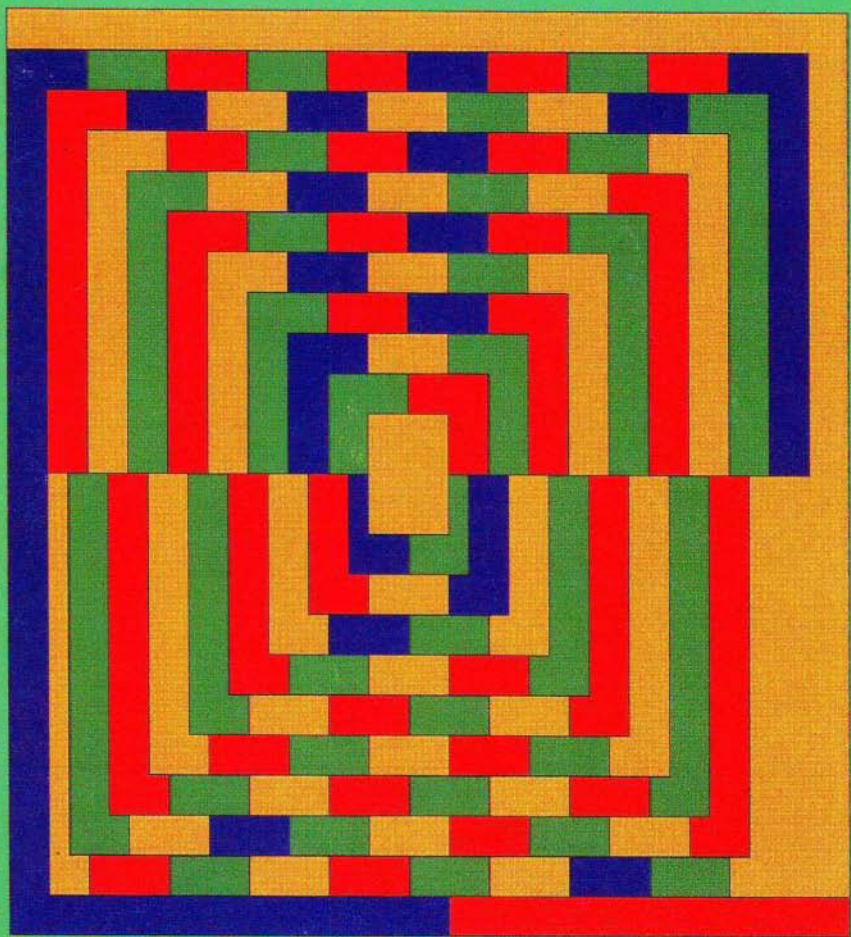


ISSN 0351-6652

DRUŠTVO MATEMATIKOV, FIZIKOV IN ASTRONOMOV
SLOVENIJE, 21(1993-94)

6



PRESEK

VSEBINA

MATEMATIKA	Odvod polinoma in njegova uporaba (Borut Zalar).....	336-338
	Neenakost Minkowskega (Roman Drnovšek)	346-351
	Sebi podobnost in dimenzija fraktalov (Leila Marek - Crnjac)	354-358
	Razširitev Morleyevega izreka (Boris Lavrič)	376-382, IV
FIZIKA	Dežuje, dežuje (Jure Zupan)	322-323
	Radon (Andrej Likar)	342-345
	O začetnih števkih v nizih števil (Janez Strnad)	362-366
ASTRONOMIJA	Meritev s senco (Marian Prosén)	332-334
RAČUNALNIŠTVO	Narišimo krivuljo z računalnikom (Aleksander Vesel)	324-329
TEKMOVANJA	Rešitve nalog z izbirnega tekmovanja za 24. mednarodno fizikalno olimpiado (Bojan Golli)	330-331
	15. mednarodno matematično tekmovanje mest - pomladanski krog (Matjaž Željko)	359-361
NALOGE	Problem treh škripcev - Reš. str. 335 (Jure Zupan)	331
	Lahka geometrijska za bistro oko - Reš. str. 341 (Marija Vencelj)	334
	Poklici - Reš. str. 375 (Neža Mramor-Kosta)	341
RAZVEDRILO	Križanka Krog (Marko Bokalič)	352-353
REŠITVE NALOG	V trgovini - s str. 296 (Neža Mramor-Kosta)	329
	Križanka s fizikalnimi pojmi - s str. 288 (Marko Bokalič)	335
	Najmanjša podmnožica - s str. 271 (Martin Juvan)	338-339
	Zanimivost pri številih - s str. 163 (Primož Moravec)	339-340
	Kaj kdo dela? - s str. 275 (Neža Mramor-Kosta)	340
	Igra "NIM*" - s str. 295 (Mitja Rosina)	351
	Nagradna naloga - Magični šestkotnik - s str. 193 (Marija Vencelj)	366-367
NOVICE	Hermann Minkowski - Ob 130-letnici rojstva (Roman Drnovšek)	345
	Casus irreducibilis - Ob 240. obletnici rojstva Jurija Vege (Tomaž Pisanski)	368-375
NOVE KNJIGE	Marnell G.R., Številске križanke (Marija Vencelj)	361
LETNO KAZALO		383-III
NA OVITKU	Problem štirih barv - rešitev s strani 312 (Janez Žerovnik) ...	I
	Razširitev Morleyevega izreka. Glej članek na str. 376.	IV

VSEM NAROČNIKOM IN LJUBITELJEM PRESEKA, KI LETOS ZAPUŠČATE SVOJE STARE ŠOLE

Številni med vami letos bodisi zaključujete svoje redno šolanje ali pa odhajate nabirat učenost na nove šole. Vsem, ki bi radi še naprej ostali naši naročniki, povejmo, da so srednje šole praviloma vključene v našo naročniško mrežo, ne pa tudi fakultete. Lahko pa se na Presek naročite osebno in ga boste dobivali domov po pošti. Vse, kar morate narediti, je, da nam to svojo željo (s polnim naslovom, na katerega želite prejemati Presek) sporočite na naslov: Komisija za tisk DMFAS, Jadranska 19, 61111 Ljubljana, p.p.64 ali po telefonu (061) 1232-460. Položnico za plačilo naročnine boste prejeli s prvo številko revije. Vabljeni!



Iz uredništva

PRESEK

list za mlade matematike, fizike, astronome in računalnikarje

21. letnik, šolsko leto 1993/94, številka 6, strani 321 – 384

UREDNIŠKI ODBOR: Vladimir Batagelj, Tanja Bečan (jezikovni pregled), Dušica Boben (oblikovanje teksta), Mirko Dobovišek (glavni urednik), Vilko Domajnko, Roman Drnovšek (novice), Darjo Felda (tekmovanja), Bojan Golli, Marjan Hribar, Boštjan Jaklič (tehnični urednik), Martin Juvan (računalništvo), Sandi Klavžar, Edvard Kramar, Boris Lavrič, Andrej Likar (fizika), Matija Lokar, Franci Oblak, Peter Petek, Pavla Ranzinger (astronomija), Marjan Smerke (svetovalec za fotografijo), Miha Štalec, Jana Vrabec (nove knjige), Marija Vencelj (matematika, odgovorna urednica).

Dopisi in naročnine: Društvo matematikov, fizikov in astronomov Slovenije - Podružnica Ljubljana - Komisija za tisk, Presek, Jadranska c. 19, 61111 Ljubljana, p.p. 64, tel. (061) 1232-460, št. ŽR 50101-678-47233. Naročnina za šolsko leto 1993/94 je za posamezne naročnike **900 SIT**, za skupinska naročila šol **720 SIT**, posamezna številka **180 SIT**, za tujino 12000 LIT, devizna nakazila SKB banka d.d. Ljubljana, val-27621- 42961/9, Ajdovščina 4, Ljubljana.

List sofinancirajo MZT, MŠŠ in MK
Ofset tisk DELO - Tiskarna, Ljubljana

Po mnenju MZT št. 415-52/92 z dne 5.2.1992 šteje revija med proizvode iz 13. točke tarifne št. 3 zakona o prometnem davku, za katere se plačuje 5% davek od prometa proizvodov.

© 1994 Društvo matematikov, fizikov in astronomov Slovenije – 1193

DEŽUJE, DEŽUJE

V pomladnih, še posebno pa v poletnih mesecih se rado pripeti, da nas ujame nevihta, ploha ali kaka drugačna ujma nepripravljene, to je brez dežnika. Tedaj se nam vedno postavi vprašanje, kaj v takem primeru storiti: naj brezglavo stečemo proti domu in se čimprej zatečemo v varno zavetje hiše ali pa se raje mirno odpravimo naprej, kot da se nič zgodilo, saj s tekom ničesar ne pridobimo.

V katerem primeru smo manj mokri? Velikokrat je slišati, da je vseeno ali tečemo ali hodimo. Ko tečemo, prestrežemo v danem času več dežnih kapljic, medtem ko smo med hojo počasnejši, a zato zberemo manj kapljic v enakem času.

Privzemimo, da dežuje enakomerno. V tem primeru lahko definiramo masni tok vode (Φ_m) na dano površino kot maso vode, ki pade nanjo (m) v nekem določenem času (t):

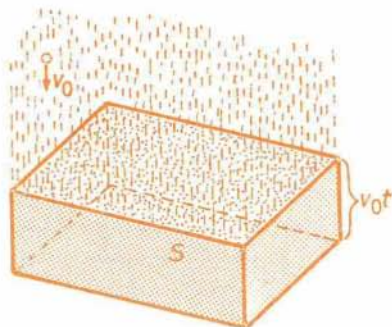
$$\Phi_m = \frac{m}{t} \quad (1)$$

Ker dežuje enakomerno, imamo v prostornini (V) enako število kapelj (N), tako je gostota kapelj $n_s = \frac{N}{V}$. Naj vse kaplje padajo z enako hitrostjo v_0 . Tedaj v času t pade na ploskev toliko kapelj, kolikor jih je v kvadru z višino $v_0 \cdot t$ in osnovno ploskvijo s ploščino S (slika 1), torej $n_s \cdot v_0 \cdot t \cdot S = N$. Masa vode, ki pade na tako ploskev, je potem $m = N \cdot m_0$ (m_0 je masa ene kaplje) in tako masni tok

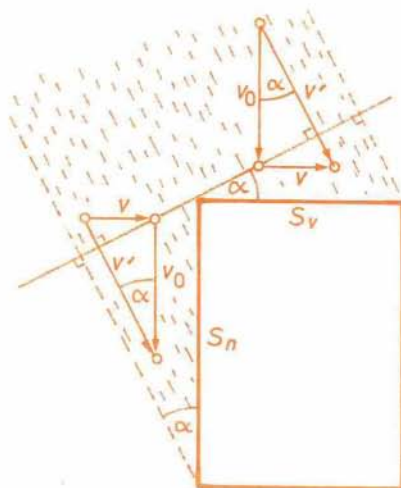
$$\Phi_m = n_s \cdot m_0 \cdot v_0 \cdot S. \quad (2)$$

Tu je ploskev S pravokotna na smer hitrosti kapljic. Recimo, da se človek premika s hitrostjo v , človeka samega pa si zamislimo kot kvader z vodoravno stranico ploščine S_v in sprednjo stranjo ploščine S_n (slika 2), medtem ko stranskih ploskev ni potrebno upoštevati. Relativno hitrost (v'), s katero padajo na ti dve stranici deževne kaplje, izračunamo kar po Pitagorovem izreku: $v' = \sqrt{v_0^2 + v^2}$. Za ploskvi pravokotni na to smer S_{v_1} in S_{n_1} pa velja: $\frac{v_0}{v'} = \frac{S_{v_1}}{S_v}$ ter $\frac{v}{v'} = \frac{S_{n_1}}{S_n}$, kar dobimo iz podobnih trikotnikov. Za skupni masni tok skozi ti dve ploskvi sledi iz enačbe (2): $\Phi_m = n_s \cdot m_0 \cdot [S_{v_1} \cdot v' + S_{n_1} \cdot v']$ in končno

$$\Phi_m = n_s \cdot m_0 \cdot [S_v + S_n].$$



Slika 1.



Slika 2. Pogled na kvader s strani (smer dežja kot ga vidimo s kvadra).

To je tudi masni tok dežja, ki pade na ploskvi S_v in S_n .

Če torej poznamo masni tok in čas, ki ga prebijemo na dežju, lahko iz (1) izračunamo maso vode, ki se nabere na obleki: $m = \Phi_m \cdot t$, pri čemer je t čas, ki ga potrebujemo za pot s do zavetja: $t = \frac{s}{v}$. Torej je masa vode:

$$m = n_s \cdot m_0 \cdot s \cdot \left(S_v \frac{v_0}{v} + S_n \right).$$

Če ne upoštevamo prispevka zaradi zgornje ploskve (S_v), dobimo natančno to, kar smo omenili na začetku - količina dežja, ki se nabere na prednji strani (S_n), je neodvisna od tega, kako hitro hodimo. Drugače pa je z dežjem, ki se nam nabira na glavi (stranica S_v). Tu ujamemo manj dežja, hitreje ko gremo. Najbolje torej, da čim hitreje stečemo proti domu in ohranimo glavo suho.

Tu smo obravnavali le primer, ko dež pada navpično navzdol, o tem, kako je, ko dež pada pod kotom, pa lahko bralci razmislijo sami.

Jure Zupan

RAČUNALNIŠTVO

NARIŠIMO KRIVULJO Z RAČUNALNIKOM

Uvod

Živimo v ukrivljenem svetu. Da zemlja ni ravna plošča, so vedeli že nekateri davni narodi. Ukrivljena telesa so tudi vsi planeti in zvezde. Piko na i o ukrivljenosti prostora je končno postavil Albert Einstein. Tudi stvari okoli nas so bolj ali manj ukrivljene. Vsaj približno ravne in oglate so predvsem stvari, ki jih je ustvaril človek. Pa tudi glede tega se je že marsikaj spremenilo. Dandanes prevladujejo v industrijskem oblikovanju nežne, zaobljene oblike. Pomislimo samo na najnovejše znamke osebnih avtomobilov!

Industrijski oblikovalci pri svojem delu ne morejo več shajati brez računalniške podpore. Na tržišču so številni programski paketi za računalniško podprto načrtovanje (Computer Aided Design) in računalniško podprto risanje (Computer Aided Drafting). Za oba pojma se je uveljavila kratica CAD. Programi za računalniško podprto risanje so preprostejši. Njihov izhod je risba na datoteki ali na papirju. Na osebnih računalnikih sta zelo razširjena predvsem programa *Coreldraw* in *Paintbrush*. Programi za računalniško podprto načrtovanje zmorejo še marsikaj več. Dodane so jim predvsem stvari, ki so pomembne za izdelavo načrtovanega izdelka. So tako obsežni, da jih na osebnih računalnikih še vedno le redko srečamo. Program, ki deloma že sega v to kategorijo, je na primer *Autocad*.

Aproksimacije in interpolacije

Mnogi ste se verjetno že srečali s programom *Paintbrush*, ki teče v grafičnem okolju Windows. Program omogoča risanje ravnih črt, krogov, štirikotnikov, itd. Med temi osnovnimi gradniki so tudi ukrivljene črte, ki jih vnašamo v risbo na čisto poseben način. Najprej med dvema točkama potegnemo ravno črto, nato pa to črto "krivimo", tako da vnesemo še dve dodatni točki. Bolj ko sta dodatni točki oddaljeni od črte, bolj se črta ukrivi. Program je tako prijazen, da se lahko hitro naučimo na različne zanimive načine oblikovati krivuljo. Nekaj primerov je na sliki 1.

Verjetno marsikoga med vami zanima, kako da program ukrivi krivuljo prav na takšen način. Na začetku povejmo, da so krivulje v programskih paketih večinoma predstavljene analitično. To pomeni, da so opisane z (realnimi) funkcijami. Krivulje, ki jih uporabljamo v programih za računalniško podprto risanje oziroma oblikovanje, delimo v dve skupini. Krivuljo, ki gre

skozi vse podane točke, imenujemo **interpolacijska krivulja**. Če gre krivulja samo skozi nekatere podane točke, drugim pa se samo približa, jo imenujemo **aproksimacijska krivulja**.



Slika 1. Krivulje v programu Paintbrush.

Bézierova krivulja

Izdelovalci programske opreme ne govorijo radi o tem, kakšne analitične opise krivulj uporabljajo. Ker gre v programu Paintbrush krivulja le skozi začetno in končno točko, pravimo, da gre za aproksimacijsko krivuljo. Na podlagi števila potrebnih vnešenih točk in obnašanja krivulje pa lahko sklepamo, da gre za **kubično Bézierovo krivuljo**. Ime je dobila po Pierru Bézieru, ki jo je prvi uporabil pri načrtovanju avtomobilov v francoski tovarni Renault leta 1972. (Danes je že znano, da je Bézierovo krivuljo neodvisno in celo pred Bézierom razvil tudi de Casteljau v konkurenčni tovarni Citroën. Ker pa svojih raziskav ni nikoli objavil, je vso slavo pobral njegov rojak.) Bézierova krivulja je le ena iz velike množice krivulj, ki se uporabljajo v računalniško podprtem načrtovanju oziroma risanju. Zaradi svoje preprostosti je še vedno izredno popularna in je doživela že številne spremembe in izboljšave.

V nadaljevanju sestavka bomo najprej spoznali nekaj najnunjše teorije. Nestrpnejši bralci pa se lahko takoj lotijo tudi poglavja z računalniškim programom.

Analitični opisi krivulj

Večina bralcev se je z nekaterimi krivuljami gotovo že srečala. Največkrat so krivulje opisane **eksplicitno**. V ravnini to pomeni, da je spremenljivka y

podana kot funkcija neodvisne spremenljivke x . Kot primer navedimo enačbo parabole $y = ax^2 + bx + c$ in enačbo kubične krivulje $y = ax^3 + bx^2 + cx + d$.

Verjetno bralci poznajo tudi **implicitni opis**. To pomeni, da je krivulja opisana s funkcijo dveh spremenljivk, na krivulji pa so natanko tiste točke, pri katerih ima funkcija vrednost 0. Lep primer je enačba krožnice s središčem v točki (a, b) in s polmerom r : $(x - a)^2 + (y - b)^2 - r^2 = 0$.

Niti eksplicitni niti implicitni opis pa nista najbolj primerna za računalniško obravnavo. Implicitni opis je nekoliko "neroden" za realizacijo, eksplicitni pa ne omogoča opisovanja krivulj z večkratnimi vrednostmi. To so tiste krivulje, ki jih vzporednica z osjo y seka večkrat. Na sliki 1 vidimo tudi takšna primera.

Idealnemu opisu se najbolj približa **parametrični opis**. Pri tem opisu sta koordinati x in y funkciji neodvisne spremenljivke u z intervala I . Interval I je ponavadi normiran, torej $I = [0, 1]$. Spremenljivki u pravimo tudi **parameter**. Z drugimi besedami to pomeni, da se koordinati x in y spreminjata, ko spreminjamo parameter u , pri čemer lahko parameter u zavzame vrednosti med 0 in 1. Včasih želimo poudariti, da sta koordinati x in y odvisni od parametra u . Tedaj namesto x in y pišemo $x(u)$ in $y(u)$. Kot primer si pogledjmo, kako lahko enačbo krožnice podamo parametrično:

$$x = a + r \cos 2\pi u, \quad y = b + r \sin 2\pi u, \quad u \in [0, 1].$$

Funkciji sinus in cosinus, ki nastopata v zgornjem opisu, so mlajši bralci verjetno spoznali pri pouku fizike. Znani pa sta tudi računalnikarjem, saj sta vgrajeni praktično v vsak programski jezik. Ti dve funkciji sta časovno požrešni, torej takšni, ki za izračun zahtevata precej računalniškega časa.

Polinomske funkcije nižjega reda so časovno precej bolj pohlevne. Izkaže se, da za risanje večinoma zadostuje, če sta koordinati točk na krivulji kubični funkciji parametra u . Želimo torej imeti funkciji naslednje oblike:

$$x(u) = a_3 u^3 + a_2 u^2 + a_1 u + a_0 \text{ in } y(u) = b_3 u^3 + b_2 u^2 + b_1 u + b_0.$$

Koeficienti a_i in b_i so odvisni od položaja in predvidene oblike krivulje. Spomnimo se spet programa Paintbrush. Položaj in obliko krivulje smo določili s štirimi izbranimi točkami T_0 , T_1 , T_2 in T_3 . Te točke bomo v nadaljevanju imenovali **kontrolne točke**. Podali jih bomo s pari koordinat $T_0 = (x_0, y_0)$, $T_1 = (x_1, y_1)$, $T_2 = (x_2, y_2)$ in $T_3 = (x_3, y_3)$. Krivulja naj gre skozi prvo in zadnjo točko, drugima dvema pa se lahko samo približa.

Povezovalne funkcije kubične Bézierove krivulje

Funkciji $x(u)$ in $y(u)$ lahko preoblikujemo, tako da je viden vpliv kontrolnih točk:

$$x(u) = F_0(u)x_0 + F_1(u)x_1 + F_2(u)x_2 + F_3(u)x_3,$$

$$y(u) = F_0(u)y_0 + F_1(u)y_1 + F_2(u)y_2 + F_3(u)y_3.$$

Funkcije F_i imenujemo **povezovalne funkcije** krivulje. Povezovalne funkcije so v splošnem kubični polinomi, saj smo predpostavili, da sta funkciji $x(u)$ in $y(u)$ polinoma tretje stopnje.

Bézier je za povezovalne funkcije izbral Bernsteinove polinome. Ker nas zanima kubična krivulja, vzamemo za povezovalne funkcije Bernsteinove polinome tretje stopnje:

$$F_i(u) = B_{i,3}(u) = \binom{3}{i} u^i (1-u)^{3-i} = \frac{3!}{i!(3-i)!} u^i (1-u)^{3-i}.$$

Na ta način dobita funkciji $x(u)$ in $y(u)$ naslednjo obliko:

$$x(u) = (1-u)^3 x_0 + 3u(1-u)^2 x_1 + 3u^2(1-u)x_2 + u^3 x_3$$

in

$$y(u) = (1-u)^3 y_0 + 3u(1-u)^2 y_1 + 3u^2(1-u)y_2 + u^3 y_3.$$

Ker je $x(0) = x_0$ in $y(0) = y_0$ ter $x(1) = x_3$ in $y(1) = y_3$, se bo naša krivulja začela v točki T_0 in končala v točki T_3 .

Računalniški program

Povedano zadostuje, da napišemo računalniški program, ki nariše kubično Bézierovo krivuljo glede na štiri podane kontrolne točke. Program je napisan v programskem jeziku pascal, narečuje turbo pascal 7.0. Uporabljeni so tudi podprogrami iz pripadajoče grafične knjižnice (enota *Graph*). V tem sestavku je predstavljen samo najpomembnejši podprogram z imenom *KubicniBezier*. Vhod v podprogram je tabela s koordinatami štirih kontrolnih točk (njena deklaracija je podana pred podprogramom). V podprogramu je uporabljena tabela binomskih koeficientov *Binom3* in funkcija *potenca*, ki jo bodo bralci gotovo znali sprogramirati tudi sami.

Manj poučene bralce naj spomnimo, da zaslon računalnika sestavlja pravokotna mreža majhnih pik, ki jim lahko določamo barvo. Mreža je pri mnogih osebnih računalnikih velikosti 640×480 . Krivulje tako na zaslonu računalnika nikoli ne moremo povsem natančno narisati, ampak jo vedno le bolj ali manj dobro aproksimiramo. Nam bo zadostovalo, če bomo krivuljo aproksimirali z lomljeno črto (lomljenko).

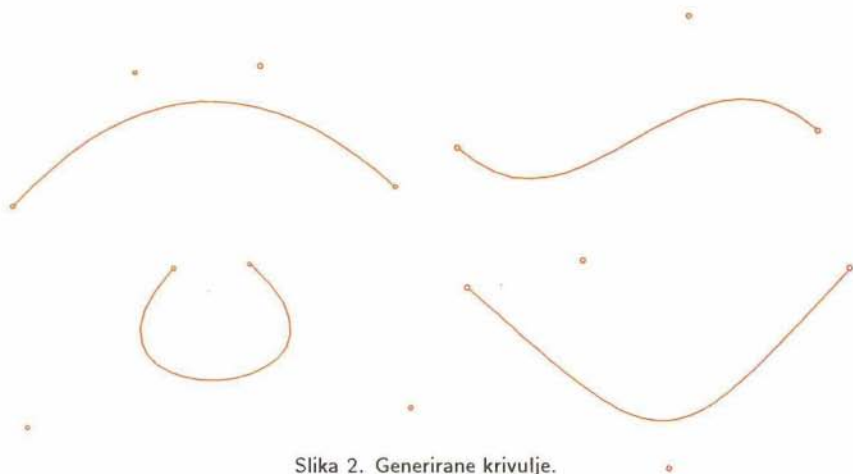
Konstanta *gostota*, ki jo uporabljamo v podprogramu, pove, s koliko ravnimi odseki bomo ponazorili krivuljo. Če aproksimiramo krivuljo s petdesetimi odseki (tako kot je v podprogramu), to pomeni, da razdelimo interval parametra u na petdeset (enako dolgih) delov. Podprogram poišče točke na krivulji za zaporedne vrednosti parametra in zaporedne točke poveže z ravno črto (klic podprograma *LineTo*). Primeri štirih računalniško generiranih krivulj so na sliki 2. Pripadajoče kontrolne točke krivulj so označene s krogci.

```

const
  Binom3: array[0..3] of integer = (1,3,3,1); { tabela binomskih koeficientov }
type
  KonTocka = record x,y: integer; end; { kontrolna točka }
  KonTocke = array[0..3] of KonTocka; { tabela kontrolnih točk }

procedure KubicniBezier(T: KonTocke);
{ Podprogram nariše kubično Bezierovo krivuljo. }
{ Štiri kontrolne točke so shranjene v tabeli T. }
const
  gostota = 50; { gostota aproksimacijske lomljenke }
var
  korak, { odsek aproksimacijske lomljenke }
  i: integer;
  u, { parameter krivulje }
  B, { vrednost Bernsteinovega polinoma }
  px,py: real; { točka na krivulji }
begin
  MoveTo(T[0].x,T[0].y); { začetek v prvi kontrolni točki }
  for korak:=1 to gostota do begin
    px := 0; py := 0; { inicializacija točke na krivulji }
    u := korak/gostota; { vrednost parametra }
    for i:=0 to 3 do begin { izračun Bernsteinovega polinoma }
      B := Binom3[i]*potenca(u,i)*potenca(1-u,3-i);
      px := px+T[i].x*B; py := py+T[i].y*B;
    end; { prišteje vpliv kontrolne točke }
  end;
  LineTo(round(px),round(py)); { nariše črto do izračunane točke }
end;
end; { KubicniBezier }

```



Slika 2. Generirane krivulje.

Zaključek

Pred klicem podprograma je potrebno vnesti kontrolne točke. Zanimivo je opazovanje vpliva **dvojnih** ali **trojnih** točk. To pomeni, da zaporedoma podamo dve ali tri enake točke (primer je zadnja krivulja na sliki 2). Pred izrisom krivulje je treba preklopiti računalnik v grafični način delovanja, kar gotovo ne bo problem za tiste, ki ste že napisali kakšen grafični program v pascalu.

Podprogram je napisan za štiri podane kontrolne točke, nobene ovire pa ni za posplošitev parametričnega opisa Bézierove krivulje na n točk. V tem primeru postanejo povezovalne funkcije Bernsteinovi polinomi n -te stopnje. Zaradi precejšnje časovne zahtevnosti računanja vrednosti polinomov višjih stopenj pa se izogibamo povezovalnim funkcijam, katerih red je višji od 3. Problem aproksimacije z velikim številom kontrolnih točk zaradi tega ponavadi rešujemo tako, da "zlepimo" skupaj več kubičnih krivulj.

Aleksander Vesel

V TRGOVINI – Rešitev s str. 296

Očitno se ženi Miha Mah, torej mora nevesta biti Tina Čeh. Škrjanc mora biti čistilec (ker je že poročen). Tretji možki, Klemen Klemen, je kupec. Poslovodja je torej Eva Kralj, Tina Čeh je blagajničarka, prodajalec pa Miha Mah.

Neža Mramor-Kosta

TEKMOVANJA

REŠITVE NALOG Z IZBIRNEGA TEKMOVANJA ZA 24. MEDNARODNO FIZIKALNO OLIMPIADO

Objavljamo rešitve teoretičnih nalog z izbirnega tekmovanja za sestavo slovenske ekipe, ki se je udeležila 24. mednarodne fizikalne olimpiade v ZDA. Tekmovanje je potekalo v petek, 28. maja 1993, v prostorih Oddelka za fiziko Univerze v Ljubljani. Besedila nalog smo objavili v letošnji peti številki Preseka.

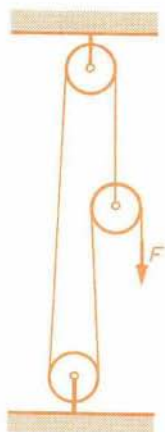
1. Ko balon lebdi v zraku, sta v ravnovesju njegova teža in vzgon. Gostota zraka in zračni tlak na višini z sta povezana s splošno plinsko enačbo $p(z) = p(0)M/RT$. Če nas zanimajo le majhne spremembe višine, lahko spreminjanje tlaka z višino zapišemo kot $p(z) = p(0) - \rho(0)gz$. (Razlike morajo biti mnogo manjše od $p(0)/\rho(0)g \approx 8$ km, kar pri nalogi zagotovo velja.) Vzgon na višini z lahko zapišemo $F(z) = \rho(z)gV_{\text{balon}} = F(0) - kz$, $k = \rho(0)g^2V_{\text{balon}}M/RT = 0,73$ N/m.
 - a) Za prvotno ravnovesno lego pri $z = 0$ velja $m_{\text{balon}}g = F(0)$; za novo na višini z_0 pa $(m_{\text{balon}} - m_1)g = F(0) - kz_0$, $z_0 = 6,7$ m.
 - b) Balon niha okoli ravnovesne lege. Amplituda nihanja je enaka razdalji med staro in novo ravnovesno lego, torej z_0 ; največja višina je $z_{\text{max}} = 2z_0 = 13,4$ m.
 - c) Enačba za nihanje je takšna kot pri nihalu na vijačno vzmet: $m_{\text{balon}}a = -kz$. Rešitev je harmonično nihanje $z(t) = z_0 - z_0 \cos \omega t$ z $\omega = \sqrt{k/m_{\text{balon}}} = 0,034$ s⁻¹, oziroma z nihajnim časom $t_0 = 185$ s.
 - d) Balon ima največjo hitrost v ravnovesni legi, $v_{\text{max}} = \omega z_0 = 0,23$ m/s. Tedaj je viskozna sila $F_1 = 6\pi r\eta v_{\text{max}} = 3,7 \cdot 10^{-4}$ N, sila kvadratnega upora pa $F_2 = \frac{1}{2}c_u\rho S v_{\text{max}}^2 = 0,8$ N. Prvo silo lahko zanemarimo.
 - e) Ker je (vsaj na začetku) upor precej manjši od harmonske sile ($kz_0 \approx 5$ N), je nihanje balona le malo dušeno. Povprečna sila upora je $\bar{F} = \frac{1}{2}c_u\rho S \bar{v}^2 = \frac{1}{2}F_1 = 0,4$ N, saj je pri sinusnem nihanju $\bar{v}^2 = \frac{1}{2}v_{\text{max}}^2$.
2. a) Z m označimo maso elektrona ter z λ in λ' valovni dolžini vpadle in sipane svetlobe. Gibalna količina fotona na začetku je enaka vsoti gibalne količine elektrona, ki odleti v smeri naprej (glede na vpadli foton) in gibalni količini fotona, ki odleti v nasprotni smeri: $h/\lambda = mv - h/\lambda'$. Velja še ohranitev energije: $hc/\lambda = \frac{1}{2}mv^2 + hc/\lambda'$. Iz druge enačbe

dobimo $\lambda' - \lambda = \lambda\lambda' mv^2/2hc$; izraz za produkt $\lambda\lambda'$ pa dobimo tako, da nekoliko preurejeni enačbi kvadriramo in odštejemo. Dobimo: $\lambda' - \lambda = 2h/mc$, kar potrjuje veljavnost podane enačbe za $\theta = 180^\circ$.

- b) Ohranitev gibalne količine delcev v smeri vpadne svetlobe sedaj zapišemo $h/\lambda = mv \cos \varphi$, če je φ kot, pod katerim odleti elektron, in v prečni smeri $h/\lambda' = mv \sin \varphi$. Podobno kot pri a) pokažemo, da velja $\lambda' - \lambda = h/mc$, kar potrjuje veljavnost podane enačbe za $\theta = 90^\circ$. Za kot φ velja $\tan \varphi = \lambda'/\lambda$.
- c) Svetloba, ki se ne siplje na elektronih, se na grafitu ukloni pod kotom α_0 , kar ustreza levemu vrhu na slikah. Velja $\lambda = a \sin \alpha_0$. Svetloba, ki se siplje na elektronih, ima večjo valovno dolžino, zato je ustrezeni uklonski kot α večji. Za $\theta = 90^\circ$ velja $\lambda/\lambda' = \sin \alpha_0/\sin \alpha \approx \alpha_0/\alpha$ in $\lambda' - \lambda = \lambda \Delta\alpha/\alpha_0 \approx 2,5 \cdot 10^{-3} \text{ nm}$, iz podane enačbe pa dobimo $\lambda' - \lambda = h/mc = 2,48 \cdot 10^{-3} \text{ nm}$.
- d) Compton bi lahko še izmeril spremembo valovne dolžine, če bi pri kotu 135° dobil približno takšen spekter kot pri prikazanem poskusu pri kotu 45° . Velja $\lambda_{\text{maks}}/\lambda \approx \Delta\lambda(135^\circ)/\Delta\lambda(45^\circ) = (1 + \sqrt{2})/(1 - \sqrt{2}) \approx 6$, torej bi bil pojav zaznaven še pri šest krat večji valovni dolžini kot pri prikazanem poskusu.

Bojan Golli

PROBLEM TREH ŠKRIPCEV



Med pomorščaki vsega sveta je v navadi, da pri sprejemu novincev pripravijo potegavščine vseh vrst. Ena takih je tudi problem treh škripcev, ki so ga zastavljali (in ga morda še sedaj) svojim novincem ameriški mornarji. Nekomu izmed nadebudnih mladcev so dali v roke napravo, ki je narisana na sliki, in sicer je le-ta moral čim močneje potegniti za prosti konec. Kaj se je zgodilo? Glej rešitev na strani 335.

Jure Zupan

ASTRONOMIJA

MERITEV S SENCO

Ob sončnem vremenu lahko na prostem naredimo tole zanimivo meritev s senco.

V vodoravna tla navpično zapičimo ravno palico (kol). Palica meče senco na tla. Ker se podnevi Sonce navidezno giblje od vzhoda proti zahodu, hkrati pa še spreminja višino, se senci spreminjata smer in dolžina. Malo pred pravim poldnem, ko je Sonce najvišje na nebu in so sence predmetov najkrajše, z vrstico narišemo krožnico s središčem v podnožju palice in polmerom, nekoliko manjšim od trenutne dolžine sence palice. Zasledujemo senco.

Zabeležimo čas t_1 , ko se gibljivo krajišče sence palice dotakne krožnice (točka A). Senca se krajša, okoli pravega poldne je najkrajša, nato pa se daljša. Zabeležimo čas t_2 , ko se krajišče sence spet dotakne krožnice (točka B). V času $t = t_2 - t_1$ senca popiše na vodoravnih tleh kot φ . Za enak kot se v istem času Sonce navidezno premakne na nebu od vzhoda proti zahodu oziroma se v nasprotnem smislu zavrti Zemlja (slika 1).

Izračunamo čas t in na kak način izmerimo kot φ .

Če zanemarimo navidezno letno gibanje Sonca, pri katerem se Sonce vsak dan skoraj za stopinjo premakne glede na zvezde od zahoda proti vzhodu, nam da kvocient φ/t kar dobro oceno za velikost kotne hitrosti vrtenja Zemlje.

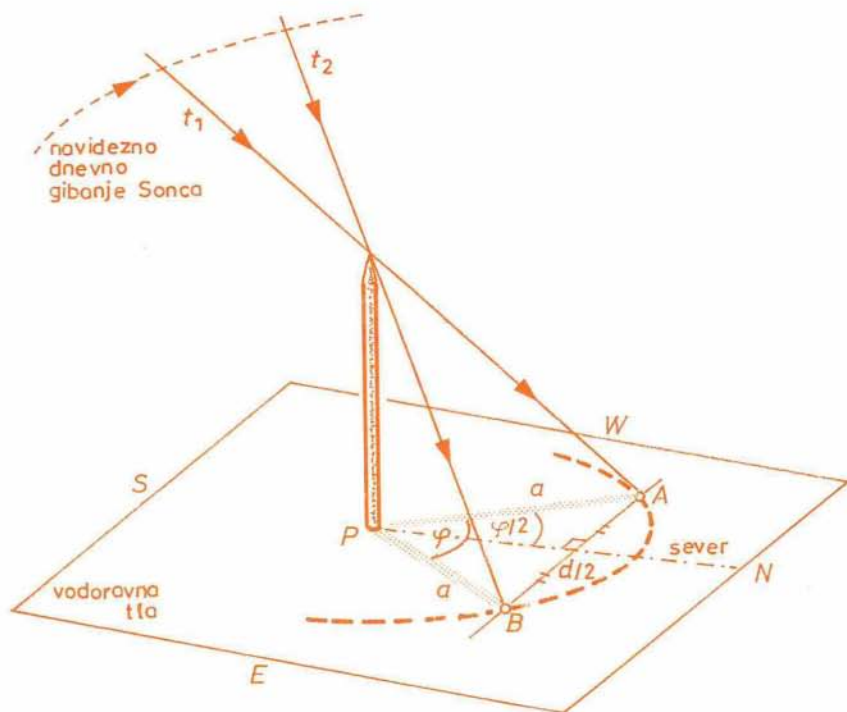
Poskusite tudi vi na opisani način ugotoviti kotno hitrost vrtenja Zemlje. Omenili smo najpreprostejši način. Časa ni težko izmeriti. Glede določitve kota φ pa imamo lahko večje ali manjše težave. Ugotovimo ga lahko tudi takole:

1. Upoštevamo razmere na sliki 1. Izmerimo dolžino sence $|PA| = |PB| = a$ v času t_1 in t_2 in razdaljo (tetivo) $|AB| = d$. Ker imamo opravka z enakokrakim trikotnikom s kotom φ med krakoma, kot φ izračunamo iz kotne funkcije

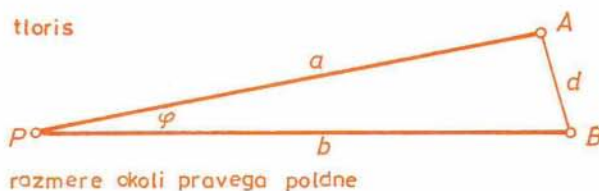
$$\sin\left(\frac{\varphi}{2}\right) = \frac{d}{2a}.$$

2. Okoli pravega poldneva izmerimo dolžini senc $|PA| = a$ in $|PB| = b$ v časih t_1 in t_2 in razdaljo $|AB| = d$ med krajiščema senc v teh časih. Kot φ izračunamo po kosinusnem izreku, saj v raznostraničnem trikotniku PAB poznamo vse stranice (slika 2).

Pri okoli 1,5 m visoki navpični palici merimo čas na minuto natančno, dolžino pa na centimeter. Časovni interval t naj bo manjši od ene ure, da dobimo čim boljši rezultat. Meritve moremo izvesti že v 4. razredu osnovne



Slika 1. K merjenju kotne hitrosti Zemlje; P - podnožje palice, $|PA| = |PB| = a$ - polmer krožnice. Merjenje lahko opravimo tudi doma v sončni sobi (balkonu, terasi, okenski polici). Uporabimo na primer stropno ploščo, pletilko (svinčnik, žebelj), šestilo, kotomer. V tem primeru merimo kot na stopinjo natančno, dolžino na milimeter, čas pa na minuto natančno.



Slika 2. V trikotniku APB izmerimo dolžini stranic (senc) a in b v časih t_1 in t_2 in dolžino tretje stranice (razdaljo) d . Kot φ izračunamo iz kosinusnega izreka za stranico d , to je iz $d^2 = a^2 + b^2 - 2ab \cos \varphi$.

šole. V zmanjšanem merilu narišemo trikotnik PAB , ki smo mu izmerili stranice, s kotomerom pa izmerimo kot $\varphi = \sphericalangle APB$.

Še to! Natančnejši rezultat dobimo okoli enakonočja (21.3. ali 23.9.), manj natančen pa okoli kresa (22.6.) in božiča (22.12.).

Sam sem opravil meritve z 1,2 m visoko navpično palico. Krožnice nisem zarisal. Izmeril sem vse tri stranice trikotnika PAB in pri izračunu kota φ uporabil kosinusni izrek.

Kraj: Portorož (peščena obala)

Datum: 11.8.1992

Meritve:

Čas	Dolžina sence navpične palice
$t_1 = 12 \text{ h } 30 \text{ min}$	$a = 72 \text{ cm}$
$t_2 = 13 \text{ h } 10 \text{ min}$	$b = 70 \text{ cm}$

$$d = 13 \text{ cm}$$

Račun:

$$t = t_2 - t_1 = 40 \text{ min}$$

$$\cos \varphi = \frac{a^2 + b^2 - d^2}{2ab} = \frac{72^2 + 70^2 - 13^2}{2 \cdot 72 \cdot 70}$$

$$\varphi = 10,38^\circ$$

$$\frac{\varphi}{t} = \frac{10,38^\circ}{40 \text{ min}} = 15,6^\circ/\text{h}.$$

Dobljena vrednost $15,6^\circ/\text{h}$ je kar dobra ocena za kotno hitrost vrtenja Zemlje, katere natančna vrednost je $15^\circ/\text{h}$.

Marijan Prosén

LAHKA GEOMETRIJSKA ZA BISTRO OKO

Dan je trikotnik $\triangle ABC$ s ploščino p . Nadalje naj bodo D , E , F take točke, izbrane zapored na nosilkah stranic AB , BC , CA , da bodo B , C , A razpolovišča daljic AD , BE , CF .

Kolikšna je ploščina trikotnika $\triangle DEF$?

Glej rešitev na strani 341.

Marija Vencelj

MATEMATIKA

ODVOD POLINOMA IN NJEGOVA UPORABA

1. Kaj je odvod polinoma?

Polinom ene spremenljivke je izraz oblike

$$P(x) = a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \dots + a_1 x + a_0.$$

Privzamemo, da je prvi koeficient a_n različen od nič. Število n se tedaj imenuje stopnja polinoma P .

Odvod polinoma P je nov polinom P' , ki ima stopnjo za ena nižjo od stopnje polinoma P . Dobimo ga po naslednjih pravilih:

- (i) Odvod konstantnega polinoma je enak nič.
- (ii) Odvod potence x^n je enak $n x^{n-1}$.
- (iii) Odvod vsote polinomov je vsota posameznih odvodov; torej $(P + Q)' = P' + Q'$.
- (iv) Odvod s konstanto pomnoženega polinoma je s to isto konstanto pomnožen odvod prvotnega polinoma; torej $(aP)' = a \cdot P'$.

Za zgled izračunajmo odvod polinoma $P(x) = x^3 + 2x^2 + 4x - 8$. Z uporabo zgornjih pravil dobimo

$$\begin{aligned} P'(x) &= (x^3)' + (2x^2)' + (4x)' - (8)' = \\ &= 1 \cdot (x^3)' + 2 \cdot (x^2)' + 4 \cdot (x^1)' - 8 \cdot (1)' = \\ &= 1 \cdot 3x^2 + 2 \cdot 2x + 4 \cdot x^0 - 8 \cdot 0 = \\ &= 3x^2 + 4x + 4. \end{aligned}$$

V naslednjih dveh razdelkih bomo ilustrirali na primerih uporabnost tega pojma.

2. Realne ničle

Za število α rečemo, da je ničla polinoma P , če je $P(\alpha) = 0$. Polinom ima največ toliko realnih ničel, kot je njegova stopnja, npr. polinom $P(x) = x^2 - 3x + 2$ ima lahko največ dve realni ničli in ju v resnici tudi ima. To sta $\alpha = 1$ in $\alpha = 2$. Polinom $P(x) = x^2 + 1$ pa nasprotno nima nobene realne ničle. Ničle ločimo tudi glede na njihovo stopnjo. Ničla α je prve stopnje, če $(x - \alpha)^2$ ne deli polinoma $P(x)$. Tak primer je ničla $\alpha = 1$ v polinomu $P(x) = x^2 - 3x + 2$. Ničla α je druge stopnje, če $(x - \alpha)^2$ deli $P(x)$, $(x - \alpha)^3$

pa ne. Primer za to je ničla $\alpha = 1$ v polinomu $P(x) = x^3 - 4x^2 + 5x - 2$. Podobno definiramo tudi ničle višjih stopenj.

Za polinom $P(x)$ rečemo, da ima vse ničle realne, če je vsota stopenj vseh realnih ničel enaka stopnji polinoma. To lahko povemo tudi drugače: Polinom $P(x)$ ima vse ničle realne, če ga lahko zapišemo kot produkt

$$P(x) = (x - \alpha_1)^{n_1}(x - \alpha_2)^{n_2} \dots (x - \alpha_k)^{n_k},$$

kjer so $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_k$ realne ničle polinoma $P(x)$. Njihove stopnje so seveda $n_1, n_2, \dots, n_k$.

Naslednji izrek je dokazal matematik Rolle.

Če ima polinom $P(x)$ vse ničle realne, potem ima tudi njegov odvod $P'(x)$ vse ničle realne.

Dokaz tega izreka ni težak, vendar presega nivo srednješolske matematike. Uporabimo ga lahko za reševanje problemov naslednjega tipa:

Naj bo $P(x) = x^5 + x^4 + x^3 + ax^2 + bx + c$. Ali je možno izbrati števila a, b, c tako, da bo imel polinom $P(x)$ same realne ničle?

Če polinom $P(x)$ zaporedoma odvajamo, dobimo

$$P'(x) = 5x^4 + 4x^3 + 3x^2 + 2ax + b,$$

$$P''(x) = 20x^3 + 12x^2 + 6x + 2a,$$

$$P'''(x) = 60x^2 + 24x + 6.$$

Če bi imel $P(x)$ same realne ničle, bi imel po Rolleovem izreku tudi $P'(x)$ same realne ničle. Po isti logiki bi morala imeti tudi $P''(x)$ in $P'''(x)$ same realne ničle. S pomočjo odvoda smo manjšali stopnjo polinoma in po treh korakih prišli do kvadratne enačbe $60x^2 + 24x + 6 = 0$. Ta enačba pa nima realnih rešitev, ker je njena diskriminanta negativna. To pomeni, da je odgovor na zastavljeni problem negativen.

3. Minimum in maksimum

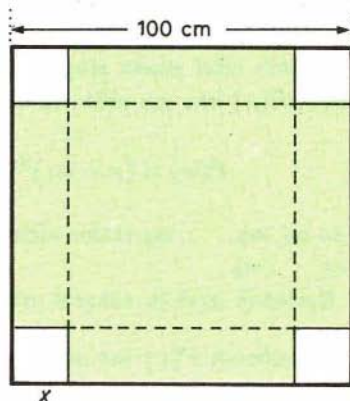
V zvezi z odvodom obstaja naslednji pomembni izrek:

Če je v točki α lokalni minimum ali maksimum, potem je α ničla odvoda $P'(x)$.

Ta izrek nam pomaga pri reševanju nekaterih zelo življenjskih problemov, kot je naslednji:

Denimo, da imamo kvadraten kos lepenke s stranico 1 m. Na vseh štirih vogalih želimo odrezati manjše kvadrate tako, da bomo preostanek zložili v škatlo brez pokrova (slika). Kako naj odrežemo, da bo volumen dobljene škatle največji možen?

Naj bo x velikost stranice odrezanega kvadratka. Tedaj bo imela škatla širino in dolžino $100 - 2x$ (v centimetrih) ter višino x . Njen volumen bo



$$V(x) = (100 - 2x)^2 x = 4x^3 - 400x^2 + 10000x.$$

Naša naloga je določiti maksimum tega polinoma, ko je x med 0 in 50 cm. Po zgornjem izreku je potrebno rešiti enačbo

$$V'(x) = 12x^2 - 800x + 10000 = 0.$$

Njeni rešitvi sta $x = 50$ cm ter $x = 16,66$ cm. Pri prvi rešitvi je volumen enak 0 (to je seveda minimalen volumen), pri drugi pa dobimo maksimalni možni volumen 74074 cm^3 oziroma $0,074 \text{ m}^3$.

Borut Zalar

NAJMANJŠA PODMNOŽICA – Rešitev s str. 271

Po krajšem poskušanju postavimo domnevo, da je množica A enaka množici vseh tistih naravnih števil, ki niso potence števila 2. Omenimo, da število 1 ni v tej množici, saj je $2^0 = 1$. Hitro se prepričamo, da tako izbrana množica res izpolnjuje obe zahtevi: število 3 ni potenca števila 2, pa tudi števila $2n - 1$, $2n$ in $2n + 1$ niso te oblike, če število n ni potenca števila 2. Preveriti moramo še, da je tako izbrana množica A res najmanjša med množicami, ki izpolnjujejo zahtevi. Pa recimo, da obstaja še množica B , ki tudi izpolnjuje oba pogoja, hkrati pa ne vsebuje množice A kot svoje podmnožice. Tedaj je množica $A \setminus B$ neprazna. Naj bo a najmanjše število v tej množici. Prepričajmo se najprej, da število a ni sodo. Če bi bilo sodo, bi tudi naravno število $\frac{a}{2}$ pripadalo množici A . Ker pa je a najmanjše število, ki je v A in ni v B , bi veljalo tudi

REŠITVE NALOG

$\frac{a}{2} \in B$. Toda po drugem pogoju, ki mu zadošča tudi množica B , od tod sledi, da $2 \cdot \frac{a}{2} = a \in B$. To pa ni v skladu s predpostavko, da $a \in A \setminus B$. Torej je število a liho. Potem ima pri deljenju s 4 ostanek 1 ali 3. Če ima ostanek 1, je $\frac{a+1}{2}$ liho naravno število. Torej je v množici A in ker je manjše od a , je tudi v B . Potem pa je zopet po drugi lastnosti tudi $2 \cdot \frac{a+1}{2} - 1 = a \in B$, kar pa je protislovje. Ostane nam še možnost, da ima število a ostanek 3 pri deljenju s 4. Tedaj pogledamo število $\frac{a-1}{2}$. To je vedno liho naravno število. Če je večje ali enako 3, potem je v obeh množicah A in B . Po zadnjem delu druge lastnosti je potem tudi $2 \cdot \frac{a-1}{2} + 1 = a \in B$. To pa je spet protislovje. Če pa je $\frac{a-1}{2} = 1$, je $a = 3$. Toda $3 \in B$ po prvi lastnosti. Množica $A \setminus B$ je torej prazna oziroma množica A je najmanjša množica z iskanima lastnostima.

Na nalogo lahko pogledamo tudi nekoliko drugače. Množico A sestavljajo natanko tista naravna števila, ki imajo v dvojiškem zapisu vsaj dve enici. Število 3 je najmanjše tako število. Tudi operacije iz druge zahteve imajo v dvojiškem zapisu preprost opis: prva je najbolj zapletena, zato jo bomo razložili nazadnje, druga doda številu ničlo na koncu dvojiškega zapisa, tretja pa enico. Prva operacija najprej doda ničlo, nato pa vse ničle na koncu spremeni v enice, enico pred temi ničlami pa zamenja z ničlo. Tak pogled na nalogo močno poenostavi razmišljanje.

Martin Juvan

ZANIMIVOST PRI ŠTEVILIH - Rešitev s str. 163

Postavljena je bila naloga: Izberi n pozitivnih števk in sestavi vsa možna r -mestna števila. Poišči kvocient med vsoto teh r -mestnih števil in vsoto izbranih števk.

Označimo kvocient s $K_{r,n}$. Vzemimo nabor števk $a_1, a_2, \dots, a_n$, pri čemer jih je lahko nekaj med seboj enakih, vendar jih med seboj razlikujemo. Ugotovimo lahko, da mora biti vsaj ena od njih različna od nič, saj bi bila v nasprotnem primeru v kvocientu $K_{r,n}$ števec in imenovalec enaka nič, izraz za $K_{r,n}$ pa nedoločen.

Sedaj z naborom števk $a_1, a_2, \dots, a_n$ tvorimo vsa možna r -mestna števila. Teh je toliko, kolikor je variacij reda r z n elementi, torej:

$$V_n^r = n(n-1)(n-2) \cdot \dots \cdot (n-r+1).$$

Poiskati moramo še, kolikokrat se pojavi številka a_j na nekem mestu v r -mestnem številu. Ker so vse številke med seboj enakovredne (število se lahko začne tudi s številko 0), ugotovimo, da se vse številke pojavijo enako mnogokrat

na vsakem mestu r -mestnega števila. Številka a_j se pojavi na določenem mestu tolikokrat, kolikor je razporeditev ostalih $n-1$ števk na ostalih $r-1$ mestih:

$$V_{n-1}^{r-1} = (n-1)(n-2) \cdots ((n-1)-(r-1)+1) = (n-1)(n-2) \cdots (n-r+1).$$

Če želimo seštetati vsa r -mestna števila, jih najprej zapišemo v desetiški obliki ter tvorimo delne vsote tistih členov, ki vsebujejo enake številke a_j . Tako dobimo:

$$K_{r,n} = \frac{V_{n-1}^{r-1} \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^r 10^{r-j} a_i}{\sum_{i=1}^n a_i}.$$

Če te vsote razvijemo, dobimo:

$$\begin{aligned} K_{r,n} &= \frac{V_{n-1}^{r-1} ((10^{r-1} a_1 + 10^{r-2} a_1 + \cdots + a_1) + \cdots + (10^{r-1} a_n + 10^{r-2} a_n + \cdots + a_n))}{a_1 + a_2 + \cdots + a_n} = \\ &= \frac{V_{n-1}^{r-1} (a_1 + a_2 + \cdots + a_n) (10^{r-1} + 10^{r-2} + \cdots + 10 + 1)}{a_1 + a_2 + \cdots + a_n} \end{aligned}$$

in po krajšanju: $K_{r,n} = \underbrace{111 \dots 1}_{r \text{ enic}} \cdot (n-1)(n-2) \cdots (n-r+1)$. Od tod res sledi, da je kvocient $K_{r,n}$ neodvisen od izbora števk $a_1, a_2, \dots, a_n$. Podoben izraz dobimo tudi za poljuben številski sestav z osnovo B :

$$\begin{aligned} K_{r,n} &= \frac{V_{n-1}^{r-1} \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^r B^{r-j} a_i}{\sum_{i=1}^n a_i} = \\ &= V_{n-1}^{r-1} (B^{r-1} + B^{r-2} + \cdots + B + 1) = \\ &= \underbrace{111 \dots 1}_{r \text{ enic}} (B) \cdot (n-1)(n-2) \cdots (n-r+1) \end{aligned}$$

Primož Moravec

KAJ KDO DELA? – Rešitev s str. 275

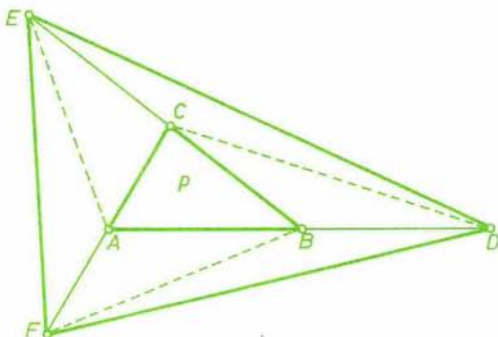
Nalogo lahko rešimo s pomočjo razpredelnice, lahko pa tudi kar s premislekom: Zupan in Žužek morata biti varnostnik in kuhar, ker sta soseda. Ker igra varnostnik bolje od ostalih dveh, mora biti Zupan kuhar. Torej je Žužek varnostnik. Potokar je boljši od Zupana, torej ne more biti blagajnik, ampak izterjevalec dolgov. Blagajnik je torej Novak.

Neža Mramor-Kosta

LAHKA GEOMETRIJSKA ZA BISTRO OKO

- Rešitev s str. 334

Trikotnika $\triangle ABC$ in $\triangle BDC$ imata po konstrukciji enako dolgi stranici AB in BD , s slike pa razberemo, da imata skupno višino na ti stranici. Torej sta plosčinsko enaka.



Podobno sklepamo, da imata enaki plosčini trikotnika $\triangle BDC$ in $\triangle CDE$, saj imata enaki stranici BC in CE in skupno nasprotno oglišče D . Nadaljevanje pokaže, da sestavlja trikotnik $\triangle DEF$ sedem plosčinsko enakih trikotnikov; eden od njih je dani trikotnik $\triangle ABC$. Iskana plosčina je torej $7p$.

Opomba: Če poznate vektorski produkt, lahko nalogo hitro rešite tudi brez bistrega očesa! Poskusite!

Marija Vencelj

POKLICI

Janez, Tomaž, Simon in Matej so zaposleni v veliki tovarni čokolade, po poklicu pa so vratar, oskrbnik lešnikovih nasadov, poskuševalec in direktor, vendar ne nujno v tem vrstnem redu.

Oskrbnik lešnikovih nasadov zasluži natanko dvakrat toliko kot vratar, poskuševalec (ki ima zelo odgovorno delo) dvakrat toliko kot oskrbnik nasadov in direktor dvakrat toliko kot poskuševalec.

- Čeprav je Janez starejši od vsakogar, ki zasluži več kot Tomaž, Tomaž ne zasluži dvakrat toliko kot Janez.
- Matejev osebni dohodek znaša natanko 3776 tolarjev več kot Simonov.

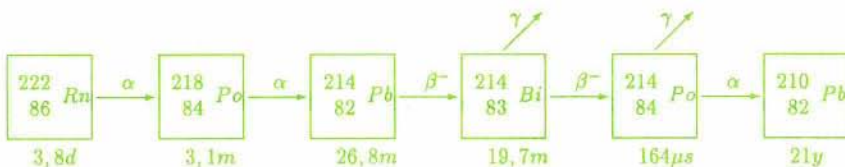
Kateri poklic opravlja kateri izmed štirih sodelavcev?

Glej rešitev na strani 375.

Neža Mramor-Kosta

RADON

Radioaktivni plin radon je sestavni del ozračja. Radon (^{222}Rn) je izotop žlahtnega plina ^{86}Rn , ki nastaja v naravi z razpadom α radija. Začetnik razpadne verige, ki vodi do radija, je ^{238}U . Ta element je od nekdaj v zemeljski skorji, saj je njegov razpolovni čas, 4,5 milijard let, približno tolikšen kot starost Zemlje. Razpolovni čas radona pa meri le 3,83 dni. V razpolovnem času razpade polovica radioaktivnih atomov, ki so jih imeli v vzorcu na začetku. Po dveh razpolovnih časih je v vzorcu torej le še četrtnina, po treh pa osmina začetnega števila radioaktivnih atomov. Radon razpada, vsak razpad radijevega jedra pa rodi nov atom radona. Koliko radonovih atomov pa se na novo rodi? Število nastalih atomov radona v sekundi v kilogramu zemlje je enako številu razpadov radija, to pa je enako številu razpadov urana ^{238}U . Povprečno aktivnost ^{238}U v enem kilogramu zemlje cenimo na 25 razpadov v sekundi. Na čast francoskemu fiziku Henriju Becquerelu imenujemo en razpad na sekundo Becquerel in ga pišemo okrajšano z Bq. Aktivnost enega kilograma snovi ali enega kubičnega metra zraka bomo imenovali specifična aktivnost, njena enota je Bq/kg ali Bq/m³. Ponekod, kjer so tla bogatejša z uranom, nastaja tudi več radona.



Slika 1. Radonov razpadni niz. Radon razpade z izsevanjem delca α v polonij, niz pa se konča z izotopom svinca. Pod kvadratkami, ki ustrezajo posameznim izotopom, so napisani razpolovni časi, kjer pomeni d dan, m minuto, s sekundo in y leto.

Radon razpada z oddajanjem delcev α , β in sevanja γ po vrsti v kratkožive potomce ^{218}Po , ^{214}Pb , ^{214}Bi in ^{214}Po (slika 1). Izotop ^{210}Pb sicer tudi razpada, a ima razmeroma velik razpolovni čas 21 let, zato bomo z njim razpadno verigo zaključili.

Delec α pri letu iz jedra iz atoma iztrga elektron, zato so kratkoživi radonovi potomci ob nastanku pozitivno nabiti. V ozračju se vežejo na prašne delce. Vdihavanje zraka z radonovimi potomci je zdravju nevarno. Pljuča zbirajo prah kot filter, delci α pa poškodujejo občutljivo tkivo. Sam radon zanemarljivo prispeva k obsevanju.

Človek je radonu izpostavljen povsod, najbolj pa v zaprtih prostorih. Radon izpuhneva iz sten in tal in se posebno pozimi nabira v slabo zračenih prostorih. Vdihavanje radonovih potomcev prispeva, v nekaterih področjih sveta, do 50% celotnega obsevanja zaradi naravnih in umetnih radioaktivnih izvirov. Precej radona se sprošča zaradi človekove dejavnosti. Pri pridobivanju in predelavi urana ter skladiščenju jalovine se izpuhtevanje radona na nekaterih mestih poveča. Radon močneje puhti tudi pri sežiganju premoga, zemeljskega plina in uporabi zemeljske toplote. Njegov pogubni vpliv na zdravje so prvi izkusili rudarji v Češkem rudogorju že v 16. stoletju. Za pljučnim rakom so zbolele tri četrtnine rudarjev. Vzrok te "gorske bolezni" so odkrili šele v dvajsetih letih tega stoletja.

Tveganje, da bomo zaradi vdihavanja radonovih potomcev zboleli, je sorazmerno s specifično aktivnostjo, to je številom razpadov radona v sekundi v enem kubičnem metru zraka. Ocenimo ga po opazovanju ljudi, ki so bili bolj obsevani. Za primerjavo povejmo, da kadilec, ki pokadi zavojček cigaret dnevno, tvega glede pljučnega raka toliko kot nekadilec, ki živi v prostoru s specifično aktivnostjo radona 750 Bq/m^3 (100 primerov/1000 prebivalcev v 60 letih). Če pomislimo, da so posamezniki zaradi višjih koncentracij radona izpostavljeni tudi mnogo večjim tveganjem, je skrb za zmanjševanje radona v bivalnih prostorih razumljiva.

Specifične aktivnosti radona v zraku so najnižje nad oceani, zaledenelimi površinami in otoki, pod 1 Bq/m^3 , nad kopnim med 1 in 10 Bq/m^3 , v zaprtih prostorih med 10 in 1000 Bq/m^3 , v jamah, rudnikih in nekaterih toplicah pa dosežejo do nekaj tisoč Bq/m^3 in več. V mnogih državah sistematično merijo njegovo koncentracijo predvsem v vrtcih, šolah in stanovanjskih hišah, kjer je večinoma specifična aktivnost radona manjša kot 100 Bq/m^3 .

Oglejmo si nekaj metod za merjenje radona v zraku. Merilne metode temeljijo na štetju delcev α , ki jih sevajo radon in še dva izotopa polonija, ali sevanju γ bizmuta in polonija.

Preprosta je metoda s scintilacijsko celico. Posodo s prostornino okrog $0,2 \text{ l}$ znotraj prevlečejo s cinkovim sulfidom, na eni strani pa naredijo okno za fotopomnoževalko. Delci α pri prehodu skozi scintilator sprožijo bliske, ki jih šteje fotopomnoževalka. Zrak z radonom zajamejo v stekleno posodo, v laboratoriju pa z njim prepihajo celico. Meriti začnejo po treh urah, ko je radon v ravnovesju s potomci. Ozadje, to je pogostost bliskov, ki niso povezani z razpadom radona in potomcev, je v taki celici okoli $1/\text{min}$. Če je v celici zrak s specifično aktivnostjo 250 Bq/m^3 in štejemo eno uro, dobimo 420 ± 20 bliskov od radona in ozadja in 60 ± 8 bliskov iz ozadja. Pri

računanju smo privzeli, da en razpad radona ustreza povprečno okrog dvema bliskoma v celici. Temu pravimo "izkoristek celice". Ne smemo pozabiti, da na en razpad radona pridejo trije delci α , zato je izkoristek lahko večji od ena. Razlika preštetihi sunkov je 360 ± 22 , torej merimo aktivnost radona z napako 6%.

Pri drugem načinu merjenja prečrpajo zrak z znano prostornino skozi filter iz steklenih vlaken, ki zadrži skoraj vse radonove potomce, in merijo energijo izsevanihi delcev α . Ta je značilna za posamezne potomce. S tem določijo aktivnost potomcev v zraku, o aktivnosti radona pa ne morejo zanesljivo sklepati.

V stanovanjskih prostorih odloča o izpostavljenosti stanovalcev povprečna na specifična aktivnost v daljšem razdobju. Metoda z zbiranjem radona na aktivnem oglju in metoda z jedrskimi sledmi sta namenjeni prav takim merjenjem.

Pri prvi segrevajo posodice z ogljem nekaj ur pri temperaturi nekaj nad $100\text{ }^{\circ}\text{C}$, da izženejo adsorbirani radon in vodo. Nato posodice ohladijo in tesno zaprejo. V prostoru posodice odprejo in za nekaj dni izpostavijo zraku. Tesno zaprte posodice nato v laboratoriju po treh urah, ko je radon v ravnovesju s potomci, postavijo na spektrometer γ . Sevanje γ oddajata ^{214}Bi in ^{214}Po takoj po razpadu β^- ^{214}Pb in ^{214}Bi . Iz izmerjene aktivnosti določijo specifično aktivnost radona v prostoru, v katerem je bila posodica odprta.

Pri metodi jedrskih sledi uporabimo košček plastične folije. Delci α pustijo v foliji sledi, ki postanejo z jedkanjem v vročem NaOH vidne (slika 2). Štetje značilnih sledi opravijo z računalnikom na osnovi slike, ki jo posreduje televizijska kamera.



Sledi delcev α po jedkanju v vročem NaOH vidimo kot svetle pike, ko folijo močno osvetlimo s strani. Vsaka folija ima odtisnjeno številko in poseben znak, ki ga prepozna tudi računalnik.

Njihovo število je sorazmerno s časom ekspozicije in specifično aktivnostjo radona v zraku. Detektor moramo zaščititi pred radonovimi potomci v zraku. Zato ga položimo v plastično posodo z zelo ozko špranjo, ki zadrži potomce, v posodo pa spusti le radon. Take dozimetre izpostavijo radonu v prostoru od enega do treh mesecev in z njimi merijo povprečno aktivnost nad 1 Bq/m^3

Andrej Likar

HERMANN MINKOWSKI 1864 - 1909

Ob 130-letnici rojstva



Rusko-nemški matematik Hermann Minkowski se je rodil 22. 6. 1864 v Aleksoti v Rusiji. Doktoriral je na königsberški univerzi, kjer je nato tudi nekaj let predaval, nakar je odšel v Zürich in nazadnje v Göttingen.

Ko je predaval matematiko na züriškem politehnikumu, je tam študiral nemško-švicarsko-ameriški fizik Albert Einstein. Le ta je zelo neredno hodil na predavanja, zato ga je v tistih dneh Minkowski imel za "lenege psa". Ko pa je leta 1905 Einstein objavil specialno teorijo relativnosti, jo je Minkowski z navdušenjem sprejel. Einstein je v svojem članku po-

kazal, da je običajna trirazsežna geometrija neprimerna za natančen opis stvarstva. Minkowski je svojem delu Čas in prostor, objavljenem leta 1907, podal ustrezno formalno geometrijsko sliko relativnosti. Pokazal je, da moramo upoštevati čas kot nekakšno četrto razsežnost, čeprav nekoliko drugače kot tri prostorske razsežnosti. Čas in prostor sta tako tesno povezana. Einstein je ta pogled upošteval v svoji splošni teoriji relativnosti, ki pa jo je objavil devet let kasneje, ko je bil Minkowski že mrtev.

Med bolj elementarnimi rezultati Minkowskega je najbolj znana neenakost, ki jo predstavljamo v članku Neenakost Minkowskega na naslednji strani.

Roman Drnovšek

V tem prispevku bomo dokazali naslednjo **neenakost Minkowskega**¹:

Naj bodo $x_1, x_2, \dots, x_n$ in $y_1, y_2, \dots, y_n$ poljubna nenegativna števila in $p \geq 1$ realno število. Tedaj velja neenakost

$$\begin{aligned} & ((x_1 + y_1)^p + (x_2 + y_2)^p + \dots + (x_n + y_n)^p)^{1/p} \leq \\ & \leq (x_1^p + x_2^p + \dots + x_n^p)^{1/p} + (y_1^p + y_2^p + \dots + y_n^p)^{1/p}. \end{aligned} \quad (1)$$

V dokazu te neenakosti bomo uporabili drugo (prav tako pomembno) **Hölderjevo neenakost**²:

Naj bodo $x_1, x_2, \dots, x_n$ in $y_1, y_2, \dots, y_n$ poljubna nenegativna števila in $p > 1$ realno število. Če s q označimo število $p/(p-1)$, je

$$x_1 y_1 + \dots + x_n y_n \leq (x_1^p + \dots + x_n^p)^{1/p} \cdot (y_1^q + \dots + y_n^q)^{1/q}. \quad (2)$$

Za števili p in q velja $pq = p + q$ oziroma $1/p + 1/q = 1$. Takima številoma pravimo **konjungirana eksponenta**. Očitno je $q > 1$. Prav tako je jasno, da sta tudi q in p konjungirana eksponenta, če sta taka p in q . Pomemben posebni primer konjungiranih eksponentov je $p = q = 2$.

Hölderjevo neenakost običajno dokažemo s pomočjo **Youngove neenakosti**³:

Naj bosta $p > 1$ in $q > 1$ konjungirana eksponenta, torej $1/p + 1/q = 1$. Tedaj za poljubni nenegativni števili x in y velja

$$xy \leq \frac{x^p}{p} + \frac{y^q}{q}. \quad (3)$$

Enakost velja natanko tedaj, ko je $x^p = y^q$ (kar bomo dokazali le za primer, ko je p racionalno število).

Youngovo neenakost lahko hitro dokažemo z uporabo neelementarnih metod; na primer s pomočjo odvoda poiščemo ekstrem primerne funkcije (naloge 4). Tukaj podajmo (bolj ali manj) elementaren dokaz.

¹ Neenakost je leta 1896 v svoji knjigi "Geometrie der Zahlen" predstavil nemški matematik H. Minkowski. (Glej prispevek na prejšnji strani.)

² V tej obliki je leta 1889 neenakost dokazal nemški matematik O. Hölder.

³ Neenakost je leta 1912 prvi obravnaval angleški matematik W. H. Young.

Najprej se prepričajmo, da je (3) dovolj dokazati v primeru $x \geq y = 1$, torej veljavnost zveze

$$x \leq \frac{x^p}{p} + \frac{1}{q} \quad \text{za vse } x \geq 1. \quad (4)$$

Za trenutek privzemimo, da smo (4) že dokazali. Naj bosta x in y poljubni nenegativni števili. Če je $x \geq y^{q-1}$, vstavimo v (4) namesto števila x število $x/y^{q-1} \geq 1$ in tako dobimo

$$\frac{x}{y^{q-1}} \leq \frac{x^p}{p y^{(q-1)p}} + \frac{1}{q}.$$

Če upoštevamo $(q-1)p = q$ in neenačbo pomnožimo z y^q , dobimo (3). To pomeni, da v primeru $x \geq y^{q-1}$ iz (4) sledi (3). Če pa je $x < y^{q-1}$, potem je

$$x^{p-1} < y^{(p-1)(q-1)} = y^{pq-p-q+1} = y.$$

Ker sta p in q konjungirana si eksponenta, sta taka tudi q in p . Če torej velja (4), potem je izpolnjena tudi neenakost

$$x \leq \frac{x^q}{q} + \frac{1}{p} \quad \text{za vse } x \geq 1.$$

V tej neenačbi število x zamenjamo s številom $y/x^{p-1} > 1$, in podobno kot prej izpeljemo (3).

Če v neenakosti (4) upoštevamo $1/p + 1/q = 1$, dobimo

$$p(x-1) \leq x^p - 1. \quad (5)$$

Pokažimo (5) najprej v primeru, ko je p racionalno število, torej $p = m/n$, kjer sta m in n naravni števili in $m > n$. Če je $x = 1$, potem velja v (5) enačaja. Dokažimo, da za $x > 1$ velja v (5) celo strogi neenačaj. Če pišemo $x = z^n$, potem je $z > 1$, dokazati pa moramo neenakost

$$\frac{z^n - 1}{n} < \frac{z^m - 1}{m},$$

oziroma, če upoštevamo pravilo o razliki m -tih oz. n -tih potenc in krajšamo $z - 1 > 0$:

$$\frac{1 + z + \dots + z^{n-1}}{n} < \frac{1 + z + \dots + z^{m-1}}{m}. \quad (6)$$

Ker je $z > 1$, je $1 < z < z^2 < \dots < z^{m-1}$, torej je

$$a = \frac{1 + z + \dots + z^{n-1}}{n} < z^{n-1} < z^n < \dots < z^{m-1}.$$

Zato imamo

$$\begin{aligned} \frac{1 + z + \dots + z^{m-1}}{m} &= \frac{(1 + z + \dots + z^{n-1}) + (z^n + \dots + z^{m-1})}{m} > \\ &> \frac{na + \overbrace{(a + \dots + a)}^{m-n}}{m} = \frac{na + (m-n)a}{m} = a, \end{aligned}$$

to je (6). Kaj pa, če p ni racionalno število? Tedaj pri poljubnem $k \in \mathbb{N}$ najdemo tako racionalno število r (odvisno od števila k), da je $r \leq p < r + 10^{-k}$. Število r lahko dobimo tako, da v decimalnem zapisu števila p prečrtamo vse decimalke od $(k+1)$ -te naprej. Ker je r racionalno število, po že dokazanem velja $b = (x^r - 1)/(x - 1) - r \geq 0$. Pokažimo, da je tedaj $c = (x^p - 1)/(x - 1) - p \geq 0$. Iz

$$b - c = (x^r - x^p)/(x - 1) + (p - r) = x^r (1 - x^{p-r})/(x - 1) + (p - r)$$

dobimo oceno $b - c < 10^{-k}$, če upoštevamo $x^{p-r} \geq 1$ oz. $1 - x^{p-r} \leq 0$ in $p - r < 10^{-k}$. Torej je $c > b - 10^{-k} > -10^{-k}$. Ker to velja za vsak $k \in \mathbb{N}$, s števili $\{-10^{-k}\}$ pa se lahko poljubno približamo 0, sledi $c \geq 0$, to je (5). Iz dokaza je razvidno, da velja v primeru, ko je p racionalno število, enačaj v (3) le, če je $x = y^{q-1}$, to je $x^p = y^q$. Dokaz neenakosti (3) je tako končan.

Oglejmo si sedaj, kako Hölderjeva neenakost sledi iz Youngove neenakosti. Pišimo

$$A = \left(\sum_{k=1}^n x_k^p \right)^{1/p} \quad \text{in} \quad B = \left(\sum_{k=1}^n y_k^q \right)^{1/q}.$$

Če je $A = 0$ ali $B = 0$, potem je $x_1 = \dots = x_n = 0$ ali $y_1 = \dots = y_n = 0$ in tedaj (2) velja. Zato smemo privzeti, da je $A > 0$ in $B > 0$. Če postavimo $X_k = x_k/A$ in $Y_k = y_k/B$ za $k = 1, 2, \dots, n$, imamo $X_1^p + \dots + X_n^p = 1$

in $Y_1^q + \dots + Y_n^q = 1$. Youngova neenakost nam sedaj da oceno

$$\begin{aligned} \sum_{k=1}^n X_k Y_k &\leq \sum_{k=1}^n \left(\frac{X_k^p}{p} + \frac{Y_k^q}{q} \right) = \\ &= \frac{1}{p} \left(\sum_{k=1}^n X_k^p \right) + \frac{1}{q} \left(\sum_{k=1}^n Y_k^q \right) = \frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1. \end{aligned}$$

Od tod dobimo

$$\sum_{k=1}^n x_k y_k \leq A \cdot B = \left(\sum_{k=1}^n x_k^p \right)^{1/p} \left(\sum_{k=1}^n y_k^q \right)^{1/q}.$$

S tem je Hölderjeva neenakost dokazana.

Neenakost Minkowskega sedaj hitro uženemo. Ker za $p = 1$ neenakost (1) očitno velja, smemo vzeti $p > 1$. Prav tako smemo privzeti, da niso vsi x_i in y_i enaki 0. Z uporabo Hölderjeve neenakosti dobimo

$$\begin{aligned} \sum_{k=1}^n x_k (x_k + y_k)^{p-1} &\leq \left(\sum_{k=1}^n x_k^p \right)^{1/p} \cdot \left(\sum_{k=1}^n (x_k + y_k)^{(p-1)q} \right)^{1/q} = \\ &= \left(\sum_{k=1}^n x_k^p \right)^{1/p} \cdot \left(\sum_{k=1}^n (x_k + y_k)^p \right)^{1/q}. \end{aligned}$$

Podobno imamo

$$\sum_{k=1}^n y_k (x_k + y_k)^{p-1} \leq \left(\sum_{k=1}^n y_k^p \right)^{1/p} \cdot \left(\sum_{k=1}^n (x_k + y_k)^p \right)^{1/q}.$$

Če zadnji neenakosti seštejemo, dobimo

$$\sum_{k=1}^n (x_k + y_k)^p \leq \left(\left(\sum_{k=1}^n x_k^p \right)^{1/p} + \left(\sum_{k=1}^n y_k^p \right)^{1/p} \right) \cdot \left(\sum_{k=1}^n (x_k + y_k)^p \right)^{1/q}.$$

Neenakost delimo z zadnjim faktorjem, ki je različen od 0 (zakaj?), upoštevamo $1 - 1/q = 1/p$, pa smo pri (1). Neenakost Minkowskega je tako dokazana.

Oglejmo si vse tri neenakosti v posebnem primeru $p = 2$. Ker je tedaj tudi $q = 2$, preide Youngova neenakost v znano neenačbo

$$xy \leq \frac{1}{2} (x^2 + y^2),$$

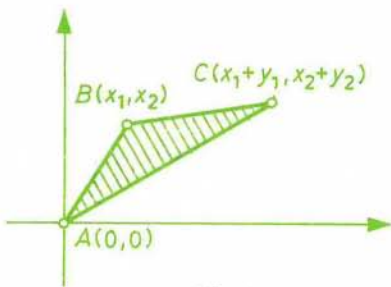
ki sledi tudi iz neenakosti $(x - y)^2 \geq 0$. V Hölderjevi neenakosti, ki se tedaj glasi

$$(x_1 y_1 + \dots + x_n y_n)^2 \leq (x_1^2 + \dots + x_n^2) \cdot (y_1^2 + \dots + y_n^2),$$

prepoznamo **Cauchyjevo neenakost**⁴. Neenakost Minkowskega pa je v primeru $p = 2$ znana **trikotniška neenakost**:

$$\sqrt{(x_1 + y_1)^2 + \dots + (x_n + y_n)^2} \leq \sqrt{x_1^2 + \dots + x_n^2} + \sqrt{y_1^2 + \dots + y_n^2}.$$

Zakaj se neenakost imenuje trikotniška, vidimo s slike 1, kjer smo zaradi enostavnosti vzeli $n = 2$. Koordinate točk na sliki so $A(0, 0)$, $B(x_1, x_2)$ in $C(x_1 + y_1, x_2 + y_2)$. Trikotniška neenakost je posledica naslednjega očitnega dejstva o razdaljah: razdalja med točkama A in C ni nikoli večja od vsote razdalj od A do B in od B do C . Grški matematik Evklid je o tem dejstvu že v tretjem stoletju pred našim štetjem zapisal naslednje: "To ve vsak osel. Postavi kopico sena v eno oglišče trikotnika in osla v drugega. Da bi dobil svoje seno, osel zanesljivo ne bo šel vzdolž dveh stranic."



Slika 1.

Končajmo z nalogami. Rešitve prvih treh nalog so elementarne, zadnji dve pa zahtevata poznavanje pojma odvoda oziroma integrala.

1. S pomočjo neenakosti Minkowskega pokaži, da za vsak $p \geq 1$ in vsak $n \in \mathbb{N}$ velja neenakost

$$1^p + 2^p + 3^p + \dots + n^p \geq n \cdot \left(\frac{n+1}{2} \right)^p.$$

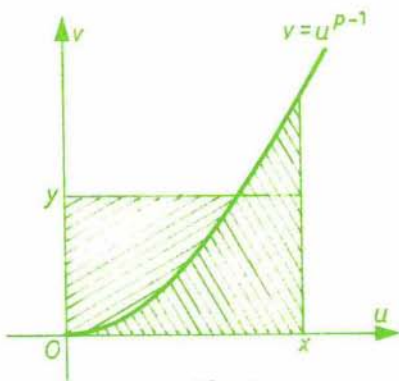
⁴ V svoji knjigi "Cours d'analyse" jo je leta 1821 zapisal francoski matematik A.L.Cauchy.

2. Pokaži, da v Hölderjevi neenakosti velja enačaj natanko tedaj, ko obstajata taki nenegativni konstanti a in b , da je $ax_k^p = by_k^q$ za vse $k = 1, 2, \dots, n$.
3. Dokaži, da v neenakosti Minkowskega velja enačaj tedaj in le tedaj, ko obstajata taki nenegativni konstanti a in b , da je $ax_k = by_k$ za vse $k = 1, 2, \dots, n$.
4. S pomočjo funkcije $f : [0, \infty) \rightarrow \mathbb{R}$, definirane s predpisom

$$f(x) = \frac{x^p}{p} + \frac{1}{q} - x,$$

podaj alternativni dokaz Youngove neenakosti! (Namig: najprej se prepričaj, da je dovolj pokazati, da je $f(x) \geq 0$, in potem to tudi dokaži.)

5. Izračunaj ploščini likov pod in nad krivuljo $v = u^{p-1}$ oziroma $u = v^{q-1}$, kjer je $(p-1)(q-1) = 1$ (glej sliko 2)! Ugotovi, kakšen je geometrijski pomen Youngove neenakosti!



Slika 2

Roman Drnovšek

IGRA "NIM*" – Rešitev s str. 295

Pri igri "NIM" je zmagovita pozicija, če igralec s svojo potezo doseže takšne vrednosti n_i ($n_i = \sum_j b_{ij}2^j$ v binarnem zapisu), da je vsota $\sum_i b_{ij}$ soda za vsak j . Končna zmagovita pozicija je potem $n_i = 0$ za vsak i in nasprotnik ne more več narediti poteze (glej *Presek 21* (1993-94)176).

Pri igri "NIM*" velja isto pravilo, dokler sta vsaj dva od $n_i > 1$. Če so vsi $n_i \leq 1$, je zmagovita pozicija (po izvršeni potezi), če je zasedb z $n_i = 1$ liho mnogo (v nasprotju z igro "NIM"). Kritična je torej pozicija (pred izvršeno potezo), ko je natanko en $n_i > 1$. V tem trenutku je treba prelomiti s pravili "NIM" in vzeti iz i -tega kupa bodisi vse kamne bodisi vse razen enega, tako da ostane liho mnogo kupov s po enim kamnom.

Mitja Rosina

KRIŽANKA KROG

				MANJŠI JADRANSKI OTOK	VEČJE NASELJE POD ROGLO	DOLGO- DLAK PES PTIČAR	STARO- RIMSKI IZVRŠILNI URADNIK	ZELEN JUŽNI SADEŽ		
									DIVJI PES	
AVTOR MARKO BOKALIČ	KRAJEVNA SKUPNOST			NOG. KLUB IZ ZENICE						RAZ OD DIŠI TOČ KROG
	DEL IMENA			OTOK V IRSKEM MORJU						
DVOJNI RADIJ, DIAMETER										
ZGORNJA OKONČINA					SLOV. IGRALEC (TONE)	DOGOVOR ŠP. KRONE O TRGOV. MONOPOL- LIH				
PREBIVAL- KA VASI POD KRIMOM								TEHNECIJ	PREMO- ŽENJE PODJETJA	VRH V ČRNI GORI, NAR. PARK
TIROLSKA REKA				DEL OBRAZA						LUNINA MENA
BAJKA				IGRALEC NOLTE						GR. BOG VETROV
				OBROK ODPLAČILA						NABIT DELEC
FRANC. IGRA S KARTAMI								DEL ŽELEZNIŠ. PROGE		
KARLOVAC			ANA V ANGLEŠ- KEM OKOLJU					IGOR OZIM IVAN MINATTI		ZA CEL SV
				PRIJETEN VONJ						TAJSKA

LAGA EČ	SPODNJA PLOSKEV POSODE	SLOV. MUZIKO- LOG (JOŽE)	MOŠTVO	PROSTOR ZA PEVCE V CERKVI		KRAJ PRI GROSUP- LJEM	MENIČNO JAMSTVO	ANGLEŠKO M. IME	LETA 1942 USTRE- LJEN SL. KRŠČ. SOCIAList	"OBODNI KOT NAD PREME- ROM JE PRAVI"
					UBITI EG. VODITELJ (ANVAR EL)					
					 HRIB NAD BEOGRA- DOM					
RIERA					PESNIK GOLIA ŠPELA PRETNAR					
DALJA SRE- ČA DO KE NA ŽNICI	PRIPO- VEDNA PESNITEV			NACE ŠUMI OČAK ST. ZAVEZE		VAS POD DOBRČO KOT Z VRHOM NA KROŽNICI				
	ZG. TOK BRAHMA- PUTRE TEKMOVAL. KROG						OSKAR KOGOJ	STANE SEVER JAP. DRSALKA (MIDORI)		
		LEToviŠČE PRI ROVINJU	DVOGLAS- NIK HRV. IN NAŠA ČRKA		IT. SKLAD. IN LIBRETIST (ARRIGO)					
					OSMINKA TISK. POLE AVSTR. SMUČAR (HANS)					
				IGRALEC DANSON IZR. POLITIČ. (GOLDA)			OSEBNI ZAI MEK			
			NEM. PIS. (THOMAS) REKRE- ACIJA				ENOTA ZA BORZNO TRGO- VANJE	IZRAEL. PISATELJ (AMOS)		
	GR. BOGINJA NESREČE MRČES V LASEH			AFRIŠKI VELETOK NEUMETN. IZDELEK				VILI RESNIK PALEC, COLA		
DNJI J.GROF VO ETINA					GR. JEZIK HELENIS, DOBE KRANJ					
				RADIJEČ KANONI			ČAKOVEC			

SEBI PODOBNOST IN DIMENZIJA FRAKTALOV

V tem članku bomo predstavili dimenzijo (razsežnost) objektov, ki so sebi podobni. Najprej bomo definirali lastnost, ki jo imenujemo sebi podobnost.

Definicija 1:

Če je del objekta majhna kopija celotnega objekta, potem je ta sebi podoben.

Definicija 2:

Objekt je strogo sebi podoben, če lahko objekt razdelimo na več delov in je vsak kos majhna kopija celote.

Spomnimo se trikotnika Sierpinskega (glej članek Poglejmo fraktale v 3. številki Preseka.) in ugotovimo, ali je sebi podoben, in ali je strogo sebi podoben. Vsak del v tem trikotniku je majhna kopija celote in zato je sebi podoben. Trikotnik Sierpinskega je sestavljen iz manjših trikotnikov, ki so kopije celote in zato je strogo sebi podoben.

Vprašajmo se še, ali je Kochova krivulja sebi podobna, oz. strogo sebi podobna.

Kochova krivulja je sebi podobna, ker vsebuje majhne kopije celote. Prav tako je tudi strogo sebi podobna, ker jo lahko razdelimo na več kosov in vsak kos je majhna kopija celote.

Kochova snežinka ni sebi podobna, ker majhni kosi niso kopije celotne snežinke.

Poglejmo še, kakšne lastnosti ima končno drevo. Je sebi podobno, ker vsebuje kopije celotnega drevesa. Ni pa strogo sebi podobno, ker deblo ni kopija celotnega drevesa.

Sedaj pa pogledajmo, kako sebi podobnost vpliva na dimenzijo.

Sebi podobnost je odločilnega pomena za intuitivno razlago dimenzije fraktalov.

Enotski interval $[0, 1]$ je zgled enodimenzionalnega objekta in je sebi podoben.

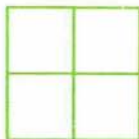
Ta interval razdelimo na N enakih kosov in tako ima vsak od njih dolžino $r = \frac{1}{N}$. Od tod sledi $Nr^1 = 1$.

Podobno je pri dvodimenzionalnem objektu, na primer pri kvadratu s stranico dolžine 1. Razdelimo ga na N sebi podobnih majhnih kvadratov, ki imajo stranice z dolžino $r = \frac{1}{\sqrt{N}}$. Od tod dobimo $Nr^2 = 1$.

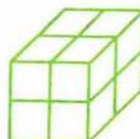
Zgled za sebi podoben tridimenzionalni objekt je kocka s stranico dolžine 1. Lahko jo razdelimo na N majhnih enakih kock. Dolžina stranice majhne kocke je $r = \frac{1}{\sqrt[3]{N}}$. Od tod izhaja $Nr^3 = 1$.



Slika 1.



Slika 2.



Slika 3.

V vseh treh primerih se eksponent števila r ujema z dimenzijo objekta.

V splošnem se enačba glasi $Nr^D = 1$. Iz nje izračunamo z logaritmiranjem eksponent D in ga imenujemo dimenzija ali razsežnost sebi podobnega objekta.

$$\log Nr^D = \log 1$$

$$\log N + D \log r = 0$$

$$D \log r = -\log N$$

$$D = -\frac{\log N}{\log r}$$

$$D = \frac{\log N}{\log(r^{-1})}$$

Pri nekaterih objektih se zgodi, da tako izračunana dimenzija D ni celo število. Tak objekt imenujemo fraktal.

Sedaj pa poskusimo izračunati dimenzijo Kochove krivulje. Vsak kos v kateremkoli konstrukcijskem koraku Kochove krivulje (glej članek Poglejmo fraktale) se razdeli na 4 dele z dolžino $\frac{1}{3}$ prejšnjega dela. Zato je dimenzija D po prejšnji formuli enaka:

$$D = \frac{\log 4}{\log(\frac{1}{3})^{-1}} = \frac{\log 4}{\log 3} = 1,26\dots$$

Dimenzija je necelo število, ki je večje od 1 in manjše od 2. To število pove marsikaj o lastnostih Kochove krivulje. Krivulja bolj napolni prostor v ravnini kot enotski interval z dimenzijo 1, vendar pa manj kot ravninski lik z dimenzijo 2.

Poglejmo še dimenzijo trikotika Sierpinskega. Trikotnikove stranice dolžine 1 smo razpolovili, jih povezali in srednji trikotnik izrezali. Postopek smo nadaljevali na ostalih treh trikotnikih. Na vsakem koraku ima stranica trikotnika dolžino $\frac{1}{2}$ dolžine prejšnje stranice trikotnika in od vsakega trikotnika ostanejo trije manjši.

$$\text{Dimenzija } D = \frac{\log 3}{\log(\frac{1}{2})^{-1}} = \frac{\log 3}{\log 2} = 1,58 \dots$$

Dimenzija leži med 1 in 2, kar nam marsikaj pove o lastnostih trikotnika Sierpinskega. Ker smo začetnemu enakostraničnemu trikotniku izrezali mnogo manjših trikotnikov, je zelo preluknjan. Ta dimenzija je manjša od dimenzije običajnega trikotnika, ki je enaka 2.

Preprogo Sierpinskega dobimo iz kvadrata s stranico dolžine 1. Stranice tretjinimo, jih povežemo in srednji manjši kvadrat izrežemo. Na osmih robnih manjših kvadratih postopek nadaljujemo. Na vsakem konstrukcijskem koraku ima stranica kvadrata dolžino $\frac{1}{3}$ dolžine prejšnje stranice kvadrata in od vsakega kvadrata nam ostane osem manjših.

$$\text{Dimenzija } D = \frac{\log 8}{\log 3} = 1,89 \dots$$

Če primerjamo dimenzijo trikotnika Sierpinskega in preprogo Sierpinskega, vidimo, da je trikotnik z $D = 1,58 \dots$ precej bolj preluknjan kot kvadrat z $D = 1,89 \dots$.

Vrnimo se še enkrat h Kochovi krivulji in njeni dimenziji. Nekatere podobnosti s Kochovo krivuljo najdemo na zemljevidih, če opazujemo morske obale. S pomočjo fraktalov lahko dobro ocenimo dimenzijo morskih obal. Ocene mnogo povedo o razgibanosti obale.

Kot zanimivost bomo navedli dimenzijo Brownovih morskih obal in pokrajin. Brownove funkcije so nastale z računalniško simulacijo in so dobri modeli za morske obale in pokrajine.

Slika 4 prikazuje obalo z dimenzijo $D = 1,3$, ki je precej realna in spominja na Afriko ali Južno Ameriko.



Slika 4. Model obale dimenzije $D = 1,300$.

Če dimenzija D narašča k vrednosti $\frac{3}{2}$, dobimo nekaj podobnega sliki 5. Obala je precej razgibana, kljub temu lahko v atlasu najdemo podobnosti.



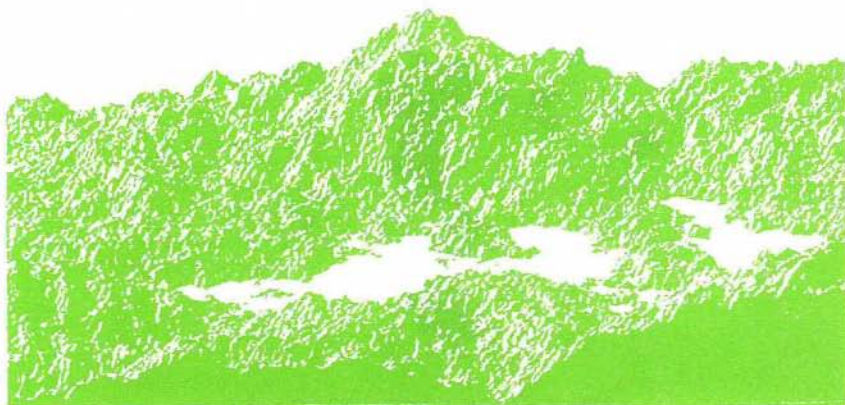
Slika 5. Model obale dimenzije $D \approx \frac{3}{2}$.

Dimenzija D lahko narašča k vrednosti 2 in slika 6 ustreza tej dimenziji. Zemljevid je precej kompliciran, spominja na Finsko.



Slika 6. Model obale z dimenzijo D blizu 2.

Na zadnji sliki 7 je primer Brownovega reliefa dimenzije $D = 2,1$, ki je model pokrajine. Dimenzija zelo razgibane pokrajine se približuje vrednosti 3.



Slika 7. Model pokrajine.

Leila Marek-Crnjac

15. MEDNARODNO MATEMATIČNO TEKMOVANJE MEST – POMLADANSKI KROG

Minile so zimske počitnice in 32 srednješolcev se je 8. marca zbralo na pomladanskem krogu tekmovanja mest. Kot običajno so se dijaki prvih in drugih letnikov spoprijeli z nalogami za prvo skupino, ostali pa z nalogami za drugo skupino. V prvem delu so reševali naslednje naloge:

Prva skupina

1. Konstruiraj konveksni štirikotnik, če poznaš dolžine stranic in dolžino zveznice središč diagonal.
2. Letne šole se udeležuje 60 učencev. Med poljubnimi desetimi so vsaj trije, ki stanujejo v istem bloku. Dokaži, da vsaj 15 učencev stanuje v istem bloku.
3. Naj bo O točka v notranjosti konveksnega večkotnika $A_1A_2 \dots A_n$, da velja

$$\sphericalangle OA_1A_n \leq \sphericalangle OA_1A_2,$$

$$\sphericalangle OA_2A_1 \leq \sphericalangle OA_2A_3,$$

$$\vdots$$

$$\sphericalangle OA_{n-1}A_{n-2} \leq \sphericalangle OA_{n-1}A_n,$$

$$\sphericalangle OA_nA_{n-1} \leq \sphericalangle OA_nA_1$$

in so vsi ti koti ostri. Dokaži, da je O središče večkotniku včrtane krožnice.

4. Deset kovancev postavimo na krožnico, da se vsak dotika obeh sosednjih in da imajo vsi vidno številko. Dovoljeni sta naslednji potezi:
 - obrnemo štiri zaporedne kovance;
 - obrnemo štiri kovance, ki so postavljeni kot $\times \times \odot \times \times$ (kovance, označene z $\times$, obrnemo, kovanec $\odot$ pa pustimo).

Ali je mogoče po končnem številu potez doseči, da noben kovanec nima vidne številke?

Druga skupina

1. Krožnici včrtamo trikotnik ABC . Naj bo točka A_1 diametralno nasproti A , A_0 središče stranice BC in A_2 simetrična točka k A_1 glede na A_0 . Analogno konstruiramo točki B_2 in C_2 . Dokaži, da točke A_2 , B_2 in C_2 sovpadajo.

2. Zaporedje pozitivnih celih števil $a_1, a_2, \dots$ je tako, da ima kvadratna enačba $a_{n+2}x^2 + a_{n+1}x + a_n = 0$ za vsak $n = 1, 2, \dots$ realen koren. Ali ima lahko to zaporedje:
 - (a) 10 členov,
 - (b) neskončno mnogo členov?
3. Čokolada ima pet zarez po dolžini in osem po širini, tako da jo lahko razdelimo na pasove (oziroma na skupaj $9 \cdot 6 = 54$ kvadratkov). Igralca igrata naslednjo igro: igralec na potezi odlomi pas širine enega kvadrata vzdolž ene zareze in ga poje, nato za njim enako napravi drugi igralec s preostankom čokolade... (Igralca se izmenjujeta v potezah.) Ko eden od igralcev razlomi pas širine dveh kvadratkov na dva pasova širine enega kvadrata, pojesta vsak po en pas. Dokaži, da lahko igralec, ki igro začne, igra tako, da poje vsaj 6 kvadratkov več kot njegov soigralec (ne glede na to, kako soigralec igra).
4. Isto kot 4. naloga za prvo skupino.

Še zadnjič v tem šolskem letu so se tekmovalci zbrali 10. marca, ko so reševali naloge v drugem delu tekmovanja. Tudi tokrat objavljamo le po dve nalogi za vsako skupino.

Prva skupina

1. Krožnici se sekata v točkah A in B . Tangenti na krožnici skozi A sekata krožnici v točkah M in N . Premici skozi B in M ter B in N sekata krožnici v točkah P oziroma Q . Dokaži: $\overline{MP} = \overline{NQ}$.
2. Vsak od 450 članov parlamenta je oklofutal natanko enega od soparlamentarcev. Dokaži, da lahko izberejo 150-člansko komisijo, v kateri nihče ni oklofutal nobenega od članov komisije.

Druga skupina

1. Poišči največje celo število M , katerega zadnja števka ni ničla (v desetiškem zapisu), tako da celo število, ki ga dobimo, če v M zberemo eno od njegovih števk (vendar ne prve), deli M .
2. Dan je konveksni štirikotnik $ABCD$. Po dve nasproti ležeči stranici podaljšamo, da se sekata: AB in CD v točki P , BC in AD v točki Q . Naj bo K presečišče simetral zunanjih kotov štirikotnika pri A in C , L presečišče simetral zunanjih kotov pri B in D ter M presečišče simetral zunanjih kotov pri P in Q (simetrala zunanjega kota pri X je premica, ki gre skozi X in je pravokotna na simetralo notranjega kota pri X). Dokaži, da ležijo točke K , L in M na isti premici.

NOVE KNJIGE

Po tekmovanju pošlje tekmovalna komisija najboljše izdelke v pregled glavnim organizatorjem v Moskvo. Tako so Bojan GORNIK, Marko KRAJNC in Mitja MASTNAK prejeli diplome za uspešno reševanje nalog na 14. mednarodnem matematičnem tekmovanju mest.

Matjaž Željko

PRI NASTAJANJU PRESEKA POMAGAJO S PROGRAMSKO OPREMO PODJETJA: MARAND, MARMIS IN SKUPINA ATLANTIS.

Marnell, G. R.: ŠTEVILSKKE KRIŽANKE, prevod D. Felda, M. Željko, Komisija za popularizacijo matematike v srednji šoli, Društvo matematikov, fizikov in astronomov Slovenije, Ljubljana 1994, 126 str.

Knjižica je izšla konec aprila in prinaša petdeset celostranskih številskih križank; vsaka vsebuje po petdeset, šestdeset gesel.

Eno od križank smo objavili v peti številki lanskega letnika Preseka. Tisti, ki ste jo reševali, torej poznate trdost orehov, ki jih je v tej knjigi treba streti.

Križanke so predstavljene z za križanke običajno mrežo, njihova posebnost je, da so odgovori števila. Za reševanje ne potrebujete kakega posebnega matematičnega znanja. Šlo bo z nekaj aritmetike in predvsem logike, saj mnoga gesla sama po sebi ne določajo rešitve natanko, ampak dopuščajo več možnosti, in šele v povezavi z drugimi gesli po več ali manj korakih lahko ugotovimo, katera je prava.

Dela in zabave prinaša knjižica torej za vse počitnice. Posebej imenitno je, da ne potrebujete za reševanje ne leksikonov ne priročnikov, na morje ali k stari mami vzamete le knjižico in svojo pamet. Za najhujšo silo je v knjižici celo slovarček izrazov, uporabljenih v križankah (vsega le 17), in tabele potrebni kvadratov, kubov, četrtih potenc in praštevil.

Knjižica je lahko imenitno darilo za domače in prijatelje vseh starosti, da le imajo v sebi ugankarsko žilico; lahko tudi prijazna nagrada učencem za šolski uspeh.

Dobite jo pri Komisiji za tisk DMFAS, Ljubljana, Jadranska 19. Društvena cena in cena za šole je slabega pol tisočaka. Petdeset križank po deset tolarjev - pa vsaka za ves dan!

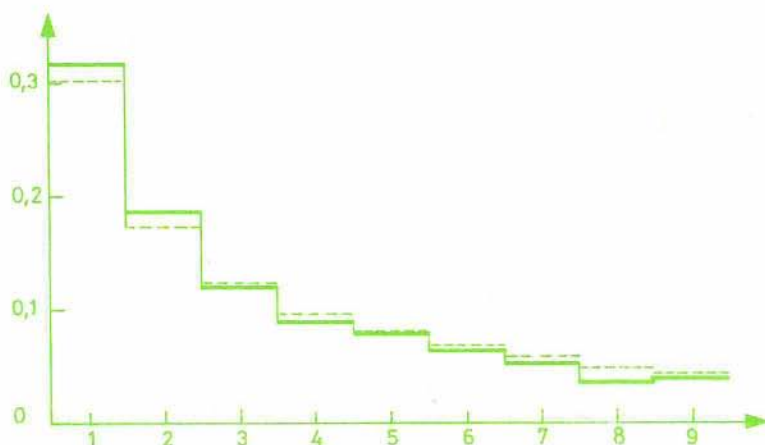
Marija Vencelj

O ZAČETNIH ŠTEVKAH V NIZIH ŠTEVIL

Vzemite v roke telefonski imenik in upoštevajte prvih tisoč naročnikov, pri katerih je v naslovu navedena hišna številka. Tako dobite na primer na prvih šestih straneh in delu prvega stolpca na naslednji na začetku imenika za Ljubljano (od strani 5 do prvega stolpca na strani 11) tisoč hišnih števil, to je števil. Koliko od njih se začneja s števk (cifro) 1? Koliko se jih začneja z 2 in tako po vrsti s 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9? Pri tem se ne oziramo na to, ali ima število eno, dve ali tri mesta, ampak se zanimamo samo za prvo števko. Ali je vsaka od devetih števk na prvem mestu zastopana približno enakokrat, to je $1000/9 = 111$ -krat? Ne, nikakor ne, kakor kažeta preglednica in diagram (slika 1).

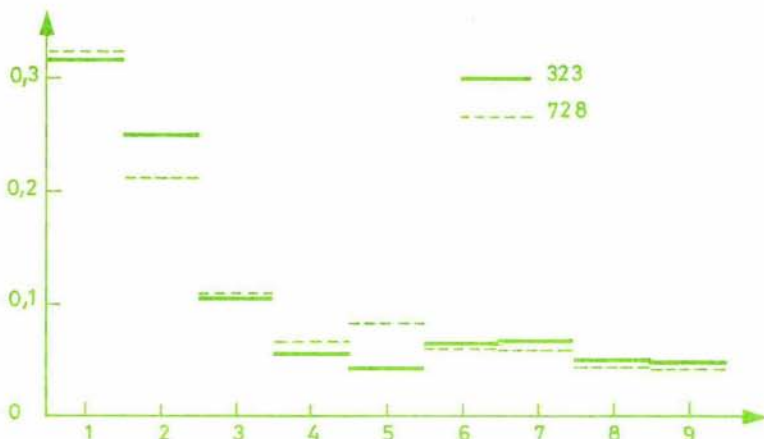
	1	2	3	4	5	6	7	8	9
	325	189	121	88	79	64	54	38	42
	0,325	0,189	0,121	0,088	0,079	0,064	0,054	0,038	0,042
P_n	0,301	0,176	0,125	0,097	0,079	0,067	0,058	0,051	0,046

V prvi vrstici so navedene številke in v drugi pogostnost, s katero se pojavljajo na prvem mestu. Tretja vrstica vsebuje relativno pogostnost ali delež, ki ga dobimo, ko pogostnost delimo s celotnim številom. V našem primeru je to 1000, tako da deleža ni težko izračunati.



Slika 1. Delež hišnih števil, ki se začneja s števki od 1 do 9, za prvih tisoč telefonskih naročnikov v Ljubljani (sklenjene črte) in napovedi Benfordovega zakona (črtkane črte).

Največkrat je na prvem mestu številka 1, sledijo ji po vrsti 2, 3 in tako dalje. Devetica je v našem primeru na prvem mestu sicer pogostejše kot osmica, a to je posledica razmeroma majhnega celotnega števila. Opazimo namreč, kako se postopno kaže urejenost, ko upoštevamo več in več števil (slika 2).



Slika 2. Delež hišnih števil, ki se začnejo s številkami od 1 do 9, za prvih 323 (prve tri strani) telefonskih naročnikov v Ljubljani (sklenjene črte) in za prvih 728 (prvih pet strani) telefonskih naročnikov (črtkane črte). Pri manjšem številu zajetih števil so odstopanja večja.

Ugotovitev, o kateri poročamo ima zanimivo zgodovino. Simon Newcomb (1835 do 1909), profesor matematike in astronomije, je veliko dela vložil v izdelavo novih in natančnejših tablic za gibanje planetov in Lune. Pri svojem računanju je opazil, kot že drugi pred njim, da so knjige z logaritmi bolj izdelane na začetku. Za logaritme ni mogoče reči, da so jih bralci začeli brati, pa nad njim obupali kakor nad slabim romanom. Zato je Newcomb leta 1881 pojav poskušal okvirno pojasniti.

Temeljiteje se je ukvarjal z vprašanjem fizik Frank Benford pri ameriški družbi General Electric. Leta 1938 je objavil članek z naslovom *Zakon anomalnih števil*. Po Benfordovem zakonu se delež števil, ki se začnejo s številko n , z naraščajočim številom preiskanih podatkov bliža

$$P_n = \log \frac{n+1}{n}, \quad n = 1, 2, \dots, 9.$$

Po tej enačbi izračunane deleže navaja zadnja vrstica preglednice.

Benford je raziskal prve številke v dvajsetih nizih podatkov, med njimi površine porečja 335 rek, relativne atomske mase tisoč kemijskih spojin, hišne številke 342 znamenitih Američanov. V celoti je obdelal več kot 20 tisoč podatkov. V njih se je enica pojavila z največjim deležem 0,306, ... devetica pa z najmanjšim deležem 0,047, kar se dobro ujema z zakonom. Od posamičnih nizov so se nekateri zakonu bolje prilagali, drugi slabše. Med zadnjimi so bili na primer kvadratni koreni naravnih števil. Mednje sodijo tudi telefonske številke iz našega telefonskega imenika, saj se ljubljanske številke sploh ne začnejo s 6, 7, 8, 9. Benford je sodil, da velja njegov zakon za števila, ki jih dobimo pri merjenju kake količine, na primer določene snovne lastnosti za različne snovi, če izida ne moremo napovedati. Zato je govoril o *anomalnih številih*.

V fiziki poznamo več podobnih zakonov. Logaritem razmerja med vpadnim svetlobnim tokom in tokom, ki ga prepušča plast enakomerno absorbirajoče snovi, je sorazmeren z debelino plasti. Logaritem razmerja začetnega števila atomskih jeder in števila atomskih jeder, ki preostane pri radioaktivnem razpadanju po določenem času, je sorazmeren s časom. V fiziologiji velja za odziv čutil Weber-Fechnerjev zakon, po katerem je odziv sorazmeren z logaritmom dražljaja, na primer izdatnost občutka zvoka, to je glasnost, je sorazmerna z logaritmom jakosti zvoka. Navadno mislimo na inverzno odvisnost in govorimo o eksponentnem zakonu. Tak zakon velja tudi v biologiji za število bitij določene vrste pri neomejeni rasti.

Leta 1991 sta J.Burke in E.Kincanon preskusila Benfordov zakon na osnovnih fizikalnih konstantah in poročala o tem v *American Journal of Physics*. Izbrala sta dvajset konstant od atomske enote mase preko Avogadrovega števila do mase protona in hitrosti svetlobe. Za tako maloštevilčen niz ne pričakujemo dobrega ujemanja z zakonom. Zares ni konstante, ki bi se začela s 4 ali 7, a začuda se jih z 1 začneja 8, z 9 pa samo 2. Skoraj vse konstante imajo enoto, kar pomeni, da je njihovo mersko število odvisno od uporabljenih osnovnih enot. Običajno jih navedemo v mednarodnem sistemu enot, a Burke in Kincanon sta jih za primerjavo navedla tudi z angleškimi osnovnimi enotami in nista dobila nič slabšega ujemanja.

Zares pričakujemo, da ugotovljena lastnost obsežnega niza podatkov ni odvisna od izbire enote, če gre za izide merjenja kake fizikalne količine. Hitro uvidimo, da Benfordov zakon obvelja, če pomnožimo vsa števila danega niza z izbranim številom. To je napeljalo nekatere na misel, da je zakon povezan s kaosom in fraktali, za katere vemo, da so samopodobni in neobčutljivi na merilo.

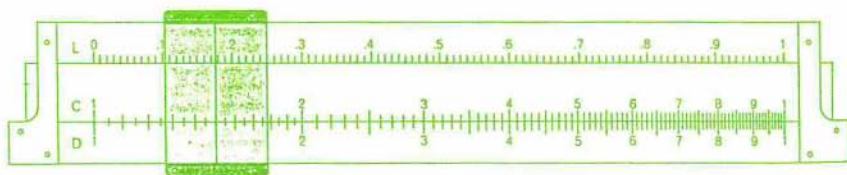
Leta 1993 so B.Buck, A.C.Merchant in S.M.Perez v *European Journal of Physics* poročali o svojem delu z razpolovnimi časi atomskih jeder, ki razpadajo z radioaktivnim razpadom α . Pri takem razpadu izstrelijo jedro delec α , to je jedro helijevega atoma, in se spremeni v jedro elementa, ki pride v periodni preglednici na vrsto dve mesti prej. V razpolovnem času razpade polovica začetnega števila jeder. Razpolovni časi segajo od majhnih delov sekunde do milijard let. Trije fiziki so raziskovali podrobnosti radioaktivnega razpada in poskušali pojasniti izmerjene razpolovne čase s teorijo. Porazdelitev podatkov po prvih številkah je bil samo stranski proizvod tega raziskovanja. Ugotovili so, da so se izmerjeni razpolovni časi za 477 jeder dobro prilegali Benfordovemu zakonu: delež 1 je bil 0,296, ... delež 9 pa 0,052. Podobno so ugotovili za te razpolovne čase, ki jih napove teorija: delež 1 je bil 0,310, ... delež 9 pa 0,044. Pri nizu, ki vsebuje le 477 podatkov, moramo biti pripravljeni tudi na nekaj odstopanja.

Doslej smo poročali o tem, kaj ugotovimo, če se zanimamo za začetne številke v nizih števil. Ali je ugotovitev mogoče pojasniti? Mnenja o tem niso enotna.

S.Newcomb je izhajal iz dejstva, da lahko vsako pozitivno število a zapišemo v obliki 10^s z realnim številom $s = \log a$, če mislimo na logaritme z osnovo 10. Tisti, ki so še računali z logaritmi, se spominjajo, da celi del s določa lego decimalne vejice v številu a , število samo, ne glede na vejico, in s tem tudi njegovo prvo številko, pa določa del s za vejico. Newcombu se je zdelo samo ob sebi umljivo, da je neceli del s enakomerno porazdeljen na intervalu $[0,1)$. Tako bi že on lahko odkril Benfordov zakon.

Tudi Benford je mislil, da gre za zakon narave, ki ga ni treba podrobno pojasnjevati. Po njegovem mnenju "narava šteje" na primer takole $1, 1 \cdot 2 = 2, 2 \cdot 2 = 4, 4 \cdot 2 = 8, 8 \cdot 2 = 16, \dots$ V tem primeru so deleži števil, ki se začnejo s posamičnimi številkami, sorazmerni z dolžino, ki ustreza tej številki na logaritmčnem računalu (slika 3). Pred tremi desetletji so z njimi računali študenti, dokler jih niso izpodrinila žepna računalna.

Leta 1944 sta fizika S.A.Goudsmit in W.H.Furry ugovarjala, da gre zgolj za posledico našega pisanja števil. To sta W.H.Furry in matematik H.Hurwitz poskusila naslednje leto v isti reviji dodatno utemeljiti. Namesto Benfordovega zakona bi dobili $P_n = \log_A[(n+1)/n]$, $n < A$, če bi pisali števila v številskem sistemu z osnovo A , ne v desetiškem. Pri tem pomeni $\log_A$ logaritem z osnovo A .



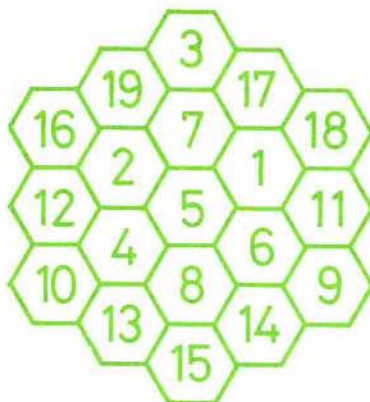
Slika 3. Na logaritmičnem računalu ustrezajo dolžine deležem začetnih števil; delež podatkov z 2 na prvem mestu in delež podatkov z 1 na prvem mestu sta v enakem razmerju kot daljica med 3 in 2 in daljica med 2 in 1 na skali C ali D.

B.J.Flehingerjeva je leta 1966 v reviji *American Mathematical Monthly* izhajala od deleža številke n na prvem mestu v nizu naravnih števil $n < N$. Delež številke 1 se na primer spreminja z N , povprečje, povprečje povprečja ... se za $N \rightarrow \infty$ bližajo $\log 2$. V isti reviji je leta 1969 R.A.Raimi raziskal pogoje, pri katerih dobimo Benfordov zakon, in je pri tem vključil neodvisnost od merila. Razprava, ki smo jo nakazali, je zahtevna. Zato se je najbolje omejiti na to, da ugotavljamo, kako dobro velja za določen niz podatkov Benfordov "zakon", in se ne ukvarjati s težavami.

Janez Strnad

NAGRADNA NALOGA - MAGIČNI ŠESTKOTNIK - Rešitev s str. 193

Na desni vidimo magični šestkotnik, katerega iskanje je zaposlovalo Cliforda Adamsa več kot pol stoletja. Našim reševalcem je šlo delo hitreje od rok. Resnici na ljubo povejmo, da smo, računajoč na računalnikarje, pričakovali bogatejšo bero. Vendar nam je rešitve poslalo vsega sedem reševalcev. Med njimi je žreb izbral Draga Bokala iz Srednje vasi pri Polhovem Gradcu in Andreja Zalarja iz Šentjurja.



Obema smo nagradno knjigo Keitha Devlina *Nova zlata doba matematike* že poslali po pošti. Rešitve so nam poslali še: Matej Mencinger z Raven

REŠITVE NALOG

na Koroškem, Andrej Jakobčič in Uroš Jovanovič iz Novega mesta, Matjaž Košak iz Dolenjega Maharovca pri Šentjerneju ter Peter Movrin iz Ljubljane.

Drago in oba Andreja so tudi priložili programe, s katerimi so nalogo rešili. Zanimivo – vsak v svojem jeziku: eden v pascalu, drugi v prologu, tretji v programskem jeziku C.

Zadržimo se še nekoliko pri magičnih šestkotnikih. V Adamsovi zgodbi smo izvedeli, da je menda magični šestkotnik reda 3 edini netrivialni magični šestkotnik, ki sploh obstaja. Poglejmo, zakaj je to res!

Naj bo n red magičnega šestkotnika, to je število števil, razvrščenih ob eni njegovi stranici. Vseh polj v šestkotniku je:

$$N = 2[n + (n + 1) + \dots + (2n - 2)] + (2n - 1) = 3n^2 - 3n + 1$$

in je torej vsota vseh števil v šestkotniku enaka:

$$S = 1 + 2 + \dots + N = \frac{1}{2}(3n^2 - 3n + 1)(3n^2 - 3n + 2).$$

Vseh magičnih vsot je $3(2n - 1)$, toliko kot stranicam vzporednih vrstic. Ker nastopa v vsotah vsako število trikrat kot seštevanelec, je vrednost magične vsote enaka $\frac{S}{2n - 1}$. Magična vsota je vsota naravnih števil, torej naravno število. Naravno število n mora tedaj izpolnjevati pogoj:

$$\frac{(3n^2 - 3n + 1)(3n^2 - 3n + 2)}{2(2n - 1)} \in \mathbb{N}.$$

Ker je števec v zgornjem ulomku kot produkt dveh zaporednih števil sodo število, $2n - 1$ pa je liho število, je ta pogoj ekvivalenten pogoju

$$\begin{aligned} & \frac{16(3n^2 - 3n + 1)(3n^2 - 3n + 2)}{2n - 1} = \\ & = \frac{[(2n - 1)(6n - 3) + 1] \cdot [(2n - 1)(6n - 3) + 5]}{2n - 1} \in \mathbb{N}, \end{aligned}$$

kar pomeni

$$\frac{5}{2n - 1} \in \mathbb{N}.$$

Ta pogoj pa izpolnjujeta le naravni števili 1 in 3. Prvo daje trivialni, drugo Adamsov magični šestkotnik.

Marija Vencelj

CASUS IRREDUCIBILIS

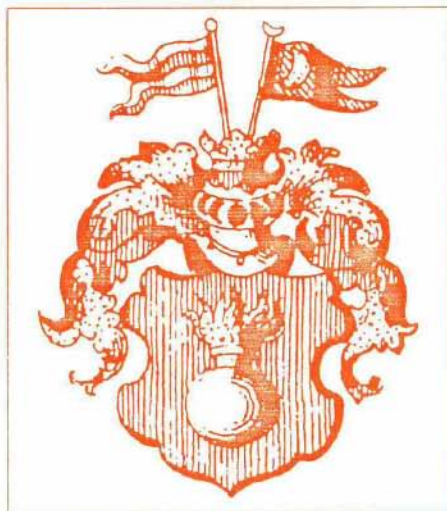
Ob 240. obletnici rojstva Jurija Vege

V gričevju, ki spremlja levi breg Save na vijugasti poti od Ljubljane do Litije, leži Zagorica. Pred 240 leti, natančneje 23. marca 1754, se je v Zagorici revnim staršem rodil slovenski matematik Jurij Vega. Rojen je bil v vznemirljivih časih vladanja Marije Terezije, odraščal v obdobju reform njenega sina Jožefa II., kot častnik avstrijske vojske pa je na bojišču doživel začetek konca turškega imperija v bojih za Beligrad ter posledice francoske revolucije v številnih bitkah zoper Francoze ob Renu, da vojne s Prusi niti ne omenjamo.

Vegovo matematično delo poznamo predvsem po zbirki logaritmovnikov, s katerimi je zaslovel po vsem svetu in so jih uporabljali še dolgo po njegovi smrti. Manj znane, vendar nič manj zanimive, so njegove znanstvene razprave. Najpomembnejša je gotovo tista, v kateri je izračunal 140 decimalk števila π . Z njo je več kot pol stoletja držal "rekord" pri računanju decimalk te najznamenitejše matematične konstante.

Vega je za svoje delo dobival številna priznanja. Za državo, oziroma cesarja, je bil najpomembnejši njegov dosežek na področju balistike, ko je konstruiral izvrsten možnar. Leta 1800, le dve leti pred smrtjo, je bil povzdignjen v barona. Jurij Vega je bil eden redkih Slovencev, ki se je dokopal do družinskega grba. Prav gotovo pa je bil edini, ki si je grb zaslužil s svojim delom in ga ni pridobil zaradi bogastva in moči: na grbu je naslikana prižgana bomba (slika 1).

Vega si je po končanem šolanju v Ljubljani, kjer sta bila z Linhartom sošolca, v resnici služil kruh tako kot večina matematikov vseh časov: s poučevanjem. Učil je na topniški šoli na Dunaju. Svoja predavanja je izdal v obliki učbenika *Vorlesungen über die Mathematik* (Predavanja o matematiki). S tem se je postavil na čelo vrsti izvrstnih slovenskih piscev matematičnih učbenikov. Dokler smo bili Slovenci še vključeni v Avstro-Ogrsko, je bilo razumljivo, da so učbenike Vega, Močnika, Hočevarja in Zupančiča tiskali v nemščini in prevajali v druge jezike. Kasneje je tudi Plemelj izdal monografijo v angleščini, vendar je postalo jasno, da je iz male države mnogo težje prodreti na svetovni trg. Tako smo pravzaprav v paradoksalnem položaju. Slovenski matematiki dandanes mnogo lažje izdajamo v tujini svoje znanstvene spise kakor pa učbenike.



Slika 1. Vegov grb

Vsakomur mora biti jasno, da so učbeniki izpred dvesto let zastareli. Kljub temu pa je vredno pogledati, kaj je Vega pisal v svojih *Vorlesungen über die Mathematik*. Naša matematična nprav nam narekuje, da se spomnimo tega velikana na način, ki matematikom najboljše pristoji. Poskusimo podoživeti nekaj razmislekov, ki jih je Vega prelil na strani svojega učbenika.

Oglejmo si dodatek druge knjige, ki nosi naslov: *Analytische Darstellung der Sinus für jeden dritten Grad von 0 bis 90°* (Analitična predstavitev sinusa za vsako tretjo stopinjo od 0° do 90°). Gre za razpredelnico vrednosti $\sin \alpha$, za kote $\alpha = 0^\circ, 3^\circ, 6^\circ, \dots, 90^\circ$ (tabela 1).

Matematik pa si ob tej razpredelnici ne hote zastavi več vprašanj. Nekatera med njimi utegnejo zanimati tudi bralce Preseka:

- Zakaj so sinusi privilegirani? Zakaj ni še razpredelnic za tangense in kotangense?
- Zakaj niso koreni v razpredelnici izračunani, ampak so puščeni v "analitični obliki"?
- Zakaj je korak v razpredelnici ravno 3° in ne morda $1^\circ, 2^\circ, 4^\circ$ ali 5° ?
- Kako si lahko sami izračunamo takšno razpredelnico, če bi jo potrebovali?
- Ali je razpredelnica v dobi računalnikov zastarela, odveč?

Preden odgovorimo na zastavljena vprašanja, le bežno ponovimo definicije trigonometrijskih funkcij (sinus, kosinus, tangens, kotangens, sekans in kosekans) za ostre kote, torej za kote v pravokotnem trikotniku.

Za pravokotni trikotnik s katetama a , b , hipotenuzo c , kotom α nasproti a in kotom $90^\circ - \alpha$ nasproti b definiramo:

$$\begin{aligned}\sin \alpha &:= \frac{a}{c}, \quad \tan \alpha := \frac{a}{b}, \quad \sec \alpha := \frac{c}{a}; \\ \cos \alpha &:= \frac{b}{c}, \quad \cot \alpha := \frac{b}{a}, \quad \csc \alpha := \frac{c}{b}.\end{aligned}$$

Vse trigonometrijske funkcije je mogoče izraziti samo s sinusom:

$$\begin{aligned}\cos \alpha &= \sqrt{1 - \sin^2 \alpha} = \sin(90^\circ - \alpha), \\ \tan \alpha &= \frac{\sin \alpha}{\cos \alpha}, \quad \cot \alpha = \frac{1}{\tan \alpha}, \\ \sec \alpha &= \frac{1}{\cos \alpha}, \quad \csc \alpha = \frac{1}{\sin \alpha}.\end{aligned}$$

Zato je razumljivo, da lahko vrednosti drugih trigonometrijskih funkcij izračunamo s seštevanjem, odštevanjem, množenjem in deljenjem iz vrednosti sinusov. S tem smo odgovorili na prvo vprašanje.

No, natančnejši pogled na razpredelnico pokaže, da je uporabniku preglednice Vega pripravil vse potrebno za računanje sinusov. Na začetku stojijo naslednje iracionalne konstante:

$\sqrt{2}$	1,414213562373
$\sqrt{3}$	1,732050807569
$\sqrt{5}$	2,236067977500
$\sqrt{5 + \sqrt{5}}$	2,689994047856

Njegove konstante se potem nadaljujejo z

$$\sqrt{5 - \sqrt{5}}, \quad \sqrt{10 + 2\sqrt{5}} = \sqrt{2}\sqrt{5 + \sqrt{5}}, \text{ itd.}$$

Vse te pa je mogoče izračunati iz osnovnih štirih konstant s celimi števili in z elementarnimi računskimi operacijami.

Odgovor na drugo vprašanje je skoraj očitno. Vega je s preglednico omogočil, da si sami izračunamo tabelirane sinuse s poljubno natančnostjo. Za vse praktične račune seveda zadoščajo konstante, izračunane na 12 decimalnih mest.

Zakaj si je Vega izbral ravno korak 3° pri svoji razpredelnici? Ali gre za slučaj? Kako to, da je mogoče izraziti sinuse vseh teh kotov s koreni?

$$\begin{aligned}
\sin 3^\circ &= \cos 87^\circ = \frac{1}{8} \left[-\sqrt{\frac{3}{2}} - \sqrt{\frac{1}{2}} + \sqrt{\frac{5}{2}} + \sqrt{\frac{15}{2}} + \sqrt{5 + \sqrt{5}} - \sqrt{15 + 3\sqrt{5}} \right] \\
\sin 6^\circ &= \cos 84^\circ = \frac{1}{8} \left[-1 - \sqrt{5} + \sqrt{30 - 6\sqrt{5}} \right] \\
\sin 9^\circ &= \cos 81^\circ = \frac{1}{4} \left[\sqrt{\frac{1}{2}} + \sqrt{\frac{5}{2}} - \sqrt{5 - \sqrt{5}} \right] \\
\sin 12^\circ &= \cos 78^\circ = \frac{1}{8} \left[\sqrt{3} - \sqrt{15} + \sqrt{10 + 2\sqrt{5}} \right] \\
\sin 15^\circ &= \cos 75^\circ = \frac{1}{2} \left(\sqrt{\frac{3}{2}} - \sqrt{\frac{1}{2}} \right) \\
\sin 18^\circ &= \cos 72^\circ = \frac{1}{4} (-1 + \sqrt{5}) \\
\sin 21^\circ &= \cos 69^\circ = \frac{1}{8} \left[-\sqrt{\frac{3}{2}} + \sqrt{\frac{1}{2}} + \sqrt{\frac{5}{2}} - \sqrt{\frac{15}{2}} + \sqrt{15 - 3\sqrt{5}} + \sqrt{5 - \sqrt{5}} \right] \\
\sin 24^\circ &= \cos 66^\circ = \frac{1}{8} \left[\sqrt{3} + \sqrt{15} - \sqrt{10 - 2\sqrt{5}} \right] \\
\sin 27^\circ &= \cos 63^\circ = \frac{1}{4} \left[\sqrt{\frac{1}{2}} - \sqrt{\frac{5}{2}} + \sqrt{5 + \sqrt{5}} \right] \\
\sin 30^\circ &= \cos 60^\circ = \frac{1}{2} \\
\sin 33^\circ &= \cos 57^\circ = \frac{1}{8} \left[-\sqrt{\frac{3}{2}} - \sqrt{\frac{1}{2}} + \sqrt{\frac{5}{2}} + \sqrt{\frac{15}{2}} - \sqrt{5 + \sqrt{5}} + \sqrt{15 + 3\sqrt{5}} \right] \\
\sin 36^\circ &= \cos 54^\circ = \frac{1}{4} \left[\sqrt{10 - 2\sqrt{5}} \right] \\
\sin 39^\circ &= \cos 51^\circ = \frac{1}{8} \left[\sqrt{\frac{3}{2}} + \sqrt{\frac{1}{2}} + \sqrt{\frac{5}{2}} + \sqrt{\frac{15}{2}} - \sqrt{15 - 3\sqrt{5}} + \sqrt{5 - \sqrt{5}} \right] \\
\sin 42^\circ &= \cos 48^\circ = \frac{1}{8} \left[1 - \sqrt{5} + \sqrt{30 + 6\sqrt{5}} \right] \\
\sin 45^\circ &= \cos 45^\circ = \sqrt{\frac{1}{2}} \\
\sin 48^\circ &= \cos 42^\circ = \frac{1}{8} \left[-\sqrt{3} + \sqrt{15} + \sqrt{10 + 2\sqrt{5}} \right] \\
\sin 51^\circ &= \cos 39^\circ = \frac{1}{8} \left[\sqrt{\frac{3}{2}} - \sqrt{\frac{1}{2}} - \sqrt{\frac{5}{2}} + \sqrt{\frac{15}{2}} + \sqrt{15 - 3\sqrt{5}} + \sqrt{5 - \sqrt{5}} \right] \\
\sin 54^\circ &= \cos 36^\circ = \frac{1}{4} (1 + \sqrt{5}) \\
\sin 57^\circ &= \cos 33^\circ = \frac{1}{8} \left[\sqrt{\frac{3}{2}} - \sqrt{\frac{1}{2}} + \sqrt{\frac{5}{2}} - \sqrt{\frac{15}{2}} + \sqrt{5 + \sqrt{5}} + \sqrt{15 + 3\sqrt{5}} \right] \\
\sin 60^\circ &= \cos 30^\circ = \frac{1}{2} \sqrt{3} \\
\sin 63^\circ &= \cos 27^\circ = \frac{1}{4} \left[-\sqrt{\frac{1}{2}} + \sqrt{\frac{5}{2}} + \sqrt{5 + \sqrt{5}} \right] \\
\sin 66^\circ &= \cos 24^\circ = \frac{1}{8} \left[1 + \sqrt{5} + \sqrt{30 - 6\sqrt{5}} \right] \\
\sin 69^\circ &= \cos 21^\circ = \frac{1}{8} \left[\sqrt{\frac{3}{2}} + \sqrt{\frac{1}{2}} + \sqrt{\frac{5}{2}} + \sqrt{\frac{15}{2}} + \sqrt{15 - 3\sqrt{5}} - \sqrt{5 - \sqrt{5}} \right] \\
\sin 72^\circ &= \cos 18^\circ = \frac{1}{4} \left(\sqrt{10 + 2\sqrt{5}} \right) \\
\sin 75^\circ &= \cos 15^\circ = \frac{1}{2} \left(\sqrt{\frac{3}{2}} + \sqrt{\frac{1}{2}} \right) \\
\sin 78^\circ &= \cos 12^\circ = \frac{1}{8} \left[-1 + \sqrt{5} + \sqrt{30 + 6\sqrt{5}} \right] \\
\sin 81^\circ &= \cos 9^\circ = \frac{1}{4} \left[\sqrt{\frac{1}{2}} + \sqrt{\frac{5}{2}} + \sqrt{5 - \sqrt{5}} \right] \\
\sin 84^\circ &= \cos 6^\circ = \frac{1}{8} \left[\sqrt{3} + \sqrt{15} + \sqrt{10 - 2\sqrt{5}} \right] \\
\sin 87^\circ &= \cos 3^\circ = \frac{1}{8} \left[-\sqrt{\frac{3}{2}} + \sqrt{\frac{1}{2}} - \sqrt{\frac{5}{2}} + \sqrt{\frac{15}{2}} + \sqrt{5 + \sqrt{5}} + \sqrt{15 + 3\sqrt{5}} \right]
\end{aligned}$$

Tabela 1. Vegova razpredelnica sinusov. Vrstni red členov v izrazih je nekoliko spremenjen.

Ponovimo Vegov razmislek. Upoštevati moramo zvezi:

$$\sin(\alpha + \beta) = \sin \alpha \cos \beta + \cos \alpha \sin \beta$$

$$\sin(\alpha - \beta) = \sin \alpha \cos \beta - \cos \alpha \sin \beta,$$

ki ju spoznamo v srednji šoli pri pouku trigonometrije.

Od tod zlahka izpeljemo obrazce za sinuse dvojnih, trojnih in petkratnih kotov:

$$\sin 2\alpha = 2 \sin \alpha \cos \alpha, \quad \sin 3\alpha = 3 \sin \alpha - 4 \sin^3 \alpha,$$

$$\sin 5\alpha = 5 \sin \alpha - 20 \sin^3 \alpha + 16 \sin^5 \alpha.$$

Uporabili bomo še zvezi

$$\sin \frac{\alpha}{2} = \frac{1}{2} \sqrt{1 + \sin \alpha} - \frac{1}{2} \sqrt{1 - \sin \alpha}$$

in

$$\cos \alpha = \sqrt{1 - \sin^2 \alpha}$$

ter znano dejstvo, da sinus narašča, ko kot narašča od 0° do 90° . Iz izrojenega trikotnika dobimo:

$$\sin 0^\circ = 0, \quad \sin 90^\circ = 1.$$

Če znamo izračunati $\sin 3^\circ$, lahko z obrazcem za sinus vsote načeloma izračunamo sinuse vseh manjkajočih kotov. Izpeljava lahko poteka takole:

Ker je 30° tretjina 90° , označimo $x = \sin 30^\circ$ in iz zveze za sinus trojnega kota

$$\sin 90^\circ = \sin(3 \cdot 30^\circ) = 3 \sin 30^\circ - 4 \sin^3 30^\circ$$

dobimo enačbo

$$1 = 3x - 4x^3,$$

ki ima rešitve $x_1 = -1$, $x_{2,3} = \frac{1}{2}$. Ker je $0 < x = \sin 30^\circ < 1$, mora biti $\sin 30^\circ = \frac{1}{2}$. Isti trik lahko uporabimo pri računanju $y = \sin 18^\circ$. Razlika je le v tem, da izberemo obrazec za sinus petkratnega kota. Rešiti moramo enačbo

$$1 = 5y - 20y^3 + 16y^5.$$

Koren $y_1 = 1$ uganemo, potem pa dobimo enačbo 4. stopnje $16y^4 + 16y^3 - 4y^2 - 4y + 1 = 0$, ki je kvadrat kvadratne enačbe

$$(4y^2 + 2y - 1)^2 = 0.$$

Le-ta ima dve dvojni rešitvi: $y_{2,3} = -\frac{1}{4}(\sqrt{5} + 1)$, $y_{4,5} = \frac{1}{4}(\sqrt{5} - 1)$. Ker iščemo $\sin 18^\circ$ na intervalu $(0, \frac{1}{2})$, ustreza temu pogoju le ena dvojna rešitev. Tako imamo

$$\sin 18^\circ = \frac{1}{4}(\sqrt{5} - 1).$$

Iz obrazca za sinuse polovičnih kotov dobimo

$$\sin 15^\circ = \sin \frac{30^\circ}{2} = \frac{1}{2} \sqrt{1 + \sin 30^\circ} - \frac{1}{2} \sqrt{1 - \sin 30^\circ} = \frac{1}{2} \sqrt{\frac{3}{2}} - \frac{1}{2} \sqrt{\frac{1}{2}}.$$

Če uporabimo še obrazec za sinus razlike kotov za kota $\alpha = 18^\circ$ in $\beta = 15^\circ$, dobimo

$$\sin 3^\circ = \sin(18^\circ - 15^\circ) = \sin 18^\circ \cos 15^\circ - \cos 18^\circ \sin 15^\circ.$$

Pri tem dobimo manjkajoče vrednosti za kosinuse iz obrazca

$$\cos \alpha = \sqrt{1 - \sin^2 \alpha}.$$

Tako imamo

$$\cos 18^\circ = \sqrt{1 - \sin^2 18^\circ} = \frac{\sqrt{5 + \sqrt{5}}}{2\sqrt{2}}$$

in

$$\cos 15^\circ = \sqrt{1 - \sin^2 15^\circ} = \frac{\sqrt{2 + \sqrt{3}}}{2}.$$

Končni rezultat je torej

$$\sin 3^\circ = \frac{1}{8} \left((-1 + \sqrt{5})\sqrt{2 + \sqrt{3}} + (1 - \sqrt{3})\sqrt{5 + \sqrt{5}} \right).$$

Obliko je izbral računalniški sistem *Mathematica*. Z računalnikom smo preverili (bralec pa naj se o tem prepriča brez računalnika), da je vrednost enaka tisti, ki jo je zapisal Jurij Vega:

$$\sin 3^\circ = \frac{1}{8} \left(\sqrt{\frac{5}{2}} + \sqrt{\frac{15}{2}} + \sqrt{5 + \sqrt{5}} - \sqrt{15 + 3\sqrt{5}} - \sqrt{\frac{3}{2}} - \sqrt{\frac{1}{2}} \right).$$

Ko smo z Mathematico preračunavali sinuse, smo opazili, da je mogoče $\sqrt{2} + \sqrt{3}$ izraziti s $\sqrt{2}$ in $\sqrt{6}$. Ali lahko ugotovite, kako? Če tega niste storili že prej, zdaj brez težav pokažete enakost gornjih izrazov za $\sin 3^\circ$.

Računalnikarji pa si ob pogledu na Vegovo razpredelnico zastavimo naslednje vprašanje: Koliko časa bi porabili, da bi po navodilih iz tabele izračunali sinuse na n decimalnih mest? Zanima nas torej *časovna zahtevnost*. Ob tem moramo upoštevati nekaj predpostavk.

1. Računanje n decimalnega iracionalnega kvadratnega korena iz majhnega celega števila zahteva približno n^2 operacij.
2. Računanje n decimalnega produkta dveh iracionalnih števil zahteva približno n^2 operacij.
3. Računanje n decimalnega kvocienta dveh iracionalnih števil zahteva približno n^2 operacij. Pri tem mora biti deljenec znan na $2n$ decimal.
4. Računanje n decimalne vsote dveh iracionalnih števil zahteva približno n operacij.
5. Računanje n decimalne razlike dveh iracionalnih števil zahteva približno n operacij.
6. Razpolavljanje iracionalnega števila (prvih n decimal) zahteva približno n operacij.

Ob teh predpostavkah lahko ugotovimo, da je za računanje razpredelnice po Vegovi metodi potrebnih $16n^2 + 90n$ operacij: 16 zahtevnejših in 90 linearnih. Ker je $1/\sqrt{2} = \sqrt{2}/2$, bi lahko število konstant, ki jih je potrebno računati s kvadratnim algoritmom, zmanjšali na 15. Ni pa jasno, ali ni mogoče tega števila še zmanjšati. Zato lahko takoj zastavimo naslednje vprašanje:

Kolikšno je najmanjše število korenov (iracionalnih konstant), s katerimi lahko potem izrazimo vse sinuse samo s seštevanjem, odštevanjem in razpolavljanjem? (Namesto razpolavljanja bi lahko dopustili tudi deljenje s celimi števili.)

Zakaj torej Vega ni zapisal obrazca za računanje $\phi = \sin 1^\circ$ (in drugih sinusov)? ϕ je rešitev enačbe

$$a = 3x - 4x^3, \text{ kjer je } a = \sin 3^\circ.$$

Postopek za računanje decimalk te konstante so poznali že v petnajstem stoletju Arabci. Al-Kaši je približke za rešitev dobil takole:

$$\phi_0 := a,$$

$$\phi_1 := (a + 4\phi_0^3)/3,$$

$$\phi_2 := (a + 4\phi_1^3)/3,$$

in tako naprej. Torej dobimo $\phi_n (n = 1, 2, 3, \dots)$ rekurzivno

$$\phi_n := (a + 4\phi_{n-1}^3)/3.$$

Enačba tretje stopnje ima eksaktno rešitev. Poiščemo jo lahko s Cardanovim obrazcem. V konkretnem primeru lahko z Mathematico tudi poiščemo rešitve enačbe

$$4x^3 - 3x + \sin 3^\circ = 0.$$

Žal se rešitve enačbe izražajo s kompleksnimi korenimi. Ko jih poskusimo izraziti z realnimi operacijami, nam to uspe le tako, da prevedemo računanje na trigonometrijo. Privzeti moramo, da vemo, koliko je $\sin 1^\circ$. To pa je circulus vitiosus (začarani krog). V Vegovih časih matematiki še niso vedeli, da je ta konkretna enačba nerešljiva z realnimi korenimi. Kasneje so dokazali, da kubična enačba z racionalnimi koeficienti, ki ima tri realne rešitve in ni razcepna v racionalnih številih, nima rešitev, ki bi se jih dalo izraziti z realnimi korenimi. Tak primer kubične enačbe so poimenovali *casus irreducibilis* (primer, ki se ne dá poenostaviti). In prav enačba za $\sin 1^\circ$ je *casus irreducibilis*. To pa ima za Vegovo tabelo globoke posledice. Jasno je, da nobenega sinusa s celimi stopinjami, ki niso v tabeli, ni mogoče izračunati s korenimi. To pomeni, da je Vega izračunal vse, kar je mogoče izračunati. (No, lahko bi izračunali $\sin 1^\circ 30'$, vendar nas to ni zanimalo.)

Najlepše se zahvaljujem kolegu Marku Petkovšku za sodelovanje pri nastanku tega prispevka.

Tomaž Pisanski

POKLICI – Rešitev s str. 341

Naredimo razpredelnico, v kateri upoštevamo, da mora nekdo zaslužiti več kot Tomaž in da je število 3776 deljivo s 16 in ni deljivo s 3 ali s 7.

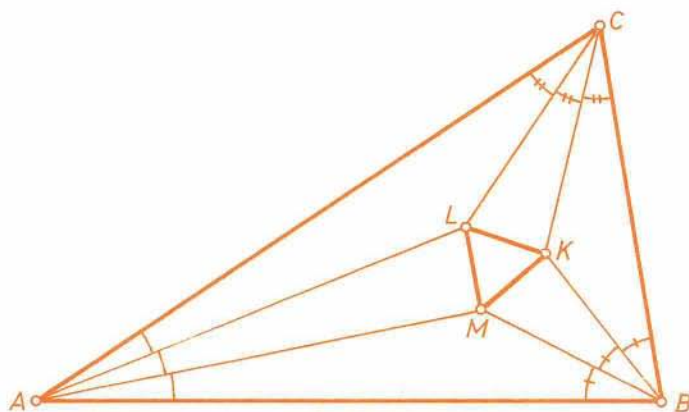
Odgovor je: Janez je vratar, Tomaž je poskuševalec, Simon je oskrbnik lešnikovih nasadov, Matej pa direktor.

Neža Mramor-Kosta

RAZŠIRITEV MORLEYEVEGA IZREKA

Kljub temu, da je trikotnik zelo preprost ravninski lik in da so ga proučevali že v antiki, je dolgo skrival nekatere lepe lastnosti. Mednje prav gotovo sodi osupljivo odkritje angleškega matematika Franka Morleya, ki se zdaj po njem imenuje

Morleyev izrek. *Razdelimo notranje kote poljubnega trikotnika ABC s poltraki na tri enake dele in tri presečišča načrtanih poltrakov označimo s K , L , M , kot kaže slika 1. Potem je trikotnik KLM enakostraničen.*



Slika 1.

Menda je vest o tem odkritju iz leta 1899 hitro obšla matematični svet. Čeprav do leta 1914 ni bil objavljen noben dokaz Morleyevega izreka, se to najbrž ni zgodilo zaradi težavnosti dokaza. Izrek namreč lahko potrdimo z izračunom dolžin stranic (Morleyevega) trikotnika KLM . S spretno uporabo lastnosti kotnih funkcij dobimo za dolžine vseh treh stranic isti izraz

$$d = 8r \sin \frac{1}{3}\alpha \sin \frac{1}{3}\beta \sin \frac{1}{3}\gamma, \quad (1)$$

v katerem so α , β , γ velikosti notranjih kotov trikotnika ABC , r pa polmer njemu očrtane krožnice. Podrobnosti prepustimo bralcu in predstavimo "čisto geometrijski" dokaz Morleyevega izreka, ki nam bo koristil pri dokazu razširitve tega izreka.

Prezrcalimo K preko CP oziroma preko BP , zrcalni sliki pa označimo z F oziroma z G . Zaradi

$$\sphericalangle PCF = \sphericalangle PCK \text{ in } \sphericalangle PBG = \sphericalangle PBK$$

leži F na AC , G pa na AB . Poleg tega z upoštevanjem enakosti (3) dobimo

$$\begin{aligned}\sphericalangle CEF &= \sphericalangle CEK = \sphericalangle PKE + \sphericalangle KPE = 60^\circ + \frac{1}{3}\alpha, \\ \sphericalangle BDG &= \sphericalangle BDK = \sphericalangle PKD + \sphericalangle KPD = 60^\circ + \frac{1}{3}\alpha,\end{aligned}$$

od koder sledi

$$\sphericalangle DEF = \sphericalangle GDE = 360^\circ - 60^\circ - 2(60^\circ + \frac{1}{3}\alpha) = 180^\circ - \frac{2}{3}\alpha.$$

Ker je poleg tega $|EF| = |DE| = |GD|$, velja

$$\sphericalangle EDF = \sphericalangle DFE = \frac{1}{2}(180^\circ - \sphericalangle DEF) = \frac{1}{3}\alpha \quad (4)$$

in zato

$$\sphericalangle GDF = \sphericalangle GDE - \frac{1}{3}\alpha = 180^\circ - \alpha.$$

Torej je $\sphericalangle GDF + \sphericalangle GAF = 180^\circ$, štirikotnik $AGDF$ pa je tedaj tetiven. Podobno ugotovimo, da je tudi štirikotnik $AGEF$ tetiven, zato točke A , G , D , E in F ležijo na isti krožnici. S pomočjo izreka o obodnem kotu in enakosti (4) dobimo

$$\sphericalangle DAE = \sphericalangle DFE = \frac{1}{3}\alpha = \sphericalangle EDF = \sphericalangle EAF.$$

Od tod sledi, da točka E sovпада s točko L , D pa z M . Trikotnik KLM torej sovпада s trikotnikom KED in je enakostraničen, izrek pa dokazan.

Iz notranjosti trikotnika ABC se zdaj ozrimo navzven; ob vsaki njegovi stranici načrtajmo zunanjo koto, s poltraki ju razdelimo na tri enake dele in zaznamujmo tri presečišča po dveh poltrakov ob vsaki stranici. So tudi v tem primeru zaznamovane točke oglišča enakostraničnega trikotnika? Odgovor na postavljeno vprašanje je pritrdilen in je del naslednjega, precej bolj presenetljivega rezultata.

Izrek 1. Razdelimo vse notranje in zunanje kote poljubnega trikotnika ABC s poltraki na tri enake dele in dvanajst presečišč teh poltrakov označimo, kot kaže slika 3 na zadnji strani ovitka. Poleg tega zaznamujmo še presečišča premic KL , LM in MK s poltraki, ki delijo notranje kote trikotnika ABC na tri enake dele. Potem velja:

(a) Trikotniki KLM , $K_1L_1M_1$, $K_2L_2M_2$, $K_3L_3M_3$ in $K_1L_2M_3$ so enakostranični.

(b) Točke K_2 , L_2 , M_3 in K_3 ležijo na premici p_1 , ki je vzporedna LM , točke L_3 , M_3 , K_1 in L_1 ležijo na premici p_2 , ki je vzporedna MK , točke M_1 , K_1 , L_2 in M_2 pa so na premici p_3 , ki je vzporedna KL .

(c) Točki R in S ležita na premici p_1 , točki T in U na premici p_2 , točki V in Z pa na premici p_3 .

Dokaz. Izjavo (a) bomo dokazali podobno kot Morleyev izrek, zato bomo nekaj podrobnosti preskočili. Zadostuje ugotoviti, da sta trikotnika $K_1L_1M_1$ in $K_1L_2M_3$ enakostranična. Brez škode za dokaz bomo privzeli, da je $\alpha < 90^\circ$. Sečišče premic BM_1 in CL_1 zaznamujmo s P_1 (slika 4). Na premici P_1B izberimo točki D_1 in D' , na premici P_1C pa točki E_1 in E' , tako da velja

$$\sphericalangle P_1K_1D_1 = \sphericalangle P_1K_1E_1 = 30^\circ, \quad (5)$$

$$\sphericalangle P_1K_1D' = \sphericalangle P_1K_1E' = 150^\circ. \quad (6)$$

Točka K_1 je središče trikotniku P_1BC včrtanega kroga, zato lahko izračunamo

$$\sphericalangle K_1P_1D_1 = \sphericalangle K_1P_1D' = \sphericalangle K_1P_1E_1 = \sphericalangle K_1P_1E' = 30^\circ - \frac{1}{3}\alpha \quad (7)$$

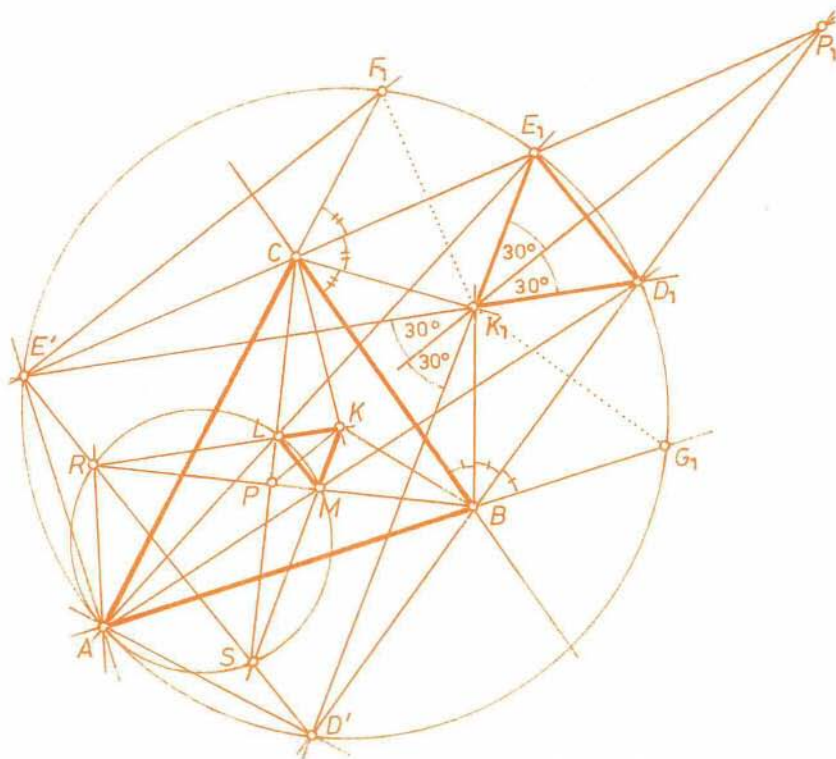
in ugotovimo, da sta trikotnika $K_1E_1D_1$ in $K_1E'D'$ enakostranična.

Prezrcalimo K_1 preko CP_1 oziroma preko BP_1 , zrcalni sliki pa označimo z F_1 oziroma z G_1 . Podobno kot v dokazu Morleyevega izreka ugotovimo, da točke A , G_1 , D_1 , E_1 , F_1 in D' , E' ležijo na isti krožnici in s pomočjo izreka o obodnem kotu ter enakosti (5), (6), (7) pokažemo, da točka E_1 sovпада s točko L_1 , D_1 z M_1 , E' z L_2 , D' pa z M_3 , in s tem sklenemo dokaz trditve (a).

Za dokaz izjave (b) je zaradi (a) dovolj videti, da sta premici E_1K_1 (ali E_1D') in KM vzporedni. Ker velja $\sphericalangle PBP_1 = 120^\circ$ in je po Morleyevem izreku ter enakosti (7)

$$\sphericalangle KPB + \sphericalangle K_1P_1B = \sphericalangle KPM + \sphericalangle K_1P_1D_1 = 60^\circ,$$

sta premici PK in P_1K_1 vzporedni. Zato sta vzporedni tudi premici E_1K_1 (ali E_1D') in KM , torej velja (b).



Slika 4.

Trditev (c) bo dokazana, brž ko ugotovimo, da točka R leži na premici $E'D'$. Premica $E'D'$ namreč po prejšnjem sovpada s premico L_2M_3 , dokazi ostalih izjav iz (c) pa so podobni. Vemo že, da je trikotnik LMP enakokrak s kotom $\sphericalangle LPM = 60^\circ + \frac{2}{3}\alpha$ med krakoma. Zato velja $\sphericalangle PML = 60^\circ - \frac{1}{3}\alpha$ in tedaj $\sphericalangle LRM = \sphericalangle KLM - \sphericalangle PML = \frac{1}{3}\alpha$. Seveda velja tudi $\sphericalangle LSM = \frac{1}{3}\alpha$, zato po izreku o obodnem kotu točki R in S ležita na krožnici skozi A , L in M . Poleg tega sta premici RS in LM vzporedni, torej velja

$$\sphericalangle RSL = \sphericalangle PLM = 60^\circ - \frac{1}{3}\alpha,$$

izrek o obodnem kotu pa nam da še enakost

$$\sphericalangle RAL = \sphericalangle RSL = 60^\circ - \frac{1}{3}\alpha.$$

Zdaj lahko izračunamo

$$\begin{aligned}\sphericalangle RAD' &= \sphericalangle RAL + \sphericalangle LAB + \sphericalangle BAD' = \\ &= (60^\circ - \frac{1}{3}\alpha) + \frac{2}{3}\alpha + (60^\circ - \frac{1}{3}\alpha) = 120^\circ\end{aligned}$$

in

$$\sphericalangle RBD' = \sphericalangle RBA + \sphericalangle ABD' = \frac{1}{3}\beta + (60^\circ - \frac{1}{3}\beta) = 60^\circ$$

ter sklepamo od tod, da je štirikotnik $RAD'B$ tetiven. Po izreku o obodnem kotu dobimo

$$\sphericalangle AD'R = \sphericalangle ABR = \frac{1}{3}\beta. \quad (8)$$

Ker točke A, D', E_1, F_1 in E' ležijo na isti krožnici in ker je $|E_1F_1| = |E_1D_1|$, s pomočjo izreka o obodnem kotu dobimo najprej

$$\sphericalangle F_1E'E_1 = \sphericalangle F_1AE_1 = \frac{1}{3}\alpha$$

in nato še

$$\sphericalangle AD'E' = \sphericalangle AF_1E' = \sphericalangle F_1CE_1 - \sphericalangle F_1E'E_1 = \frac{1}{3}\beta. \quad (9)$$

Iz enakosti (8) in (9) vidimo, da je $\sphericalangle AD'R = \sphericalangle AD'E'$, zato R leži na premici $E'D'$, izrek pa je dokazan.

Poglejmo spet na sliko 3 na zadnji strani ovitka in dopolnimo družino enakostraničnih trikotnikov, tako da načrtamo premice L_1M_1, K_2M_2, K_3L_3 in LM, KM, KL . V nastali družini $\mathcal{T}$ je 27 enakostraničnih trikotnikov s skupno 27 oglišči. Množico teh oglišč zaznamujmo z $\mathcal{M}$. Osemnajst oglišč iz $\mathcal{M}$ smo že srečali v izreku 1, devet pa je novih. Tudi ta oglišča lahko opišemo podobno kot prvih osemnajst.

Popolnost družine $\mathcal{T}$ oziroma množice $\mathcal{M}$ se pokaže, če skozi vsako oglišče trikotnika ABC načrtamo še po dve premici, ki razdelita dopolnilni kot ob oglišču na tri enake dele. Spomnimo se, da dopolnilni kot danega kota skupaj z njim tvori polni kot, in že lahko oblikujemo

Izrek 2. Vsaka točka množice $\mathcal{M}$ je presečišče dveh premic iz družine osemnajstih premic, ki delijo notranje, zunanje in dopolnilne kote trikotnika ABC na tri enake dele. (Glej sliko 5 na zadnji strani ovitka.)

Dokaz izreka 2 je podoben dokazu izreka 1, zato ga prepustimo bralcu.

Dolžine stranic vseh enakostraničnih trikotnikov družine $\mathcal{T}$ lahko izrazimo s koti α , β , γ in polmerom r trikotniku ABC očrtane krožnice. Veljajo podobne formule kot (1). Tako na primer stranica trikotnika $K_1L_2M_3$ meri

$$e = 8r \sin(60^\circ - \frac{1}{3}\alpha) \sin(60^\circ - \frac{1}{3}\beta) \sin(60^\circ - \frac{1}{3}\gamma), \quad (10)$$

stranica največjega enakostraničnega trikotnika iz družine $\mathcal{T}$ pa

$$f = 8r \sin(60^\circ + \frac{1}{3}\alpha) \sin(60^\circ + \frac{1}{3}\beta) \sin(60^\circ + \frac{1}{3}\gamma). \quad (11)$$

Če upoštevamo enakost

$$4 \sin x \sin(60^\circ - x) \sin(60^\circ + x) = \sin 3x$$

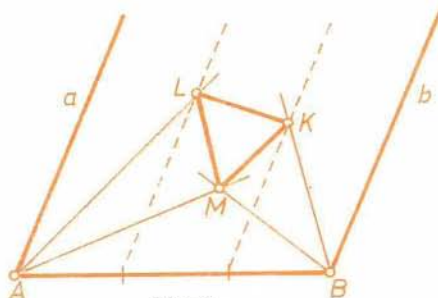
ter formule za dolžine stranic trikotnika ABC

$$a = 2r \sin \alpha, \quad b = 2r \sin \beta, \quad c = 2r \sin \gamma,$$

lahko (1), (10) in (11) združimo v zanimivo zvezo $def = abc$.

Sklenimo prispevek z naslednjo posplošitvijo Morleyevega izreka.

Izrek 3. S krajišč daljice AB načrtajmo enako usmerjena vzporedna poltraka a , b in razdelimo kota, ki ju oklepata z AB , s paroma poltrakov na tri enake dele. Tudi pas med poltrakoma a in b razdelimo s premicama na tri enake dele, presečišča razdelilnih poltrakov in premic pa zaznamujmo s K , L , M , kot kaže slika 6. Potem je trikotnik KLM enakostraničen, njegova stranica pa meri $\frac{4}{3}|AB| \sin \frac{1}{3}\alpha \sin \frac{1}{3}\beta$, kjer sta α in β kota, ki ju poltraka a in b oklepata z daljico AB .



Slika 6.

Izrek 3 lahko dokažemo podobno kot Morleyev izrek, ker pa je z njim še manj dela, naj ga opravi kar bralec sam.

Boris Lavrič

PRESEK - list za mlade matematike, fizike, astronome in računalnikarje 21. letnik, leto 1993/94, številka 1-6, strani 1-384

UVODNIK

Namesto uvodnika (Marija Vencelj) 1

MATEMATIKA

Kako so računali pred 134 leti (Peter Legiša)	8-13
Brezno trikotnikov (Marko Lovrečič Saražin)	34-37
Babilonski približek za $\sqrt{2}$ (Vilko Domajnko)	40-45
Escherjevo iskanje neskončnosti (Milena Strnad)	V, 66-74
Eulerjeva funkcija φ (Bogdan Kejžar)	82-85
Fermatova števila (Roman Drnovšek)	92-95
Volilna števila (Bojan Hvala)	98-105
Spodnja meja števila potrebnih semen (France Avsec)	122-124
Poglejmo fraktale (Marek-Crnjac Lejla)	IX, 130-134
Zanimivost pri številih (A. Sofo, P. Cerone, prev. in prir. Darjo Felda)	162-163
Zapis števil v negativni osnovi (Jože Grasselli)	216-222
Prostorsko - časovni labirinti ali kako osvojiti kraljično (Jurij Kovič)	238-242
Teorija števil in verjetnostni račun (Ivan Vidav)	264-271
Odvod polinoma in njegova uporaba (Borut Zalar)	336-338
Neenakost Minkowskega (Roman Drnovšek)	346-351
Sebi podobnost in dimenzija fraktalov (Leila Marek - Crnjac)	354-358
Razširitev Morleyevega izreka (Boris Lavrič)	376-382, XXIV

RAČUNALNIŠTVO

Moj prvi gumb (Jože Marinček)	16-20
O Evklidovem algoritmu (Martin Juvan)	116-121
ENIAC - prvi elektronski računalnik (Veselko Guštin)	148-153
Linux - čisto pravi Unix (Andrej Bauer)	206-210
Hiperkocke in računalnik CM (Sandi Klavžar)	290-295, XX
Narišimo krivuljo z računalnikom (Aleksander Vesel)	324-329

FIZIKA

Arhimed in sežig ladij (Janez Strnad)	2-7
Odsev (Andrej Likar)	I, 60-64, III, IV
Novo dirkalno kolo (Janez Strnad)	76-78, VIII
O drsanju po ledu (Janez Strnad)	142-145
Izolirajmo hišo! (Andrej Likar)	212-215
Fizika na kolesu (Andrej Likar)	276-283
Dežuje, dežuje (Jure Zupan)	322-323
Radon (Andrej Likar)	342-345
O začetnih števkih v nizih števil (Janez Strnad)	362-366

ASTRONOMIJA

Daljnogled Leonarda da Vincija (Marian Prosén)	28-30
Preprost daljnogled (Marian Prosén)	38-39
Kako ugotovimo vidno polje in zmogljivost daljnogleda (Marian Prosén)	86-88
Koledar (Dušan Modic)	108-110
Nebesna glasba (Marian Prosén)	136-137
Še ena Keplerjeva 'harmonija' (Marian Prosén)	XI
Razlika štirih minut (Marian Prosén)	254-255, XV
Zupan - astronom (Marian Prosén)	XVII, 258-262
Merite s senco (Marian Prosén)	332-334

REŠITVE NALOG

Nagradna uganka - iz P XX/6, str. 321 (Marija Vencelj)	21
Babilonski približek za $\sqrt{2}$ - s str. 40 (Vilko Domajnko)	81
Volilna števila - s str. 98 (Bojan Hvala)	181
Pentagranska antiprizma - s str. 196 (Tomaž Pisanski)	287
Prostorsko - časovni labirinti ali kako osvojiti kraljično - s str. 238 (Jurij Kovič)	296-299
Problem štirih barv - s str. 312 (Janez Žerovnik)	XXI
Zanimivost pri številih - s str. 163 (Primož Moravec)	339-340

TEKMOVANJA

17. državno tekmovanje srednješolcev iz znanja računalništva (Primož Gabrijelčič)	20
2. državno tekmovanje za Zlato Vegovo priznanje (Aleksander Potočnik)	30-31
37. matematično tekmovanje srednješolcev Slovenije (Darjo Felda)	45-46
Uspeh naših olimpijcev v Williamsburgu in Istanbulu	46
Državno tekmovanje iz fizike za osnovnošolce 1992/93 (Mirko Cvahte, Zlatko Bradač)	47
14. mednarodno matematično tekmovanje mest - pomladanski krog - rešitve iz XX/P-6, str.342 (Matjaž Željko)	48-53
31. tekmovanje iz srednješolske fizike (Ciril Dominko)	54-56
Fizika in čustva (Janez Strnad)	56-58
13. področno tekmovanje iz fizike za osnovnošolce - reš. str. 145-147 (Zlatko Bradač, Mirko Cvahte)	78-80
Izbirno tekmovanje iz matematike - reš. str. 165-168 (Matjaž Željko)	110-111
Naloge za ogrevanje - reš. str. 158-159 (Aleksander Potočnik)	112-114
13. državno tekmovanje iz fizike za osnovnošolce - reš. str. 248-251 (Zlatko Bradač, Mirko Cvahte) ..	139-141
Naloge z državnega tekmovanja fizikov - reš. str. 243-246 (Ciril Dominko, Bojan Golli)	169-174
37. matematično tekmovanje srednješolcev Slovenije - reš. str. 199-204 (Darjo Felda)	178-180
28. občinsko tekmovanje za srebrno Vegovo priznanje - reš. str. 204-205 (Aleksander Potočnik)	190-191
2. državno tekmovanje osnovnošolcev iz matematike - reš. str. 284-285 (Aleksander Potočnik)	197-198
Urniki tekmovanj v letu 1994 (Darjo Felda)	232-235
15. mednarodno matematično tekmovanje mest, jesenski krog - reš. str. 307-310 (Matjaž Željko) ...	252-253
Naloge z izbirnega tekmovanja za 24. mednarodno fizikalno olimpiado - reš. str. 330-331 (Bojan Golli)	273-275

Naloge s 24. mednarodne fizikalne olimpiade v ZDA (Bojan Golli)	314-318
15. mednarodno matematično tekmovanje mest - pomladanski krog (Matjaž Željko)	359-361

NOVICE

Rutherford na bankovcu (Janez Strnad)	13-15
Je Fermatov zadnji izrek dokazan? (Marija Vencelj)	22
Dokaz, dolg tisoč strani, potrjuje Fermata (Ian Stewart, prev. Marija Vencelj)	23-26
Na športni dan k Vegi v Zagorico (Tomaž Pisanski)	26-27
Poročilo s 34. mednarodne matematične olimpiade (Mitja Mastnak)	137-138, XII
Poročilo s 24. mednarodne fizikalne olimpiade (Daniel Svenšek in Gregor Veble)	182-183, XII
Ob dvestoletnici rojstva Lobačevskega (Marija Vencelj) ..	186-189
Uniformni poliedri (Tomaž Pisanski)	XIII, 195-196, XVI
Ob stoletnici smrti Heinricha Hertza (Janez Strnad)	226-223
Toplotna izolacija pasje hišice - raziskovalni projekt (Marjan Hribar)	272
Ludwig Boltzmann - Ob stopetdesetletnici rojstva (Janez Strnad)	302-306
Problem štirih barv (Janez Žerovnik)	312-314
Hermann Minkowski - Ob 130-letnici rojstva (Roman Drnovšek)	345
Casus irreducibilis - Ob 240. obletnici rojstva Jurija Vege (Tomaž Pisanski)	368-375

PISMA BRALCEV

Rešitve nalog takoj ali kasneje (Jure Vrhovnik, Marija Vencelj) ..	39
Izpolnila se mi je želja (Primož Kajdič, Marija Vencelj)	58-59
Križanka Zajček (Šestošolke z Rakeka)	300-301

NALOGE

Raziskovalci v puščavi - reš. str. 95 (Neža Mramor-Kosta).....	7
Kvadrat in kub - reš. str. 106-107 (Boris Lavrič).....	15
Kvadrat pod krogi - reš. str. 105-106 (Boris Lavrič).....	59
Naloge za mlajše bralce - reš. str. 91 (Borut Zalar).....	59
Koliko trikotnikov - reš. str. 88-89 (Ivan Vidav).....	64
Račun z znaki - reš. str. 180-181 (Martin Juvan).....	65
Staroegeptovska aritmetika - reš. str. 168 (Anton Cedilnik) ...	75
Števke, številke, števila - reš. str. 175 (Marija Vencelj).....	75
Kako prečkati reko? - reš. str. 138 (Neža Mramor-Kosta) ...	85
Skoraj magični krogi - reš. str. 163 (Marija Vencelj).....	85
Naloge za mlajše bralce - reš. str. 135 (Borut Zalar).....	88
Brez presečišč - reš. str. 158 (Igor Gajser).....	90
Sam - reš. str. 153 (Neža Mramor-Kosta).....	114
Naloge iz programiranja - pascal in logo - reš. str. 154-158, 235-237 (Martin Juvan).....	125-126
Plavajoča prizma - reš. str. 184-185 (Matjaž Vencelj).....	126
Kaj se zgodi z gladino vode? - reš. str. 255-256 (Matjaž Vencelj).....	129
Številski krog - reš. str. 211 (Marija Vencelj).....	134
Zaporedje - reš. str. 256 (Bojan Gornik).....	147
Ena poslanska - reš. str. 199 (Borut Zalar).....	174
Geometrijska za osnovnošolce - reš. str. 222-223 (Igor Gajser).....	183
Simetrični sistem - reš. str. 215 (Bojan Gornik).....	189
Vsota posebne vrste - reš. str. 242 (Marija Vencelj).....	189
Nagradna naloga - Magični šestkotnik - reš. str. 366-367 (Marija Vencelj).....	193-194
Tri naloge s polinomi - reš. str. 262-263 (Borut Zalar).....	198
Neznani liki - 1. del - reš. str. 283 (Martin Juvan).....	210
Koliko ničel? - reš. str. 286-287 (Martin Juvan).....	253
Nagradna naloga - Kako hitro izteče voda? (Ivan Kušcer) ...	257
Najmanjša podmnožica - reš. str. 338-339 (Martin Juvan)....	271
Kaj kdo dela? - reš. str. 340 (Neža Mramor-Kosta).....	275
V trgovini - reš. str. 329 (Neža Mramor-Kosta).....	296
Problem treh škripcev - reš. str. 335 (Jure Zupan).....	331
Lahka geometrijska za bistro oko - reš. str. 341 (Marija Vencelj).....	334
Poklici - reš. str. 375 (Neža Mramor-Kosta).....	341

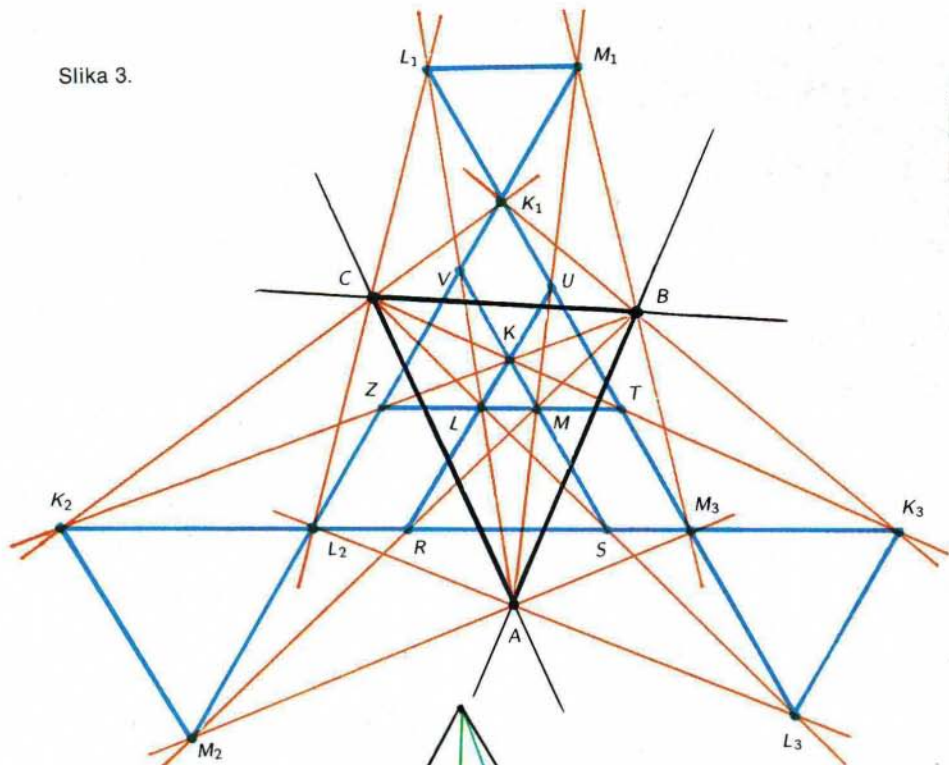
NOVE KNJIGE

Kotnik J., Osnovnošolska matematika za v žep (Branko Roblek).....	31
Klavžar S. in Vesel A., Windows 3.1, podkrepjen z DOS 6.0 (Matija Lokar).....	81
Breuer H., Atlas klasične in moderne fizike, prevod in priredba J. Strnad (Marija Vencelj).....	127-VII
Hawking S., Stone G., Berilo h kratki zgodovini časa Stephena Hawkinga (Janez Strnad).....	247
Tekmujmo za Vegova priznanja (Sandi Klavžar).....	XVI
Devlin K., Nova zlata doba matematike (Anton Suhadolc)...	299
Domajno V., Z nalogami v zgodovino matematike (Marija Vencelj).....	311
Marnell G.R., Številске križanke (Marija Vencelj).....	361

RAZVEDRILO

Križanka Matematični pojmi - reš. str. 115 (Marko Bokalič) 32-33	
Popravek številске križanke (Darjo Felda).....	75
'Dokaz' Fermatovega izreka, ki bi šel na rob knjige (Marija Vencelj).....	90
Križanka Avtorji srednješolskih učbenikov - reš. str. 175 (Marko Bokalič).....	96-97
Relativnost hitrosti (Matjaž Vencelj).....	115
Fizika v umetnosti (Izbral Andrej Likar).....	125
Križanka Avtorji učbenikov in vaj za osnovno šolo - reš. str. 251 (Marko Bokalič).....	160-161
Papirnata olimpiada (Jure Zupan).....	164-165
Igra 'NIM' (Matjaž Željko).....	176-178
Križanka Matematični pojmi - reš. str. 301 (Marko Bokalič).....	224-225
Križanka s fizikalnimi pojmi - reš. str. 335 (Marko Bokalič) 288-289	
Igra 'NIM' - reš. str. 351 (Mitja Rosina).....	295
Stereoskopske slike, narejene s programom Perspectus (Matjaž Vencelj).....	319-320, XIX
Križanka Krog (Marko Bokalič).....	352-353

Slika 3.



Slika 5.

