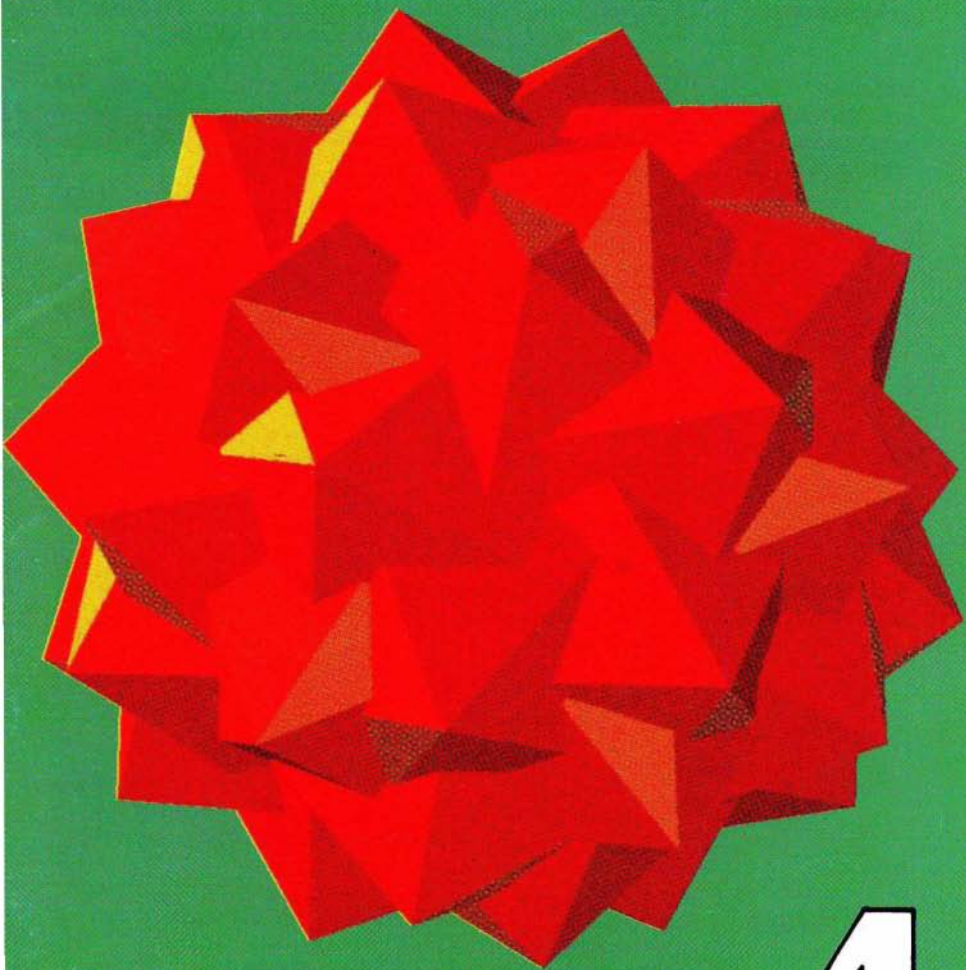


PRESEK

ISSN 0351-6652

DRUŠTVO MATEMATIKOV, FIZIKOV IN ASTRONOMOV SLOVENIJE, 21(1993-94)



4

PRESEK - list za mlade matematike, fizike, astronome in računalnikarje
21. letnik, leto 1993/94, številka 4, strani 193–256

VSEBINA

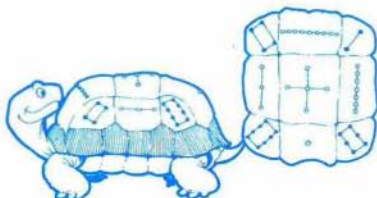
MATEMATIKA	Zapis števil v negativni osnovi (Jože Grasselli).....	216-222
	Prostorsko - časovni labirinti ali kako osvojiti kraljično (Jurij Kovič).....	238-242
FIZIKA	Izolirajmo hišo! (Andrej Likar).....	212-215
ASTRONOMIJA	Razlika štirih minut (Marijan Prosén).....	254-255, III
RAČUNALNIŠTVO	Linux - čisto pravi Unix (Andrej Bauer).....	206-210
TEKMOVANJA	2. državno tekmovanje osnovnošolcev iz matematike (Aleksander Potočnik).....	197-198
	37. matematično tekmovanje srednješolcev Slovenije - rešitve s str. 178 (Darjo Felda).....	199-204
	28. občinsko tekmovanje za srebrno Vegovo priznanje - rešitve s str. 190 (Aleksander Potočnik).....	204-205
	Urniki tekmovanj v letu 1994 (Darjo Felda).....	232-235
	Naloge z državnega tekmovanja fizikov - rešitve s str. 169 (Bojan Golli).....	243-246
	13. državno tekmovanje iz fizike za osnovnošolce - rešitve s str. 139 (Zlatko Bradač, Mirko Cvahte)...	248-251
	15. mednarodno matematično tekmovanje mest, jesenski krog (Matjaž Željko).....	252-253
NALOGE	Nagradna naloga - Magični šestkotnik (Marija Vencelj) ..	193-194
	Tri naloge s polinomi (Borut Zalar).....	198
	Neznani liki - 1. del (Martin Juvan).....	210
	Koliko ničel? (Martin Juvan).....	253
RAZVEDRILO	Križanka Matematični pojmi (Marko Bokalič).....	224-225
REŠITVE NALOG	Ena poslanska - s str. 174 (Borut Zalar).....	199
	Številski krog - s str. 134 (Marija Vencelj).....	211
	Simetrični sistem - s str.189 (Bojan Gornik).....	215
	Geometrijska za osnovnošolce - s str. 183 (Igor Gajser) ..	222-223
	Naloge iz programiranja - s str. 125 (Martin Juvan).....	235-237
	Vsota posebne vrste - s str. 189 (Marija Vencelj).....	242
	Križanka Avtorji učbenikov in vaj za osnovno šolo - s str. 160 (Marko Bokalič).....	251
	Kaj se zgodi z gladino vode? - s str. 129 (Matjaž Vencelj)	255-256
	Zaporedje - s str. 147 (Bojan Gornik).....	256
NOVICE	Uniformni poliedri (Tomaž Pisanski).....	195-196
	Ob stoletnici smrti Heinricha Hertza (Janez Strnad)	226-232
NOVE KNJIGE	Hawking S., Stone G., Berilo h kratki zgodovini časa Stephena Hawkinga (Janez Strnad).....	247
	Tekmujmo za Vegova priznanja (Sandi Klavžar).....	IV
NA OVITKU	Veliki potlačeni ikozidodekaeder: a) narisani s programom Mathematica.....	I
	b) narejeni iz papirja (Glej tudi prispevek na strani 195.)	IV

NAGRADNA NALOGA - MAGIČNI ŠESTKOTNIK

Med magičnimi liki so najbolj znani magični kvadrati. Magični kvadrat reda n je taka kvadratna shema $n \times n$ paroma različnih naravnih števil, da so vsote števil v posamezni vrstici, posameznem stolpcu in vzdolž obeh glavnih diagonal med seboj enake. O njih je Presek že pisal: V 6. številki XIV. letnika najdemo zapis Alojzija Vadrnala o tem, kako lahko magične kvadrate sestavljamo, v 3. številki XIV. letnika in 1. številki XVI. letnika pa prispevka Boruta Zalarja o magičnih kvadratih reda $4n$ in lihega reda.

Običajno postavimo za magični kvadrat reda n še dodatno zahtevo, da ga sestavljajo naravna števila od 1 do n^2 . Pri tem pogoju obstaja za red 1 le trivialni magični kvadrat, magičnega kvadrata reda 2 ni. Če odmislimo simetrične primere, je magični kvadrat reda 3 en sam. Že okrog leta 2000 pred našim štejetjem so ga našli na Kitajskem, prikazanega na oklepu želve. To je:

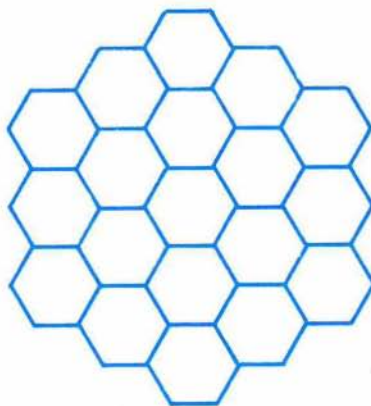
4	9	2
3	5	7
8	1	6



Nekje sem prebrala, da je različnih magičnih kvadratov četrtega reda 880, tistih višjih redov se pa sploh ne splača več šteti, toliko da jih je.

Obstajajo tudi drugačni magični liki. Zastavljamo vam nagradno nalogo poiskati magični šestkotnik reda 3, to je razvrstiti v narisano šestkotno shemo števila od 1 do 19 tako, da boste dobili v vsaki od petnajstih vrstic, vzporednih šestkotnikovim stranicam, isto magično vsoto. Zagotovilo: Rešitev obstaja in je do simetrije ena sama.

S tem magičnim šestkotnikom je povezana zanimiva zgodba. Leta 1910 se je železničarski uradnik Clifford Adams "odločil" poiskati magični šestkotnik reda 3. K sreči ga niso mučile skrbi v zvezi z eksistenco



rešitve, ki po nepotrebnem tarejo matematike. Tako se je 47 let neobremeno pa vztrajno ukvarjal s problemom, takole mimogrede naletel na rešitev - in jedro izgubil listek, na katerega jo je bil napisal. Po petih letih intenzivnega iskanja je Adams papir spet našel in nemudoma poslal rešitev nekaj matematikom. Ti so odkrili presenetljivo dejstvo: Adamsov šestkotnik je edini magični šestkotnik poljubnega reda (z izjemo trivialnega z redom 1, seveda), ki sploh obstaja!

Poiščite ga in nam ga pošljite najkasneje do 1. aprila letos. Med reševalci s praviimi rešitvami bomo izžrebali dva, ki bosta prejela lepi knjižni nagradi. Imena reševalcev in rešitev naloge bomo objavili v 6. letošnji številki.

Marija Vencelj

PRI NASTAJANJU PRESEKA POMAGATA S PROGRAMSKO OPREMO PODJETJI MARAND IN MARMIS

PRESEK

list za mlade matematike, fizike, astronome in računalnikarje

21. letnik, šolsko leto 1993/94, številka 4, strani 193 – 256

UREDNIŠKI ODBOR: Vladimir Batagelj, Tanja Bečan (jezikovni pregled), Dušica Boben (oblikovanje teksta), Mirko Dobovišek (glavni urednik), Vilko Domajnko, Roman Drnovšek (novice), Darjo Felda (tekmovanja), Bojan Golli, Marjan Hribar, Boštjan Jaklič (tehnični urednik), Martin Juvan (računalništvo), Sandi Klavžar, Edvard Kramar, Boris Lavrič, Andrej Likar (fizika), Matija Lokar, Franci Oblak, Peter Petek, Pavla Ranzinger (astronomija), Marjan Smerke (svetovalec za fotografijo), Miha Štalec, Jana Vrabec (nove knjige), Marija Vencelj (matematika, odgovorna urednica).

Dopisi in naročnine: Društvo matematikov, fizikov in astronomov Slovenije - Podružnica Ljubljana - Komisija za tisk, Presek, Jadranska c. 19, 61111 Ljubljana, p.p. 64, tel. (061) 265-061/53, št. ŽR 50101-678-47233. Naročnina za šolsko leto 1993/94 je za posamezne naročnike **900 SIT**, za skupinska naročila šol **720 SIT**, posamezna številka **180 SIT**, za tujino 12000 LIT, devizna nakazila SKB banka d.d. Ljubljana, val-27621- 42961/9, Ajdovščina 4, Ljubljana.

List sofinancirajo MZT, MŠŠ in MK
Ofset tisk DELO - Tiskarna, Ljubljana

Po mnenju MZT št. 415-52/92 z dne 5.2.1992 šteje revija med proizvode iz 13. točke tarifne št. 3 zakona o prometnem davku, za katere se plačuje 5% davek od prometa proizvodov.

UNIFORMNI POLIEDRI

Poliedre z regularnimi stranicami in kongruentnimi oglišči imenujemo *uniformni poliedri*. Najbolje bo, da si to nerazumljivo definicijo ogledamo pobliže in jo natančno pojasnimo. Zanimajo nas oglata telesa v prostoru, ki imajo za stranske ploskve pravilne ravninske večkotnike. Ti večkotniki niso nujno konveksni; mednje štejemo med drugim tudi pentagram (petkrako zvezdo). Nadalje ste oglišči *A* in *B* kongruentni, če lahko telo zasukamo tako, da preide vase in se oglišče *A* zasuka v oglišče *B*.

Očitno so vsa platonska telesa (tetraeder, oktaeder, kocka, ikozaeder in dodekaeder) uniformni poliedri. Poleg njih obstaja še trinajst drugih konveksnih uniformnih poliedrov ter dve neskončni družini prizem in antiprizem (slika spodaj). Seveda si lahko zamislimo še neskončno mnogo nekonveksnih prizem



tetraeder



oktaeder



kocka



ikozaeder



dodekaeder



prisekani
tetraeder



kuboktaeder



prisekani
oktaeder



prisekana
kocka



rombni
kuboktaeder



prisekani
kuboktaeder



potlačena
kocka



ikozidodeka-
eder



prisekani
ikozaeder



prisekani
dodekaeder



rombni
ikozidodeka-
eder



prisekani
ikozidodeka-
eder



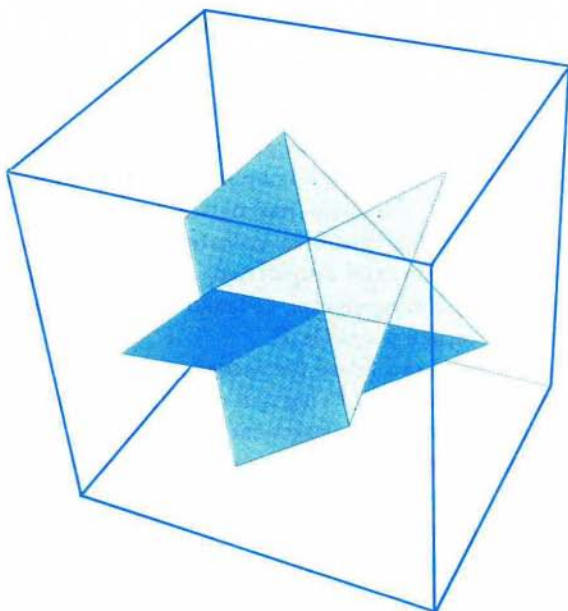
potlačeni
dodekaeder



petkotna
prizma



petkotna
antiprizma



in antiprizem, npr. pentagamsko prizmo oziroma antiprizmo. Na zgornji sliki vidimo pentagamsko prizmo. Bralce vabimo, da nam narišejo pentagamsko antiprizmo.

Leta 1953 so Coxeter, Longuet-Higgins in Miller konstruirali 75 uniformnih poliedrov. Leta 1975 je J. Skilling objavil članek, v katerem je dokazal, da razen prizem in antiprizem poleg teh 75 znanih ni drugih uniformnih poliedrov. Izraelski matematik Har'El Zvi pa je lani našel novit način opisa uniformnih poliedrov. Napisal je tudi program *kaleido.c*, ki konstruira uniformne poliedre in njihove duale. Vsi, ki imate dostop do elektronske pošte in interneta, lahko dodatne informacije dobite s programom *ftp* na elektronskem naslovu *gauss.technion.ac.il* na direktoriju *kaleido*. Roman Maeder, profesor računalništva na slovit ETH v Švici, je v zadnji lanski številki *The Mathematica Journal* - reviji, ki je v celoti posvečena sistemu za simbolno računanje *Mathematica* - objavil članek o risanju uniformnih poliedrov, elektronski dodatek omenjene revije pa vsebuje tudi njegov program v *Mathematici*. Slike, ki sodijo k temu prispevku (vključno naslovnica), so vzete iz omenjenega članka.

Leta 1980, ko je Presek prvič prikazal uniformni polieder na naslovnici, je bilo potrebno model izdelati iz papirja (glej zadnjo stran ovitka), zdaj lahko dobimo sliko neposredno z računalnikom.

Tomaž Pisanski

TEKMOVANJA

2. DRŽAVNO TEKMOVANJE OSNOVNOŠOLCEV IZ MATEMATIKE

V soboto, 15. maja 1993, se je 209 sedmošolcev in 360 osmošolcev, ki so se na občinskem tekmovanju najbolje odrezali, zbralo v Ljubljani, Mariboru, Celju, Kopru, Novem mestu in Novi Gorici na 2. državnem tekmovanju.

Petnajstčlanska komisija pod predsedstvom Pavla Zajca je pripravila naloge, pregledala rešitve in določila kriterij za podelitev zlatih Vegovih priznanj.

Zlato Vegovo priznanje je osvojilo 69 sedmošolcev in 119 osmošolcev. V obeh tekmovalnih skupinah so dobili priznanje vsi, ki so dosegli vsaj 17 od 25 možnih točk. Kako težke so bile naloge, presodite sami.

7. razred

1. Izračunaj vrednost izraza $\sqrt[3]{(2-a)^2 + (a+1)^2 + 19}$, če je $a(a-1) - a(a-2) - 3 = 2$.

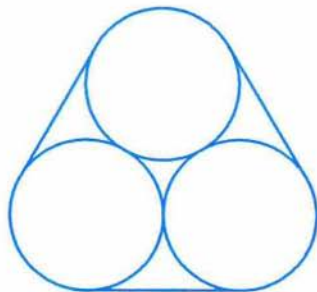
2. Pastirja z ovcami sreča popotnik in mu zaželi: „Bog daj srečo, da bo kmalu sto ovac!“ Pastir pa pravi: „Ko bom dobil še enkrat toliko, pa še pol toliko in še četrto toliko ovac, kot jih imam sedaj, pa še eno zraven, jih bo pa zares sto.“

Koliko ovac je imel takrat?

3. Poišči vsa dvomestna števila z lastnostjo: vsota iskanega števila in števila, ki ima isti števk v obratnem vrstnem redu, je kvadrat naravnega števila.

4. Tri enake valje zložimo in povežemo z elastiko (glej skico).

Ali je več elastike napete naravnost ali po krožnih lokih? Za koliko %?



5. Zunanji kot pravilnega n -kotnika meri $\frac{2}{15}$ iztegnjenega kota.

a) Za kateri n -kotnik gre?

b) Koliko skupin med seboj enako dolgih diagonal ima ta n -kotnik?

c) Koliko diagonal je v vsaki skupini?

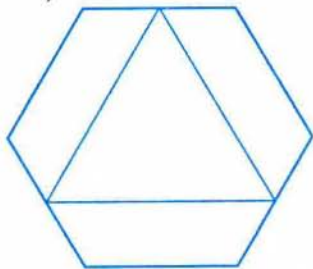
8. razred

1. Blago se je podražilo za 10%. Ker ni šlo v prodajo, so znižali ceno za tretjino. Nova cena je 440 SIT. Izračunaj začetno ceno.
2. V krogu s polmerom $r = 6$ cm narišemo na različnih straneh središča vzporedni tetivi, ki jima ustrezata središčna kota 60° in 120° . Tetivi sta osnovnici enakokrakega trapeza. Nariši skico in izračunaj obseg trapeza.
3. Poenostavi izraz

$$\frac{\left(\frac{1}{x^2} - \frac{1}{y^2}\right) \cdot \left(\frac{x-y}{x+y} - 1\right)}{\left(\frac{x-y}{x+y} + 1\right) \cdot \left(\frac{x}{y} - \frac{y}{x}\right)}$$

4. Pravilno šeststrano enakorobno prizmo prerežemo skozi središča treh robov osnovne ploskve (glej skico).

Kolikšen del prostornine šeststrane prizme je prostornina pravilne tristrane prizme, ki nastane pri razrezu? Izrazi v odstotkih.



5. Premici sta dani z enačbama $mx + (2m + 3)y + m + 6 = 0$ in $(2m + 1)x + (m - 1)y + m - 2 = 0$. Pri kateri vrednosti števila m se bosta premici sekali na ordinatni osi?

Aleksander Potočnik

TRI NALOGE S POLINOMI

1. Dan je polinom $P(x) = x^4 - 88x^3 + kx^2 + 190x - 1992$. Določi število k , če veš, da je produkt dveh ničel enak 12.
2. Ali obstaja polinom $P(x)$ s celoštevilskimi koeficienti, da bo $P(1) = 2$ in $P(2) = 1$? Kaj pa $P(1) = 2$ in $P(3) = 1$?
3. Dokaži, da polinoma $P(x) = x^4 + 2x^2 + 2x + 2$ ni mogoče izraziti kot produkt dveh kvadratnih polinomov s celoštevilskimi koeficienti.

Borut Zalar

REŠITVE NALOG

ENA POSLANSKA – Rešitev s str. 174

Označimo z u število tistih poslancev, ki so bili prvič za zakon, z v število tistih, ki so bili prvič proti, z x število tistih, ki so bili drugič za ter z y število tistih, ki so bili drugič proti. Pogoje naloge lahko izrazimo z enačbami

$$\begin{aligned}u + v &= 90, & x + y &= 90, \\2(v - u) &= x - y, & \frac{v}{x} &= \frac{10}{11}.\end{aligned}$$

Od tod dobimo naslednje izražave:

$$v = \frac{10x}{11}, \quad y = 90 - x, \quad u = 90 - v = 90 - \frac{10x}{11}.$$

Če to vstavimo v tretjo enačbo, dobimo

$$2\left(\frac{10x}{11} - 90 + \frac{10x}{11}\right) = x - 90 + x$$

oziroma $x = 55$, kar je tudi odgovor na zastavljeno vprašanje.

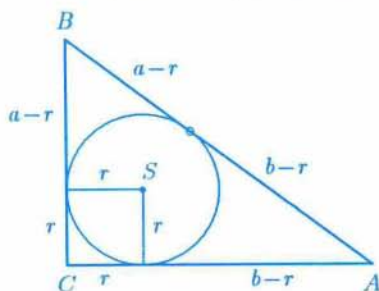
Borut Zalar

37. MATEMATIČNO TEKMOVANJE SREDNJEŠOLCEV SLOVENIJE – Rešitve s str. 178

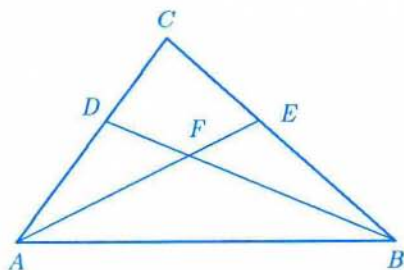
Prvi letnik

1. Pišimo $3^{2n+1} - 2^{2n+1} - 6^n = 3 \cdot (3^n)^2 - 2 \cdot (2^n)^2 - (2^n) \cdot (3^n)$ ter označimo $a = 3^n$ in $b = 2^n$. Potem je $3a^2 - 2b^2 - ab = 3(a^2 - b^2) + b^2 - ab = 3(a - b)(a + b) - b(a - b) = (a - b)(3a + 2b)$ oziroma $3^{2n+1} - 2^{2n+1} - 6^n = (3^n - 2^n)(3^{n+1} + 2^{n+1})$. Pri $n = 1$ je izraz enak 13 in je praštevilo, sicer je pa zaradi zadnje oblike zapisa sestavljeno število.

2. Označimo stranice trikotnika z a , b in c ter polmer včrtanega kroga z r . Iz Pitagorovega izreka ($a^2 + b^2 = c^2$) sledi, da je $a + b - c$ vedno sodo (če sta a in b enake parnosti, je c sod, sicer je pa c lih). Iz $c = (a - r) + (b - r)$ dobimo $r = \frac{a + b - c}{2}$, ki je torej vedno celo število.



3. Če med temi liki ni štirikotnika, je zaradi enakosti ploščin trikotnikov ABF in AFD točka F razpolovišče BD , saj imata trikotnika enaki višini na BF oziroma FD . Podobno je zaradi enakosti ploščin trikotnikov ABF in BEF točka F razpolovišče AE . To pomeni, da sta AE in BD diagonali paralelograma $ABED$, kar ni mogoče, saj bi se nosilki daljic AD in BE ne sekali v C .



4. Najprej pogledjmo, katere številke lahko priredimo vsaki izmed števil od 1 do 18:

$1 \rightarrow 3, 8, 15$	$7 \rightarrow 2, 9, 18$	$13 \rightarrow 3, 12$
$2 \rightarrow 7, 14$	$8 \rightarrow 1, 17$	$14 \rightarrow 2, 11$
$3 \rightarrow 1, 6, 13$	$9 \rightarrow 7, 16$	$15 \rightarrow 1, 10$
$4 \rightarrow 5, 12$	$10 \rightarrow 6, 15$	$16 \rightarrow 9$
$5 \rightarrow 4, 11$	$11 \rightarrow 5, 14$	$17 \rightarrow 8$
$6 \rightarrow 3, 10$	$12 \rightarrow 4, 13$	$18 \rightarrow 7$

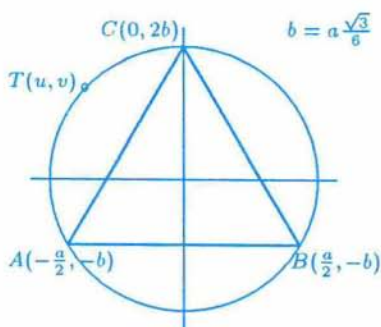
Vidimo, da morajo biti $(7, 18)$, $(8, 17)$ in $(9, 16)$ v paru. Zato morata biti v paru 2 in 14, nato $(5, 11)$, pa $(4, 12)$, $(3, 13)$, $(1, 15)$ ter $(6, 10)$. Minkin soplesalec je imel številko 15.

Drugi letnik

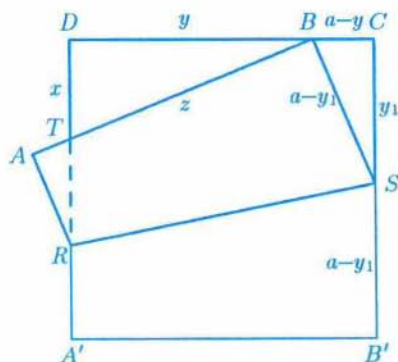
1. Naj bo $a^2 + 2mb^2 = c^2$, kar med drugim pove, da sta a in c iste parnosti. Potem je $a^2 + mb^2 = c^2 - mb^2 = \frac{(a^2 + mb^2) + (c^2 - mb^2)}{2} = \frac{a^2 + c^2}{2} = \frac{(a+c)^2 + (a-c)^2}{4} = \left(\frac{a+c}{2}\right)^2 + \left(\frac{a-c}{2}\right)^2$. Ker smo že ugotovili, da sta a in c iste parnosti, sta števili $\frac{a-c}{2}$ in $\frac{a+c}{2}$ celi in je dokaz končan.

2. Če k -to enačbo $x_1 x_2 \cdots x_{k-1} - x_k \cdots x_{1992} x_{1993} = 1$ ($k > 1$) pomnožimo z $x_1 x_2 \cdots x_{k-1}$ in jo prištejemo k prvi, dobimo $y^2 = y + 1$ (z y smo označili $x_1 x_2 \cdots x_{k-1}$). Ta kvadratna enačba ima rešitvi $\frac{1 \pm \sqrt{5}}{2}$. Za posebna primera, ko je $y = x_1 x_2 \cdots x_{24}$ oziroma $y = x_1 x_2 \cdots x_{25}$, dobimo, da je x_{25} enak 1 ali $\frac{1 + \sqrt{5}}{1 - \sqrt{5}}$ ali $\frac{1 - \sqrt{5}}{1 + \sqrt{5}}$. Da so te vrednosti res zavzete, se lahko hitro prepričamo.

3. Postavimo trikotnik v koordinatni sistem tako, da je središče očrtane krožnice v izhodišču in izberimo poljubno točko $T(u, v)$ na krožnici. Potem je vsota kvadratov razdalj $(u + \frac{a}{2})^2 + (v + b)^2 + (u - \frac{a}{2})^2 + (v + b)^2 + u^2 + (v - 2b)^2 = 3(u^2 + v^2) + \frac{a^2}{2} + 6b^2 = 3r^2 + \frac{a^2}{2} + 6b^2 = 2a^2$ in je res neodvisna od izbire točke na krožnici.



4. Naj bo stranica kvadrata dolga a in naj veljajo oznake s slike. Vsota obsegov vseh treh trikotnikov je $4a$, zato je dovolj, če pokažemo, da je obseg trikotnika TBD enak $2a$. Zaradi podobnosti trikotnikov TBD in BSC je $\frac{x}{y} = \frac{a-y}{y_1}$ oziroma $y_1 = \frac{y(a-y)}{y}$. Po Pitagorovem izreku je $(a-y_1)^2 = (a-y)^2 + y_1^2$, od tod pa $y_1 = \frac{y(2a-x)}{2a}$. Izenačimo obe vrednosti za y_1 in dobimo $y = \frac{2a(a-x)}{2a-x}$. Iz podobnosti istih trikotnikov sklepamo tudi $\frac{x}{z} = \frac{a-y}{a-y_1}$.



Izrazimo $a - y_1 = \frac{a(2a^2 - 2ax + x^2)}{(2a-x)^2}$ in $a - y = \frac{ax}{2a-x}$, pa dobimo $z = \frac{a-y_1}{a-y}x = \frac{a(2a^2 - 2ax + x^2)(2a-x)}{(2a-x)^2ax}x = \frac{2a^2 - 2ax + x^2}{2a-x}$. Obseg trikotnika TBD je $x + y + z = x + \frac{2a^2 - 2ax}{2a-x} + \frac{2a^2 - 2ax + x^2}{2a-x} = \frac{4a^2 - 2ax}{2a-x} = 2a$.

Tretji letnik

1. Najprej je $\frac{\pi}{2} < 2 < 3 < \pi < 4 < \frac{3\pi}{2} < 5 < 6 < 2\pi < 7 < \frac{5\pi}{2} < 8 < 3\pi$, zato velja $\cos 2 < 0$, $\cos 4 < 0$, $\cos 6 > 0$ in $\cos 8 < 0$. Iz

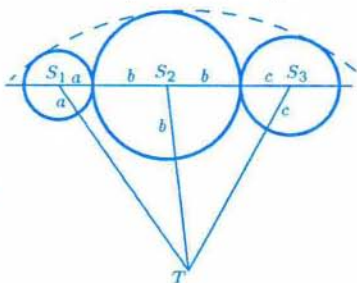
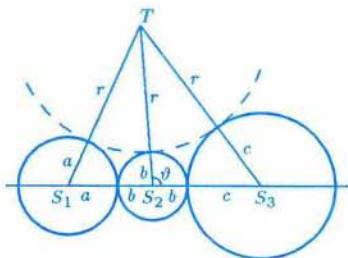
$\cos 2 - \cos 4 = 2 \sin 3 \cdot \sin 1 > 0$ sledi $\cos 2 > \cos 4$. Podobno sklepamo $\cos 8 > \cos 2$, saj je $\cos 8 - \cos 2 = -2 \sin 5 \cdot \sin 3 > 0$. Tako imamo $\cos 6 > \cos 8 > \cos 2 > \cos 4$.

2. Število $x = 1$ ne reši enačbe. Pomnožimo obe strani enačbe z $(x-1)^2$ in jo zapišimo v obliki $(x^3-1)(x^{11}-1) = (x^7-1)^2$, nato pa preuredimo v $x^3(x-1)^2(x+1)^2(x^2+1)^2 = 0$. Od tod razberemo, da so rešitve dane enačbe $x_{1,2,3} = 0$, $x_{4,5} = -1$, $x_{6,7} = i$ in $x_{8,9} = -i$ (saj smo že ugotovili, da število $x = 1$ prvotne enačbe ne reši).

3. Ločimo dva primera, saj se krogi lahko dotikajo krožnice z zunanje ali notranje strani. Obakrat naj bo $\vartheta = \angle TS_2S_3$ (zato je $\angle S_1S_2T = \pi - \vartheta$). Uporabili bomo kosinusni izrek.

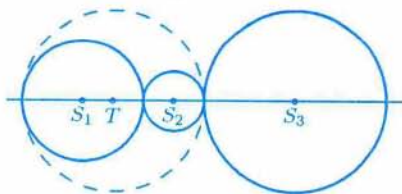
Na levi sliki imamo $\cos \vartheta = \frac{(b+c)^2 + (b+r)^2 - (c+r)^2}{2(b+c)(b+r)}$ in $\cos(\pi - \vartheta) = \frac{(a+b)^2 + (b+r)^2 - (a+r)^2}{2(a+b)(b+r)}$. Ker velja enakost $\cos \vartheta + \cos(\pi - \vartheta) = 0$, po krajšem računu dobimo $r = \frac{b(a+b)(b+c)}{ac-b^2}$. Desna slika da $\cos \vartheta = \frac{(b+c)^2 + (r-b)^2 - (r-c)^2}{2(b+c)(r-b)}$ in $\cos(\pi - \vartheta) = \frac{(a+b)^2 + (r-b)^2 - (r-a)^2}{2(a+b)(r-b)}$, enakost $\cos \vartheta + \cos(\pi - \vartheta) = 0$ pa prinese $r = \frac{b(a+b)(b+c)}{b^2-ac}$.

Iskani polmer krožnice je torej $r = \frac{b(a+b)(b+c)}{|ac-b^2|}$, če je $ac-b^2 \neq 0$, sicer pa take krožnice ni (izrodi se v premico - skupno tangento).



Poleg teh dveh primerov sta še dva: katerokoli od dotikališč krogov je lahko dotikališče iskane krožnice s tega krogoma. Potem je $r = \frac{a+b}{2}$

ali $r = \frac{b+c}{2}$.



4. Poimenujmo glasbenike $A, \dots, F$. Očitno morajo biti na festivalu vsaj trije koncerti. Predpostavimo, da so na festivalu natanko trije koncerti. Ker imamo šest glasbenikov, morata na vsaj enem koncertu nastopiti vsaj dva. Označimo ju z A in B . Potem mora biti A poslušalec B -ja na drugem koncertu in B mora biti poslušalec A -ja na tretjem koncertu. Ker je A poslušalec le na drugem koncertu, morajo na tem koncertu nastopiti vsi glasbeniki razen A . Ker je tudi B poslušalec le na enem (tretjem) koncertu, morajo na tem koncertu nastopiti vsi glasbeniki razen B . Potem je pa očitno, da na prvem koncertu ne morejo igrati C, D, E, F drug drugemu. Torej morajo biti na festivalu vsaj štirje koncerti. Razporeditev $\{(A, B, C), (A, D, E), (B, D, F), (C, E, F)\}$ pa pokaže, da štirje koncerti res zadoščajo.

Četrti letnik

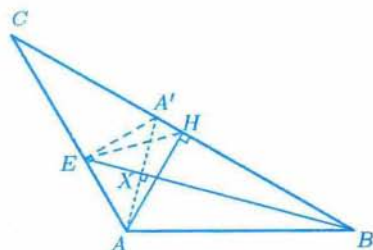
1. Neenakost iz naloge nadomestimo z ekvivalentno neenakostjo $n^{n-1} \geq 2^{n-1} \cdot (n-1)!$ oziroma $(n-1)! \leq \left(\frac{n}{2}\right)^{n-1}$, ki jo bomo dokazali. Najprej je $(n-1)! = \sqrt{(n-1)!} \cdot \sqrt{(n-1)!} = \sqrt{(n-1) \cdot 1} \cdot \sqrt{(n-2) \cdot 2} \cdots \sqrt{1 \cdot (n-1)}$.

Če $(n-1)$ -krat uporabimo znano neenakost $\sqrt{ab} \leq \frac{a+b}{2}$, pridemo do konca:

$$(n-1)! \leq \frac{(n-1)+1}{2} \cdot \frac{(n-2)+2}{2} \cdots \frac{1+(n-1)}{2} = \left(\frac{n}{2}\right)^{n-1}.$$

2. Vstavimo v prvi pogoj $1/x$ in $1/y$ namesto x in y , pa dobimo $f(x) + f(1/x) = f(y) + f(1/y)$ za vse x in y iz $\mathbb{R} \setminus \{0\}$. Torej obstaja konstanta c iz $\mathbb{R}$, da je $f(x) + f(1/x) = c$ za vsa števila x iz $\mathbb{R} \setminus \{0\}$. Potem pa lahko prvi pogoj prevedemo v $(c-1)f(x) = (c-1)f(y)$ za vse x in y iz $\mathbb{R} \setminus \{0\}$. Če je c enako 1, je $f(x) + f(1/x) = 1$ in zato $f(-1) = 1/2$. Če je c različno od 1, mora biti funkcija f konstantna in zaradi drugega pogoja je spet $f(-1) = 1/2$.

3. Prezrcalimo točko A preko sime-trale BE . Potem je daljica AA' pravokotna na BE . Označimo $X = AA' \cap BE$. Ker je $\sphericalangle AXB = \frac{\pi}{2}$ in $\sphericalangle AEB = \frac{\pi}{4}$, je $\overline{AX} = \overline{EX}$, zaradi zrcaljenja pa $\overline{AX} = \overline{A'X}$. Torej je $\sphericalangle AEA' = \frac{\pi}{2}$. Ker je tudi $\sphericalangle AHA' = \frac{\pi}{2}$, je štirikotnik $AHA'E$ tetiven. Sledi $\sphericalangle EHC = \sphericalangle EAA' = \frac{\pi}{4}$.



4. Ko se srečata kameleona različnih barv, se število kameleonov ene barve poveča za $2 \equiv -1 \pmod{3}$, število kameleonov drugih dveh barv pa se zmanjša za 1. Na začetku imamo $10 \equiv 1 \pmod{3}$, $15 \equiv 0 \pmod{3}$ in $20 \equiv 2 \pmod{3}$ rjavih, sivih oziroma zelenih kameleonov. Torej imamo vedno vse tri razrede ostankov pri deljenju s 3, kar dokazuje, da ne morejo nikoli postati vsi kameleoni enake barve.

Darjo Felda

28. OBČINSKO TEKMOVANJE ZA SREBRNO VEGOVO PRIZNANJE – Rešitve s str. 190

6. razred

1. Iz $((((8+7) \cdot 6 + 5) \cdot 4 + 3) \cdot 2 + 1 = 767 = 13 \cdot 59$ sklepamo, da je najmanjše tako praštevilo 13.

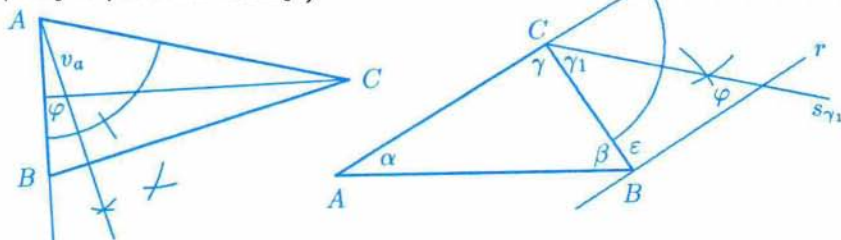
2. Rešitev enačbe je $x = 1\frac{1}{2}$.

3. (a) $x \in V_{10} \wedge x \in V_6 \Rightarrow x = 30$. V 6. a razredu je 30 učencev.

(b) V torek je bilo prisotnih 27, v sredo pa 25 učencev.

(c) V četrtek je bilo prisotnih 60% učencev.

4. Narišemo nosilko osnovnice AB in označimo A . Nato narišemo kot φ in odmerimo v_a . Narišemo še nosilko kraka, ki seka nosilko osnovnice v B . Presek nosilke kraka in simetrale osnovnice je C . Narišemo AC (na sliki levo spodaj so polovične razdalje).



5. Glej desno sliko zgoraj: $\gamma = 180^\circ - \alpha - \beta = 180^\circ - 75^\circ = 105^\circ$, $\gamma_1 = 180^\circ - 105^\circ = 75^\circ$ (sokota) in $\varepsilon = \gamma = 105^\circ$ (izmenična). Nato je $\varphi = 180^\circ - \varepsilon - \frac{\gamma_1}{2} = 180^\circ - 105^\circ - 37^\circ 30' = 37^\circ 30'$.

7. razred

1. Najprej dobimo $a = 5$ in $b = 9$, nato pa $x = -7$.

2. Najmanjši skupni večkratnik števil 2, 3, 4, 5 in 6 je $v = 2^2 \cdot 3 \cdot 5 = 60$. Večkratnike števila v povečajmo za 1 in preverimo, ali so deljivi s 7. Tako pridemo do $301 = 7 \cdot 43$. Iskano število je 301.

3. Iz posode smo najprej odlili $\frac{1}{4}$ alkohola. Ko smo nato odlili tretjino tekočine, smo odlili četrtno alkohola (namreč tretjino od $\frac{3}{4}$). Ostalo je torej polovico alkohola in ga je prav toliko kot vode.

4. L_1 : $o = (20 + 5\pi)$ cm, $p = 25\pi$ cm².

L_2 : $o = (20 + 10\pi)$ cm, $p = 100$ cm².

5. Ploščina večjega kvadrata je $p_v = 9a^2$, manjšega $p_m = a^2$ in okvira $p_{okv} = 8a^2$. Iz $x^2 = \frac{8a^2}{2} + a^2 = 5a^2$ izračunamo $x = a\sqrt{5}$.

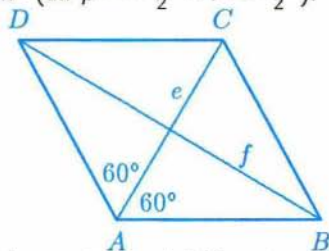
8. razred

1. Enačba ima dve rešitvi: $x_1 = 0.6$ in $x_2 = -0.6$.

2. Nastavimo enačbo $\frac{5}{100} \cdot 40 = \frac{2}{100} \cdot (x + 40)$, ki ima rešitev $x = 60$. Priliti je treba 60 kg sladke vode.

3. Ker je $\sphericalangle B = 45^\circ$, je $\frac{\pi r^2}{4} + \frac{\pi r^2}{8} = 24\pi$, od tod pa dobimo $r = 8$ cm. Ploščina trapeza je $p = r^2 + \frac{r^2}{2} = 96$ cm² (ali $p = \frac{2r+r}{2} \cdot r = \frac{3r^2}{2}$).

4. Krajša diagonala romba je $e = a$, daljša $f = a\sqrt{3}$, višina prizme pa $v = a\sqrt{3}$. Zato je prostornina $V = \frac{ef}{2} \cdot v = \frac{a \cdot a\sqrt{3}}{2} \cdot a\sqrt{3} = \frac{3a^3}{2}$ in površina $P = 2 \cdot \frac{ef}{2} + 4av = a \cdot a\sqrt{3} + 4a \cdot a\sqrt{3} = 5a^2\sqrt{3}$.



5. Janez je gotovo rojen v tem stoletju, ker vsota števk štirimestnega števila ne more biti večja od 36 ($= 9 + 9 + 9 + 9$). Nastavimo enačbo $1 + 9 + x + y = 1993 - (1900 - 10x - y)$, od koder izrazimo $y = \frac{83 - 11x}{2}$. Sklepamo, da mora biti x lih, sicer $y \notin \mathbb{N}$. Naredimo preglednico

x	1	3	5	7
y	36	25	14	3

Ker x in y označujeta števki, je Janez rojen leta 1973 in je star 20 let.

Aleksander Potočnik

RAČUNALNIŠTVO

LINUX – ČISTO PRAVI UNIX

1. Kaj je Unix

Vsak računalnik potrebuje za svoje delovanje *operacijski sistem*. To je program ali skupina programov, ki opravljajo osnovne naloge, kot je branje s tipkovnice, izpisovanje na zaslon, pisanje na trdi disk, ipd. Običajno zna operacijski sistem opraviti tudi zahtevnejše naloge – na primer, skrbi za elektronsko pošto.

Začnimo s kratko predstavitvijo operacijskega sistema Unix. Prvo inačico Unixa je za računalnik PDP-7 napisal Ken Thompson iz Bellovih laboratorijev davnega leta 1969. Unix so od takrat postopno razvijali in mu dodajali nove lastnosti. Nastale so različne veje Unixa, med katerimi sta danes najpomembnejši "System V Unix" in "BSD Unix". V zadnjih letih je vse bolj pomemben tudi standard POSIX, ki natančno predpisuje, kakšen naj bi bil operacijski sistem Unix. Večinoma si proizvajalci, ki razvijajo Unix za različne računalnike, prizadevajo, da bi njihove implementacije Unixa ustrezale standardu POSIX. S standardnim operacijskim sistemom namreč dosežemo večjo prenosljivost programov, tako da lahko isti program z malo truda priredimo za različne računalnike.

Unix teče predvsem na zmogljivejših računalnikih. Danes je močno razširjen na delovnih postajah. Pred leti pa navaden PC-XT ni bil kos tako velikemu operacijskemu sistemu. Ko so se pojavili računalniki PC/386, se je položaj obrnil. Zanje je bil na voljo predvsem operacijski sistem MS-DOS, ki še zdaleč ni izkoristil vseh možnosti procesorja Intel 80386. Tako lahko danes izbiramo še med operacijskimi sistemi OS/2, Windows NT in Unix. Obstaja kar nekaj implementacij Unixa za računalnike PC/386 (SCO Unix, NeXT STEP, Linux, ...).

Unix je *večopravilni* operacijski sistem. To pomeni, da se lahko na njem hkrati izvaja več programov. Na primer, prvi program formatira disketo, drugi prevaja izvorno kodo, s tretjim pa urejamo kako besedilo. Vsi tečejo hkrati.

Unix je tudi *večuporabniški* operacijski sistem. To pomeni, da ga uporabljajo registrirani uporabniki. Vsak ima svoje *uporabniško ime* (username) in preden lahko začne z delom, mora najprej vpisati svoje uporabniško ime in skrivno geslo. Na primer, na svojem domačem računalniku imam uporabniško ime andrej, gesla pa v Preseku ne bom objavil. Ko uporabnik konča z delom, se odjavi, da ne bi kdo za njim uporabljal njegovega imena.

Uporabniki so razdeljeni v skupine. To je koristno zato, ker lahko damo uporabnike, ki se ukvarjajo s podobnimi rečmi, v isto skupino in nato s celo skupino hkrati kaj naredimo. Na primer, na raziskovalnem inštitutu bi lahko dali vse fizike v skupino *fizik*, kemike pa v skupino *kemik*.

Poleg tega Unix omogoča zaščito datotek. Vsaka datoteka ima namreč lastnika, ki je eden izmed uporabnikov. Lastnik datoteke določi, kaj vse sme delati z datoteko on sam, kaj lahko počnejo vsi, ki so v isti skupini kot on, in kaj lahko počnejo z njo ostali uporabniki. Datoteka je lahko dostopna za branje ali pisanje. Na primer fizik janez lahko dovoli, da v njegovo datoteko *zarota.txt* pišejo on in vsi uporabniki iz skupine *fizik*, ostali pa jo lahko samo berejo. V tem primeru bi uporabniki iz skupine *kemik* lahko brali njegovo datoteko, pisati pa vanjo ne bi mogli.

Glede na to, da lahko Unix uporablja več ljudi, ki si delijo prostor na trdem disku, lahko vzdrževalec sistema za vsakega uporabnika predpiše *kvoto*. To je največja količina prostora, ki jo smejo zasedati uporabnikove datoteke. Operacijski sistem nadzoruje porabo prostora in ne dovoli, da bi kdo presegel svojo kvoto. Tako je prostor na trdem disku pravično razdeljen.

2. Kaj je Linux

Linux je implementacija operacijskega sistema Unix za osebne računalnike PC/386. Vsakdo ga lahko dobi zastonj, ker je Linux programska oprema v javni rabi ("free software"). V nadaljevanju članka si bomo ogledali nekatere njegove osnovne lastnosti.

Osnovni del Linuxa, tako imenovano *jedro* (kernel), je napisal Linus Torvalds s helsinške univerze na Finskem. Prva inačica je bila na voljo leta 1991. Od tedaj so še mnogi drugi programerji razvijali posamezne dele Linuxa. Od vsega začetka je bil Linux zastonj. Kdorkoli je hotel, ga je lahko dobil in tudi razvijal programsko opremo zanj.

Danes je Linux pravi pravcati Unix, čeprav ga je napisala skupina zagancev za lastni užitek in v veselje mnogih uporabnikov. Linux je dobro prilagojen standardu POSIX. Je 32-bitni operacijski sistem in izkorišča vse, kar zna procesor Intel 80386.

Poleg samega jedra je bilo za Linux potrebno preskrbeti še vse osnovne ukaze operacijskega sistema Unix in prevajalnike za programski jezik C. Programski jezik C je namreč osnovni jezik za pisanje sistemske programske opreme, tako za Unix kot za ostale operacijske sisteme. Kar 97% Unixovega jedra je napisanega v jeziku C, ostanek pa v zbirniku. Tu je na pomoč

priskočil projekt GNU. Osnovni namen tega projekta je napisati dobro programsko opremo in jo ponuditi uporabnikom zastonj. V okviru projekta GNU je bilo napisanih mnogo programov: prevajalniki za C in C++, osnovni ukazi za Unix, urejevalnik besedil Emacs, šah ... To so kvalitetni programi – vsaj tako dobri so kot mnogim dobro znani programski paketem $\text{T}_{\text{E}}\text{X}$ za operacijski sistem MS-DOS.

Linux deluje na računalnikih tipa PC/386. To pomeni, da mora imeti računalnik procesor Intel 80386 ali 80486. Matematični koprocessor ni potreben.

Za Linux dobimo grafično okolje *X Windows*, ki pomeni za Unix to, kar je za MS-DOS okolje MS Windows. Delamo lahko tudi z računalniškimi omrežji. Če je računalnik priključen na omrežje Internet, nam je na voljo ves preširni svet mednarodne elektronske pošte in elektronskih konferenc ter še marsikaj drugega.

Priporočljivo je, da ima računalnik vsaj 4 MB pomnilnika, če pa namevamo delati z grafičnim okoljem *X Windows*, je za udobno delo potrebnih vsaj 8 MB.

Če hočemo imeti le osnovni operacijski sistem, potem potrebujemo na trdem disku kakih 15 MB prostora. Popoln Linux z vsemi prevajalniki in programi, razen grafičnega okolja *X Windows* in $\text{T}_{\text{E}}\text{X}$ -a, zasede približno 45 MB prostora. Skupaj z grafičnim okoljem in $\text{T}_{\text{E}}\text{X}$ -om ter z dodatno dokumentacijo in z izvirno kodo nekaterih programov pa zasede približno 90 MB. K temu moramo prišteti še nekaj prostora za tekoče delo in za morebitne programe, ki bi jih želeli imeti kasneje. Če imamo na voljo 200 MB prostora, je to že pravo udobje.

Kdor ima dostop do omrežja Internet, lahko dobi Linux preko FTP. To je poseben protokol za prenos datotek med računalniki po celem svetu. V tujini so glavni računalniki, kjer se dobi Linux, `tsx-11.mit.edu`, `sun-site.unc.edu` in `nic.funet.fi`. Prva dva računalnika sta v Ameriki, tretji pa je na Finskem. Pri nas dobimo Linux na FTP vozlišču `ftp.ijs.si`.

Poleg tega lahko dobimo Linux na disketah, CD-ROM disku ali na magnetnem traku. Naročimo ga po pošti in plačamo stroške distribucije, ki običajno znašajo od 50\$ do 100\$, kar je prava malenkost v primerjavi s tisoči dolarjev, ki jih je treba odšteti za komercialno verzijo Unixa. Seveda pa je najbolje, če poznamo koga, ki že ima Linux in nam lahko posodi diskete – Linux je namreč zastonj in je na voljo vsakomur.

3. Kaj vse zna Linux

Poleg Linuxa imamo lahko na trdem disku še kak drug operacijski sistem, na primer MS-DOS ali OS/2. Ko računalnik prižgemo, poseben program ponudi na izbiro operacijske sisteme, ki so na voljo. Uporabnik si izbere enega od njih.

Prostor na trdem disku je razdeljen na particije. Če imamo na njem več operacijskih sistemov, potem vsak dela s svojo particijo in po svoje zapisuje datoteke nanjo. Programi, ki so napisani za en operacijski sistem, ne delujejo v ostalih.

Vendar je za prenos podatkov z enega operacijskega sistema na drugega pri Linuxu poskrbljeno, saj zna brati in pisati po particijah in disketah operacijskega sistema MS-DOS. Poleg tega je na voljo emulator operacijskega sistema MS-DOS za Linux, ki se imenuje *dosemu*. To je poseben program, ki teče pod operacijskim sistemom Linux in zna izvajati programe, napisane za operacijski sistem MS-DOS. Na žalost zahtevni programi za MS-DOS (taki, ki delajo v zaščitenem načinu), na primer paket za simbolično računanje Mathematica, ne delujejo z *dosemu*.

Skupaj z jedrom operacijskega sistema Linux dobimo še kopico drugih programov. V standardno opremo za vsak Unix, torej tudi za Linux, so poleg osnovnih ukazov vključeni še programi za arhiviranje, za elektronsko pošto in elektronske konference, za tiskanje ipd. Če instaliramo X Windows, dobimo grafično okolje in program ipd. X Windows, dobimo grafično okolje in programe, ki so podobni okolju MS Windows za MS-DOS.

Linux je pravi raj za programerje, saj dobimo zanj celo vrsto prevajalnikov in programskih jezikov. Najpomembnejša sta GNU C in C++, ki ju uporabljamo skupaj z GNU razhroščevalnikom (debuggerjem) in grafičnim okoljem za razvoj programov za X Windows.

Na voljo je nekaj urejevalnikov besedil, od katerih je najboljši GNU Emacs. Kdor je navajen uporabljati urejevalnik WordStar za MS-DOS, pa lahko uporablja urejevalnik "joe", ki je dobra kopija pravega WordStara. Za stavljenje besedil je na voljo T_EX, za delo z datotekami v formatu Postscript pa uporabimo program Ghostscript.

Seveda se za Linux dobijo tudi igrice – od programa za šah GNU Chess in različnih verzij Tetrisa do kompliciranih iger za več igralcev, ki delujejo preko računalniškega omrežja.

Posebej velja omeniti urejevalnik GNU Emacs, ki je "vsemogočen" urejevalnik. Če ga poženemo v grafičnem okolju X Windows, zna uporabiti tudi

njegove zmogljivosti. Poleg samega pisanja besedil zanj urejevalnik omogoča uporabo najrazličnejših dodatkov.

Za pisanje programov je na voljo poseben paket, ki za nas prevaja programe in pomaga pri odkrivanju napak. Z Emacsom lahko beremo elektronsko pošto in elektronske konference. Uporabljati zna protokol FTP, tako da lahko hkrati urejamo datoteke z različnih računalnikov.

Okolje *auctex* je namenjeno delu s $\text{T}_{\text{E}}\text{X}$ -om in $\text{L}_{\text{A}}\text{T}_{\text{E}}\text{X}$ -om. Uporabljam ga zdaj, ko pišem ta članek. Auctex sam požene $\text{T}_{\text{E}}\text{X}$ in preview ter pošlje besedilo na tiskalnik. Pomaga pri iskanju napak (sam se postavi na napako, ki jo je javil $\text{T}_{\text{E}}\text{X}$) in pozna posebne ukaze za pisanje besedil v $\text{T}_{\text{E}}\text{X}$ -u.

Za sprostitev se Emacs z nami igra "pet v vrsto" ali "tetris". Ko imamo vsega dosti, poženemo Emacsovega umetno inteligentnega "psihoterapevta", ki se potrpežljivo pogovarja o naših težavah.

4. Kdo naj uporablja Linux

Kdor se odloči za Linux, se mora zavedati, da bo imel več dela z vzdrževanjem operacijskega sistema (približno trikrat toliko kot z MS-DOS). Vendar naj vas to ne odvrne od Linuxa, če le imate kanček smisla za računalnike. Trud bo zagotovo poplačan s "pravim" operacijskim sistemom.

Linux je zagotovo primeren za dijake in študente računalništva, saj je to enkratna priložnost, da se kar na svojem domačem računalniku naučijo uporabljati operacijski sistem Unix, ki ga bodo zagotovo še srečali.

Linux je dobra rešitev tudi za vsakogar, ki dela z Unixom na večjih računalnikih in bi ga rad imel tudi na svojem osebнем računalniku, vendar nima denarja za drage komercialne implementacije Unixa.

Kdor pa uporablja računalnik kot pisalni stroj in nima časa, da bi se učil novih stvari, naj raje ostane pri svojem starem operacijskem sistemu.

Andrej Bauer

NEZNANI LIKI – 1. del

Ugotovi, kakšne like narišejo naslednja zaporedja logovih ukazov.

- a) CS RT 90 REPEAT 3 [FD 200 BK 100 LT 120]
- b) CS REPEAT 4 [REPEAT 4 [FD 75 RT 90] FD 150 RT 90]
- c) CS RT 90 REPEAT 6 [LT 120 FD 100 BK 100 RT 120 FD 50 RT 60]

Martin Juvan

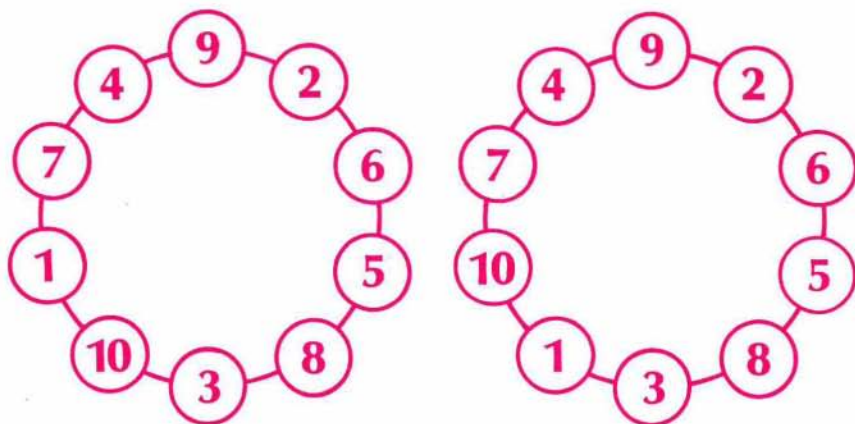
REŠITVE NALOG

ŠTEVILSKI KROG - Rešitev s str. 134

Nalogo lahko rešimo na primer tako, da napravimo preglednico dovoljenih sosedov za posamezna števila od 1 do 10:

	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
1			o				o			o
2						o			o	
3	o				o			o		o
4							o		o	
5			o			o		o		
6		o			o		o			o
7	o			o		o			o	o
8			o		o				o	
9		o		o			o	o		o
10	o		o			o	o		o	

Iz nje razberemo, da mora ležati 9 med 2 in 4, da je 6 drugi sosed števila 2 in 7 drugi sosed števila 4. Nadaljevanje je preprosto. Končno dobimo dve rešitvi, ki pa se razlikujeta le v tem, da sta v njih zamenjani števili 1 in 10.



Marija Vencelj

IZOLIRAJMO HIŠO!

V hladnih dneh si želimo, da bi bila naša hiša čim bolj *toplotno izolirana*. Mnoge previsoki računi za kurjavo in neprijeten hlad v stanovanju prepričajo, da je vredno hišo dodatno toplotno izolirati. V trgovinah so na voljo pripravne plošče, ki jih pritrdimo na zunanjo stran hiše. Ali bi kazalo izolirati raje notranjost? Pri opečnih zidovih raje izoliramo zunanjo stran hiše. Tako je zid topel še nekaj časa potem, ko v prostoru nehamo kuriti, poleti pa prijetno hladno tudi v hudi sončni pripeki, če so se zidovi proti jutru ohladili. Pravimo, da ima opečnat zid veliko toplotno kapaciteto. Kaj pa betonski zidovi? Njihova toplotna kapaciteta ni velika. Pokazali bomo, da je v vsakem primeru bolje postaviti izolacijske plošče na zunanjo stran zidu.

Vemo, da toplota iz toplega prostora uhaja na prosto skozi stene. Pomembno je, da je uhajanje toplote iz prostorov kar se da počasno. Zanima nas toplota, ki jo skozi steno izgubimo v časovni enoti ali *toplotni tok* P :

$$P = \frac{Q}{t}.$$

S Q smo označili toploto, ki v času t uide skozi zid na prosto. Toplotni tok P je odvisen od velikosti stene, temperaturne razlike med notranjostjo in zunanostjo in debelino zidu. Ni težko uvideti, da je toplotni tok premo sorazmeren s površino zidu S . Zato raje računamo z *gostoto toplotnega toka* j , ki meri toplotni tok skozi 1 m^2 zidu:

$$j = \frac{P}{S}.$$

Tako so računi preglednejši. Poskusi pokažejo, da je gostota toplotnega toka sorazmerna s temperaturno razliko in obratno sorazmerna z debelino zidu:

$$j = \lambda \frac{T_n - T_z}{d}.$$

Temperaturo notranje stene smo označili s T_n , temperaturo zunanje stene s T_z , d pa je debelina zidu. Pozimi je notranja stena nekaj stopinj hladnejša od zraka v prostoru daleč od sten, zunanja pa toplejša od okolice. Ob stenah sta namreč tanki plasti zraka, ki dodatno izolirata prostor. V naši razpravi bomo ti plasti zraka zanemarili. Koeficient toplotne prevodnosti λ je odvisen od snovi, iz katere je zid. Nekatere snovi so odlični toplotni prevodniki, druge pa so toplotni izolatorji. Hiša naj ima torej debele zidove iz snovi z nizko toplotno prevodnostjo.

Kako se spreminja temperatura v zidu? Z vrtanjem luknjic v zid in merjenjem temperatur na različnih globinah bi našli odgovor. A vrtanju se izognemo, če nekoliko premislimo. V razmerah, ki se s časom ne spreminjajo, je gostota toplotnega toka enaka skozi katerikoli presek zidu. Mislimo si, da je zid sestavljen iz dveh polovic. Temperatura zidu na sredi mora biti torej $\frac{T_n + T_z}{2}$. Naslednje delitve zidu kažejo, da se temperatura v zidu spreminja linearno z globino, če je seveda zid homogen, torej po vsej globini iz iste snovi.

Kako pa je, če je zid obložen? Znotraj zidu in znotraj obloge je potek temperature seveda spet linearen. Temperaturo T stične ploskve določimo iz pogoja, da sta gostoti toplotnega toka skozi steno j_s in oblogo j_0 enaki:

$$j_s = j_0.$$

Od tod sledi enačba za T :

$$\lambda_s \frac{T_n - T}{d_s} = \lambda_0 \frac{T - T_z}{d_0},$$

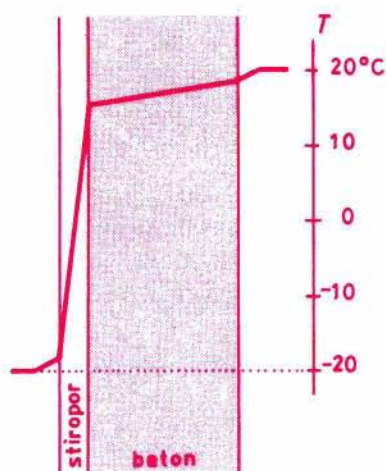
z rešitvijo:

$$T = \frac{\frac{\lambda_s}{d_s} T_n + \frac{\lambda_0}{d_0} T_z}{\frac{\lambda_s}{d_s} + \frac{\lambda_0}{d_0}}.$$

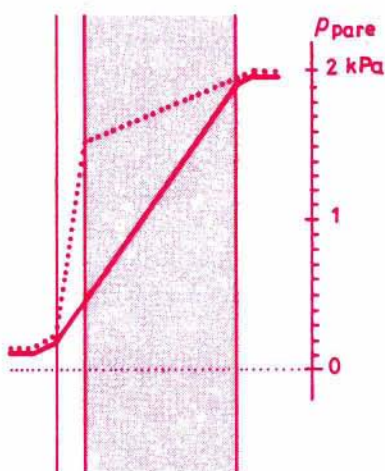
Pri računu napetosti med zaporedno vezanima upornikoma dobimo podobno enačbo. Nekateri zato pravijo količini $\frac{d}{\lambda}$ *toplotni upor*.

Na sliki 1 smo skicirali razmere pri zunanji temperaturi -20°C in notranji temperaturi 20°C za betonski zid, obložen s stiroporno ploščo. Vidimo, da je temperatura zidu praktično konstantna, saj je T blizu notranji temperaturi, v plošči pa strmo pada od T na zunanjo temperaturo. Če ploščo prestavimo v notranjost, se gostota toplotnega toka ne spremeni, o čemer se prav hitro prepričamo z neposrednim računom. Kaže, da je vseeno, s katere strani obložimo steno.

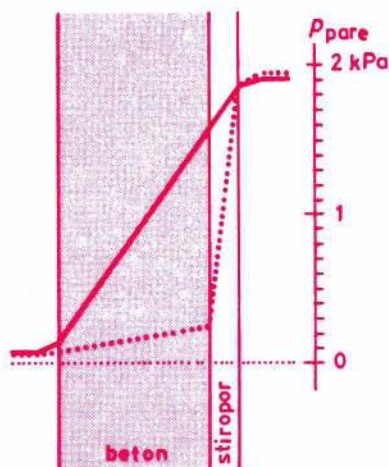
Preden se dokončno odločimo, kam postaviti izolacijske plošče, ne smemo pozabiti na vodno paro. Pozimi je v toplem prostoru *tlak* vodne pare precej večji od zunanjega. Zaradi te tlačne razlike pronica na prosto tudi vodna para. Pravimo, da para *difundira* skozi stene. Tlak pare se v steni prav tako zmanjšuje od vrednosti v prostoru na zunanjo vrednost. Izolacijske plošče prepuščajo paro približno tako izdatno kot enaka debelina betona. Parni tlak zato pojema z globino obloženega zidu tako, kot bi bil zid homogen, torej linearno (glej polno črto na sliki 2).



Slika 1. Potek temperature v betonskem zidu, na hladnejši strani obloženem z izolacijsko ploščo.



Slika 2. Potek parnega tlaka vode v zidu in ustrezni nasičeni parni tlak, izračunan na podlagi temperature s slike 1.



Slika 3. Nasičeni parni tlak je pri zidu, ki je obložen na toplejši strani, v znatnem delu zidu nižji od parnega tlaka na sliki 2. Para se v zidu kondenzira.

Para se v hladnem zraku kondenzira, če je njen tlak večji od *nasičenega parnega tlaka*. Ta tlak je odvisen le od temperature vlažnega zraka. Na sliki 2 smo nasičeni parni tlak v zidu in plošči ponazorili s pikčasto črto. Pri računu smo privzeli temperaturni potek s slike 1. Vidimo, da je parni tlak (polna črta) po vsem zidu manjši od nasičenega parnega tlaka, zato se v takem zidu para ne bo kondenzirala.

Drugače je, ko je izolacijska plošča na notranji strani. Temperatura v plošči se strmo spusti na skoraj zunanjo temperaturo, temu sledi tudi nasičeni parni tlak. Parni tlak bi bil v tem primeru prav tak kot prej, če seveda ne bi upoštevali

kondenzacije v zidu. Do te pa prav zagotovo pride, saj je parni tlak v zidu in pretežnem delu plošče večji od nasičenega parnega tlaka. Temu pojavu se morajo gradbeniki za vsako ceno izogniti. S ploščami na zunanji strani se torej izognemo neprijetni in dragi zatesnitvi notranje stene do te mere, da para ne more difundirati na prosto.

Morda bi kdo pomislil, da je kondenzirane vode zanemarljivo malo. O nasprotnem nas poučijo gradbeniki, ki prav pojavu kondenzacije pri napačno postavljenih izolacijskih ploščah pripisujejo hude poškodbe zidov in celo rjave nje železnih palic v železobetonskih zgradbah.

Andrej Likar

SIMETRIČNI SISTEM - Rešitev s str. 189

Dani sistem enačb lahko nadomestimo s sistemom:

$$x + y + z = a,$$

$$xy + yz + zx = \frac{a^2 - b}{2},$$

$$xyz = \frac{a^3 - ab}{2}.$$

Leve strani tega sistema so elementarne simetrične funkcije spremenljivk (x, y, z) . Torej so rešitve našega sistema enačb hkrati ničle polinoma

$$p(x) = x^3 - ax^2 + \frac{a^2 - b}{2}x - \frac{a^3 - ab}{2},$$

ali

$$p(x) = (x - a)\left(x^2 + \frac{a^2 - b}{2}\right).$$

Sledi, da je ena od rešitev:

$$x_1 = a, \quad y_1 = \sqrt{\frac{b - a^2}{2}}, \quad z_1 = -\sqrt{\frac{b - a^2}{2}},$$

ostale dobimo s permutacijo komponent te rešitve. Vseh rešitev je torej šest.

Bojan Gornik

ZAPIS ŠTEVIL V NEGATIVNI OSNOVI

Če preberemo stavek: Šolo obiskuje 307 učencev, ob številu 307 pomislimo, da je okrajšava za

$$3 \cdot 10^2 + 0 \cdot 10^1 + 7 \cdot 10^0 = 3 \cdot 10^2 + 0 \cdot 10 + 7.$$

Pravimo, da je število 307 zapisano z osnovo 10 ali v desetiškem sestavu. V vsakdanji rabi srečujemo števila zmeraj podana na tak način. Moremo pa namesto 10 za osnovo vzeti katero koli od 1 različno naravno število. O tem govori naslednja ugotovitev, ki je bralcu najbrž poznana:

A. Če je b od 1 večje naravno število, se vsako naravno število a enolično izrazi v obliki

$$a = c_t b^t + c_{t-1} b^{t-1} + \dots + c_1 b + c_0, \quad (1)$$

kjer so števke (cifre) $c_0, c_1, \dots, c_{t-1}, c_t$ vzete izmed vrednosti $0, 1, \dots, b-1$ in je $c_t > 0$.

Podobno kot pri osnovi 10 tudi v izrazitvi (1) obdržimo le števke in pišemo

$$a = c_t c_{t-1} \dots c_1 c_0 (b). \quad (2)$$

Iz $307 = 2 \cdot 11^2 + 5 \cdot 11 + 10$ najdemo $307 = 25(10)_{(11)}$. Števko 10 smo dali v oklepaj, saj 2510 v osnovi 11 pomeni $2 \cdot 11^3 + 5 \cdot 11^2 + 1 \cdot 11 = 3278$. Tako je treba ravnati z vsako več kot enomestno števko.

Ob ugotovitvi A se vsiljuje vprašanje: Ali smemo za osnovo izbrati negativno celo število n ? Števke so potem $0, 1, \dots, |n| - 1$; ker naj bodo med njimi od nič različne vrednosti, mora biti $n < -1$.

Oglejmo si za začetek, kako je z osnovo $n = -2$. Enakosti

$$\begin{aligned} 1 &= 1 \\ 2 &= 1 \cdot (-2)^2 + 1 \cdot (-2) + 0 \\ 3 &= 1 \cdot (-2)^2 + 1 \cdot (-2) + 1 \\ -1 &= 1 \cdot (-2) + 1 \\ -2 &= 1 \cdot (-2) + 0 \\ -3 &= 1 \cdot (-2)^3 + 1 \cdot (-2)^2 + 0 \cdot (-2) + 1 \end{aligned} \quad (3)$$

povedo, da imajo 1, 2, 3, -1, -2, -3 v osnovi -2 izrazitve

$$\begin{aligned} 1 &= 1_{(-2)} & -1 &= 11_{(-2)} \\ 2 &= 110_{(-2)} & -2 &= 10_{(-2)} \\ 3 &= 111_{(-2)} & -3 &= 1101_{(-2)} \end{aligned} \quad (4)$$

Sedaj bomo pokazali, da se dá vsako od nič različno celo število enolično zapisati z osnovo -2. Naslonili se bomo na indukcijo in izrek o deljenju.

Izhajajmo iz privzetka, da smo našli izrazitev v osnovi -2 za števila

$$-a, -a+1, \dots, -2, -1, 1, 2, \dots, a-1, a, \quad (5)$$

kjer je a neko naravno število in $a \geq 3$.

Število $a+1$ delimo z -2 in dobimo za količnik od nič različno celo število k , ostanek r pa je 0 ali 1. To pomeni, da je

$$a+1 = (-2)k + r; \quad 0 \leq r < 2 \quad (6)$$

in od tod

$$|k| = \left| \frac{a+1-r}{-2} \right| = \frac{|a+1-r|}{|-2|} \leq \frac{a+1}{2}.$$

Za $a > 1$ je izpolnjena ocena $\frac{a+1}{2} < a$. Ker imamo $a \geq 3$, je torej $|k| \leq \frac{a+1}{2} < a$. Vidimo, da je število k zajeto v (5). Zato ima zapis

$$k = c'_j(-2)^j + c'_{j-1}(-2)^{j-1} + \dots + c'_1(-2) + c'_0$$

pri števkih $c'_0, \dots, c'_{j-1}$, ki so 0 ali 1, in $c'_j = 1$. Ko k vnesemo v (6), je

$$a+1 = c_{j+1}(-2)^{j+1} + c_j(-2)^j + \dots + c_1(-2) + c_0$$

pri števkih

$$c_{j+1} = c'_j = 1, c_j = c'_{j-1}, \dots, c_1 = c'_0, c_0 = r$$

in našli smo za število $a+1$ izrazitev z osnovo -2.

Podobno daje delitev negativnega celega števila $-a-1$ z -2

$$-a-1 = (-2)k' + r'; \quad 0 \leq r' < 2. \quad (7)$$

Količnik k' je od nič različno celo število, ostanek r' je 0 ali 1. Zaradi $a \geq 3$ je

$$|k'| = \left| \frac{-a-1-r'}{-2} \right| \leq \frac{a+1+1}{2} = \frac{a}{2} + 1 < a.$$

Po tej oceni je k' eno od števil v (5), zato izrazljivo z osnovo -2 in potem po (7) tudi $-a-1$ tako izrazljiv.

Prišli smo do ugotovitve:

B. Če so števila v (5) izrazljiva z osnovo -2 , sta tudi števili $a+1$, $-a-1$ tako izrazljivi.

Če je $a = 3$, so v (5) števila $-3, -2, -1, 1, 2, 3$ in zanja imamo v (3) oz. (4) izrazitev v osnovi -2 . Po ugotovitvi B potem 4 in -4 lahko zapišemo z osnovo -2 . V (5) smemo torej vzeti $a = 4$ in po ugotovitvi B sledi, da je mogoče tudi 5 in -5 izraziti z osnovo -2 . Ko tako nadaljujemo, vidimo, da premore vsako od nič različno celo število izrazitev z osnovo -2 .

Prepričajmo se še o enoličnosti zapisa. Recimo, da se od nič različno celo število m izraža

$$m = c_s(-2)^s + \dots + c_1(-2) + c_0 \quad \text{in} \quad m = c'_t(-2)^t + \dots + c'_1(-2) + c'_0$$

in je $s \leq t$. Po odštetju dobimo

$$c'_t(-2)^t + \dots + c'_1(-2) - c_s(-2)^s - \dots - c_1(-2) = c_0 - c'_0. \quad (8)$$

Na levi je sodo število, saj so vsi sumandi sodi. Zato je tudi število na desni $c_0 - c'_0$ sodo. Ker sta za c_0, c'_0 mogoči le vrednosti 0, 1, je $c_0 - c'_0$ lahko le $-1, 0, 1$. Od teh števil je edino 0 sodo število. Torej je $c_0 - c'_0 = 0$ in $c_0 = c'_0$. V (8) stoji tako na desni 0. Krajšamo z -2 in imamo

$$c'_t(-2)^{t-1} + \dots + c'_2(-2) - c_s(-2)^{s-1} - \dots - c_2(-2) = c_1 - c'_1.$$

Spet je na levi sodo število, zato število $c_1 - c'_1$ sodo in kot prej nujno $c_1 = c'_1$. Ravno tako doženemo $c_2 = c'_2, \dots, c_s = c'_s$. Pri $t > s$ bi veljalo

$$c'_t(-2)^{t-s-1} + \dots + c'_{s+1} = 0. \quad (9)$$

To pa ne gre. Ker je $c'_t = 1$, je pri sodem eksponentu $t-s-1$ število na levi v (9) pozitivno, pri lihem $t-s-1$ pa negativno. Mora torej biti $t = s$ in izrazitev je enolična.

Strnimo najdeno v ugotovitev:

C. Vsako od nič različno celo število a se izrazi z osnovo -2 enolično na način

$$a = c_s(-2)^s + c_{s-1}(-2)^{s-1} + \dots + c_1(-2) + c_0, \quad (10)$$

pri čemer so števke $c_0, \dots, c_s$ vzete izmed vrednosti 0, 1 in je $c_s = 1$. Na kratko (10) zapišemo

$$a = c_s c_{s-1} \dots c_1 c_0 (-2). \quad (11)$$

Iz zgornje izpeljave povzemamo, da vodi k izrazitvi (10) izrek o deljenju z -2 , naveden v (6) in (7). Razvijmo za zgled število -35 . Računamo

$$\begin{aligned} -35 &= (-2) \cdot 18 + 1 \\ 18 &= (-2) \cdot (-9) + 0 \\ -9 &= (-2) \cdot 5 + 1 \\ 5 &= (-2) \cdot (-2) + 1 = (-2)^2 + 1 \end{aligned}$$

Zadnja enakost daje za 5 izraze v osnovi -2 . Ko jo upoštevamo v predzadnji enakosti, dobimo -9 zapisan v osnovi -2 . Ko tako napredujemo navzgor, dobimo

$$\begin{aligned} -9 &= (-2)^3 + (-2) + 1 \\ 18 &= (-2)^4 + (-2)^2 + (-2) \\ -35 &= (-2)^5 + (-2)^3 + (-2)^2 + 1 \end{aligned}$$

ali $-35 = 101101_{(-2)}$.

Kako seštevamo števila, podana v obliki (11)? Vemo, kako ravnamo v desetiškem zapisu: Števila pišemo drugo pod drugim in seštevamo števke po stolpcih, začenši na skrajni desni. Ko dosežemo v stolpcu števk vsoto 10, štejemo ena "naprej", torej v naslednjem stolpcu. V primeru osnove -2 upoštevamo, da je

$$(-2)^j + (-2)^j = -(-2)^{j+1} \quad \text{za } j = 0, 1, 2, \dots \quad (12)$$

Za vsaki dve števk 1 v j -tem stolpcu je po (12) treba število števk, enakih 1 v stolpcu $j+1$, zmanjšati za ena. Drugače povedano: Po dve števk 1 v j -tem stolpcu "uničita" eno števko 1 v stolpcu $j+1$. Če v stolpcu $j+1$ ni števk 1, ali pa so se vse števke 1 že uničile, upoštevamo, da iz $2 = (-2)^2 + (-2)$ sledi

$$(-2)^j + (-2)^j = 2(-2)^j = (-2)^{j+2} + (-2)^{j+1} \quad \text{za } j = 0, 1, 2, \dots \quad (13)$$

Po dve števki 1 v j -tem stolpcu zdaj zaradi (13) nadomestimo s številom $110 \dots 0$, ki ima j ničel, in to število zapišemo ot nadaljnji seštevanec k prejšnjim seštevancem. V zgledu

$$\begin{array}{rcccccc}
 & 1 & 1 & 0 & 1 & 0 & 1 \\
 + & 1 & 0 & 1 & 1 & 1 & 1 \\
 \hline
 & 1 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
 & & & \cancel{1} & 1 & 0 & \underline{1} & 0 & \underline{1} \\
 & & & \cancel{1} & 0 & \underline{1} & \underline{1} & \underline{1} & \underline{1} \\
 \hline
 & 1 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0
 \end{array}
 \rightarrow$$

se enako podčrtane števke uničijo, namesto prečrtanih števk smo glede na (13) dodali seštevanec 1100000 .

Ker imamo samo števki 0, 1 in je $0 \cdot 0 = 0$, $0 \cdot 1 = 1 \cdot 0 = 0$, $1 \cdot 1 = 1$, preide množenje števil (11) na seštevanje. Zgled:

$$\begin{array}{r}
 1101 \times 1011 \\
 \underline{1101} \\
 \underline{1101} \\
 \underline{1101} \\
 1101111
 \end{array}$$

Odštevanje dveh števil (11) teče običajno, če sta v istem stolpcu enaki števki, ali pa ima zmanjševanec števko 1, odštevanec števko 0. Je pač $0 - 0 = 0$, $1 - 0 = 1$, $1 - 1 = 0$. Kadar ima zmanjševanec števko 0 in odštevanec v istem stolpcu števko 1, si pomagamo po (12) takole

$$-(-2)^j = (-2)^{j+1} + (-2)^j \quad \text{za } j = 0, 1, 2, \dots \quad (14)$$

Namesto da bi odšteli število $10 \dots 0$, kjer za 1 stoji $j - 1$ ničel, lahko glede na (14) prištejemo $110 \dots 0$, kjer za 11 pride $j - 1$ ničel. Po tej opazki je mogoče odštevanje prevesti kar na seštevanje. Hitreje pridemo do cilja, če v stolpcih, kjer se gladko odštevata, to napravimo, nato po potrebi uporabimo (14). Zgled:

$$\begin{array}{c}
 \textcircled{11} \textcircled{01} \textcircled{01} \textcircled{10} \\
 - \textcircled{11} \textcircled{00} \textcircled{11}
 \end{array}
 \rightarrow
 \begin{array}{r}
 1001000 \\
 - 10001
 \end{array}
 \rightarrow
 + \left\{ \begin{array}{r}
 1001000 \\
 11 \\
 \underline{110000} \\
 1111011
 \end{array} \right.$$

Obkrožili smo stolpce, v katerih je bilo mogoče takoj odštevati. Namesto da bi odšteli 1, smo po (14) prišteli 11, namesto da bi odšteli 10000, smo po (14) prišteli 110000.

Še pripomba o negativni osnovi n , manjši od -2 . Enakosti

$$\begin{array}{l}
 1 = 1 \\
 2 = 2 \\
 \dots\dots\dots \\
 |n| - 1 = |n| - 1 \\
 |n| = 1 \cdot n^2 + (|n| - 1)n + 0 \\
 |n| + 1 = 1 \cdot n^2 + (|n| - 1)n + 1 \\
 -1 = 1 \cdot n + (|n| - 1) \\
 -2 = 1 \cdot n + (|n| - 2) \\
 \dots\dots\dots \\
 n = 1 \cdot n + 0 \\
 n - 1 = 2 \cdot n + (|n| - 1)
 \end{array}$$

kažejo, da se števila $n - 1, n, \dots, -2, -1, 1, 2, \dots, |n|, |n| + 1$ izrazijo v osnovi n . Z indukcijo in izrekom o deljenju čisto podobno kot pri $n = -2$ izpeljemo ugotovitev:

D. Naj bo n izbrano negativno celo število, manjše od -1 . Vsako od nič različno celo število a enolično izrazimo v obliki

$$a = c_t n^t + c_{t-1} n^{t-1} + \dots + c_1 n + c_0. \quad (15)$$

Števke $c_0, \dots, c_t$ so vzete izmed vrednosti $0, 1, \dots, |n| - 1$ in $c_t > 0$.

Namesto (15) pišemo krajše

$$a = c_t c_{t-1} \dots c_1 c_0 (n). \quad (16)$$

Do izrazitve (15), (16) pripelje zaporedno deljenje z n . Razvoj števila -3841 v osnovi -12 dobimo iz

$$\begin{array}{l}
 -3841 = (-12) \cdot 321 + 11 \\
 321 = (-12) \cdot (-26) + 9 \\
 -26 = (-12) \cdot 3 + 10
 \end{array}$$

Velja torej $-3841 = 3(10)9(11)_{(-12)}$.

Videli smo, kako seštevamo in množimo števila, zapisana s števki v osnovi -2 . Podobna pravila veljajo za seštevaje in množenje števil, danih v obliki (16). Množenje lahko izvršimo tudi le prek seštevanja.

Naloge:

1. V desetiškem zapisu imamo števila 500, 1021, -2035. Izrazi jih z osnovo -2.

2. V osnovi -2 so dana števila 11011010, 110111011, 1001110101. Seštej jih in izid preveri z računom v desetiškem sestavu.

3. Števila 1101, 1110, 11010 so zapisana v osnovi -2. Zmnoži jih in izid preveri z računom v desetiškem sestavu.

4. Števila 591, -1025, 2141, dana v desetiškem sestavu, izrazi v osnovi -12.

5. Poišči zapis števila a v osnovi -7 in -12, če je $a = 101101101_{(-2)}$.

6. Poišči zapis števila a v osnovi -13 in -20, če je $a = 21402_{(-5)}$.

7. Za negativno osnovo n je

$$\begin{aligned} |n| n^j &= -n^{j+1} \\ |n| n^j &= n^{j+2} + (|n| - 1)n^{j+1} \end{aligned}$$

pri $j = 0, 1, 2, \dots$. Kako od tod dobimo pravilo za seštevanje števil oblike (16)?

Jože Grasselli

GEOMETRIJSKA ZA OSNOVNOŠOLCE - Rešitev s str. 183

Za vse tri zastavljene naloge je osrednja ideja reševanja skupna. Prikažimo jo na primeru šestih včrtanih krožnic.

Manjše krožnice imajo središča v ogliščih pravičnega šestkotnika, pri čemer se dve sosednji krožnici dotikata v razpolovišču tiste šestkotnikove stranice, ki veže njuni središči (slika 1). Polmer dane krožnice je R ; označimo še z ρ polmer manjših krožnic in z r polmer šestkotniku očrtane krožnice. Velja:

$$r = 2\rho.$$

S slike 1 razberemo:

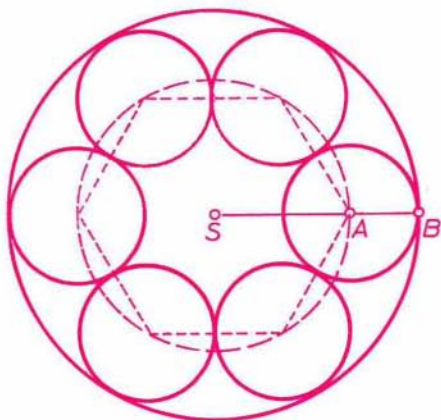
$$SB = SA + AB,$$

torej $R = r + \rho$ in zato $R = 3\rho$.

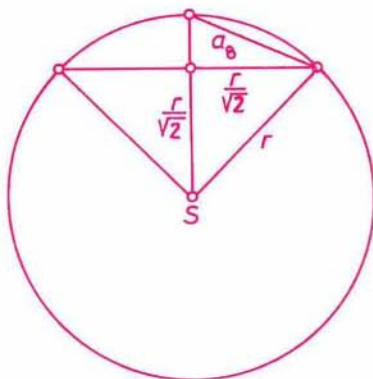
REŠITVE NALOG

Če je p_6 skupna ploščina šestih malih krogov in P ploščina danega kroga, sledi za iskano razmerje

$$\frac{p_6}{P} = \frac{6\pi\rho^2}{\pi R^2} = \frac{2}{3}.$$



Slika 1



Slika 2

- Za štiri vrisane krožnice velja pri analognih oznakah

$$R = \rho(1 + \sqrt{2})$$

in

$$\frac{p_4}{P} = \frac{4\pi\rho^2}{\pi R^2} = 12 - 8\sqrt{2} \doteq 0,686.$$

- Če je krožnic osem, dobimo najprej s pomočjo slike 2 in Pitagorovega izreka, da je dolžina stranice pravilnega osemkotnika, vrisanega krožnici s polmerom r , enaka $a_8 = r\sqrt{2 - \sqrt{2}}$. Odtod

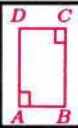
$$R = \rho \left(1 + \frac{2}{\sqrt{2 - \sqrt{2}}} \right)$$

in

$$\frac{p_8}{P} = \frac{8\pi\rho^2}{\pi R^2} = \frac{8}{(1 + \sqrt{4 + 2\sqrt{2}})^2} \doteq 0,613.$$

Igor Gajser

KRIŽANKA MATEMATIČNI POJMI

				OZNANJE-VALEC PRIHODNOSTI	REKA IN MESTEČE V ISTRI	GRŠKA BOGINJA NESREČE	BRLOG, DUPLINA	NEPRIJAZNOST, ODREŽAVOST	KAT
			BEETHOV, SIMFONIJA						
									ME V PAKIS
	LUKNJICA V KOŽI					LOJZE ROZMAN			LAST MOR.
	BRAZIL. VELEMESTO					SOSEDNJI PLANET			TR. DRI. KOŠ
	ČUSTVENA NAVEZANOST				STARO IME ZA OKTOBER				
AM. FILM. IGRALKA (KAREN)						OSNOVNE MERE			
NAJLJUBŠA MOHAMEDOVA ŽENA				EDGAR DEGAS	PLANTAŽA				
					ZELO ODPORNA KOVINA				
OZIRISOVA MATI			FIG. PRI ČETVORKI				TELEVIZIJA		
			DRŽAVNIK ALIA				ŠVIC. MATEMATIK (LEONHARD)		
INDUSTR. MESTO V WALESU								MATEMATIČNA VEJA	
								VELIK KUP	
REKA V ST. PETERSBURGU				VEDA					ŽENS. VAR. OTR.
				ORIG. KRATICA ZDA					OC
POLARNI KOT, AMPLITUDA						DEL KROŽNICE			
							MESTO OB MOZELI V FRANCIJI		
	NOSNIK						PRITOK ZAH. MORAVE PRI KRŠEVČU		

REL DŠ	DANSKI FIZIK (HANS CHRISTIAN)	PODSTA- VEK ZA SEKANJE DRV	SLOV. PESNIK (BORIS A.)	MATEMATIK VIDAV	TEKMO- VALNI KROG V LIGI			GORA NAD KOBARI- DOM	KOT, PRI KATEREM JE LOK ENAK RADIJU	GRŠKA ČRKA	GALIJ
								▶			
						STARO RUSKO MESTO	SPOJ ROKE S TRUPOM PRVOTNI ITALJANI				
STO V STANU											DIRIGENT HUBAD
NOST VODE								NEZNANKA V MATEMA- TIKI			
AVA UGE ENJE								PAPEŽEVA KRONA			
				AVTOR MARKO BOKALIČ	DEPRESIJA V LIBIJSKI PUŠČAVI						
				VSOTA PLOŠČIN MEJNIH PLOŠKEV							
	$a_n x^n + \dots + a_1 x + a_0$				▶						
		VODJA MOHAMED. ŠIITSKE SEKTE	ZVEZNA DRŽAVA V INDIJI	ŽIVAL ZA VOLNO BREZIZ- HODNOST					NOBELIJ		
									UMETNOST (LAT.)		
	STARA ME- RA ZA VINO					RIMSKA BOGINJA JEZE				UREJEN DEL VRTA	DOLŽINA ROBA OMEJENE PLOSKVE
	LOJZE VODOVNIK					IGRALEC					
							JAZONOVA LADJA REKA V ŠVICI				
KA, KI UJE OKA ET								PRIPADNIK BALK. NAR. POLITIK ŠEŠERKO			
	VREDNOST KI SE OPLAJA NIKELJ								ZNIŽANI "E" IGOR PRETNAR		
				NEREJEVE HČERE							
				ATENSKO KRVAVO SODIŠČE							

OB STOLETNICI SMRTI HEINRICHA HERTZA

Prvi dan letošnjega leta je minilo sto let od smrti nemškega fizika Heinricha Hertza (slika 1), ki se ga spominjamo predvsem po odkritju radijskih valov.

Rojen je bil leta 1857 v Hamburgu. V gimnaziji je bil med najboljšimi učenci. Učitelj grščine ga je nagovarjal, naj študira klasične jezike, domači učitelj arabščine pa mu je svetoval, naj študira bližnje-vzhodne jezike. Toda Heinrich se je dvajsetleten odpravil študirat tehniko v München. Po dveh letih je spoznal, da ga zanima fizika. Presedlal je na berlinsko univerzo, ki je bila tedaj glede fizike med najboljšimi na svetu ali celo najboljša. Že po dveh letih je opravil doktorat pri Hermannu von Helmholtzu in postal njegov asistent.



Slika 1. Heinrich Rudolf Hertz (22. februar 1857 - 1. januar 1894). Po njem imenujemo enoto *nihaj na sekundo* (s^{-1}) hertz (Hz).

V tedanji družbi naj bi za mladeniča, katerega družina je prešla iz judovske vere v protestantsko, ne bil dosegljiv najvišje cenjeni oficirski poklic, čeprav je njegov oče dosegel čast mestnega svetnika. Bila pa mu je odprta pot na univerzo. Leta 1883 je postal Hertz profesor na univerzi v Kielu, leta 1885 na tehniški visoki šoli v Karlsruheju in leta 1889 na univerzi v Bonnu.

Hertz je bil - kot slovenski fizik Jožef Stefan - med zadnjimi fiziki, ki so z enako vnemo izvajali poskuse in se ukvarjali s teorijami. Odkril je tudi *fotoefekt*, vendar ga ni dalje raziskal. Delal je poskuse s *katodnimi žarki*, kakor so tedaj imenovali curek elektronov v vakuumski cevi. Ni mu jih uspelo odkloniti z električnim poljem, ker najbrž v cevi ni dosegel dovolj nizkega tlaka. Ugotovil je, da predrejo aluminijev listič, in po tem zmotno sklepal, da so elektromagnetno valovanje. Zamislil si je mehaniko, v kateri ni bilo treba uporabljati pojma *sile*. Zanimal se je tudi za vprašanja, ki so pozneje pripeljala do posebne teorije relativnosti.

Pomen odkritja radijskih valov bomo razumeli, če orišemo tedanje razmere. V letih od 1865 do 1873 je škotski fizik James Clerk Maxwell postavil teorijo električnega in magnetnega polja - *Maxwellovo elektrodinamiko*. Pri

tem je razvil pogled Michaela Faradaya, ki je nadvse spretno delal poskuse in si pomagal z nazornimi predstavami. Tako je opisoval delovanje magnetov in vodnikov s tokom na magnetnico s *poljem sil*, ki si ga je ponazoril s *silnicami*. Maxwell je dal polju matematično vsebino.

Dandanes se s poljem seznanijo že učenci v osnovni šoli. Okoli naelektrenega telesa si mislimo prostor, ki ima posebne lastnosti, tako da deluje na drugo naelektreno telo. To je *električno polje*. Okoli trajnega magneta ali vodnika s tokom si mislimo prostor, ki ima posebne lastnosti, tako da deluje na drug trajen magnet ali vodnik s tokom. To je *magnetno polje*. Namesto, da bi si predstavljali, da deluje telo na drugo telo s silo skozi prazen prostor, si predstavljamo okoli prvega telesa polje, ki posreduje silo na drugo telo. Prvo je *opis z delovanjem na daljavo*, a drugo *opis s poljem*.

Delovanje na daljavo je vpeljal kakih dvesto let pred Maxwellom Isaac Newton. Predstavljal si je, da Sonce deluje na planete z gravitacijo skozi prazen prostor. Nekateri so mu ob tem očitali, da uporablja nefizikalne prijeme. V dvesto letih so se fiziki navadili na delovanje na daljavo, tako da so se upirali Maxwellovemu opisu s poljem. Tudi Helmholtz ni sprejel Maxwellovega pogleda v celoti. Toliko pa je uvidel njegove prednosti, da si je zamislil teorijo, ki je vsebovala oboje: delovanje na daljavo in polje. Tudi Hertz je izhajal spočetka iz te teorije. V opisu z delovanjem na daljavo se sila drugega telesa na prvo spremeni v trenutku, ko drugo telo premaknemo, pri opisu s poljem pa ob premiku drugega telesa zmotimo polje in motnja s končno hitrostjo potuje do prvega telesa.

Maxwell je v svoje enačbe vpeljal člen, ki ga je imenoval *premikalni tok*. Zaradi tega okoli spreminjajočega se električnega polja nastane magnetno polje, podobno kot nastane okoli konstantnega toka nabojev. Do tega je Maxwella pripeljala predstava, da nastane električno polje zaradi mehaničnih napetosti v izolatorju ali *dielektriku*. *Dielektrični premik*, količina, ki jo danes imenujemo *gostoto električnega polja*, mu je merila deformacijo dielektrika, nastalo zaradi mehaničnih napetosti. Električno polje v vakuumu je pojasnil z deformacijo *etra*, ki so mu pripisovali lastnosti dielektrika z nemerljivo majhno gostoto. Angleški fiziki so bili tedaj in še pozneje znani po tem, da so si radi vsak pojav ponazorili z *mehaničnim modelom*.

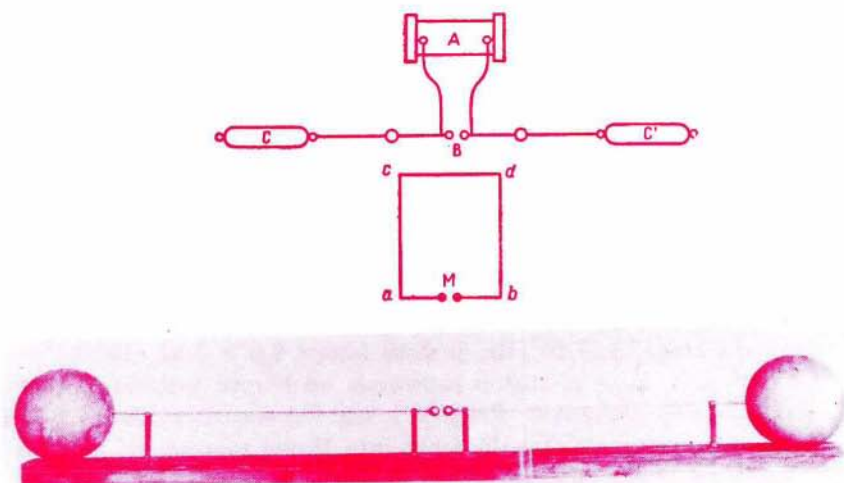
Enačbe so Maxwellu pokazale, da se spreminjajoče električno polje obda z magnetnim polje in spreminjajoče se magnetno polje z električnim. Polji drugo drugo vzdržujeta in potujeta po prostoru kot valovanje, ki nosi energijo. Enačbe so dale za hitrost tega valovanja vrednost, ki se je ujemala z izmerjeno hitrostjo svetlobe. Po tem je Maxwell sklepal, da je svetloba valovanje

električnega in magnetnega polja - *elektromagnetno valovanje*. Maxwelliova teorija je, kot smo namignili, razmeroma počasi dobivala veljavo. Kljub pomislekom ji je pomagal do nje tudi Hermann von Helmholtz.

Pri opisovanju razvoja fizike izhajamo iz današnjega znanja, uporabljamo današnje izraze in si ne prizadevamo pretirano, da bi se vživeli v nekdanje razmere. Tako nam uide marsikatera podrobnost in spregledamo tudi precej neuspešnih korakov. Toda za zvestejši opis dogajanja bi potrebovali precej več prostora. Tako nekoliko poenostavljeno recimo, da se je zgodba začela leta 1879. Tedaj je pruska akademija znanosti razpisala nagrado za rešitev naloge, po kateri je bilo treba - z današnjimi besedami - izmeriti magnetno polje premikalnega toka. Hertz je tedaj ugotovil, da naloge naravnost ni mogoče rešiti. Toda poslej je o njej veliko razmišljal in iskal možnosti za posredno rešitev. To ga je preipeljalo do *električnega nihanja*.

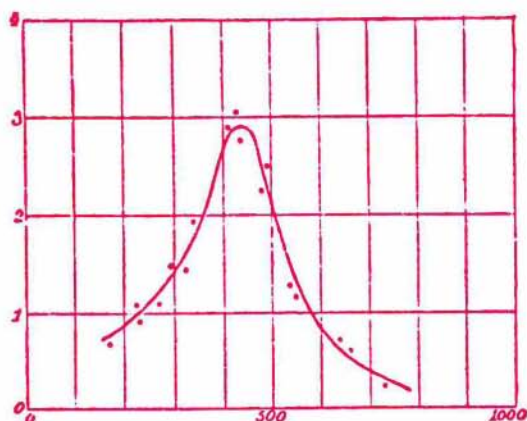
Ameriški fizik Joseph Henry je leta 1842 opazil, da je zanihala magnetnica ob vodniku, skozi katerega je spraznil naelektren kondenzator. Pet let pozneje je Helmholtz pribil, da nastane pri praznjenju kondenzatorja nihajoč tok, ki postopno oslabi. Leta 1853 je William Thomson - lord Kelvin - izpeljal enačbo za frekvenco toka v *nihajnem krogu*, ki ga sestavljata kondenzator in tuljava, in ki ga smemo primerjati z mehaničnim nihalom. Enačbo, po kateri je frekvenca tem višja, čim večji sta kapaciteta kondenzatorja in induktivnost tuljave, poznajo današnji srednješolci. Nekaj let pozneje je enačbo preskusil Behrend Wilhelm Federsen, ki je opazoval iskre ob praznjenju naelektrenega kondenzatorja. Z "osciloskopom" na vrteče se zrcalo je zasledoval časovni potek isker, ki so preskakovale v *iskrišču* po več stotisočkrat v sekundi. Danes je časovni potek napetosti v nihajnem krogu mnogo preprosteje raziskati s katodnim oscilografom. Tedaj pa so si pomagali z iskriščem. Vodnik v nihajnem krogu so prekinili, krajišči oblikovali v konici in ju razmaknili do določene razdalje.

Hertz je po prihodu v Karlsruhe leta 1885 začel delati poskuse z nihajnim krogom. Sestavil ga je iz tuljave z veliko induktivnostjo in iskrišča z zelo majhno kapaciteto. Nihajoči tok v takem krogu je hitro zamrl. Zato ga je zbujal z indukcijo: prekinjalo je na tuljavo priklapljal baterijo in jo izklapljal. Električno nihanje v nihajnem krogu je opazoval tako, da je približal drug nihajni krog v obliki ovoja z iskriščem. Razmik med konicama v iskrišču je spreminjal z mikrometrskim vijakom. Čim večji je bil razmik, pri katerem so še preskakovale iskre, tem izdatnejše je bilo nihanje v krogu. Hertz je ugotovil, da so v "sprejemnem" krogu bile iskre močnejše, če je "oddajnemu krogu" s tuljavo dodal ravno žico s kovinskima telesoma (slika 2). Tako je



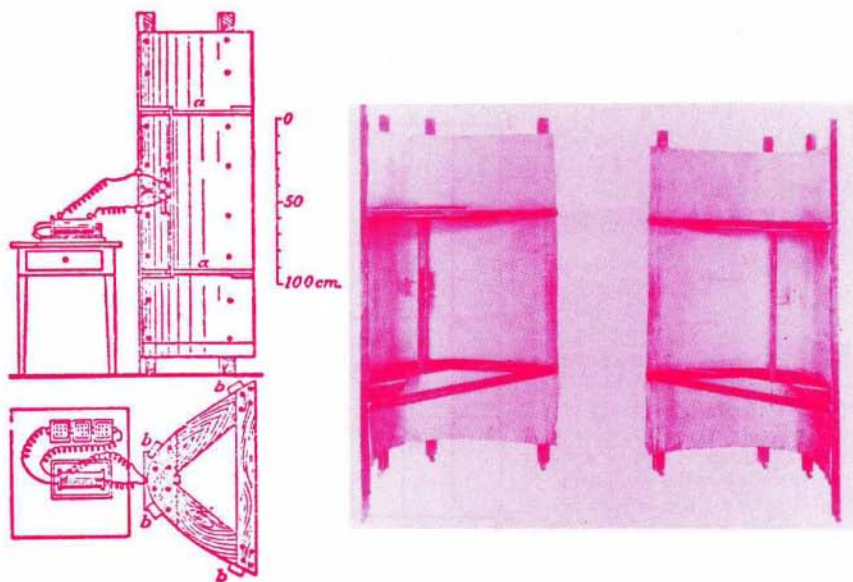
Slika 2. Risba oddajnega nihajnega kroga s tuljavo in oddajno anteno (zgoraj) in sprejemnega nihajnega kroga (spodaj) iz članka H.Hertza *O vplivu premočrtnega električnega nihanja na bližnji ovoj* iz novembra 1887. Del Hertzeve naprave so razstavili leta 1988 na univerzi v Karlsruheju na razstavi *Sto let radijskih valov*.

Slika 3. Hertzeva risba odvisnosti največje razdalje konic v iskrišču sprejemnega kroga (v milimetrih), pri kateri so še preskakovale iskre, od dolžine vodnika (v centimetrih) v sprejemnem krogu. Krivulja ima za resonanco značilno obliko.



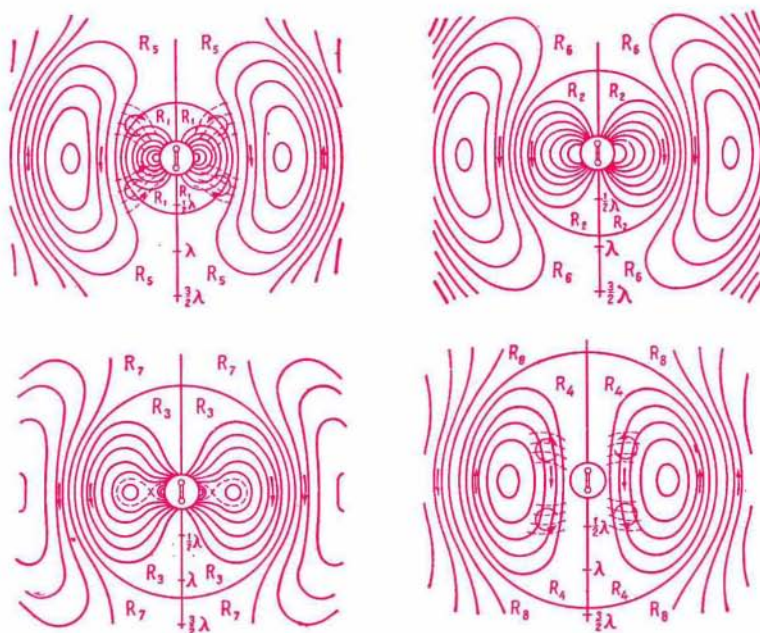
naredil *oddajno anteno*. Največja dolžina isker v iskrišču se je spreminjala, ko je spreminjal dolžino sprejemnega nihajnega kroga. Opazoval je resonanco električnega nihanja v sprejemnem krogu z nihanjem v oddajnem krogu (slika 3).

S prilagajanjem naprav in okoliščin pri poskusih je dosegel, da so nastale iskre v sprejemnem krogu v oddaljenosti 12 metrov od oddajnega. Pri tem se je učinek zmanjševal obratno sorazmerno z oddaljenostjo in ne obratno sorazmerno s kvadratom razdalje, kar je značilno za statično polje točkastega naboja. Zamisel o elektromagnetnem valovanju bi podprla ugotovitev, da potuje valovanje z določeno hitrostjo. Proti koncu leta 1887 je Hertz naredil poskus v 15 metrov dolgi dvorani. Oddajni nihajni krog je postavil 2 metra pred steno, na drugo steno pa je namestil pločevino. Valovanje se je na njej odbilo in dalo z vpadnim valovanjem stoječe valovanje. Med sosednjima vozloza, v katerih iskre sploh niso preskakovale, je izmeril razdaljo 4,8 metra. Dvojna razdalja, 9,6 metra, je dala valovno dolžino. Z izračunano frekvenco nihajnega kroga, $3,57 \cdot 10^7$ Hz, je dobil hitrost $9,6 \text{ m} \cdot 3,57 \cdot 10^7 \text{ s}^{-1} = 3,4 \cdot 10^8 \text{ m/s}$, ki se ni znatno razlikovala od hitrosti svetlobe. Potem je naprave še dalje izpopolnil. Prešel je k višji frekvenci in pločevino zvil v parabolični valj (slika 4). Tako je lahko med štirimi zaporednimi vozli določil razmik po 33 centimetrov. Valovna dolžina 66 centimetrov je dala ob



Slika 4. Risba izpopolnjenega oddajnega kroga z navpično anteno v gorišču paraboličnega zrcala (s strani in od zgoraj) iz Hertzevega članka *O curkih električne sile* iz leta 1889 in pločevinasti zrcali oddajne in sprejemne antene.

izračunani frekvenci $4,55 \cdot 10^8$ Hz hitrost $0,66 \text{ m} \cdot 4,55 \cdot 10^8 \text{ s}^{-1} = 3,00 \cdot 10^8 \text{ m/s}$. Z odbojem na ravni pločevini je pokazal, da velja za valovanje odbojni zakon, in z lomom na več kot tona težki asfaltni prizmi, da velja lomni zakon. Tako je Heinrich Hertz v letih 1887 in 1888 odkril radijske valove. Z valovanjem z milijonkrat večjo valovno dolžino od vidne svetlobe je sijajno podprl Maxwellovo teorijo. Naposled si je prislužil nagrado pruske akademije, saj je posredno potrdil premikalni tok. Brez njega ne bi bilo elektromagnetnega valovanja. Nazadnje je Hertz še preračunal spremenljivo polje ravne antene, ki je precej manjša od valovne dolžine (slika 5).



Slika 5. Risba električnih silnic v elektromagnetnem valovanju drobne ravne antene za trenutke, ki si sledijo v razmikih po eno osmino nihajnega časa. Hertz je moral za to kar precej računati (desno spodaj je zagrešil manjšo napako).

Učinke radijskih valov so opazovali že pred Hertzem, vendar so pojav odpravili kot nepomemben. Hertz sam je trdil, da njegovega odkritja ne bo mogoče uporabiti. Njegove poskuse so v kratkem ponovili Oliver Lodge v Angliji, Augusto Righi v Italiji, Aleksander Popov v Rusiji, Eduard Braly

TEKMOVANJA

v Franciji. William Crookes je leta 1892 prvi opozoril na možnost, da bi lahko s Hertzevimi valovi prenašali sporočila. Kmalu zatem se je zadeve lotil Guglielmo Marconi in leta 1898 "brezžično" prenesel sporočilo iz Anglije v Francijo. Tri leta pozneje so sporočila z Morsovo abecedo segla že preko tritisoč kilometrov. Preden je radio spregovoril in zapel, televizija pa pokazala sliko, je bilo treba še marsikaj odkriti. Toda v osnovi teh neizogibnih sestavin sodobnega življenja je Hertzevo odkritje.

Janez Strnad

URNIK TEKMOVANJ V LETU 1994

področje	šola	tekmovanje	datum
matematika	osnovna	šolsko občinsko državno	do 9. aprila 20. april 21. maj
	srednja	izbirno državno olimpiada	19. marec 23. in 24. april julij
fizika	osnovna	šolsko področno državno	do 26. marca 9. april 7. maj
	srednja	izbirno državno olimpiada	16. april 14. maj junij
logika	osnovna in srednja	izbirno državno	september oktober
matematika za razvedrilo	osnovna in srednja	državno	3. september
računalništvo	osnovna	šolsko področno državno	25. marec 22. ali 23. april 21. maj
	srednja	državno	13. - 14. maj
raziskovanje inovatorstvo	srednja	državno	27. maj

Nekaj informacij o tekmovanjih

Matematika – osnovna šola

Vsa tekmovanja bodo potekala v skladu z novim *Pravilnikom o tekmovanju učencev osnovne šole v znanju matematike za Vegova priznanja*. Pojasnila lahko dobite pri g. A. POTOČNIKU, OŠ Božidarja Jakca, Nusdorferjeva 10, Ljubljana, telefon (061) – 443 – 074 ali (061) – 442 – 900.

Matematika – srednja šola

Razpis izbirnega tekmovanja (za vse učence, ki želijo sodelovati na državnem tekmovanju) bomo tako kot doslej skupaj s prijavitelji poslali na šole. Vsa pojasnila daje g. D. FELDA, Fakulteta za elektrotehniko in računalništvo, Tržaška 25, Ljubljana, tel. (061) – 12 – 31 – 121, int. 233.

Fizika – osnovna šola

Državno tekmovanje iz fizike za osnovno šolo bo ob 10. uri na Pedagoški fakulteti v Mariboru, Koroška c. 160.

Tekmovanje je ekipno, vsako ekipo sestavljata dva učenca. Vsi, ki želijo sodelovati na državnem tekmovanju, se morajo obvezno udeležiti področnega tekmovanja v ustrezni organizacijski enoti Zavoda Republike Slovenije za šolstvo in šport:

- v Celju na Gimnaziji Lava, Pot na Lavo 22 (J. Dolenšek);
- v Mariboru na Pedagoški fakulteti, Koroška c. 160 (M. Cvahte);
- v Kopru na Gimnaziji Koper, Cankarjeva 2 (E. Okretič);
- v Ljubljani na OŠ Dravlje, Klopčičeva 1 (V. Harej);
- v Dravogradu na OŠ Radlje ob Dravi, Koroška 17 (F. Pogorelnik);
- v Radovljici na OŠ Antona Tomaža Linharta (J. Stare);
- v Murski Soboti na Gimnaziji Murska Sobota, Šolsko naselje 14 (E. Dečko);
- v Novem mestu na OŠ Center, Cesta herojev (A. Ban);
- v Novi Gorici na OŠ Frana Erjavca, Kidričeva 36 (A. Fakin).

Na področno tekmovanje se prijavite organizatorju v domači regiji najkasneje do 31. 3. 1994, takoj po šolskem tekmovanju. Vsa tekmovanja bodo potekala v skladu z novim *Pravilnikom o tekmovanju učencev osnovne šole v znanju fizike za Stefanova priznanja*.

Dodatne informacije dobite pri g. J. SAKELŠEK, OŠ Ketteja in Murna, Koširjeva 2, Ljubljana, tel. (061) – 444 – 401.

Fizika – srednja šola

Razpis za tekmovanja bomo skupaj s prijavnici poslali na šole do konca februarja. Informacije dobite pri g. C. DOMINKU na Gimnaziji Bežigrad, Peričeva 4, Ljubljana, telefon (061) – 321 – 567 ali (061) – 311 – 024.

Matematika za razvedrilo

Vse informacije dobite v časopisih *Logika & Razvedrilna matematika* in *Ugankarski domenek*.

Logika

Na državnem tekmovanju tekmujejo učenci, ki bodo v času tekmovanja na predmetni stopnji osnovne šole, učenci srednjih šol in študenti. Šole, ki bodo organizirale izbirno tekmovanje, se morajo prijaviti na razpis do **1. junija** na ZOTKS, Komisija za logiko, Lepi pot 6, 61001 Ljubljana. Učenci šol, ki ne bodo organizirale izbirnega tekmovanja, se lahko prijavijo do 30. avgusta na najbližji šoli, kjer bodo tekmovanje izvedli. Druge informacije daje g. A. JUS na ZOTKS, tel. (061) – 213 – 727 ali (061) – 268 – 010.

Računalništvo – osnovna šola

Razpisi za tekmovanje so že na šolah. Informacije dobite pri g. A. JUSU, ZOTKS – Svet za tehnično vzgojo mladine, Lepi pot 6, Ljubljana, tel. (061) – 213 – 727 ali (061) – 268 – 010.

Računalništvo – srednja šola

I. Raziskovalne naloge

Strokovna komisija bo pregledala naloge, ki bodo do **1. maja** prispele na naslov Gibanje znanost mladini, Lepi pot 6, Ljubljana. Na osnovi dobljenih ocen bo določila tiste učence, ki bodo svoje naloge ustno zagovarjali.

II. Tekmovanje iz znanja računalništva

Mentorji naj pošljejo prijavo šole s poimenskimi seznamom tekmovalcev (ne več kot po 5 učencev za vsako od treh tekmovalnih skupin) do **10. aprila** na Gibanje znanost mladini. Pri tem naj upoštevajo pravila, ki že vrsto let veljajo za to tekmovanje.

Potrditev prijav in natančni razpored tekmovanja bodo šole dobile teden dni pred tekmovanjem. Šolam priporočamo, da izvedejo predtekmovanja in tako izberejo najboljše predstavnike. Učenci šol, ki se ne bodo prijavile na tekmovanje kot organizacije, se lahko sami prijavijo na isti naslov, prav tako najkasneje do 10. aprila. Informacije daje g. R. DORN, Fakulteta za elektrotehniko in računalništvo, Tržaška 25, Ljubljana, tel. (061)–273–489.

REŠITVE NALOG

Raziskovanje in inovatorstvo

Razpise za 26. srečanje mladih raziskovalcev in inovatorjev Slovenije so srednje šole že dobile, podrobnejše informacije pa dobite pri g. B. SOTOŠKU, ZOTKS – Gibanje znanost mladini, Lepi pot 6, Ljubljana, p.p. 99, tel. (061) – 213 – 727 ali (061) – 268 – 010.

Darjo Felda

NALOGE IZ PROGRAMIRANJA – Rešitev zadnje naloge s str. 125

Tokrat si bomo ogledali še rešitev zadnje naloge. Tudi to bomo zapisali v turbo pascalu in v narečju loga LCS/LogoS.

Spomnimo se, kaj naloga zahteva. Sestaviti moramo logično funkcijo, ki bo za dani niz in shemo odločila, ali niz ustreza shemi. Pri tem v shemi lahko uporabljamo nadomestna znaka: * nadomesti poljubno zaporedje znakov, ? pa le nič ali en znak. Domenimo se še, da v rešitvi med malimi in velikimi črkami ne bomo ločevali.

Predno razložimo algoritem za rešitev naloge, vpeljimo še nekaj oznak. Podprogram, ki ga želimo napisati, bo dobil dva parametra: niz in shemo. Z b_i označimo niz, ki ga določa prvih i znakov vhodnega niza, z s_j pa niz, ki ga določa prvih j znakov sheme. Po dogovoru sta niza b_0 in s_0 prazna. V algoritmu bomo postopno ugotavljali, ali nizi b_i ustrezajo shemam s_j . Pri izbranem i -ju bomo poiskali vse sheme s_j , ki jim ustreza niz b_i . Pri tem so možne vrednosti števila j med 0 in dolžino vhodne sheme. Za $i = 0$ takih shem ni težko poiskati. Prazen niz b_0 ustreza natanko tistim shemam s_j , ki so sestavljene le iz nadomestnih znakov * in ?. Razložiti moramo še, kako s pomočjo shem, ki jim ustreza niz b_i , poiščemo tiste sheme, ki jim ustreza za znak daljši niz b_{i+1} . Vemo, da niz b_{i+1} ne ustreza prazni shemi s_0 . Pri $j \geq 1$ pa bomo ločili tri primere:

- Če se shema s_j konča z znakom, ki ni nadomestni znak, potem ji niz b_{i+1} ustreza natanko tedaj, ko se konča z enakim znakom kot shema in skrajšani niz b_i ustreza skrajšani shemi s_{j-1} .
- Če se shema konča z znakom *, ločimo dva podprimera. Če zvezdica ne nadomesti nobenega znaka, mora niz b_{i+1} ustrezati shemi s_{j-1} . Če pa zvezdica nadomešča vsaj en znak, mora tudi niz b_i ustrezati shemi s_j . Niz b_{i+1} ustreza shemi s_j natanko tedaj, ko je izpolnjena vsaj ena od obeh gozdnih možnosti.

- (c) Ostala je še možnost, da se shema konča z znakom ?. Obravnava je podobna kot pri točki (b). Če vprašaj ne nadomesti nobenega znaka, niz b_{i+1} ustreza shemi s_j natanko tedaj, ko ta niz ustreza shemi s_{j-1} . Če pa vprašaj stoji namesto nekega znaka, moramo pogledati, ali niz b_i ustreza shemi s_{j-1} .

Algoritem bomo v pascalu zapisali z dvema vgnezenima zankama **for**. Zunanja zanka bo povečevala obravnavani del niza, notranja pa bo za izbrani del ugotovila, katerim začetnim delom vhodne sheme ustreza. Zgornji opis algoritma nam pove, da moramo tudi v notranji zanki preverjanja opravljati od krajših proti daljšim shemam, saj moramo pri drugi in tretji možnosti preveriti, ali trenutni niz ustreza za znak krajši shemi. Dobljene rezultate bomo hranili v tabeli logičnih vrednosti u . Vrednost $u[j]$ nam pove, ali trenutni začetni niz ustreza shemi s_j . S pravilno izbranim vrstnim redom računanja bomo zagotovili, da ne bomo potrebovali dodatne ali celo dvorazsežne tabele. Dovolj bosta le dve pomožni logični spremenljivki: $pu1$ pove, ali prejšnji niz ustreza trenutni shemi, pu pa pove, ali prejšnji niz ustreza prejšnji shemi. Končni odgovor dobimo po izteku obeh zank na zadnjem mestu tabele u . Tu je podprogram, zapisan v pascalu.

```
function Ustreza(niz, shema: string): boolean;
var
  i, j: integer;
  u: array [0..255] of boolean;      { shema nima več kot 255 znakov }
  pu, pu1: boolean;
begin                                { malih in velikih črk ne ločimo }
  for i:=1 to Length(niz) do niz[i] := UpCase(niz[i]);
  for j:=1 to Length(shema) do shema[j] := UpCase(shema[j]);
  u[0] := true;                      { Katerim shemam ustreza prazen niz? }
  for j:=1 to Length(shema) do
    u[j] := u[j-1] and (shema[j] in ['*', '?']);
  for i:=1 to Length(niz) do begin
    pu := u[0]; u[0] := false;
    for j:=1 to Length(shema) do begin
      pu1 := u[j];
      if not (shema[j] in ['*', '?']) then
        u[j] := pu and (shema[j]=niz[i])      { možnost (a) }
      else if shema[j]='*' then
        u[j] := u[j-1] or pu1                  { možnost (b) }
      else
        u[j] := u[j-1] or pu;                  { shema[j]='?' }
      { možnost (c) }
    end; { for j }
  end; { for i }
  Ustreza := u[Length(shema)];
end; { Ustreza }
```

Sprogramirajmo gornjo rešitev še v logu. Ker logo ne pozna tabel, bomo namesto njih uporabili sezname. Zaradi preprostejšega zapisa bomo tabelo u nadomestili z dvema seznamoma logičnih vrednosti "True in "False – :u in :nu. Prvi seznam bomo v notranji zanki zmanjševali, hkrati pa bomo na konec drugega dodajali novo izračunane logične vrednosti. To bomo storili z ukazom LPUT. Po koncu notranje zanke bomo seznam :nu, katerega vrednosti ustrezajo novim vrednostim v tabeli u iz rešitve v pascalu, zopet prepisali v seznam :u. Zaradi uporabe dveh seznamov pomožne spremenljivke :pu1 ne bomo potrebovali. V pascalu dolžino niza vrne funkcija Length, ustrezní ukaz v logu pa se imenuje COUNT. Zanke for bomo nadomestili z ukazom REPEAT, pri čemer pa bomo morali sami poskrbeti za povečevanje števecv.

```

TO ustreza :niz :shema
  (LOCAL "u "nu "pu "j "znak)
  MAKE "niz UC :niz MAKE "shema UC :shema
  MAKE "u ["True] MAKE "j 1
  REPEAT COUNT :shema [
    MAKE "znak ITEM :j :shema
    MAKE "u LPUT (AND LAST :u MEMBERP :znak "'*?') :u
    MAKE "j :j+1
  ]
  REPEAT COUNT :niz [                                     ; za vsak začetek niza ponovimo
    MAKE "j 1 MAKE "nu ["False]
    REPEAT COUNT :shema [                                   ; za vsak začetek sheme ponovimo
      MAKE "znak ITEM :j :shema
      MAKE "pu FIRST :u MAKE "u BF :u
      IF MEMBERP :znak "'*?'                               ; možnost (a)
        [ ] [ MAKE "nu LPUT (AND :pu :znak=(FIRST :niz)) :nu ]
      IF :znak="'*'                                          ; možnost (b)
        [ MAKE "nu LPUT (OR LAST :nu FIRST :u) :nu ] [ ]
      IF :znak="'?'                                          ; možnost (c)
        [ MAKE "nu LPUT (OR LAST :nu :pu) :nu ] [ ]
      MAKE "j :j+1
    ]
    MAKE "niz BF :niz MAKE "u :nu
  ]
  OP LAST :u
END

```

V rešitvi smo uporabili tudi ukaz ITEM :j :shema, ki nam vrne *j*-ti znak niza :shema. Ta ukaz nam nadomešča neposredni dostop do posameznih znakov niza (ali do elementov tabele), ki ga imamo na voljo v pascalu. Ker je ukaz ITEM počasen, ga ne uporabimo večkrat, ampak znak, ki ga vrne, shranimo v spremenljivko :znak. S tem tudi nekateri pogoji v gornji rešitvi postanejo nekoliko preglednejši.

Martin Juvan

PROSTORSKO - ČASOVNI LABIRINTI ALI KAKO OSVOJITI KRALJIČNO

Nekoč je živel kralj, ki je imel prelepo hčerko po imenu Gwendolin. Glas o njeni lepoti se je raznesel po kraljestvu in številni snubci so ji nosili darila, ji pisali pesmi in jo vabili na skrivne sestanke v grajski park, kar je marsikoga od njih stalo glave, če je kralj, ki je imel povsod ovaduhe, za to izvedel.

"Dal jo bom za ženo tistemu," je rekel naposled, ker si je želel vnuka, "ki bo opravil tri preizkušnje pameti, moči in poguma."

Sam pri sebi pa si je mislil, da so naloge tako težke, da jih še dolgo ne bo nihče zmogel.

1. preizkušnja: Preživeti tri noči v Zakletem gradu.

"Najvažnejši v življenju je pogum," je spregovoril podložnikom na slavu ob hčerkinem petnajstem rojstnem dnevu. "Capin, ki si drzne sanjati o roki moje hčerke, bo moral dokazati, da ga je kaj v hlačah. Po družinski tradiciji bo tri noči zaprt v zakletem gradu. V njem že stoletja strašijo duhovi mrtvih viteзов, ki niso opravili tega preizkusa, ko so se potegovali za roke mojih praprababic. Kdor ni plesal z njimi, ne ve, kaj je strah. Od žrtve pustijo le okrvavljeno obleko in kako koščico."

V kleti straši vsako drugo noč; tja bo nesrečnik zaklenjen prvo noč; drugo noč bo odveden v knjižnico, kjer straši vsako tretjo noč; tretjo noč bo bdel v stolpu, koder straši vsako peto noč. Jaz se tega zlovesčega kraja sicer vedno v velikem loku izognem, toda kdor hoče tam žblazneti, mu ne branim."

2. preizkušnja: Ukrasti Krono tisočerih draguljev, zaklad sosednjega kraljestva.

"Brez pameti ni sreče," je nadaljeval kralj. "Ni treba biti genij, da vidiš lepoto in bistrost moje hčerke. Kdor pa jo hoče dobiti, bo moral dokazati, da ima še kaj več soli v glavi. Prinesti mi mora zaklad sosednjega kraljestva, krono s tisoč dragulji, skrito v središču labirinta, okrog katerega noč in dan krožijo stražarji. Najbrž mi ni treba praviti, kaj se zgodi z nesrečnikom, ki ga zasačijo v labirintu."

3. preizkušnja: Rešiti uganko nihajočih stopnic.

"Zadnjo preizkušnjo še posebej odsvetujem vsem, ki imajo vrtoglavico! Treba se bo povzpeli po nihajočih stopnicah do gradu, kjer živi moja hčerka Gwendolin. Stopnice so na vrhu navpičnih hlodov, ki nihajo gor in dol. Z

ene stopnice je mogoče varno preskočiti na sosednjo le v trenutku, ko sta na isti višini. Hlodi so pričvrščeni na zapleten mehanizem, ki ga poganja vodna energija, in vsi zanihajo tudi pod gladino jezera, ki obdaja grad. Da spravite mehanizem v pogon, morate premakniti vzvod, za kar je potrebna precejšnja moč. Tik za stopnicami se jezero izliva v veličasten slap. Če bo torej kdo dobil mojo hčerko Gwendolin, bo to nekdo, ki zna prenašati vzpone in padce in ob tem ohrani mirno kri."

Mnogo kraljevičev in vitezov je sklonilo svoje ponosne glave, ko so slišali za tako težke naloge. Le dva sta se prišla poklonit kralju neustrašnega obraza in pogumnih src, eden pa se ni mogel odločiti, ali naj stavi svoje življenje na kocko ali ne.

"Ta je najbolj pameten od vseh treh," si je mislil kralj, "tega se moram najbolj bati."

1. Zakleti grad.

"Vaše veličanstvo, junak se boji le lastnega strahu," je rekel hrabri Črni vitez. "Še nocoj me zaklenite v grad."

"Kadar želiš," je rekel kralj.

Prvo noč je Črni vitez igral na lutnjo, drugo noč je zblaznel.

Kralj je žarel od zadovoljstva. "Zdaj bodo vse te podgane zbežale," si je mislil. A že se je poklonil pred njim Beli vitez:

"Če mi je sojeno umreti zaradi ljubezni, sem na to pripravljen."

"Kakšen hinavec," si je mislil kralj. "Tako laže, da še sam sebi verjame, v resnici pa mu je le do mojega kraljestva," rekel pa ni nič, ker je bil moder.

Prvo noč v gradu je Beli vitez igral pasijanso, drugo noč je igral šah s svojo senco, tretje jutro so ga našli z lasmi, ki so mu sršeli na vse strani kot Marsovcu antene. Verjel je, da je mačka, hodil je po vseh štirih in mijavkal. Dvorjani niso vedeli, ali naj se ob tem smejejo ali jočejo. A še preden so se začeli o tem prerekati, kot so se tudi o vsem drugem, jih je iz zadrege rešil Tihi vitez in vsem je zastal dih, ko je on, ki je sicer govoril tako tiho, da ga je bilo komaj mogoče slišati, čez vso dvorano zaklical kralju:

"Tudi jaz bi tvegala glavo za roko vaše hčerke, veličanstvo, vendar ne nocoj, kdaj drugič."

"Ni problema, kadar želiš," se je zakrohotal kralj, za njim pa še vsi dvorjani, saj so mislili, da se Tihi vitez le širokousti, v zakleti grad pa se po svoji volji ne bo pustil zakleniti nikoli.

A čez nekaj dni se je Tihi vitez le ojunčil in tri dni po tem mu je kralj moral čestitati k prvi uspešno opravljeni preizkušnji.

Zakaj se je Tihi vitez pustil zapreti v zakleti grad?

Ali je vedel, da se mu ne bo nič zgodilo,

ali je le izzival srečo, ali je hotel umreti mlad,

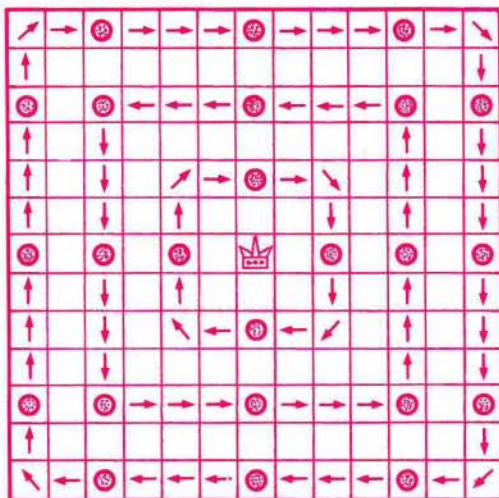
ali je le bežal pred sramoto, ki je za viteza hujša kot smrt?

Kaj mislite vi? Rešitev te in ostalih dveh ugank boste našli v naslednji številki Preseka.

2. Labirint.

Čez sedem gora in čez sedem voda je potoval Tihi vitez in prišel je v sosednje kraljestvo. Dolgo je gledal gibanje stražarjev okrog labirinta s krono, a ni izvedel vsega, kar bi rad. Svoja opažanja je dopolnil s podatki, ki jih je v krčmi dvomljivega slovesa dobil od dvojnega vohuna Krivogleda za vrček piva, mošnjo zlatnikov in portret lepe Gwendolin. Od njene podobe se ni hotel ločiti za nič na svetu, a vohun mu je rekel:

"Odloči se, kaj imaš raje: njeno lepo sliko ali njo samo. Če jo hočeš imeti v resnici, si zapomni, da o ženski ne smeš sanjariti. Nikoli! Jaz sem že onkraj dobrega in zla in si lahko privoščim razkošje, da govorim po resnici. Zdaj pa pozorno poslušaj, ker bom tole povedal samo enkrat, tukaj namreč mrgoli vohunov in tudi stene imajo ušesa: Labirint je oblike šahovnice 13 x 13, krona je v njegovem središču. Stražarji se vsake četrte ure pomaknejo za eno polje po shemi:

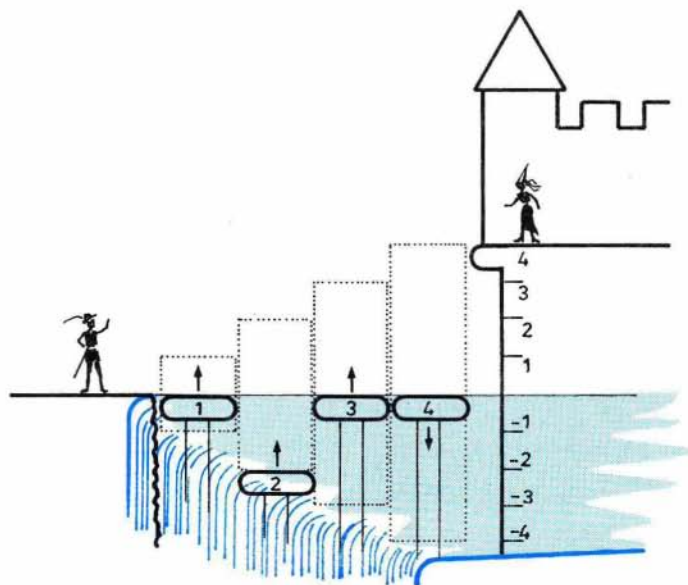


Ne boj se stražarja, ki ni na sosednjem polju, to je na polju, s katerim ima skupno stranico. Nobeden se za svojo plačo ne pretegne in vsak dela samo tisto, kar je treba in nič več – straži polje, na katerem stoji, in še štiri sosednja in to je vse. Vsakih petnajst minut pa se vsi premaknejo naprej, točno po urniku."

Kdo ve, kako je Tihi vitez rešil uganko labirinta, ali se je uspel izogniti stražarjem ali jih je podkupil? Skrivnostna je njegova pot v srce labirinta, težko jo je opisati z besedami, še težje jo je bilo izvršiti. Kaj mislite vi? Se je uspel izogniti stražarjem, ali jih je podkupil?

3. Nihajoče stopnice.

Kralj ni vedel, ali naj bo srečen ali nesrečen, ko mu je Tihi vitez prinesel Krono tisočerih draguljev. Le še eno preizkušnjo bo opravil in lepa Gwendolin bo njegova. Ko je Tihi vitez prišel pred nihajoče stopnice, je bilo stanje takole:



Kralj mu je rekel, kar je Tihi vitez tudi že sam slutil: "Vsaka stopnica enkrat zaniha od najvišje lege navzdol in spet na vrh v času, ki je sorazmeren amplitudi njenega nihanja."

Kako je Tihi vitez vedel, kdaj mora stopiti na prvo stopnico?
 Ali je razmišljal o tem, da bi se med potjo vrnil,
 ali o tem, kdaj bo skočil na naslednjo stopnico,
 ali o lepi Gwendolin?

Kaj mislite vi? Lahko približno uganete tok njegovih misli ob predpostavki, da je sploh kaj razmišljal?

Ko je Tihi vitez uspešno opravil tudi tretjo preizkušnjo, mu kralj ni več mogel odrekati roke svoje prelepe hčerke Gwendolin. Še istega dne sta se poročila in živela sta dolgo in srečno.

Jurij Kovič

VSOTA POSEBNE VRSTE - Rešitev s str. 189

Naloga je gotovo majhen izziv za računalnikarje. Izkaže se, da poleg števil 459 obstaja še celo 30 takih trimestnih števil, ki jih lahko zapišemo kot vsoto dveh trimestnih števil, tako da v vsoti in obeh seštevancih nastopajo natanko vse številke od 1 do 9. To so števila: 468, 486, 495, 549, 567, 576, 594, 639, 648, 657, 675, 693, 729, 738, 783, 792, 819, 837, 846, 864, 873, 891, 918, 927, 936, 945, 954, 963, 972, 981.

Če upoštevamo komutativnost seštevanja, lahko zapišemo 20 od teh števil še na štiri različne načine v zahtevani obliki, npr.:

$$459 = 173 + 286 = 176 + 283 = 183 + 276 = 186 + 273,$$

ostalih 11 pa celo na osem različnih načinov, npr.:

$$\begin{aligned} 981 &= 235 + 746 = 236 + 745 = 245 + 736 = 246 + 735 = \\ &= 324 + 657 = 354 + 627 = 327 + 654 = 357 + 624. \end{aligned}$$

Tako je vseh različnih računov kar 168. Sami premislite, zakaj je število načinov pri posamezni vsoti deljivo s štiri. Morda boste celo opazili, kje je razlog, da vse navedene vsote nimajo istega števila ustreznih razcepov.

Marija Vencelj

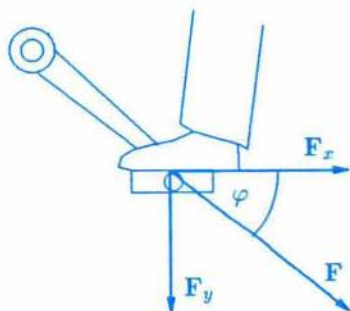
TEKMOVANJA

NALOGE Z DRŽAVNEGA TEKMOVANJA FIZIKOV – Rešitve s str. 169

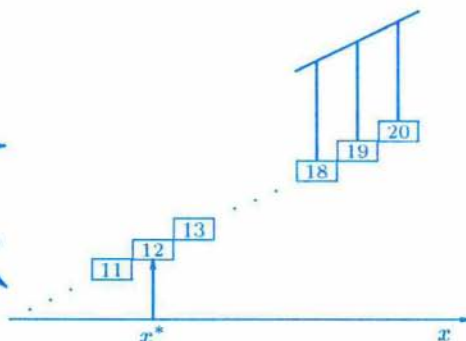
Tokrat objavljamo rešitve nalog z 31. tekmovanja srednješolcev iz fizike, ki je bilo 8. maja 1993 na Ravnah na Koroškem. Besedila nalog smo objavili v letošnji tretji številki Preseka.

Skupina A

1. Kolesar mora voziti v vsaki prestavi do največje možne hitrosti. Čas vožnje v izbrani prestavi je potem $t = (v - v')/a$, če je v največja možna hitrost in a pospešek v tej prestavi ter v' največja hitrost v prejšnji prestavi. S pregledom nekaj kombinacij lahko ugotovimo, da je najugodnejše naslednje zaporedje: prva, tretja in četrta prestava, za kar porabi $3\text{ s} + 2\text{ s} + 6\text{ s} + 2\text{ s} + 6\text{ s} = 19\text{ s}$. (Dvakrat po 2 sekundi porabi za prestavljanje.)
2. Ker kolesar potiska pedalo zelo počasi, ima sila na pedalo ves čas smer ročice pedala in gleda proč od osi vrtenja. Da stopalo ne zdrsne s pedala, mora biti vodoravna komponenta te sile manjša od največje dovoljene sile lepenja, $F_x \leq k_l F_y$. V mejnem primeru velja $\tan \varphi = F_y / F_x = k_l$, torej $\varphi = 60^\circ$ (slika 1). S podobnim razmislekom ugotovimo, da mora kolesar v vodoravni legi pedalo zasukati za kot 30° , da stopalo ne zdrsne s pedala.



Slika 1



Slika 2

3. Stopnišče moramo podpreti v težišču. Vodoravna komponenta razdalje do težišča je

$$x = \frac{(1 + 3 + 5 + \dots + 37 + 39) \frac{1}{2} l T_s + (31 + 33 + \dots + 39) \frac{1}{2} l T_0}{20 T_s + 5 T_0} = 11,5 l,$$

če je l dolžina ene stopnice, T_s njena teža in T_0 teža stebrička in ene petine ograje. Stopnišče je torej treba podpreti pod sredino 12. stopnice (slika 2).

4. Preden spustimo kad, so v ravnovesju teža zamaška, vzgon in sila vzmeti: $F_g + F_{vzmet} = F_{vzg}$. Če x označuje razteg vzmeti, h višino zamaška, $l = h/4$ del zamaška, ki je potopljen v vodo, r njegov polmer, σ specifično težo vode in σ_z specifično težo zamaška, velja: $\sigma_z \pi r^2 h + kx = \sigma \pi r^2 l$. Od tod izrazimo razteg vzmeti $x = (\sigma l - \sigma_z h) \pi r^2 / k$, $x = -8,5$ mm. Ko kad spustimo, preneha delovati teža in zato tudi vzgon. Vzmet se vrne v mirovno lego, torej se raztegne za 8,5 mm.

Skupina B

2. Ko jeklenka plava, je teža plina in jekla enaka vzgonu: $m_{plin}g + (V_{zun} - V_{not})\rho_{Fe}g = 0,9V_{zun}\rho_{voda}g$. Celotna masa plina ni na voljo za dihanje, saj se ventil zapre, ko v jeklenki pade tlak pod $p_{not} = p_{zun} + \Delta p$, $\Delta p = 4$ bar, $p_{zun} = p_0 + \rho_{voda}gh = 2$ bar; torej ima potapljač na voljo $m = m_{plin} - p_{not}V_{not}M/RT$ kilogramov plina. S to količino lahko diha $t = m/\Phi_V\rho$ časa, če je ρ gostota plina, ki ga diha pri tlaku p_{zun} , $\rho = (p_{zun}/p_{not}) \cdot (m_{plin}/V_{not})$. Dobimo $t = 60$ min.
3. Celotni toplotni tok, ki ga oddaja akvarij okolici, je vsota toka, ki ga oddaja del akvarija z grelcem, in toka drugega dela brez grelca: $P = 4S\lambda(T_1 - T_0)/d + 4S\lambda(T_2 - T_0)/d$, če je S površina ene stene (stranske ali zgornje), T_0 zunanja temperatura, T_2 temperatura vode v drugem delu in d debelina stene. Ker je celotni oddani tok enak moči grelca, lahko izračunamo temperaturo toplejšega dela: $T_1 = Pd/(4S\lambda) + 2T_0 - T_2 = 26,8^\circ\text{C}$. Toplotni tok, ki teče iz prvega dela v drugi del, je enak toku, ki ga drugi del oddaja okolici: $(T_1 - T_2)S\lambda/x = 4(T_2 - T_0)S\lambda/d$. Od tod dobimo debelino vmesne stene: $x = (T_1 - T_2)d/4(T_2 - T_0) = 1$ cm.

4. Vse hitrosti merimo glede na led. Ker se ohrani gibalna količina sistema dečka in klad, velja $m(v_1 + v_2) = (M + 2m)v_0$, če sta v_1 in v_2 hitrosti klad, merjenih glede na led, v_0 začetna hitrost sani, m masa ene klade in M masa dečka s sanmi. Razlika kinetičnih energij je enaka delu, ki ga opravi deček: $A = m(v_1^2 + v_2^2)/2 - (M + 2m)v_0^2/2$. Iz prve enačbe izrazimo v_2 in dobimo kvadratno odvisnost dela od hitrosti v_1 . Izraz je najmanjši pri $v_1 = (M/m + 2)v_0/2 = v_2 = 3$ m/s. Hitrost sani med metoma dobimo iz ohranitve gibalne količine pri prvem lučaju: $Mv_0 = (M - m)v_s + mv_1$, $v_s = 0,6$ m/s. Hitrost prve klade glede na dečka je torej $v'_1 = v_1 - v_s = 2,4$ m/s, hitrost druge pa kar $v_2 = 3$ m/s, saj sani po drugem metu obmirujejo.

Skupina C

1. Izvir opravi delo $A = U\Delta e = U^2C$; ker gre polovica v energijo kondenzatorja, gre polovica v notranjo energijo upornika. Toplotna kapaciteta upornika je potem $C_p = \frac{1}{2}U^2C/\Delta T_1$. Ko med plošči potisnemo dielektrik, se kapaciteta poveča na $\frac{1}{2}(\frac{1+\epsilon}{2})C$. Energijsko bilanco na uporniku zapišemo $\frac{1}{2}(\frac{1+\epsilon}{2})CU^2 = C_p\Delta T_2$. Dobimo $\epsilon = 1 + 2\Delta T_2/\Delta T_1 = 5$.
2. Navor teže $M_g = mgR \sin \alpha$ (α je naklon klanca) je uravnovešen z navorom zaradi električne sile $M_E = 2F_e r \sin \vartheta = e\sigma r \sin \vartheta / \epsilon_0$, pri čemer je ϑ kot med pravokotnico na klanec in zveznico med nabitima palicama. (Za os izberemo dotikališče valja s klancem.) Torej $\sin \vartheta = (mgR\epsilon_0/e\sigma r) \sin \alpha$, $\vartheta = 67,3^\circ$ (stabilna rešitev) in $\vartheta = 112,7^\circ$ (nestabilna rešitev). Stabilnost pokažemo z energijsko bilanco pri majhnem premiku iz ravnovesne lege ali pa s premislekom o velikosti električnih navorov pri majhnem premiku iz ravnovesne lege.
4. Na žico delujeta magnetna sila IB in vzgon $2S\rho_{Hg}gz$, če je S presek žice, l dolžina njenega vodoravnega dela in z njen del, ki je potopljen v živo srebro. Tok, ki teče po žici, je enak $I = U/(R_n + (l + 2h)\xi/S) = 0,625$ A. Delo sil, $A = IBh + 2S\rho_{Hg}g\frac{1}{2}h^2$, je enako spremembi potencialne energije žice, $mg\Delta h$. Od tod dobimo višino, do katere se dvigne žica, $\Delta h = 21,6$ cm.

Skupina D

1. Ker se žarki β in žarki γ (32 keV) praktično vsi absorbirajo v svincu, pri računu upoštevamo le žarke γ (662 keV). Absorpcijo teh žarkov v zraku lahko zanemarimo. Število sunkov, ki jih zazna detektor v časovni enoti, je

$$\frac{N}{t} = 0,85 \frac{AS\eta}{4\pi r^2} e^{-(d \ln 2)/d_{1/2}} + N_{\text{ozadje}},$$

če je A aktivnost števca, η njegov izkoristek, r razdalja do izvira, S presek števca, $d_{1/2}$ razpolovna debelina in d dolžina poti v svincu. Večje število sunkov dobimo pri najmanjši možni poti, $d_{\min} = r$, manjše število pa pri največji, $d_{\max} = \sqrt{r^2 + (\frac{1}{2}h)^2}$, če je r polmer in h višina valjastega detektorja. Iz dveh enačb izločimo N_{ozadje} in dobimo $A = 3 \cdot 10^5 \text{ s}^{-1}$.

2. a) Na gred delujeta sili dveh vzmeti $F = 2kx$. Za frekvenco nihanja torej velja $\omega^2 = 2k/m = 20 \text{ s}^{-2}$, $\nu = 0,71 \text{ s}^{-1}$.

b) Gred sučno niha okoli osi skozi težišče. Navor vzmeti, ki delujeta na gred, je enak $M = 2 \frac{1}{2} l kx$, $x = \frac{1}{2} l \varphi$, če je φ kot zasuka. Dobimo:

$$\omega^2 = \frac{D}{J}, \quad D = M/\varphi = \frac{1}{2} l^2 k, \quad J = \frac{1}{12} m l^2, \\ \omega^2 = \frac{6k}{m}, \quad \nu = 1,23 \text{ s}^{-1}.$$

c) Podobno kot pri b) le da upoštevamo drugačno ročico in vztrajnostni moment.

3. Toplotna moč, ki jo dovajamo stroju s toplejše plošče, je $P_{\text{do}} = (j - \sigma T_1^4)S$, če je j gostota toka s sonca, T_1 temperatura in S površina plošče; oddana pa $P_{\text{od}} = \sigma T_2^4 S = 56,7 \text{ W}$, če je T_2 temperatura hladnejše plošče. Za Carnotov stroj velja $P_{\text{do}}/P_{\text{od}} = T_1/T_2$, torej $P_{\text{do}} = 114 \text{ W}$ in $j = P_{\text{do}}/S + \sigma(T_2 P_{\text{do}}/P_{\text{od}})^4 = 103 \text{ W/m}^2$.
4. Rešitev naloge si lahko bralec ogleda v Zborniku 16. mednarodne fizikalne olimpiade (DMFA Slovenije, Ljubljana 1985).

Bojan Golli

NOVE KNJIGE

BERILO H KRATKI ZGODOVINI ČASA STEPHENA HAWKINGA, uredil Stephen Hawking, pripravil Gene Stone, prevedel Janez Strnad, Društvo matematikov, fizikov in astronomov, Knjižnica Sigma 52, Ljubljana 1993, 148 str.

Uspešnico *Kratka zgodovina časa* Stephena Hawkinga so po vsem svetu natisnili v več kot pet in pol milijona izvodih. Več ljudi doseže le še televizija. Zato je Errol Morris za televizijsko družbo Anglia ob Hawkingovi knjigi pripravil devetdesetminutni film, ki ga je odkupila tudi TVS. Zbrali so veliko več gradiva, ki so ga uporabili za *Berilo*. V njem pripovedujejo Stephen Hawking sam, njegovi mati, sestra in brat, sošolci iz osnovne šole in z univerze, sodelavci, raziskovalci, njegovi študenti, vsega 28 ljudi.

Besedilo so oblikovali v kratkih odstavkih, ki se med seboj prepletajo in so vsebinsko povezani. Prvo poglavje zajema Stephenovo otroštvo, drugo študij do diplome v Oxfordu, tretje delo na doktoratu v Cambridgeu in prve raziskovalne uspehe, četrto in peto nadaljnja raziskovanja in tudi Stephenovo bolezen. Huda bolezen je namreč Hawkinga privezala na invalidski voziček. Z ljudmi se lahko pogovarja samo preko računalnika, ki je priključen na sintetizator govora. Bolezen pa ni prizadela njegovih umskih zmožnosti, zdi se celo, da jih je izostrila.

Tretje, četrto in peto poglavje pripovedujejo o Hawkingovem delu o začetku Vesolja, o črnih luknjah, o smeri časa v Vesolju. Vesolje naj bi se začelo z velikom pokom, eksplozijo v točki. Črne luknje niso popolnoma črne in zaradi kvantnomehaničnih pojavov sevajo, tem izdatneje, čim manjšo maso imajo. Medtem ko je Hawking spočetka zagovarjal nastanek Vesolja z velikim pokom, zadnje čase postavlja v ospredje manj pretresljiv začetek v "Vesolju brez roba".

Besedilo je nastalo po pogovorih, zato beseda teče živo in neprisiljeno. Raziskovalci, ki so sodelovali pri razvoju današnje fizike in astrofizike, posebno kozmologije, sproščeno pripovedujejo o svojem delu. Kljub temu, da bralec ne pozna podrobnosti, zve precej o današnji astrofiziki in več o tem, kako delajo in živijo fiziki, astrofiziki in astronomi. Stephen Hawking je s pripombami povezal dele besedila in dodal kratek slovarček strokovnih izrazov. V knjigi je veliko fotografij iz Hawkingovega življenja in fotografij sodelujočih, nekaj slik pa spremlja besedilo tudi s fizikalne strani. Knjigo je mogoče toplo priporočiti mladim bralcem, ki se zanimajo za fiziko, astronomijo, astrofiziko, kozmologijo.

Janez Strnad

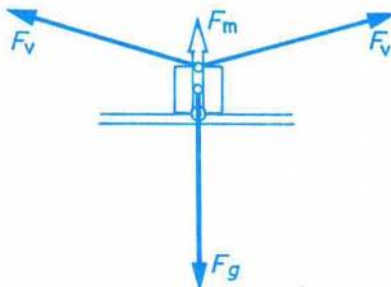
13. DRŽAVNO TEKMOVANJE IZ FIZIKE ZA OSNOVNOŠOLCE – Rešitve s str. 139

7. razred

1. a) Ker sta višini gladin v posamezni U cevki enaki, je tlak v mehurčku enak zunanjemu zračnemu tlaku, $p = 100 \text{ kPa}$.
 b) V levi U cevki se zaradi povečanega tlaka gladini razmakneta za recimo $2x$. Ker ostane prostornina zračnega mehurčka pri tako malo povečanem tlaku nespremenjena, potisne mehurček gladino v cevi C za x navzdol. Gladina v cevi D se za x premakne navzgor. Višinski razliki sta v obeh U cevkah enaki. Za desno U cev velja $p_{\text{meh}} = \sigma 2x$, za levo pa $\Delta p - p_{\text{meh}} = \sigma 2x$, od koder sledi $\Delta p = \sigma 4x$ in $x = 1,0 \text{ kPa} / 4 \cdot 10 \text{ N/dm}^3 = 1/4 \text{ dm}$. Sledi $h_A = 7,5 \text{ cm}$, $h_B = 12,5 \text{ cm}$, $h_C = 17,5 \text{ cm}$, $h_D = 22,5 \text{ cm}$.

c) $p_{\text{meh}} = \sigma \cdot 2x = 0,5 \text{ kPa}$ in skupen tlak $p_{\text{meh}} = 100,5 \text{ kPa}$.

2. a) Na srednjo klado delujejo sili v vrvicah, vsaka po 3 N , teža je prav tako 3 N in sila mize na klado. Slednjo silo izračunamo iz enačbe za ravnovesje. Ko sili v vrvicah grafično seštejemo, dobimo $1,6 \text{ N}$ navpično navzgor. Sila mize na klado je torej $3 \text{ N} - 1,6 \text{ N} = 1,4 \text{ N}$ navpično navzgor.



- b) Sili v vrvicah sta ves čas 3 N . Ker se klada mize več ne dotika, je sila mize enaka nič in ostane le še teža. Imamo torej tri enake sile, ki so v ravnovesju. Ko jih grafično seštejemo, dobimo enakostranični trikotnik. Kot med eno vrvico in navpičnico je 60° , med vrvico in mizo torej 30° .
3. Na sončni kolektor pade vsako sekundo 2000 J energije, za segrevanje vode porabimo 80% , torej 1600 J . Ker steče skozi kolektor 10 kg vode v 60 s , steče v eni sekundi skozenj $1/6 \text{ kg}$ vode. Iz enačbe $Q = mc\Delta T$ izračunamo najprej $\Delta T = Q/mc = 1600 \text{ J} / (1/6 \text{ kg}) \cdot 4200 \text{ J/kgK} = 2,3 \text{ K}$. Temperatura iztekajoče vode je $22,3^\circ \text{ C}$.

Eksperimentalni nalogi

4. Najprej obesimo prazno čašo na vzmet in izmerimo raztezek, nato meritev ponovimo z znano prostornino vode in končno z znano prostornino

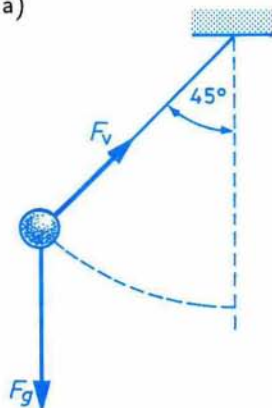
neznane kapljevine. Če je prostornina 80 ml, sta raztezka zaradi teže vode 3,8 cm in zaradi teže neznane kapljevine 3,1 cm. Razmerje raztezkov je enako razmerju tež, le to pa enako razmerju mas. Ker je prostornina enaka, je tudi razmerje gostot enako razmerju mas. Sledi $\rho_{\text{kap}} = (3,1 \text{ cm}/3,8 \text{ cm}) \cdot \rho_{\text{vode}} = 810 \text{ kg/m}^3$. Kapljevina je obarvani alkohol.

5. a) Bučka ima približno obliko valja. Prostornino izračunamo iz višine in premera, kar izmerimo s trikotnikom, pomagamo pa si z lupo. Za izbrani termometer smo izmerili $2r = 5 \text{ mm}$, $h = 10 \text{ mm}$, od koder sledi prostornina $V = r^2 \cdot h = 200 \text{ mm}^3 = 0,20 \text{ ml}$. Prostornino bučke lahko tudi izmerimo pri potapljanju bučke v merilni valj.

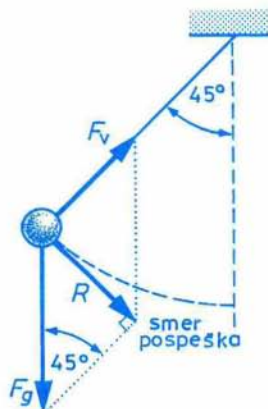
b) Če si izberemo temperaturno razliko 100°C , se enemu litru Hg spremeni prostornina za 18 ml, po sklepnem računu pa sledi, da se živemu srebru v bučki s prostornino 0,20 ml spremeni prostornina za 0,0036 ml. Pri temperaturni razliki 100°C se gladina Hg v kapilari premakne za 10,5 cm. Najprej izračunamo presek kapilar $S = \Delta V/h = 0,0036 \text{ cm}^3/10,5 \text{ cm} = 0,00034 \text{ cm}^2$. Iz preseka izračunamo polmer $r = \sqrt{S/\pi} = 0,013 \text{ cm}$ in premer $2r = 0,026 \text{ cm}$.

8. razred

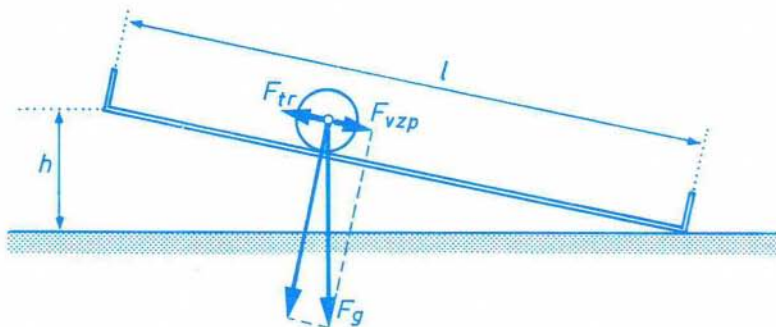
1. Kolesar je na začetku vozil s hitrostjo $40 \text{ km/h} = 11,1 \text{ m/s}$. Nato je 20 sekund pospeševal in hitrost se mu je povečala za $\Delta v = a \cdot t = 0,20 \text{ m/s}^2 \cdot 20 \text{ s} = 4 \text{ m/s}$. Torej je imel na cilju hitrost $15,1 \text{ m/s}$. Ker se mu je hitrost enakomerno večala s časom, lahko pot za zadnji krog izračunamo s srednjo hitrostjo $s = v_{sr} \cdot t = 13,1 \text{ m/s} \cdot 20 \text{ s} = 262 \text{ m}$. Polmer kroga je torej $r = 262 \text{ m}/2\pi = 42 \text{ m}$.
2. a)



b)



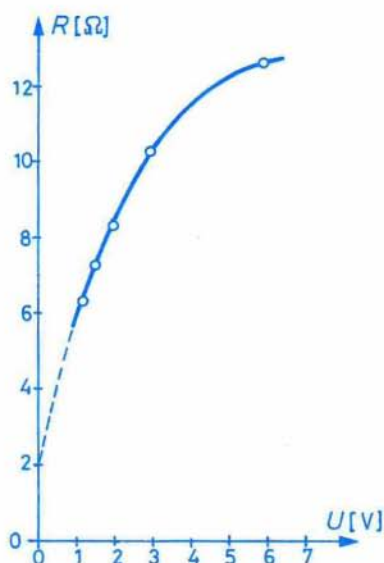
- c) Trikotnik sil na levi sliki je polovica kvadrata, zato velja $R \cdot \sqrt{2} = F_g$ in $R = F_g / \sqrt{2} = mg / \sqrt{2}$. Pospešek je torej $a = R/m = g / \sqrt{2} = 7,1 \text{ m/s}^2$.
3. Da ugotovimo, ali so uporniki povezani zaporedno ali vzporedno, izračunamo najprej posamezne tokove in napetosti iz enačb $I^2 = P/R$ in $U = RI$: $I_1 = 10 \text{ mA}$, $U_1 = 10 \text{ V}$, $I_2 = 2 \text{ mA}$, $U_2 = 10 \text{ V}$, $I_3 = 10 \text{ mA}$, $U_3 = 5 \text{ V}$, $I_4 = 8 \text{ mA}$, $U_4 = 10 \text{ V}$. Ker teče skozi R_1 in R_3 enak tok, sta R_1 in R_3 povezana zaporedno. Ker je na R_2 in R_4 enaka napetost in ker je vsota tokov 10 mA , sta R_2 in R_4 povezana vzporedno, oba pa zaporedno k upornikoma R_1 in R_3 . Skupna napetost je 25 V .
4. a) in b) Izmerjeni čas gibanja kroglice po klancu je približno $3,2 \text{ s}$, dolžina klanca pa je 74 cm . Kroglica se giblje enakomerno pospešeno in pospešek je $a = 2s/t^2 = 14 \text{ cm/s}^2$. Hitrost na dnu klanca je $v = at = 45 \text{ cm/s}$.
- c) Rezultanto vseh sil izračunamo iz Newtonovega zakona $F = ma = 0,8 \text{ mN}$.
- d) Kroglica se giblje približno enakomerno, ko žleb na eni strani podložimo za okrog 3 mm . Pri enakomernem gibanju je vsota vseh zunanjih sil enaka nič, zato mora biti sila trenja nasprotno enaka komponenti teže, ki je vzporedna s klancem $F_{tr} = F_{vzp}$. Vzporedno komponento izračunamo iz podobnih trikotnikov $F_{vzp}/F_g = h/l$ in $F_{vzp} = F_g \cdot h/l = 55 \text{ mN} \cdot 3 \text{ mm}/740 \text{ mm} = 0,2 \text{ mN}$.



5. Na izvir priključimo pet zaporedno vezanih žarnic in izmerimo tok skozi nje (okrog 190 mA). V tem primeru je bila napetost na žarnici $6 \text{ V}/5 = 1,2 \text{ V}$, upor žarnice pa $1,2 \text{ V}/0,19 \text{ A} = 6,3 \Omega$. Postopek ponovimo za štiri zaporedno vezane žarnice, tri žarnice itd.

b) Pri višji napetosti ima žarnica višjo temperaturo in zato tudi večji upor.

c) Žarnica ima sobno temperaturo, ko je na njej zelo majhna napetost ali napetost nič. Če krivuljo v diagramu podaljšamo, vidimo, da je upor žarnice pri napetosti nič približno $2\ \Omega$.



Mirko Cvahte, Zlatko Bradač

KRIŽANKA AVTORJI UČBENIKOV IN VAJ ZA OSNOVNO ŠOLO – Rešitev s str. 160

[illegible]

15. MEDNARODNO MATEMATIČNO TEKMOVANJE MEST – JESENSKI KROG

V prvem delu jesenskega kroga 15. tekmovanja mest, ki je bil 26. oktobra lani, je tekmovalo 32 srednješolcev. Dijaki prvih in drugih letnikov so tekmovali v prvi skupini, ostali pa v drugi skupini. Reševali so naslednje naloge:

Prva skupina

1. Na vsako stranico šestkotnika napišemo neko število in na vsako oglišče napišemo vsoto števil na sosednjih stranicah. Nato zberemo števila na vseh stranicah in na enem oglišču. Ali lahko določimo število, ki je bilo na tem oglišču?
2. Povežimo oglišča trikotnika ABC s točkami A', B', C' na nasprotnih stranicah. Ali lahko razpolovišča daljic AA', BB' in CC' ležijo na isti premici?
3. Vzemimo naravno število a in mu prištejmo neki njegov delitelj d ($1 < d < a$). Postopek lahko ponovimo z novim številom $a + d$ in nekim njegovim deliteljem.
Dokaži, da lahko pri začetnem številu $a = 4$ z večkratnim ponavljanjem postopka dobimo katerokoli sestavljeno število.
4. Vsak od treh igralcev A, B, C odigra enako število iger z vsakim drugim igralcem. Ali je možno, da igralec A dobi več točk kot ostala dva, igralec C manj točk kot ostala dva, pri čemer pa je igralec A dosegel manjše število zmag kot ostala dva, igralec C pa večje število zmag kot ostala dva?
(Zmaga prinese eno točko, remi pa pol točke.)

Druga skupina

1. Ugotovi, ali je množica celoštevilskih rešitev enačbe $x^2 + y^3 = z^2$ končna ali neskončna.
2. Izberimo točki M in N na hipotenuzi AB pravokotnega trikotnika ABC , da je $\overline{BC} = \overline{BM}$ in $\overline{AC} = \overline{AN}$. Dokaži, da je $\angle MCN = 45^\circ$.
3. Števila od 1 do 25 razporedimo v tabelo 5×5 tako, da v vsaki vrsti tvorijo naraščajoče zaporedje. Poišči največjo in najmanjšo možno vsoto števil v tretjem stolpcu.
4. Na vsako mejno ploskev kocke napišemo neko naravno število. Kolikšna je najmanjša možna vsota teh števil, če naj se števili na poljubnih sosednjih ploskvah razlikujeta vsaj za 2?

Naloge v drugem delu tekmovanja, ki je bil 29. oktobra lani, so bile težje od nalog prvega dela, zato objavljamo le po dve nalogi za vsako skupino.

Prva skupina

- Poljubnih 10 celih števil napišemo v vrsto. Naslednjo vrsto 10-ih števil tvorimo takole: število, ki ga napišemo pod številom a prejšnje vrste, je enako številu števil v prejšnji vrsti, ki ležijo desno od števila a in so večja od a . Postopek ponavljamo.
 - Dokaži, da se po nekaj korakih pojavi vrsta iz samih ničel.
 - Koliko je največ vrst, v katerih je vsaj eno število neničelno?
- Trije notranji koti nekonveksnega štirikotnika (brez samopresečišč) so enaki 45^0 (in je zato četrti kot enak 225^0). Dokaži, da so razpolovišča stranic oglišča nekega kvadrata.

Druga skupina

- V vrsto zapišemo eno poleg drugega vsa naravna števila od 1 do n :

$$123 \dots 91011 \dots 99100 \dots (n).$$

Ali obstaja naravno število n , da se v tem številu pojavijo vse števke 0, 1, ..., 9 enako mnogokrat?

- Naj ima enačba $x^4 + ax^3 + 2x^2 + bx + 1 = 0$ realno rešitev. Dokaži, da je $a^2 + b^2 \geq 8$.

Najuspešnejši dijaki v jesenskem krogu tekmovanja mest so bili Petra IPAVEC in Blaž MAVČIČ (oba Gimnazija Bežigrad), Tadej NOVAK (SŠRNM Kamnik), Gregor VIDMAR (SŠJJ Ivančna Gorica) in Andrej ZORKO (Gimnazija Brežice).

Matjaž Željko

KOLIKO NIČEL?

Sestavi računalniški program, ki bo prebral naravno število n in izračunal, s koliko ničlami se v desetiškem zapisu konča število $n! = 1 \cdot 2 \cdot \dots \cdot (n-1) \cdot n$. Program naj izračuna pravilen rezultat tudi za velike n -je. Na primer število $1994!$ se v desetiškem zapisu konča s 495 ničlami. *Namig:* da ugotoviš, s koliko ničlami se konča število $n!$, tega števila ni potrebno izračunati.

Martin Juvan

RAZLIKA ŠTIRIH MINUT

Samo tri zaporedne sončne dni in vmes dve jasni noči (po možnosti brez mesečine) moramo izbrati, da z malo napora in zavzetosti izmerimo razliko štirih minut med Sončevim in zvezdnim dnevom. Meritve opravimo na prostem na vodoravnih tleh (dvorišču, igrišču, travniku). Potrebujemo ravno palico (kol), vrvico, štiri daljše ravne letve, kladivo, količke, žebelje in uro, ki ne sme prehitevati ali zaostajati za več kot četrte minute na dan.

Najprej določimo poldnevnicco. Prvi sončni dan v vodoravna tla navpično zabijemo ravno palico. Ta meče senco na tla. Kako uro pred pravim poldnevom*, ko je Sonce najvišje na nebu, z vrvico zarišemo na tleh krožnico s središčem v podnožju D palice (slika 1 na III. strani ovitka). Polmer krožnice naj bo nekoliko krajši od trenutne dolžine sence palice. Senca se krajša. Krožnice se dotakne v točki A . Senca se še krajša. Ob pravem poldnevu je najkrajša. Nato se daljša in se ponovno dotakne krožnice v točki B . Dolžino tetive $|AB|$ razpolovimo. Premica skozi podnožje D in razpolovišče R tetive leži v smeri sever - jug. To premico imenujemo poldnevnicco. Močneje jo izrišemo. Tako je vse pripravljeno za dnevne meritve.

Navpični ravnini skozi poldnevnicco rečemo ravnina krajevnega poldnevnička (meridiana) ali kar poldnevniška ravnina. Ko pride Sonce (natančneje njegovo središče) pri navideznem dnevnem gibanju od vzhoda proti zahodu v poldnevniško ravnino, pade senca navpične palice na poldnevnicco in kaže proti severu.

Iz letvic izdelamo dve reži, široki okoli 1,5 cm. Primerno razmaknjeni ju postavimo navpično v poldnevniško ravnino tako, da gre poldnevnicca natanko skozi obe reži (slika 2 na III. strani ovitka). S tem smo vse pripravili za nočne meritve.

Dnevne meritve

Drugi sončni dan zabeležimo čas t_1 , ko pade senca navpične palice na poldnevnicco. Tretji sončni dan zabeležimo čas t_2 , ko senca spet pade v poldnevniško smer.

Izračunamo časovni interval $t = t_2 - t_1$.

* Pravo poldne se razlikuje od poldneva, ki ga kaže naša (točna) ura. Razlika lahko naraste do ± 16 minut. Čas, ki ga kaže naša ura, velja za poldnevnik zemljepisne dolžine 15°E . Za druge kraje v Sloveniji se lahko razlikuje za največ ± 6 minut. V poletnem času (od konca marca do konca septembra) k temu dodamo še eno uro. Pravo poldne je tedaj okoli 13. ure.

Ta časovni interval poznamo. Meri 24 ur. Ker naše meritve niso popolnoma natančne, izmerimo časovni interval blizu 24 ur. Na ta način ugotovimo *dolžino Sončevega dne*, to je čas, ki je pretekel med dvema zaporednima prehodoma Sonca čez poldnevniško ravnino ali med dvema zaporednima padcema sence navpične palice v poldnevniško smer.

Nočne meritve

Prvi dan pozno zvečer, ko je že zadosti temno, se udobno namestimo v poldnevniško ravnino tako, da sta obe reži (ki sta lahko različno visoki, nam bližja je nižja, oddaljenejša pa višja) v primerni razdalji od nas v južni smeri. Na južni strani neba, navidezno zelo blizu reži (malo levo od njiju), si izberemo svetlo zvezdo (in si jo dobro zapomnimo, ker jo bomo uporabili naslednjo jasno noč), za katero smo ocenili, da bo zaradi svojega navideznega dnevnega gibanja prečkala obe reži. Umirimo se, sprostimo in uživamo. Spremljamo zvezdo in opazujemo, kako se navidezno vse bolj približuje režema. Glave ne premikamo. Opazujemo le z enim očesom skozi obe reži. Ko opazimo, da "smukne" zvezda v reži (v prej temnih režah se zasvetlika zaradi prehoda zvezde za njima), ko torej pride v poldnevniško ravnino, zabeležimo čas τ_1 . Za to noč je delo opravljeno. Drugo noč zabeležimo čas τ_2 , ko jo spet zagledamo istočasno skozi reži.

Izračunamo časovni interval $\tau = \tau_2 - \tau_1$.

Ta interval meri manj kot 24 ur. Tako ugotovimo, koliko časa je preteklo med dvema zaporednima enakima prehodoma iste zvezde čez poldnevniško ravnino ali v našem primeru med dvema zaporednima prehodoma iste zvezde istočasno čez obe reži. Ta časovni interval imenujemo *zvezdni dan*.

Izračunamo razliko med trajanjem obeh dnevo $t - \tau$.

In kolikšna je ta razlika? **Štiri minute.** Če dobimo približno ta rezultat, smo dobro merili.

Meritve naj opravljata dva, tako da eden opazuje, drugi zapisuje. Lahko jih izvedemo tudi skupinsko.

Marijan Prosén

KAJ SE ZGODI Z GLADINO VODE? - Rešitev s str. 129

Dokler je skala v čolnu, ki plava na vodi, izpodriva po Arhimedovem zakonu o vzgonu tolikšno količino vode, da je njena teža enaka teži skale. Ker je gostota skale večja od gostote vode, je prostornina izpodrinjene vode večja od prostornine skale.

REŠITVE NALOG

Ko pa leži skala na dnu bazena, lahko seveda izpodriva le toliko vode, kot je njena prostornina. Torej je potem, ko vržemo skalo s čolna v bazen, izpodrinjeno manj vode, kar pomeni, da se gladina vode zniža.

Vsem tistim, ki ste morda napak sklepali, naj v tolažbo povem, da so na ta, danes že kar slavni problem, prvi hip - v svojo veliko zadrego - napačno odgovorili celo tako odlični fiziki, kot so George Gamow, Robert Oppenheimer in Felix Bloch.

Za nameček pa še tole vprašanje: Denimo, da smo čoln navrtali in da tone. Zakaj ostane gladina vode v bazenu na isti višini vse do trenutka, ko voda čoln popolnoma zalije, tisti hip pa se zniža?

Matjaž Vencelj

ZAPOREDJE - Rešitev s str. 147

Ker je $0 \leq a_0 \leq 1$, zlahka najdemo tak α_0 , da je $a_0 = |\sin \alpha_0|$. Potem iz rekurzijske formule takoj preberemo, da je $a_n = |\sin 2^n \alpha_0|$ za $n \in \mathbb{N} \cup \{0\}$. Po drugi strani pa iz Moivre-ovega obrazca $\cos n\varphi + i \sin n\varphi = (\cos \varphi + i \sin \varphi)^n$ sledi:

$$\sin n\varphi = \binom{n}{1} \cos^{n-1} \varphi \sin \varphi - \binom{n}{3} \cos^{n-3} \varphi \sin^3 \varphi + \dots$$

Slednjo enakost za sode $n = 2k$ zapišemo drugače:

$$\begin{aligned} \sin n\varphi &= \frac{2 \sin \varphi \cos \varphi}{2} \left(\binom{n}{1} \cos^{n-2} \varphi - \binom{n}{3} \cos^{n-4} \varphi \sin^2 \varphi + \dots \right) = \\ &= \frac{\sin 2\varphi}{2} \left(\binom{n}{1} (1 - \sin^2 \varphi)^{k-1} - \binom{n}{3} \sin^2 \varphi (1 - \sin^2 \varphi)^{k-2} + \dots \right) = \\ &= \frac{\sin 2\varphi}{2} p_n(\sin^2 \varphi), \end{aligned}$$

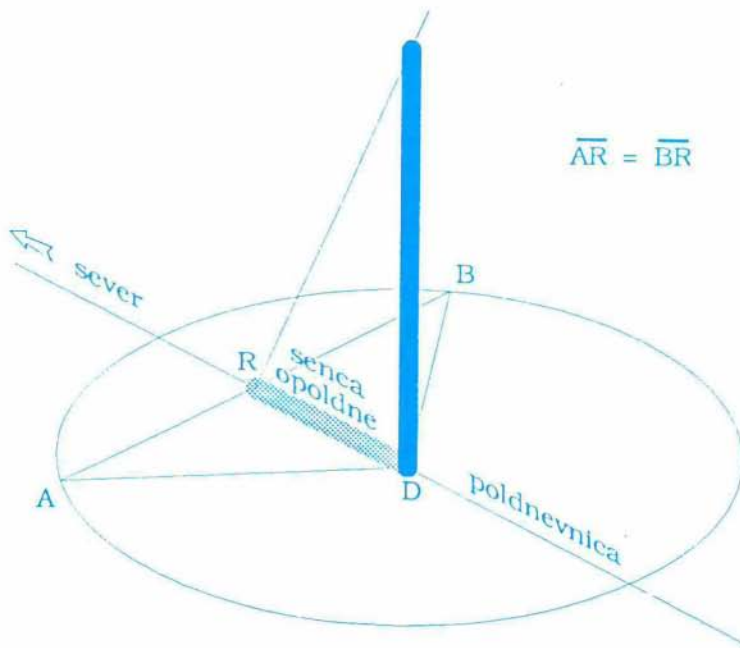
kjer je p_n polinom n -te stopnje s celoštevilskimi koeficienti.

Sedaj smo pripravljeni na nalogo. Za vsak naraven n , ki je večji od 1, velja

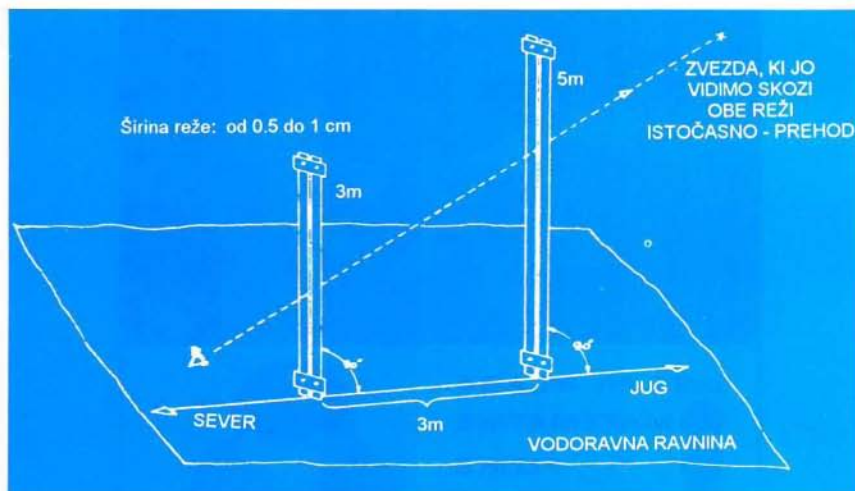
$$a_n = |\sin 2^n \alpha_0| = \left| \frac{\sin 2\alpha_0}{2} p_{2^n}(\sin^2 \alpha_0) \right| = \frac{|\sin 2\alpha_0|}{2} |p_{2^n}(|\sin \alpha_0|^2)|.$$

Izraz na desni je racionalen, če je $a_1 = |\sin 2\alpha_0|$ racionalen, oziroma iracionalen, če je a_1 iracionalen (po predpostavki naloge je $a_0 = |\sin \alpha_0|$ racionalen). Tako smo dokazali, da so vsi $a_n (n \in \mathbb{N})$ hkrati z a_1 racionalni oziroma iracionalni.

Bojan Gornik



Slika 1. Določanje poldnevnice z navpično palico. A je točka, kjer se konec sence palice dotakne krožnice dopoldne, B točka, kjer se konec sence palice dotakne krožnice popoldne, $|DR|$ dolžina sence palice ob pravem poldnevu, ko je najkrajša in kaže proti severu.



Slika 2. Takole postavimo obe reži v poldnevniško ravnino.

NOVE KNJIGE

TEKMUJMO ZA VEGOVA PRIZNANJA, DMFA Slovenije, Ljubljana 1994, 120 str. (Presekova knjižnica; 36)

Po daljšem času smo zopet doživeli izid nove knjižice iz zbirke Presekova knjižnica. Gre za zbirko rešenih nalog za učence šestih, sedmih in osmih razredov osnovne šole od 1983. do 1991. leta. Zbirka rešenih nalog *Tekmujmo za Vegova priznanja* ni prva te vrste. V Presekovi knjižnici so doslej z istim naslovom izšle že tri zbirke nalog, vsaka za svoj razred, ki so vsebovale tekmovalne naloge do leta 1982. Tokrat so v eni knjižici zbrane naloge za tri razrede, zato jo bodo lahko učenci uporabljali skozi vse višje razrede osnovne šole.

Zbirka bo gotovo koristen pripomoček učencem, ki se pripravljajo na tekmovanja, pa tudi njihovim mentorjem. Želimo pa, da bi bila zanimiva tudi drugim učencem.

Naloge je pripravila delovna skupina Komisije za popularizacijo matematike v osnovni šoli, za objavo pa sta jih uredila Pavle Zajc in Aleksander Potočnik.

Sandi Klavžar

