstu pa imamo ob strani navedene številke ustreznih slik. Poleg nemških imamo pogosto navedena tudi latinska imena za nove izraze.

Od zanimivejših tem navedimo: Obodni in središčni kot, pitagorejske trojice, konstrukcijo pravičnega petkotnika in pravičnega desetakotnika, potenco točke glede na krog, Heronov obrazec, konstrukcijo daljice z dolžino bc/a .

Precej prostora je posvečenega praktičnemu merjenju - s posebnim poučkom na potrebah topništva. Vodoravne razdalje so merili z napeto verigo. Sicer pa je bila glavna pozornost namenjena merjenju kotov. Tu so uporabljali vodno tehtnico, daljnoglede z nitnim križem in natančna kotna merila.

Merjenje ploščin je bilo oteženo zaradi raznih mer. V nekaterih primerih uporablja Vega za računanje neskončne vsote. Pri tem računa s simbolom za neskončno na način, s katerim se danes ne bi mogli strinjati. Rezultati pa so seveda pravilni.

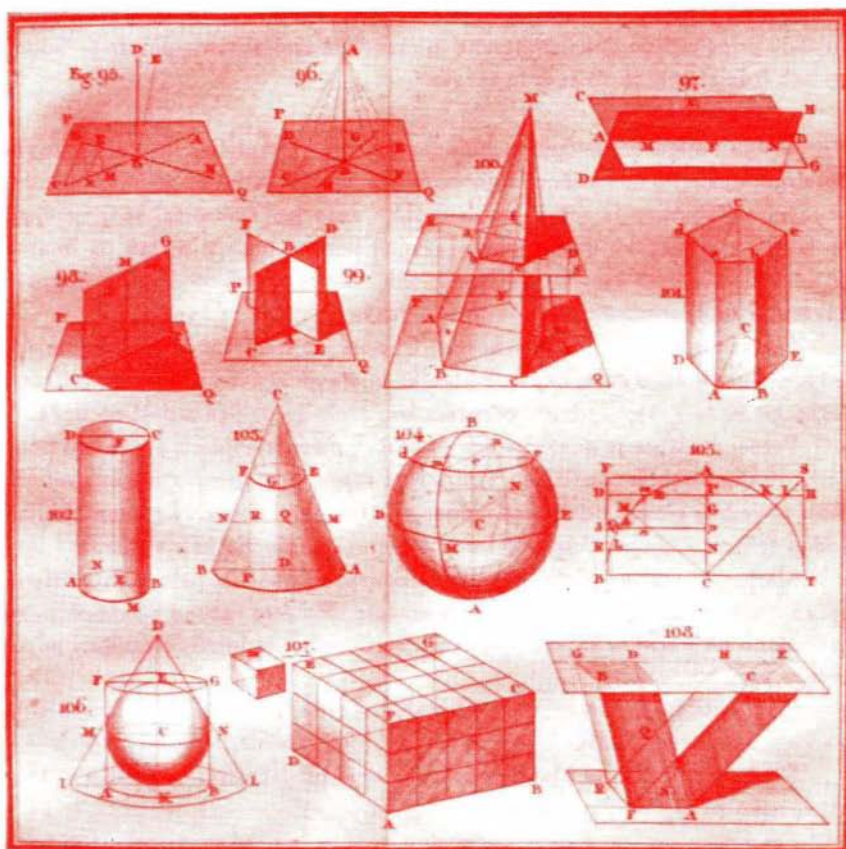
Precej strani je namenjenih računanju števila π . Približek $355/113$ si je po Vegi lahko zapomniti: 11 33 55 (prva tri liha števila, vsako dvakrat).

Sledi delitev lika na ploščinsko enake dele ter transformacija lika v drug lik z enako ploščino.

Ravnine v prostoru so obravnavane po Evklidu, se pravi približno tako kot danes. Pri prostorninah teles so spet težave z merami.

V skladu s svojim nagnjenjem do računstva Vega podrobno razloži računanje vrednosti za sinus (tako kot je v prvi knjigi razložil svojo metodo za računanje logaritmov). Prav tako je tu Vegov izračun števila π . Z njim je odkril napako v prejšnjih izračunih, in sicer na 113. decimalki. Omenili smo že, da je Vega dolgo imel svetovni rekord v številu izračunanih decimalk števila π .

Zanimivo je, da je v okviru obravnave kotnih funkcij sorazmerno malo govora o pravokotnem trikotniku.



Bakrorez iz druge Vegove knjige o geometriji.

Tudi tu imamo primere iz topničarstva. Kaže, da (nekateri) takratni topovi niso imeli nobene muhe, vizirja ali česa podobnega, in so topničarji merili kar čez skrajne točke cevi, kar se je križalo z osjo topa. Izmere topa pa so računali v večkratnikih premera krogle (kalibra, kot bi rekli danes).

Mnogo prostora je posvečeno sfernim trikotnikom in uporabi na površju zemeljske krogle. Močno je poudarjena zveza s krajevnim časom, saj je bilo to za orientacijo in navigacijo izrednega pomena. Točnost tovrstnih meritev pa je bila prvovrsten tehnični izziv. Knjiga vsebuje tudi veliko praktičnih napotkov za geodetske meritve - določanje horizonta itd. Opisan imamo tudi barometer in pa barometrično enačbo, ki so jo uporabljali za ocenjevanje nadmorske višine. V zadnjem delu knjige imamo zemljevid Evrope, ki je v zahodnem delu odličen. Avstrija je takrat segala še do Milana. Opazno pa je, da so jadranski otoki vrisani zelo pomanjkljivo, notranjost balkanskega polotoka pa je - kot preostali osmanski imperij - bolj ali manj prazna. V tem delu je vrisanih le nekaj najvažnejših pristanišč. Sklepamo lahko, da so na Zahodu takrat že izvedli natančne meritve, ki pa so na Vzhod segle le do Zahod najbolj pomembnih prometnih vozlov.

Preostali del knjige je posvečen matematični analizi. To je snov, ki se večinoma obravnava v četrtem letniku srednje šole ali pa šele na univerzi, zato morebitne neznane pojme kar preskočite. Citirajmo začetne stavke: "Krivulja je pot, ki jo opiše točka, ko se giblje po določenem zakonu, vendar brez smeri... Zakon je treba podati z enačbo, ki se ji pokorava točka pri gibanju."

Obravnavane so znane krivulje, kot so elipsa, hiperbola, parabola, nekatere spirale ter cikloida, to je krivulja, ki jo opiše točka na obodu kroga, ki se kotali po premici v ravnini.

Diferencialni račun vpelje neskončno majhne količine in diferenciale. Današnje pisave odvodov pravzaprav ni.

Izpeljana je tudi formula za ukrivljenost ravninskih krivulj.

Naslednji razdelek ima latinski podnaslov "De maximis et minimis" in govori o največjih in najmanjših vrednostih. Tu imamo vrsto zanimivih primerov. Vega je očitno najboljši, ko ima oprava z uporabo matematike:

* Iz krožne plošče izrezati plašč stožca z maksimalno prostornino.

Odgovor: Središčni kot meri $\frac{2}{3}\pi\sqrt{6}$ radianov, to je približno 293 stopinj, 56 minut, 20 sekund.

* Iz okroglega debla izrezati najmočnejši tram, če veš, da je trdnost trama sorazmerna produktu kvadrata višine in vodoravnega prereza.

Odgovor: Širina trama proti višini je kakor $1 : \sqrt{2}$.

* Določiti obliko valja, ki ima pri dani prostornini minimalno površino.

Odgovor: Tak valj je enakostraničen.

* Daljico razdeliti na tri dele, tako da ima dani trikotnik maksimalno ploščino.

* Včrtati v kroglo stožec (valj) z največjo prostornino.

* Včrtati v stožec valj z največjo prostornino.

* Določiti obliko zgoraj odprte valjaste posode z minimalno notranjo površino pri dani prostornini.

* Iz danega pokončnega stožca izrezati parabolični presek z največjo mogočo ploščino.

Naslednja tema je integral. Knjiga vsebuje zelo veliko formul za integracijo. Imamo tudi reševanje diferencialnih enačb.

Mnogo je uporabe integrala: ploščine pod (med) krivuljami, dolžina krivulj, obseg elipse, sploščenost zemeljske krogle (sferoida) in pa površina in prostornina vrtenin.

Dodan imamo širši pregled formul za kotne funkcije, sinuse vseh večkratnikov kota 3 stopinje (od 0 do 90 stopinj) ter zelo obsežen seznam trigonometričnih formul tako za navadne kot za sferne trikotnike.

Na koncu knjige avtor omeni, da bi lahko infinitezimalni račun izpeljal tudi brez neskončno majhnih količin, vendar naj si to zainteresirani raje ogledajo drugje. Zanimiva je tudi pripomba: Tisti, ki jim tak infinitezimalni račun ni všeč in ki mislijo, da so sami sposobni napraviti boljšega, naj svoje rezultate preverijo pri računanju dolžin lokov in prostornin rotacijskih teles. Očitno je mnoge motila ohlapnost takratnih dokazov (ki pa skoraj nikoli ni vplivala na natančnost računov). Bistvene korake k večji preciznosti je napravil šele francoski matematik Cauchy več desetletij kasneje.

Tretja knjiga ima naslov: Mehanika trdnih teles. Dodani so ji lepi bakrorezi, ki kažejo škripčevja, zobata kolesa in mehanizme. Četrta knjiga je Mehanika tekočin. Slikovne priloge so bakrorezi veznih posod in raznih črpalk, med katerimi je ena tudi na paro. Več o teh knjigah bo lahko povedal mehanik ali fizik.

Iz povedanega je jasno, da sta prvi dve knjigi vsebovali dobršen del tega, kar še danes učimo pri matematiki tako na srednjih šolah kot na tehničnih in nekaterih drugih fakultetah. V nekaterih poglavjih posredovano znanje je bilo praktično enakovredno tistemu, kar zahtevamo danes. Knjige so tudi dokaj pregledne, avtor pa se je očitno potrudil matematiko približati bralcu. Značilni so tudi obširni komentarji, ki naj bi olajšali obvladovanje nelahke snovi. Posebno simpatična pa je, kot sem že rekel, avtorjeva usmeritev v uporabo, ki je tudi danes eden poglavitnih čarov teh knjig.

Peter Legiša

TEKMOVANJA

30. TEKMOVANJE ZA ZLATO VEGOVO PRIZNANJE

Najboljši sedmošolci in osmošolci z občinskih tekmovanj so se v soboto, 21. maja 1994, pomerili v šestih regijah:

REGIJA	7. razred	8. razred
- Ljubljana	91	145
- Maribor	43	63
- Celje	27	41
- Koper	14	23
- Nova Gorica	10	18
- Novo mesto	17	27
SKUPAJ	202	317

Zlato Vegovo priznanje so prejeli sedmošolci, ki so osvojili najmanj 16 od 25 možnih točk, in osmošolci, ki so osvojili najmanj 13 od 25 možnih točk.

Vsem učencem, ki so osvojili zlato Vegovo priznanje, je DMFAS poklonilo knjigo *Številске križanke*.

Nagrade najuspešnejšim tekmovalcem:

7. razred

I. nagrada: Matej PFAJFAR, OŠ Antona Tomaža Linhart, Radovljica; Maja KRESLIN, OŠ Beltinci, Beltinci; Marko PIPAN, OŠ Dobravlje, Dobravlje; Rok ŠKUFGA, OŠ Ivana Groharja, Škofja Loka; Samo JURETIČ, OŠ Milojke Štrukelj, Nova Gorica; Gorazd KARRER, OŠ Milojke Štrukelj, Nova Gorica; Ajda SKARLOVNIK, OŠ Prežihovega Voranca, Ljubljana; Marko JEZNIK, OŠ Vuzenica, Vuzenica;

II. nagrada: Luka LIPAR, OŠ Dr. Vita Kraigherja, Ljubljana; Irena JERAJ, OŠ Gustava Šiliha, Velenje;

III. nagrada: Martin SEGA, OŠ Spodnja Šiška, Ljubljana; Bogdan FÜRST, OŠ Šmarje pri Jelšah, Šmarje pri Jelšah.

8. razred

I. nagrada: Andrej PERNE, OŠ Milojke Štrukelj, Nova Gorica; Matija MAZI, OŠ Preserje, Preserje;

II. nagrada: Tanja DERŽIČ, OŠ Lucijana Seljaka, Kranj;

III. nagrada: Tadej STARČIČ, OŠ Cvetka Golarja, Škofja Loka.

Aleksander Potočnik

RAZVEDORILLO

IGRA "LEGO"

Pri igrah za dva igralca je zelo zanimivo iskati zmagovito strategijo. Včasih jo hitro najdemo, igra potem seveda ni več zanimiva in jo namesto nas zlahka igra računalnik. Tak primer je v lanski 3. številki Preseka predstavil Matjaž Željko (Igra "NIM"). Pri zahtevnih igrah kot sta šah in go, pa zmagovite strategije še niso odkrili in se ji z mnogo ustvarjalne domišljije le približujemo.

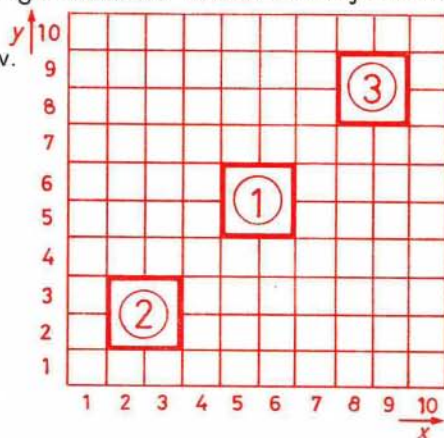
Tu si bomo ogledali novo zanimivo igrico, za katero zmagovita strategija še ni raziskana, razen nekaj otvoritev in končnic. Vabim bralce, da dopolnijo seznam enostavnih končnic in da se z igranjem poizkusijo približati zmagoviti strategiji. Kot lahko uganete iz naslova, potrebujete nekaj "kock" LEGO, ki si jih lahko izposodite od bratca ali sestrice, ali pa jih potegnate iz svojega "arhiva". Pravila so naslednja:

Igralna deska je plošča LEGO z 10×10 čepki. Igralca izmenoma polagata na ploščo kvadre LEGO z 2×2 čepka (barva ni važna). Izgubi tisti, ki ne more več narediti poteze. Dodatno pravilo: prvi igralec ne sme v prvi potezi položiti kvadra v sredo plošče.

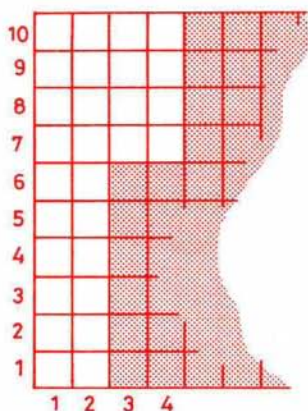
Če nimate plošče 10×10 , jo lahko sestavite iz manjših kosov ali prekrijete del večje plošče. Kvadre smete polagati tako, da se ne dotikajo vzdolž stranic; "zapravljeni" prostor naredi igro zanimivo. Kvadri ne smejo štrleti čez igralno desko.

Poglejmo najprej nekaj otvoritev.

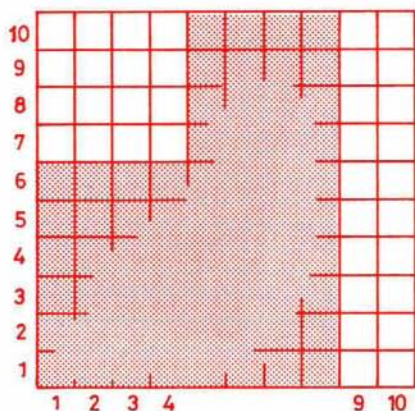
O₁: Če ne bi bilo dodatnega pravila, bi bila igra trivialna. Prvi igralec bi dal kvader v središče. V naslednjih potezah bi prvi igralec enostavno "ponavljal" poteze $(x_1, x_2; y_1, y_2)$ drugega igralca, s tem da bi položil kvader na nasprotno stran deske na koordinate $(11 - x_1, 11 - x_2; 11 - y_1, 11 - y_2)$ kot na sliki 1. Prvi igralec bi torej vedno imel možnost odgovora, medtem ko bi drugemu igralcu prej ali slej zmanjkalo prostora. Zmagovita strategija torej izkorišča središčno simetrijo.



Slika 1. $1 = (5, 6; 5, 6)$, $2 = (2, 3; 2, 3)$, $3 = (8, 9; 8, 9)$



Slika 3. Na potezi je prvi igralec.



Slika 4. Ostali sta še dve polji. Na potezi je prvi igralec.

Mitja Rosina

38. MATEMATIČNO TEKMOVANJE SREDNJEŠOLCEV SLOVENIJE

Z veseljem smo na *Gimnaziji Kočevje* sprejeli in prevzeli organizacijo letošnjega državnega tekmovanja v znanju matematike za srednješolce. Čeprav smo kot organizatorji imeli obilico dela s pripravami za to srečanje mladih, smo bili ponosni, da smo tokrat mi tisti, ki lahko gostimo najboljše matematike in njihove mentorje iz vse Slovenije.

Pri organizaciji tekmovanja smo se držali že ustaljenih pravil. Tudi tokrat je bilo dvodnevno, z otvoritvijo v soboto 23. aprila in zaključkom naslednji dan. Za simbol tekmovanja smo izbrali znano *Mandelbrotovo množico*, izdelali priložnostni znak, ga odtisnili na majice in jih podarili tekmovalcem in mentorjem. *Komisija za popularizacijo matematike v srednji šoli* je izbrala 162 dijakov iz vse Slovenije, ki so se po slavnostni otvoritvi tekmovanja v prostorih *Gimnazije Kočevje* spoprijeli s pripravljenimi nalogami.

V popoldanskem času smo organizirali tri ekskurzije: rafting na *Kolpi*, ogled *Rajhenavskega pragozda* in ogled pragozda *Krokar*. Obisk ekskurzij je bil izjemen, saj smo nanje popeljali okoli 150 udeležencev tekmovanja. V večernih urah je državna tekmovalna komisija objavila neuradne rezultate, organizatorji pa smo pripravili zabavni večer s plesom. Zanj žal ni bilo zanimanja, saj so bili tekmovalci in njihovi mentorji očitno pretrujeni.

TEKMOVANJA

Tekmovanje smo slavnostno zaključili v nedeljo dopoldne, ko je predsednik državne tekmovalne komisije najboljšim podelil nagrade in priznanja. Prejeli so jih:

Prvi letnik

Prva nagrada: Gorazd Bizjak (Gimnazija Bežigrad, Ljubljana);

Tretja nagrada: Matjaž Konvalinka (Gimnazija Bežigrad, Ljubljana) in Uroš Kržič (Gimnazija Velenje);

Pohvala: Andrej Vodopivec (Gimnazija Celje), Damir Arh (Gimnazija Jesenice), Saša Anžej (Gimnazija Kranj), Mitja Šlenc (Gimnazija Bežigrad, Ljubljana) in Samo Plut (Gimnazija Novo mesto).

Drugi letnik

Druga nagrada: Sašo Živanovič (STŠ - Gimnazija Lava, Celje) in Drago Bokal (Gimnazija Bežigrad, Ljubljana);

Pohvala: Andrej Zorko (Gimnazija Brežice), Sanja Fidler in Miha Vuk (Gimnazija Bežigrad, Ljubljana), Dejan Tušar (Srednja šola Nova Gorica), Matjaž Košak (Gimnazija Novo mesto), Kristijan Cafuta in Jernej Tonejc (Srednješolski center Ptuj) ter Polona Grešak (Gimnazija in ekonomska srednja šola, Trbovlje).

Tretji letnik

Prva nagrada: Jernej Barbič (Gimnazija Tolmin);

Tretja nagrada: Blaž Mavčič (Gimnazija Bežigrad, Ljubljana) in Andrej Šalamun (Gimnazija in ekonomska srednja šola, Trbovlje);

Pohvala: Mitja Pirc (Gimnazija Brežice), Tadej Novak (Srednja šola R. Maistra, Kamnik), Anže Slosar (Gimnazija Koper), Dejan Velušček in Martin Klanjšek (Gimnazija Bežigrad, Ljubljana) ter Marko Žnidarič (Druga gimnazija Maribor).

Četrty letnik

Druga nagrada: Helena Šmigoc in Iztok Kavkler (STŠ - Gimnazija Lava, Celje) ter Primož Moravec (Gimnazija Novo mesto);

Tretja nagrada: Gvido Cigale (Gimnazija Jurija Vege, Idrija), Gregor Vidmar (Srednja šola Josipa Jurčiča, Ivančna Gorica), Petra Ipavec in Domen Prašnikar (Gimnazija Bežigrad, Ljubljana) ter Srečko Maksimović (Gimnazija Poljane, Ljubljana);

Pohvala: Samo Pirc (Gimnazija Kranj), Sonja Ratej (STŠ - Gimnazija Lava, Celje), Kruno Abramovič in Marko Oreškovič (Gimnazija Bežigrad, Ljubljana), Aleš Ahčan (Gimnazija Šentvid, Ljubljana), Damijan Markovič (Druga gimnazija Maribor), Arpad Bürmen (Gimnazija Murska Sobota), Dejan Paravan (Srednja šola Nova Gorica), Primož Kušar (Srednješolski center Ptuj) in Boštjan Kuzman (Gimnazija Velenje).

V ekipo, ki je zastopala Slovenijo na *Mednarodni matematični olimpiadi* v Hong Kongu, so se uvrstili Jernej Barbič in Blaž Mavčič iz tretjega letnika ter Helena Šmigoc, Iztok Kavkler in Primož Moravec iz četrtega letnika.

Darja Žužek Delač

32. TEKMOVANJE IZ SREDNJEŠOLSKE FIZIKE

Letošnje tekmovanje je bilo izvedeno v treh stopnjah: predtekmovanje, državno tekmovanje in izbirno tekmovanje za olimpijsko ekipo. Komisija za popularizacijo fizike v srednji šoli pri DMFA Slovenije je za vse stopnje pripravila naloge z rešitvami in izvedla tekmovanje.

Predtekmovanja, ki je bilo izvedeno na posameznih srednjih šolah v mesecu aprilu, se je udeležilo okrog 1500 tekmovalcev na 51 srednjih šolah.

Državno tekmovanje je bilo v mesecu maju in se ga je udeležilo kar 225 tekmovalcev iz 43 srednjih šol. Povečano število tekmovalcev je posledica večjega zanimanja dijakov in srednjih šol za tekmovanje. V skupini A je tekmovalo 66 dijakov, v skupini B 78, v skupini C 55 in v skupini D 26. V skupini D je bila letos prvič tudi eksperimentalna naloga.

Tekmovanje je organizirala Gimnazija Šentvid v Ljubljani. Medtem, ko so dopoldne tekmovalci reševali naloge, so se njihovi mentorji pogovarjali o problemih pouka fizike v srednji šoli. Po razgovoru so jim gostitelji demonstrirali delovanje sodobnega teleskopa, najnovejše pridobitve šolskega observatorija. Popoldne, ko je tekmovalna komisija pregledovala naloge, so si tekmovalci in mentorji pod vodstvom organizatorjev ogledali Ljubljano in Tehniški muzej v Bistri. Na razglasitvi rezultatov je komisija podelila 5 prvih nagrad, 11 drugih, 20 tretjih in 33 pohval.

Izbirno tekmovanje za olimpijsko ekipo je bilo konec maja na Oddelku za fiziko v Ljubljani. Udeležilo se ga je 10 najbolje uvrščenih iz skupine D na državnem tekmovanju. Za uvrstitev v olimpijsko ekipo je štel seštevek točk iz državnega in izbirnega tekmovanja.

Podeljene nagrade in pohvale:

Skupina A

I. nagrada: Matevž KLANJŠEK, Gimnazija Bežigrad Ljubljana; Matej MARINČ, Gimnazija Bežigrad Ljubljana.

II. nagrada: Andrej KOCAN, II. gimnazija Maribor; Mitja LUŠTREK, Srednja šola Rudolfa Maistra Kamnik; Miloš JEFTIČ, Gimnazija Bežigrad Ljubljana; Matej HORVAT, II. gimnazija Maribor; Boštjan GLAŽAR, SŠ za elektroteh. in računalništvo Ljubljana.

III. nagrada: Domen BOŽEGLAV, Sr. zdravstvena šola in gimnazija Ljubljana; Bojan DOLINAR, Gimnazija Kranj; Peter VERNEKER, Gimnazija Ravne na Koroškem; Damir ARH, Srednja šola Jesenice - gimnazija.

Pohvale: Grega KUMER, SŠ za elektroteh. in računalništvo Ljubljana; Sebastjan JELEN, Gimnazija Celje - Center; Mitja MAJERLE, Srednja tehniška šola Celje; Helena DOLINAR, Srednja šola Nova Gorica; Primož ŠPARL, Srednješolski center Ptuj - gimnazija; Andrej IVANOVIČ, Gimnazija Koper; Gregor ŽAVCER, Prva gimnazija Maribor; Aleksander SLEMENŠEK, Srednja tehniška šola Celje; Jasna HRNČIČ, Gimnazija Ravne na Koroškem; Dejan KOLARIČ, III. gimnazija Maribor; Miha MEŽNAR, Srednja tehniška šola Celje; Andrej RAKUŠA, Gimnazija Franca Miklošiča Ljutomer.

Skupina B

I. nagrada: Tomaž LANGERHOLC, Gimnazija Kranj.

II. nagrada: Matej ŠPINDLER, Gimnazija Bežigrad Ljubljana; Srečko PLEVEL, SŠ za elektroteh. in računalništvo Ljubljana; Tomaž SMRKOLJ, Gimnazija Bežigrad Ljubljana; Jure ŽALOHAR, Gimnazija Kranj.

III. nagrada: Peter JEGLIČ, Gimnazija Bežigrad Ljubljana; Matjaž KOŠAK, Gimnazija Novo mesto; Sašo ŽIVANOVIČ, Srednja tehniška šola Celje; Marko GLAŽAR, Gimnazija Bežigrad Ljubljana; Tadej NOVAK, Srednja šola Rudolfa Maistra Kamnik.

Pohvale: Andrej ZORKO, Gimnazija in ekonomska srednja šola Brežice; Andrej STRAHOVNIK, Center srednjih šol Velenje - gimnazija; Jože VESEL, Sr. tehniška in zdravstvena šola Novo mesto; Klemen ŽAGAR, Gimnazija Šentvid Ljubljana; Karla ŠMIGOC, Srednja tehniška šola Celje; Simona KIRBIŠ, II. gimnazija Maribor; Egon PAVLICA, Srednja šola Nova Gorica; Igor KLEP, Srednješolski center Ptuj - gimnazija.

Skupina C

I. nagrada: Sašo PUKŠIČ, Srednja tehniška šola Celje.

III. nagrada: Andrej BARTOLIČ, Srednja šola Nova Gorica; Mitja PIRC, Gimnazija in ekonomska srednja šola Brežice; Martin KLANJŠEK, Gimnazija Bežigrad Ljubljana; Matej MEŽA, Center srednjih šol Velenje - gimnazija; Miha JURAS, Gimnazija Bežigrad Ljubljana; Uroš MALI, Sr. tehniška in zdravstvena šola Novo mesto.

Pohvale: Rok ŠMITEK, Srednja šola za farmacijo in zdravstvo v Ljubljani; Peter VEK, Srednja tehniška šola Celje; Tilen KOKLIČ, Gimnazija Celje; Peter KINK, Gimnazija in ekonomska srednja šola Brežice; Damjan MURN, Gimnazija Novo mesto; Dejan KROSELJ, Srednja tehniška šola Celje; Alen ORBANIČ, SŠ za elektroteh. in računalništvo Ljubljana.

Skupina D

I. nagrada: Arpad BÜRMEN, Gimnazija Murska Sobota.

II. nagrada: Jure VRHOVNIK, Gimnazija Bežigrad Ljubljana; Primož KUŠAR, Srednješolski center Ptuj - gimnazija.

III. nagrada: Sonja RATEJ, Srednja tehniška šola Celje; Matjaž VENCELJ, Gimnazija Bežigrad Ljubljana; Dejan TOMAŽEVIČ, Sr. tehniška in zdravstvena šola Novo mesto; Iztok KAVKLER, Srednja tehniška šola Celje; Cveto GAŠPERUT, II. gimnazija Maribor.

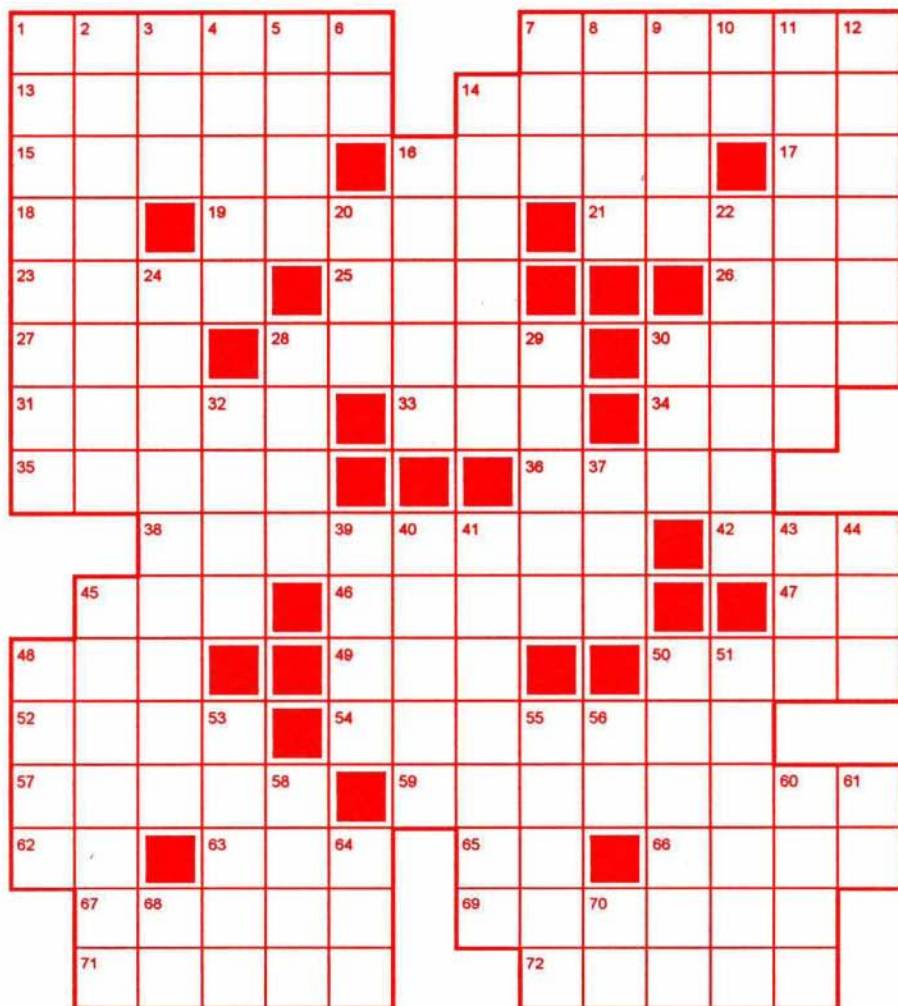
Pohvale: Jernej FILIPČIČ, Gimnazija Koper; Metka DEMŠAR, Gimnazija Šentvid Ljubljana; Kruno ABRAMOVIČ, Gimnazija Bežigrad Ljubljana; Vladimir POGAČ, Gimnazija Ravne na Koroškem; Roman KOPAČ, Srednja šola Rudolfa Maistra Kamnik; Damijan MARKOVIČ, II. gimnazija Maribor.

Po dodatnem izbirnem tekmovanju so se na letošnjo olimpiado iz fizike, ki je bila v Peking (Kitajska) od 11. do 19. julija, uvrstili: Arpad BÜRMEN, Gimnazija Murska Sobota; Matjaž VENCELJ, Gimnazija Bežigrad Ljubljana; Jure VRHOVNIK, Gimnazija Bežigrad Ljubljana; Primož KUŠAR, Srednješolski center Ptuj - gimnazija; Metka DEMŠAR, Gimnazija Šentvid Ljubljana.

Ciril Dominko

KRIŽANKA FIZIKALNE ENOTE

V križanko je uvrščenih 16 fizikalnih enot, med njimi ena dolžinska iz astronomije in ena stara angleška. Njihovi opisi so v debelejšem tisku.



VODORAVNO:

1. enota za temperaturo, imenovana po angleškem fiziku, ki je izdelal absolutno temperaturno skalo, 7. pevec z nizkim glasom, 13. prebivalka azijske države z islamskim fundamentalizmom, 14. izrastek na rogu, 15. enota za prostornino, enaka kubičnemu decimetru, 16. enota za kapacitivnost kondenzatorja, imenovana po angleškem fiziku, ki je odkril električno indukcijo in osnovne zakone elektrolize, 17. oznaka Karlovca, 18. začetnici naslovnega junaka romana Charlesa Dickensa, 19. osnovna dolžinska enota, 21. glavno mesto Afganistana, 23. izboklina na hrbtu, 25. latinski izraz za umetnost, 26. rimski kralj, ki je zgradil пристanišče Ostio, 27. mati grških bogov, 28. enota za svetlobni tok, ki prihaja od svetila, 30. švicarski pianist madžarskega rodu (Geza), 31. arheološko najdišče starokrščanske naselbine nad Potoki pri Jesenicah, 33. kraj pri Opatiji, 34. ime baletne plesalke Mlakar, 35. velik izumrlji trobčar, katerega okostje so našli tudi pri nas, 36. sprejem tekočine v snov ali telo, 38. vztrajnost v fiziki, 42. otoček v Prespanskem jezeru z razvalinami bazilike svetega Ahilija, 45. orientalski prašek za barvanje las, 46. enota za jakost električnega toka, imenovana po francoskem fiziku, ki je odkril elektrodinamične pojave, 47. simbol za nobelijo, 48. enota za moč (naša pisava), imenovana po izumitelju parnega stroja, 49. najvišja stopnja jeze, 50. zadnji, mišičasti del noge od kolena do stopala, 52. telesni izloček skozi kožne pore, 54. atenski državnik in vojskovodja, 57. relacija, razmerje, 59. gorski plezalec, 62. simbol za renij, 63. psja hišica, 65. pivo starih Slovanov, 66. gmota zemlje, ki se na strmeh pobočju utrga in zdrsi navzdol, 67. slovenski rally voznik (Silvan), 69. enota za silo, imenovana po angleškem fiziku, ki je odkril tri osnovne zakone klasične mehanike, 71. zelo intenzivno, kratkotrajno čustveno stanje, 72. pristanišče severozahodno od Barija v južni Italiji.

NAVPIČNO:

1. osnovna enota za maso, 2. nova afriška država, ki se je odcepila od Etiopije, 3. oblika razcvetja, 4. delovni zanos, elan, 5. ribja jajčeca, 6. simbol za natrij, 7. enota za zračni tlak, 8. riževno žganje, 9. natrijev karbonat, 10. naseljen hrvaški otok med Ugljanom in Dugim otokom, 11. osnovna časovna enota, 12. delavka v industriji, 14. velika merska enota za razdalje v vesolju, enaka trem svetlobnim letom in četrt, 16. italijanski fizik, čigar sodelovanje je bilo odločilno za izgradnjo prvega jedrskega reaktorja (Enrico), 20. grška črka, 22. razgibana pokrajina med Karlovško kotlino in reko Petrinjo na Hrvaškem, 24. igra z loparjem in operjeno žogico, 28. prečni drogovi v kozolcu, 29. ljubljansko pokopališče znanih mož, 30. vulkan na filipinskem otoku Mindanau, 32. ženska v samostanu, 37. dvojica, 39. reka v Avstriji in na Madžarskem, desni pritok Donave, 40. jokav otrok, 41. grška črka, 43. angleška dolžinska mera (naša pisava), cola, palec, 44. aktiven havajski vulkan (Mauna), 45. enota za svetilnost, ena osnovnih fizikalnih enot, 48. posnemanja vreden zgled, 50. časovna enota, 51. ameriški elektrotehnik, avtor več izumov (Thomas Alva), 53. enota za delo in energijo, imenovana po angleškem fiziku, ki je določil mehaniški ekvivalent toplote, 55. skupek prepletenih stvari, 56. simbol za titan, 58. kontakt, 60. rekvizit za vožnjo po snegu, 61. začetnici pevke Dremelj, 64. dejanje, 68. začetnici italijanskega predromantičnega književnika Foscola, 70. začetnici nekdanjega ameriškega politika Rogersa.

Marko Bokalič

ALI SE ZEMLJA GIBLJE?

Začnimo razmišljati s pomočjo *Keplerjevih zakonov* (glej zapis o Keplerju v Preseku 21, 136) v *krožnem približku*:

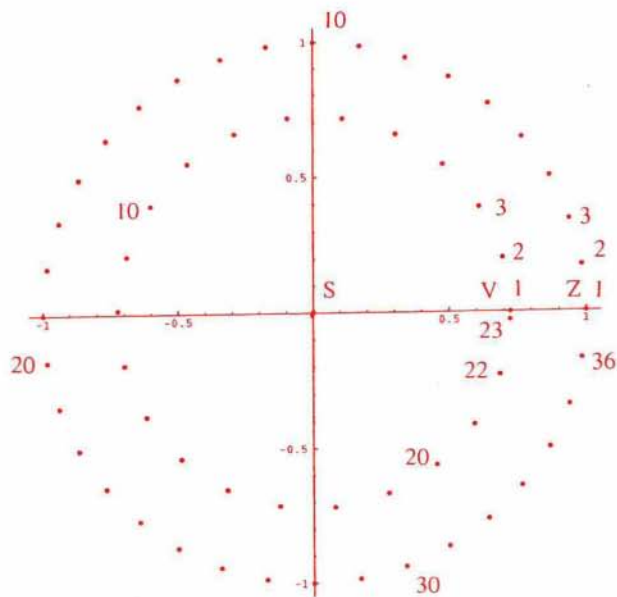
1. Planet se giblje po krogu, v središču katerega miruje Sonce.
2. Planet enakomerno kroži.
3. Kub radija kroga je sorazmeren s kvadratom obhodnega časa planeta.

Pri tem merimo razdalje v oddaljenosti Zemlje od Sonca r_z , to je v astronomskih enotah, in čase v obhodnih časih Zemlje t_z , to je v letih. V razpravo vključimo poleg Sonca in Zemlje še Venero, ki se kot *notranji planet* okoli Sonca giblje v manjši oddaljenosti kot Zemlja. V preglednici astronomskih podatkov preberemo, da je $r_v = 0,723r_z$ in $t_v = 0,615t_z$. (Drugi podatek lahko izračunamo iz prvega s tretjim Keplerjevim zakonom $r_z^3/t_z^2 = r_v^3/t_v^2$.) Manjši oddaljenosti planeta od Sonca ustreza manjši obhodni čas.

Ponazorimo gibanje Zemlje in Venere z grafom na osnovi prvega Keplerjevega zakona. Sonce postavimo v izhodišče. Zemlja se giblje okoli Sonca po krogu z radijem r_z . Pri risanju si pomagamo s časovnimi razmiki $t_z/36$. Tolikšen časovni razmik približno ustreza desetim dnevom ali premiku Zemlje za $1/36$ kroga, torej loku nad kotom 10° . Po času t_z , to je po 36 časovnih razmikih ali po 365 dnevih, se Zemlja vrne v začetno lego. Venera se giblje po krogu z manjšim radijem r_v s krajšim obhodnim časom t_v , tako da se v časovnem razmiku približno desetih dni premakne za $1/36 \cdot 0,615$ kroga, torej za lok nad kotom $16,3^\circ$. Na začetku Venere postavimo na isto stran Sonca kot Zemljo. Venera se vrne v začetno lego po $365 \cdot 0,615$, to je 224,5, dnevih. (Graf vsebuje lege le za prvih 22 časovnih razmikov, to je za 220 dni; risba bi postala nepregledna, če bi vrisali še poznejše lege.) Tako opišemo gibanje planetov v *heliocentrični sliki*, kjer privzamemo, da miruje Sonce (slika 1).

Ko neposredno opazujemo gibanje Sonca in Venere z Zemlje, pa se nam zdi, da miruje Zemlja. Zasledujemo gibanje Sonca in Venere v *geocentrični sliki*, v kateri miruje v izhodišču Zemlja. Za vsak trenutek vnesemo v graf lego Sonca, Zemlje in Venere s prejšnje risbe, a Zemljo vselej premaknemo v izhodišče (slika 2). Ugotovimo, da Sonce kroži okoli Zemlje po krogu z radijem r_z z obhodnim časom t_z v nasprotni smeri, kot v heliocentrični sliki kroži Zemlja okoli Sonca.

Gibanje Venere je precej bolj zapleteno. Z grafa je mogoče naravnost razbrati oddaljenost Venere od Zemlje, saj se ta ujema z oddaljenostjo od



Slika 1. Gibanje Zemlje in Venere v heliocentrični sliki. Sonce miruje v izhodišču. Zemlja in Venera krožita okoli njega. Točke kažejo lege planetov v časovnih razmikih po približno desetih dneh. Ob nekaterih od njih je navedena zaporedna številka. Sliko je dobil računalnik s programom *Mathematica*. Enačbe so nakazane na koncu prispevka.

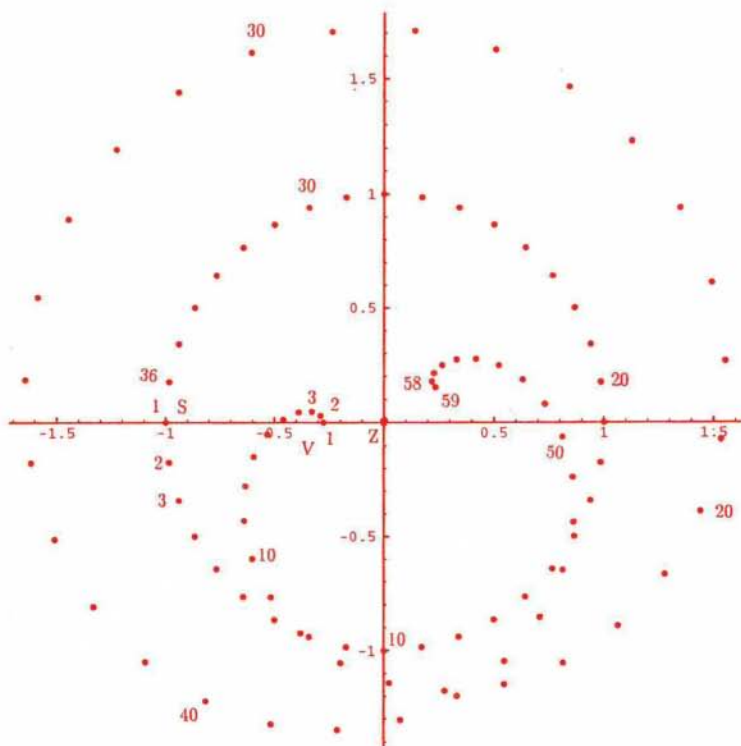
izhodišča. Na začetku je oddaljenost najmanjša in po okoli 58 časovnih razmikih, to je po okoli 580 dneh, je zopet tolikšna. Po polovici tega časa, to je po okoli 290 dneh, pa je oddaljenost največja. Ni težko ugotoviti, da najmanjšo oddaljenost določa razlika $r_Z - r_V$ in največjo vsota $r_Z + r_V$. Venera je v *spodnji konjunkciji* s Soncem, ko je v najmanjši razdalji od Zemlje, med Zemljo in Soncem, in v *zgornji konjunkciji*, ko je v največji razdalji, ko je Sonce med Zemljo in Venero. Čas okoli 580 dni ali 1,6 leta, ki poteče med dvema spodnjima konjunkcijama in v katerem se ponovi Venerina lega glede na Zemljo in Sonce, imenujemo *sinodski obhodni čas Venere* T_V . Za razliko od njega pravimo obhodnemu času okoli Sonca t_V glede na zvezde *siderični obhodni čas*. Po njem se Venera vrne v isto lego v ozvezdju, v katerem smo jo začeli opazovati.

Ali se Zemlja giblje ali ne? Dokler samo opazujemo gibanje, lahko uporabimo heliocentrično sliko, v kateri miruje Sonce, ali geocentrično, v

kateri miruje Zemlja. Nobena od obeh ne nasprotuje drugi. Te enakovrednosti slik pa je konec, brž ko gibanje pojasnimo z osnovnimi zakoni mehanike. Pri tem mislimo na *Newtonove zakone*:

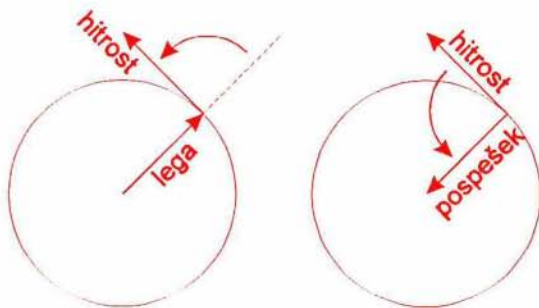
1. Telo miruje ali se giblje premo enakomerno, če nanj ne deluje drugo telo s silo.
2. Sila je masa krat pospešek.
3. Če deluje prvo telo na drugo s silo, deluje drugo na prvo z nasprotno enako silo.

S *silo* opišemo delovanje telesa na telo in v njej vidimo vzrok za spremembo hitrosti.



Slika 2. Gibanja Sonca in Venere v geocentrični sliki. Zemlja miruje v izhodišču, Sonce kroži okoli nje, Venera pa se giblje bolj zapleteno. Graf lahko sestavimo iz grafa na sliki 1 tako, da ob vsakem časovnem razmiku premaknemo Zemljo v izhodišče, ali ga damo izračunati računalniku. Točke ustrezajo po času točkam na sliki 1.

V drugem zakonu se pojavi pospešek, zato je treba poiskati pospešek telesa v našem primeru. Najprej pribijmo, da je enakomerno kroženje pospešeno gibanje. Velikost hitrosti telesa se sicer ne spreminja, a spreminja se njena smer. Pri risanju prvega grafa smo ugotovili, da se planet giblje pravokotno na zveznico s Soncem. Hitrost, ki jo vpeljemo kot spremembo lege, to je premik telesa, deljeno z ustreznim časovnim razmikom, je tangenta na zveznico planeta in Sonca. Pospešek vpeljemo kot spremembo hitrosti deljeno z ustreznim časovnim razmikom. Kot dobimo pospešek iz hitrosti, dobimo hitrost iz lege. Puščico, ki določa lego, moramo zasukati za pravi kot, da dobimo puščico, ki kaže smer hitrosti. Puščico, ki določa hitrost, moramo zasukati za pravi kot, da dobimo puščico, ki določa pospešek (slika 3). Pospešek Zemlje in Venere je potemtakem v vsaki legi planeta usmerjen proti Soncu. Sonce miruje in njegova hitrost in pospešek sta enaka nič. Pospeške, ki smo jih ugotovili v heliocentrični sliki, je mogoče uskladiti z Newtonovimi zakoni. Pospešek planeta namreč povzroča privlačna sila Sonca na planet - *gravitacija* - v smeri od planeta proti Soncu.



Slika 3. Pri enakomernem kroženju dobimo iz hitrosti pospešek, kot dobimo iz lege hitrost. Puščice kažejo krajevni vektor, vektor hitrosti in vektor pospeška. Enačbe so nakazane na koncu prispevka. Puščice so enako dolge, če izberemo $\omega = 1 \text{ s}^{-1}$.

V geocentrični sliki smo lego telesa dobili tako, da smo za vsak trenutek od lege telesa v heliocentrični sliki odšteli lego Zemlje. S tem dosežemo, da Zemlja miruje v izhodišču. Tudi pospešek telesa v geocentrični sliki dobimo s podobnim prijemom: od pospeška telesa v heliocentrični sliki odštejemo pospešek Zemlje. V geocentrični sliki je pospešek Zemlje enak nič. V tej sliki je pospešek Sonca enak negativnemu pospešku Zemlje v heliocentrični sliki, se pravi, da kaže proti Zemlji. V geocentrični sliki je pospešek Venere zapleten: sestavljata ga dva dela - pospešek proti Soncu in negativni pospešek Zemlje

v heliocentrični sliki. Prvi del kaže proti Soncu, drugi od Zemlje proti Soncu. V geocentrični sliki zagotovo ne velja drugi Newtonov zakon ne za Sonce ne za Zemljo in ne za Venero. Glede Newtonovih zakonov zato geocentrična slika ni enakovredna heliocentrični. Newtonovi zakoni veljajo v koordinatnem sistemu, ki ga uporabimo v heliocentrični sliki, ne veljajo pa v koordinatnem sistemu, ki ga uporabimo v geocentrični.

Včasih slišimo pripombo, da drugi Newtonov zakon vsebuje prvega in je prvi odveč. Zares je pri sili nič pospešek enak nič in se telo giblje premo enakomerno ali miruje. V našem primeru pa vidimo, da je prvi zakon potreben. Z njim preskusimo, ali imamo opraviti s koordinatnim sistemom, v katerem moremo uporabiti drugi Newtonov zakon, ali ne. Drugi Newtonov zakon velja le, če koordinatni sistem ni pospešen. Njegovo izhodišče se ne sme gibati pospešeno (in koordinatni osi se ne smeta vrteti). Takemu koordinatnemu sistemu pravimo, da je *inercialen*. Koordinatni sistem v heliocentrični sliki je inercialen, koordinatni sistem v geocentrični pa ni, je pospešen, ker smo izhodišču naložili pospešek Zemlje.

Geocentrična slika nas privede do misli, da je mogoče razširiti drugi Newtonov zakon tako, da velja tudi v neinercialnem koordinatnem sistemu. Drugi zakon se v inercialnem koordinatnem sistemu glasi: sila drugih teles na opazovano telo da z maso pomnoženi pospešek opazovanega telesa. Dodajmo na desni strani pospešek telesa v neinercialnem sistemu, na levi strani pa silo, ki izvira od pospeška sistema. Tej sili pravimo *sistemska sila*. Od sil, s katerimi merimo delovanje telesa na telo, se razločuje po tem, da ne moremo navesti, od katerega telesa izvira. Preskusimo prirejeni Newtonov zakon v pospešenem koordinatnem sistemu v geocentrični sliki: na levi se dodatno pojavi z maso telesa pomnoženi negativni pospešek Zemlje, na desni strani pa prav tolikšna sistemska sila. Sila Sonca na Zemljo v heliocentrični sliki je usmerjena proti Soncu v središču kroga, je *centripetalna*; sistemska sila na Sonce v geocentrični sliki je usmerjena od središča kroga, je *centrifugalna*.

Zdaj povejmo še nekaj o poenostavitvah in približkih. Tretji Newtonov zakon - zakon o vzajemnem učinku - zahteva, da delujeta Zemlja in Venera na Sonce, če deluje Sonce na njiju. V razpravo moramo vključiti še druge planete. Sonce se zaradi njihovih sil giblje pospešeno. Zaradi zelo velike mase Sonca v primeri z maso planetov, pa je pospešek Sonca zelo majhen v primeri s pospeški planetov. Izhodišče koordinatnega sistema bi morali postaviti v težišče Osončja, če bi hoteli biti natančni. Vendar bi bil tudi to približek, čeprav boljši, ker se težišče giblje s še manjšim pospeškom vsaj zaradi kroženja Galaksije.

Tako kot Sonce deluje na planet z gravitacijo, deluje tudi planet na drugi planet z gravitacijo. Sila planeta na planet pa je tako majhna, da jo lahko najprej opustimo in upoštevamo naknadno kot majhno motnjo, če zelo natančno obravnavamo gibanje planetov.

Zaradi obeh navedenih spoznanj prvi Keplerjev zakon velja samo približno, ker ne upošteva gibanja Sonca in sil drugih planetov na opazovani planet. Prvi Keplerjev zakon govori še o elipsi in ne o krogu kot naš približek. Vendar je za Venero in Zemljo krožni približek zelo dober. Njuna pot se zelo malo razlikuje od kroga: velika polos elipse je pri Zemlji za 14 stotisočin, pri Veneri pa samo za 2 stotisočini večja od male.

Na mestu je še nekaj zgodovinskih pripomb. Spočetka so astronomi stavili na geocentrično sliko, saj so zgolj opisovali gibanje planetov in Sonca. Na nebu se jim je zdelo mogoče samo enakomerno kroženje, ker lahko traja v nedogled. Samo posamezni astronomi, na primer Aristarh s Samosa v 3. stoletju pred našim štetjem, so pomislili na možnost, da v središču Vesolja ne miruje Zemlja, ampak Sonce. Aristarh je ocenil, da je oddaljenost Zemlje od Sonca precej večja od oddaljenosti Lune od Zemlje in je Sonce večje od Zemlje (glej Presek 15, 22). Ali ni bolj naravno, da manjše telo kroži okoli večjega? Vendar ne on ne njegovi maloštevilni somišljeniki niso mogli omajati geocentrične slike.

Stari astronomi so vedeli, da z enim samim kroženjem ni mogoče opisati gibanja planeta, ki ga opazujemo. Zato so sestavili več kroženj in trdili, da planet enakomerno kroži po krogu, *epiciklu*, katerega središče enakomerno kroži okoli Sonca po drugem krogu, *deferentu*. S tem dobro pojasnimo geocentrično sliko v krožnem približku. Aleksandrijski astronom Klavdij Ptolemej iz 2. stoletja je povzel izpopolnjeno geocentrično sliko. Dodatnih zamisli pa v krožnem približku ni treba razčlenjevati. Omenimo samo to, da je med drugim Zemljo premaknil malo iz središča drugega kroga. S tem je pojasnil, zakaj od pomladanskega enakonočja do jesenskega preteče dobrih sedem dni več kot od jesenskega do pomladanskega. Tedaj so lego planetov merili na okoli šestino stopinje natančno, to je na tretjino kota, pod katerim vidimo premer Lune. V letih so se nakopičile razlike med napovedanimi in izmerjenimi legami planetov, ki jih je Ptolemej kar spregledal. Zaradi tega so ga nekateri današnji astronomi obdolžili goljufije. Vendar gre najbrž za to, da se je občutek za natančno kvantitativno gledanje le počasi razvijal. Aristarh je ravnal s podatki še precej slabše kot Ptolemej.

Poljskemu astronomu Nikolaju Koperniku je presedala zapletena Ptolemejeva geocentrična slika. Leta 1543 jo je v knjigi *O kroženju nebesnih teles*

poskusil poenostaviti s kroženjem planetov okoli Sonca v heliocentrični sliki. To mu je samo delno uspelo, ker je moral obdržati še nekaj Ptolemejevih dodatkov. Danski astronom Tycho Brahe je leta 1583 predložil svojo vmesno sliko: Sonce kroži okoli Zemlje, drugi planeti pa krožijo okoli Sonca. Poleg tega je Brahe na šestdesetino stopinje, to je desetkrat natančneje kot Ptolemej, opazoval gibanje Sonca, Lune in planetov, posebno Marsa. Nemški astronom Johannes Kepler je na osnovi teh podatkov po skrbnem računanju leta 1609 objavil svoja prva zakona:

1. Planet se giblje po elipsi, v gorišču katere je Sonce.
2. Zveznica od Sonca do planeta pokrije v enakih časih enake ploščine.

Do njiju je prišel, ker - precej drugače kot Ptolemej - ni bil pripravljen spregledati razlike okoli osmine stopinje med napovedano in izmerjeno lego.

Za heliocentrično sliko se je močno zavzel Galileo Galilei, ki je prvi opazoval nebo z daljnogledom. Pri tem je med drugim odkril, da Venera kaže podobne mene kot Luna. Po tem je sklepal, da se Zemlja giblje okoli Sonca. Leta 1632 je izšla knjiga, v kateri je primerjal prednosti in slabosti heliocentrične in geocentrične slike in se dokaj nedvoumno odločil za prvo. Tega pa ne bi smel narediti. Cerkev ga je obtožila in moral je svoje trditve o gibanju Zemlje preklicati. Tedaj naj bi zamrmral "Vseeno se giblje". Šele pred dvema letoma so ga uradno rehabilitirali.

Vendar Galilei ni navedel prepričljivih razlogov za vrtenje Zemlje okoli osi in kroženje okoli Sonca. Mislil je, da dvojno gibanje Zemlje najprepričljiveje podpirata plima in oseka. Nastali naj bi, ker se v različnih točkah na Zemlji različno sestavita pospešek zaradi vrtenja in pospešek zaradi kroženja. Glede tega se je motil. Venerine mene pa je tudi mogoče pojasniti v Brahejevi sliki. Pojasniti jih je mogoče tudi v naši geocentrični sliki, saj smo rekli, da pri opisovanju gibanja ne zaostaja za heliocentrično. Toda Ptolemej je predvidel zgolj možnost, da je radij Venerinega epicikla manjši od radija deferenta in leži ves epicikel znotraj sončne poti. Po tem Venere ne bi mogli videti polne ali blizu ščipa, kar pa ne drži.

Za nadaljnji razvoj fizike so bila pomembna Galilejeva odkritja v mehaniki in Keplerjeva spoznanja o gibanju planetov. Iz njih so zrasli osnovni zakoni mehanike in gravitacijski zakon, ki jih je objavil Isaac Newton leta 1687. Pozneje so prišli na dan tudi pojavi, ki so neposredno podpirali misel o gibanju Zemlje. Leta 1728 je James Bradley z dolgim daljnogledom natančno opazoval lego zvezde blizu zenita. Slika zvezde je opisala v enem letu majhno elipso, ki je nastala zaradi seštevanja hitrosti Zemlje pri gibanju okoli Sonca

in hitrosti svetlobe. Leta 1838 so prvič izmerili *paralakso* kake zvezde, to je polovico njenega navideznega premika proti ozadju bolj oddaljenih zvezd zaradi gibanja Zemlje okoli Sonca. Predvsem zaradi tega, ker v njegovem času še ni bilo mogoče izmeriti paralakse, je Brahe odklonil misel o gibanju Zemlje. Leta 1851 je Jean Foucault v pariškem Panteonu opazoval nihanje dolgega nihala. Navpična ravnina, v kateri je nihalo nihalo, se je zaradi vrtenja Zemlje zasukala za poln kot v 31 urah in $3/4$ (Presek 18, 80).

Kopernikova in Galilejeva zasluga je bila, da je prevladal novi pogled na svet. Zemlja ni središče Vesolja in človek ni odlikovano bitje, ki bi mu bila narava podrejena, ampak samo njen del. Pozneje so ugotovili še to, da Sonce ni v središču Galaksije, da je Galaksija ena izmed številnih galaksij in da Vesolje sploh nima središča.

Na koncu dodajmo še nekaj preprostih računov za tiste, ki jih veseli računanje.

	heliocentrična slika	geocentrična slika
Sonce	$(x_s, y_s) = (0, 0)$	$(x'_s, y'_s) = (-x_z, -y_z)$
Zemlja	$(x_z, y_z) = (r_z \cos(2\pi t/t_z), r_z \sin(2\pi t/t_z))$	$(x'_z, y'_z) = (0, 0)$
Venera	$(x_v, y_v) = (r_v \cos(2\pi t/t_v), r_v \sin(2\pi t/t_v))$	$(x'_v, y'_v) = (x_v - x_z, y_v - y_z)$

Kvadrat oddaljenosti Venere od Zemlje

$$d^2(t) = (x_v - x_z)^2 + (y_v - y_z)^2 = x_v'^2 + y_v'^2 = r_v^2 + r_z^2 - 2r_v r_z \cos 2\pi(t/t_v - t/t_z).$$

Najmanjšo vrednost $d^2(T_v) = (r_z - r_v)^2$ doseže v času T_v in največjo $d^2(\frac{1}{2}T_v) = (r_z + r_v)^2$ v času $\frac{1}{2}T_v$. Kosinus je enak 1, ko je kot enak 2π , in enak -1 , ko je kot enak π . Po tem ugotovimo, da je $T_v = t_z t_v / (t_z - t_v)$, in dobimo za Venero sinodski obhodni čas $T_v = 0,615$ leta / $(1 - 0,615) = 1,60$ leta.

Za enakomerno kroženje sta koordinati, komponenti hitrosti in komponenti pospeška določeni takole (slika 3):

$$(x, y) = r(\cos \omega t, \sin \omega t), \quad (v_x, v_y) = \omega r(-\sin \omega t, \cos \omega t), \\ (a_x, a_y) = -\omega^2 r(\cos \omega t, \sin \omega t) = -\omega^2(x, y).$$

Pri tem je $\omega = 2\pi/t_0$ kotna hitrost in t_0 obhodni čas.

Za planet velja drugi Newtonov zakon $(F_x, F_y) = m(a_x, a_y)$. Vanj vstavimo velikost privlačne sile po Newtonovem gravitacijskem zakonu $F = \kappa mm_s/r^2$ in dobimo:

$$-\kappa \frac{mm_s}{r^2} \left(\frac{x}{r}, \frac{y}{r} \right) = -m\omega^2(x, y).$$

Pri tem je m masa planeta, m_s masa Sonca in $\kappa = \frac{20}{3} \cdot 10^{-11} \text{ m}^3/\text{kg s}^2$ gravitacijska konstanta. Iz enačbe sledi tretji Keplerjev zakon v našem približku $\omega^2 r^3 = 4\pi^2 r^3/t_0^2 = \kappa m_s$. Količina na desni strani je za vse planete Osončja enaka. Iz zapisane enačbe lahko izračunamo na primer s podatkom za Zemljo $t_0 = 1 \text{ leto} = 3,17 \cdot 10^7 \text{ s}$ in $r = 150 \text{ milijonov km} = 1,5 \cdot 10^{11} \text{ m}$ maso Sonca: $m_s = 4\pi^2 r^3/\kappa t^2 = 2,0 \cdot 10^{30} \text{ kg}$.

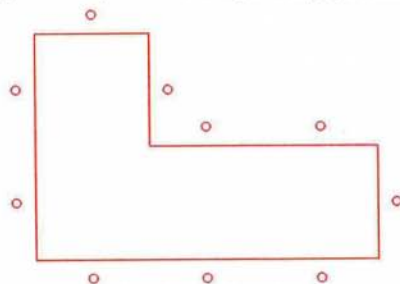
Janez Strnad

ZABAVA

Zakonca Andrej in Barbara Pšeničnik sta priredila zabavo ob petnajstletnici svojega skupnega življenja. Na zabavo sta povabila štiri zakonske pare. Imena soprogov so Cene, Edvard, Grega in Ivan, imena njihovih žena pa Darja, Freda, Helena in Jasna.

Ko je bila zabava na vrhuncu, je ena izmed oseb vstala, potegnila pištolo iz žepa in ustrelila drugo osebo.

Povabljeni so sedeli okoli mize v obliki črke L:



1. Povabljeni so sedeli po abecedi imen v smeri urinega kazalca.
2. Morilec in žrtev sta si sedela nasproti.
3. Tudi morilčev in žrtvin partner sta sedela nasproti.
4. Edini poročen par, ki ni sedel ločeno, je bil gostiteljski par.
5. Žrtev ni sedela poleg morilčevega življenskega sopotnika.
6. Gostitelj je sedel na koncu mize.
7. Morilec ni sedel sam ob eni stranici mize.
8. Tako žrtev kot morilec sta bila povabljenca.

Kdo je morilec?

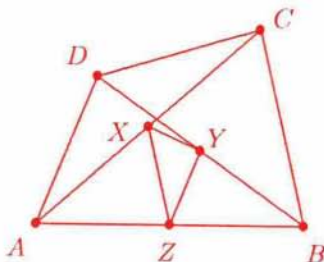
Mateja Rojc

15. MEDNARODNO MATEMATIČNO TEKMOVANJE MEST – POMLADANSKI KROG – rešitve iz XXI/P-6, str. 359

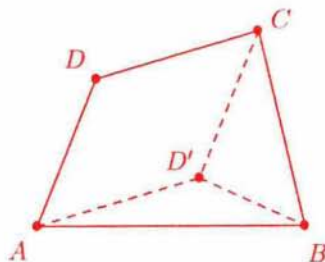
Rešitve nalog prvega dela:

Prva skupina

1. Bodita X in Y razpolovišči diagonal AC in BD štirikotnika $ABCD$ ter Z razpolovišče stranice AB . Potem je $XZ \parallel BC$ in $YZ \parallel AD$ ter $|XZ| = \frac{1}{2}|BC|$ in $|YZ| = \frac{1}{2}|AD|$. Torej lahko načrtamo trikotnik XYZ . Opazimo še, da je kot med nosilkama stranic AD in BC enak kotu $\angle XZY$. Analogno lahko s pomočjo razpolovišča Z' stranice BC načrtamo trikotnik XYZ' in s tem določimo tudi kot med nosilkama stranic AB in CD .



Preostane nam še, da opišemo konstrukcijo štirikotnika, če poznamo dolžine njegovih stranic in oba kota med nosilkama nasprotnih stranic. Naj bo D' taka točka v notranjosti štirikotnika, da je kot $\angle D'AB$ enak (znanemu) kotu med nosilkama AB in CD in da je kot $\angle D'CB$ enak (znanemu) kotu med nosilkama BC in AD . Potem lahko načrtamo trikotnika ABD' in BCD' in je D četrto oglišče paralelograma $AD'CD$.



2. Trditev dokažimo s protislovjem. Predpostavimo, da v nobenem bloku ne stanuje vsaj 15 učencev. Naj bo n število blokov z vsaj dvema učencema.

Če je $n < 4$, stanuje v blokih z vsaj dvema učencema kvečjemu $3 \cdot 14 = 42$ učencev. Torej imamo vsaj 18 blokov s po enim učencem, kar je protislovje, saj med temi ne moremo najti trojice sstanovalcev.

Podobno pridemo do protislovja tudi, če je $n = 4$, saj imamo potem vsaj $60 - 4 \cdot 14 = 8$ blokov s po enim učencem. Če sestavimo deseterico iz teh osmih učencev in dveh iz blokov z vsaj dvema učencema, v tej deseterici ne moremo najti trojice sstanovalcev.

Seveda je tudi možnost $n > 4$ protislovna, saj lahko potem iz 5-ih različnih blokov izberemo po 2 učenca in v tako sestavljeni deseterici ne moremo najti trojice sstanovalcev.

3. Z B_k označimo pravokotno projekcijo točke O na stranico $A_k A_{k+1}$. Ker je

$$\angle A_{k+1} B_k O = \frac{\pi}{2} = \angle A_{k+1} B_{k+1} O,$$

je štirikotnik $B_k A_{k+1} B_{k+1} O$ tetiven. Sledi

$$\angle B_k A_{k+1} O = \angle B_k B_{k+1} O,$$

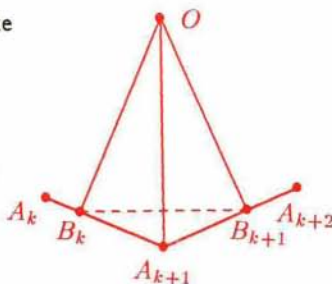
$$\angle B_{k+1} A_{k+1} O = \angle B_{k+1} B_k O.$$

Zaradi $\angle B_k A_{k+1} O \leq \angle B_{k+1} A_{k+1} O$ je $\angle B_k B_{k+1} O \leq \angle B_{k+1} B_k O$ in zato $|B_k O| \leq |B_{k+1} O|$. Sledi

$$|B_1 O| \leq |B_2 O| \leq \dots \leq |B_n O| \leq |B_1 O|$$

in od tod $|B_1 O| = |B_2 O| = \dots = |B_n O|$. Torej je O središče večkotniku vrtane krožnice.

4. Oštevilčimo kovance zaporedoma s števkami od 1 do 10. Vsakemu stanju S priredimo celo število $N(S)$ na naslednji način: $N(S)$ naj bo vsota indeksov tistih kovancev, ki imajo vidno številko. Če pri nobenem kovanec številka ni vidna, naj bo $N(S)$ enak 0. Ker so kovanci razporejeni v krogu, sledi kovanec z indeksom 10 kovanec z indeksom 1 in zato vedno sledi kovanec s sodim indeksom kovanec z lihim indeksom in obratno. Torej se pri obeh dovoljenih potezah ohranja parnost števila $N(S)$. Ker začetnemu stanju $\mathcal{Z}$ pripada število $N(\mathcal{Z}) = 1 + 2 + \dots + 10 = 55$, položaja, pri katerem noben kovanec nima vidne številke, ne moremo doseči.



Druga skupina

1. Nalogo najhitreje rešimo z vektorji. Koordinatno izhodišče postavimo v središče O trikotniku ABC očrtanega kroga in označimo krajevne vektorje posameznih oglišč z $\vec{a}$, $\vec{b}$ in $\vec{c}$. Potem ima točka A_1 krajevni vektor $-\vec{a}$, točka A_0 pa $\frac{1}{2}(\vec{b} + \vec{c})$. Točka A_2 , ki je simetrična k točki A_1 glede na A_0 , ima krajevni vektor $2(\frac{1}{2}(\vec{b} + \vec{c})) - (-\vec{a}) = \vec{a} + \vec{b} + \vec{c}$. Ker je dobljeni rezultat simetričen na $\vec{a}$, $\vec{b}$ in $\vec{c}$, točke A_2 , B_2 in C_2 sovpadajo. Iz rezultata za krajevni vektor točke A_2 vidimo, da je to pravzaprav višinska točka trikotnika.

Ker je

$$\angle MXA = 2(\angle AXY + \angle AYX)$$

ali pa

$$\angle MXA = 2\pi - 2(\angle AXY + \angle AYX),$$

je

$$\frac{|MA|}{|XA|} = 2 \sin\left(\frac{1}{2}\angle MXA\right) = 2 \sin(\angle AXY + \angle AYX) = 2 \sin \angle XAY$$

in zato $|MP| = 2|XY| \sin \angle XAY$. Ker se dobljeni rezultat ne spremeni, če zamenjamo krožnici K_1 in K_2 med sabo, je $|MP| = |NQ|$.

2. V nekaj zaporednih korakih razdelimo poslance v tri stranke.

Izberimo poljubnega oklofutanega poslanca (tak vedno obstaja) in ga obarvamo rožnato. Tiste poslance, ki so oklofutali rožnatega, obarvamo vijoličasto. Tiste poslance (razen rožnatega), ki so oklofutali vijoličaste, obarvamo rumeno. Tiste poslance (razen rožnatega), ki so oklofutali rumene, obarvamo vijoličasto. Postopek nadaljujemo Z opisanim postopkom razdelimo poslance v štiri stranke: rumene, rožnate, vijoličaste in brezbarvne ("še neopredeljene").

Če obstaja brezbarvni poslanec, lahko najdemo tudi takšnega, ki je bil oklofutan. Obarvamo ga rožnato in ponovimo gornji postopek na brezbarvnih poslancih.

Postopek iz prejšnjega odstavka ponavljamo toliko časa, da obarvamo vse poslance. Tako smo jih razdelili v tri stranke. Ker se poslanci iste stranke niso klofutali med sabo, lahko izberemo komisijo iz članov večinske stranke, ki ima vsaj 150 članov.

Druga skupina

1. Predstavimo število M kot $M = x \cdot 10^n + y \cdot 10^{n-1} + z$, kjer je y številka, ki jo brišemo. Novo število označimo z N . Torej $N = x \cdot 10^{n-1} + z$. Če je $x \geq 10$, je $M - 10N = y \cdot 10^{n-1} - 9z < N$. Ker N deli $M - 10N$, je $M = 10N$ in je zadnja številka v M enaka 0, kar pa po predpostavki ni možno. Sledi: $x < 10$ in je zato število M oblike $M = x \cdot 10^n + y \cdot 10^{n-1} + z$, kjer je $1 \leq x \leq 9$ in $0 \leq y \leq 9$.

RAZVEDRILLO

POPOLNE ŠTEVILSKÉ BESEDE V SLOVENŠČINI

Verjetno ste že slišali za takoimenovane "mejne znanosti", mednje sodita na primer astrologija in numerologija. Čeprav numerologija ni znanost v običajnem smislu, je lahko včasih tudi matematiku vir zanimivih problemov. Dejavnost numerologa lahko poenostavljeno razdelimo na dva dela. V prvem delu določi po izbranem natančnem sistemu število ali več števil. V drugem delu pa dobljena števila bolj ali manj svobodno interpretira.

Ena od možnosti je, da priredimo črkam abecede zaporedne številke:

$$\begin{aligned} A &= 1, B = 2, C = 3, Č = 4, D = 5, E = 6, \\ F &= 7, G = 8, H = 9, I = 10, J = 11, K = 12, \\ L &= 13, M = 14, N = 15, \dots \end{aligned}$$

Tej izbiri bomo rekli *standardni numerološki sistem*. Besedam in stavkom določimo številске vrednosti tako, da prirejene številске vrednosti črk seštejemo. Tako na primer beseda ENA dobi vrednost $6 + 15 + 1 = 22$. V izbranem numerološkem sistemu bi lahko ta prvi del, določanje števila, ki pripada dani besedi, prepustili računalniku. Seveda je vrednost besede odvisna od vrstnega reda črk v abecedi. To bi moralo motiti vsakega numerologa z matematično žilico. Pa še nekaj je res. V standardnem numerološkem sistemu beseda ENA ni *popolna*, saj je njena vrednost 22 različna od 1.

Ali bi ne bil bolj "naraven" tak numerološki sistem, ki bi majhnim številskim besedam ENA, DVA, TRI, ... priredil kar števila, ki jim pripadajo: 1, 2, 3, ...? Radi bi našli sistem, v katerem so ENA, DVA, TRI, ... popolne številске besede.

V rubriki o razvedrilni matematiki ameriške revije *Scientific American* marca 1994 Ian Stewart objavlja med drugim naslednji numerološki predlog:

$$\begin{aligned} E &= 3, F = 9, G = 6, H = 1, I = -4, L = 0, \\ N &= 5, O = -7, R = -6, S = -1, T = 2, U = 8, \\ V &= -3, W = 7, X = 11, Z = 10. \end{aligned}$$

Od tod namreč izhaja:

$$\begin{array}{rcl}
Z + E + R + O & = & 0 \\
O + N + E & = & 1 \\
T + W + O & = & 2 \\
T + H + R + E + E & = & 3 \\
F + O + U + R & = & 4 \\
F + I + V + E & = & 5 \\
S + I + X & = & 6 \\
S + E + V + E + N & = & 7 \\
E + I + G + H + T & = & 8 \\
N + I + N + E & = & 9 \\
T + E + N & = & 10 \\
E + L + E + V + E + N & = & 11 \\
T + W + E + L + V + E & = & 12.
\end{array}$$

Ker se sistema enačb ne da rešiti v celih, med seboj različnih številih, če ga podaljšamo z enačbo:

$$T + H + I + R + T + E + E + N = 13,$$

avtor ugotovi, da je v angleščini trinajst resnično nesrečno število, saj izbrane številske vrednosti omogočajo zapis števila štirinajst in petnajst.

Z Mathematico smo se problema lotili še za slovenščino.

Med drugim smo takole eksperimentirali:

```
In[15]:= Solve[{N+I+CH==0,E+N+A==1,D+V+A==2,T+R+I==3,
SH+T+I+R+I==4,P+E+T==5,SH+E+S+T==6,S+E+D+E+M==7,
O+S+E+M==8,D+E+V+E+T==9,D+E+S+E+T==10,
E+N+A+J+S+T==11}]
```

```
Out[15]= {{CH -> -3 + 2 E - S, O -> 11 - E - S - T,
> P -> 5 - E - T, J -> 10 - S - T, M -> -3 + T,
> R -> 8 - E - S - 2 T, SH -> 6 - E - S - T,
> V -> -1 + S, A -> -7 + 2 E + T, N -> 8 - 3 E - T,
> I -> -5 + E + S + T, D -> 10 - 2 E - S - T}}
```



```
In[16]:= Solve[{N+I+CH==0,E+N+A==1,D+V+A==2,T+R+I==3,
SH+T+I+R+I==4,P+E+T==5,SH+E+S+T==6,S+E+D+E+M==7,
O+S+E+M==8,D+E+V+E+T==9,D+E+S+E+T==10,
E+N+A+J+S+T==11,D+V+A+N+A+J+S+T==12}]
```

```
Out[16]= {{CH -> -1 - S, O -> 10 - S - T, P -> 4 - T,
> M -> -3 + T, R -> 7 - S - 2 T, J -> 10 - S - T,
> SH -> 5 - S - T, I -> -4 + S + T, V -> -1 + S,
> A -> -5 + T, N -> 5 - T, D -> 8 - S - T, E -> 1}}
```

```
In[18]:= Solve[{N+I+CH==0,E+N+A==1,D+V+A==2,T+R+I==3,
SH+T+I+R+I==4,P+E+T==5,SH+E+S+T==6,S+E+D+E+M==7,
O+S+E+M==8,D+E+V+E+T==9,D+E+S+E+T==10,
E+N+A+J+S+T==11,D+V+A+N+A+J+S+T==12,
T+R+I+N+A+J+S+T==13,SH+T+I+R+I+N+A+J+S+T==14,
P+E+T+N+A+J+S+T==15,SH+E+S+T+N+A+J+S+T==16,
S+E+D+E+M+N+A+J+S+T==17,O+S+E+M+N+A+J+S+T==18,
D+E+V+E+T+N+A+J+S+T==19,D+V+A+J+S+E+T==20}]
```

```
Out[18]= {}
```

```
In[19]:= Solve[{N+I+CH==0,E+N+A==1,D+V+A==2,T+R+I==3,
SH+T+I+R+I==4,P+E+T==5,SH+E+S+T==6,S+E+D+E+M==7,
O+S+E+M==8,D+E+V+E+T==9,D+E+S+E+T==10,
E+N+A+J+S+T==11,D+V+A+N+A+J+S+T==12,
T+R+I+N+A+J+S+T==13,SH+T+I+R+I+N+A+J+S+T==14,
P+E+T+N+A+J+S+T==15,SH+E+S+T+N+A+J+S+T==16,
S+E+D+E+M+N+A+J+S+T==17,O+S+E+M+N+A+J+S+T==18,
D+E+V+E+T+N+A+J+S+T==19}]
```

```
Out[19]= {{CH -> -1 - S, O -> 10 - S - T, P -> 4 - T,
> M -> -3 + T, R -> 7 - S - 2 T, SH -> 5 - S - T,
> V -> -1 + S, I -> -4 + S + T, D -> 8 - S - T,
> J -> 10 - S - T, A -> -5 + T, N -> 5 - T, E -> 1}}
```

```
In[46]:= %15/.{E->3,T->8,S->10}
```

```
Out[46]= {{CH -> -7, O -> -10, P -> -6, J -> -8,
> M -> 5, R -> -21, SH -> -15, V -> 9, A -> 7,
> N -> -9, I -> 16, D -> -14}}
```

Ukaz `Solve` reši sistem enačb. Vrstici 16 in 19 pokažeta, da ni nobene razlike, če vzamemo sistem od 0 do 12 ali pa od 0 do 19. Vrstica 18 nas prepriča, da je nemogoče rešiti sistem od 0 do 20. Žal pa tudi rešitev sistema od 0 do 12 ne zadošča pogojem, saj dobimo v vsakem primeru $0 = J$. Po krajšem poskušanju smo v 46. vrstici dobili rešitev

A -> 7, CH -> -7, D -> -14, E -> 3, J -> -8,
 M -> 5, N -> -9, I -> 16, O -> -10, P -> -6,
 R -> -21, S -> 10, SH -> -15, T -> 8, V -> 9

za sistem enačb:

```

N+I+CH      == 0,
E+N+A       == 1,
D+V+A       == 2,
T+R+I       == 3,
SH+T+I+R+I  == 4,
P+E+T       == 5,
SH+E+S+T    == 6,
S+E+D+E+M   == 7,
O+S+E+M     == 8,
D+E+V+E+T   == 9,
D+E+S+E+T   == 10,
E+N+A+J+S+T == 11.

```

Človek bi sklepal, da je v slovenščini že dvanajst nesrečno število. Seveda pa je tak sklep preuranjen. Sistem enačb, ki ga rešujemo, je odvisen ne le od jezika, v katerem zapisujemo števila, ampak tudi od pisave.

Na razpolago imamo več možnosti. Recimo, da bi napravili tako, kot je naredil avtor omenjenega članka, ko je zagledal v nemščini črko $\ddot{U}$ v besedi FÜNF. Enostavno jo je nadomestil z navadno črko U. (To upravičeno razburja Nemce, ki so prav v take namene privzeli pravilo, da se $\ddot{U}$ nadomesti z UE). Tako tudi tujci običajno naše strešice preprosto opuščajo, če jih ne morejo natisniti. Bralce vabimo, da pogledajo, kako se v tem primeru vede sistem enačb.

Druga možnost, ki ne izključuje prve, omogoča, da malo "goljufamo". Na primer, namesto NIČ zapišemo NIČLA, namesto ENA pa EN, ENO ali EDEN. Nam je pri tem uspelo kar precej podaljšati zaporedje popolnih številskih besed.

Zadnja možnost pa je, da enačbo namesto v gajici rešimo v bohoričici, natančneje v bohorizhizi. Seveda prepuščamo bralcem svobodo pri natančni izbiri ortografije.

Še eno nalogo imamo za konec. V standardnem numerološkem sistemu nismo našli po nekaj minutnem slepem preizkušanju nobene slovenske popolne številске besede. Bralce, ki bi našli kakšno rešitev, prosimo, da nam jo pošljejo.

Tomaž Pisanski

O TREH ČRNIH ČEPICAH

Profesor Shmuel Zamir s *Hebrew University of Jerusalem* je svoje predavanje o teoriji iger na *Sredinem seminarju* letos marca popestril z naslednjo uganko:

Trije možje, Boltežar, Gašper in Miha, sedijo v sobi s čepicami na glavah tako, da vsak vidi le sosedovi dve. Možje vedo, da je čepica ali rjava ali črna, zunanji opazovalci pa, da imajo vsi trije črne čepice. Pravilo igre, ki jo igrajo možje, je, da sobo lahko zapusti le tisti, ki ve, da ima črno čepico.

Boltežar pravi: *Jaz ne vem.*

Gašper tudi: *Jaz ne vem.*

In Miha: *Tudi jaz ne vem.*

Vstopi vodja igre (brez čepice). *Vsaj eden od vas ima črno čepico!* reče. In sedaj možje:

Boltežar: *Jaz ne vem.*

Tudi Gašper: *Jaz ne vem.*

In Miha: *Jaz vem, ter odide iz sobe!*

Le kako je uganil?

Nadaljevanje

Kako to, da je Miha šele po izjavi vodje igre: *Vsaj eden od vas ima črno čepico*, kar pa je vsem trem že znano dejstvo (saj vsak vidi po dve!), našel rešitev?

Matevž Bren

TEKMOVANJA

18. DRŽAVNO TEKMOVANJE SREDNJEŠOLCEV IZ RAČUNALNIŠTVA

Do zaključka urejanja te številke Preseka žal nismo prejeli poročila s tekmovanja slovenskih srednješolcev v znanju računalništva. Ker pa bi radi že v prvi številki objavili imena tistih učencev in dijakov, ki so se v preteklem letu na različnih tekmovanjih najbolje odrezali, povzemamo rezultate iz tekmovalnega biltena.

Kot običajno so tekmovali v treh skupinah. V prvi skupini se je pomerilo 64 tekmovalcev, v drugi 38 in v tretji, najtežji, 24 tekmovalcev.

Nagrajeni - tudi z lepimi praktičnimi nagradami, med katerimi je gotovo najiminenitnejša dvomesečna praksa pri Hewlett-Packardu v Kaliforniji za tri najboljše iz tretje skupine, so bili:

1. skupina

1. nagrada

Matija Horvat, Gimnazija Koper; Mitja Šlenc, Gimnazija Bežigrad; Sergej Maršnjak, Center srednjih šol Velenje.

2. nagrada

Boris Divjak, Gimnazija Bežigrad; Primož Škerjanc, Gimnazija Kranj; Marko Graberški, Gimnazija Novo mesto.

3. nagrada

Primož Kožuh, SŠER Ljubljana; Tomaž Košmrlj, Gimnazija Kočevje; Gregor Leskovšek, Srednja zdravstvena šola in gimnazija Ljubljana.

2. skupina

1. nagrada

Marko Mlinar, SŠER Ljubljana; Drago Bokal, Gimnazija Bežigrad.

2. nagrada

Borut Jerič, SŠER Ljubljana.

3. nagrada

Matija Mordej, SŠER Ljubljana; Marjan Šterk, Gimnazija Novo mesto.

3. skupina

1. nagrada

Blaž Mavčič, Gimnazija Bežigrad.

2. nagrada

Aleks Jakulin, United World College Devin.

3. nagrada

Miha Vuk, Gimnazija Bežigrad.

Uredništvo

MALO HARMONIČNE GEOMETRIJE

Matematika in glasba imata kar nekaj stičnih točk. Ena takih, ki morda sega najdlje nazaj v zgodovino matematike, je pojem *harmonične sredine*, saj ga je baje preučeval že slavní starogrški filozof in matematik Pitagora. V tem prispevku si bomo z različnih strani ogledali harmonične sredine in jih poskusili opisati z geometrijskimi pojmi in konstrukcijami (skratka, harmonijo bomo poskusili narisati).

Harmonična sredina h dveh pozitivnih števil a in b je recipročna vrednost povprečja (aritmetične sredine) števil $\frac{1}{a}$ in $\frac{1}{b}$:

$$\frac{1}{h} = \frac{1}{2} \left(\frac{1}{a} + \frac{1}{b} \right),$$

torej število

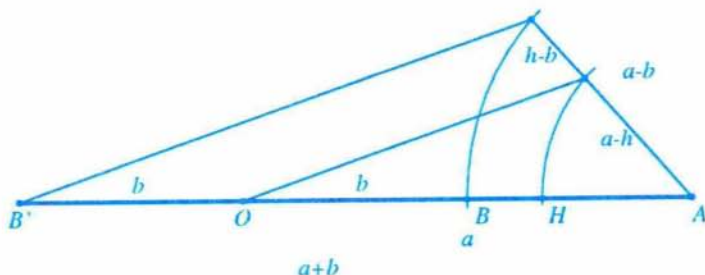
$$h = \left(\frac{a^{-1} + b^{-1}}{2} \right)^{-1} = \frac{2ab}{a+b}.$$

Med harmonično sredino in glasbeno harmonijo je lepa zveza. Legenda pravi, da je Pitagora, ki se je zanimal tudi za zakone glasbene harmonije, opazil, da je sozvočje treh enako napetih strun prav posebej prijetno za uho, če so njihove dolžine v razmerju 6 : 4 : 3. Bralec, ki ima pri roki klavir ali kakšen drug inštrument, se lahko sam prepriča, da je takšno sozvočje res blagozveneče, kajti interval med osnovnima tonoma zunanjih strun je v tem primeru ravno oktava (dolžini sta v razmerju 1:2), srednja struna pa z zunanjima določa kvinto in kvarto. Takšno je na primer sozvočje tonov c , za oktavo višjega c in vmesnega g . Morda ga bo, tako kot je Pitagoro, blagi zven navdihnil, da bo odkril kaj novega o harmoniji. Pitagora je namreč ugotovil, da med dolžinami enakih in enako napetih strun obstaja zveza, ki jo lahko na kratko povzamemo kar takole: dolžina srednje je harmonična sredina dolžin zunanjih dveh.

Harmonično sredino h števil a in b lahko geometrijsko predstavimo na več načinov. Če zgornjo enačbo preuredimo, lahko definicijo harmonične sredine na primer zapišemo takole:

$$\frac{a-h}{h-b} = \frac{a}{b}.$$

Če je a dolžina daljice OA , b dolžina daljic OB in OB' , h pa je dolžina daljice OH (kot na sliki 1), deli točka H daljico BA v enakem razmerju, kot deli O daljico $B'A$.

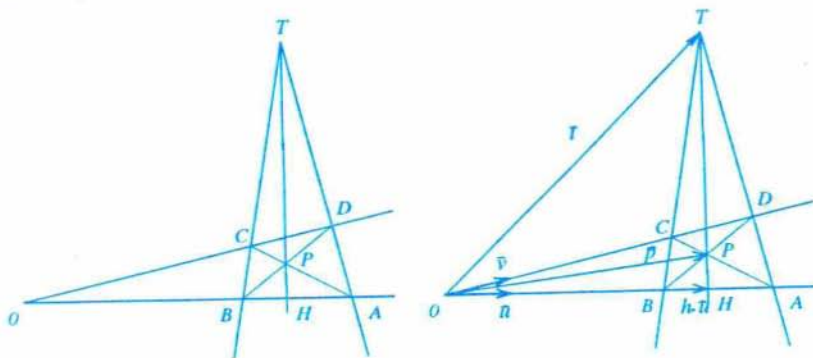


Slika 1. Konstrukcija harmonične sredine z ravnilom in šestilom

Točke A , B , O in H na sliki 1 so primer *harmoničnega niza* točk. Vsak takšen niz je določen s četverico kolinearnih točk $\{A, B; H, O\}$, za katere velja

$$\frac{\overrightarrow{OA} \cdot \overrightarrow{HB}}{\overrightarrow{OB} \cdot \overrightarrow{HA}} = -1,$$

kjer sta v števcu in imenovalcu ulomka na levi skalarna produkta kolinearnih vektorjev. Na sliki 2 je prikazana geometrijska konstrukcija harmonične sredine. Niz treh točk $\{A, B, O\}$ lahko dopolnimo do harmoničnega niza štirih točk $\{A, B; H, O\}$ tako, da skozi vsako od točk A in B narišemo po eno premico, pazimo le na to, da nista vzporedni, presečišče pa označimo s T . Skozi točko O povlečemo tretjo premico, ki seka daljici TA in TB v točkah C in D . Presečišče daljic BD in AC označimo s P , premica skozi T in P pa seka daljico AB ravno v iskani točki H .



Slika 2. Konstrukcija harmonične sredine z ravnilom

Dokažimo, da je $h = \overline{OH}$ res harmonična sredina števil $a = \overline{OA}$ in $b = \overline{OB}$ tako, da konstrukcijo opišemo z vektorji. Večkrat bomo uporabili naslednjo zvezo med vektorji: Če leži neka točka, na primer X , na premici skozi dve drugi točki, na primer Y in Z , potem se krajevni vektor $\vec{x} = \overline{OX}$ te točke izraža s krajevnimi vektorji $\vec{y} = \overline{OY}$ in $\vec{z} = \overline{OZ}$ kot linearna kombinacija, kjer je vsota koeficientov enaka 1:

$$\vec{x} = t\vec{y} + (1-t)\vec{z}.$$

Označimo z $\vec{u}$ vektor dolžine 1 v smeri daljice OA in z $\vec{v}$ vektor dolžine 1 v smeri daljice OC na sliki. Točka P leži na premici skozi točki B in C , zato se vektor $\vec{p} = \overline{OP}$ izraža kot linearna kombinacija $\vec{p} = \alpha b\vec{u} + (1-\alpha)c\vec{v}$ in po drugi strani kot linearna kombinacija $\vec{p} = \beta a\vec{u} + (1-\beta)d\vec{v}$, kjer je c dolžina daljice OC in d dolžina OD . Od tod dobimo

$$\vec{p} = ab \frac{c-d}{ac-bd} \vec{u} + cd \frac{a-b}{ac-bd} \vec{v}.$$

Na podoben način lahko vektor $\vec{t} = \overline{OT}$ izrazimo kot linearno kombinacijo vektorjev $b\vec{u}$ in $d\vec{v}$ ali pa vektorjev $a\vec{u}$ in $c\vec{v}$, od koder dobimo

$$\vec{t} = ab \frac{d-c}{ad-bc} \vec{u} + dc \frac{a-b}{ad-bc} \vec{v}.$$

In nazadnje, $h\vec{u}$ je linearna kombinacija $\gamma\vec{t} + (1-\gamma)\vec{p}$, od tod pa sledi, da je $h = \frac{2ab}{a+b}$.

Zaradi simetričnosti konstrukcije razdeli premica skozi T in P tudi daljico CD tako, da dobimo harmoničen niz točk. Pa tudi dolžina daljice AB je harmonična sredina dolžin AH in $AO, \dots$ Skratka, harmoničnih nizov je na sliki 2 kar precej.

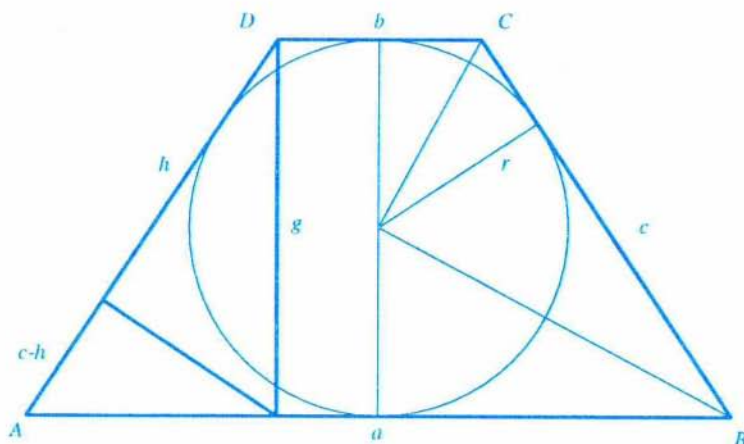
O zvezi med harmonično, aritmetično in geometrično sredino (ki sta bralcem morda še malo bolj domači) dveh ali več pozitivnih števil in njihovi uporabi je bilo v Preseku napisanega že veliko zanimivega (glej Uroš Milutinović: *Kaj so sredine in kako jih uporabljamo*, Presek, letnik 20, št. 6, 332-342), vendar vseeno poskusimo povedati še kaj. Na primer to, da je geometrijska sredina $g = \sqrt{ab}$ števil a in b hkrati tudi geometrijska sredina njune harmonične sredine h in aritmetične sredine $c = \frac{a+b}{2}$, saj je

$$\sqrt{ch} = \sqrt{\left(\frac{a+b}{2}\right) \left(\frac{2ab}{a+b}\right)} = \sqrt{ab}.$$

Drugače povedano, ploščina pravokotnika s stranicama a in b je enaka ploščini pravokotnika, ki ima za stranici njuno aritmetično in harmonično sredino c in h . Obe pa sta seveda enaki ploščini kvadrata s stranico g .

Če vemo, da je $g \leq c$, od tod takoj sledi dobro znana relacija $h \leq g \leq c$ med tremi glavnimi sredinami dveh števil.

Vse tri omenjene sredine števil a in b imajo svojo geometrijsko sliko v enakokrakem trapezu $ABCD$ z osnovnicama a in b in krakom c , ki je očrtan krogu (takšnem, kot je na sliki 3).



Slika 3. Konstrukcija sredin v tangentsnem enakokrakem trapezu

Za vsak tangentsni štirikotnik velja, da sta vsoti obeh parov nasprotnih stranic enaki (če tega še ne veste, poskusite dokazati). Torej je v trapezu na sliki 3, $AB + CD = AD + BC$, torej $a + b = 2c$. To pomeni, da je dolžina kraka c ravno aritmetična sredina osnovnic a in b . Kvadrat višine g je po Pitagorovem izreku

$$g^2 = \left(\frac{a+b}{2}\right)^2 - \left(\frac{a-b}{2}\right)^2 = ab,$$

torej je višina geometrijska sredina obeh osnovnic. Označimo s h pravokotno projekcijo višine na krak. Zaradi podobnosti trikotnikov AEB in BEF je $\frac{h}{g} = \frac{g}{c}$, torej je

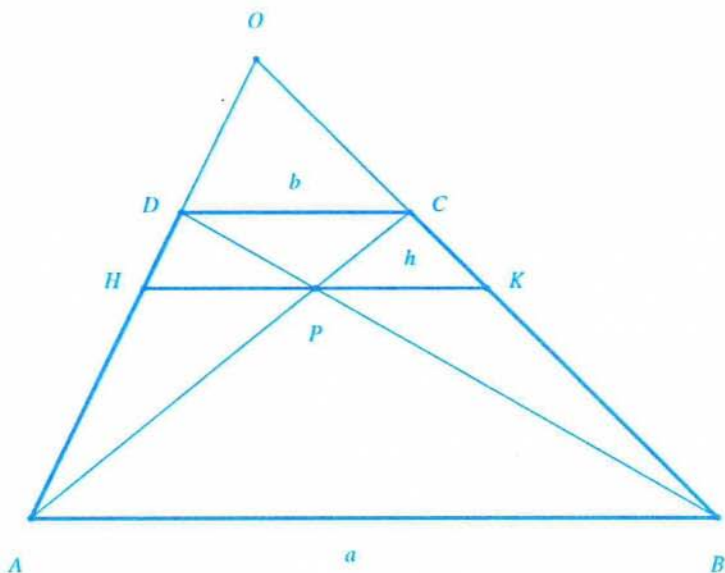
$$h = \frac{g^2}{c} = \frac{2ab}{a+b},$$

kar je ravno harmonična sredina obeh osnovnic. Spet je pred nami nazorna slika neenakosti $h \leq g \leq c$.

Aritmetično, geometrijsko in harmonično sredino števil a in b lahko predstavimo tudi v splošnem trapezu z osnovnicama a in b kot dolžine vzporednic osnovnicama na natanko določenih višinah. Dobro znano je, da je aritmetična sredina c dolžina srednjice, torej je na polovici višine trapeza. Geometrijska sredina g je dolžina daljice, ki razdeli trapez v dva podobna trapeza, kajti zaradi podobnosti velja, da je $\frac{a}{g} = \frac{g}{b}$. Harmonična sredina h pa je v višini presečišča obeh diagonal. O tem se prepričamo, če nad trapezom zgradimo trikotnik, tako kot na sliki 4. Iz podobnosti trikotnikov ABO , HKO in DCO sledi $a : h : b = OA : OH : OD$. Če upoštevamo še podobnost trikotnikov ABP in CDP , velja:

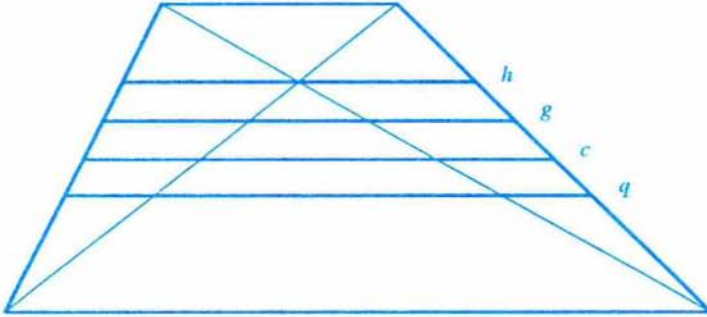
$$AH : DH = AP : DP = AB : DC = OA : OD,$$

to pa pove, da deli točka H stranico AD tako, da je dolžina OH harmonično povprečje dolžin OA in OD .



Slika 4. Konstrukcija harmonične sredine v trapezu

Še ena sredina v trapezu se ponuja kar sama: dolžini daljice, ki trapez razdeli na dva ploščinsko enaka dela, pravimo *kvadratna sredina*. Kvadratna sredina je med vsemi omenjenimi sredinami največja in je enaka, kot se bo bralec sam zlahka prepričal, $q = \sqrt{\frac{a+b}{2}}$.



Slika 5. Sredine v trapezu

Če tričleno zaporedje $a_0 = a, a_1 = h, a_2 = b$ nadaljujemo, tako da je vsak člen harmonična sredina člena neposredno pred njim in člena neposredno za njim, dobimo neskončno *harmonično zaporedje*. Skratka, harmonično zaporedje je v prav takšni zvezi s harmonično sredino, kot sta aritmetično in geometrijsko zaporedje, ki sta bralcem gotovo bolj znana, z aritmetično in geometrijsko sredino. Najbolj preprost primer harmoničnega zaporedja je

$$1, \frac{1}{2}, \frac{1}{3}, \frac{1}{4}, \dots, \frac{1}{n}, \dots$$

Harmonično zaporedje ima nekaj prav zanimivih lastnosti, ki si jih bomo podrobneje ogledali na najbolj preprostem harmoničnem zaporedju. Če seštevamo zaporedne člene harmoničnega zaporedja, dobimo sčasoma poljubno velika števila (ali drugače povedano, harmonična vrsta $1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \frac{1}{4} + \dots + \frac{1}{n} + \dots$ je divergentna). Pa poglejmo, zakaj. Izberimo poljubno veliko liho število M . Označimo $k = \frac{M+1}{2}$ in si oglejmo vsoto prvih 2^k členov zaporedja:

$$1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \frac{1}{4} + \dots + \frac{1}{2^k}.$$

Vsoto lahko razbijemo na $k + 1$ členov:

$$1 + \frac{1}{2} + \left(\frac{1}{3} + \frac{1}{4}\right) + \left(\frac{1}{5} + \frac{1}{6} + \frac{1}{7} + \frac{1}{8}\right) + \dots + \left(\frac{1}{2^{k-1}+1} + \dots + \frac{1}{2^k}\right).$$

Izraz v $(i - 1)$ -tem oklepaju

$$\frac{1}{2^{i-1}+1} + \dots + \frac{1}{2^i}$$

je vsota ravno 2^{i-1} členov, od katerih je vsak manjši od prejšnjega, zadnji pa je seveda najmanjši, torej je zagotovo

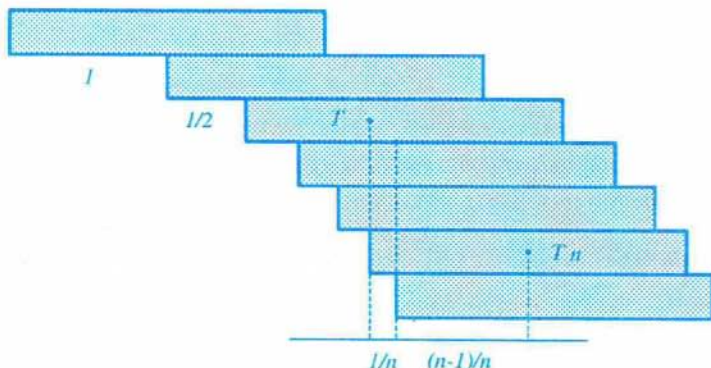
$$\frac{1}{2^{i-1}+1} + \dots + \frac{1}{2^i} \geq \frac{1}{2^i} + \dots + \frac{1}{2^i} = 2^{i-1} \left(\frac{1}{2^i} \right) = \frac{1}{2}.$$

Ocena velja tudi za prva dva člena, torej velja za celo vsoto:

$$1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \frac{1}{4} + \dots + \frac{1}{2^k} \geq (k + 1) \frac{1}{2} = M.$$

Vsota prvih $2^k + 1$ členov harmoničnega zaporedja je torej res večja od M .

Ta lastnost harmoničnega zaporedja pa ima prav nenavadne posledice. Zamislite si poševen stolp, zgrajen iz $n + 1$ enakih opek, z dolžino 2, ki so zložene v skladu s harmoničnim zaporedjem. Rob druge opeke (od spodaj navzgor) gleda čez rob spodnje za $\frac{1}{n}$, tretja je zamaknjena za $\frac{1}{n-1}$ čez rob druge in tako naprej; zadnja, $(n + 1)$ -ta, pa je zamaknjena za 1 (torej za polovico svoje dolžine) čez rob predzadnje (nekako tako kot na sliki 6). Izkaže se, da je težišče zgornjih n opek natanko nad robom spodnje, tako da takšen poševen stolp obstane (bolj ali manj stabilno) brez dodatne podpore.



Slika 6. Harmonični stolp

To trditev lahko dokažemo s pomočjo popolne indukcije. Princip popolne indukcije pravi, da neka trditev velja za vsa naravna števila, če velja za število 1 in če iz predpostavke, da velja za izbrano število n , sledi, da velja tudi za naslednje število $n + 1$. Če je $n = 1$, sta v stolpu le dve opeki, druga je zamaknjena za polovico svoje dolžine, torej je njeno težišče ravno nad robom prve. Trditev je v tem primeru torej resnična. Predpostavimo, da je težišče zgornjih $n - 1$ opek v stopnišču iz n opek ravno nad robom spodnje, in poglejmo, kaj se zgodi, če čisto spodaj podstavimo še $(n + 1)$ -to opeko, tako da je gleda za $\frac{1}{n+1}$ izpod stolpa nad njo. Težišče zgornjih n opek je med težiščem zgornjih $n - 1$ opek (ki je na sliki 6 označeno s T) in težiščem n -te opeke (T_n) - za $\frac{1}{n}$ razdalje med obema zamaknjeno od T v smeri proti T_n , kajti vrhnjih $n - 1$ opek tehta $(n - 1)$ -krat toliko kot n -ta opeka. Ker pa je po indukcijski predpostavki T nad robom (n) -te opeke, je razdalja med obema težiščema natanko 1, torej je zamik med težiščema ravno $\frac{1}{n}$, to pa je natanko nad robom spodnje opeke.

Obe lastnosti skupaj pa povesta, da lahko na ta način zgradimo stopnišče, ki se brez dodatne opore razteza poljubno daleč iznad svojih temeljev in vodi nekam čez vse meje ...

In kakšna je zveza med harmoničnim zaporedjem in glasbeno harmonijo? Vpeta struna, ki zaniha, niha z vso svojo dolžino l , pa tudi s polovično dolžino $l/2$, tretjinsko dolžino $l/3$, četrtinsko $l/4$, ... dolžino. Zvok, ki ga pri tem oddaja, je tako sestavljen iz osnovnega tona, ki je določen z nihanjem cele strune, in iz višjih harmoničnih tonov, ki so določeni z nadaljnjimi členi v harmoničnem zaporedju $l, l/2, l/3, l/4, \dots$ (več o tem najdemo v članku Marije Vencelj: *Glasbena lestvica* v Preseku, l. 16, str. 12–17). Če hkrati zazvenijo tri strune, katerih dolžine so v harmoničnem razmerju, sta dolžini krajših dveh člena v harmoničnem zaporedju $l, l/2, l/3, l/4, \dots$ nihanja najdaljše strune. Uho, ki je navsezadnje tudi nihajoča opna in niha s svojo osnovno in višjimi harmoničnimi frekvencami, to zaznava kot harmonijo zvokov.

Neža Mramor

DOLGČAS

Šest dolgoletnih prijateljev živi vsak v svojem mestu. Vsi so zagrizeni ljubitelji dobrih šal in jih imajo zmeraj obilo na zalogi.

Nekega turobnega deževnega dne so si jih spet začeli pripovedovati - tokrat po telefonu. Ne vemo, kako dolgo je trajala ta njihova zabava - menda so jo naposled končali kar njihovi starši v naraščajočem strahu pred previsokimi računi za telefon.

Nas pa zanima najmanjše možno število telefonskih pogovorov, potrebnih za to, da vsak od teh šestih prijateljev zve vse šale vseh preostalih.

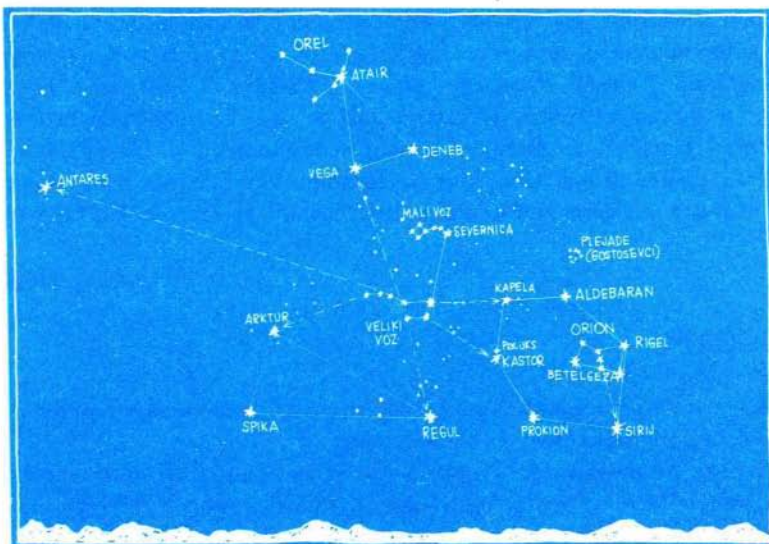
Vilko Domanjko

ASTRONOMIJA

SEDEM SESTER

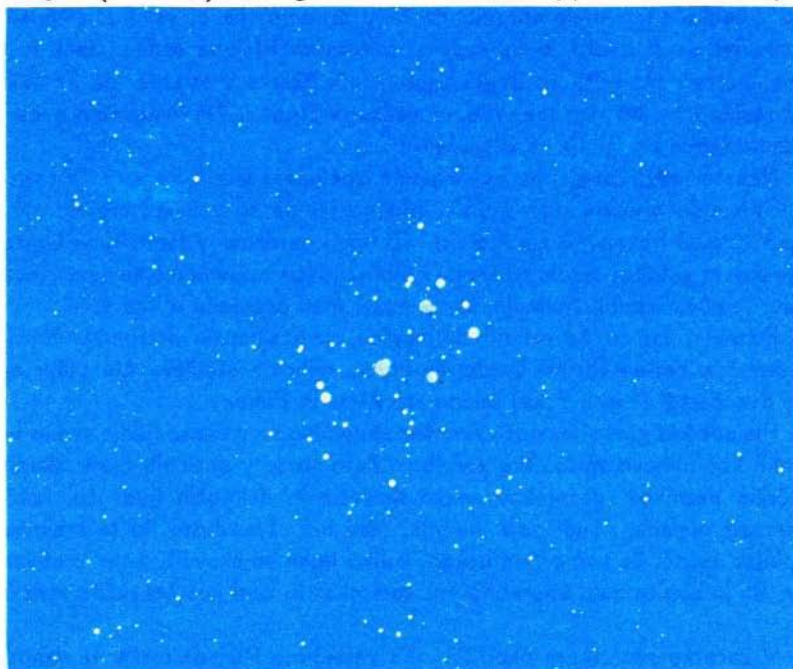
Veliko ljudi pozna pod tem imenom eno najlepših zvezdnih kopic, ki jo opazujemo v ozvezdju Bik v jasnih jesenskih in zimskih nočeh. Uradno in najbolj znano ime zanjo je *Plejade*. Pri nas ji rečemo tudi *Gostosevci*. Ker je to očem tako zelo vpadljiva kopica, da je ne moremo prezreti, ni nič nenavadnega, da so se med ljudstvi spletle o njej najrazličnejše zgodbe in imena. Samo na Slovenskem poznamo veliko imen za Plejade, med njimi Gostožerčki, Koklja, Kura s piščeti, Lastovice, Lahi, Stožerčiči, Lestenci, ... Ni jih malo, ki mislijo, da predstavlja ta zvezdna kopica Mali voz. Res je, da njen videz nekoliko spominja na voz(iček). Za nekatere je najmanjši od petih nebesnih voz. (Največji nebesni voz sestavljata ozvezdji Pegaz in Andromeda, nato sledita Veliki voz in Mali voz, četrti pa je Mlečni voz v ozvezdju Strelec.)

O Plejadah je naša revija že pisala (glej *Presek* 4 (1976), 32 in *Presekova zvezdna karta*, Presekova knjižnica 8 (1981), 10). Tam najdemo opis kopice in lastnosti zvezd v njej. Tokrat pa vam želimo to kopico predstaviti nekoliko drugače. Naš namen je, da boste kopico opazovali.

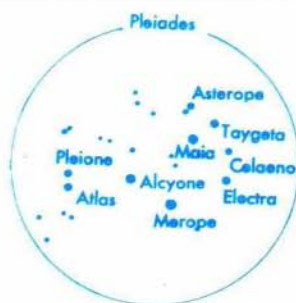


Takole s pomočjo Velikega voza najdemo najsvetlejša zvezda in med njimi tudi zvezdno kopico Plejade. Aldebaran je najsvetlejša zvezda v ozvezdju Bik. V prevodu iz arabščine pomeni *tisti, ki zasleduje, zasledovalec*. Ta zvezda se giblje na nebu takoj za Plejadami, kot bi jih hotela dohiteti.

S prostim očesom je možno videti šest zvezd, pri dobrem vidu sedem, ljudje z izredno ostrim vidom pa lahko ob ugodnih opazovalnih pogojih razločijo največ deset zvezd kopice. Čeprav jih z daljnogledom vidimo tudi preko 250, jih je za antične opazovalce bilo tu le sedem. Ime Plejade namreč izhaja iz grške mitologije. Mit pripoveduje, da je okeanida Plejone, žena velikana Atlasa, rodila sedem hčera: Alkiono, Keleno, Elektro, Tajgeto, Majo, Asteropo in Meropo. Tako se imenuje tudi sedem zvezd Plejad. Alkione je najsvetlejša med njimi (Eta Bika). Tudi grška beseda *πλειαδες* pomeni *hčerke Plejone*.



Okolica Plejad, ki so od nas oddaljene približno 400 svetlobnih let. Tam se v krogli okoli 20 svetlobnih let drena nekaj sto zvezd. (Slika zgoraj.)



Lega glavnih zvezd v Plejadah. (Slika desno.)

Najslabše opazna Plejada je zvezda Merope. Mit tudi pojasnjuje zakaj. Meropa se je za razliko od svojih sester, ki so povezane z bogovi Zevsom, Pozejdonom, Aresom itn., omožila s smrtnikom Sizifom, premetencem in prevarantom, znanem po svojem jalovem delu, ko je za kazen, ker je izdal neko Zevsovo skrivnost, moral navkreber valjati težek kamen, ki pa se mu je vedno skotrljal nazaj, čim ga je pririnil do vrha. Ker se sramuje svojega početja, se Merope skriva pred ljudskimi očmi.

Ta podrobnost v zgodbi o Plejadah ustreza resnični sliki na zvezdnem nebu. Lahko bi celo domnevali, da bi v primeru, če bi vsi ljudje videli v tej skupini deset zvezd in ne sedem, mitološka Plejona rodila deset in ne sedem hčera. Po mitu so bogovi spremenili hčerke v zvezde, da jih rešijo pred zasledovanjem okrutnega lovca velikana Oriona. Na zvezdnem nebu se ozvezdje Orion res giblje za Plejadami.

Nekateri raziskovalci pa ime Plejade izpeljujejo iz grške besede *πελεια*, kar v prevodu pomeni *divji golob*. Možno je, da so v davni preteklosti to skupino zvezd imenovali kar Golobi. Razlago najdemo v Homerjevi Odiseji: Ko je sedem golobov nosilo z zahoda ambrozijo (bajeslovna jed za nesmrtnost) Zevsu, je eden izgubil življenje, ker je zašel med potujoča otoka.

Pozneje, ko so že odkrili daljnogled, je italijanski astronom Riccioli (17.stol.) v sestav Plejad uvedel še imena njihovih staršev. Od tedaj dalje se dve zvezdi (f in h Bika) imenujeta Atlas in Plejone.

Plejade kot gosto sevajočo zvezdno skupinico na nebu so ljudje vedno bolj poznali kot njihovo mitološko zgodbo. Zato so še v antičnih časih skupino bleščečih pesnikov, učenjakov enako mislečih in delujočih ljudi itn. začeli imenovati *plejada*. Tudi naši predniki niso bili ravnodušni do te prekrasne skupinice zvezd, če samo pomislimo, koliko imen so skovali zanje. Pokazalo se je, da je kopica zelo uporabna kot smerokaz in tudi kot nekakšna zvezdna ura.

V začetku septembra okoli 23. ure zasledimo Plejade nizko na vzhodu, v začetku novembra visoko na jugovzhodnem delu neba, okoli novega leta visoko na jugozahodni strani neba, v začetku marca pa nizko na zahodu.

Pripravek je napisan z namenom, da pri bralcu spodbudi zanimanje za to izredno lepo in prostemu očesu lahko dostopno zvezdno kopico, da bi jo na nebu zares poiskal, užival ob pogledu nanjo pa tudi naredil kakšno preprosto meritev. Predlagam, da si izberete temno jasno noč brez mesečine in poiščete Plejade.

Poskusite ugotoviti:

- koliko zvezd kopice preštejete s prostim očesom,
- koliko zvezd vidite z daljnogledom (npr. pri dveh različnih povečavah).



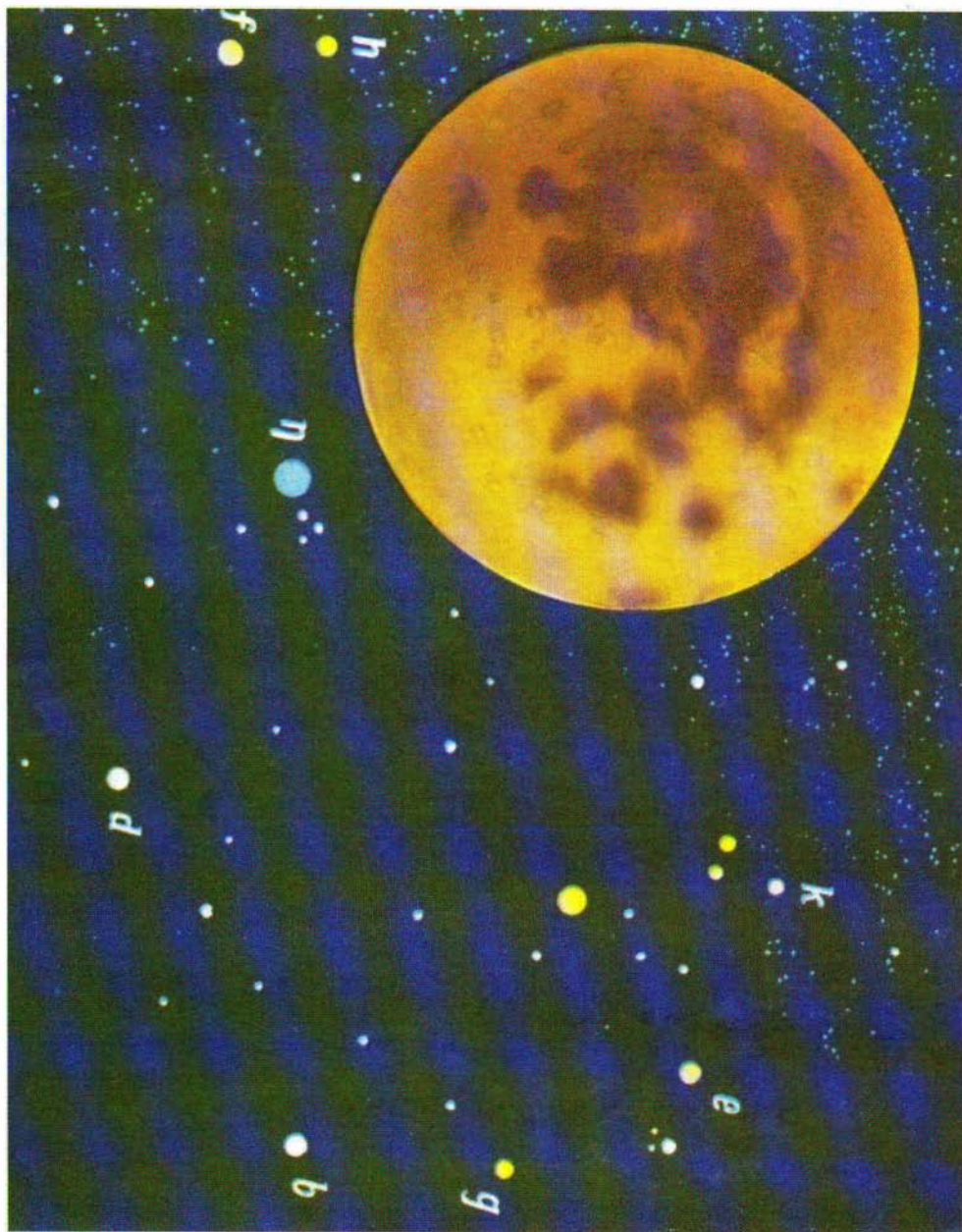
Ozvezdje Bik s Plejadami - podoba iz Heveliusovega Atlasa zvezdnega neba (1690). Slike v tem atlasu so narisane zrcalno simetrično, kot bi jih videli s prostim očesom (levo je na desni).

Poskusite skicirati to zvezdno kopico tako, kot jo vidite:

- s prostim očesom,
- z daljnogledom.

Čeprav se vam zdi zastavljena naloga preprosta, boste kmalu spoznali, da je z opazovanjem kar dosti dela.

Marijan Prosén



Slika 4. Navidezna velikost zvezdne kopice Plejade in Lune.