

P
R
E
S
E
K



VSEBINA

ASTRONOMIJA	Župan - astronom (Marijan Prosén)	258-262
MATEMATIKA	Teorija števil in verjetnostni račun (Ivan Vidav)	264-271
FIZIKA	Fizika na kolesu (Andrej Likar)	276-283
RAČUNALNIŠTVO	Hiperkocke in računalnik CM (Sandi Klavžar)	290-295
TEKMOVANJA	Naloge z izbirnega tekmovanja za 24. mednarodno fizikalno olimpiado (Bojan Golli)	273-275
	2. državno tekmovanje osnovnošolcev iz matematike - rešitve s str. 197 (Aleksander Potočnik)	284-285
	15. mednarodno matematično tekmovanje mest, jesenski krog - rešitve s str. 252 (Matjaž Željko) ...	307-310
	Naloge s 24. mednarodne fizikalne olimpiade v ZDA (Bojan Golli)	314-318
NALOGE	Nagradna naloga - Kako hitro izteče voda? (Ivan Kuščer) ...	257
	Najmanjša podmnožica (Martin Juvan)	271
	Kaj kdo dela? (Neža Mramor-Kosta)	275
	V trgovini (Neža Mramor-Kosta)	296
RAZVEDRILO	Križanka s fizikalnimi pojmi (Marko Bokalič)	288-289
	Igra "NIM*" (Mitja Rosina)	295
	Stereoskopske slike, narejene s programom Perspectus (Matjaž Vencelj)	319-320, III
REŠITVE NALOG	Tri naloge s polinomi - s str. 198 (Borut Zalar)	262-263
	Neznani liki - 1.del - s str. 210 (Martin Juvan)	283
	Koliko ničel? - s str. 253 (Martin Juvan)	286-287
	Pentagranska antiprizma - s str. 196 (Tomaž Pisanski)	287
	Prostorsko - časovni labirinti ali kako osvojiti kraljično - s str. 238 (Jurij Kovič)	296-299
	Križanka Matematični pojmi - s str. 224 (Marko Bokalič) ...	301
NOVICE	Toplotna izolacija pasje hišice - raziskovalni projekt (Marjan Hribar)	272
	Ludwig Boltzmann - Ob stopetdesetletnici rojstva (Janez Strnad)	302-306
	Problem štirih barv (Janez Žerovnik)	312-314
NOVE KNJIGE	Devlin K., Nova zlata doba matematike (Anton Suhadolc) ..	299
	Domajnko V., Z nalogami v zgodovino matematike (Marija Vencelj)	311
PISMA BRALCEV	Križanka Zajček (Šestošolke z Rakeka)	300-301
NA OVITKU	Naslovna stran Hevelijeve knjige Nebesni stroj (Machina Coelestis, 1673). Glej tudi članek na str. 258. I	
	Računalnik CM. Glej tudi prispevek na str. 290.	IV

NAGRADNA NALOGA – KAKO HITRO IZTEČE VODA?

V valjasti posodi z notranjim presekom (= osnovno ploskvijo) S_0 stoji voda spočetka do višine h . Iz luknje nad dnu pa izteka curek s presekom S . Pri približnih ocenah zanemarimo energijske "izgube" zaradi viskoznosti in vrtincev, tako da računamo z izrekom o kinetični energiji. Po njem je hitrost vode v curku enako velika, kot če bi voda prosto padla z višine h . V kolikem času se posoda izprazni?

Izpelji rezultat s kolikor mogoče malo računanja in zlasti brez zapisovanja integralov. Ali pa se v sklepanju morda vendarle skriva kak nenapisan integral?

Rešitve pošljite najkasneje do 10. junija letos v uredništvo Preseka.

Ivan Kuščer



PRESEK

list za mlade matematike, fizike, astronome in računalnikarje
21. letnik, šolsko leto 1993/94, številka 5, strani 257 – 320

UREDNIŠKI ODBOR: Vladimir Batagelj, Tanja Bečan (jezikovni pregled), Dušica Boben (oblikovanje teksta), Mirko Dobovišek (glavni urednik), Vilko Domajnko, Roman Drnovšek (novice), Darjo Felda (tekmovanja), Bojan Golli, Marjan Hribar, Boštjan Jaklič (tehnični urednik), Martin Juvan (računalništvo), Sandi Klavžar, Edvard Kramar, Boris Lavrič, Andrej Likar (fizika), Matija Lokar, Franci Oblak, Peter Petek, Pavla Ranzinger (astronomija), Marjan Smerke (svetovalec za fotografijo), Miha Štalec, Jana Vrabec (nove knjige), Marija Vencelj (matematika, odgovorna urednica).

Dopisi in naročnine: Društvo matematikov, fizikov in astronomov Slovenije - Podružnica Ljubljana - Komisija za tisk, Presek, Jadranska c. 19, 61111 Ljubljana, p.p. 64, tel. (061) 265-061/53, št. ŽR 50101-678-47233. Naročnina za šolsko leto 1993/94 je za posamezne naročnike **900 SIT**, za skupinska naročila šol **720 SIT**, posamezna številka **180 SIT**, za tujino 12000 LIT, vezivna nakazila SKB banka d.d. Ljubljana, val-27621- 42961/9, Ajdovščina 4, Ljubljana.

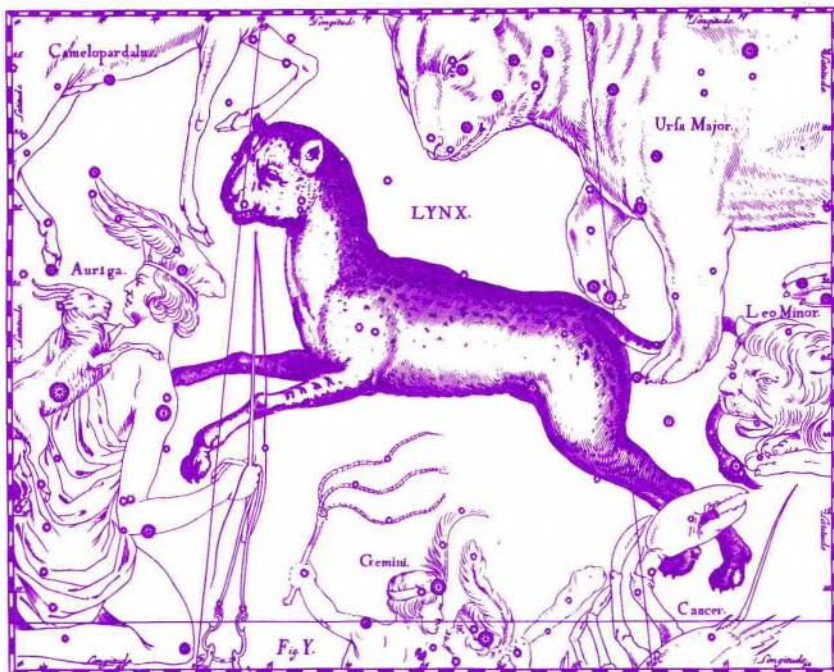
List sofinancirajo MZT, MŠŠ in MK
Ofset tisk DELO - Tiskarna, Ljubljana

Po mnenju MZT št. 415-52/92 z dne 5.2.1992 šteje revija med proizvode iz 13. točke tarifne št. 3 zakona o prometnem davku, za katere se plačuje 5% davek od prometa proizvodov.

© 1994 Društvo matematikov, fizikov in astronomov Slovenije – 1186

ASTRONOMIJA

ŽUPAN - ASTRONOM

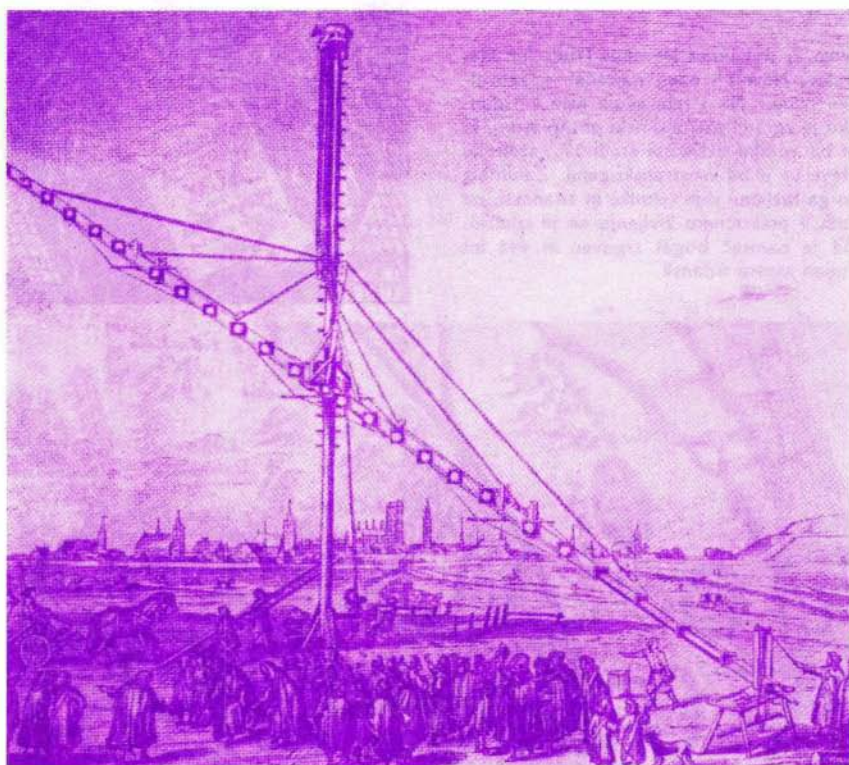


Slika 1. Ozvezdje Ris, kot ga je upodobil J. Hevelius v svojem *Atlasu zvezdnega neba* (Uranografija, 1690). Značilno za vse slike iz tega atlasa je, da so narisane zrcalno simetrično kot bi jih videli s prostim očesom.

To prekrasno sliko ozvezdij smo vzeli iz *Atlasa zvezdnega neba*, ki je izšel pred 300 leti, natančneje leta 1690 (slika 1). Njegov avtor je ena najzanimivejših astronomskih osebnosti - Poljak *Jan Hevel* oziroma Johannes Hevelius (1611 - 1687). Ta bistrouradni znanstvenik z nenavadnimi sposobnostmi in izredno široko paleto delovanja je bil nenadkriljiv umetnik - ilustrator, graver, optik, mehanik, graditelj, vodilni meščan mesta Gdansk in sploh človek dejanj (slika 2).

V začetku 17. stoletja je razvoj astronomije, ki je slonel na Kopernikovem nauku, še vedno močno ovirala cerkev. Pozneje so se razmere za razvoj astronomije in znanosti nasploh v mnogih evropskih državah izboljšale. Znanje astronomije je postajalo vse bolj pomembno. Potrebovali so ga na primer pri geografskih meritvah, morski plovbi (natančno določanje lege - zemljepisne dolžine in širine - ladje), pri določevanju točnega časa. V mnogih državah

je cerkvena moč oslabela, ojačala pa posvetna oblast. Kopernikov nauk je vse bolj pridobival na veljavi in priznanju. Po Evropi so se začeli pojavljati z naprednimi idejami in z raziskovalno strastjo prepojeni astronomsko izobraženi posamezniki, ki so odkrivali vse bolj nenavadne stvari v vesolju. To jim je omogočil razvoj optike. Izgotaljvali so lahko namreč dosti večje in zmogljivejše daljnogledne od tistih, ki jih je v svojih raziskavah neba uporabljal Galilei. Z njimi so tudi dosegali vse boljšo natančnost pri meritvah leg vesoljskih teles. Lahko bi rekli, da je Hevelius živel v času, ko so se dogajale usodne spremembe v astronomiji in instrumentalni tehniki, nekako tako globoke, kot jih danes doživljamo ob novih odkritjih v vesolju, elektroniki in informatiki.

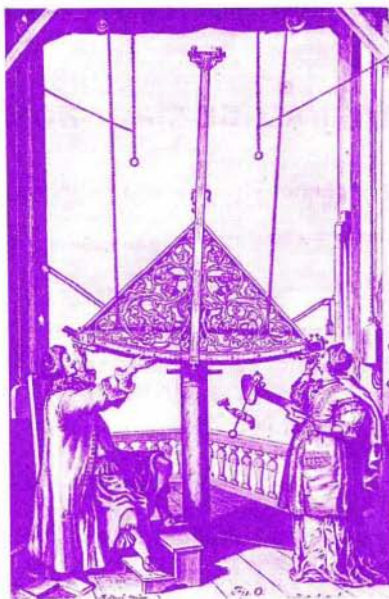


Slika 4. Hevelius je izdeloval sekstante, kvadrante in druge vizirne naprave za natančne astronomske meritve (vendar brez optičnih pripomočkov), različne refraktorje (tako imenovane zračne daljnogledne) itn. Slika prikazuje največji Hevelijev daljnogled v Gdansku. Njegova dolžina je bila okoli 70 m. Ravnanje s takim daljnogledom je bilo skrajno zahtevno.

Hevelius je sam izdeloval daljnogleda in najrazličnejše kotomerne naprave. Leta 1641 je v svojem rodnem mestu Gdansku zgradil sijajno zvezdarno, ki jo je delno opremil tudi z instrumenti lastne izdelave. Tu je ogromno opazoval. Zanimalo ga je praktično vse na nebu. Posebno se je posvetil Luni. Opazoval jo je zelo natančno. Zarisoval je vse podrobnosti k Zemlji obrnjene strani Lune. Na osnovi teh opazovanj je izdal *Lunin atlas* (Selenografija, 1647). Poimenoval je gore, kraterje in doline na Luninem površju. Mnoga od teh imen uporabljamo še danes (slika 3). Odkril je geometrično libracijo Lune (to je, da Luna navidez rahlo prikimava in odkimava). Sistematično je opazoval vseh pet tedaj znanih planetov in pri Merkurju odkril mene. Iz opazovanj Sončevih peg je ugotovil vrtilni čas Sonca. Z daljnogledom je opazoval vesoljske meglice in celo zvezde spremenljivke, med njimi dolgoperiodično spremenljivko Miro v ozvezdju Kita. In še bi lahko naštevali.

Hevelius je sestavil tudi seznam vseh kometov, ki so se pojavili v zgodovinski zavesti človeštva (Kometografija, 1668). Sam je odkril kar štiri. Z velikim sekstantom, s katerim je s prostim očesom opazoval preko dioptrrov (merka in muhe), je Hevelius določil z veliko natančnostjo lege okoli 1500 zvezd. Ta njegov *Zvezdni katalog* (1687) je bil veliko bolj natančen od vseh prejšnjih. Angleški astronom Edmund Halley je nalašč zato prišel v Gdansk, da bi se prepričal, kako je mogel Hevelius pri opazovanjih s tako preprostimi instrumenti brez optike doseči tako veliko natančnost in se kosati z daljnogledskimi opazovanji, ki so jih prav tedaj uvajali v astronomsko prakso.

Svoj zvezdni katalog je Hevelius uporabil za sestavljanje obsežnega zvezdnega atlasa (Uranografija, 1690), ki je izšel po njegovi smrti. Ta atlas vsebuje 54 velikih kart s prekrasnimi slikami ozvezdij in dve plankrogli severnega in južnega zvezdnega neba.



Slika 5. Hevelius s soprogo ob kvadrantu v svoji zvezdarni (iz knjige *Machina Coelestis*).

Gre za prvovrstne ilustracije ozvezdij, ki jih je sam graviral na medeninaste plošče. V atlas je vnesel tudi nekaj novih ozvezdij, od katerih jih najdemo sedem (med njimi tudi ozvezdje Risa - slika 1) v zvezdnih kartah še danes. V atlasu je na dveh gravurah Hevelius narisal muzo astronomije Uranijo, ki jo obkrožujejo znameniti astronomi: Hiparh, Ptolemej, Ulugbek, Kopernik, Tycho Brahe in drugi.

Na žalost je Hevelius nadaljeval s staro prakso opazovanja leg zvezd s prostim očesom. To zmanjšuje vrednost njegovega dela, čeprav je le-ta ogromna. Bil je namreč zmotno trdno prepričan, da je opazovanje s prostim očesom natančnejše od opazovanja z daljnogledom. Proti koncu 17. stoletja so opazovanja z daljnogledom povsem prevladala nad opazovanji s prostim očesom. Povečali so tudi natančnost opazovanj. Kljub temu, da je Hevelius opazoval zvezde s prostim očesom, sta njegov zvezdni katalog in po njem izdelani atlas zvezdnega neba izjemen strokovni dosežek, vse njegovo delo pa sploh neprecenljiv prispevek k razvoju astronomije.

Marijan Prosén

TRI NALOGE S POLINOMI – Rešitev s str. 198

1) Polinom $P(x)$ lahko razcepimo v produkt

$$P(x) = (x - a)(x - b)(x - c)(x - d),$$

kjer so a, b, c, d ničle polinoma P . Če zmnožimo produkt na desni, vidimo, da je konstantni člen v polinomu P enak produktu $abcd$ oziroma $abcd = -1992 = 12 \cdot (-166)$. Torej je $ab = 12$ in $cd = -166$. To pomeni, da je $(x - a)(x - b) = x^2 + \alpha x + 12$ in $(x - c)(x - d) = x^2 + \beta x - 166$ pri nekih α, β . Zdaj lahko zapišemo

$$P(x) = (x^2 + \alpha x + 12)(x^2 + \beta x - 166).$$

Če zmnožimo produkt na desni in primerjamo koeficiente, dobimo naslednje enakosti:

$$-88 = \alpha + \beta,$$

$$k = \alpha\beta - 154,$$

$$190 = 12\beta - 166\alpha.$$

Iz prve in tretje enakosti dobimo $\alpha = -7$ in $\beta = -81$. Ko dobljeni rezultat vstavimo v drugo enačbo, dobimo $k = 413$.

REŠITVE NALOG

2) Odgovor na prvo vprašanje je pozitiven. Tak polinom je npr. $P(x) = x^2 - 4x + 5$.

Odgovor na drugo vprašanje je negativen, kar dokažemo takole: Naj bo $P(x) = a_n x^n + \dots + a_1 x + a_0$, kjer so števila a_i cela. Tedaj je

$$\begin{aligned} -1 &= P(3) - P(1) = \\ &= a_n \cdot 3^n + \dots + a_1 \cdot 3 + a_0 - (a_n + \dots + a_1 + a_0) = \\ &= a_n(3^n - 1) + a_{n-1}(3^{n-1} - 1) + \dots + a_1(3 - 1). \end{aligned}$$

To pa je nemogoče, saj je število na koncu očitno sodo ne glede na to, kakšni so a_i , in tako različno od -1 .

3) Pa naj bo

$$x^4 + 2x^2 + 2x + 2 = (ax^2 + bx + c)(dx^2 + ex + f),$$

kjer so števila a, b, c, d, e, f cela. V produktu na desni je pri x^4 faktor ad , zato je $ad = 1$. To pomeni, da je bodisi $a = d = 1$ bodisi $a = d = -1$. Privzamemo lahko, da velja prva možnost. Tedaj je

$$x^4 + 2x^2 + 2x + 2 = x^4 + (b + e)x^3 + (c + f + be)x^2 + (ce + bf)x + cf$$

oziroma

$$\begin{aligned} 0 &= b + e, \\ 2 &= c + f + be, \\ 2 &= ce + bf, \\ 2 &= cf. \end{aligned}$$

Ker sta c, f delitelja števila 2, je bodisi $c = 1, f = 2$ ali $c = -1, f = -2$. Ostali dve možnosti sta téma simetrični in ju zato lahko izpustimo. Če je $c = 1$ in $f = 2$, dobimo iz prve, druge in tretje enačbe

$$2 = 1 + 2 - b^2, \quad 2 = -b + 2b$$

oziroma $b^2 = 1$ in $b = 2$, kar je nemogoče. Če je $c = -1$ in $f = -2$, potem dobimo iz prve, druge in tretje enačbe

$$2 = -1 - 2 - b^2, \quad 2 = b - 2b$$

oziroma $b^2 = -5$ in $b = -2$, kar je tudi nemogoče.

Borut Zalar

TEORIJA ŠTEVIL IN VERJETNOSTNI RAČUN

Teorija števil je veja matematike, ki proučuje lastnosti naravnih števil. Na prvi pogled se zdi, da ne more imeti nobene zveze z verjetnostnim računom, ki določa verjetnosti raznim slučajnim dogodkom. Povezavo najdemo, če nekatere trditve teorije števil izrazimo v jeziku verjetnostnega računa. Namen tega članka je, da si ogledamo nekaj takih primerov.

Najprej si zastavimo vprašanje: Na slepo izberemo naravno število n . Kolikšna je verjetnost, da je liho? Pri tem seveda privzamemo, da ima vsako naravno število, naj bo majhno ali veliko, isto verjetnost, da ga izberemo. Ker je polovica števil lihih in polovica sodih, bo vsakdo takoj odgovoril, da je iskana verjetnost $\frac{1}{2}$. Težava je v tem, da je naravnih števil neskončno. Na loteriji žrebajo številke iz neke končne množice števil. Verjetnost, da bo izbrana številka liha, izračunamo tako, da delimo število lihih števil s številom vseh števil iz množice števil, ki pridejo v poštev za žrebanje.

Naj bo L lastnost, ki jo nekatera naravna števila imajo, druga ne. Lihost, deljivost s 5, biti praštevilo so primeri takih lastnosti. Poskušajmo opredeliti verjetnost, da ima na slepo izbrano naravno število lastnost L . V ta namen vzemimo poljubno naravno število N in preštejmo, koliko je od 1 do N števil z lastnostjo L . Denimo, da jih je M . Potem je kvocient med številom M ugodnih možnosti in številom N vseh možnosti enak verjetnosti v_N , da ima lastnost L število, ki ga na slepo izberemo izmed števil od 1 do N . Torej

$$v_N = \frac{M}{N}. \quad (1)$$

Za različne N je verjetnost v_N tudi pri isti lastnosti L v splošnem različna. Večajmo zdaj N čez vse meje! Lahko se zgodi, da obstaja tako število v , da se v in v_N razlikujeta za tako malo, kakor želimo, brž ko je N dovolj velik. V tem primeru pravimo, da zaporedje s členi v_N konvergira proti v , ko gre N čez vse meje; število v pa imenujemo limita našega zaporedja. Z limito v opredelimo verjetnost, da ima na slepo izbrano naravno število lastnost L , če ne postavimo nobene omejitve glede velikosti izbranega števila.

Oglejmo si zdaj nekaj zgledov:

1. Kolikšna je verjetnost, da je na slepo izbrano naravno število deljivo z a , kjer je a dano naravno število?

Izberimo poljuben N in ga delimo z a . Delitev se v splošnem ne izide, tako da dobimo kvocient q in še ostanek o , ki je manjši od delitelja a . Če smo prav delili, velja enakost

$$N = qa + o, \quad 0 \leq o < a. \quad (2)$$

Do N je q števil deljivih z a , namreč $a, 2a, \dots, qa$. Naslednji večkratnik $(q+1)a$ je večji od N , ker je $(q+1)a = qa + a > qa + o = N$. Zato je v našem primeru $M = q$. Kvocient $v_N = \frac{M}{N} = \frac{q}{N}$ zapišimo v obliki

$$v_N = \frac{qa}{Na} = \frac{N-o}{Na} = \frac{1}{a} - \frac{o}{Na}.$$

Po enačbi (2) je namreč $qa = N - o$. Ker je $o < a$, je člen $\frac{o}{Na}$ na desni manjši od $\frac{1}{N}$. Toda $\frac{1}{N}$ je tako majhno število, kakor želimo, če je le N dovolj velik. Zato se kvocient $v_N = \frac{M}{N}$ v našem primeru približuje vrednosti $\frac{1}{a}$, ko gre N v neskončnost, to se pravi, da ima limito $\frac{1}{a}$. Torej je verjetnost, da je na slepo izbrano naravno število deljivo z a , enaka $\frac{1}{a}$.

Verjetnost, da na slepo izbrano naravno število ni deljivo z a , pa je seveda enaka $1 - \frac{1}{a}$.

Navedena naloga je preprosta. Rešitev lahko takoj uganemo, če pomislimo, da je v zaporedju naravnih števil vsako a -to število deljivo z a . Oglejmo si zdaj primer, pri katerem rešitve ne moremo kar tako uganiti.

2. Kolikšna je verjetnost, da je na slepo izbrano naravno število praštevilo?

Vemo, da je praštevil neskončno. Odgovor na zastavljeno vprašanje je odvisen od tega, kako na gosto so med naravnimi števili posejana praštevila. Naj bo spet N poljuben. Ponavadi označimo s $\pi(N)$ število praštevil, ki so manjša ali enaka N . Torej $M = \pi(N)$. Iz teorije števil je znan izrek, da je kvocient $\frac{\pi(N)}{N}$ tako majhen, kakor želimo, če je le N dovolj velik, to se pravi, da konvergira proti nič. Čeprav dokaz tega dejstva ni zelo zahteven, pa ga vseeno tu ne moremo navesti. Ker je limita kvocienta $\frac{M}{N} = \frac{\pi(N)}{N}$ enaka nič, je verjetnost, da izberemo praštevilo, enaka nič. To pomeni, da so praštevila razmeroma redko posejana med naravnimi števili.

Dogodek, da je izbrano število praštevilo, ima verjetnost nič. Kljub temu to ni nemogoč dogodek, saj praštevila obstajajo in celo neskončno jih je. Če je lastnost L taka, da se z njo odlikuje le končno mnogo naravnih števil, je seveda verjetnost, da ima po naključju izbrano število to lastnost, enaka nič.

3. Naj bosta a in b dani naravni števili. Kolikšna je verjetnost, da na slepo izbrano naravno število ni deljivo niti z a niti z b ?

Zgoraj smo ugotovili, da je verjetnost, da izbrano naravno število ni deljivo z a , enaka $1 - \frac{1}{a}$. Verjetnost, da ni deljivo z b , pa je $1 - \frac{1}{b}$.

Zaznamujmo z V najmanjši skupni večkratnik števil a in b . Spomnimo se, da je vsako naravno število, ki je deljivo z a in z b , deljivo tudi z najmanjšim skupnim večkratnikom V . Izberimo si spet poljuben N in ga delimo z a , z b in z V . Naj bo pri delitvi z a kvocient q in ostanek o , pri delitvi z b kvocient q' in ostanek o' , pri delitvi z V pa kvocient q'' in ostanek o'' . Potem veljajo enačbe

$$N = qa + o, \quad N = q'b + o', \quad N = q''V + o''. \quad (3)$$

Vsi ostanki so negativni in manjši od ustreznega delitelja, torej $o < a$, $o' < b$, $o'' < V$.

Preštejmo zdaj, koliko je do N števil, ki niso deljiva niti z a niti z b . Najprej prečrtajmo v zaporedju $1, 2, 3, \dots, N$ tista števila, ki so deljiva z a . Teh je q (glej dokazovanje pri prvi nalogi). Nato še tista, ki so deljiva z b . Ker je $N = q'b + o'$, je teh q' . Pri tem smo nekatera števila dvakrat prečrtali, namreč vsa, ki so deljiva z a in z b . Števila deljiva z a in z b pa so natanko tista, ki so deljiva z najmanjšim skupnim večkratnikom V . Ker je $N = q''V + o''$, jih je q'' , tako da smo q'' števil dvakrat prečrtali. Torej $q + q' - q''$ števil med 1 in N smo vsaj enkrat prečrtali. Ta so tista, ki so deljiva z a ali z b . Števila, ki jih nismo prečrtali, pa niso deljiva niti z a niti z b . Le-teh je potemtakem

$$N - q - q' + q'' = M.$$

Izračunajmo zdaj iz enačb (3) kvociente q , q' in q'' . Verjetnost $v_N = \frac{M}{N}$ lahko izrazimo takole:

$$v_N = \frac{M}{N} = 1 - \frac{1}{a} - \frac{1}{b} + \frac{1}{V} + \frac{1}{N} \left(\frac{o}{a} + \frac{o'}{b} - \frac{o''}{V} \right). \quad (4)$$

Ker velja $0 \leq o < a$, $0 \leq o' < b$, $0 \leq o'' < V$, so kvocienti $\frac{o}{a}$, $\frac{o'}{b}$ in $\frac{o''}{V}$ nenegativni in vsi manjši od 1. Zato je zadnji člen na desni v (4) po absolutni vrednosti manjši od $\frac{2}{N}$, prvi štirje pa so neodvisni od N . Ko narašča N čez vse meje, postane zadnji člen tako majhen, kakor želimo; gre torej proti nič.

Zato zaporedje v_N konvergira, in sicer proti limiti

$$v = 1 - \frac{1}{a} - \frac{1}{b} + \frac{1}{V}. \quad (5)$$

Limita v je verjetnost, da po naključju izbrano naravno število ni deljivo niti z a niti z b . Pri tem pomeni V najmanjši skupni večkratnik števil a in b .

Oglejmo si posebni primer, ko sta a in b tuji si števili. Tedaj je najmanjši skupni večkratnik V kar produkt ab . Formula (5) se v tem primeru glasi

$$v = 1 - \frac{1}{a} - \frac{1}{b} + \frac{1}{ab}.$$

Zapišemo jo lahko v obliki

$$v = \left(1 - \frac{1}{a}\right)\left(1 - \frac{1}{b}\right). \quad (6)$$

Na desni je prvi faktor $1 - \frac{1}{a}$ verjetnost, da izbrano število ni deljivo z a , drugi $1 - \frac{1}{b}$ pa verjetnost, da ni deljivo z b . Torej pri tujih si a in b izračunamo verjetnost, da izbrano število ni deljivo niti z a niti z b tako, da enostavno pomnožimo verjetnost, da ni deljivo z a , z verjetnostjo, da ni deljivo z b .

V verjetnostnem računu velja pravilo o množenju verjetnosti tedaj, kadar so dogodki med seboj neodvisni. Če igramo na primer na dve loteriji, je seveda dogodek, da zadenemo glavni dobiček na prvi, neodvisen od dogodka, da ga zadenemo na drugi. Zato je verjetnost, da zadenemo glavni dobiček na obeh loterijah, enaka produktu $v_1 v_2$, kjer je v_1 verjetnost, da zadenemo glavni dobiček na prvi loteriji, in v_2 verjetnost, da ga zadenemo na drugi. Tudi v zgornjem primeru smo množili verjetnosti. Dogodek, da izbrano število ni deljivo z a , se vede potemtakem, kakor da je neodvisen od dogodka, da število ni deljivo z b . To velja pri tujih si a in b .

Če vzamemo namesto dveh tri naravna števila a, b in c , izračunamo na podoben način verjetnost, da naključno izbrano naravno število ni deljivo niti z a niti z b niti s c . Račun je precej dolgovezen in formula za verjetnost zapletena, zato je ne bomo navajali. Oglejmo si samo primer, ko so števila a, b, c paroma tuja. V tem primeru verjetnosti spet množimo: Verjetnost v , da izbrano število ni deljivo niti z a niti z b niti s c , je enaka produktu verjetnosti, da ni deljivo s posameznimi števili, torej

$$v = \left(1 - \frac{1}{a}\right)\left(1 - \frac{1}{b}\right)\left(1 - \frac{1}{c}\right).$$

Za zgled vzemimo za a, b, c prva tri praštevila 2, 3 in 5. Verjetnost, da po naključju izbrano naravno število ni deljivo niti z 2 niti s 3 niti s 5, je enaka

$$v = (1 - \frac{1}{2})(1 - \frac{1}{3})(1 - \frac{1}{5}) = \frac{4}{15}.$$

Če se spomnimo, kako smo opredelili verjetnost, lahko rečemo, da štiri pet-najstine naravnih števil ni deljivih niti z 2 niti s 3 niti s 5.

Pravilo, da pri dveh in treh tujih deliteljih verjetnosti množimo, velja tudi za poljubno končno množico paroma tujih si števil $a, b, \dots, k$. Verjetnost, da naključno izbrano naravno število ni deljivo z nobenim številom iz navedene množice, je enako produktu verjetnosti, da ni deljivo s posameznimi števili te množice.

- - -

Oglejmo si na koncu še dve zahtevnejši nalogi. Preden navedemo prvo, povejmo tole: Naravno število je brez kvadratnih deliteljev ali faktorjev, kadar ni deljivo z nobenim kvadratom večjim od 1. Tako so npr. števila 6, 10, 15 brez kvadratnih faktorjev. Število 6 ima delitelje 1, 2, 3, in 6; nobeden izmed njih ni kvadrat, večji od 1. Pač pa imajo 8, 12 in 18 kvadratne faktorje. Prvi dve števili sta namreč deljivi s $4 = 2^2$, tretje pa z $9 = 3^2$. Število n je brez kvadratnih faktorjev natanko takrat, kadar je produkt samih različnih praštevil (oziroma je praštevilo ali 1). Če nastopa namreč v razcepitvi števila n na prafaktorje kakšno praštevilo p večkrat kot faktor, je n deljiv s p^2 , torej ima kvadratni faktor. Obratno je tudi res: Naj bo n deljiv s kvadratom k^2 , kjer je naravno število k večje od 1. Ker je k deljiv vsaj z enim praštevilom p , je potem n deljiv s p^2 in v razcepitvi števila n nastopa prafaktor p najmanj dvakrat.

Zdaj pa k nalogi!

4. Kolikšna je verjetnost, da je na slepo izbrano naravno število brez kvadratnih deliteljev?

Pravkar smo ugotovili, da je naravno število brez kvadratnih faktorjev natanko takrat, kadar ni deljivo s kvadratom nobenega praštevila, torej kadar ni deljivo niti z 2^2 niti s 3^2 niti s 5^2 itd. Verjetnost, da izbrano število n ni deljivo z a , je $1 - \frac{1}{a}$. Kvadrati med seboj različnih praštevil so paroma tuja si števila. Zato dobimo verjetnost, da n ni deljiv niti z 2^2 niti s 3^2 itd. tako, da pomnožimo verjetnost, da ni deljiv z 2^2 , z verjetnostjo, da ni deljiv s 3^2 , itd. Verjetnost v , da je izbrano število n brez kvadratnih faktorjev, se

potemtakem izraža takole

$$v = \left(1 - \frac{1}{2^2}\right)\left(1 - \frac{1}{3^2}\right)\left(1 - \frac{1}{5^2}\right)\dots \quad (7)$$

Na desni teče produkt po vseh praštevilih. Toda, ojoj, praštevil je neskončno in je zato v tem produktu neskončno faktorjev. Neskončno faktorjev pa ne moremo zmnožiti, niti z najhitrejšim računalnikom ne. Kakšen pomen ima potem izraz na desni v (7)?

Pomnožimo najprej prva dva faktorja, nato dobljeni produkt s tretjim faktorjem, potem novi rezultat s četrtem itd. Dobimo zaporedje delnih produktov

$$1 - \frac{1}{2^2}, \quad \left(1 - \frac{1}{2^2}\right)\left(1 - \frac{1}{3^2}\right), \quad \left(1 - \frac{1}{2^2}\right)\left(1 - \frac{1}{3^2}\right)\left(1 - \frac{1}{5^2}\right), \dots$$

Vsi faktorji so pozitivni in manjši od 1. Zato so členi v tem zaporedju delnih produktov pozitivni in se manjšajo. Vedno bolj se približujejo nekemu številu, ki je spodnja meja tega zaporedja, in sicer največja spodnja meja. To pomeni, da zaporedje delnih produktov konvergira. Limito v imenujemo vrednost neskončnega produkta (7). Limita v , ki je v našem primeru največja spodnja meja, je lahko pozitivna ali nič. Izkaže se, da je za produkt (7) pozitivna. Limita v je verjetnost, da je na slepo izbrano naravno število brez kvadratnih deliteljev.

Kolikšna je vrednost produkta (7)? Izračunal jo je že Euler, in sicer je ugotovil, da znaša $\frac{6}{\pi^2}$. Tu ne moremo razlagati, kako je Euler prišel do rezultata. Povemo lahko samo to, da je njegova pot zelo zanimiva.

Odgovor na četrto vprašanje se potemtakem glasi:

Verjetnost, da je na slepo izbrano naravno število brez kvadratnih deliteljev, je $\frac{6}{\pi^2}$.

Naše dokazovanje, da je iskana verjetnost enaka produktu (7), seveda ni povsem neoporečno, saj nismo dokazali pravila o množenju verjetnosti za primer, ko imamo neskončno množico paroma tujih si števil. Vendar v matematiki pogosto pridemo do kakšnega rezultata najprej po poti, ki ni povsem zanesljiva, in potem, ko rezultat že poznamo, poskušamo najti zanj neoporečno utemeljitev. To v našem primeru gre, le neoporečen dokaz, da je iskana verjetnost $\frac{6}{\pi^2}$, je dosti bolj zapleten. Povejmo, da je tudi Euler izračunal vrednost produkta (7) na način, ki z današnjega stališča ni neoporečen.

V produktu (7) nastopajo kvadrati praštevil. Oglejmo si podoben produkt

$$(1 - \frac{1}{2})(1 - \frac{1}{3})(1 - \frac{1}{5}) \dots, \quad (8)$$

ki tudi teče po vseh praštevilih. Faktor $1 - \frac{1}{p}$ pomeni verjetnost, da po naključju izbrano naravno število ni deljivo s p . Neskončni produkt (8) lahko potem tolmačimo kot verjetnost, da izbrano število ni deljivo z nobenim praštevilom. Toda edino naravno število, ki ni deljivo z nobenim praštevilom, je 1 in verjetnost, da v neskončni množici naravnih števil izberemo ravno število 1, je enaka nič. Res se izkaže, da je vrednost produkta (8) enaka nič: Zaporedni delni produkti postanejo sčasoma poljubno majhni, konvergirajo proti nič.

Na koncu obravnavajmo še eno nalogo, ki pa je za spoznanje različna od dosedanjih.

5. Na slepo izberemo dve naravni števili. Kolikšna je verjetnost, da sta si tuji?

Števili m in n sta si tuji natanko tedaj, kadar ni praštevila, ki bi delilo obe. Če si namreč m in n nista tuja, imata kak skupni delitelj k , ki je večji od 1. Zato je k deljiv vsaj z enim praštevilom p in s tem p sta deljiva tudi m in n . Če pa, obratno, obstaja praštevilo p , ki deli m in n , potem si m in n nista tuja.

Kadar na slepo izberemo dve naravni števili m in n , je dogodek, da je število m deljivo z a , neodvisen od dogodka, da je število n deljivo z a . Ker je verjetnost obeh dogodkov $\frac{1}{a}$, je verjetnost, da sta m in n oba deljiva z a , enaka produktu obeh verjetnosti, torej $\frac{1}{a} \cdot \frac{1}{a} = \frac{1}{a^2}$. Verjetnost, da nista oba deljiva z a , pa je potem $1 - \frac{1}{a^2}$. Brez dokaza povejmo, da je verjetnost, da m in n nista oba deljiva niti z a niti z b pri tujih si a in b , enaka produktu verjetnosti, da nista oba deljiva z a in verjetnosti, da nista oba deljiva z b . (To se pravi, da se dogodek, da m in n nista oba deljiva z a , vede, kakor da je neodvisen od dogodka, da nista m in n oba deljiva z b .) To pravilo velja tudi v primeru, ko imamo več paroma tujih si števil.

Zgoraj smo ugotovili, da sta si m in n tuja natanko takrat, kadar ni praštevila, s katerim bi bila oba deljiva. Pripadajoča verjetnost v je zato enaka produktu verjetnosti $1 - \frac{1}{2^2}$, da nista oba deljiva z 2, z verjetnostjo

$1 - \frac{1}{3^2}$, da nista oba deljiva s 3, itd. po vseh praštevilih. Torej

$$v = (1 - \frac{1}{3^2})(1 - \frac{1}{5^2})(1 - \frac{1}{7^2}) \dots$$

To je tudi verjetnost, da sta si na slepo izbrani naravni števili m in n tuji. Produkt na desni je isti kakor v (7) in njegovo vrednost poznamo. Tako smo ugotovili:

Verjetnost, da sta si na slepo izbrani naravni števili tuji, je $\frac{6}{\pi^2}$.

Morda je prav, da se ob rešitvah zadnjih dveh nalog nekoliko zamislimo. Povejmo, zakaj.

Znani fizik Eugene Wigner pripoveduje v svojem članku Vloga matematike v naravoslovju ¹⁾ zgodbo o statistiku, ki je pokazal svojemu nekdanjemu sošolcu separaten odtis svoje razprave o rasti populacije. Sošolec je listal po odtisu in kar ni mogel verjeti, da nastopajo pri teoretičnem obravnavanju rasti populacije tako zapletene matematične formule. Spraševal je o pomenu raznih simbolov in znakov, med drugim tudi črke π . Statistek je povedal, da je π seveda razmerje med obsegom in premerom kroga. Na to mu je sošolec odvrnil: "Razmerje med obsegom in premerom kroga pa prav gotovo nima nobene zveze z rastjo populacije!"

Če bi nam kdo povedal, preden smo se seznanili z zadnjo nalogo in njeno rešitvijo, da je verjetnost, da sta na slepo izbrani naravni števili tuji, enaka $\frac{6}{\pi^2}$, bi tudi mi lahko podobno kakor statistikov sošolec vzkliknili: "Kako je to mogoče? Saj tujost med naravnimi števili vendar nima nobene zveze z razmerjem med obsegom in premerom kroga!"

V članku smo spoznali, da je to mogoče. Število π se res pogosto pojavlja v matematiki in uporabi ter včasih tam, kjer bi ga najmanj pričakovali.

Ivan Vidav

NAJMANJŠA PODMNOŽICA

Poišči najmanjšo podmnožico A naravnih števil, ki zadošča pogojema:

1. število 3 pripada množici A ,
2. če je v množici A število n , potem so v njej tudi števila $2n - 1$, $2n$ in $2n + 1$.

Martin Juvan

¹⁾ Prevod tega članka je izšel v časopisu Obzornik za matematiko in fiziko VIII (1961), str. 145 - 154.

TOPLOTNA IZOLACIJA PASJE HIŠICE – RAZISKOVALNI PROJEKT

Mednarodna komisija za pouk fizike (ICPE) objavlja v marčevski številki svojega glasila kratko notico z naslovom **“Toplotna izolacija pasje hišice”**. To je naslov projekta, ki teče na Poljskem in ki je vključen v mednarodni projekt z delovnim naslovom **“Ne zapravljajmo energije za ogrevanje”**. Namen projekta je vzpodbujanje zanimanja za preučevanje toplotnih izgub v stanovanjih in za njihovo preprečevanje ali zmanjševanje.

“Toplotna izolacija pasje hišice” je le okvirni naslov. Vključuje merjenje toplotne prevodnosti različnih materialov, merjenje toplotne prevodnosti plastovitih sten, merjenje toplotnih izgub iz hiš ali iz posameznih prostorov. Pomembno je preučevanje vrstnega reda izolacijskih plasti, zgradbe oken, mesta peči v prostoru ali v zgradbi in podobno. Projekt je namenjen predvsem učencem in dijakom, pri njem pa naj bi sodelovali tudi starši in učitelji, študentje in strokovnjaki z različnih področij. S projektom so začeli na začetku tega šolskega leta, podaljšati pa ga nameravajo še za eno leto. Najboljše prispevke bodo objavili in nagradili. K sodelovanju vabijo tudi učence in dijake iz drugih dežel, kjer so vprašanja toplotne izolacije bivalnih prostorov drugačna, drugačni pa so tudi dosegljivi izolacijski materiali.



Sodelovanje v projektu utegne biti zanimivo tudi za bralce Preseka. Če se kdo odloči zanj, naj si zamisli svoj predlog za raziskavo, se o njem pogovori z učiteljem fizike in ga pošlje tudi na uredništvo Preseka. Skupaj bomo pregledali predloge in morda svetovali spremembe ali dopolnila. O raziskavah bomo poročali, najzanimivejše pa objavili.

Marjan Hribar

TEKMOVANJA

NALOGE Z IZBIRNEGA TEKMOVANJA ZA 24. MEDNARODNO FIZIKALNO OLIMPIADO

Deset najboljših dijakov z državnega tekmovanja iz fizike, osem iz skupine D in dva iz skupine C, se je udeležilo posebnega izbirnega tekmovanja za uvrstitev v ekipo za 24. mednarodno fizikalno olimpiado v ZDA. Izbirno tekmovanje je potekalo v petek, 28. maja, v prostorih Oddelka za fiziko Univerze v Ljubljani. Tekmovalci so reševali dve teoretični nalogi, ki sta veljali skupaj 30 točk, in eno eksperimentalno nalogo za 20 točk. Kriterij za uvrstitev na olimpiado je bila vsota točk z izbirnega tekmovanja in točk, doseženih na državnem tekmovanju v skupini D.

Tokrat objavljamo naloge s tega tekmovanja.

Teoretični nalogi:

Balon: Nad površino zemlje lebdi balon v obliki krogle z radijem 5 m, napolnjen s helijem. Radij in oblika balona se ne spreminjata. Temperatura zraka je ves čas 20°C in se z višino ne spreminja, zračni tlak pri tleh meri 100 kPa. Vlada popolno brezvetrje.

- Z balona spustijo predmet z maso 0,5 kg. Poišči novo ravnovesno lego balona.
- Kolikšno največjo višino doseže balon, če zanemarimo upor zraka?
- Kako se giblje balon, če upora zraka ne upoštevamo? (Zapiši enačbo gibanja in izračunaj vse parametre, ki nastopajo v enačbi.)
- Oceni upor zraka. (Linearna sila na kroglo je $6\pi r\eta v$, kvadratna pa $\frac{1}{2}c_u\rho Sv^2$, če je v hitrost, r radij in S prečni presek krogle, η je viskoznost in ρ gostota zraka, $c_u = 0,4$ pa koeficient upora za kroglo.)
- Kako bi določil povprečno silo upora, ki deluje na balon?

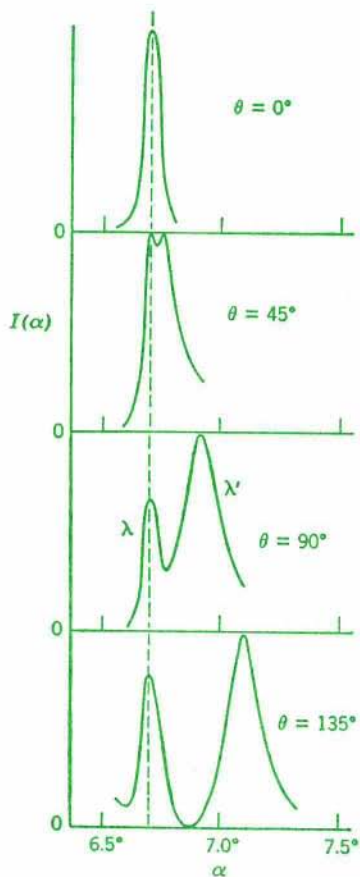
Podatki: Splošna plinska konstanta $R = 8300 \text{ J/kmolK}$, povprečni kilomol zraka je 29,3 kg, viskoznost $\eta = 1,7 \cdot 10^{-5} \text{ kg/ms}$.

Comptonov pojav: Pri Comptonovem pojavu se fotoni svetlobe z valovno dolžino λ elastično sipljejo na elektronih. Po sipanju odletita foton in elektron vsak na svojo stran. Sipanje lahko obravnavamo klasično, kot elastični trk fotona in mirujočega elektrona. Velja

$$\lambda' - \lambda = \frac{h}{mc} (1 - \cos \theta), \quad (1)$$

če je θ kot, pod katerim odleti sipani foton glede na vpadno smer, λ' je njegova valovna dolžina, m je masa elektrona, h Planckova konstanta in c hitrost svetlobe v vakuumu.

- Iz enačb za elastični trk dveh delcev izpelji enačbo (1) za primer sipanja fotona nazaj ($\theta = 180^\circ$). Lahko privzameš, da je hitrost elektrona po trku mnogo manjša od svetlobne ($v \ll c$). Pri izpeljavi (smiselno) zanemari izraze, ki vsebujejo v^2/c^2 .
- Veljavnost enačbe preveri še pri kotu 90° . Pod kolikšnim kotom glede na smer vpadnega fotona tedaj odleti elektron?
- Compton je pojav opazoval tako, da je usmeril curek rentgenske svetlobe z valovno dolžino $0,071 \text{ nm}$ na grafit in meril spekter sipane svetlobe pod različnimi koti. Slika kaže spekter svetlobe, ki se je sipala v smeri naprej ($\theta = 0^\circ$) ter pod koti 45° , 90° in 135° . Valovno dolžino svetlobe merimo z uklonom na kristalu kalcita. Na absciso na slikah tako nanašamo kot α , za katerega se odkloni svetloba pri odboju na kristalu.
Oceni, kako dobro se izmerjeni rezultati ujemajo z napovedjo enačbe (1). Ker so koti α majhni, lahko za uklon na kalcitu uporabiš kar enačbo za uklon na mrežici. (Razdalji med zarezi mi približno ustreza razdalja med kristalnimi ravninami v kalcitu.)
- S slike oceni največjo valovno dolžino svetlobe, ki bi jo lahko Compton še uporabil, da bi dokazal spremembo valovne dolžine svetlobe po sipanju.



Foton svetlobe z valovno dolžino λ obravnavamo kot delec z energijo hc/λ in z gibalno količino h/λ . Podatki: $h = 6,62 \cdot 10^{-34} \text{ Js}$, $m = 9,1 \cdot 10^{-31} \text{ kg}$, $c = 3,0 \cdot 10^8 \text{ m/s}$.

Eksperimentalna naloga

Karakteristika termistorja: Na razpolago imaš termistor, zaporedno vezan z upornikom za 10 k Ω in s priključki, osciloskop, univerzalni instrument, izvir enosmerne napetosti 0 – 24 V, termometer, dve stekleni čaši, ledene kocke in toplo vodo, milimetrski papir.

1. Izmeri odvisnost upora termistorja od temperature v temperaturnem območju med 0° C in 30° C.
2. Določi odzivni čas termistorja.

V poročilu pojasni in skiciraj eksperimentalni postopek; z nekaj besedami povej, kako si razrešil eksperimentalne težave, ki so se pojavile pri merjenju; opiši, kako si določil statistično in sistematsko napako ter pojasni izvor napak, zabeleži številko termistorja. Poročilo naj bo napisano jedrnato, vendar skrbno in pregledno. Piši ga sproti; delo si organiziraj tako, da na koncu ne boš prišel v časovno stisko. Zavedaj se, da bomo tvojo uspešnost pri eksperimentiranju ocenili le na podlagi pisnega izdelka. Rezultate prikaži tudi grafično, kjerkoli je to mogoče.

Bojan Golli

KAJ KDO DELA?

Novak, Potokar, Zupan in Žužek so zaposleni kot blagajnik, varnostnik, kuhar in izterjevalec dolgov v Šentflorjanski banki.

- Za šahovnico varnostnik vedno premaga izterjevalca dolgov, pa kljub temu izterjevalec noče igrati šaha z nobenim drugim sodelavcem iz banke.
- Varnostnik in kuhar sta oba boljša šahista kot blagajnik.
- Zupan in Žužek sta soseda in marsikateri večer skupaj prebijeta nad šahovnico.
- Potokar igra šah precej bolje od Zupana.
- Blagajnik živi v isti soseski kot izterjevalec dolgov, precej daleč stran od ostalih.

Kateri izmed štirih mož opravlja katero delo?

Neža Mramor-Kosta

Kako prijetno se je voziti s kolesom! Ob tem pa se kdaj pa kdaj spomnimo tudi na fiziko. Opisali bomo nekaj preprostih poskusov, ki nam bodo osvežili morda že pozabljena poglavja mehanike - najstarejše veje fizike.

1. Tlak

Škotski veterinar John Dunlop je leta 1888, torej pred več kot stotimi leti, iznašel pnevmatiko za kolo. Vožnja s kolesom je s tem postala prijetna, kolo so pričeli uporabljati tudi pri vsakdanjih prevozi.

Stisnjen zrak v pnevmatiki blaži udarce kolesa ob kamenje in ostre robове ceste. Trenje med kolesi in cesto je majhno, še posebno pri dirkalnih kolesih. Pnevmatike morajo biti čvrste, da jih na cesti ne preluknjamo, in dovolj mehke, da blažijo udarce. Pravimo, da mora imeti stisnjen zrak v njih ustrezen *t/lak*. To je fizikalna količina, ki pove s kolikšno silo pritiska zrak na dano ploskev pnevmatike. Če označimo velikost te ploskve z S , silo, s katero pritiska stisnjen zrak na to ploskev pa z F , izračunamo tlak takole:

$$p = \frac{F}{S}.$$

Enota za tlak je Nm^{-2} in jo imenujemo pascal (Pa), večja enota pa je bar. Zrak s tlakom enega bara pritiska na ploskev z velikostjo 1m^2 s silo 10^5N ali, drugače povedano, s silo 10N na ploskev z velikostjo 1cm^2 . Težo 10N ima utež z maso enega kilograma.

Ko se povzpne na kolo, se stična ploskev med pnevmatiko in cesto poveča. Sila, s katero potiska cesta kolo navzgor, je po velikosti enaka skupni teži kolesa in kolesarja. Stisnjen zrak v pnevmatikah deluje znotraj stičnega dela pnevmatike s cesto z enako veliko, a nasprotno usmerjeno silo. Teža kolesa s kolesarjem je sorazmerna s skupno maso m obeh:

$$F_t = mg,$$

kjer smo z g označili pospešek prostega pada $g = 10\text{ms}^{-2}$. Sila stisnjenega zraka na stično ploskev je:

$$F_z = pS,$$

pri čemer je p tlak zraka v pnevmatiki, S pa velikost stične ploskve. Iz enačbe

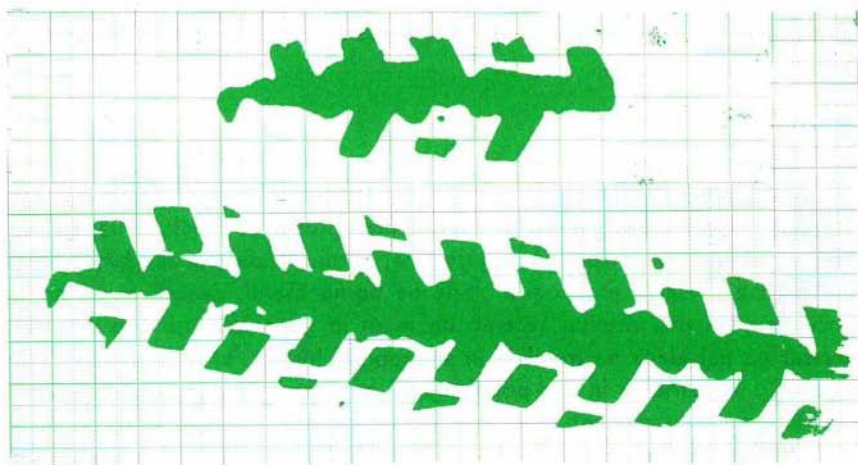
$F_t = F_z$ sledi torej

$$mg = pS$$

in

$$p = \frac{mg}{S}.$$

Če izmerimo velikost stične ploskve obeh koles in poznamo skupno maso, lahko izračunamo tlak v zračnicah. Preverimo lahko tudi, če je razmerje med težo in stično ploskvijo enako pri poljubni skupni masi m . Na sliki 1 sta odtisa obeh pnevmatik nekega kolesa na milimetrskem papirju. Pri jemanju tega odtisa se kolo ni premikalo v vodoravni smeri. Skupna masa je bila 72kg. Ocení iz teh podatkov tlak v pnevmatikah tega kolesa, če veš, da je bil tlak zraka v pnevmatiki sprednjega kolesa dvakrat večji kot tlak v zadnji.



Slika 1.

2. Merilnik hitrosti

Pri poskusih bomo potrebovali kolo z merilnikom hitrosti. Le-ta določa hitrost kolesa na osnovi časa, ki ga porabi sprednje kolo za en obrat. V tem času prepotuje kolesar razdaljo, ki je enaka obsegu kolesa. Če kolo porabi za en obrat t_0 sekund, je kolesarjeva hitrost v :

$$v = \frac{o}{t_0},$$

pri čemer smo obseg kolesa označili z o . Sodobni kolesarski merilniki hitrosti izračunajo trenutno hitrost kolesa iz te enačbe. Čas t_0 enega obrata izmerijo na podlagi sunkov iz merilne tuljavice na vilicah sprednjega kolesa. Ko se magnet, pritrjen na napero kolesa (špico), giblje mimo tuljavice, se v njej inducira napetostni sunek. Ta požene v merilniku vgrajeno uro, naslednji sunek pa uro ustavi. Obseg kolesa vpiše kolesar pred vožnjo v merilnik.

Oglejmo si primer. Pri obsegu kolesa $o = 197\text{cm}$ smo izmerili čas $t_0 = 0,3\text{s}$. Hitrost kolesa je potem:

$$v = \frac{o}{t_0} = \frac{1,97\text{m}}{0,3\text{s}} = 6,6\text{ms}^{-1}.$$

V takem merilniku je cel mikroračunalnik. Poleg trenutne hitrosti pokaže še povprečno hitrost pri izletu, prevoženo število kilometrov, največjo hitrost, ki smo jo dosegli na izletu, skupno število vseh prevoženih kilometrov, odkar smo merilnik pritrdili na kolo, in natančen čas trajanja izleta. Merilnik prijetno poživi kolesarjenje.

3. Pospeševanje

Sedaj smo pripravljeni na poskus s pospeševanjem kolesa. Kolo naj ima merilnik hitrosti. Poiščimo mirno cesto brez prometa. Podlaga naj bo čim bolj ravna in gladka. Kolo s kolesarjem naj miruje. Kolesarja začnemo krepko potiskati z vseskozi enako silo. Sile ne bomo merili, zanesli se bomo na občutek. Pri prvi meritvi tečemo ob njem in ga potiskamo eno sekundo, kolesar pa naj gleda na merilnik in si zapomni hitrost, ki jo je dosegel v tej sekundi. Ta izmerek in čas potiskanja si zapišimo. Nato ga od mirovanja potiskamo z isto silo kot prej, vendar dve sekundi dolgo in spet zapišemo končno hitrost. To ponovimo še za čase 3s , 4s , ..., dokler še zmoremo teči skupaj s kolesarjem in ga obenem potiskati. Več kot 5 sekund verjetno ne bo šlo. Zapisane izmerke nato vrišemo. Hitrost po eni sekundi potiskanja smo na sliki 2 ponazorili z večjim krožcem. Njena oddaljenost od vodoravne osi grafa naj bo sorazmerna z doseženo hitrostjo. Nato narišemo hitrost po dveh sekundah potiskanja in nadaljujemo, dokler nam ne zmanjka izmerkov. Vidimo, da so krožci vse višje. Če smo potiskali z enako silo pri vseh poskusih, se hitrost povečuje enakomerno. Pri dvakrat daljšem času potiskanja je končna hitrost kolesarja dvakrat večja. Tega morda iz risbe ne bomo prav jasno videli, a natančni poskusi potrjujejo takšen izid. Sedaj ponovimo poskus z lažjim kolesarjem. Tudi tega potiskajmo z enako silo kot prej težjega in spet

narišimo sliko. Opazimo, da so končne hitrosti pri lažjem kolesarju večje kot pri težjem. Prav tako bi kolo bolj pospeševali, če bi kolesarja potiskali z večjo silo. Poskus nas prepriča, da je razmerje med končno hitrostjo in ustreznim časom pospeševanja odvisno od pospeševalne sile in skupne mase:

$$\frac{v}{t} = \frac{F}{m}.$$

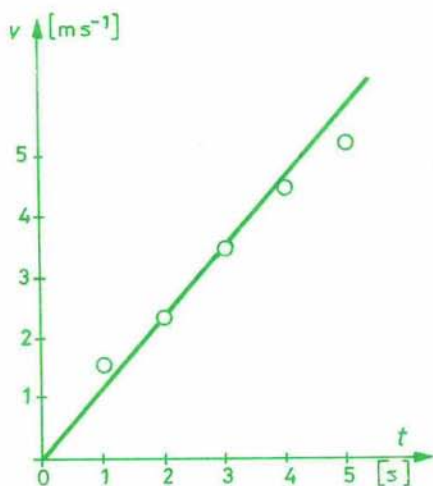
Razmerje med končno hitrostjo kolesarja in časom pospeševanja imenujemo pospešek in ga zaznamujemo s črko a . Ker ga znamo izračunati, saj smo hitrost in čas merili, lahko ob znani skupni masi izračunamo silo F . V našem primeru je ta masa 72 kg, pospešek

$$a = \frac{5,8 \text{ ms}^{-1}}{5 \text{ s}} = 1,2 \text{ ms}^{-1}.$$

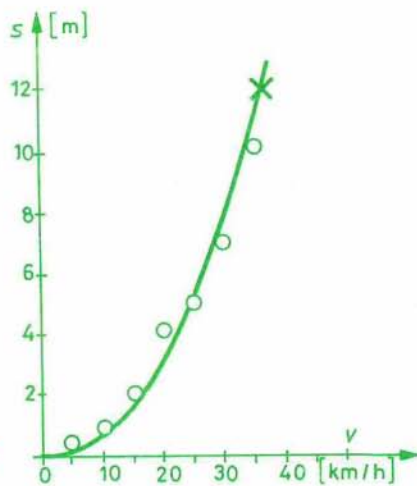
Sila je potem:

$$F = ma = 84 \text{ N}.$$

Tako težo ima telo z maso 8,4 kg. Zvezo med silo F , maso m telesa, ki ga pospešujemo, in njegovim pospeškom a imenujemo drugi Newtonov zakon.



Slika 2.



Slika 3.

4. Zaviranje

Pri opazovanju zaviranja bomo na tla narisali črto. Zaleta vzamemo toliko, da dosežemo izbrano hitrost. Zavoro zadnjega kolesa stisnemo v trenutku, ko smo s prvim kolesom zapeljali na črto. Zavirano kolo naj se ves čas vrtil in naj ne drsa po tleh. Razdaljo, ki jo prevozimo med zaviranjem, si zapišemo skupaj z začetno hitrostjo. Poskus ponovimo pri drugih začetnih hitrostih in narišemo na sliko prevoženo pot v odvisnosti od začetne hitrosti. Prevožene poti z začetno hitrostjo naraščajo. Pri dvakrat večji začetni hitrosti je sedaj pot kar štirikrat daljša (slika 3). Res tudi podrobnejše računanje pokaže, da prevožena pot s narašča s kvadratom začetne hitrosti v , če zaviramo z enakim pojemkom a :

$$s = \frac{v^2}{2a}.$$

Pojemek a je z Newtonovim zakonom povezan s silo zavor. Iz grafa našega poskusa razberemo, da je zavorna pot pri hitrosti $36\text{ km/h} = 10\text{ ms}^{-1}$ okrog 12 metrov. Pojemek a je tedaj:

$$a = \frac{v^2}{2s} = \frac{100\text{ m}^2\text{s}^{-2}}{24\text{ m}} = 4,2\text{ ms}^{-2}$$

in zaviralna sila $F = ma = 300\text{ N}$. Zavore so presenetljivo učinkovite, saj smo zavirali le zadnje kolo.

5. Vožnja v ovinek

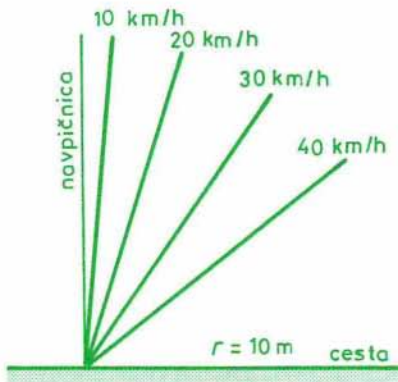
Pri vožnji v ovinek se kolesar s kolesom giblje po ukrivljeni poti. Pri gibanju naravnost deluje cesta na kolo le v navpični smeri navzgor, da premaga težo. Silo trenja med cesto in pnevmatikami zanemarimo. Najlažje obravnavamo gibanje po krožnici s polmerom r . Pri takem gibanju mora kolo potiskati sila, ki kaže proti središču krožnice, torej pravokotno na trenutno smer potovanja. Pravimo ji radialna sila. Iz enačbe za to silo:

$$F_r = m \frac{v^2}{r},$$

pri čemer je spet v hitrost kolesa, vidimo, da kolesar z maso 72 kg , ki s hitrostjo 20 km/h zapelje v krožni ovinek s polmerom 10 m , potrebuje radialno silo 222 N . Kolesar se v ovinku nagne. Cesta tedaj potiska kolo poševno, torej hkrati navpično in vodoravno. Opazimo, da je v enačbi za radialno silo hitrost

kvadrirana. To pomeni, da potrebuje dvakrat hitrejši kolesar pri vožnji v isti ovinek kar štirikrat večjo radialno silo in se mora zato v ovinku precej bolj nagniti. Slika 4 kaže nagibe pri vožnji v ovinek z radijem 10m s hitrostmi 10, 20, 30 in 40km/h. Nagib pri hitrosti 40km/h je tako velik, da bi kolesar prav gotovo padel.

Oceni hitrost, s katero se pelje Einstein na sliki 5 v ovinek!



Slika 4.



Slika 5.

6. Moč pri kolesarjenju

Pri kolesarjenju moramo premagovati silo trenja in upor zraka. Za to potrebujemo moč mišic nog, ki poganjajo stopalke. Mehanično moč izračunamo iz enačbe:

$$P = Fv,$$

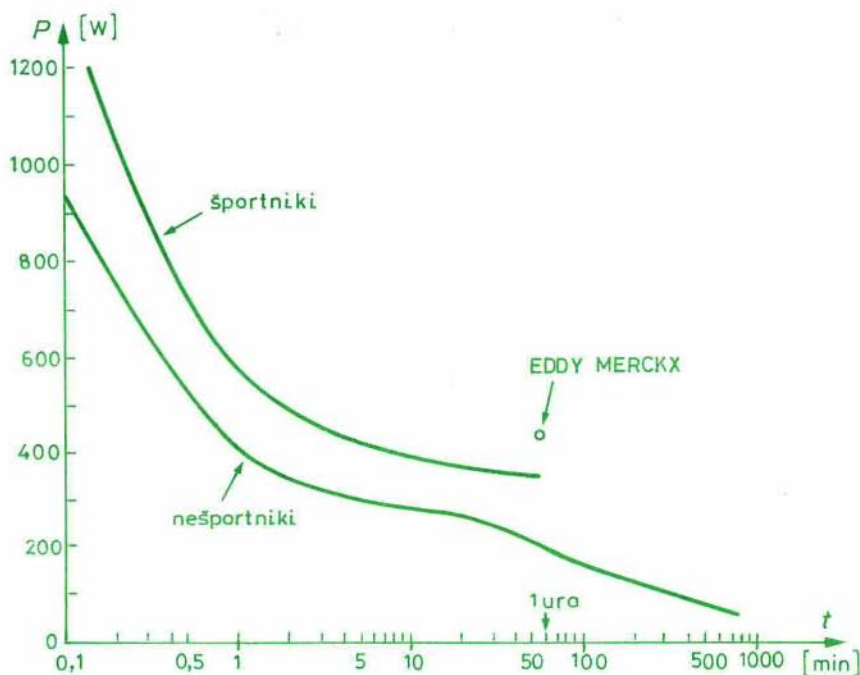
pri čemer je F zaviralna sila trenja in zračnega upora, v pa hitrost kolesa. Pri vožnji s hitrostmi, ki so večje od 10km/h, prevladuje zračni upor, zato lahko trenje pri teh hitrostih celo zanemarimo. Upor lahko izmerimo z zaviralnim poskusom, le da sedaj zavira zrak. Upor zraka je močno odvisen od hitrosti kolesarja glede na zrak. Zaviralni poskus bomo zato izvedli drugače kot prej.

Merili bomo čas, ko se bo kolesarjeva hitrost zmanjšala od hitrosti $v_1 = 30\text{ km/h}$ na $v_2 = 25\text{ km/h}$. V tem času se upor zraka le malo spreminja. V računih bomo privzeli, da sta sila in z njo pojemek med zaviranjem konstantna. Merimo v brezvetrju in na vodoravni podlagi. Meritev je dobro opraviti dvakrat: pri drugi naj vozi kolesar v nasprotni smeri kot pri prvi. Čas zaviranja mora biti pri obeh poskusih približno enak, če ne moti nagib ceste ali veter. Pri poskusu smo izmerili čas pojemanja $t = 4,6\text{ s}$, pojemek je torej:

$$a = \frac{v_1 - v_2}{t} = 0,3\text{ ms}^{-2},$$

upor pa sledi iz Newtonovega zakona:

$$F = ma = 72\text{ kg} \cdot 0,3\text{ ms}^{-2} = 22\text{ N}.$$



Slika 6.

Tako silo moramo premagovati pri enakomerni vožnji s hitrostjo nekaj nad 25km/h. Moč, ki jo pri tem potrebujemo, je:

$$P = Fv = 22\text{ N} \cdot 7,6\text{ ms}^{-1} = 168\text{ W}.$$

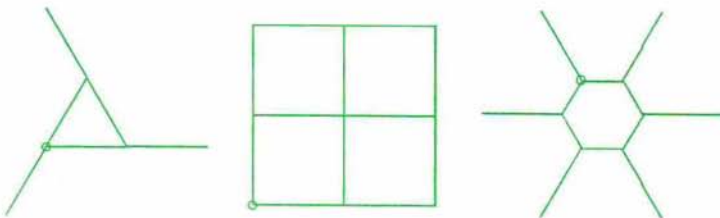
Poskus smo ponovili pri začetni hitrosti 20km/h in končni 15km/h. Tu je bil čas 6s in ustrezna moč le 80W.

Za človeka je 168W kar velika moč. Pomisliti moramo, da je konjska moč, ki so jo nekdanj uporabljali kot enoto, le 750W. Eddy Merckx je bil eden od najmočnejših kolesarjev vseh časov. Pri nekem poskusu je v laboratoriju eno uro poganjal kolo z močjo blizu 500W. S slike 6 razberemo mehanično moč, ki jo človek zmore pri nepretrganem in enakomernem naporu. Vidimo, da moč s trajanjem napora izrazito pada. Z močjo 168W bi odrasel človek lahko delal nepretrgoma le eno uro, z močjo 80W pa že osem ur. Na kolesarskih dirkah vozijo kolesarji po ravnem s hitrostmi nad 50km/h, vendar imajo posebna kolesa in obleko, precej časa pa vozijo v zavetrju drugih tekmovalcev. Na dirki, ki traja 2 do 3 ure, bi pobegli tekmovalec lahko poganjal kolo z močjo blizu 400W.

Verižni prenos moči do zadnjega kolesa in prestave omogočijo udobno kolesarjenje. Stopalki sta nameščeni na ustreznem mestu, prestave pa omogočijo, da stopalki vrtimo s primerno frekvenco. Prepočasno vrtenje bi pri dani moči terjalo pretrdo potiskanje, pri prehitrem vrtenju pa kolesa ne bi mogli izdatneje potiskati. V to se hitro prepričamo, če želimo peljati po ravnem v prenizki prestavi ali navkreber v previsoki.

Andrej Likar

NEZNANI LIKI – Rešitev s str. 210



Začetni položaj želve je na slikah označen s krožcem.

Martin Juvan

2. DRŽAVNO TEKMOVANJE OSNOVNOŠOLCEV IZ MATEMATIKE – Rešitve s str. 197

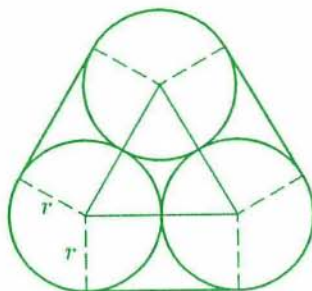
7. razred

1. Iz $a(a-1) - a(a-2) - 3 = 2$ izračunamo $a = 5$, nato pa še $\sqrt[3]{(2-5)^2 + (5+1)^2 + 19} = \sqrt[3]{(-3)^2 + 6^2 + 19} = \sqrt[3]{64} = 4$.
2. Nastavimo enačbo $x + x + \frac{1}{2}x + \frac{1}{4}x + 1 = 100$, ki jo preoblikujemo v $\frac{11}{4}x = 99$, od tod pa izrazimo $x = 36$. Pastir je takrat imel 36 ovac.
3. Naj bo iskano število $10a + b$. Potem je število $(10a + b) + (10b + a) = 11a + 11b = 11(a + b)$ kvadrat naravnega števila. Ker a in b označujeta števki, je $a + b = 11$ in nastopijo naslednje možnosti:

a	2	3	4	5	6	7	8	9
b	9	8	7	6	5	4	3	2

Iskana števila so 29, 38, 47, 56, 65, 74, 83 in 92.

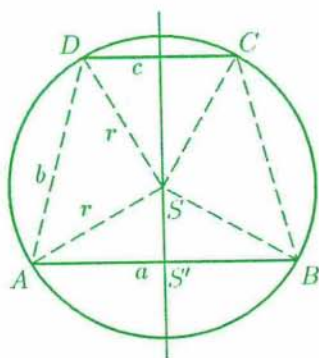
4. Iz slike razberemo, da je naravnost napeta elastika dolga $6r$, po krožnih lokih pa $2\pi r$. Seveda je $2\pi r > 6r$ in $\frac{6,28r}{6r} = \frac{6,28}{6} \div 1.0467$. Več elastike je napete po krožnih lokih, in sicer za 4.67.
5. a) Najprej je $\frac{2}{15} \cdot 180^\circ = 24^\circ$, nato pa iz $n \cdot 24^\circ = 360^\circ$ dobimo $n = 15$. Gre za petnajstkotnik.
 b) Iz vsakega oglišča gre $n - 3 = 12$ diagonal, po dve sta enako dolgi, torej ima petnajstkotnik 6 skupin med seboj enako dolgih diagonal.
 c) Vseh diagonal je $\frac{n(n-3)}{2} = \frac{15 \cdot 12}{2} = 90$. Ker je skupin 6, je v vsaki skupini 15 enako dolgih diagonal.



8. razred

1. Nastavimo enačbo $x + \frac{1}{10}x - \frac{1}{3}(x + \frac{1}{10}x) = 440$ in jo rešimo: $x + \frac{1}{10}x - \frac{1}{3}x - \frac{1}{30}x = 440$, $30x + 3x - 10x - x = 13200$, $22x = 13200$, $x = 600$. Začetna cena je bila 600 SIT.

2. Ker je $\sphericalangle CSD = 60^\circ$, je $c = r = 6$, zaradi $\sphericalangle ASD = \sphericalangle BSC = 90^\circ$ pa $b = r\sqrt{2} = 6\sqrt{2}$. Trikotnik $S'SA$ je enak polovici enakostraničnega trikotnika in velja $\frac{a}{2} = \frac{r\sqrt{3}}{2}$ oziroma $a = 6\sqrt{3}$. Končno ni težko izračunati obsega: $o = a + 2b + c = r\sqrt{3} + 2r\sqrt{2} + r = 6(\sqrt{3} + 2\sqrt{2} + 1)$ cm.

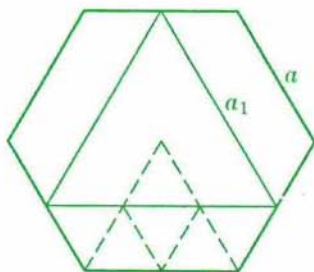


$$3. \frac{\left(\frac{1}{x^2} - \frac{1}{y^2}\right) \cdot \left(\frac{x-y}{x+y} - 1\right)}{\left(\frac{x-y}{x+y} + 1\right) \cdot \left(\frac{x}{y} - \frac{y}{x}\right)} = \frac{\frac{y^2-x^2}{x^2y^2} \cdot \frac{x-y-x-y}{x+y}}{\frac{x-y+x+y}{x+y} \cdot \frac{x^2-y^2}{xy}} =$$

$$= \frac{(y-x)(y+x)(-2y)(x+y)xy}{x^2y^2(x+y) \cdot 2x(x+y)(x-y)} =$$

$$= \frac{x-y}{x^2(x-y)} = \frac{1}{x^2}$$

4. Naj bo rob osnovne ploskve šeststrane prizme a . Potem je rob tristrane prizme $a_1 = \frac{3}{2}a$ in prostornini $V_6 = \frac{6a^2\sqrt{3}}{4} \cdot a =$
 $= \frac{3a^2\sqrt{3}}{2} \cdot a$ ter $V_3 = \frac{a_1^2\sqrt{3}}{4} \cdot a =$
 $= \frac{(\frac{3}{2}a)^2\sqrt{3}}{4} \cdot a = \frac{9a^2\sqrt{3}}{16} \cdot a.$



Tako je $\frac{V_3}{V_6} = \frac{9a^2\sqrt{3} \cdot a \cdot 4}{16 \cdot 6a^2\sqrt{3} \cdot a} = \frac{3}{8}$ oziroma $V_3 = 0.375V_6 = 37.5\% V_6$. Prostornina pravilne tristrane prizme je 37.5% prostornine pravilne šeststrane prizme.

5. Naj bo $P(0, y_1)$ presečišče premic. Iz enačbe prve premice dobimo $m \cdot 0 + (2m+3)y_1 + m + 6 = 0$ in $y_1 = \frac{-m-6}{2m+3}$, iz druge pa $(2m+1) \cdot 0 + (m-1)y_1 + m - 2 = 0$ in $y_1 = \frac{-m+2}{m-1}$. Izenačimo vrednosti za y_1 : $\frac{-m-6}{2m+3} = \frac{-m+2}{m-1}$, pa imamo $-m^2 - 6m + m + 6 = -2m^2 - 3m + 4m + 6$, $m^2 - 6m = 0$ oziroma $m(m-6) = 0$ z rešitvama $m_1 = 0$ in $m_2 = 6$. Premici se bosta sekali na ordinatni osi, če je $m \in \{0, 6\}$.

Aleksander Potočnik

REŠITVE NALOG

KOLIKO NIČEL? - Rešitev s str. 253

Da ugotovimo, s koliko ničlami se v desetiškem zapisu konča število $n!$, tega števila ni potrebno izračunati. Poiskati moramo le največjo potenco števila 10, ki deli $n!$. Ker je število 10 produkt praštevil 2 in 5, je dovolj poiskati največji potenci teh dveh praštevil, ki delita število $n!$. Iskano število ničel bo enako manjšemu od obeh eksponentov. Poglejmo, kako poiščemo eksponent pri največji potenci števila 5, ki deli $n!$. Vsak večkratnik števila 5 med števili $1, 2, \dots, n$ prispeva vsaj eno petico. Vendar pa nekateri večkratniki prispevajo k razcepu števila $n!$ več kot eno petico. Tako večkratniki števila $25 = 5^2$ prispevajo vsaj dve, večkratniki števila $125 = 5^3$ prispevajo vsaj tri, v splošnem večkratniki števila 5^i prispevajo vsaj i petic. Med števili $1, 2, \dots, n$ je ravno za celi del kvocienta $\frac{n}{5}$ večkratnikov števila 5. Enako izračunamo tudi število večkratnikov ostalih potenc števila 5. Ker je 5 večje od 2, gornji premislek z večkratniki pove, da bo eksponent pri največji potenci števila 2, ki deli $n!$, kvečjemu večji od tistega, ki ga dobimo pri številu 5. Tako nam v rešitvi s potencami števila 2 sploh ne bo potrebno računati.

Ker bomo program zapisali v pascalu, bomo za izračun celega dela kvocienta uporabili funkcijo `div`. Upoštevali bomo tudi, da je $n \text{ div } 25 = (n \text{ div } 5) \text{ div } 5$. V to enakost se najlažje prepričamo tako, da število n zapišemo v obliki $n = 25k + o$, kjer je $0 \leq o < 25$. Potem je $n \text{ div } 25 = k$ in $(n \text{ div } 5) \text{ div } 5 = (5k + o \text{ div } 5) \text{ div } 5 = k$, saj je $0 \leq o \text{ div } 5 < 5$.

Ob upoštevanju gornjega razmisleka je rešitev zelo kratka.

```
program Nicle;
{ Prebere število n in izračuna, s koliko ničlami se konča n!. }
var
  n: integer;                                { vhodni podatek: naravno število }
  sn: integer;                               { rezultat: število ničel }
begin
  repeat write('Vnesi naravno število: '); readln(n); until n>0;
  write('Število ',n,'! ima v desetiškem zapisu na koncu ');
  sn := 0;
  while n>0 do
    begin sn := sn + (n div 5); n := n div 5; end;
  writeln(sn, ' nicel. ');
end.
```

Čeprav je število $1994!$ zelo veliko, ima namreč kar 5716 števk, lahko z zgornjim postopkom tudi brez računalnika izračunamo, s koliko ničlami se

konča v desetiškem zapisu. Računajmo:

$$(1994 \text{ div } 5) + (1994 \text{ div } 25) + (1994 \text{ div } 125) + (1994 \text{ div } 625) = \\ 398 + 79 + 15 + 3 = 495.$$

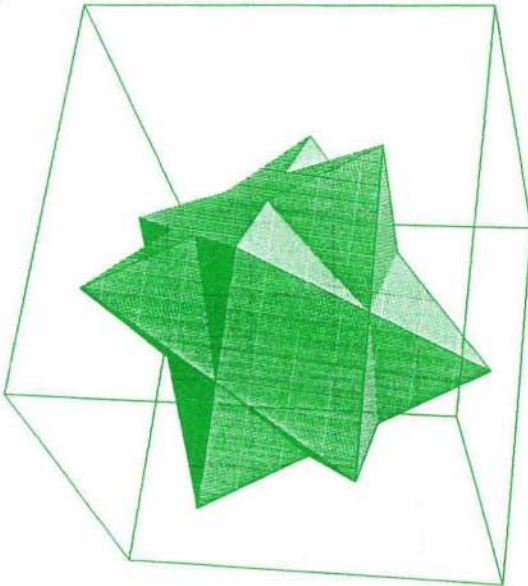
Seveda pri seštevanju upoštevamo le tiste člene, pri katerih so celoštevilski kvocienti večji od 0. In zakaj smo kvocient $n \text{ div } 25$ upoštevali le enkrat, čeprav večkratniki števila 25 prispevajo vsaj dve petici? Zato, ker so ti večkratniki tudi večkratniki števila 5 in je ena petica že šteta v členu $n \text{ div } 5$.

Končajmo to nekoliko obširnejšo rešitev z vprašanjem. Kako bi bilo potrebno spremeniti gornji program, da bi z njim izračunali, s koliko ničlami se konča število $n!$ v dvojiškem zapisu?

Martin Juvan

PENTAGRAMSKA ANTIPRIZMA – Rešitev s str. 196

V prejšnji številki Preseka smo vas povabili, da narišete pentagramsko antiprizmo. Tole tu, s katero lahko primerjate svojo, smo narisali s programom Mathematica.



Tomaž Pisanski

KRIŽANKA S FIZIKALNIMI POJMI

AVTOR MARKO BOKALIČ	TOVARNA V MARIBORU	GIBANJE ELEKTRO- NOV PO VODNIKU	PRIMARNI "VZROK" TEŽE PREDME- TOV	VOLUMEN, KUBATURA	ERNA MUSER	REDKA GOZDNA ZVER	PRODAJNO BLAGO	ITAL. SKLA- DATELJ (GIU- SEPPE)	NEKD. HRVAŠKI POPEVKAR (MIRO)	OKSID POVR- ŽELE
TOPLOTNO STANJE SNOVI										
SPROŽA- NJE ALARMA										
ŽVILO ŽI- VALSKEGA IZVORA					LJUBLJAN. ŽUPAN (JOŽE)					
KONJSKI TEK					ANGLEŠKI GLED. REŽISER (EDWARD)	IGRALKA RINA				ODPR- V ZII
PROIZVAJANJE ELEK. NAPETOSTI V TULJAVI										LEK PI- GLAV- BOL
IVAN TAVČAR			TONY CURTIS			PRIPADNIK TEŽKE KO- NJENICE 10 GRAMOV				
NUŠA ROMIH			ODLIKO- VANJE SESTANEK						MESTO OB ANIŽI V AVSTRIJI	
BRIT. DRŽAVNIK V 19. STOL. BENJAMIN									SISTEM BARVNE TV ZLOČINSKA ORGANI- ZACIJA	
STAR IZRAZ ZA UČITELJA								BAJKA RANAR, MAZAČ		
VEZANO TISKANO DELO							SREDIŠČE FRANCIJE ZGORNJA OKONČINA			
STRUPEN PLIN IZ OGLJIKA IN DUŠIKA					RISARSKA UMETNOST PISATELJI- CA PEROCI					
IZTOK TOMAZIN			NAUK O GIBANJU PLINOV DRAGO TRŠAR							
HALOGEN KEM. ELEMENT				UNIFORMI- RAN STREŽNIK						RUSI
DEJANJE				MESTO IN POKRAJINA OB TIGRI- SU V IRAKU						

Uvod

Recimo, da moram napisati vsa števila med 1 in 10000. Na pomoč mi priskoči devet prijateljev. Domenimo se, katerih tisoč števil bo vsak napisal, in delo je (skoraj) desetkrat hitreje opravljeno. Po delu pride jelo. Lačen sem za deset piškotov. No, tu mi prijatelji ne morejo "pomagati", če se želim najesti. Najprej pojem prvi piškot, nato drugega in nazadnje desetega. Kaj želim pravzaprav povedati? Nekatera opravila lahko razdelimo na manjše naloge in vsako naredimo neodvisno (istočasno), zopet druga opravila pa ne dopuščajo takega pristopa.

Podobno je v računalništvu. Nekateri problemi, ki jih rešujemo, so po naravi taki, da jih ne moremo razdeliti na manjše podprobleme in le-teh reševati istočasno ali pa tak pristop ne bi bil bistveno hitrejši. Zopet drugi problemi kar kličejo po "vzporednem" reševanju. Na primer prikazovanje grafične slike, simulacija vremena, simulacija zračnega toka preko letalskega krila, simulacija delovanja možganov, določeni fizikalni procesi in še bi lahko naštevali.

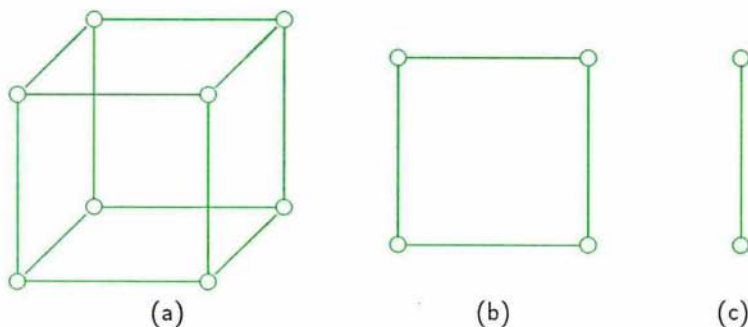
Osnovna lastnost *vzporednih računalnikov* je, da imajo več procesorjev, ki istočasno rešujejo skupen problem in po potrebi med seboj komunicirajo (si izmenjujejo sporočila). Eden prvih uspešnih poskusov izdelave vzporednega računalnika je računalnik CM (CM je kratica za *Connection Machine*), ki je bil izdelan v letih 1986 in 1987, najprej različica CM1 in nato še CM2. Kot bomo spoznali, so njegovi procesorji razporejeni v obliki hiperkocke. Naj bo to zadostna motivacija, da si najprej ogledamo, kaj je to hiperkocka.

Hiperkocke

Kaj je kocka, vemo vsi. Če v vsakem oglišču kocke narišemo krogec in krogca, ki sta povezana z robom, povežemo s črto, dobimo risbo, ki je prikazana na sliki 1(a).

Temu, kar imamo na sliki, rečemo *graf* (za več znanja o grafih velja pobrskati po starih Presekih), krogi so *točke* grafa, črte pa so njegove *povezave*. Graf s slike 1(a) imenujemo 3-kocka in ga označimo s Q_3 . To je torej kocka v prostoru, v ravnini pa imamo 2-kocko Q_2 in na premici 1-kocko Q_1 . Tudi grafa Q_2 in Q_1 si lahko ogledamo na sliki 1.

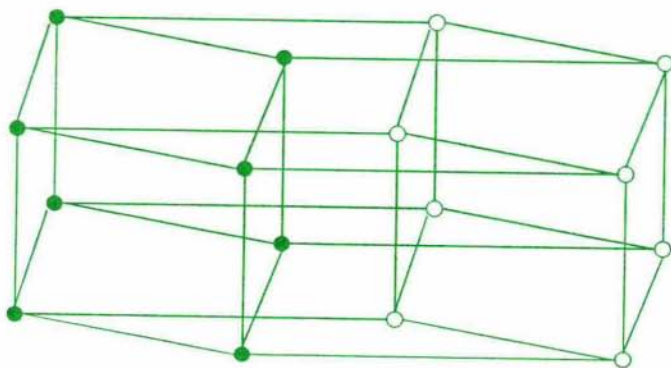
Kaj pa je graf Q_4 in, še naprej, kaj je graf Q_n , tj. n -kocka? Definirajmo n -kocko na dva načina; prva definicija nam bo pomagala dobiti predstavo o tem, kakšen je ta graf, druga definicija pa bo primernejša za "računanje".



Slika 1. Grafi Q_3 , Q_2 in Q_1 .

Definicija 1. Graf Q_1 je graf z dvema točkama in eno povezavo. Graf Q_n , $n \geq 2$, je graf, ki ga dobimo tako, da vzamemo dve kopiji grafa Q_{n-1} in s povezavami povežemo istoležne točke v obeh kopijah.

Na sliki 2 je prikazano, kako iz dveh grafov Q_3 sestavimo graf Q_4 . Za lažjo predstavo so točke ene izmed obeh 3-kock pobarvane.



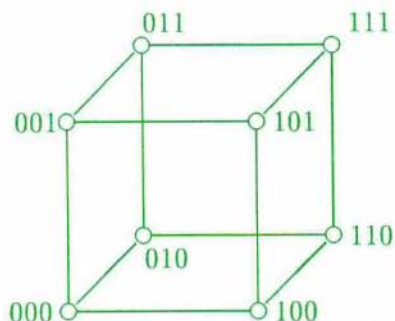
Slika 2. Graf Q_4 .

Definicija 2. Graf Q_n , $n \geq 1$, je graf, katerega točke so vsi nizi oblike

$$b_1 b_2 \dots b_n,$$

kjer je $b_i \in \{0, 1\}$, $i = 1, 2, \dots, n$. Točki grafa Q_n sta povezani natanko tedaj, ko se razlikujeta na natanko enem mestu (bitu).

Z drugimi besedami, točke grafa Q_n so vsi nizi dolžine n , sestavljeni iz ničel in enic. Na sliki 3 je prikazano, kako po tej definiciji ponazorimo graf Q_3 .



Slika 3. Graf Q_3 še enkrat.

Ker nismo definirali, kaj pomeni, da sta dva grafa enaka, tudi ne moremo formalno dokazati, da smo v gornjih definicijah dobili enake grafe – hiperkocke. Kakorkoli, utemeljitev je naslednja: V definiciji 2 najprej pogledamo tiste točke, ki imajo prvi bit enak 0. Opazimo, da določajo za eno dimenzijo manjšo hiperkocko. Podobno velja, da tako hiperkocko določajo tudi vse točke, ki imajo prvi bit enak 1. Ker so nadalje istoležne točke v obeh kopijah povezane s povezavo, res dobimo hiperkocko iz definicije 1.

Grafi Q_n imajo nekatere lepe lastnosti, zaradi katerih so načrtovalci računalnika CM izbrali prav enega od teh grafov za osnovno shemo, v katero so razporedili procesorje. Najprej ugotovimo, da ima n -kocka 2^n točk. Res, trditev za $n = 1, 2$ in 3 lahko preverimo kar na sliki 1. Predpostavimo sedaj, da graf Q_{n-1} vsebuje 2^{n-1} točk. No, po obeh definicijah ima tedaj graf Q_n dvakrat toliko točk, torej $2 \cdot 2^{n-1} = 2^n$.

Da ima graf Q_n natanko 2^n točk, je gotovo zelo lepa lastnost, saj vemo, da imajo potence števila 2 zaradi dvojiškega številskega sestava posebno vlogo v računalništvu. Spomnimo se le na procesorje s $16 (=2^4)$ in $32 (=2^5)$ biti, da $1K$ pomeni 2^{10} zlogov, ...

Zaporedje različnih točk grafa imenujemo *pot*, če sta poljubni dve zaporedni točki povezani s povezavo. *Dolžina poti* je za ena zmanjšano število točk na poti (torej število povezav na poti). Na primer, zaporedje točk grafa Q_3 : 001, 011, 111, 110, 010 določa pot dolžine 4.

Naslednja pomembna lastnost hiperkock je:

Trditev 1. V grafu Q_n je vsak par točk povezan s potjo, ki ni daljša od n .

Da se prepričamo v veljavnost gornje trditve, uporabimo definicijo 2. Naj bosta $b_1 b_2 \dots b_n$ in $c_1 c_2 \dots c_n$ poljubni točki n -kocke in recimo, da se razlikujeta v k bitih. No, tedaj po vrsti spremenimo vsakega izmed teh k bitov točke $b_1 b_2 \dots b_n$ in tako po k povezavah pridemo do točke $c_1 c_2 \dots c_n$. Ker se točki lahko razlikujeta v največ n bitih, smo svojo trditev preverili.

Če smo pozorno sledili gornjemu dokazu, smo lahko opazili vsaj še dvojce:

- Če se točki razlikujeta v k bitih, med njima obstaja pot dolžine k .
- Načinov, kako pridemo iz ene točke v drugo, je veliko.

Ponazorimo drugo ugotovitev s primerom: V grafu Q_4 lahko pridemo po povezavah iz točke 1001 do točke 0010 na naslednje načine (vedno je podčrtan bit, ki ga spremenimo):

$$\begin{aligned}
 \underline{1}001 &\longrightarrow 00\underline{0}1 \longrightarrow 001\underline{1} \longrightarrow 0010 \\
 \underline{1}001 &\longrightarrow 000\underline{1} \longrightarrow 00\underline{0}0 \longrightarrow 0010 \\
 10\underline{0}1 &\longrightarrow \underline{1}011 \longrightarrow 001\underline{1} \longrightarrow 0010 \\
 10\underline{0}1 &\longrightarrow 101\underline{1} \longrightarrow \underline{1}010 \longrightarrow 0010 \\
 100\underline{1} &\longrightarrow \underline{1}000 \longrightarrow 00\underline{0}0 \longrightarrow 0010 \\
 100\underline{1} &\longrightarrow 10\underline{0}0 \longrightarrow \underline{1}010 \longrightarrow 0010
 \end{aligned}$$

Različnih načinov je torej toliko, na kolikor različnih načinov lahko izberemo vrstni red tistih k bitov, ki jih spremenimo. To lahko naredimo na $k! = k \cdot (k-1) \cdot \dots \cdot 2 \cdot 1$ načinov. Povzemimo:

Trditev 2. Če se točki n -kocke razlikujeta v k bitih, med njima obstaja $k!$ različnih poti dolžine k .

Računalnik CM

Pri načrtovanju vzporednega računalnika naletimo na več problemov, med katerimi je zelo pomemben naslednji: Kako zagotoviti, da bo računalnik

čimbolj univerzalen, tak torej, da bomo z njim lahko učinkovito reševali raznovrstne probleme? Računalnik CM je zamišljen tako, da njegovemu uporabniku ni potrebno poznati njegove zgradbe. Računalnik CM je namreč priključen na glavni računalnik, na katerem delamo v običajnem operacijskem sistemu in z običajnimi programskimi jeziki. Procesorji računalnika CM pa so povezani z glavnim računalnikom podobno kot običajni pomnilnik. Zato lahko računalnik CM razumemo tudi kot pomnilnik glavnega računalnika. Dejansko nam torej za uporabo ni potrebno poznati njegove zgradbe.

Vseeno pa si oglejmo, kako je sestavljen. Po 16 procesorjev je združenih na enem čipu, na vsaki plošči (tiskanega vezja) je 32 čipov s procesorji, 16 plošč je združenih v eno kocko, osem kock pa tvori celotni računalnik (glej sliko na zadnji strani ovitka). Povzemimo:

8 kock po 16 tiskanin po 32 čipov po 16 procesorjev
znese skupaj

$$2^3 \cdot 2^4 \cdot 2^5 \cdot 2^4 = 2^{16} = 65536$$

procesorjev. Računalnik CM torej sestavlja zares veliko število procesorjev, kar po drugi strani pomeni, da le-ti ne morejo biti preveč zmogljivi (cena!). Zato ni preveliko presenečenje, ko izvemo, da so v resnici zelo primitivni – enobitni. Računalnik CM je tako zelo primeren za naloge, pri katerih mora posamezni procesor skrbeti za neki preprosti problem, recimo za nadzor pike na zaslonu. Slednje (natančneje nadzor grafične slike) je bila ena prvih uporab tega računalnika.

Praviloma vsak problem od procesorjev zahteva, da si izmenjujejo informacije. Lepo bi bilo, če bi vsak procesor povezali z vsakim, saj bi bila tako komunikacija najhitrejša. No, če bi to naredili na računalniku CM, bi potrebovali

$$\binom{65536}{2} = 2147450880$$

komunikacijskih linij, kar pa je seveda neizvedljivo. Zato je za komunikacije poskrbljeno takole: Procesorji na posameznem čipu so povezani neposredno. V vsak čip je vgrajen *usmerjevalnik*, ki skrbi za povezavo tega čipa z ostalimi. Kot vemo, je vseh čipov 2^{12} . (Sedaj pride tisto, zaradi česar smo si pravzaprav ogledali hiperkocke.) Čipi predstavljajo točke grafa Q_{12} , torej je vsak usmerjevalnik neposredno povezan z 12 drugimi usmerjevalniki. Zaradi trditve 1 vemo, da nobeno sporočilo ne bo potovalo dlje kot 12 korakov.

Oglejmo si še, kako neko sporočilo pride do pravega čipa. Vsak čip ima svoj naslov, to je zaporedje 12 ničel in enic v skladu z definicijo 2. Sporočilo potuje od začetnega do končnega čipa preko vmesnih usmerjevalnikov. Vmesni usmerjevalnik pozna končni naslov, kamor mora priti sporočilo. To mu tudi zadostuje, saj ve, da mora poslati sporočilo usmerjevalniku, ki je za en bit bližje končnemu naslovu. Pošiljanje se nadaljuje, dokler sporočilo ne pride do končnega naslova.

Med izvajanjem nekega procesa je lahko precej komunikacijskih linij zasedenih, tako da sporočil nekaj časa ne moremo poslati. Zaradi trditve 2 vemo, da imamo na razpolago veliko različnih poti do končnega naslova, torej nam zgradba 12-kocke omogoča, da do takih zastojev ne pride prepogosto. Najpreprosteje lahko to dejstvo uporabimo tako, da damo usmerjevalniku svobodo: sporočilo oddaj naprej po katerikoli trenutno prosti povezavi, ki vodi proti ciljnemu naslovu.

Za konec omenimo, da v zadnjih letih znanstveniki intenzivno proučujejo različne modele povezovanja procesorjev, večina teh modelov pa je tako ali drugače povezana z n -kockami. In še to: leta 1991 je bil izdelan računalnik CM5, ki je zasnovan drugače kot osnovni računalnik CM. O tem pa morda kdaj drugič.

Sandi Klavžar

IGRA "NIM"

V 3. številki Preseka je Matjaž Željko predstavil igro "NIM". Rad bi omenil še različico te igre, ki jo bom imenoval "NIM*":

Na mizi se nahaja nekaj kupov s po nekaj kamni. Igralca izmenoma pobirata kamne z mize. V vsaki potezi mora igralec vzeti vsaj en kamen (lahko tudi vse) iz poljubnega kupa. ZMAGA tisti, ki ne more več narediti poteze.

(Pri "NIM" tisti, ki ne more več narediti poteze, IZGUBI).

Vabim bralce, da poiščejo zmagovito strategijo za to igro. Nasvet: Poizkusite z enako strategijo kot velja za igro "NIM", vendar jo spremenite tik pred zdajci (kdaj in kako?).

Naj omenim, da smo to različico igrali že v davnem letu 1963 na prvem računalniku v Sloveniji (ZUSE), ki je deloval še na elektrone. V reklamnem paketu za prikaz "izrednih zmogljivosti računalnika" je bil tudi program za to igro (ne spominjam se, kako se je takrat imenovala).

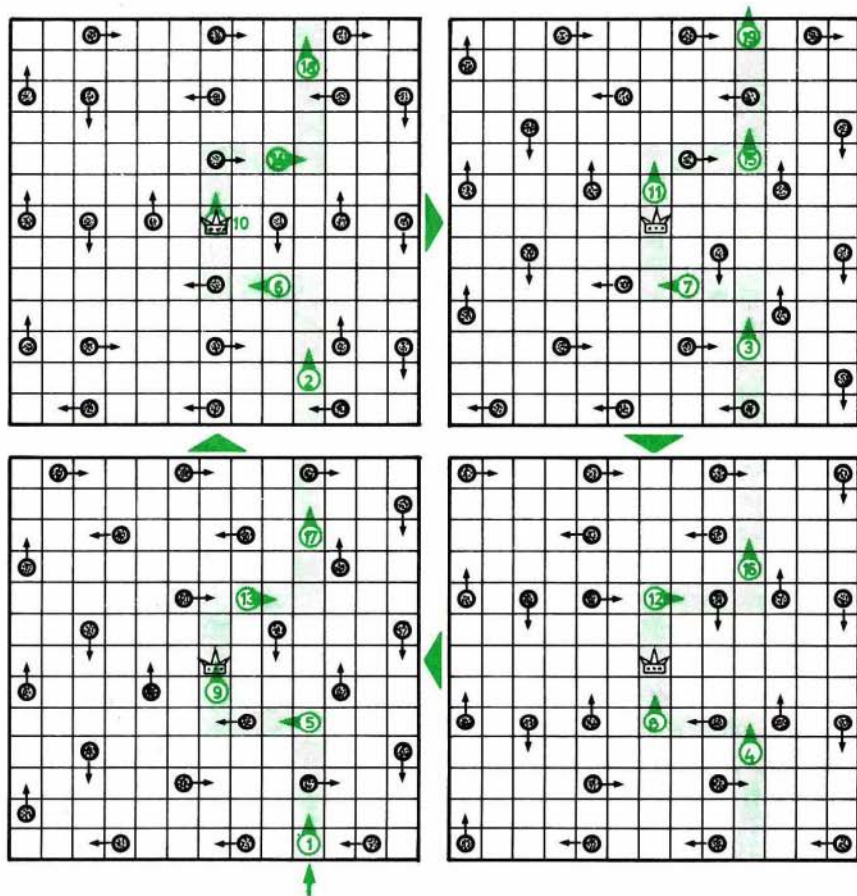
Mitja Rosina

REŠITVE NALOG

Tihi vitez se je torej dal zapreti v zakleti grad brez strahu, da bo srečal strahove, na enega od naslednjih dni: 9., 11., 15., 17., 21., 27., 29. itd. Mirno lahko domnevamo, da se je priglasil, brž ko je bilo varno, torej 9. dne.

2. Kako je Tihi vitez ukradel krono iz labirinta?

Tihi vitez se je kot vsi stražarji premikal s hitrostjo enega polja v četrt ure. Pot, po kateri je prišel in odšel iz labirinta, lahko opišemo tako, da označimo njegov položaj na k -tem diagramu v času $4n+k$, kjer je časovna enota četrt ure, $k = 1, 2, 3, 4$ in $n = 1, 2, 3, \dots$

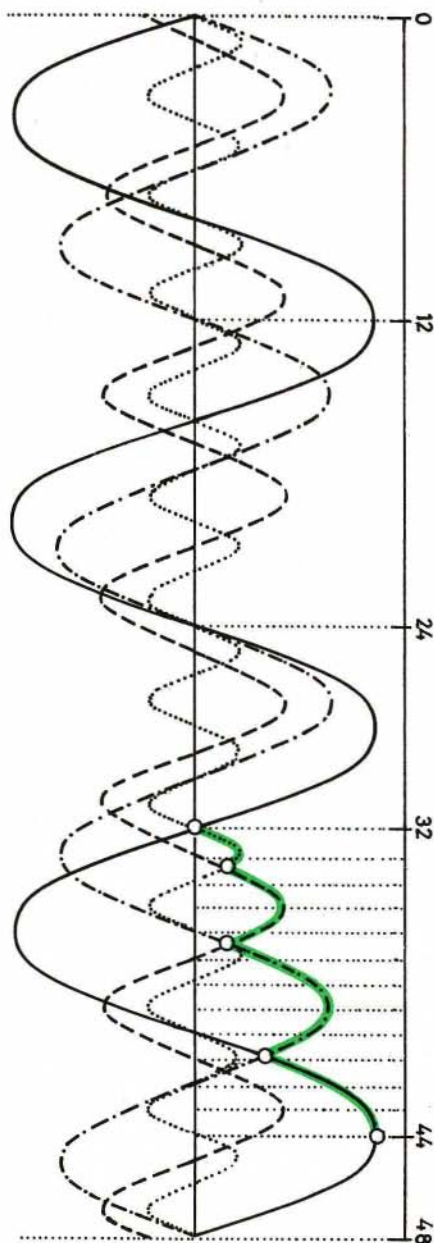


3. Problem nihajočih stopnic.

Tihi vitez ni imel pojma o fizikalnih enačbah, ki opisujejo nihanje. Vedel pa je, da izgleda nihanje, če ga narišemo v času, kot sinusno valovanje, pri čemer si štirje pomembni trenutki: srednja vrednost, maksimum, srednja vrednost, minimum sledijo v enakih časovnih intervalih $T/4$, kjer je T perioda nihanja (valovanja). "Prostorsko časovna krivulja", po kateri se je povzpел do gradu, je ves čas potekala nad gladino jezera. Torej je moral z vsake stopnice prestopiti, še preden je potonila pod gladino. Ker ga je zadnja stopnica morala popeljati do gradu, ki je bil na najvišji točki njenih nihajev, je moral Tihi vitez preskočiti nanjo v trenutku, ko se je vzpenjala in je že bila nad gladino jezera.

Iz diagrama vidimo, da je edina takšna možnost nastopila približno v 41. minuti. Korak za korakom sklepamo nazaj, da je Tihi vitez prestopil z druge na tretjo stopnico v 37. minuti, s prve na drugo stopnico v 34. minuti. Na prvo stopnico je torej moral stopiti 32 minut potem, ko je prišel pred grad.

Tihi vitez ni matematično natančno preračunal trenutka, ko se bosta dve zaporedni stopnici srečali na isti višini - ko je videl, da se približujeta, je pač prestopil; dobro pa je vedel, v kaj se spušča (v tistem trenutku bi bilo primerneje reči, v



kaj se dviga), ko je stopil na prvo stopnico. Resnici na ljubo povejmo, da je bilo nihajočih stopnic mnogo več, toda princip ni bil nič drugačen, le Gwendolin je čakala Tihega viteza malo dlje in s solznimi očmi gledala, kako se proti njej dviguje in pada po stopnicah, pod katerimi bobni slap.

Jurij Kovič

Devlin K., NOVA ZLATA DOBA MATEMATIKE, DMFA Slovenije, Ljubljana 1993, 272 str., (Knjižnica Sigma; 53)

Najprej se ustavimo ob naslovu knjige. Zakaj nova zlata doba? Mnoge pretek-le dobe moremo proglasiti za zlate, npr. tisto, v kateri je nastala Evklidova geometrija, potem dobo, v kateri so matematiki izumili infinitezimalni račun, ali dobo, ko je matematika postala stroga znanost, oprta na teorijo množic in matematično logiko. V zadnjih 25 letih se je v matematiki nabralo toliko novih spoznanj, da tudi to dobo z mirno vestjo proglasimo za zlato dobo.

V knjižici nam poskuša avtor matematik Devlin posredovati nekaj najbolj odmevnih matematičnih odkritij iz te nove zlate dobe. Pri tem ga seveda vodi načelo, da nam posreduje le tista, ki se jih da razložiti širšemu krogu bralcev, ki niso poklicni matematiki. Štiri poglavja govorijo o problemih iz teorije števil. To so večinoma problemi, ki jih je kaj lahko razložiti tudi učencem osemletke, rešiti jih pa ni lahko in med takimi problemi jih je še precej nerešenih. Več premišljevanja terjajo deli teksta o množicah in razvoju pojma števila, pa tudi poglavje o grupah. Zelo popularno snov o kaosu podaja avtor razumljivo, zato pa se ne more spuščati v podrobnosti. Vsakemu bralcu bo razumljiv tudi problem štirih barv, tudi poglavji o vozlih in o računskih algoritmih sta dostopni. Največ matematičnega znanja, takega, ki ne sodi niti v srednjo šolo, pa zahteva poglavje o Riemannovi hipotezi. Pri branju knjige se izkaže, da je v matematiki tipična situacija: Zelo težek problem, kot je npr. Riemannova hipoteza, je v tesni zvezi s problemi porazdelitve praštevil; ta pa se da zlahka razložiti tudi učencu v osemletki.

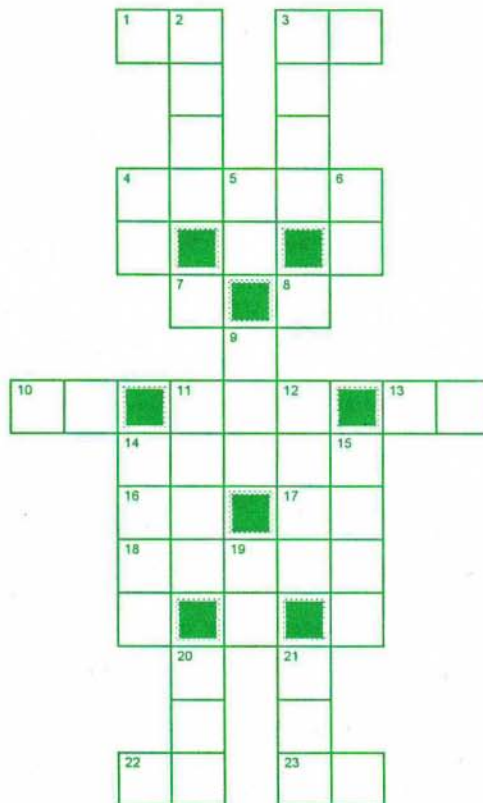
Knjiga je napisana zelo skrbno, avtor se je zelo trudil prikazati lepoto in zanimivost matematike nestrokovnjaku. Nedvomno je v tej nameri uspel. Srednješolcu je dostopna snov večjega dela knjige, pa tudi mlajši so kos vsaj začetnim delom vsakega poglavja.

Anton Suhadolec

PISMA BRALCEV – KRIŽANKA ZAJČEK

Spet so se nam oglasile šestošolke Anja, Slađana, Jerneja in Karmen z osnovne šole na Rakeku. To pot so nam poslale številsko križanko, ki smo jo zaradi prijazne oblike poimenovali ZAJČEK. Poskusite jo rešiti! Če ne bo šlo, najdete rešitev na strani 310.

Marija Vencelj



VODORAVNO:

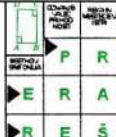
1. $((20 + 2) \cdot (24 - 2)) : (8 \cdot 9 - 7 \cdot 4)$
3. $(6677 - 3729) : (92 - 25)$
4. $(3876 - 1723) \cdot 12$
7. $(617 - 199) : (5 \cdot 7 + 3) - (77 + 27) : 13$
8. $((18 + 4) + 3) - 17$
10. $D(600, 760)$
11. $23^2 - 6 \cdot 2$

13. $360 : ((15 + 45) \cdot 3) + 2 \cdot 15$
14. $(10401 + 102 + 3 - 3) \cdot (3 + (121 - 11^2))$
16. $63 \cdot 3 : 9 + 8 + 42$
17. $10 \cdot 3 : 6 + 5 + 10 \cdot 8$
18. $((2^5 \cdot 5^3 + 103) \cdot 3) \cdot 3 + 6 \cdot 10^2$
22. $5 + (3 + 4 \cdot 5) - 10 : 2$
23. $v(16, 24, 32)$

NAVPIČNO:

2. 5-krat povečana vsota števil 157 in 156.
3. $13^2 \cdot (5^2 + 2)$
4. $2^2 \cdot 7$
5. $38 \cdot x = 3154$
6. Količnik vsote $783 + 1017$ in razlike $783 - 753$.
7. $3^5 : 3^4$
9. $5 \cdot 3^2 \cdot 7$
11. $60 : 12 + (60 + 12) \cdot (60 + 11)$
12. $((106 + 91) \cdot 2^2 - (333 \cdot 3 - 666 : 2 - 111 \cdot 3) + (999 : 3 - 666 : 2 + 111 \cdot 3)) \cdot 9$
14. $((2^3 \cdot 5 + 43) \cdot 5) \cdot 9$
15. $2 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 7 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 3$
19. $D(450, 100)$
20. $(76 - 32)^2 - (31^2 + 72 : 18) - 12 \cdot 4^2 - 2 \cdot 3$
21. $(55 - 5) \cdot 4 + 9$

KRIŽANKA MATEMATIČNI POJMI - Rešitev s str. 224

																																																																																																																																																																																																																		
---	---	---	---	---	---	---	--	---	---	---	---	---	---	---	---	---	---	---	---	---	---	---	---	---	---	---	---	---	---	---	---	---	---	---	---	---	---	---	---	---	---	---	---	---	---	---	---	---	---	---	---	---	---	---	---	---	---	---	---	---	---	---	---	---	---	---	---	---	---	---	---	---	---	---	---	---	---	---	---	---	---	---	---	---	---	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--

LUDWIG BOLTZMANN OB STOPETDESETLETNICI ROJSTVA

Avstrijski fizik Ludwig Boltzman (slika 1) je bil rojen 20. februarja 1844 na Dunaju. Njegov oče je bil kot davčni uradnik večkrat prestavljen, nazadnje v Linz. Pred vstopom v gimnazijo so Ludwiga poučevali doma. Klavir ga je učil Anton Bruckner, ki je pozneje postal slaven skladatelj. Pri petnajstih letih je Ludwigu umrl oče. Mati je stroške sinovega šolanja krila s podedovanim premoženjem. Maturo je Boltzmann opravil z odliko leta 1863 in začel študirati matematiko in fiziko na dunajski univerzi. Po uspešno opravljenih izpitih v prvih dveh letnikih je postal štipendist fizikalnega inštituta, ki ga je vodil Jožef Stefan. Leta 1866 je dosegel doktorski naslov, za kar je bilo treba tedaj opraviti poleg izpitov v triletnem študiju tri stroge izpite, ni pa bilo treba izdelati doktorskega dela. Boltzmann je postal Stefanov asistent in si leta 1868 pridobil pravico predavati na univerzi. Naslednje leto je dobil mesto profesorja "za matematično fiziko" na univerzi v Gradcu.

Za to mesto se je potegoval tudi Slovenec Simon Šubic, ki je fiziko na univerzi v Gradcu že predaval kot zunanji sodelavec. Stefan, ki so ga vprašali za svet, je napisal o Šubičevem delu neugodno oceno in priporočil Boltzmannu, pa ne iz zamere do rojaka, pač pa zaradi boljših Boltzmannovih raziskovalnih uspehov.

Boltzmann je postal leta 1873 profesor za matematiko na univerzi na Dunaju. Tri leta pozneje se je vrnil v Gradec kot profesor "za splošno in



Slika 1. Ludwig Boltzmann (20. februar 1844 - 5. september 1906 Devin pri Trstu). Bil je, kot pravimo, težaven značaj. O tem pričajo ohranjena pisma o pogajanjih za profesorska mesta, ki so mu jih ponudili. Tisti, ki so se zavzemali zanj, so pogosto opravičevali njegove odločitve, češ da je "samosvoj". Težko se je odločal, in to pogosto šele po dolgih duševnih bojih. Večkrat je zapadel v krizo. Med eno izmed takih kriz si je, ko je menda trpel tudi hude bolečine, vzel življenje.

eksperimentalno fiziko". Nato je prešel kot profesor za teoretično fiziko na univerzo v Münchnu (1890), nazaj na univerzo na Dunaju (1894), na univerzo v Leipzigu (1900) in nazadnje (1902) zopet na univerzo na Dunaju.

Boltzmann je bil med prvimi profesorji za teoretično fiziko. Izvajal pa je tudi še poskuse, predvsem pred drugim graškim obdobjem in med njim, ko je meril povezavo med odzivom izolatorjev na električno polje in njihovim lomnim kvocientom. S temi merjenji je poskušal podpreti Maxwellovo teorijo električnega in magnetnega polja. Sploh si je prizadeval, da bi jo razširil med fiziki (slika 2). Leta 1884, pet let po tem, ko je Stefan postavil na osnovi tujih merjenj *zakon o sevanju*, je zakon teoretično utemeljil. Zaradi tega zakon v nemščini in angleščini pogosto imenujejo *Stefan-Boltzmannov zakon*.

Stefanov zakon po Boltzmannovi poti (na kratko). Boltzmann je najprej rešil vprašanje tlaka, ki ga sevanje v toplotnem ravnovesju pri določeni temperaturi, to je *sevanje črnega telesa*, izvaja na steno votline. Ugotovil je, da je tlak p enak tretjini gostote povprečne energije w v sevanju: $p = \frac{1}{3}w$. Zamislimo si idealni toplotni stroj, ki uporablja sevanje kot delovno snov in ponavlja krožno spremembo med toplotnima rezervoarjema pri temperaturi $T + dT$ in T . Za izkoristek, to je razmerje oddanega dela $-dA$ in dovedene toplote Q , velja v tem primeru:

$$\frac{-dA}{Q} = \frac{dT}{T}. \quad (*)$$

Uporabimo energijski zakon ali prvi zakon termodinamike: $W - W' = A + Q$. Notranja energija sistema W se poveča, če mu dovedemo delo A ali toploto Q . Votlino v obliki valja zapremo z batom. Delo pri spremembi od začetne prostornine votline V' do končne V določa enačba $A = -p(V - V') = \frac{1}{3}w(V - V')$. Energijski zakon da za dovedeno toploto:

$$Q = W - W' - A = w(V - V') + \frac{1}{3}w(V - V') = \frac{4}{3}w(V - V').$$

To in izraz za odvedeno delo $-dA = \frac{1}{3}(V - V')dw$ vstavimo v zvezo (*) in dobimo

$$\frac{dw}{w} = 4 \frac{dT}{T}.$$

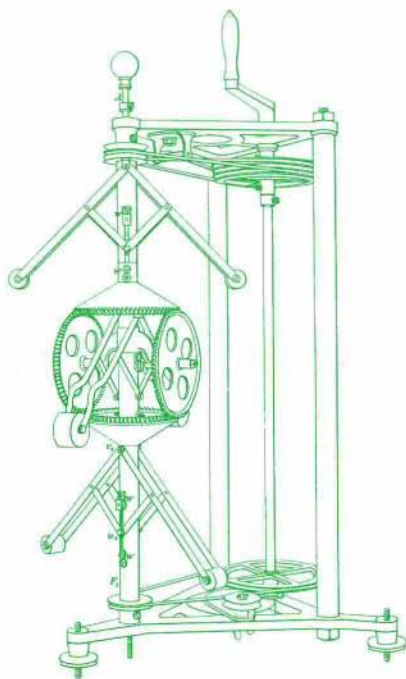
Rešitev enačbe je $w \propto T^4$. Povprečna gostota energije v sevanju je sorazmerna z gostoto izsevanega energijskega toka, tako da je tudi ta sorazmerna s četrto potenco temperature. Krožno spremembo sestavimo iz štirih sprememb. Pri dveh izmed njiju pri konstantni temperaturi $T + dT$ in T dovedemo in odvedemo toploto, pri drugih dveh pa ne dovajamo toplote in je ne odvajamo.

Hendrik Lorentz je imenoval Boltzmannov članek "pravi biser teoretične fizike".

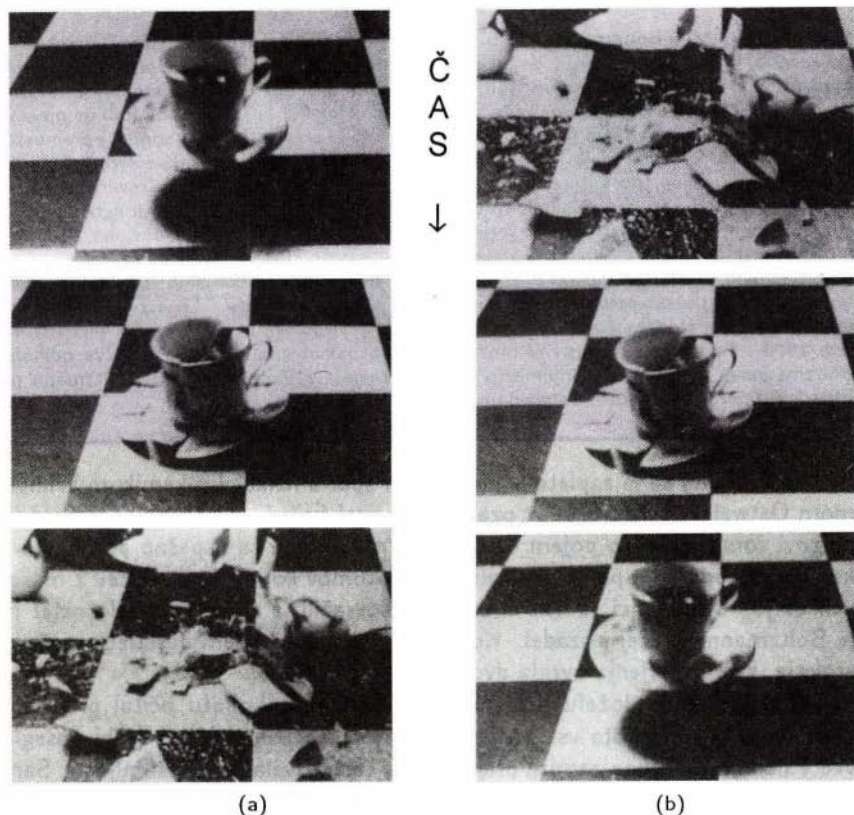
Boltzmann se je že spočetka zanimal za "mehanično teorijo toplote" in si v njej pridobil največ zaslug. Nauk o toploti, termodinamiko, je osnoval na statistični mehaniki, v kateri opišemo termodinamični sistem z množico molekul. Najpreprosteje je tako opisati plin, v katerem se molekule gibljejo domala neodvisno druga od druge in trkajo med seboj in s steno posode. K razvoju te veje so prispevali še Škot James Clerk Maxwell, Nemec Rudolfu Clausius in Američan Josiah Willard Gibbs. Clausius je skoval pogosto uporabljeno zvezo "vrsta gibanja, ki ga imenujemo toplota", čeprav bi bilo danes bolje "toploto" nadomestiti z "notranjo energijo".

Zaradi Boltzmannove usmerjenosti v teoretično fiziko in zanimanja za matematiko je o njegovem delu težko preprosto poročati. Prispeval je k temu, da so pojasnili vprašanje, o katerem še dandanes niso nehali razpravljati. Trk med molekulama, ki si ju lahko predstavljamo kot točkasti telesi, je prožen in tak, da ga je mogoče v mislih obrniti. Če bi obrnili smeri hitrosti molekul po trku, bi po "obrnjenem" trku imeli molekuli le obrnjeni hitrosti kot pred prvimi trkom. Če bi v enačbah zamenjali preteklost in prihodnost, se pravi, spremenili znak časa, bi se spremenile le smeri hitrosti.

V termodinamičnem sistemu pa časovni obrat nekaterih pojavov ne pripelje do mogočih pojavov. Mislimo si vroč kos kovine, ki ga damo v vodo z ledom. Kovina se ohladi in nekaj ledu se stali. Pojav, pri katerem bi se



Slika 2. Boltzmann je zamišljene mehanične modele jemal celo resneje kot Maxwell (glej sestavek o H. Hertz v prejšnji številki Preseka). To kaže načrt za model iz *Predavanj o Maxwellovi teoriji elektrike in svetlobe* iz leta 1891. Izdal je še knjigi *Predavanja o teoriji plinov* in *Predavanja o načelih mehanike*. Ta dela sestavljajo drugo, prvo in tretjo knjigo izbranih del v osmih knjigah, ki so začele izhajati leta 1982.



Slika 3. Ireverzibilni pojav posnamemo s kamero (a). Pri gledanju filma v nasprotni smeri takoj ugotovimo, da tak pojav po pridobljenih izkušnjah ni mogoč. Vendar ni popolnoma nemogoč, je le skrajno malo verjeten.

kos kovine v ledenomrzli vodi segrel in se nekaj vode strdilo v led, je sicer po energijskem zakonu mogoč, a ga v naravi ne opazimo. Opisani pojav z vročim kosom kovine je *ireverzibilen* (slika 3). Kako naj to uskladimo s spoznanjem, da so sistemi sestavljeni iz molekul in so trki med pari molekul, kot smo ugotovili, reverzibilni? Razlaga se skriva v tem, da je molekul zelo zelo veliko. Obrnjeni ireverzibilni pojav, na primer to, da bi se segrel kos kovine in se strdilo nekaj ledu, je sicer mogoč, a tako malo verjeten, da ga ne bi opazili, četudi bi opazovali sistem neznansko dolgo.

Boltzmann je v statistični mehaniki dosegel še druge uspehe.

$S = k \log W$. Med Boltzmannovimi trajnimi prispevki fiziki je treba omeniti *Boltzmannovo enačbo*, ki podrobno opisuje dogajanja med molekulami v plinu, in *Boltzmannovo porazdelitev*, ki ureja v ravnovesnem stanju porazdelitev termodinamičnih sistemov v množici po energiji. Najbolj znana je, kot kaže, enačba $S = k \log W$, ki je napisana tudi na njegovem spomeniku na dunajskem pokopališču. Poskusimo jo pojasniti kolikor mogoče preprosto. S je *entropija*, količina, ki jo je vpeljal Clausius. Zanj velja drugi zakon *termodinamike* ali *entropijski zakon*, po katerem si entropijo sistemi izmenjujejo, ko si (reverzibilno) izmenjujejo toploto, pri ireverzibilnih spremembah pa nastane iz nič in je ni mogoče uničiti. Boltzmann je povezal entropijo z verjetnostjo W , ki šteje število načinov, na katere iz molekul sestavimo termodinamični sistem v ravnovesnem stanju. Odtlej velja entropija za "mero nereda". Enačba upošteva, da je treba verjetnosti pri sestavljanju sistemov z enako temperaturo in tlakom med seboj množiti, entropije pa se seštevajo. V enačbi je log naravni logaritem, k pa *Boltzmannova konstanta*, ki jo je prvi določil in poimenoval Max Planck leta 1900. To je storil, čeprav si moža nista bila naklonjena. Planck je sprva odklonil Boltzmannove verjetnostne prijeme (a jih je pozneje s pridom uporabil), Boltzmann pa Planckovo pomoč v sporu z Ostwaldom in somišljeniki.

Boltzmann se je zapletel v znanstveni spor s fizikalnim kemikom Wilhelmom Ostwaldom, ki mu je iz ozadja pomagal fizik Ernst Mach. Ostwald in njegovi somišljeniki so pojem današnjega mola imeli za uspešno pomagalo v kemiji, s poudarkom pa so zanikali obstoj atomov kot drobnih delcev z maso, velikostjo. Udeleženci se niso med seboj sovražili, a spor je bil zelo oster in je Boltzmann precej prizadel. Končal se je šele v drugem desetletju našega stoletja, ko so merjenja ovrgla dvom v obstoj atomov.

Boltzmann je Jožefu Stefanu in Josephu Loschmidtu očital pretirano skromnost in to, da sta vse življenje preživela na Dunaju, češ da bi dosegla več v fiziki in bi njune zamisli prej sprejeli, če bi živela manj osamljeno. Sam je veliko potoval in se veliko selil. Zanimalo ga je marsikaj zunaj fizike. Igral je, na primer, klavir, tudi s prijatelji v sestavih, in pisal za široko javnost. Še danes je vredno prebrati njegovo pesem *Beethoven v nebesih*, sestavek o potovanju v Ameriko in druge sestavke iz *Popularnih spisov*.¹

Janez Strnad

PRI NASTAJANJU PRESEKA POMAGATA S PROGRAMSKO OPREMO PODJETJI MARAND IN MARMIS

¹ Prevod *A German professor's trip to El Dorado* je izšel v *Physics Today* 45 (1992) 44 (1), *Populäre Schriften* pa sestavljajo sedmo knjigo njegovih zbranih del v osmih knjigah.

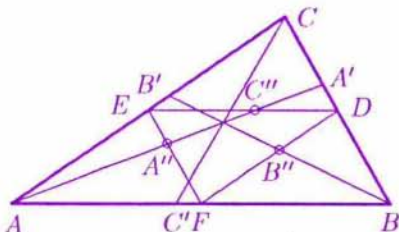
15. MEDNARODNO MATEMATIČNO TEKMOVANJE MEST – JESENSKI KROG – Rešitve s str. 252

Rešitve nalog prvega dela:

Prva skupina

1. Oglejmo si števila pred brisanjem in obarvajmo oglišča izmenično z modro in rdečo barvo. Potem sta vsoti števil na rdečih ogliščih in na modrih ogliščih enaki (in enaki vsoti števil na straneh). Torej lahko določimo neznano število na oglišču.

2. Naj bodo A'' , B'' , C'' , D , E in F razpolovišča daljic AA' , BB' , CC' , BC , CA in AB zaporedoma. Ker A' leži med B in C , leži A'' med E in F . Podobno leži B'' med F in D in C'' leži med D in E . Točke A'' , B'' in C'' torej niso kolinearne, saj leži vsaka v notranjosti druge stranice trikotnika DEF .



3. Naj bo n poljubno sestavljeno število in p njegov praštevilski delitelj. Potem je $n \geq p \geq 4$. Število $2p$ lahko dobimo iz 4 s prištevanjem števila 2, število n pa lahko dobimo iz $2p$ s prištevanjem števila p .

4. Naj vsak od igralcev A , B , C odigra 6 iger z vsakim drugim igralcem in sicer: vseh 6 iger med A in B naj bodo remiji. V igrah med B in C naj vsak zmaga trikrat. V igrah med A in C pa naj A zmaga dvakrat, izgubi enkrat in trikrat remizira.

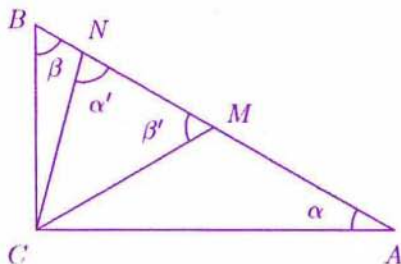
Če sedaj upoštevamo, da zmaga prinese eno točko, remi pa pol točke, je igralec A zbral 6.5 točk, igralec B 6 točk, igralec C pa 5.5 točk. Naloga je tako rešena, saj je igralec A zmagal samo dvakrat, igralec B trikrat, igralec C pa kar štirikrat.

Druga skupina

1. Enačbo lahko zapišemo kot $z^2 - x^2 = y^3$. Če postavimo $z + x = y^2$ in $z - x = y$, lahko izrazimo $x = \frac{1}{2}y(y - 1)$ in $z = \frac{1}{2}y(y + 1)$. Enačba ima neskončno celoštevilskih rešitev, saj sta pri celoštevilskem y tudi x in z celi števili.

2. Zaradi $\overline{BC} = \overline{BM}$ in $\overline{AC} = \overline{AN}$ je $\alpha' = \pi/2 - \alpha/2$ in $\beta' = \pi/2 - \beta/2$. Sledi

$$\begin{aligned}\angle MCN &= \pi - \alpha' - \beta' = \\ &= \frac{\alpha + \beta}{2} = \\ &= \frac{\pi}{4}.\end{aligned}$$



3. Z $a_{i,j}$ označimo j -to število v i -ti vrsti. Potem za vsak $j < k$ velja $a_{i,j} < a_{i,k}$.

Predpostavimo lahko, da je $a_{i,3} < a_{k,3}$ za vsak $i < k$, saj lahko vrstice v tabeli po potrebi zapišemo v drugačnem vrstnem redu. Število $a_{5,3}$ ne presega 23, saj je $a_{5,3} < a_{5,4} < a_{5,5} \leq 25$. Število $a_{4,3}$ ne presega 20, saj je $a_{4,3} < a_{4,4} < a_{4,5}$ in $a_{4,3} < a_{5,3}$. Podobno vidimo, da so maksimalne vrednosti za $a_{3,3}$, $a_{2,3}$ in $a_{1,3}$ števila 17, 14 in 11 zaporedoma. Torej je največja možna vsota v tretjem stolpcu $23 + 20 + 17 + 14 + 11 = 85$. Podoben razmislek pokaže, da je najmanjša možna vsota $3 + 6 + 9 + 12 + 15 = 45$. Obe vrednosti lahko tudi dosežemo, kar kažeta naslednji tabeli:

1	6	11	12	13
2	7	14	15	16
3	8	17	18	19
4	9	20	21	22
5	10	23	24	25

1	2	3	16	21
4	5	6	17	22
7	8	9	18	23
10	11	12	19	24
13	14	15	20	25

4. Nobenega naravnega števila ne smemo uporabiti več kot dvakrat, saj se lahko enaki števili pojavita le na nasprotnih ploskvah. Najmanjša možna vsota je 18, saj lahko števila 1, 1, 3, 3, 5 in 5 razporedimo tako, da bosta enaki števili ležala na nasprotnih ploskvah kocke.

Rešitve nalog drugega dela:

Prva skupina

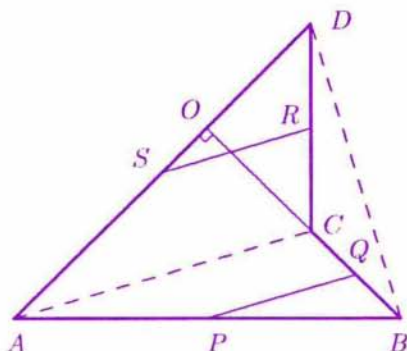
1. Vsa števila od vključno druge vrste naprej so nenegativna. Zadnje število v vsaki vrsti od vključno druge vrste naprej mora biti 0, saj ni nobenega števila desno od zadnjega števila. Predzadnje število v vsaki vrsti od vključno tretje vrste naprej mora biti 0, saj so vsa števila desno od njega enaka 0. Razmislek ponavljamo in ugotovimo, da so v enajsti vrsti vedno vsa števila enaka 0.

Naslednja tabela pokaže, da je to najboljša možna ocena:

8	9	6	7	4	5	2	3	0	1
1	0	1	0	1	0	1	0	1	0
0	4	0	3	0	2	0	1	0	0
4	0	3	0	2	0	1	0	0	0
0	3	0	2	0	1	0	0	0	0
3	0	2	0	1	0	0	0	0	0
0	2	0	1	0	0	0	0	0	0
2	0	1	0	0	0	0	0	0	0
8	1	0	0	0	0	0	0	0	0
1	0	0	0	0	0	0	0	0	0

2. Naj v štirikotniku $ABCD$ notranji kot pri oglišču C meri 225° in naj nosilka daljice BC seka stranico AD v O . Potem sta trikotnika OAB in OCD enakokraka. Torej lahko z rotacijo za 90° okrog O preslikamo A na B in C na D . Torej je $\overline{AC} = \overline{BD}$ in $AC \perp BD$.

Naj bodo P, Q, R, S razpolovišča daljic AB, BC, CD in DA za poredoma. Potem sta daljici PQ in RS obe vzporedni AC in po dolžini enaki $\frac{1}{2}\overline{AC}$. Analogno $QR \parallel BD$, $SP \parallel BD$ in $\overline{QR} = \overline{SP} = \frac{1}{2}\overline{BD}$. Lik $PQRS$ je torej kvadrat.



Druga skupina

1. Naj $a(n)$, $b(n)$ in $c(n)$ označujejo število števk 0, 1 in 9 v številu

$$N(n) = 123 \dots 91011 \dots 99100 \dots (n).$$

Če je $n = 10^m - 1$ za neki $m \in \mathbb{N}$, je $b(n) = c(n)$. Če sedaj n večamo od 10^m do $10^{m+1} - 1$, bo $b(n) = c(n)$ šele pri $n = 10^{m+1} - 1$, saj je za vmesne n število $b(n)$ večje od $c(n)$. Torej lahko morebitno enakost dosežemo kvečjemu za $n = 10^m - 1$ (pri nekem $m \in \mathbb{N}$).

Če bi začeli zaporedje pri 0 in bi vsakemu številu dodali na začetku toliko ničel, da bi bila vsa števila m -mestna, bi pri $n = 10^m - 1$ imeli $a(n) = b(n) = c(n)$. V našem primeru pa pri tem n velja $a(n) < b(n) = c(n)$.

Iskano število n torej ne obstaja, saj ne obstaja niti število n , za katerega se v številu $N(n)$ pojavijo vse številke 0, 1 in 9 enako mnogokrat.

2. Naj bo x realna rešitev te enačbe. Potem je $x \neq 0$ in lahko zapišemo

$$ax^2 + b = \frac{(x^2 + 1)^2}{x}.$$

Iz Cauchyjeve neenačbe

$$(x^4 + 1)(a^2 + b^2) \geq (ax^2 + b)^2$$

sledi $a^2 + b^2 \geq \frac{(ax^2 + b)^2}{x^4 + 1}$, zaradi neenakosti med aritmetično in geometrično sredino pa je

$$\frac{x^4 + 1}{x^2} + \frac{4x^2}{x^4 + 1} \geq 2\sqrt{\frac{4(x^4 + 1)x^2}{(x^4 + 1)x^2}} = 4.$$

Torej

$$\begin{aligned} a^2 + b^2 &\geq \frac{(x^2 + 1)^4}{x^2(x^4 + 1)} = \\ &= \frac{x^8 + 2x^4 + 1 + 4x^4 + 4x^6 + 4x^2}{x^2(x^4 + 1)} = \\ &= \frac{x^4 + 1}{x^2} + \frac{4x^2}{x^4 + 1} + 4 \geq 8. \end{aligned}$$

Matjaž Željko

PISMA BRALCEV – KRIŽANKA ZAJČEK – Rešitev s str. 300

Vodoravno: **1.** 11, **3.** 44, **4.** 25836, **7.** 3, **8.** 8, **10.** 40, **11.** 517, **13.** 32, **14.** 31509, **16.** 71, **17.** 90, **18.** 37527, **22.** 23, **23.** 96.

Navpično: **2.** 1565, **3.** 4563, **4.** 28, **5.** 83, **6.** 60, **7.** 3, **9.** 315, **11.** 5117, **12.** 7092, **14.** 3735, **15.** 9072, **19.** 50, **20.** 773, **21.** 209.

NOVE KNJIGE

Domajnko, V.: Z NALOGAMI V ZGODOVINO MATEMATIKE - DZS, Ljubljana 1993, 198 str.

Pri založbi DZS je v začetku januarja izšla knjiga Z nalogami v zgodovino matematike, prvenec Vilka Domajnka, srednješolskega profesorja matematike iz Ljubljane.

V prvem delu knjige se za naslovi razdelkov: Števila, Linearne enačbe, Sistemi linearnih enačb, Geometrija, Kvadratne enačbe, Polinomi, Zaporedja in vrste, Kombinatorika in verjetnostni račun, ki bolj kot ne spominjajo na vsebino kakšnega učbenika, v resnici skriva pestra zbirka še bolj pestrih matematičnih nalog. Te segajo tako v obdobje pred našim štetjem kot v moderni čas, rojevale so se v Babilonu, Egiptu, stari Grčiji, Indiji in Kitajski, pa v Italiji, Angliji, Franciji, Švici ...

Naloge imajo skupno lastnost, da je v njih matematično vprašanje zavito v problem vsakdanjega življenja dobe, v kateri je naloga nastala. Za primer si oglejmo eno od kitajskih nalog:

Mesto ima kvadratno obzidje. Skozi središče mesta je v ravni črti skozi severna in južna vrata v obzidju speljana cesta. Na severni strani je ob cesti, 20 korakov daleč od obzidja, zasajeno drevo. Če se odpraviš iz mesta po cesti skozi južna vrata, se ti 14 korakov južno od obzidja in zatem še 1775 korakov daleč proti zahodu drevo prvič prikaže izza obzidja. Koliko korakov obsega mestni zid?

Profesor Domajnko je naloge zbral iz ustrezne sodobne literature (vendar je ob vsaki nalogi naveden originalni vir oziroma avtor), jih prevedel in uredil po matematični sorodnosti. Vseh 275 nalog je tudi opremljenih z detajlnimi rešitvami, ki sestavljajo tretji del knjige.

V sredini knjige je poglavje z naslovom Imenik, ki vsebuje kratke biografske in delno bibliografske podatke o možeh in virih iz bolj ali manj pretekle dobe, ki so "prispevali" naloge za zbirko.

Bralci Preseka poznajo Vilka Domajnka tudi kot avtorja številnih prispevkov v Preseku. Prav z nalogami, kakršne prinaša ta knjiga in ki smo jih pod naslovoma Nagradni sistemi linearnih enačb in Linearne diofantske enačbe objavili v lanskem in predlanskem letniku, je med bralci požel velik odziv.

Za konec omenimo še, da je knjiga tudi na pogled lepa, ne najmanj po zaslugi ilustratorke Marjance Prelog.

Marija Vencelj

PROBLEM ŠTIRIH BARV

V knjigi K. Devlina "Nova zlata doba matematike" (knjiga je pred kratkim izšla v zbirki Sigma) so predstavljeni matematični problemi, ki so v zadnjih desetletjih iz tega ali onega razloga dvignili največ prahu med matematiki, pa tudi med 'nematematikami'. V enem od poglavij je opisana pot do dokaza izreka štirih barv, za katero je bilo potrebnih celih sto let.

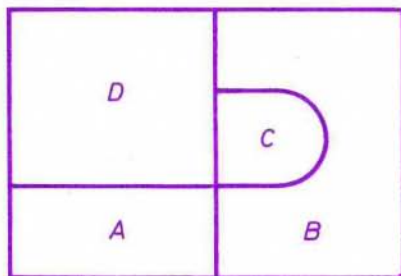
Graf $G = (V, E)$ je matematični objekt, ki ga podamo z množico točk V in množico povezav (torej parov točk) E . Točki sta sosednji, če med njima poteka povezava. Barvanje grafa je preslikava, ki vsaki točki grafa priredi neko barvo. Za imena barv običajno zaradi enostavnosti vzamemo kar naravna števila. Dobro barvanje je tako, ki sosednje točke pobarva z različnimi barvami. Graf je k -pobarvljiv, če obstaja dobro barvanje s k ali manj barvami.

Nekaj več o grafih najdemo v Presekovi knjižici Najnужnejše o grafih, ki sta jo napisala Drago Bajc in Tomaž Pisanski. Posebej o barvanju grafov pa je Presek že pisal v prvi številki letnika 17 (1989/90).

Graf je ravninski, če ga je mogoče narisati v ravnini tako, da se noben par povezav ne seka. Ali drugače povedano: povezave se lahko dotikajo samo v točkah grafa, drugje pa ne.

Pred dobrimi sto leti, natančneje leta 1852, je mladi angleški matematik Francis Guthrie domneval, da je mogoče vsak zemljevid pobarvati s štirimi barvami, če zahtevamo, da je vsak par sosednjih držav pobarvan različno. Državi sta sosednji, če imata skupno mejo. Če se dve državi dotikata samo v eni točki, potem dovolimo, da sta pobarvani enako. Tako moramo na primer na sliki 1 pobarvati različno državi A in B , A in D , B in C , B in D ter C in D , medtem ko sta A in C lahko enake barve.

Če si v vsaki državi izberemo glavna mesta tako, da gre proga med glavnima mestoma držav A in B samo po ozemlju držav A in B , dobimo graf. Vsak tako dobljeni graf se da narisati v ravnini tako, da se noben par povezav (železniških prog) ne seka zunaj glavnih mest. Tak graf je torej ravninski graf. Izkaže se, da poljubnemu zemljevidu ustreza neki ravninski graf in

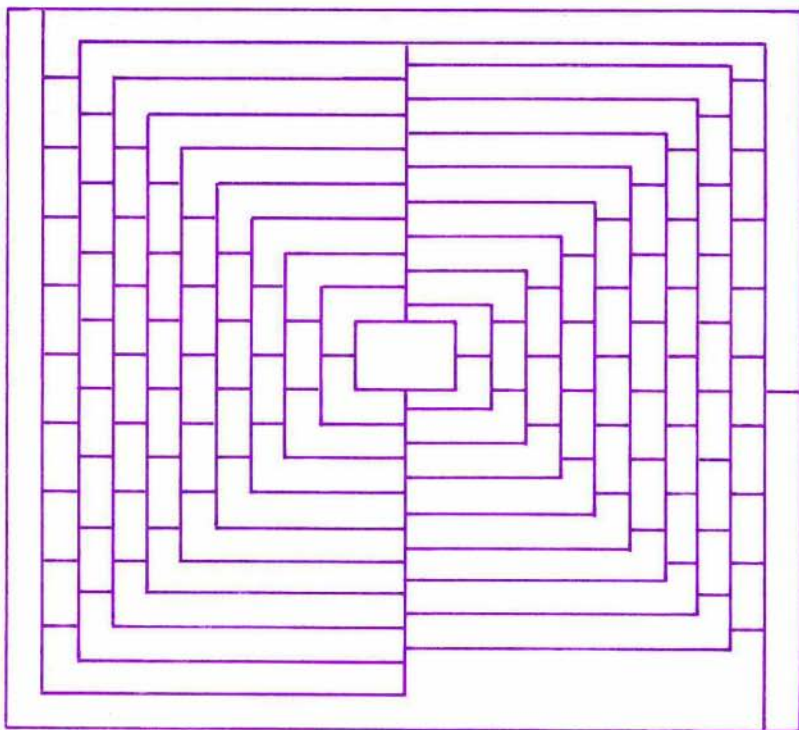


Slika 1.

obratno: vsak ravninski graf lahko dopolnimo do zemljevida. Pri danem ravninskem grafu je takih zemljevidov lahko veliko, saj meje niso natanko določene. Vemo namreč samo to, da meja med dvema državama poteka nekje po ozemlju med obema glavnima mestoma. Zanimivo pa je naslednje: če je mogoče točke ravninskega grafa dobro pobarvati s k barvami, potem je tudi (vsak) pripadajoči zemljevid mogoče pobarvati s k barvami. Velja pa tudi obratno. Tako dobimo drugo obliko Guthrijeve domneve, ki so ji rekli tudi 'domneva štirih barv':

Vsak ravninski graf je mogoče pobarvati s štirimi barvami.

Preveriti, ali je ta domneva pravilna, je bil slaven 'Problem štirih barv'. Za dokaz te, na videz tako enostavne trditve je bilo potrebno ogromno truda mnogih matematikov. Tudi mnogi ljubitelji so poskušali, saj vsaj za



Slika 2.

razumevanje problema res ni potrebno veliko predznanja. Morda ni brez smisla vprašanje, koliko časa bi ljudje še potrebovali, če se ne bi v tem stoletju pojavili računalniki. Za dokaz, ki obsega več kot 600 strani knjige, so pri preverjanju mnogih podprimerov izdatno pomagali računalniški programi, ki so jih razvili Appel, Haken in Koch. Tudi njihovo delo je trajalo nekaj let, dokler niso leta 1976 objavili dokaza.

Od leta 1976 lahko Guthrijevi domnevi rečemo Izrek štirih barv. Sedaj je torej znano, da je mogoče vsak zemljevid pobarvati s štirimi barvami. Seveda pa to ni vedno lahko. Predlagam vam, da svoje sposobnosti preizkusite na zemljevidu na sliki 2, ki ga je Martin Gardner objavil v prvoaprilski številki revije Scientific American leta 1975. (Takrat Appel in Haken še nista objavila svojega dokaza.) Ob zemljevidu je pisalo, da je ta zemljevid protiprimer za domnevo štirih barv. Resnici na ljubo je zemljevid precej 'zapleten'. Ker pa vemo, da so štiri barve dovolj, barvanje s štirimi barvami gotovo obstaja. Poskusite! S prijatelji si lahko omislite majhno tekmovanje. Poglejte na uro in vsak naj se spopade s svojo kopijo zemljevida na sliki 2. Kdo bo prvi?

Če boste polja (države) na zemljevidu pobarvali z izbranimi barvami, lahko dobite prav zanimive 'vzorke'. Pošljite jih Preseku, najlepše bomo nagradili!

Janez Žerovnik

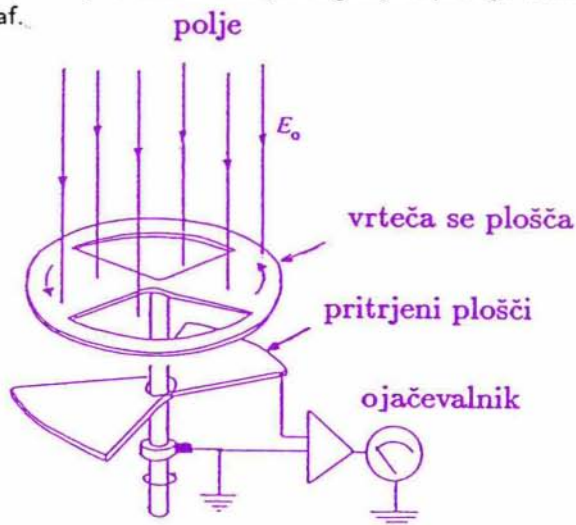
NALOGE S 24. MEDNARODNE FIZIKALNE OLIMPIADE V ZDA

24. mednarodna fizikalna olimpiada je bila od 10. do 18. julija 1993 v Williamsburgu, enem najstarejših mest Združenih držav. Na njej je nastopilo tudi pet slovenskih dijakov in doseglo lep uspeh, saj sta dva dijaka dosegla tretjo nagrado, eden je bil pohvaljen in tudi ostala dva udeleženca sta se povsem približala meji za pohvalo. Poročilo o olimpiadi smo objavili v letošnji tretji številki Preseka. Tokrat objavljamo nekoliko skrajšano inačico nalog s tega tekmovanja; podrobnejši opis nalog in rešitve si lahko bralci ogledajo v reviji Physics Today (November 1993). Prvi tekmovalni dan so dijaki reševali tri teoretične naloge, za kar so imeli pet ur časa, drugi tekmovalni dan pa dve eksperimentalni nalogi, za vsako so imeli dve uri in pol. Vsaka naloga je prinesla največ deset točk. Najboljši tekmovalec je dosegel le malo več kot 40 točk, čeprav je vsako od nalog vsaj en tekmovalec rešil v celoti. Dijaki so bili najbolj uspešni pri prvi eksperimentalni nalogi, daleč najtežja je bila tretja teoretična naloga.

TEKMOVANJA

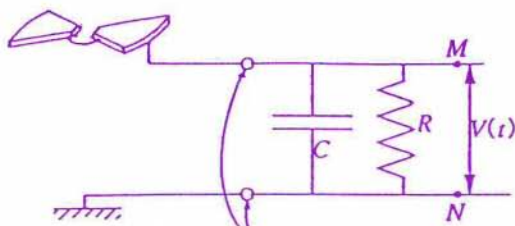
Teoretične naloge

1. V elektrostatiki lahko obravnavamo površje Zemlje kot dober prevodnik. Ima naboj Q_0 in povprečno površinsko gostoto naboja σ_0 .
 - a) V lepem vremenu je jakost električnega polja na površju Zemlje okoli 150 V/m in kaže proti površju. Določi površinsko gostoto naboja in celotni naboj na površju Zemlje.
 - b) Električno polje pojema z višino in je okoli 100 V/m na višini 100 m . Izračunaj povprečni neto naboj na kubični meter zraka med zemeljskim površjem in višino 100 m .
 - c) Neto gostota naboja je posledica skoraj enakega števila pozitivnih in negativnih enkrat ioniziranih ionov v enoti prostornine (n_+ in n_-). Blizu zemeljskega površja je $n_+ \approx n_- \approx 6 \cdot 10^8 \text{ m}^{-3}$. Ti ioni se v navpičnem električnem polju gibljejo s hitrostjo, ki je sorazmerna z jakostjo električnega polja: $v = k \cdot E$, $k = 1,5 \cdot 10^{-4} \text{ m}^2/\text{Vs}$. Izračunaj v kolikšnem času lahko ioni nevtralizirajo polovico naboja na zemeljskem površju.
 - d) Eno izmed možnih naprav za merjenje električnega polja v atmosferi kaže slika 1. Par neozemljenih, med seboj povezanih krožnih kovinskih plošč v obliki četrтинke kroga, je pritrjen tik pod enakomerno se vrtečo krožno ploščo z dvema izrezoma. Dvakrat v vsakem obratu sta izolirani plošči v celoti izpostavljeni električnemu polju in dvakrat popolnoma zakriti. Kako se spreminja s časom naboj na zgornjem površju izoliranih plošč? Nariši graf.



Slika 1.

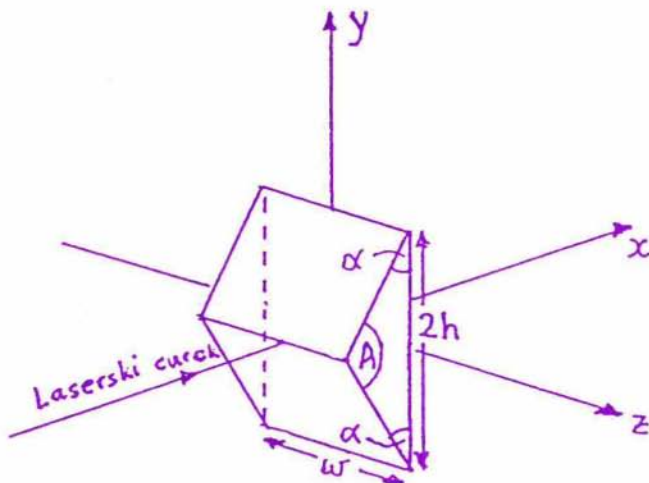
- e) Opisana naprava je priključena na ojačevalnik (slika 2). Vhod ojačevalnika je ekvivalenten vzporedno vezanima kondenzatorju C in uporniku R . Skiciraj graf napetosti med točkama M in N v odvisnosti od časa v primerih, če je obhodni čas T : (i) $T \ll CR$ ali (ii) $T \gg CR$.



Vhodna priključka ojačevalnika

Slika 2.

- f) Vzemi, da je $E_0 = 150 \text{ V/m}$, $r_1 = 1 \text{ cm}$, $r_2 = 7 \text{ cm}$, $C = 0,01 \mu\text{F}$, $R = 20 \text{ M}\Omega$ in da se začne naprava vrteti s 50 vrtljaji na sekundo. Kolikšna je v tem primeru največja napetost?
2. Stekleno prizmo postavimo v curek laserske svetlobe, ki se širi v smeri osi x (slika 3). Podan je kot ob vrhu ($A = \pi - 2\alpha$), dolžina ($2h$) in širina (w) osnovne ploskve prizme ter lomni kvocient (n) in gostota (ρ) stekla. Jakost laserske svetlobe je konstantna po celotni širini v smeri osi z , z oddaljenostjo y od osi x pa linearno pojema, tako da ima pri $y = 0$ največjo vrednost I_0 , pri $y = \pm 4h$ pa pade na vrednost 0.
- a) Zapiši enačbe, iz katerih določiš kot, pod katerim zapusti prizmo žarek, ki vpade na zgornjo ploskev prizme!
- b) Izrazi komponenti sile, s katero curek laserske svetlobe deluje na prizmo, če je njen vrh za razdaljo y_0 odmaknjen od osi x , $y_0 \leq 3h$. Nariši, kako se vodoravna in navpična komponenta sile spreminjata v odvisnosti od navpičnega odmika y_0 !
- c) Curek laserske svetlobe je v smeri osi z širok 1 mm, v smeri osi y pa $80 \mu\text{m}$. Podatki za prizmo so: $\alpha = 30^\circ$, $h = 10 \mu\text{m}$, $n = 1,5$, $w = 1 \text{ mm}$ in $\rho = 2,5 \text{ g/cm}^3$. Kolikšno moč mora imeti laser, da uravnoteži težo prizme, ko je vrh prizme za $y_0 = -h/2$ ($= -5 \mu\text{m}$) pod osjo curka laserske svetlobe?
- d) S kolikšnim nihajnim časom zaniha prizma v breztežnem prostoru, če prizmo premaknemo za razdaljo $y = h/20$ od sredine curka laserske svetlobe z $I_0 = 10^8 \text{ W/m}^2$ in nato spustimo? (Drugi podatki so enaki kot pri c.)



Slika 3.

3. Elektroni, ki jih pospešimo z električno napetostjo, se gibljejo mimo dolge tanke enakomerno nabite bakrene žice, ki je postavljena pravokotno glede na prvotno smer curka, in padajo na zaslon, ki je na veliki razdalji za žico.
- a) Izračunaj električno polje, ki ga povzroča žica. Skiciraj, kako se spreminja velikost polja z razdaljo od osi žice.
- b) Z enačbami klasične fizike približno izračunaj kot, za katerega se odkloni elektron (v odvisnosti od razdalje (b), pri kateri bi šel elektron mimo nenaektrene žice).
- c) Izračunaj in skiciraj gostoto (porazdelitev) elektronov na zaslonu, ki jo napove klasična fizika.
- d) Skiciraj in pojasni porazdelitev, ki jo da kvantna napoved.

Eksperimentalni nalogi

1. Določi izparilno toploto dušika po dveh metodah. Pri prvi metodi potopiš vzorec aluminija v tekoči dušik in meriš, koliko dušika izpari, ko se aluminij ohladi. Pri drugi metodi dovajaš tekočemu dušiku znan toplotni tok in meriš hitrost izparevanja dušika.
Pri obeh metodah tekoči dušik natočiš v posodo na tehtnici. Odčitek na tehtnici se manjša, ko tekoči dušik izpareva. To se dogaja, ker: (1) posoda ni idealno toplotno izolirana, (2) tekoči dušik prejema toploto zaradi ohlajanja aluminija (pri prvi metodi), (3) tekoči dušik prejema

toploto od potopljenega upornika, ki je priključen na izvir napetosti (pri drugi metodi). Pri prvi metodi upoštevaj, da se specifična toplota aluminija zelo spreminja v področju med sobno temperaturo in vreliščem dušika (77 K). (Priložen je graf, ki kaže spreminjanje specifične toplote v odvisnosti od temperature.)

Na razpolago imaš multimeter, ki ga lahko uporabljaš za merjenje napetosti, električnega toka ali upora, ter štoparico.

2.

- Določi absolutno velikost magnetnega momenta (μ_X) majhnega valjastega trajnega magneta, ki ga dobiš v ovojnici z oznako X. (Podoben magnet je v ovojnici z oznako A.)
- V aluminijasti cevki (v ovojnici B) je skrit sistem magnetov. Magnetno polje v osi x tega sistema se spreminja kot $B_x(x) = Cx^p$, če je x razdalja, merjena od središča cevke. Določi eksponent p in oceni natančnost.

Napotki

- Magnetno polje, ki ga ustvari dipolni magnet v točki na osi magneta na razdalji x od njegovega središča, je vzporedno s to osjo, njegova velikost pa je podana z

$$B(x) = \frac{2\mu K}{|x|^3}, \quad K = 10^{-7} \text{ Tm/A}.$$

- Nihajni čas majhnih sučnih nihanj prosto obešenega magneta (na primer magnetnice v kompasu) je podan z

$$T = 2\pi \sqrt{\frac{I}{\mu B_h}},$$

če je B_h vodoravna komponenta polja in I vztrajnostni moment magneta okoli navpične osi skozi središče.

Naprava

Magnet (X ali A) obesiš na prosto krajišče vrvice, ki je obešena na stojalu. Na drugo stojalo lahko pritrdiš drugi magnet (A ali X); v drugem delu naloge pa sistem magnetov B. Z magnetom na drugem stojalu lahko vplivaš na prosto obešen magnet tako, da spreminjaš njegov nihajni čas ali smer, v katero je obrnjen v ravnovesju. Razdaljo med obešenima magnetoma meriš z ravnilom, ki je pritrjeno na tretje pomožno stojalo.

Bojan Golli

STEREOSKOPSKE SLIKE, NAREJENE S PROGRAMOM PERSPECTUS

Stereoskopske slike so dvodimenzionalne slike, ki nam ustvarjajo vtis globine. Ob prelomu stoletja so bile zelo popularne stereoskopske razglednice, pri katerih sta bili druga ob drugi postavljeni dve sliki istega predmeta, vsaka rahlo nagnjena v perspektivi, ki ustreza razdalji med našimi očmi. Pri pravilnem gledanju se v naših možganih sliki zlijeta v eno, ki ustvarja vtis globine. Nadalje poznamo opazovanje slik s stereoskopom, stereokamere, pa tudi stereofilme, ki jih moramo gledati s posebnimi očali.

Januarja 1993 je Američan Alan Meiss iz Indiane v Turbo pascalu napisal program Perspectus, ki je sposoben generirati stereoskopske slike iz risb, ki jih uporabnik naredi na eni sami površini.

Vsi, ki imate modem, lahko dobite program na BBS Infobia (in najbrž še kje drugje) pod imenom PER.ZIP na direktoriju GRAPHICS. Povejmo še, da zahteva Perspectus vsaj EGA grafično zmogljivost in miško.

Prvi del programa sestavlja preprost risarski program za risanje slike, ki jo kasneje procesiramo. Risarske ukaze za pisanje teksta, radiranje, risanje pik, črt, škatel, krogov, kopiranje površin in barvanje vodimo z miško kot v najbolj običajnih risarskih programih. Vsaka barva ustreza nekemu globinskemu nivoju končne slike: najplitvejša je bela, rumena je nekoliko globlja itd.

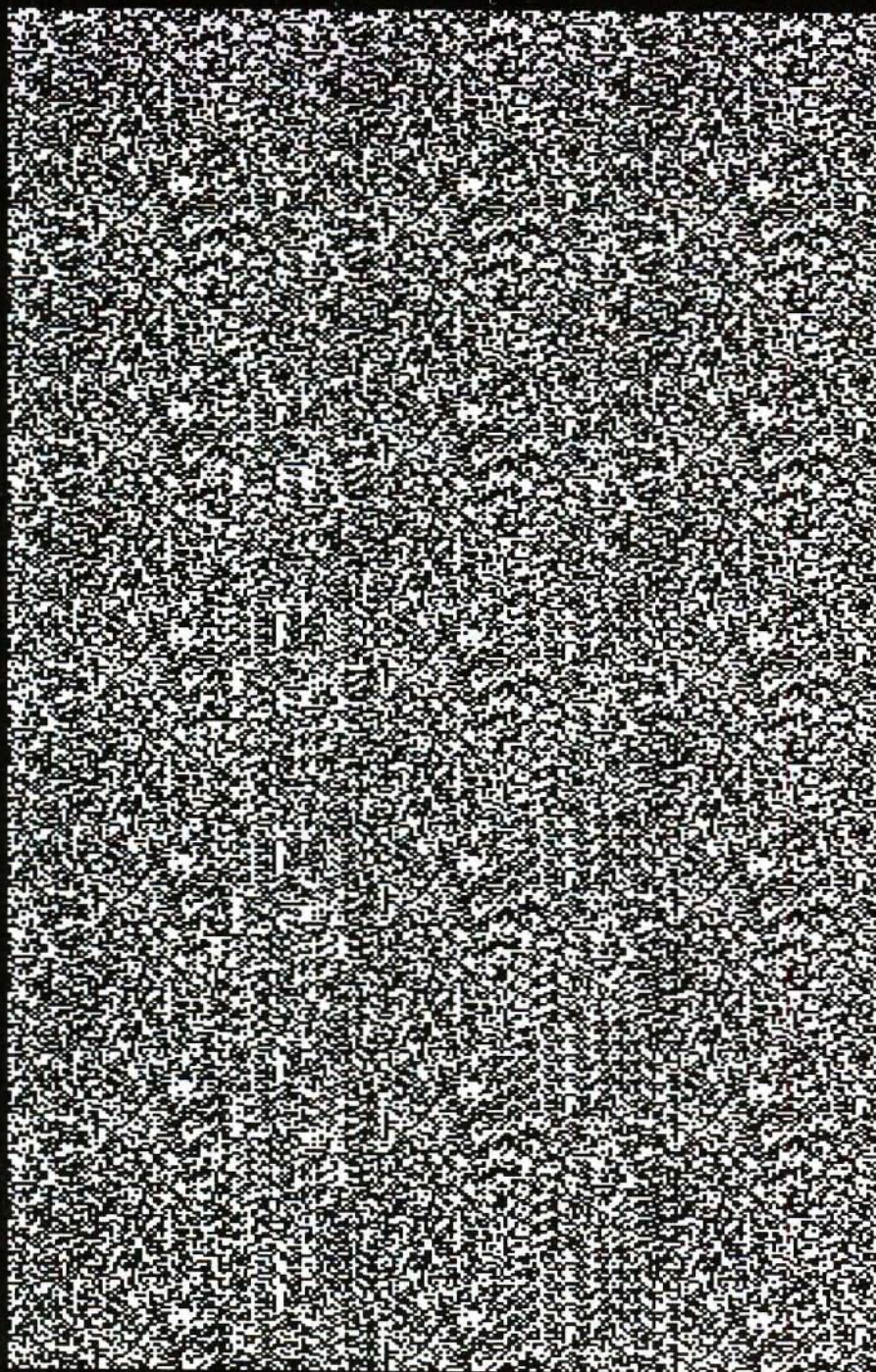
Posebej za tale prispevek je bila pripravljena slika, ki jo vidite na strani 320. Globinski vtis se namreč ohrani, tudi če sliko iztiskamo. Kako je bil videti ekran v prvi fazi njene priprave, kaže polovična barvna slika na naslednji strani.

Večji ukazni gumbi na dnu ekrana pomenijo posebne funkcije. Med njimi je tudi gumb Help, s katerim dobite navodila za natančno ravnanje s programom.

Najpomembnejša posebna funkcija je skrita za gumbom Process. Z ukazom Process poženemo osrednji del programa, ustvarjanje stereoskopske slike.

Program generira ozadje slučajnih pik, podobno sneženju na televiziji, nato pa, glede na risbo, ki smo jo narisali, perturbira pike tako, da ob pravilnem gledanju vidimo večplastno globinsko (črnobelo) sliko.

Pod barvno sliko na notranji strani ovitka je tudi navodilo, kako sliko pravilno gledati. Poskusite lahko kar s sliko na strani 320, saj smo že omenili, da se stereoskopska lastnost pri izpisu ohrani.





Kako gledati sliko?

Presek najprej obrnite za devetdeset stopinj, tako da bo zgoraj vodoravno tisti rob slike, ob katerem sta dve piki.

Nato osredotočite svoj pogled za sliko, kot da bi gledali oddaljen predmet. Tako glejte, dokler ne zagledate, namesto omenjenih dveh, nad zaslonom treh pik. Tam sta res samo dve piki, toda vsako oko ju vidi neodvisno. Tri pike boste videli, ko se bo slika desne pike, ki jo vidite z levim očesom, pokrila s sliko leve pike desnega očesa. Takole nekako bo šlo:

normalen pogled: o o

mrzlo: o o o o

toplo: o o o o

vroče: o o o

Ko vidite tri pike, zadržite ta pogled in zdrsnite z njim navzdol v sliko. Če že vidite globinsko, ne razločite pa še črk, malo potrpite. Pogled imate pravilno usmerjen, slika se bo prikazala. Drugače pa bo treba še malo trenirati. Je že res, da nekateri ljudje lažje vidijo sliko kot drugi.

Matjaž Vencelj

