

ISSN 0351-6652

DRUŠTVO MATEMATIKOV, FIZIKOV IN ASTRONOMOV SLOVENIJE, 21(1993-94)

PRESEK

2

PRESEK - list za mlade matematike, fizike, astronome in računalnikarje
21. letnik, leto 1993/94, številka 2, strani 65-128

VSEBINA

MATEMATIKA	Escherjevo iskanje neskončnosti (Milena Strnad).....	66-74
	Eulerjeva funkcija φ (Bogdan Kejžar).....	82-85
	Fermatova števila (Roman Drnovšek).....	92-95
	Volilna števila (Bojan Hvala).....	98-105
	Spodnja meja števila potrebnih semen (France Avsec)...	122-124
FIZIKA	Novo dirkalno kolo (Janez Strnad).....	76-78
ASTRONOMIJA	Kako ugotovimo vidno polje in zmogljivost daljnogleda (Marian Prosén).....	86-88
	Koledar (Dušan Modic).....	108-110
RAČUNALNIŠTVO	O Evklidovem algoritmu (Martin Juvan).....	116-121
TEKMOVANJA	13. področno tekmovanje iz fizike za osnovnošolce (Zlatko Bradač, Mirko Cvahte).....	78-80
	Izbirno tekmovanje iz matematike (Matjaž Željko).....	110-111
	Naloge za ogrevanje (Aleksander Potočnik).....	112-114
NALOGE	Račun z znaki (Martin Juvan).....	65
	Staroegiptovska aritmetika (Anton Cedilnik).....	75
	Števke, številke, števila (Marija Vencelj).....	75
	Kako prečkati reko? (Neža Mramor-Kosta).....	85
	Skoraj magični krogi (Marija Vencelj).....	85
	Naloge za mlajše bralce (Borut Zalar).....	88
	Brez presečišč (Igor Gajser).....	90
	Sam (Neža Mramor-Kosta).....	114
	Naloge iz programiranja - pascal in logo (Martin Juvan) .	125-126
	Plavajoča prizma (Matjaž Vencelj).....	126
RAZVEDRILO	Popravek številske križanke (Darjo Felda).....	75
	'Dokaz' Fermatovega izreka, ki bi šel na rob knjige (Marija Vencelj).....	90
	Križanka Avtorji srednješolskih učbenikov (Marko Bokalič).....	96-97
	Relativnost hitrosti (Matjaž Vencelj).....	115
	Fizika v umetnosti (Izbral Andrej Likar).....	125
REŠITVE NALOG	Babilonski približek za $\sqrt{2}$ - s str. 40 (Vilko Domajnko).....	81
	Koliko trikotnikov - s str. 64 (Ivan Vidav).....	88-89
	Naloge za mlajše bralce - s str. 59 (Borut Zalar).....	91
	Raziskovalci v puščavi - s str. 7 (Neža Mramor - Kosta)	95
	Kvadrat pod krogi - s str. 59 (Boris Lavrič).....	105-106
	Kvadrat in kub - s str. 15 (Boris Lavrič).....	106-107
	Križanka Matematični pojmi - s str. 32 (Marko Bokalič)....	115
NOVE KNJIGE	Klavžar S. in Vesel A., Windows 3.1, podkrepljen z DOS 6.0 (Matija Lokar).....	81
	Breuer H., Atlas klasične in moderne fizike, prevod in priredba J. Strnad (Marija Vencelj).....	127-III
NA OVITKU	M.C.Escher: Slika na satenu. Glej članek Escherjevo iskanje neskončnosti na strani 66.....	I
	Boardman na svojem kolesu med vožnjo. Glej članek Novo dirkalno kolo na strani 76.....	IV

RAČUN Z ZNAKI

$$\begin{array}{ccccccc}
 \bigcirc & \clubsuit & \nabla & - & \diamond & \otimes & - & \otimes & \diamond & = & \diamond & \heartsuit & \otimes \\
 + & & & & + & & & + & & & - & & \\
 \spadesuit & \otimes & \cdot & & \bigcirc & \heartsuit & : & \spadesuit & \heartsuit & = & \triangle & \heartsuit & \diamond \\
 + & & & & - & & & + & & & + & & \\
 \hline
 \bigcirc & + & \triangle & \odot & \odot & + & \triangle & \triangle & = & \triangle & \oplus & \odot \\
 \hline
 \bigcirc & \nabla & \bigcirc & - & \triangle & \bigcirc & - & \oplus & \bigcirc & = & \diamond & \oplus & \triangle
 \end{array}$$

V gornjem računu nadomesti vsak znak s svojo števk tako, da bo veljalo vseh osem enačb. Seveda se nobeno število ne začne s števk 0. Ali ima naloga več rešitev?

Martin Juvan

PRESEK

list za mlade matematike, fizike, astronome in računalničarje
21. letnik, šolsko leto 1993/94, številka 2, strani 65 – 128

UREDNIŠKI ODBOR: Vladimir Batagelj, Tanja Bečan (jezikovni pregled), Dušica Boben (oblikovanje teksta), Mirko Dobovišek (glavni urednik), Vilko Domajnko, Roman Drnovšek (novice), Darjo Felda (tekmovanja), Bojan Golli, Marjan Hribar, Boštjan Jaklič (tehnični urednik), Martin Juvan (računalništvo), Sandi Klavžar, Boris Lavrič, Andrej Likar (fizika), Matija Lokar, Franci Oblak, Peter Petek, Pavla Ranzinger (astronomija), Marjan Smerke (svetovalec za fotografijo), Miha Štalec, Jana Vrabec (nove knjige), Marija Vencelj (matematika, odgovorna urednica).

Dopisi in naročnine: Društvo matematikov, fizikov in astronomov Slovenije - Podružnica Ljubljana - Komisija za tisk, Presek, Jadranska c. 19, 61111 Ljubljana, p.p. 64, tel. (061) 265-061/53, št. ŽR 50101-678-47233. Naročnina za šolsko leto 1993/94 je za posamezne naročnike **900 SIT**, za skupinska naročila šol **720 SIT**, posamezna številka **180 SIT**, za tujino 15.000 LIT, devizna nakazila SKB banka d.d. Ljubljana, val-27621-42961/9, Ajdovščina 4, Ljubljana.

List sofinancirajo MZT, MŠŠ in MK
Ofset tisk DELO - Tiskarna, Ljubljana

Po mnenju MZT št. 415-52/92 z dne 5.2.1992 šteje revija med proizvode iz 13. točke tarifne št. 3 zakona o prometnem davku, za katere se plačuje 5% davek od prometa proizvodov.

© 1993 Društvo matematikov, fizikov in astronomov Slovenije – 1169

MATEMATIKA

ESCHERJEVO ISKANJE NESKONČNOSTI

Veliko matematikov občuduje dela nizozemskega slikarja Mauritsa Cornelisa Escherja. Na srečanje z njim smo se v Preseku dolgo pripravljali. Govorili smo o Moebiusovem traku, o ornamentih na traku in ravnini ter o tlakovanju ravnine.

Maurits Cornelis Escher je bil rojen leta 1898 v Leeuwardnu na Nizozemskem. V mladosti je največ slikal krajine, predvsem majhna italijanska in španska obmorska mesta. Te slike so polne topline, preprostosti in lepote. Na njih je igro svetlobe tako mojstrsko prikazal, da je bilo pričakovati njegov razvoj v odličnega krajinarja. Toda leta 1936 je obiskal čudovito mavrsko zapuščino iz 13. in 14. stoletja, Alhambro v Granadi. Njeni abstraktni geometrijski ornamenti so ga tako prevzeli, da je popolnoma prelomil z dotedanjim liričnim slikanjem. Odslej je zavzeto proučeval simetrijske vzorce in tlakovanja ravnine, v čemer je prepoznal enega od načinov, da likovno izrazi neskončnost. V tej smeri je ustvaril svoja občudovanja vredna dela. Prvo priznanje, za katero se ni posebno prizadeval, je dobil šele kakih deset let pred smrtjo leta 1972, v zadnjih desetletjih pa njegova slava narašča.

Escherjeva dela zaman iščemo po znanih svetovnih galerijah. Njegova umetnost živi predvsem v knjigah, v njegovih zbranih delih ter kot likovna oprema številnih matematičnih in fizikalnih knjig. Sam je rad poudarjal, da ima več skupnega z matematiki kot z drugimi slikarji, čeprav je vsa matematična spoznanja, od preprostih do zelo zahtevnih, kot so skladnost, podobnost, neskončnost in upodabljanje trirazsežnih predmetov na ravnini, uporabljal povsem intuitivno, ne da bi poznal njihov globlji matematični pomen. Sam je trdil, da v srednji šoli ni nikoli imel rad matematike in da sploh nikoli pri tem predmetu ni dobil dobre ocene. Dejal je celo: *Smešno je, da sem, tako se zdi, šaril po matematičnih teorijah, ne da bi vedel, kaj se dogaja. V domišljiji si me predstavljajte v družbi z vsemi temi učenimi ljudmi, kot da sem njihov dolgo izgubljeni brat. Zdi se mi, da se ne zavedajo dejstva, da sem zares neveden v matematiki.*

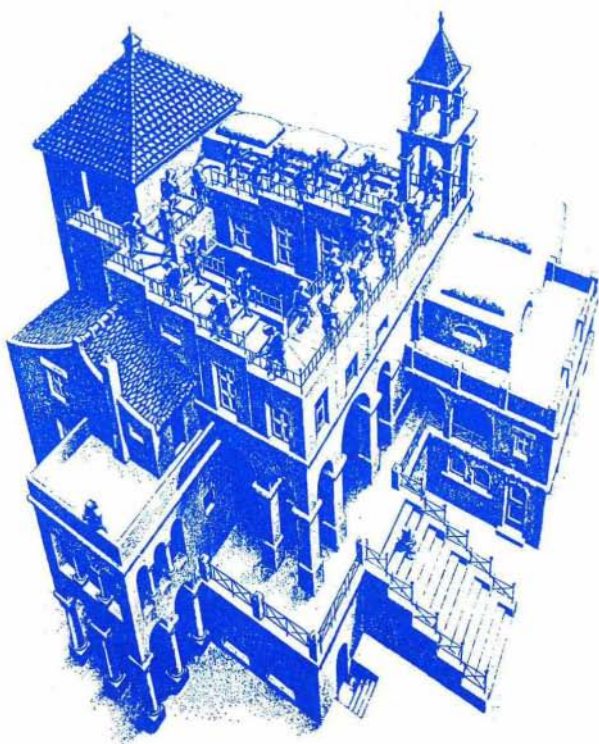
Tudi poznejši poskus Escherjevega prijatelja kanadskega matematika H.S.M.Coxetra, da bi ga naučil nekaj matematike, je bil zaman. Escher sploh ni sledil njegovim razlagam iz neevklidske geometrije.

Escherjeve slike, v katerih je skušal upodobiti neskončnost, lahko razvrstimo v tri skupine:

*neskončni sklenjeni trakovi,
tlakovanja ravnine,
limitni prehodi.*

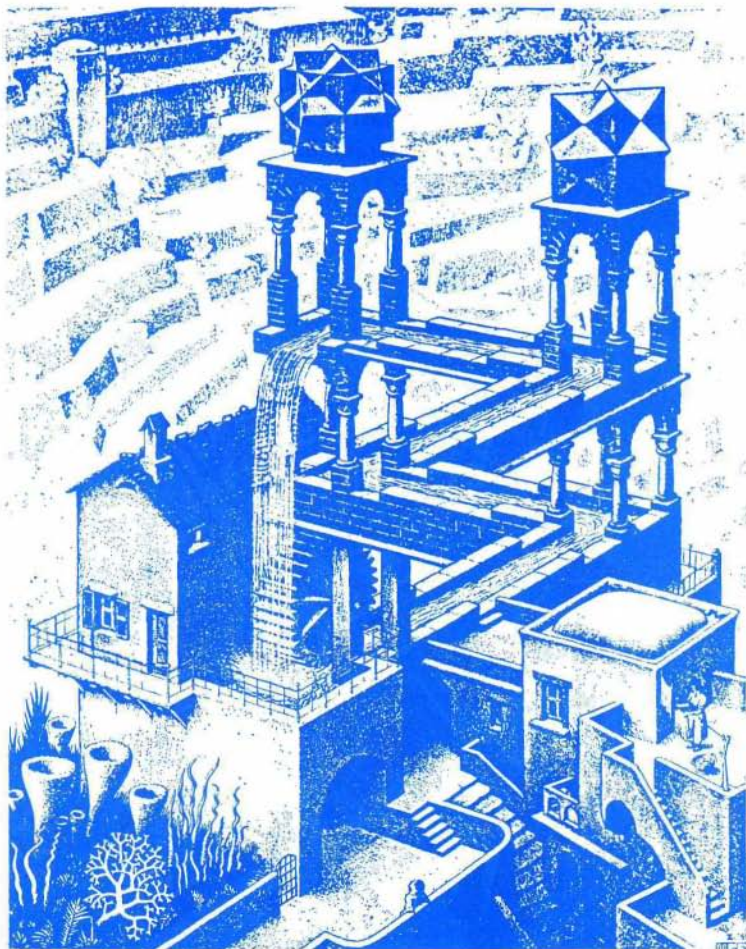
Z deli iz prve skupine smo se srečali pri *Moebiusovem traku* (Presek 16 (1988/89) str.321) in *Ornamentih na traku* (Presek 19 (1991/92) str.130). V njih nismo občudovali le simetrične razporeditve vzorcev in njihovega ponavljanja, temveč predvsem način, s katerim je Escherju uspelo ponazoriti neskončnost. Spomnimo se njegovih mravelj, pa čete konjenikov, ki se brez konca in kraja gibljejo po Moebiusovem traku.

Pri sklenjenih trakovih in še bolj v delih iz druge skupine - pri tlakovanju ravnine - izstopa Escherjeva posebnost. Za razliko od svojih davnih vzornikov za osnovni motiv ni uporabljal abstraktnih, stiliziranih vzorcev, ampak slike



Slika 1.

živih ali bajeslovnih bitij, kot so vojščaki, konjeniki, Pegazi, ptice, leteče ribe, hrošči... Poleg tega iz njegovih del veje pridih hudomušnosti, ki se tedaj, ko se ponorčuje iz zakonov narave, sprevrže v grotesknost. Tako sta znani njegovi sliki *Vzpenjanje in spuščanje*, na kateri se vojščaki neprestano vzpenjajo po stopnicah in pri tem znova in znova prihajajo v izhodiščni položaj (slika 1), in *Vodni mlin*, katerega kolo neprestano poganja varljivo speljani krožni tok vode (slika 2). Obe sliki tako vzbujata občutek nenehnega gibanja.



Slika 2.

Vendar s tlakovanji ravnine ali pravilnimi delitvami ravnine, kot jih je sam imenoval, Escher ni zadostil svojim iskateljskim hotenjem. Menil je, da z njimi ni uspel prikazati neskončnosti, ampak "le njen drobec, del plazilskega vesolja". Zato se je po letu 1955 lotil še tretjega načina ponazarjanja neskončnosti, *limitnih prehodov*. Ti temeljijo na posebni uporabi *podobnosti*. Ta zahteva zgolj to, da se ohrani oblika vzorca, ne pa njegova velikost.



Slika 3.



Slika 4.

V teh delih je dosegel vtis neskončnosti na dva načina. Najprej je pomanjševal vzorec iz središča risbe navzven, tako da je vzorec na robu slike *Krožne meje I* poniknil (slika 3). Še močnejši vtis neskončnosti pa je dosegel tako, da je pomanjševal vzorec z roba navznoter in je vzorec poniknil v središču slike *Vse manjše in manjše* (slika 4). Vzorce je pomanjševal v geometrijskem zaporedju $1, 1/2, 1/4, 1/8, \dots$, tako da so ostali sami sebi podobni.

Zanimivo je, da je v nekaterih delih iz skupine *Krožne meje* Escher sledil celo modelu Poincaréjeve neevklidske geometrije. V njih se bitja gibljejo in ustrezno povečujejo ali pomanjšujejo po lokih, ki so pravokotni na obod kroga. Escherju ni bila tuja niti logaritemska spirala. Na njeni osnovi je narisal nekaj svojih najlepših del, na primer *Vrtince* (slika 5).



Slika 5.

Že v *Ornamentih na traku* smo skozi matematična očala pogledali na dela starih mojstrov, ki so vzbudila Escherjevo zanimanje. S primerjavo ugotovimo, koliko Escher presega stare mojstre, čeprav vsi izhajajo iz istih matematičnih osnov.

Najprej primerjajmo starogrški motiv, pri katerem dosežemo napolnitev ravnine z zasukanimi kvadrati, ki imajo vrisano krivuljo (slika 6a), z Escherjevimi letečimi konji Pegazi (slika 6b). Oba ornamenta temeljita na uporabi iste simetrijske grupe, generirane z dvema translacijama. Razlika med slikama je v tem, da prva uporablja samo osnovni način tlakovanja ravnine, druga pa je obogatena z uporabo *dualnosti* osnovnega, samega po sebi nesimetričnega motiva, ki se kaže v uporabi dveh barv. Bele Pegaze je umetnik razporedil po ravnini tako, da sestavljajo njihovo ozadje sami črni Pegazi. Ti hkrati izpolnjujejo vso ravnino med vsemi sosednjimi belimi Pegazi. Vse povedano



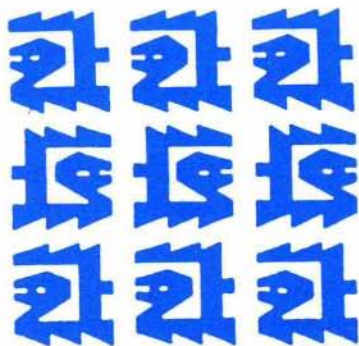
Slika 6a.



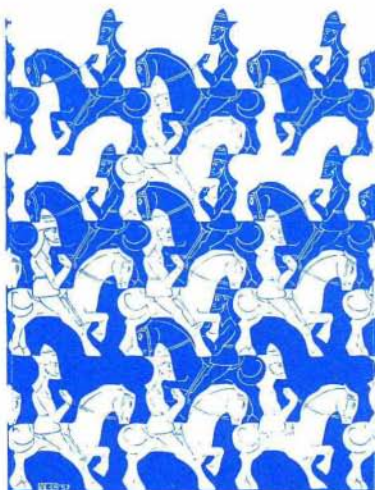
Slika 6b.

velja tudi v primeru, če začnemo premislek s črnimi Pegazi. Pri tem so vsi Pegazi med seboj skladni.

Analizirajmo še staroperujski vzorec iz stiliziranih labodov (slika 7a) in Escherjevo *Pravilno delitev ravnine III* (slika 7b). Obema je spet skupna ista simetrijska grupa.



Slika 7a.



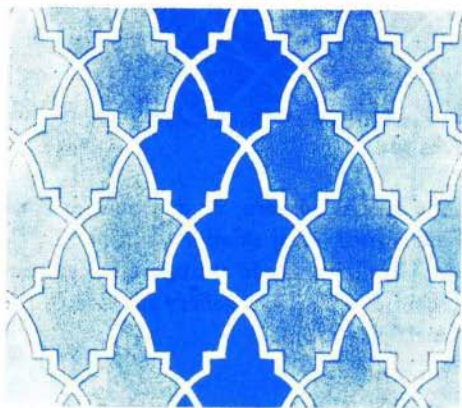
Slika 7b.

Če si mislimo staroperujski vzorec prepreden z vodoravnimi in navpičnimi črtami med posameznimi stiliziranimi labodi, vidimo, da je ornament zgrajen le z uporabo sestave translacije vzdolž vodoravnih pasov in drsnega zrcaljenja med sosednjimi navpičnimi pasovi. Escher pa je ravnino tlakoval z nesimetričnimi belimi in črnimi konjeniki, ki jahajo drug mimo drugega v nasprotnih smereh. Vzorec je enajst let pred tem uporabil tudi v Moebiusovem traku. Iz slike vidimo, da so beli konjeniki, ki popolnoma napolnjujejo ravnino med črnimi, njihova zrcalna slika.

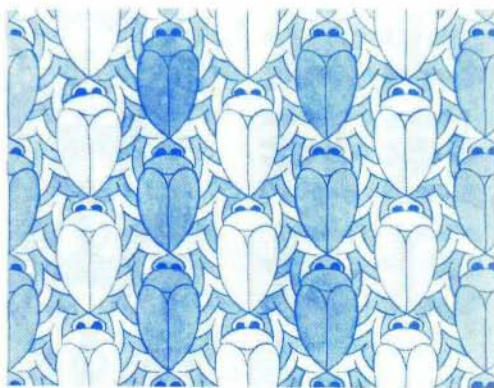
Notranja, vzorcu lastna simetrija, pa je skupna osnova japonskemu vzorcu iz 19. stoletja (slika 8a), vzorcu iz Alhambre (slika 8b) in Escherjevi *Pravilni delitvi ravnine II* (slika 8c).



Slika 8a.



Slika 8b.



Slika 8c.

S primerjanjem bi lahko še nadaljevali, saj je Escher v svojih delih mojstrsko uporabljal kar trinajst različnih kristalografskih grup, kar potrjuje njegov zanesljiv občutek za matematične zakone. Zato matematiki, ki poznajo njegova dela, Escherja toliko bolj občudujejo.

Neskončnost je nekaj, kar vznemirja razmišljujočega človeka. Vsakdo si jo zamišlja po svoje, v vsakomur živi v njemu lastni predstavi. Escherja je neskončnost tako vznemirila, da jo je iskal polovico svojega življenja, čeprav se je zavedal, da njegova rešitev tega vprašanja ne bo zanimala širokega kroga ljudi. Na njegovih slikah se realnost in domišljija tako mojstrsko prepletata, da si vsakdo, ki jih gleda, lahko obdrži lastno predstavo o neskončnosti.

* * *

Globoka, globoka neskončnost. Mir. Sanjariti daleč od vsakdanjih skrbi, jadрати na premcu jadrnice po mirnem morju proti nenehno odmikajočemu se obzorju; strmeti v hiteče valove in poslušati njihovo enakomerno mehko mrmranje; zasanjati se v nezavednost...

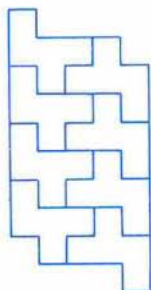
M.C.Escher

* * *

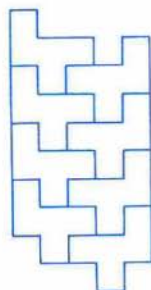
Tri naloge s tlakovanjem

Bralci naj poskusijo rešiti tri naloge iz tlakovanja ravnine, ki so prevzete iz revije *Mathematics in School*.

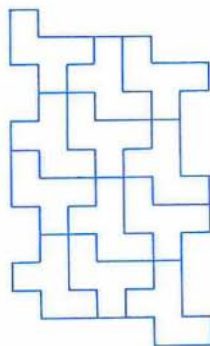
Naloga 1. Nadaljujte začeta tlakovanja ravnine (a), (b) in (c), ki uporabljajo isti osnovni vzorec. Poskušajte najti vsaj še dva druga načina tlakovanja ravnine z istim osnovnim vzorcem.



a)

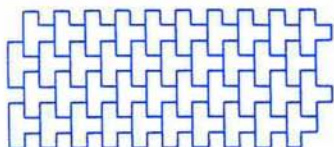


b)

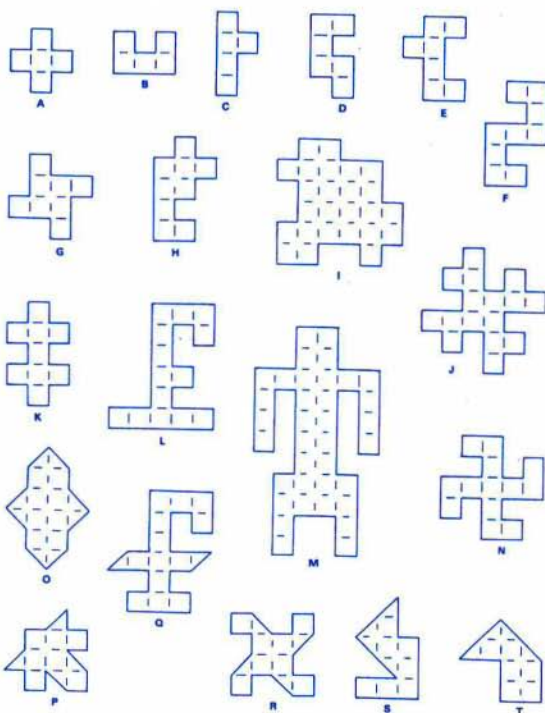


c)

Naloga 2. Nakazane so tri različne možnosti za tlakovanje ravnine (a), (b) in (c) z istim osnovnim vzorcem. Poskušajte najti še kak drug način tlakovanja z istim osnovnim vzorcem.



Naloga 3. Danih je dvajset različnih osnovnih vzorcev. Z vsakim izmed njih poskušajte tlakovati ravnino. Ali vsak osnovni vzorec dopušča več različnih možnosti za tlakovanje?



STAROEGIPTOVSKA ARITMETIKA

Stari Egipčani so, tako sem bral¹, uporabljali poleg naravnih števil večinoma le še ulomke s števcem 1 izjemoma še $\frac{2}{3}$. Nekoliko poenostavimo zgodovino in recimo, da je bil egipčanski številski univerzum

$$E = \{1, 2, \frac{1}{2}, 3, \frac{1}{3}, 4, \frac{1}{4}, 5, \frac{1}{5}, \dots\}.$$

Pomagajmo Egipčanom (bolje pozno kot nikoli) ugotoviti, kdaj so štiri aritmetične operacije v tem univerzumu izvedljive.

Nekateri odgovori so skrajno preprosti. Če sta a in b dve celi števili, so izrazi $a + b$, ab , $\frac{1}{a} \cdot \frac{1}{b}$, $\frac{1}{a} : b$ in $a : \frac{1}{b}$ vedno števila iz E , $\frac{1}{a} - b$ pa nikoli. $a - b$ je v E natanko takrat, ko je $b > a$, izrazi $\frac{1}{a} \cdot b$, $a : b$ in $\frac{1}{a} : \frac{1}{b}$ pa, ko je izpolnjen eden od dveh deljivosti pogojev, $a \setminus b$ ali $b \setminus a$. Očitno je tudi, da je $a + \frac{1}{b} \in E$ le, če je $b = 1$.

Preostali trije izrazi so za uganko; $a - \frac{1}{b}$ je za ogrevanje, $\frac{1}{a} \pm \frac{1}{b}$ za grizenje nohtov.

Anton Cedilnik

ŠTEVKE, ŠTEVILKE, ŠTEVILA

Iz vrečke, v kateri je devet kartončkov s števkami od 1 do 9, izvlečemo na slepo štiri kartončke. Z njimi sestavimo vsa možna štirimestna števila in izračunamo njihovo vsoto. Nato vrnemo kartončke v vrečko in postopek ponovimo.

Katere štiri kartončke smo izvlekli prvič in katere drugič, če je bila dobljena vsota pri drugem poskusu trikrat tolikšna kot pri prvem?

Marija Vencelj

POPRAVEK ŠTEVILSKA KRIŽANKE

V številsko križanko, ki je bila objavljena v peti številki Preseka prejšnjega letnika na strani 288, se je prikradla napaka. Na mestu 5 vodoravno bi morale pisati: "Različne številke, vsaka je kvadrat ali kub". Vsem reševalcem, ki so zaradi tega zabredli v težave, se opravičujem.

Darjo Felda

¹ F. Križanič: *Križem po matematiki*, Mladinska knjiga, Ljubljana 1960.

NOVO DIRKALNO KOLO

Novo dirkalno kolo je s kolesom, s kakršnim se vozimo vsak dan po mestu, v podobnem sorodstvu kot dirkalni avtomobil formule 1 z običajnim osebnim avtomobilom. K razvoju novega dirkalnega kolesa in dirkalnega avtomobila formule 1 je prispevala precejšen delež tudi fizika. Zakaj si ne bi ogledali mnogo preprostejšega dirkalnega kolesa, če smo si že dirkalni avtomobil?

Novo dirkalno kolo so izdelali v tovarni Lotus ameriške družbe General Motors v Hethelu v angleški pokrajini Norfolk. Z njim je Anglež Chris Boardman na olimpijskih igrah v Barceloni postavil svetovni rekord in osvojil zlato kolajno v dirki na 4000 metrov na dirkališču (slika 1 na zadnji strani ovitka).

S takim kolesom se ne bi smeli voziti po cesti, ker nima zavor. Tudi sicer je prav nenavadno (slika 2). Nima ogrodja iz kovinskih cevi kot navadno kolo, njegovo telo je narejeno iz enega kosa iz ogljikovih vlaken. Tako pravimo materialu, ki ga dobijo iz organskih vlaken, v kitah položenih v model, zalitih s smolo, na primer z epoksidno smolo, in žganih pri temperaturi okoli tisoč stopinj Celzija. Organska snov se razgradi v ogljik (ali v grafit pri žganju na okoli 2500 stopinjah). Material je nenavadno trden, trd in lahek ter odporen na visoko temperaturo. Uporabljajo ga na primer tudi v vesoljskih in podvodnih raziskovanjih.

Ročica, os sedeža in gonilki so iz titana. Pri načrtovanju se niso ozirali na stroške in so uporabili najboljše, najtrdnjše in najlažje materiale, ki jih menda niti za rakete ne uporabljajo takšnih. Prvo kolo s tako obliko so izdelali že leta 1982, a tedaj so mednarodna pravila še predpisovala običajno ogrodje iz kovinskih cevi. Leta 1991 so ta predpis črtali in je kolo lahko prišlo na dirkališča.

Novo kolo se bolj enakomerno giblje kot kolo z običajnim ogradjem, najbrž zaradi tega, ker je lažje in trše in zato manj niha. Njegova glavna posebnost pa je majhen zračni upor. Pri dirki na 4000 metrov pri veliki hitrosti kolesar porabi domala vso moč, okoli 560 wattov, za premagovanje zračnega upora. Dirkač s kolesom mora odrivati zrak in poganjati vrtince. Pravila za zdaj ne dovoljujejo nastavkov, ki bi zmanjšali vrtince, in ležečega položaja dirkača, s katerim bi zmanjšali čelni presek. Doslej je k uporabi prispevalo kolo okoli petino in dirkač sam s svojim telesom preostale štiri petine.

Novo kolo ima samo polovico upora običajnega kolesa z okvirom. Kolesi nimata naper, zadnje ima gladko tanko platišče, kar močno zmanjša vrtince, sprednje pa ima tri široke izseke, da je lažje. Kolo brez naper so patentirali



Slika 2. Novo kolo in spremembe, ki jih mislijo narediti pri kolesu za trg. Sliki sta vzeti iz članka D. Thisdella *For sale: the world's fastest bicycle* iz New Scientista, 12. septembra 1992.

že leta 1978, uporabljati pa so ga začeli šest let pozneje. Ročaj je mnogo ožji kot pri navadnem kolesu in dirkač sloni s komolci na oporah. Tak ročaj so na začetku osemdesetih let začeli uporabljati na kolesih triatlonci, ki plavajo, kolesarijo in tečejo, da so se manj utrudili. Pri dirki na kratke proge pa je pomembneje, da dovoljujejo opore za komolce bolj skrčen položaj, podoben nizki preži pri smukaču. Podobno kot pri smukaču roki in podlahti delujeta kot rezili, ki odvajata zračni tok s prsi. Opustili so levi krak sprednjih vilic in desnega izdelali zelo ozkega. Tudi zadaj ni levega kraka vilic, ampak je os vpeta v telo samo na desni. Tako zrak na obeh straneh teče ob kolikor mogoče gladkih ploskvah. Pri kolesu z okvirom ga je precej zastajalo pred prsmi dirkača, pri novem kolesu pa zrak učinkoviteje odteka mimo prsi in na stran pri nogah in nad dirkačem. K temu prispeva tudi ozek in gladko oblikovan nosilec sedeža.

Eden izmed načrtovalcev kolesa je omalovaževalno pripomnil, da upora ni mogoče še bolj zmanjšati, ker sedi "na sedalu debela stvar". Seveda se dirkaču ni mogoče odpovedati. V tem pogledu so pri Boardmanu ubrali najboljšo pot. Najprej so v vetrovniku določili najugodnejši položaj njegovega telesa in so po njem oblikovali kolo.

V Barceloni je Boardman porabil za 4000 metrov 270 sekund in dosegel povprečno hitrost 14,8 metra na sekundo ali 53,3 kilometra na uro. Ker je v zadnjem letu izboljšal svoj osebni rekord za 9 sekund, je težko ugotoviti, koliko je prispevalo k rekordu novo kolo in koliko on sam. Za primerjavo povejmo, da je Španec Miguel Indurain na dirki po Franciji na začetni etapi pri vožnji na kronometer za 8000 metrov porabil 562 sekund in dosegel povprečno hitrost 14,2 metra na sekundo ali 51,2 kilometra na uro. Vso 3983 kilometre dolgo progo pa je prevozil s povprečno hitrostjo 39,5 kilometra na uro. Toda upoštevati je treba, da je pri cestni dirki ob vožnji v skupini upor manjši.

Pri Lotusu navajajo za ceno novega kolesa preračunano dva in četrt milijona tolarjev. Zdaj se ukvarjajo z mislijo, da bi podobno kolo začeli izdelovati za trg. Dodati nameravajo zavore in prestave, prilagodljiv sedež in možnost za izbiro ročajev. Z ogljikovimi vlakni nekoliko slabše vrste in brez titana se nadajo, da bodo zmanjšali ceno na petino ali celo še več. Toda to bo še vedno vsaj kakih desetkrat več od cene običajnega kolesa. Tako ne s cest ne z dirkališč še precej časa ne bodo izginila dobra stara kolesa z okvirom iz kovinskih cevi.

Janez Strnad

13. PODROČNO TEKMOVANJE IZ FIZIKE ZA OSNOVNOŠOLCE

7. razred

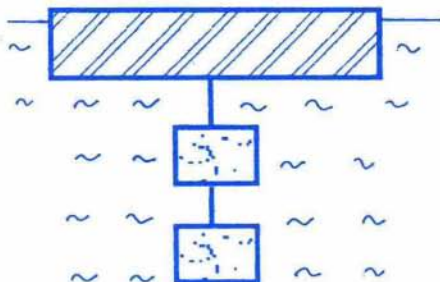
- Med letošnjim snežnim neurjem v ZDA je zapadlo 1 cm snega v 5 minutah. Prostornina povprečne snežinke je približno 8 mm^3 , hitrost padanja snežink pa ocenimo na 2 m/s . Ker računaš le približne vrednosti, si lahko obliko snežinke izbereš sam.
 - Koliko snega bi zapadlo, če bi enako snežilo 24 ur?
 - Približno koliko snežink je padlo na 1 m^2 v 5 minutah?
 - Približno koliko snežink je bilo v 1 m^3 zraka nad snežno površino?

TEKNOLOGIJA

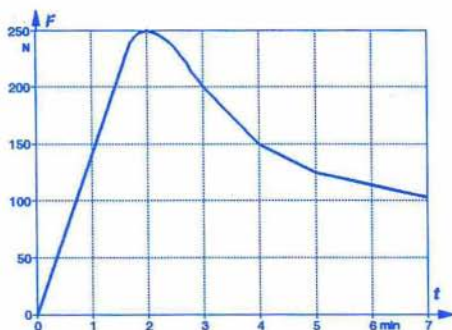
2. Na leseno klado ($20\text{ cm} \times 15\text{ cm} \times 5\text{ cm}$) privežemo dve aluminijasti kocki z robom 5 cm . Ko postavimo telesa v vodo, kot kaže slika, gleda $0,6\text{ cm}$ lesene klade iz vode.

a) Nato prestavimo eno kocko na klado, druga ostane privezana pod klado v vodi. Ali bo zgornja kocka na suhem? Odgovor utemelji.

b) Na koncu postavimo obe kocki eno zraven druge na leseno klado. Kolikšna je višina nepotopljenega dela kock? Gostota aluminija je $2,7\text{ g/cm}^3$, vode pa $1,0\text{ g/cm}^3$. Kocke postavljamo tako, da je lesena klada vselej vodoravna.



3. Jure in Tine vlečeta voziček po vodoravni cesti, pri čemer je gibanje premo enakomerno. Sila trenja je enaka 250 N . Diagram kaže časovno odvisnost sile, s katero vleče Jure. Nariši diagram, ki kaže časovno odvisnost sile, s katero vleče Tine.



4. Šola je visoka 20 m . Mateja se je odločila, da bo izmerila tlačno razliko zraka med točko $0,5\text{ m}$ nad tlemi in vrhom šole. S tem namenom je kupila 22 m dolgo plastično prozorno cev, vanjo nalila nekaj vode, nato pa postavila en konec cevi na vrh šole, drugi konec pa je držala $0,5\text{ m}$ nad tlemi. Cev je bila na obeh koncih odprta in je imela obliko črke J. Kolikšna je bila višinska razlika gladin vode v krakih cevi? Razmisli, kako dolžina daljšega kraka vpliva na meritev. Gostota zraka je $1,3\text{ kg/m}^3$, vode pa $1,0\text{ kg/dm}^3$.

5. V prazno litrsko steklenico mineralne vode Radenska povsem do vrha nalijemo etilni alkohol s temperaturo 20°C . Steklenico nato postavimo v hladilnik s temperaturo 8°C . Približno oceni, za koliko se zniža gladina

alkohola v steklenici, ko se alkohol ohladi. V tabelah najdemo podatek, da se prostornina enega litra alkohola poveča za 1 ml, če ga segrejemo za en kelvin. Ostale manjkajoče podatke oceni sam.

8. razred

1. Izračunaj, kolikokrat je hitrost, s katero kroži Zemlja okrog Sonca, večja od hitrosti, s katero kroži Jupiter? Pomagaj si z razpredelnico v učbeniku.
2. Žogico z maso 100 g izstrelimo s tal navpično navzgor z začetno hitrostjo 10 m/s proti 3,75 m visokemu stropu. Žogica se od stropa odbije, pri čemer je kinetična energija po odboju za 20% manjša glede na kinetično energijo pred odbojem. S kolikšno hitrostjo pade žogica nazaj na tla? Zračni upor smeš zanemariti, pomagaj si z energijo.
3. S tremi baterijami za 1,2 V, 2,4 V in 4,5 V in s štirimi uporniki z uporji $10\ \Omega$, $5\ \Omega$, $2\ \Omega$ in $2\ \Omega$ sestavi vsaj štiri različna vezja, pri čemer naj pri vsakem vezju skozi priključene baterije teče tok 0,30 A. Pri posameznem vezju ni potrebno uporabiti vseh elementov. Nariši vezja in na skicah označi uporabljene elemente. Notranje upore baterij smeš zanemariti.
4. Od transformatorske postaje do 100 m oddaljene stanovanjske hiše vodita dva aluminijasta vodnika, vsak ima presek $25\ \text{mm}^2$. Približno izračunaj, koliko toplote oddata vodnika okolišnjemu zraku v eni uri, če je v hiši vključena električna peč z močjo 5 kW. Napetost hišne napeljave je 220 V. Manjkajoče podatke poišči v učbeniku.
5. Gotovo si že videl na televiziji oddajo o skokih, pri katerih se človek priveže na močno gumijasto vrv in se z mostu vrže v prepad. Denimo, da se je mož z maso 80 kg privezal na 60 m dolgo gumijasto vrv in se vrgel s 100 m visokega mostu. Vrv ga je zaustavila, ko je bil 10 m nad tlemi. Po nekaj nihajih se je mož potem ustavil 35 m nad tlemi. Pri približnem računu lahko upor zraka zanemarimo.
 - a) Ali je bilo gibanje zadnjih deset metrov navzdol enakomerno pojemajoče gibanje? Utemelji odgovor!
 - b) Kolikšen je bil pospešek moža v trenutku, ko se je za hip ustavil 10 m nad tlemi?
 - c) Kolikšno je bilo delo sile gumijaste vrvi za celoten skok navzdol?
 - d) Približno skiciraj diagram hitrosti v odvisnosti od časa za celoten skok navzdol? Na osi ni potrebno nanašati vrednosti.

NOVE KNJIGE

Klavžar S. in Vesel A., **WINDOWS 3.1, PODKREPLJEN Z DOS 6.0**, Račkova knjižnica 9, 1993, Društvo matematikov, fizikov in astronomov Slovenije.

Po dveh letnem premoru je izšla nova knjižica iz zbirke Račkova knjižnica, ki jo verjetno številni poznate kot zbirko, ki začetniku pomaga pri prvem srečevanju z določenim programom. Sandi Klavžar, avtor prve knjige te zbirke – *Mali priročnik operacijskega sistema MS DOS* – je k sodelovanju pritegnil še Aleksandra Vesela in tako je nastala pričujoča knjiga.

Po besedah avtorjev naj bi bila knjiga namenjena predvsem začetnemu spoznavanju z Okni - MS Windows 3.1, z operacijskim sistemom DOS pa naj bi se spoznali le bežno. To povsem ne drži, saj zajemajo deli knjige, ki govorijo o DOSu, precejšen (dobrodošel) del knjige. Ne glede na to, kako priljubljeno je 'klikanje z miško', bo namreč začetniku večkrat lažje, če bo določena opravila naredil kar z ukazi operacijskega sistema.

Knjiga je razdeljena na štiri poglavja. V prvem spoznamo nekaj osnovnih pojmov o zgradbi osebnega računalnika. Glavnino knjižice sestavljata drugo in tretje poglavje, ki govorita o okolju Windows in o najpomembnejših programih, ki ga sestavljajo. V četrtem poglavju je zajeto najnujnejše o DOSu, v dodatku pa so omenjene nekatere najpomembnejše novosti, ki jih prinaša nova inačica operacijskega sistema MS DOS, namreč 6.0.

V knjižici je zajeto vse najpomembnejše o DOSu in Oknih. Mogoče bo kdo pogrešal razlago te ali one stvari. Vendar ne pozabimo, kakšen je osnovni cilj te zbirke: Omogočiti kar se da enostaven začetek pri uporabi novih programov. To pa knjižica vsekakor omogoča.

Matija Lokar

BABILONSKI PRIBLIŽEK ZA $\sqrt{2}$ – Rešitve s str. 40

- 1) $1;24,51,10 = \frac{30547}{21600}$
- 2) $a + \frac{3}{2}, h = -\frac{1}{4}; \sqrt{2} \approx \frac{17}{12} = 1;25$
- 3) $\sqrt{2} \approx 1;24,51,10,35,17,...$
- 4) $1;25$
 $1;24,50,37,30$
 $1;24,51,12,39,22,30$
 $1;24,51,9,54,34,48,...$
- 5) $x_3 = 1,414213563... = 1;24,51,10,7,45,...$
- 6) $\sqrt{2} \approx \frac{4p}{a^2} = \frac{7}{4} = 1;45$

Vilko Domajnko

MATEMATIKA

EULERJEVA FUNKCIJA φ

Govorili bomo o funkciji iz teorije števil, ki nosi ime velikega matematika Eulerja. Leonhard Euler je živel v 18. stoletju in je delal ter ustvarjal na vseh področjih uporabne in teorijske matematike. Sodi med najplodnejše matematike vseh časov.

Eulerjeva funkcija φ preslikuje naravna števila v naravna števila. Vrednost funkcije pri danem naravnem številu n je definirana takole: Med števili 1, 2, 3, ..., n poiščemo vsa z n tuja števila, jih preštejemo in rezultat je $\varphi(n)$.

Torej, vrednost $\varphi(n)$ nam pove, koliko je pod n števil, ki so tuja z n .

Navedimo nekaj primerov: $\varphi(1) = 1$, $\varphi(2) = 1$, $\varphi(4) = 2$, $\varphi(7) = 6$ in $\varphi(10) = 4$, saj so števila 1, 3, 7 in 9 tuja z 10.

Naloga 1. Izračunaj $\varphi(5)$, $\varphi(8)$, $\varphi(17)$ in $\varphi(18)$.

Sedaj pa izračunajmo še $\varphi(40)$. Število 40 razstavimo na praštevila: $40 = 2^3 \cdot 5$. To nam pove, da je neko število tuje s 40, če ni deljivo niti z 2 niti s 5. Med števili 1, 2, 3, ..., 40 jih je polovica (vsako drugo število), to je 20, deljivih z 2. Vsako peto število po vrsti je deljivo s 5, zato jih je petina (torej 8) deljivih s 5. Štiri števila pa so deljiva z 2 in s 5 hkrati, saj je vsako deseto število po vrsti deljivo z 2 in s 5. Zato je $20 - 4 = 16$ števil deljivih samo z 2 in ne s 5, $8 - 4 = 4$ pa je deljivih s 5 in ne z 2. Torej je s 5 ali z 2 (vsaj z enim od teh dveh števil) deljivih natanko $16 + 4 + 4 = 24$ števil. Zato je $\varphi(40) = 40 - 24 = 16$.

Naloga 2. Izračunaj $\varphi(55)$ in $\varphi(63)$.

Vrednost $\varphi(315)$ pa izračunajmo skupaj. Najprej število 315 razstavimo na produkt samih praštevil: $315 = 3^2 \cdot 5 \cdot 7$. Razcep nam pove da je neko število tuje s 315 natanko tedaj, ko ni deljivo z nobenim od števil 3, 5 in 7. Vrednost $\varphi(315)$ bomo poiskali tako, da bomo med števili 1, 2, 3, ..., 315 "prečrtali" najprej vsa števila, ki so deljiva s 3, nato med preostalimi še neprečrtanimi vsa tista, ki so deljiva s 5, in končno še vsa, ki so deljiva s 7. Ostala bodo samo še števila tuja s 315.

Ko med števili 1, 2, 3, ... 315 prečrtamo števila, ki so deljiva s 3, to so števila $1 \cdot 3, 2 \cdot 3, 3 \cdot 3, \dots, \frac{315}{3} \cdot 3$, ostane še

$$315 - \frac{315}{3} = 315 \cdot \left(1 - \frac{1}{3}\right)$$

števil.

Sklep 1. Če med prvimi 315 števili prečrtamo vsa s 3 deljiva števila, potem ostane še $315 \cdot \left(1 - \frac{1}{3}\right)$ neprečrtanih števil.

Preštejmo, koliko je v tem ostanku števil, ki so deljiva s 5. Vsa števila (med prvimi tristo petnajstimi) deljiva s 5 so $1 \cdot 5, 2 \cdot 5, 3 \cdot 5, \dots, \frac{315}{5} \cdot 5$. Med temi števili so bila v prvem koraku prečrtana vsa s 3 deljiva števila. To je natanko toliko števil, kolikor je med števili 1, 2, 3, ... $\frac{315}{5}$ takih, ki jih 3 deli. Ostalo je torej še (glej **Sklep 1.** - namesto 315 vzameš $\frac{315}{5}$) $\frac{315}{5} \cdot \left(1 - \frac{1}{3}\right)$ števil deljivih s 5. Prečrtamo še ta in ostane

$$315 \cdot \left(1 - \frac{1}{3}\right) - \frac{315}{5} \cdot \left(1 - \frac{1}{3}\right) = 315 \cdot \left(1 - \frac{1}{3}\right) \cdot \left(1 - \frac{1}{5}\right)$$

števil.

Sklep 2. Ko med prvimi 315 števili prečrtamo vsa števila, ki so deljiva s 3 ali s 5, ostane še $315 \cdot \left(1 - \frac{1}{3}\right) \cdot \left(1 - \frac{1}{5}\right)$ števil.

Sedaj pa pogledjmo, koliko večkratnikov števila 7 moramo še prečrtati. Med prvimi trisostpetnajstimi števili so deljiva s 7 naslednja: $1 \cdot 7, 2 \cdot 7, 3 \cdot 7, \dots, \frac{315}{7} \cdot 7$. V prvih dveh korakih smo med temi števili prečrtali vsa števila deljiva s 3 in s 5. Med njimi je ostalo še (**Sklep 2.**) natanko $\frac{315}{7} \cdot \left(1 - \frac{1}{3}\right) \cdot \left(1 - \frac{1}{5}\right)$ neprečrtanih števil. Ko prečrtamo še ta, nam ostane

$$315 \cdot \left(1 - \frac{1}{3}\right) \cdot \left(1 - \frac{1}{5}\right) - \frac{315}{7} \cdot \left(1 - \frac{1}{3}\right) \cdot \left(1 - \frac{1}{5}\right) = 315 \cdot \left(1 - \frac{1}{3}\right) \cdot \left(1 - \frac{1}{5}\right) \cdot \left(1 - \frac{1}{7}\right)$$

števil. Ta števila so tuja s 315 in zato je

$$\varphi(315) = 315 \cdot \left(1 - \frac{1}{3}\right) \cdot \left(1 - \frac{1}{5}\right) \cdot \left(1 - \frac{1}{7}\right) = 3^2 \cdot 5 \cdot 7 \cdot \frac{2}{3} \cdot \frac{4}{5} \cdot \frac{6}{7} = 144.$$

Naloga 3. Podobno kot zgoraj izračunaj $\varphi(1000)$, $\varphi(1001)$ in $\varphi(770)$.

Razstavimo število n na produkt različnih praštevilskih potenc:

$$n = p_1^{e_1} \cdot p_2^{e_2} \cdot p_3^{e_3} \cdots p_k^{e_k}.$$

S pomočjo tega razcepa izračunajmo $\varphi(n)$. Najprej med števili 1, 2, 3, ... n odvržemo vsa, ki so deljiva s p_1 . Ostane še

$$n - \frac{n}{p_1} = n\left(1 - \frac{1}{p_1}\right)$$

števil. Sedaj med preostalimi odvržemo tista, ki so deljiva s p_2 in niso hkrati deljiva s p_1 . Števila, ki so deljiva hkrati s p_1 in s p_2 , smo odvrgli že na prejšnjem koraku. Tako nam po drugem koraku ostane še

$$n\left(1 - \frac{1}{p_1}\right) - \frac{n}{p_2}\left(1 - \frac{1}{p_1}\right) = n\left(1 - \frac{1}{p_1}\right)\left(1 - \frac{1}{p_2}\right)$$

števil.

Med preostalimi števili nato odvržemo tista števila, ki so deljiva s p_3 . To so natanko tista števila med števili 1, 2, 3, ... n , ki so deljiva s p_3 in niso deljiva niti s p_1 niti s p_2 . Ostane še

$$n\left(1 - \frac{1}{p_1}\right)\left(1 - \frac{1}{p_2}\right) - \frac{n}{p_3}\left(1 - \frac{1}{p_1}\right)\left(1 - \frac{1}{p_2}\right) = n\left(1 - \frac{1}{p_1}\right)\left(1 - \frac{1}{p_2}\right)\left(1 - \frac{1}{p_3}\right)$$

števil. Ta postopek nas po k korakih, ko nam ostanejo samo še z n tuja števila, pripelje do formule:

$$\varphi(n) = n\left(1 - \frac{1}{p_1}\right)\left(1 - \frac{1}{p_2}\right)\left(1 - \frac{1}{p_3}\right) \cdots \left(1 - \frac{1}{p_k}\right).$$

Ob upoštevanju razcepa števila n na prafaktorje lahko to formulo zapišemo tudi nekoliko drugače:

$$\varphi(n) = (p_1 - 1) \cdots (p_k - 1) p_1^{e_1 - 1} \cdots p_k^{e_k - 1}.$$

Naloga 4. S pomočjo pravkar izpeljane formule preveri rezultate, ki si jih dobil pri prejšnjih nalogah.

Naloga 5. *Dokaži, da velja*

$$\varphi(n_1 n_2) = \varphi(n_1) \varphi(n_2),$$

če sta števili n_1 in n_2 med seboj tuji.

Za bralce, ki poznajo osnove verjetnostnega računa, dodajmo še nalogo, ki jim bo razkrila še eno razlago formule za $\varphi(n)$.

Naloga 6. *Izračunaj verjetnost dogodka, da na slepo izbereš iz množice prvih n naravnih števil število, ki je tuje z n .*

Bogdan Kejžar

KAKO PREČKATI REKO?

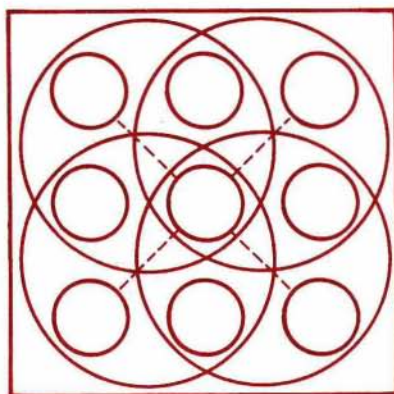
Skupina petih raziskovalcev stoji in enem bregu divje reke, na drugem bregu pa je skupina petih divjaških bojevnikov. Vsi bi radi prečkali reko, na voljo pa imajo le majhen kanu za tri osebe, ki je na strani bojevnikov. Samo en bojevnik in en raziskovalec znata dovolj dobro veslati, da lahko kanu varno pripeljeta čez deročo vodo. Bojevniki so seveda bojovito razpoloženi in zato bi bilo za raziskovalce skrajno nezdravo, če bi bilo število bojevnikov kadarkoli med prečkanjem na kateremkoli bregu ali pa v čolnu večje od števila raziskovalcev. Ali lahko (in kako) obe skupini varno prečkata reko?

Neža Mramor-Kosta

SKORAJ MAGIČNI KROGI

V krožce vpišite različna enomestna naravna števila, tako da boste v vsakem od štirih večjih krogov dobili vsoto 19 in na vsaki od diagonal vsoto 9.

Marija Vencelj



ASTRONOMIJA

KAKO UGOTOVIMO VIDNO POLJE IN ZMOGLJIVOST DALJNOGLEDA

Zorno polje daljnogleda je podano z zornim kotom (navideznim premerom), ki ga pri določeni povečavi zajame daljnogled. Zorno polje lahko ocenimo po kotnih razdaljah med posameznimi zvezdami kakega ozvezdja, če so te natančno znane. To brez dvoma velja za zvezde, ki ležijo v ozvezdju Malega medveda (slika 1).



Slika 1. Ozvezdje Malega medveda, v katerem so označene kotne razdalje med posameznimi zvezdami in navedene natančne vrednosti za sij zvezd Severne polarne vrste. Po kotnih razdaljah med zvezdami lahko ocenimo zorno polje, po vrednostih za sij zvezd pa zmogljivost daljnogleda. Kotni premer (zorni kot) zgornjega kroga je 10° , spodnjega pa 5° ; α - Severnica.

Daljnogled čvrsto pritrdimo na trdno stojalo, da se ne premika, in ga usmerimo proti zvezdam Malega medveda. Pri gledanju skozi nepremični daljnogled ugotavljamo največji zorni kot, ki ga vidimo skozi daljnogled, to je navidezno razdaljo med zvezdama, od katerih je prva na enem skrajnem koncu zornega polja daljnogleda, druga pa na nasprotnem skrajnem koncu. Kotno razdaljo med opazovanima zvezdama preberemo iz slike 1. (Podrobnosti glej v knjižici *Astronomska opazovanja*, Presekova knjižnica 3, 1978, stran 239.)

Zmogljivost daljnogleda pa ocenjujemo z mejnim sijem kake šibke zvezde, ki jo še komaj vidimo skozi daljnogled pri dani povečavi. Opazujemo v jasni noči brez mesečine daleč od moteče svetlobe mestnih luči. Pri opazovanju mora vsa svetloba iz okularja pasti v naše oko. Če je premer izstopne zenice daljnogleda večji od premera zenice našega očesa, pade v oko le del svetlobnega toka in zmogljivosti daljnogleda nismo v celoti izkoristili. Tako ne zasledimo šibkejših zvezd, ki bi jih sicer, če bi opazovali s širšo zenico. Torej je isti daljnogled za ljudi, ki imajo pri opazovanju različno odprto zenico, različno zmogljiv.

Takole se spreminja največji premer zenice človeškega očesa s starostjo

starost	premer zenice
10 let	8 mm
20	8
30	7
40	6
50	5
60	4
70	3
80	2,5

Če na primer opazujemo z daljnogledom, ki ima premer izstopne zenice 7 mm, premer zenice našega očesa pa je 5 mm, oko sprejme le $(5/7)^2 = 71\%$ svetlobnega toka, ki gre iz okularja.



Slika 2. Takole lovski daljnogled uporabimo za astronomska opazovanja.

NALOGE

Dejansko zmogljivost daljnogleda lahko ocenjujemo iz opazovanj zvezd tako imenovane *Severne polarne vrste*, to je zvezd okoli Severnice, katerih siji so izmerjeni zelo natančno (slika 1).

Še enkrat: Opazovati moramo čim bolj udobno, daljnogled pa pritrditi na trdno stojalo, da se ne premika. Poskusite na opisana načina oceniti zorno polje in zmogljivost svojega daljnogleda.

Marijan Prosén

NALOGE ZA MLAJŠE BRALCE

1) Število $x = 0.1\overline{23}$, kjer se število 23 v decimalnem zapisu neskončnokrat ponovi, zapiši v obliki okrajšanega ulomka.

2) Koliko mest ima število $2^{12} \cdot 5^8$ v desetiškem zapisu?

3. Kaj je več: $\sqrt{2}$ ali $\sqrt[3]{3}$?

4) V razredu je 15 deklic, ki so vse bodisi blondinke bodisi rjavolaske in imajo ali modre ali rjave oči. Če je 6 modrookih blondink, 7 rjavookih deklet, koliko je rjavolask z rjavimi očmi?

Borut Zalar

KOLIKO TRIKOTNIKOV – Rešitev s str. 64

a) Naj bo c največja stranica, tako da je $c = m$, stranici a in b pa sta manjši ali kvečjemu enaki m . Po trikotniški neenačbi mora biti $a + b > c = m$. Ker sta a in b celi števili, je lahko b pri $a = 1$ le m , pri $a = 2$ le $m - 1$ ali m itd., pri $a = m$ pa 1 ali 2 ali ... ali m . Vseh teh trikotnikov je potemtakem

$$1 + 2 + 3 + \dots + m = \frac{m(m+1)}{2}.$$

Zaznamujmo z d število tistih, pri katerih je $a = b$. Med trikotniki z neenakima stranicama a in b sta po dva in dva skladna (če zamenjamo a in b , dobimo skladen trikotnik). Število R_m neskladnih trikotnikov, ki imajo največjo stranico dolgo m , je potem enako

$$R_m = \frac{1}{2} \left(\frac{m(m+1)}{2} - d \right) + d = \frac{m(m+1)}{4} + \frac{d}{2}.$$

REŠITVE NALOG

Kolik je d ? Če je $a = b$, mora biti $2a > c = m$, torej $a > \frac{m}{2}$. Ker je tudi $a \leq m$, je d pri sodem m enak $m - \frac{m}{2} = \frac{m}{2}$, pri lihem m pa $m - \frac{m-1}{2} = \frac{m+1}{2}$. Torej je iskano število neskladnih trikotnikov pri sodem m

$$R_m = \frac{m(m+1)}{4} + \frac{m}{4} = \frac{m^2 + 2m}{4}, \quad (a)$$

pri lihem m pa

$$R_m = \frac{m(m+1)}{4} + \frac{m+1}{4} = \frac{(m+1)^2}{4} = \frac{m^2 + 2m}{4} + \frac{1}{4}. \quad (a^*)$$

b) Očitno je število S_m neskladnih trikotnikov, pri katerih nobena stranica ni večja od m , enako vsoti $\sum_{k=1}^m R_k$. Torej je po formulah (a) in (a*)

$$S_m = \sum_{k=1}^m \frac{k^2 + 2k}{4} + \frac{1}{4} \times (\text{število lihih števil med 1 in } m).$$

Če se spomnimo formule

$$1^2 + 2^2 + \dots + m^2 = \frac{m(m+1)(2m+1)}{6},$$

je prvi člen na desni enak

$$\frac{m(m+1)(2m+1)}{24} + \frac{m(m+1)}{4}.$$

Drugi člen je spet odvisen od tega, ali je m sod ali lih. Pri sodem m je $\frac{m}{2}$ lihih števil od 1 do m , pri lihem m pa $\frac{m+1}{2}$. Zato je pri sodem m število trikotnikov

$$S_m = \frac{m(m+1)(2m+1)}{24} + \frac{m(m+1)}{4} + \frac{m}{8} = \frac{m(m+2)(2m+5)}{24},$$

pri lihem m pa

$$S_m = \frac{m(m+1)(2m+1)}{24} + \frac{m(m+1)}{4} + \frac{m+1}{8} = \frac{(m+1)(m+3)(2m+1)}{24}.$$

Ivan Vidav

'DOKAZ' FERMATOVEGA IZREKA, KI BI ŠEL NA ROB KNJIGE

V prejšnji številki Preseka ste lahko prebrali prispevek o tem, da je po 350 letih poskusov verjetno dokazan Fermatov zadnji izrek. Dokončne potrditve pravilnosti dokaza do zaključka redakcije te številke Preseka še ni.

Kot nadomestilo za to novico si oglejmo 'dokaz' Fermatovega izreka, ki ga je študentom matematike rad pokazal profesor Plemelj pri predavanjih iz algebre. Bil je to eden od elegantnejših iz poplave dokazov, ki so prispeli na dunajsko akademijo znanosti, potem ko je ta razpisala nagrado za rešitev Fermatovega problema. Takole gre:

Naj ima za neki naravni $n > 3$ enačba

$$x^n + y^n = z^n$$

rešitev v neničelnih celih številih. Enačbo odvajamo:

$$nx^{n-1} + ny^{n-1} = nz^{n-1}$$

in delimo z n :

$$x^{n-1} + y^{n-1} = z^{n-1}.$$

Torej je tudi ta enačba rešljiva v neničelnih celih številih. Če tako nadaljujemo, dobimo po končno mnogo korakov, da je v neničelnih celih številih rešljiva enačba

$$x^3 + y^3 = z^3.$$

To pa je protislovje, saj je za $n = 3$ že Euler dokazal, da enačba nima rešitve v neničelnih celih številih.

Marija Vencelj

BREZ PRESEČIŠČ

V ravnini je danih 11 točk, ki imajo paroma različne medsebojne razdalje. Vsako od točk povežemo z daljico z njeno najbližjo sosedo. Pokaži, da so dobljene daljice brez skupnih točk, razen morda krajišč.

Igor Gajser

REŠITVE NALOG

NALOGE ZA MLAJŠE BRALCE – Rešitev s str. 59

1) Če a označuje osnovnico trikotnika, v pa njegovo višino, potem je njegova ploščina $p = \frac{av}{2}$. Če osnovnico povečamo za 10 odstotkov, je nova osnovnica enaka $a_1 = a + \frac{1}{10}a = \frac{11a}{10}$. Nova višina bo $v_1 = v - \frac{1}{10}v = \frac{9v}{10}$. To pomeni, da je nova ploščina enaka

$$p_1 = \frac{a_1 v_1}{2} = \frac{99av}{200} = \frac{99}{100}p.$$

Ploščina se bo zmanjšala za en odstotek.

2) Naj označujeta x dolžino, y pa višino pravokotnika. Ploščina pravokotnika je enaka xy . Pogoji naloge nam povedo, da je

$$xy = (x + 5)(y - 2) = xy - 2x + 5y - 10,$$

$$xy - (x - 5)(y + 4) = xy + 4x - 5y - 20$$

oziroma

$$-2x + 5y = 10, \quad 4x - 5y = 20.$$

Če zadnji enačbi seštejemo, dobimo $2x = 30$, oziroma $x = 15$ cm. Ko dobljeni rezultat vstavimo nazaj v prvo enačbo, dobimo $5y = 10 + 2 \cdot 15 = 40$, oziroma $y = 8$ cm. Iskana ploščina je $15 \cdot 8 = 120$ cm².

3) Najprej kvadriramo enačbo $x + y = 3$ in dobimo $x^2 + y^2 + 2xy = 9$. Ker je $xy = 2$, je $x^2 + y^2 = 5$. Če pomnožimo $(x^2 + y^2)(x + y) = 5 \cdot 3 = 15$, dobimo

$$x^3 + y^3 + x^2y + xy^2 = x^3 + y^3 + xy(x + y) = x^3 + y^3 + 6$$

oziroma $x^3 + y^3 = 9$.

4) Naj bo x iskano število. Tedaj je

$$\frac{10 + x}{3 + x} = \frac{5}{4}.$$

Ko križno pomnožimo, dobimo enačbo $40 + 4x = 15 + 5x$, oziroma $x = 25$.

Borut Zalar

MATEMATIKA

FERMATOVA ŠTEVILA

Slavni francoski matematik Pierre de Fermat (1601 - 1665)¹ je obogatil matematično znanost z množico novih spoznanj. Vsa, razen enega, so tudi dokazana, ali pa vsaj verjamemo v njihovo resničnost.² Edina izjema je njegov izrek o binarnih potencah. Le ta trdi, da so vsa števila oblike $2^m + 1$, kjer je $m = 2^n$, praštevila. Števila

$$F_n = 2^{2^n} + 1$$

zato imenujemo *Fermatova števila*.³ Čeprav je bil Fermat sam prepričan o resničnosti te trditve, je ni znal dokazati. Pokazal pa je (kar je lahko), da je število $2^m + 1$ sestavljeno, če naravno število $m > 1$ ni potenca števila 2 (naloge 1). Seveda pa to še ne pomeni, da so potem vsa Fermatova števila praštevila, čeprav za $n = 1, 2, 3$ in 4 to res velja:

$$F_1 = 2^2 + 1 = 5, \quad F_2 = 2^4 + 1 = 17, \quad F_3 = 2^8 + 1 = 257,$$

$$F_4 = 2^{16} + 1 = 65537.$$

Leta 1732 je namreč švicarski matematik Leonhard Euler (1707 - 1783) pokazal, da že za $n = 5$ ne dobimo praštevila, saj je število F_5 deljivo s 641. Brez dolgovznega računanja (in brez uporabe računalnika) se o tem najhitreje prepričamo na naslednji način. Število

$$641 = 5^4 + 2^4 = 2^7 \cdot 5 + 1$$

namreč deli števili

$$2^{28}(5^4 + 2^4) \quad \text{in} \quad (2^7 \cdot 5)^4 - 1,$$

kjer smo upoštevali znano pravilo o razcepu razlike četrth potenc. Zato 641 deli tudi razliko teh števil

$$2^{28}(5^4 + 2^4) - [(2^7 \cdot 5)^4 - 1] = 2^{32} + 1 = F_5.$$

O številu F_5 je znana tudi naslednja resnična zgodba, ki bi jo Eva Longyka, če bi se zgodila pred kratkim, verjetno uvrstila med Neverjetne

¹ Več o Fermatu lahko prebereš v Preseku 3 (1975/76), št. 1, str. 9-14.

² Glej prispevek o Fermatovem zadnjem izreku v 1. številki letošnjega Preseka.

³ O Fermatovih številih glej tudi članek: B. Pavšek, *Fermatova števila*, Presek 14 (1986/87), št. 4, str. 220-221.

zgodbe. Ameriški fenomen računanja na pamet, Z. Colburn (1804 - 1839), je na vprašanje, ali je število F_5 praštevilo, po kratkem premisleku odgovoril, da to ni, ker je deljivo s 641. Kot skoraj vsi fenomeni te vrste, pa tudi on ni bil sposoben razložiti, kako je prišel do takega zaključka. (Colburn je zaradi svojih neverjetnih sposobnosti tudi vplival pri izbiri življenske poti irskega matematika Williama Hamiltona (1805 - 1865).)

S pomočjo nekaterih izsledkov nemškega matematika C. F. Gaussa lahko dokažemo, da so vsa praštevila, ki se pojavijo v razcepu števila F_n (če je le to sestavljeno), oblike $2^{n+2} \cdot k + 1$, kjer je k naravno število. Tako je

$$F_5 = (2^7 \cdot 5 + 1)(2^7 \cdot 52347 + 1).$$

Od leta 1880 pa tudi vemo, da je

$$F_6 = (2^8 \cdot 1071 + 1)(2^8 \cdot 262814145745 + 1).$$

Leta 1905 je J. C. Morehead pokazal, da je število F_7 sestavljeno. Štiri leta kasneje pa je skupaj z A. E. Westernom prišel do enakega zaključka tudi za število F_8 . To je najlažje preveriti z uporabo naslednjega kriterija, ki ga navedimo brez dokaza⁴:

F_n je praštevilo natanko tedaj, ko deli število $3^{(F_n-1)/2} + 1$.

Na ta način pa seveda ne dobimo vsaj enega od faktorjev v F_n . Tako so šele leta 1970 oziroma 1980 faktorizirali števili F_7 in F_8 . Vsaj en faktor v F_n pa je znan tudi za vse n od 9 do 19 in še za precej večja naravna števila, kot na primer za $n = 23471$. V tem zadnjem primeru je W. Keller leta 1984 ugotovil, da je število F_{23471} deljivo z $2^{23473} \cdot 5 + 1$. To Fermatovo število je tudi eno največjih števil, ki so jih do zdaj raziskovali. Število njegovih cifer v desetiškem zapisu namreč močno presega število delcev v vesolju. Le teh naj bi bilo "samo" $51 \cdot 2^{260}$.

Vsi ti rezultati podpirajo domnevo, da so števila F_n za $n \geq 5$ sestavljena. To pa je še vedno nerešen problem.

Naloge:

1. Dokaži, da je število $2^m + 1$ sestavljeno, če naravno število $m > 1$ ni potenca števila 2!

⁴ Izrek je dokazan v knjigi: W. Sierpinski, *Elementary Theory of Numbers*, Varšava 1964, str. 347.

- Števila F_n resda niso vsa praštevila, so si pa paroma tuja. Dokaži!
- S pomočjo prejšnje naloge pokaži, da množica vseh praštevil ne more biti končna!
- Pokaži, da so števila $2^{2^n} + 5$, $n = 1, 2, 3, \dots$, sestavljena!
- S pomočjo "približne identitete" $2^{10} \doteq 10^3$ oceni število števk Fermatovega števila F_{23471} !
- Katero število je večje F_n ali $(2^2)^n + 1$?

Rešitve nalog:

- Denimo, da je $m = 2^k l$, kjer sta k in l taki (enolično določeni) nenegativni celi števili, da je l liho število. Po predpostavki je $l \geq 3$. S pomočjo znane formule o vsoti dveh lihih potenc dobimo, da je število

$$2^m + 1 = (2^{2^k})^l + 1$$

deljivo z $2^{2^k} + 1$.

- Z zaporedno uporabo formule $a^2 - b^2 = (a + b)(a - b)$ dobimo

$$\begin{aligned} 2^{2^n} - 1 &= (2^{2^{n-1}} + 1)(2^{2^{n-1}} - 1) = \\ &= (2^{2^{n-1}} + 1)(2^{2^{n-2}} + 1)(2^{2^{n-2}} - 1) = \dots \\ &= (2^{2^{n-1}} + 1)(2^{2^{n-2}} + 1)(2^{2^{n-3}} + 1) \dots (2^2 + 1)(2^2 - 1) = \\ &= 3 F_1 F_2 F_3 \dots F_{n-1}. \end{aligned}$$

Torej velja

$$F_n - 3 F_1 F_2 F_3 \dots F_{n-1} = 2. \quad (I)$$

Če bi števili F_m in F_n ($m < n$) imeli skupen delitelj, večji od 1, bi le ta delil tudi število 2 in bi bil zato enak 2. To pa je nemogoče, saj so vsa Fermatova števila F_n liha.

- Denimo, da ima množica vseh praštevil n elementov. Potem bi bili med Fermatovimi števili $F_1, F_2, \dots, F_n, F_{n+1}$ vsaj dve deljivi z istim praštevilom. Protislovje!

4. Iz zveze (I) dobimo

$$F_n + 4 = 3(F_1 F_2 F_3 \dots F_{n-1} + 2).$$

Torej so števila $2^{2^n} + 5$ deljiva s 3.

5. Približno velja

$$2^{23471} \doteq 10^{3 \cdot 23471 / 10} \doteq 10^{7041}.$$

Zato je

$$F_{23471} \doteq 2^{10^{7041}} \doteq 10^{3 \cdot 10^{7041} / 10} \doteq 10^{10^{7040}}.$$

Torej ima Fermatovo število F_{23471} v desetiškem zapisu približno 10^{7040} števk, kar je neprimerno več kot je število delcev v vesolju.

6. S pomočjo indukcije je lahko videti, da je $2n \leq 2^n$ za vsako naravno število n . Enakost velja le v primeru, ko je $n = 1$. Zato velja neenakost

$$(2^2)^n = 2^{2n} \leq 2^{2^n}.$$

Torej je večje Fermatovo število F_n ; števili sta enaki le za $n = 1$.

Roman Drnovšek

RAZISKOVALCI V PUŠČAVI - Rešitev s str. 7

Eden od popotnikov bi v najboljšem primeru lahko prodril deset dni hoje daleč v puščavo. To bi lahko dosegli na primer takole: Po dveh dneh hoje se eden od raziskovalcev obrne nazaj, od svojih preostalih 8 dnevnih obrokov vode potrebuje 2 zase za pot nazaj, 6 pa jih shrani na mestu, kjer so se utaborili, za svoje prijatelje za pot nazaj. Drugi raziskovalec se obrne po tretjem dnevu hoje, ko ima še 7 obrokov vode. Od teh dva pusti zakopana za svoja prijatelja, 1 potrebuje zase, štiri pa razdeli preostalima dvema, ki imata tako vsak po 9 obrokov vode. Preostala dva raziskovalca hodita še dva dni skupaj in vsak večer odloži vsak po en obrok za pot nazaj, peti dan pa se tretji raziskovalec obrne in prepusti svojih preostalih 5 obrokov zadnjemu. Ta ima tako spet 10 obrokov vode in lahko nadaljuje pot še 5 dni v puščavo in pet dni nazaj do prvega odlagališča.

Neža Mramor - Kosta

KRIŽANKA AVTORJI SREDNJEŠOLSKIH UČBENIKOV

AVTOR MARKO BOKALIČ	FIZIK (RUDI)	BALADI PODOBNA PESEM	TRI- ATLONEC KOGOJ	SATIRIK PETAN	100 M ²	HOKEJIST ZUPANČIČ	IGRALKA RINA	$\frac{1}{4}$		
MATEMATIK (FRANCE)									IT. KIPAR (BENE- DETTO DA)	FI (IV)
OBRAT EKSPON- NENTNE FUNKCIJE										DEL APA DE (ST)
RIMSKI BOG LJUBEZNI					ZEMLJIŠKA KNJIGA RIM. MIT. POD- ZEMLJE					
KEGLJAČ BIZJAK						OZVEZDJE ŽIVAL KROGA	BRAZILSKO VELE- MESTO DVAJSE- TEREC			
NICK NOLTE			VERJETNO PODR.ELE- KTRONA SOFOKLO- VA DRAMA							
KRAVICA				MESTO V BANATU RAZBOJNIK						
NEMŠKI FILOZOF (IMMA- NUEL)					NEKD. JAP. TELOVA- DEC POHOTNI GOZD. DUH					VAS BA GF
	OBRAT KOTNE FUNKCIJE	TONE FORNEZZI FIZIK (ANTON)				PREDLOG ZMAGO JELINČIČ			IZLOČITEV OSNOVNIH SREDSTEV	UD. OD 1 PRI 1
ENCIM TREBUŠNE SLINAVKE								KVAR		
MOGOČEN OKRAS JELENA								MOŠKO TELOV. ORODJE PESNIK GRUDEN		
CIRKUŠKI ŠALJIVEC						DVOJICA POLOV LOJZE PETERLE				
STRINA					MATEMATIK (PETER)					
UMETNO USNJE					ASTRONOM (MARIJAN)					

VOLILNA ŠTEVILA

1. O volitvah in vedno bolj omejenem kralju

V otoški državi Mali Bilandiji je kralj razpisal parlamentarne volitve. Za oblast se potegujeta dve stranki. Prva je stranka ENS, ki ji ljudje rečejo stranka enistov, druga pa stranka ZRS, ki se je je oprijelo šaljivo ime stranka zeristov. Enisti imajo nedvomno boljšo politično ekipo, vendar pa mnogi menijo, da predsednik stranke ni bil najbolj posrečeno izbran. Zato je upravni odbor enistov sprejel naslednji sklep: če se bo med štetjem glasov v katerem koli trenutku v vodstvu znašla stranka zeristov, bodo predsednika zamenjali.

Volitve so mimo. Zmagala je stranka enistov, ki je zbrala 11.079 glasov. Zeristi so zbrali 6.340 glasov.

Kolikšna je verjetnost, da je predsednik enistov obdržal svoj položaj?

Naloge se bomo lotili nekoliko splošneje. Denimo, da je za eniste glasovalo n , za zeriste pa $n - k$ volilcev ($n \geq k \geq 0$). Skupaj je torej glasovalo $2n - k$ volilcev. Ko komisija prešteva glasove, vzame glasovalni listek, ga odpre in v zapisnik zapiše enko, če je bil na listu glas za eniste, in ničlo, če je bil glas za zeriste. Potek preštevanja nam torej opisuje zaporedje $2n - k$ znakov, od katerih je n enk in $n - k$ ničel. Vseh takih zaporedij je

$$\binom{2n-k}{n},$$

kjer je

$$\binom{m}{k} = \frac{m!}{k!(m-k)!}.$$

Število potekov preštevanja glasov, pri katerih zeristi v nobenem trenutku ne pridejo v vodstvo, označimo z $B_{n,k}$. Verjetnost, da bo predsednik enistov ostal na čelu stranke, je enaka razmerju med številom zanj ugodnih potekov preštevanja glasov in številom vseh potekov preštevanja, torej

$$V = \frac{B_{n,k}}{\binom{2n-k}{n}}.$$

Bolj kot ta verjetnost nas bodo zanimala števila $B_{n,k}$. Imenujejo se *volilna števila*. Ponovimo:

Če na volitvah prva stranka dobi n glasov in druga stranka $n - k$ glasov, nam število $B_{n,k}$ sporoča število možnih preštevanj glasov, pri katerih prva stranka nikoli ne zaostaja za nasprotno. Definicija je smiselna za vsako naravno število n in vsako celo število k z lastnostjo $0 \leq k \leq n$.

Prej smo spoznali, da potek preštevanja lahko ponazorimo z zaporedjem, sestavljenim in n enk in $n - k$ ničel. Katera zaporedja pripadajo tistim preštevanjem volilnih glasov, pri katerih prva stranka nikoli ne zaostaja za drugo? To so zaporedja, pri katerih je levo od vsakega člena vsaj toliko enk kot ničel. To so zaporedja, ki predsedniku enistov zagotavljajo ohranitev položaja. Zato jih bomo imenovali *sprejemljiva* zaporedja.

Na podlagi vsega povedanega se boste bralci gotovo strinjali, da je število $B_{n,k}$ enako številu vseh sprejemljivih zaporedij, sestavljenih iz n enk in $n - k$ ničel. Za primer si oglejmo število $B_{3,1}$. Za tvorbo zaporedij imamo na voljo tri enke in dve ničli. Sprejemljiva zaporedja, ki jih z njimi lahko sestavimo, so naslednja:

```

1 1 1 0 0
1 1 0 1 0
1 1 0 0 1
1 0 1 1 0
1 0 1 0 1

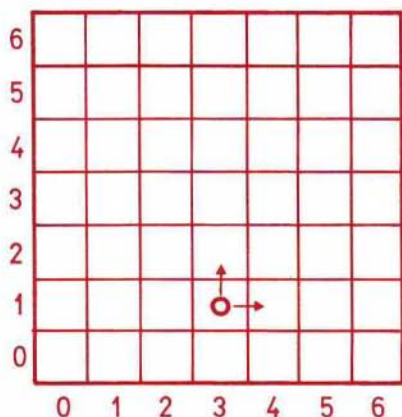
```

Vidimo: $B_{3,1} = 5$.

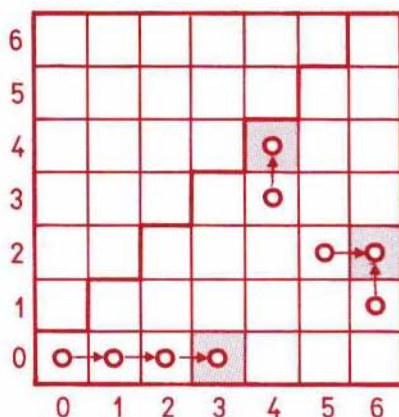
Vljudno je, da v preštevanje glasov vključimo tudi kralja. Postavimo ga na šahovsko desko razsežnosti $(n+1) \times (n+1)$. Polja označimo s pari (x, y) , kjer števili x in y tečeta med 0 in n , pri čemer x označuje stolpce (od leve proti desni), y pa vrstice (od spodaj navzgor) (slika 1). Začnimo preštevati glasove. Če je na lističu glas za eniste, naj se kralj premakne za eno polje v desno, če pa je glas za zeriste, za eno polje navzgor. Če je kralj potovanje začel na polju $(0, 0)$ in je v odvisnosti od glasov delal premike bodisi tipa $(x, y) \rightarrow (x + 1, y)$ bodisi tipa $(x, y) \rightarrow (x, y + 1)$, bo na koncu pristal na polju $(n, n - k)$. Tako smo spoznali, da nam vsak potek preštevanja glasov (to je vsako zaporedje n enk in $n - k$ ničel) določa neko pot kralja od izhodišča $(0, 0)$ do polja $(n, n - k)$. Velja pa tudi obratno: vsaka pot kralja, ki se začne na polju $(0, 0)$, krene na vsakem polju bodisi desno bodisi

navzgor in se konča na polju $(n, n - k)$, nam določa potek glasovanja (desno = glas za eniste, navzgor = glas za zeriste). Potekom preštevanja glasov, kjer predsednik enistov obdrži položaj, ustrezajo tiste poti šahovskega kralja, ki nikoli ne zaidejo nad diagonalo šahovnice.

Redni bralci Preseka ste se ob tem najbrž že spomnili članka Marka Razpeta o šahovskem kralju z omejeno svobodo gibanja, ki je bil objavljen v Preseku **XV** (1987/88), str. 358-361. Naš kralj je za razliko od tistega še bolj omejen, saj mu korak v smeri diagonale $(x, y) \rightarrow (x + 1, y + 1)$ ni več dovoljen.



Slika 1. Oznake in možne poti kralja.



Slika 2. Pojasnilo k rekurzivnim zvezam (2).

Naj bo H_{ij} število poti našega omejenega kralja, ki se začnejo na polju $(0, 0)$, končajo na polju (i, j) , $i \geq j$ in nikoli ne zaidejo na del šahovnice nad diagonalo. Volilna števila so s števili H_{ij} v preprosti zvezi:

$$B_{n,k} = H_{n,n-k}. \quad (1)$$

Iz slike 2 razberemo

$$H_{i,0} = 1, \quad (2)$$

$$H_{i,i} = H_{i,i-1} \quad \text{in} \quad (3)$$

$$H_{ij} = H_{i-1,j} + H_{i,j-1} \quad (i > j). \quad (4)$$

S pomočjo teh zvez se bomo prepričali, da za naravni števili m in n , $n > 0$, $0 \leq m \leq n$ velja

$$H_{n,m} = \frac{n+1-m}{n+1} \binom{n+m}{n}. \quad (5)$$

Dokažimo to zvezo z indukcijo na $n+m$. Naj bo najprej $n+m=1$. To pomeni $n=1$ in $m=0$. Zveza (5) v tem primeru velja, saj je desna stran enaka 1, leva pa tudi (zaradi (2)).

Naj bo $k \geq 1$ naravno število. Predpostavimo, da trditev velja za pare naravnih števil n, m , $n > 0$, $0 \leq m \leq n$ z lastnostjo $n+m=k$. Dokažimo, da velja tudi za pare z lastnostjo $n+m=k+1$:

$$\begin{aligned} H_{n,m} &= H_{n-1,m} + H_{n,m-1} = \\ &= \frac{n-m}{n} \binom{n+m-1}{n-1} + \frac{n-m+2}{n+1} \binom{n+m-1}{n} = \\ &= \frac{n-m+1}{n+1} \binom{n+m}{n}. \end{aligned}$$

Pri prvem enačanju smo uporabili enakost (4), pri drugem induksijsko predpostavko, zadnjo enakost pa preverimo s kratkim računom. S tem je formula (5) dokazana.

Zvezi (1) in (5) pa nam že omogočata izračunati volilna števila:

$$B_{n,k} = \frac{k+1}{n+1} \binom{2n-k}{n}. \quad (6)$$

Verjetnost, da bo predsednik enistov obdržal svoj položaj je zato enaka

$$V = \frac{B_{n,k}}{\binom{2n-k}{n}} = \frac{k+1}{n+1}.$$

V konkretnem primeru imamo $n = 11079$, $n - k = 6340$, $k = 4739$ in

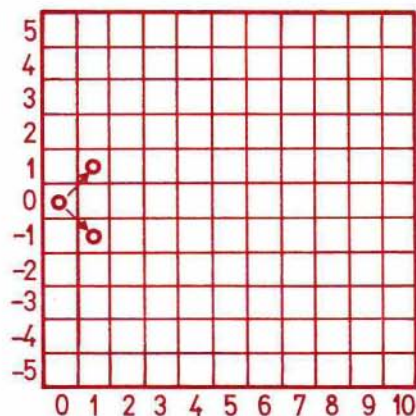
$$V = 4740/11080 = 0.428.$$

Kljub odličnemu volilnemu izidu se je stolček predsedniku krepko zatresel.

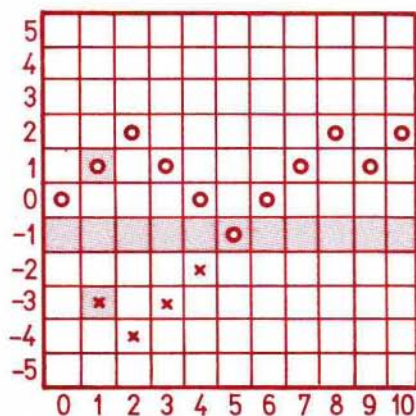
2. Kralj se obnaša drugače, rezultat pa ostaja isti

V tem razdelku bomo spet preštevali glasove, le da bomo kralju na šahovski deski predpisali drugačna pravila obnašanja. Tako bomo (z vašo pomočjo) zvezo (6) dokazali še na drug način.

Vzemimo tokrat šahovsko desko dimenzije vsaj $(2n + 1) \times (2n + 1)$. Polja spet označimo s pari (x, y) , pri čemer označuje x stolpce od leve proti desni ($x = 0, 1, \dots, 2n$), y pa vrstice od spodaj navzgor ($y = -n, -(n - 1), \dots, 0, 1, \dots, n$) (slika 3). Kralja postavimo na polje $(0, 0)$ in začnemo preštovati glasove. Pri vsakem glasu za eniste naj se kralj s svojega polja premakne na polje desno zgoraj (korak $(x, y) \rightarrow (x + 1, y + 1)$), če pa je glas za zeriste, se premakne na polje desno spodaj (korak $(x, y) \rightarrow (x + 1, y - 1)$). Po končanem preštevanju se bo kralj znašel na polju $(2n - k, k)$.



Slika 3. Oznake in možne poti kralja.



Slika 4. Naloga 1.b): Pot (o) in prezrcaljeni del poti (x).

Lepa lastnost takega premikanja kralja je, da nam druga koordinata meri razliko med številom glasov, ki so jih do danega trenutka zbrali enisti, in številom glasov, ki so jih zbrali zeristi. Prva stranka med preštevanjem ne bo nikoli zaostajala za drugo, če kralj na poti ne bo nikoli zašel na polja šahovnice z negativno ordinato.

Na podlagi vsega povedanega lahko sklenemo: število $B_{n,k}$ je enako številu poti šahovskega kralja, ki se začnejo na polju $(0, 0)$, končajo na polju $(2n - k, k)$, na vsakem polju vodijo bodisi desno navzgor bodisi desno navzdol in nikoli ne zaidejo na polja z negativnimi ordinatami.

Upam, da boste število teh poti s pomočjo naslednjih navodil uspeli izračunati sami.

Naloga za bralce:

(a) Koliko je vseh poti šahovskega kralja, ki začnejo na polju $(1, 1)$, končajo na polju $(2n - k, k)$ in na vsakem polju vodijo bodisi na polje desno zgoraj bodisi desno spodaj?

(b) Naj bo P ena od poti iz točke (a), ki na polju $(s, -1)$ prvič zaide na spodnji del šahovnice (kjer so polja z negativnimi ordinatami). Če del poti P med poljem $(1, 1)$ in poljem $(s, -1)$ prezrcalimo preko vrstice $y = -1$, dobimo pot z začetkom na polju $(1, -3)$ (slika 4). Premislite, da je vseh poti z začetkom na polju $(1, 1)$ in koncem na polju $(2n - k, k)$, ki zaidejo na spodnji del šahovske deske, natanko toliko, kot je vseh poti z začetkom na polju $(1, -3)$ in koncem na $(2n - k, k)$. Koliko je torej teh poti?

(c) Upoštevajte, da se mora kralj, če noče na spodnjo polovico šahovnice, v prvi potezi premakniti na polje $(1, 1)$ in s pomočjo točk (a) in (b) izpeljite (6).

3. Kraljevi dosje o volilnih številih

Iz trezorja kraljeve obveščevalne službe sem uspel dobiti spisek začetnih volilnih števil. Seveda ga z veseljem objavljam:

8								1
7							1	8
6					1		7	35
5				1	6		27	110
4			1	5	20		75	275
3			1	4	14	48	165	572
2		1	3	9	28	90	297	1001
1	1	2	5	14	42	132	429	1430
0	1	2	5	14	42	132	429	1430
k/n	1	2	3	4	5	6	7	8

Poleg vlamljanja v kraljeve trezorje lahko do tega spiska pridete še najmanj na dva načina. Prvi je neposredni izračun s pomočjo zveze (6). Pri drugem načinu pa se opremo na rekurzivne zveze, ki jih dobimo, če upoštevamo (1) in (2 - 4):

$$B_{n,n} = 1, \quad (7)$$

$$B_{n,0} = B_{n,1} \quad \text{in} \quad (8)$$

$$B_{n,k} = B_{n-1,k-1} + B_{n,k+1} \quad (n > k > 0). \quad (9)$$

Drugi način je ugodnejši, saj lahko z njim tabelo sestavite hitro in na pamet. Najprej na diagonalo zapišete enke (enakost (7)), nato upoštevate zvezo (8) in dobite prvo število v vrstici $k = 0$. To vam, skupaj z (9), omogoča računanje števil na prvi poddiagonali (glej puščice). Podobno postopamo pri računanju druge in vseh nadaljnjih poddiagonal.

Naj ob koncu bralce opozorim na spodnjo vrstico seznama volilnih števil:

1, 2, 5, 14, 42, 132, 429, 1430, ...

To so tako imenovana *Catalanova števila*:

$$C_n = B_{n,0} = \frac{1}{n+1} \binom{2n}{n} \quad n = 1, 2, \dots \quad (10)$$

Bralci Preseka ste jih že srečali, in sicer v članku Romana Drnovška o Eulerjevem problemu delitve konveksnega večkotnika na trikotnike, ki je izšel v zadnji številki lanskega letnika Preseka. Števili c_n in e_n iz tega članka sta namreč s Catalanovimi števili v preprosti zvezi: $c_n = C_{n-1}$, $e_n = C_{n-2}$. To najhitreje dokažemo takole:

$$e_n = \frac{1}{2n-3} \binom{2n-3}{n-2} = \frac{1}{n-1} \binom{2n-4}{n-2} = C_{n-2} \quad n = 3, 4, \dots$$

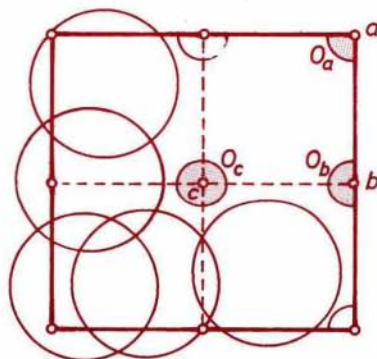
Prvi enačaj je dokazan v omenjenem članku, drugega preverimo s kratkim računom, tretji pa sledi iz (10).

Bojan Hvala

KVADRAT POD KROGI – Rešitev s str. 59

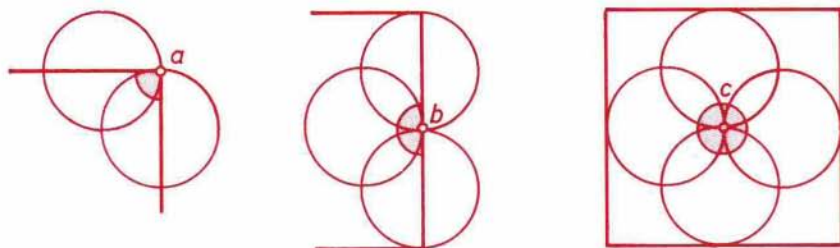
Najprej dokažimo, da je za pokritje kvadrata K s stanico 2 potrebno vsaj 9 krogov premera 1.

Oglišča kvadrata, razpolovišča njegovih stranic in središče kvadrata zberimo v množico $\mathcal{M}$, pokritje $\mathcal{P}$ kvadrata K pa naj sestavlja p krogov. Razdelimo $\mathcal{P}$ na dve skupini, $\mathcal{P}_1$ in $\mathcal{P}_2$. V $\mathcal{P}_1$ naj bodo krogi, ki vsebujejo največ eno točko iz $\mathcal{M}$, v $\mathcal{P}_2$ pa krogi, ki vsebujejo po dve točki iz $\mathcal{M}$. Naj bo v prvi skupini p_1 , v drugi pa p_2 krogov in tedaj $p_1 + p_2 = p$. Zaznamujmo z $\mathcal{M}_1$ množico vseh točk iz $\mathcal{M}$, ki jih vsebujejo krogi iz $\mathcal{P}_1$. Če



Slika 1. Družina $\mathcal{P}_1$ in okolica $\mathcal{O}_x$, $x \in \mathcal{M}_2$.

REŠITVE NALOG

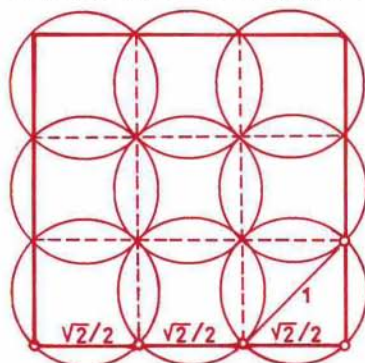


Slika 2. Različne točke $x \in \mathcal{M}_2$ in njihove okolice O_x , pokrite s krogi iz $\mathcal{P}_2$.

je teh točk m_1 , seveda velja $m_1 \leq p_1$. Vsaka točka $x \in \mathcal{M}_2 = \mathcal{M} \setminus \mathcal{M}_1$ ima v kvadratu K okolico O_x , ki ne seka nobenega kroga skupine $\mathcal{P}_1$ (glej sliko 1). Zato morajo krogi iz $\mathcal{P}_2$ pokriti vseh m_2 točk iz $\mathcal{M}_2$ skupaj z omenjenimi okolici vred. Vsak krog skupine $\mathcal{P}_2$ pokrije največ dve točki iz $\mathcal{M}_2$,

za okolico O_x katerekoli točke $x \in \mathcal{M}_2$ pa sta potrebna vsaj dva kroga iz $\mathcal{P}_2$ (glej sliko 2). Zato velja $p_2 \geq m_2 = 9 - m_1$, od koder s pomočjo neenakosti $p_1 \geq m_1$ dobimo iskano oceno $p = p_1 + p_2 \geq 9$.

Iz slike 3 vidimo, da z devetimi krogi premera 1 lahko pokrijemo celo kvadrat s stranico $3(\sqrt{2}/2) > 2$.



Slika 3.

Boris Lavrič

KVADRAT IN KUB – Rešitev s str. 15

Naj bo $n > 1$ naravno število in $d(n)$ število vseh njegovih naravnih deliteljev. Naloga torej sprašuje po rešitvah enačb $n = d(n)^2$ in $n = d(n)^3$. V obeh primerih si bomo pomagali z razcepom števila n na prafaktorje

$$n = p_1^{n_1} p_2^{n_2} \cdots p_k^{n_k}, \quad n_i \in \mathbb{N}, \quad i = 1, 2, \dots, k$$

in pri tem praštevila $p_1, p_2, \dots, p_k$ uredili po velikosti: $p_1 < p_2 < \dots < p_k$. Uporabili bomo znano formulo

$$d(n) = (n_1 + 1) \cdots (n_k + 1).$$

Lotimo se najprej prve enačbe. Ker je n popolni kvadrat, so eksponenti $n_1, \dots, n_k$ sodi, torej $n_i = 2m_i$, $m_i \in \mathbb{N}$, $i = 1, \dots, k$. Enačba se tedaj glasi

$$p_1^{m_1} \cdots p_k^{m_k} = (2m_1 + 1) \cdots (2m_k + 1).$$

Ker je produkt na desni strani enačbe lih, med praštevili na levi ni števila 2. Primerjajmo istoležna faktorja p^m in $2m + 1$ obravnavane enačbe. S pomočjo matematične indukcije brž vidimo, da za vsak $p \geq 3$ in $m \in \mathbb{N}$ velja $p^m \geq 2m + 1$. Ker je enačaja dosežen le pri $p = 3$ in $m = 1$, je edina rešitev enačbe $n = d(n)^2$ število $n = 3^2 = 9$.

Drugo enačbo rešimo podobno. Najprej ugotovimo, da so eksponenti $n_1, \dots, n_k$ deljivi s 3, torej $n_i = 3m_i$, $m_i \in \mathbb{N}$, $i = 1, \dots, k$ in tedaj

$$p_1^{m_1} \cdots p_k^{m_k} = (3m_1 + 1) \cdots (3m_k + 1).$$

Ker produkt na desni strani enačbe ni deljiv s 3, med praštevili na levi ni števila 3. Spet primerjamo istoležna faktorja p^m in $3m + 1$ obravnavane enačbe. Ker za $p \geq 5$ in poljuben $m \in \mathbb{N}$ velja $p^m > 3m + 1$, je $p_1 = 2$, zaradi $2^m > 3m + 1$ pri $m \geq 4$ pa tedaj $m_1 \in \{1, 2, 3\}$. Število m_1 je različno od 1, saj bi bila sicer desna stran enačbe deljiva s 4, leva pa ne.

Pri $m_1 = 2$ je prvi faktor na desni enak 7, zato $p_2 = 7$ ali $p_3 = 7$. Ker velja

$$2^2 7^m \geq 7(3m + 1) \quad \text{za vsak } m \in \mathbb{N}$$

in je enačaja dosežen le pri $m = 1$, v primeru $m_1 = 2$ velja $p_2 = 7$ in $k = 2$, od koder sledi $n = (2^2 7^1)^3 = 21952$.

Pri $m_1 = 3$ je desna stran enačbe deljiva s 5, zato je $p_2 = 5$. Ker velja

$$2^3 5^m \geq 10(3m + 1) \quad \text{za vsak } m \in \mathbb{N}$$

in je enačaja dosežen le pri $m = 1$, v primeru $m_1 = 3$ velja $p_2 = 5$ in $k = 2$. Od tod takoj dobimo $n = (2^3 5^1)^3 = 64000$.

Števili $n = 21952$ in $n = 64000$ sta torej edini rešitvi enačbe $n = d(n)^3$.

ASTRONOMIJA

KOLEDAR

Tropsko leto je časovni presledek med dvema zaporednima prehodoma Sonca skozi pomladišče in traja

$$365^d 5^h 48^m 46^s = 365,2421991^d.$$

Koledarsko leto mora imeti seveda celo število dni. Od tod težave z usklajevanjem koledarskega in tropskega leta, ki so jih reševali z uvajanjem prestopnih let: po primernem številu let, ki so krajša od tropskega leta, nastopi leto, ki naj zaostanek za Soncem poravna z dodatnim dnevom.

Določimo razmerje med številom navadnih (n) in prestopnih (p) let! Biti mora

$$365,2421991(n + p) = 365n + 366p.$$

Za razmerje sledi

$$n : p = 0,7578009 : 0,2421991.$$

Takoj vidimo, da je približno razmerje

$$n : p = 3 : 1,$$

da je torej med štirimi leti četrto prestopno. Bodimo natančnejši! Vzemimo daljše obdobje, npr. 100 let! Razmerje, zaokroženo na cela števila, je

$$n : p = 76 : 24,$$

torej je od 100 let prestopnih le 24. Koledarsko leto traja $(76 \times 365 + 24 \times 366) : 100 = 365,24^d$ in je za $0,0021991^d = 3^m 10^s$ krajše od tropskega. Ta model ni uporabljen za koledar.

Julijanski koledar je "slabo zaokrožil" razmerje in ima v 100 letih 75 navadnih ter 25 prestopnih let. Zato traja julijansko leto $365,25^d$ in je za $0,0078009^d = 11^m 14^s$ predolgo.

V 400 letih je razmerje $n : p = 303 : 97$. Tak je sedaj za večino sveta veljavni gregorijanski koledar, katerega leto traja $(303 \times 365 + 97 \times 366) : 400 = 365,2425^d$. Leto je predolgo za $0,0003009^d$ ali za 26^s .

V 1000 letih je razmerje $n : p = 758 : 242$. Leto traja $(758 \times 365 + 242 \times 366) : 1000 = 365,242^d$ in se ujema s tropskim letom na tri decimalke. Je prekratko za $0,0001991^d = 17^s$. Niti ta model ni bil uporabljen za koledar.

Za 10000 let je razmerje $n : p = 7578 : 2422$. Leto po tem koledarju, ki ga je predlagal Milutin Milanković, traja $(7578 \times 365 + 2422 \times 366) : 10000 = 365,2422222^d$. Koledarsko leto je le za $0,0000231^d = 2^s$ daljše od tropskega leta. Prepričate se lahko, da nadaljnje izboljšave niso možne, vsaj ne za človeška merila.

Ta koledar, ki tudi ni uporabljen, se šele čez 43200 let razhaja s tropskim letom za 1 dan, medtem ko se to zgodi v julijanskem oz. gregorijanskem koledarju vsakih 128 oz. 3323 let.

Naj dodam, da nam pravzaprav ni treba imeti kakšnega posebnega pravila za koledar za daljše obdobje. Kadar bodo astronomi ugotovili, da se koledar preveč razhaja s Soncem, bodo uvedli leto z izrednim številom dni, kak mesec skrajšali ali podaljšali in razhajanje popravili. Je pa zanimivo, če vemo, da se da koledar izvrstno prilagoditi Soncu.

Ko je določeno število navadnih in prestopnih let, je treba ta leta čimbolj enakomerno razporediti v zaporedje, da se razlike sproti poravnavaajo.

Po julijanskem koledarju je vsako četrto leto prestopno. Zato ta koledar vedno bolj zaostaja za Soncem. V 400 letih je zaostajanje že kar 3 dni. Zato je po gregorijanskem koledarju le 97 prestopnih let. Od štirih "let stoletja" je le eno prestopno, tisto, katerega število stoletij je deljivo s 4, preostala pa so navadna: leta 1700, 1800 in 1900 niso bila prestopna, bo pa leto 2000. Zato julijanski koledar, ki je v času gregorijanske reforme zaostajal že za 10 dni za Soncem, v XX. (in tudi XXI. stoletju) zaostaja za 13 dni.

Milankovićev koledar ima v 10000 letih 2422 prestopnih let, kar je za 78 manj kot v julijanskem koledarju za tako dobo. Drugače povedano: med 100 "leti stoletij" je le 22 prestopnih. Ker je to nekako vsako 4'5-to "leto stoletja", si po tem koledarju sledijo prestopna leta stoletja izmenoma s presledki po 400 in 500 let. Leto 2000 je po vseh treh koledarjih prestopno. Naslednja so po gregorijanskem 2400, 2800, 3200..., po Milankovićevem pa so 2400, 2900, 3300, 3800..., po julijanskem pa so vsa "leta stoletja" prestopna.

Kot velja za gregorijanski koledar pravilo, da je "leto stoletja" prestopno, če je število stoletij deljivo s 4 oz. da je pri deljenju s 4 ostanek nič, ima tudi Milankovićev koledar podobno pravilo za prestopna "leta stoletja": Prestopna so tista leta stoletij, katerih število stoletij da pri deljenju z 9 ostanek 2 ali 6. To za omenjena prestopna leta velja, vmesna pa imajo drugačne ostanke.

Kateri dan pa je v prestopnem letu tisti dodani, prestopni dan? To ni, kot navadno mislimo, 29. februar, ampak je 25. februar. Stari Rimljani so dneve v mesecu šteli drugače kot mi. Tako je bil 24. februar "šesti dan pred marčevskimi Kalendami", 25. februar "peti dan pred marčevskimi

TEKMOVANJA

Kalendami" in tako naprej. Prvi marec so bile marčevske Kalende pa tudi "prvi dan". V prestopnem letu so imeli dva "šesta dneva pred marčevskimi Kalendami". Drugemu, ki je bil prestopni dan, so rekli "drugi šesti dan" ali bissextus. Francozom je še danes prestopno leto "l'année bissextile", leto z "dvema šestima dnevoma pred (marčevskimi) Kalendami".

Dušan Modic

IZBIRNO TEKMOVANJE IZ MATEMATIKE

Na izbirnem tekmovanju iz matematike 17. aprila 1993 se je skoraj 3300 srednješolcev iz 64 šol spoprijelo z naslednjimi nalogami:

Prvi letnik

1. Za katera naravna števila n je število $14^n - 1$ deljivo s 15?
2. Po ravnini leze polž s stalno hitrostjo. Vsakih 15 minut se obrne za 90° (v levo ali desno) glede na smer gibanja. Dokaži, da se lahko vrne v izhodiščno točko le po vsakem celem številu ur.
3. Skozi točko v notranjosti trikotnika potegnemo vzporednice stranicam trikotnika in razdelimo trikotnik na šest likov, od katerih so trije trikotniki. Izrazi ploščino trikotnika s ploščinami teh treh trikotnikov.
4. Če v avtomat vržemo en rdeč žeton, nam vrne pet modrih; če pa v avtomat vržemo en moder žeton, nam vrne pet rdečih. Ali lahko Peter, ki ima na začetku en žeton, priigra enako število rdečih in modrih žetonov?

Drugi letnik

1. Dokaži, da je predzadnja številka vsakega števila 3^n ($n \in \mathbb{N}$) soda.
2. Na stranicah AB in CD kvadrata $ABCD$ se nahajata točki K in L zaporedoma. Izberimo točko M na daljici KL . Kroga, očrtana trikotnikoma AKM in MLC , se sekata v dveh točkah: M in N . Dokaži, da točka N leži na diagonalni AC .
3. Za neki $c \in \mathbb{R}$ ima kvadratna enačba $x^2 - x + c = 0$ racionalna korena p in q . Dokaži, da sta tudi korena enačbe $x^2 + px - q = 0$ racionalna.

4. Poišči vse realne rešitve sistema

$$a_1 + a_2 + \dots + a_{1993} = 1993$$

$$a_1^2 + a_2^2 + \dots + a_{1993}^2 = a_1 a_2 + a_2 a_3 + \dots + a_{1992} a_{1993} + a_{1993} a_1.$$

Tretji letnik

1. Naravno število ima desetiški zapis $\overline{ababab}$. Dokaži, da nima nobenega praštevilskega faktorja večjega od 97.
2. Na krožnici izberemo zaporedoma točke A, B, C in D . Dokaži, da je tetiva, ki spaja razpolovišči lokov $\widehat{AB}$ in $\widehat{CD}$, pravokotna na tetivo, ki spaja razpolovišči lokov $\widehat{BC}$ in $\widehat{DA}$.
3. V trapezu $ABCD$ označimo z M presečišče njegovih diagonal. Osnovnica AB je pravokotna na AD . V trapez lahko včrtamo krog s polmerom r . Izračunaj ploščino trikotnika MBC .
4. Dokaži neenakost

$$\arctg x + \arctg y \leq 3 \arctg \frac{x+y}{2}$$

za pozitivni realni števili x in y .

Četrti letnik

1. Poišči vse rešitve enačbe $m! + 2 = n^2$, kjer sta m in n naravni števili.
2. Robovi tristrane piramide predstavljajo vektorje $\vec{a}_1, \dots, \vec{a}_6$. Ali je mož te vektorje tako usmeriti, da bo njihova vsota ničelni vektor?
3. Prvi člen zaporedja a_n naj bo poljubno naravno število, člen a_{n+1} pa naj bo vsota tretjih potenc števk števila a_n . Dokaži, je zaporedje od neke naprej periodično.
4. Enakokraki trapez, ki ni pravokotnik, imenujemo *pravi* trapez.
 - (a) Ali je mož razrezati enakostranični trikotnik na prave trapeze?
 - (b) Ali je mož razrezati kvadrat na prave trapeze?

Najbolj obetavne mlade matematike je tekmovalna komisija povabila na državno tekmovanje, ki je bilo 22. maja 1993 v Kopru.

Matjaž Željko

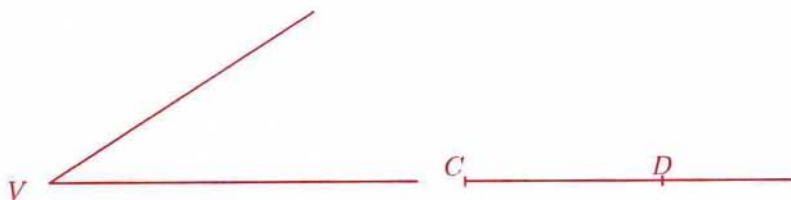
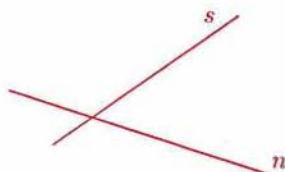
NALOGI ZA OGREVANJE

Naloge so v letu 1993 reševali učenci osnovnih šol v občini *Ljubljana Moste Polje* na šolskem tekmovanju za bronasto Vegovo priznanje. Tudi letos smo jih izbrali, priredili oziroma sestavili učitelji na sestanku občinskega aktiva.

5. razred

1. Tone, Metka in Jure so skupaj nabirali gobe. Ko so se zbrali, so ugotovili, da mora Tone dati Metki 3 gobe in Metka Juretu 5 gob, da jih bo vsak od njih imel enako. To so tudi storili in vsak je imel v košari 16 gob. Koliko gob je kdo nabral?
2. Reši enačbo:

$$2316 - x = 2316 : (6^2 : 3 - 6).$$
3. Dani sta premici s in n . Nariši krožnico s polmerom 2.5 cm tako, da bosta premici s in n njeni tangenti.
4. V 5. razredu je 27 učencev; 9 učencev ima odličen uspeh, 12 učencev vzorno vedenje; 11 učencev nima niti odličnega uspeha niti vzornega vedenja. Koliko je v tem razredu učencev, ki imajo odličen uspeh in vzorno vedenje?
5. V notranjosti danega ostrega kota z vrhom V izberi točko V_1 . Iz točke V_1 nariši poltraka pravokotno na kraka danega kota. Dobil si dva kota $\sphericalangle V$ in $\sphericalangle V_1$. Danima kotoma nariši skladna kota, ki imata skupen krak – poltrak CD . Primerjaj ju po velikosti.

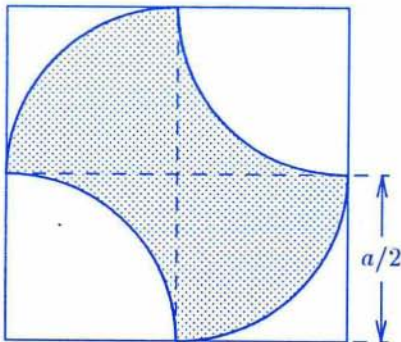


6. razred

1. Izračunaj vrednost izraza $\left(6\frac{3}{7} - 2\frac{12}{14}\right) \cdot 2.8 + 1.75 \cdot 20 + 1758$.
2. Na dvorišču so 3 race več, kot je mačk. Skupaj imajo 60 nog. Koliko je rac?
3. Pravokotno šolsko igrišče, ki je bilo 80 m dolgo in 48 m široko, so povečali tako, da so zvečali dolžino za 15%, širino pa za četrtno. Za koliko % je sedaj ploščina igrišča večja?
4. V trikotniku $\triangle ABC$ je $\alpha = 58^\circ$ in $\beta = 84^\circ$. Kolikšen je kot med simetralo kota γ in višino na stranico c ?
5. Načrtaj enakokraki trapez, če je: $a = 6.5$ cm, $c = 3.6$ cm in $\alpha = 75^\circ$.

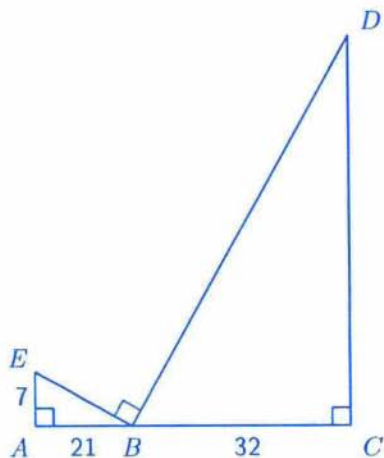
7. razred

1. Izračunaj vrednost izraza $\frac{3.25 + 3 \cdot \frac{1}{5} - (-\frac{1}{2})^2}{3\frac{4}{5} - \frac{4}{5} \cdot (-1\frac{1}{4})} : \left(-\frac{1}{2}\right)^3 - 1$.
2. V trikotniku $\triangle ABC$ meri kot $\alpha 40^\circ$, β pa 74° . Nariši simetrali njunih zunanjih kotov in izračunaj kot, ki ga oklepata.
3. V koordinatnem sistemu nariši točki $A(5, -1)$ in $B(3, 3)$. Točki zrcali čez ordinatno os. Zapiši koordinati točk A' in B' . Nariši štirikotnik $ABB'A'$ in izračunaj njegovo ploščino.
4. Šola ima premoga za 90 dni, če ga porabi dnevno 700 kg. Po 30 dneh znižajo dnevno porabo na 525 kg. Za koliko dni bo zdaj zadoščala zaloga premoga?
5. Kvadratu s stranico a je včrtan lik, ki ga vidiš na sliki. Izrazi a obseg in ploščino tega lika.



8. razred

1. Izračunaj m , če veš, da sta enačbi $3x - 4m = \frac{1}{2}$ in $1.5 + \frac{x-5}{3} = \frac{3x}{2} - \frac{x-2}{6}$ ekvivalentni.
2. Določi notranje kote štirikotnika, če je drugi $\frac{4}{5}$ prvega, tretji $\frac{7}{8}$ drugega in četrti $\frac{5}{7}$ tretjega.
3. Za koliko % se spremeni prostornina kvadra, če se dolžina in širina povečata za 10%, višina pa se zmanjša za 10%?
4. V enakostraničnem trikotniku s stranico a je narisana krožni lok s središčem v oglišču C , ki razdeli trikotnik na dva plosčinsko enaka dela. Izrazi polmer loka s stranico a . Približno kolikšen del stranice a je polmer loka?
5. Opazovalec mora iz točke E določiti višino drevesa, ki je na sliki predstavljeno z daljico CD .
 - a) Kolikšna je ta višina, če številke na sliki predstavljajo dolžine v dm?
 - b) Izračunaj približek razdalje točke E od vrha drevesa D .



Aleksander Potočnik

SAM

Koliko dni potrebuje en sam popotnik, da prečka čisto prazno in izsušeno puščavo široko sto milj, če lahko na dan prehodi 20 milj, hrane in vode pa lahko nese za tri dni hoje? Zaradi enostavnosti predpostavimo še to, da je med kraji, kjer lahko varno shrani hrano in vodo, en cel dan ali več celih dni hoje.

Neža Mramor-Kosta

RAZVEDRILO

RELATIVNOST HITROSTI

Na zaključni slovesnosti letošnje Mednarodne fizikalne olimpiade v Virginiji je predsednik olimpijskega odbora nobelovec Leon M. Lederman povedal tudi tole anekdoto:

Ko sta se nekega dne Albert Einstein in Niels Bohr sprehajala po gozdu, sta opazila, da jima je začel slediti velik medved. Einstein je začel panično bežati, Bohr pa je ostal miren in ga je hladno podučil:

"Albert, nobenega smisla ni, da bežiš. Medved lahko teče veliko hitreje kot ti!"

Einstein je bežal dalje in, ne da bi se sploh ozrl, odvrnil:

"Že, že, Niels, toda saj sploh ni potrebno, da tečem hitreje kot medved, važno je, da tečem hitreje kot ti!"

Matjaž Vencelj

KRIŽANKA MATEMATIČNI POJMI – Rešitev s str. 32

	ŠESTIŠTROMEN POLIEDR	POVRŠINA KOCKE	$\frac{1}{2}$ B	LOKUS TOČKE	OLIMPIJSKA FIZIKALNA OLIMPIADA	DEKADNA ŠIFRA V BOSI	VEŠTOČNA PRAVILNA KOCKA		VRH KOCKE	OKLADNI TOČKOVNI PROJEKTOR	STROJNO PRAVILNA KOCKA	NAJVEČJA DOVOLNA KOCKA	POVRŠINA KOCKE	VRH KOCKE	ARITMETIKA IN ?
	S	T	O	L	P	E	C		Š	E	S	T	I	L	O
	V	R	S	T	I	C	A		A	F	R	O	D	I	T
	M	I	O	M	S	U	N	G	A	R	I	M	A	R	O
POVRŠINA KOCKE	A	L	P	I	N	A	N	O	R	M	A	L	A	I	N
POVRŠINA KOCKE	I	H	T	A	N	O	N	S	E	N	S	L	O	Č	E
POVRŠINA KOCKE	K	I	R	A	S	S	I	S	I	S	T	R	E	L	O
POVRŠINA KOCKE	O	R	I	K	S	K	G	Č	R	T	D	V	P	O	R
POVRŠINA KOCKE	Z	A	K	O	L	F	I	N	K	E	O	S	O	K	U
POVRŠINA KOCKE	A	L	A	B	A	M	A	A	D	L	A	T	U	S	O
POVRŠINA KOCKE	E	N	U	B	O	Ž	E	C	I	L	I	R	I	L	A
POVRŠINA KOCKE	D	I	P	L	O	M	A	T	C	E	G	N	A	R	E
POVRŠINA KOCKE	E	C	O	S	I	N	A	G	O	G	A	C	I	S	O
POVRŠINA KOCKE	R	A	K	T	R	A	N	S	F	E	R	M	A	V	R

Reševalcem in avtorju se opravičujemo za tehnično napako v zadnji vrsti križanke.

RAČUNALNIŠTVO

O EVKLIDOVEM ALGORITMU

Pri reševanju različnih problemov se večkrat srečamo z iskanjem največjega skupnega delitelja dveh naravnih ali včasih dveh celih števil. Da bomo problem dobro razumeli, si najprej oglejmo natančne definicije obravnavanih pojmov. Pravimo, da celo število a *deli* celo število b , če obstaja tako celo število k , da je $b = ka$. Številu a pravimo tudi *delitelj* števila b . Tako na primer 5 deli 235, saj je $235 = 5 \cdot 47$, medtem ko 7 ne deli 235, saj $\frac{235}{7}$ ni celo število. Prejšnji trditvi krajše zapišemo tudi takole: $5 \mid 235$ in $7 \nmid 235$. Neposredno iz definicije sledi, da imata števili a in $-a$ enake delitelje. Ker je po definiciji kvocient med številom in vsakim njegovim deliteljem celo število, so vsi delitelji neničelnega celega števila a zajeti med števili $-|a|, -|a| + 1, \dots, |a| - 1, |a|$. Izjema je le število 0, ki je deljivo z vsakim celim številom, saj je $0 = 0 \cdot a$ za vsako celo število a .

Številu d , ki deli celi števili a in b , pravimo *skupni delitelj* števil a in b . Ker ima po gornjem razmisleku vsako neničelno celo število le končno mnogo deliteljev, imata poljubni različni celi števili a in b le končno mnogo skupnih deliteljev (saj je vsaj eno od obeh števil različno od nič). Ker pa vsaka končna neprazna množica celih števil vsebuje največje število, obstaja tudi *največje* število v (neprazni, saj števili 1 in -1 delita vsako drugo celo število) množici skupnih deliteljev števil a in b . To število imenujemo *največji skupni delitelj* števil a in b . V računalniških krogih (v katerih prevladuje angleško izrazoslovje) se je za največji skupni delitelj števil a in b uveljavila pisava $\gcd(a, b)$. To je kratica za izraz *greatest common divisor*, ki v angleščini pomeni največji skupni delitelj.

Končajmo z definicijami in pogledjmo, kako izračunamo največji skupni delitelj dveh števil. Vzemimo poljubni naravni števili a in b ter ju razstavimo na prafaktorje:

$$a = p_1^{\alpha_1} \dots p_k^{\alpha_k} \quad \text{in} \quad b = p_1^{\beta_1} \dots p_k^{\beta_k},$$

kjer so $p_1, \dots, p_k$ vsa različna praštevila, ki nastopajo v razcepu števila a , v razcepu števila b ali pa v razcepu obeh, eksponenti $\alpha_1, \dots, \alpha_k$ in $\beta_1, \dots, \beta_k$ pa so naravna števila ali število 0. Vrednost 0 moramo v takem zapisu dovoliti, saj nekateri prafaktorji lahko nastopajo le v razcepu enega od števil a ali b . Ponovimo, da je $a^0 = 1$ za vsako celo število a . Tako imamo

$$882 = 2^1 3^2 5^0 7^2 \quad \text{in} \quad 270 = 2^1 3^3 5^1 7^0.$$

Največji skupni delitelj števil a in b potem lahko zapišemo v obliki

$$\gcd(a, b) = p_1^{\min\{\alpha_1, \beta_1\}} \dots p_k^{\min\{\alpha_k, \beta_k\}}$$

V zgornjem primeru je torej

$$\gcd(882, 270) = 2^1 3^2 5^0 7^0 = 18.$$

Vendar pa največjega skupnega delitelja dveh števil običajno ne iščemo tako, da obe števili razstavimo in izberemo skupne prafaktorje z ustreznimi eksponenti, ampak si raje pomagamo z Evklidovim algoritmom. Kot nam pove njegovo ime, so ga poznali že stari Grki. Omenjen je v sedmi knjigi Evklidovih Elementov. Algoritem temelji na naslednjih preprostih dejstvih:

- Za vsako naravno število a je $\gcd(a, 0) = a$.
- Naj bo $a = kb + r$, kjer je $0 \leq r < b$. Število a torej delimo z naravnim številom b , s k označimo celoštevilski kvocient, z r pa ostanek pri tem deljenju. Potem je $\gcd(a, b) = \gcd(b, r)$.

O veljavnosti prve trditve smo se že prepričali. Skicirajmo še dokaz druge. Pokazali bomo, da so skupni delitelji števil a in b ravno skupni delitelji števil b in r . Potem pa bo tudi največji skupni delitelj v obeh primerih enak. Naj bo d skupni delitelj števil a in b , torej je $a = k_1 d$ in $b = k_2 d$. Ker pa je $r = a - kb = (k_1 - kk_2)d$, število d deli tudi število r . Dokaz, da je vsak skupni delitelj števil b in r tudi skupni delitelj števil a in b , je skoraj enak, zato ga prepuščam bralcu.

Iskanje največjega skupnega delitelja z Evklidovim algoritmom ilustrirajmo na zgornjem primeru:

$$882 = 3 \cdot 270 + 72$$

$$270 = 3 \cdot 72 + 54$$

$$72 = 1 \cdot 54 + 18$$

$$54 = 3 \cdot 18 + 0$$

Največji skupni delitelj števil 882 in 72 je tako zadnji neničelni ostanek, v našem zgledu je to seveda število 18.

Z nekaj znanja programiranja lahko Evklidov algoritem zapišemo kot kratek funkcijski podprogram v programskem jeziku pascal.

```

function GCD(a,b: integer): integer;
{ Izračuna največji skupni delitelj števil a in b z Evklidovim algoritmom. }
var
  r: integer;
begin
  while b <> 0 do begin
    r:=a mod b;           { Izračunamo novi ostanek. }
    a:=b;                 { Prejšnje drugo število postane novo prvo število. }
    b:=r;                 { Novi ostanek postane drugo število. }
  end;
  GCD:=abs(a);
end; { GCD }

```

V rešitvi smo uporabili tudi v pascal vgrajeno funkcijo **mod**. Ta je tesno povezana s funkcijo **div**, ki jo bomo potrebovali kasneje. Klic $a \bmod b$ vrne ostanek pri deljenju števila a s številom b . Predznak ostanka je enak predznaku števila a . Klic $a \div b$ vrne celoštevilski kvocient števil a in b . Kvocient je pozitiven, če imata števili a in b enak predznak, sicer pa je negativen. Na primer:

$$5 \bmod 3 = 5 \bmod -3 = 2 \text{ in } -5 \bmod 3 = -5 \bmod -3 = -2,$$

$$5 \div 3 = -5 \div -3 = 1 \text{ in } 5 \div -3 = -5 \div 3 = -1.$$

Obe operaciji povezuje zveza $a = (a \div b) \cdot b + a \bmod b$, ki velja za vsa cela števila.

Gornji algoritem je tudi zelo robusten. Za pravilno delovanje ni potrebno, da je število a po absolutni vrednosti večje od števila b . Če je število b večje, potem prva ponovitev zanke **while** poskrbi za zamenjavo vrednosti obeh spremenljivk. Prav tako ni nujno, da sta vrednosti obeh parametrov nenegativni. Če sta obe števili negativni, račun poteka enako kot pri pozitivnih podatkih, le da so tudi vsi ostanki negativni. Ker pa je rezultat funkcije GCD absolutna vrednost zadnjega neničelnega ostanka, ti predznaki ne vplivajo na končni rezultat. Če pa sta vhodna podatka različno predznačena, se tudi predznaki ostankov v algoritmu izmenjujejo.

Gornji podprogram lahko sprogramiramo tudi rekurzivno.

```

function GCDr(a,b: integer): integer;
{Rekurzivni Evklidov algoritem. }
begin
  if b=0 then
    GCDr:=abs(a)
  else
    GCDr:=GCDr(b,a mod b);
end; { GCDr }

```

Rekurzivna rešitev je elegantnejša, saj je skoraj dobesedno enaka matematičnemu opisu algoritma s prejšnje strani. Seveda pa ima tudi svoje slabosti. Tako vsak rekurzivni klic porabi nekaj dodatnega prostora in časa za oba parametra in "knjigovodstvo" ob klicu. Poskusi pokažejo, da je gornji rekurzivni podprogram približno dvakrat počasnejši od iterativnega.

In za kaj lahko uporabimo izračunani največji skupni delitelj? Recimo pri reševanju linearne diofantske enačbe z dvema neznankama. Tudi take enačbe so reševali že v antiki, svoje ime pa so dobile po matematiku Diofantu, ki je živel okoli leta 250. Teorija pravi, da je pri izbranih celih številih a , b in c enačba $ax + by = c$ rešljiva v celih številih natanko tedaj, ko $\gcd(a, b)$ deli c . In kako v tem primeru poiščemo kakšno rešitev? Pokazali bomo, da si tudi tu lahko pomagamo z Evklidovim algoritmom. Z njegovo pomočjo bomo poiskali taki celi števili x_0 in y_0 , da bo veljalo

$$ax_0 + by_0 = \gcd(a, b).$$

Oglejmo si postopek na prejšnjem primeru. Zadnji neničelni ostanek želimo zapisati kot celoštevilsko kombinacijo začetnih števil a in b . To dosežemo z zaporednim izražanjem ostankov od zadnjega proti prvemu in vstavljanjem dobljene zveze v prejšnjo vrstico Evklidove sheme. Tako imamo:

$$\begin{aligned} 18 &= 72 - 54 & 54 &= 270 - 3 \cdot 72 \\ &= 72 - (270 - 3 \cdot 72) \\ &= -270 + 4 \cdot 72 & 72 &= 882 - 3 \cdot 270 \\ &= -270 + 4 \cdot (882 - 3 \cdot 270) \\ &= 4 \cdot 882 - 13 \cdot 270 \end{aligned}$$

Vzamemo $x_0 = 4$ in $y_0 = -13$ in naloga je rešena.

Vendar pa je računanje s svinčnikom in papirjem naporno in zamudno, pa tudi napake se rade prikradejo v naše zapiske. Zato raje poskusimo napisati podprogram, ki bo to "zoprno" in zamudno delo opravil namesto nas. Tako dopolnjeni Evklidov algoritem bomo imenovali *razširjeni Evklidov algoritem*. Seveda pa moramo postopek sprogramirati tako, da bomo prepričani, da deluje pravilno, in da bomo znali to svoje prepričanje tudi ustrezno utemeljiti. Zato si najprej na prejšnjem primeru oglejmo nekoliko drugačen in bolj pregleden zapis razširjenega Evklidovega algoritma:

$$\begin{aligned}
 1 \cdot 882 + 0 \cdot 270 &= 882 \\
 0 \cdot 882 + 1 \cdot 270 &= 270 / \cdot 3 \\
 1 \cdot 882 + (-3) \cdot 270 &= 72 / \cdot 3 \\
 (-3) \cdot 882 + 10 \cdot 270 &= 54 / \cdot 1 \\
 4 \cdot 882 + (-13) \cdot 270 &= 18 / \cdot 3 \\
 (-15) \cdot 882 + 49 \cdot 270 &= 0
 \end{aligned}$$

Prvi dve vrstici zgornje sheme trdita očitno resnico o obeh vhodnih podatkih. Nato z desnimi stranmi enakosti opravimo običajni Evklidov algoritem: izračunamo celoštevilski kvocient med zadnjima dvema desnima stranema, pomnožimo z njim zadnjo enačbo in jo odštejemo od predzadnje. Ko je desna stran nove enačbe enaka 0, se ustavimo. Predzadnja enačba je iskani zapis največjega skupnega delitelja kot celoštevilске kombinacije začetnih števil a in b . Mimogrede nam zadnja enačba razkrije še najmanjši skupni večkratnik začetnih števil a in b . V prejšnjem primeru je to $15 \cdot 882 = 49 \cdot 270 = 13230$. Da je to vedno res, naj se bralec prepriča sam.

Zgornje sheme pa ni težko zapisati v obliki podprograma v pascalu.

```

function razsGCD(a,b: integer; var x0,y0: integer): integer;
{Poišče največji skupni delitelj števil a in b ter njegov zapis kot}
{celoštevilsko kombinacijo števil a in b s koeficientoma x0 in y0.}
var
  x1,y1,k,t: integer;
begin
  x0:=1; y0:=0;
  x1:=0; y1:=1;
  while b<>0 do begin
    k:=a div b;
    t:=b; b:=a-k*b; a:=t;
    t:=x1; x1:=x0-k*x1; x0:=t;
    t:=y1; y1:=y0-k*y1; y0:=t;
  end;
  razsGCD:=a;
end; {razsGCD}

```

Poskusimo še nekoliko analizirati Evklidov algoritem. Koliko deljenj moramo opraviti v najslabšem primeru, če z Evklidovim algoritmom iščemo največji skupni delitelj naravnih števil a in b ? Odgovor na to vprašanje je povezan s Fibonaccijevimi števili. To je zaporedje števil $f_1, f_2, f_3, \dots$, ki je določeno takole. Prva dva člena zaporedja sta enaka 1: torej $f_1 = f_2 = 1$, vsak nadaljnji člen pa je vsota predhodnih dveh: $f_{n+1} = f_n + f_{n-1}$ za

$n \geq 2$. Začetek zaporedja Fibonaccijevih števil je tako 1, 1, 2, 3, 5, 8, 13, ... Z indukcijo se zlahka prepričamo, da potrebujemo za izračun največjega skupnega delitelja števil f_{n+1} in f_n z Evklidovim algoritmom natanko n deljenj. Ko namreč opravimo prvo deljenje, je ostanek ravno število f_{n-1} . Za izračun največjega skupnega delitelja števil f_n in f_{n-1} po induksijski predpostavki potrebujemo $n-1$ deljenj, skupaj torej natanko n . (Mimogrede tudi opazimo, da sta zaporedni Fibonaccijevi števili tuji.)

Pokažimo še nekakšen obrat zgornje trditve. Naj bosta a in b naravni števili, pri katerih je Evklidov algoritem potreboval natanko n deljenj za izračun njunega največjega skupnega delitelja. Privzeli bomo, da je $a > b$. Ostanke, ki se pojavijo v algoritmu, označimo z $r_1, r_2, \dots, r_n = 0$, kvociente pa s $k_1, k_2, \dots, k_n$. Posebej definiramo $r_{-1} = a$ in $r_0 = b$. Pri izračunu $\gcd(882, 270)$ je torej zaporedje ostankov 882, 270, 72, 54, 18, 0, zaporedje kvocientov pa je 3, 3, 1, 3. Ker so kvocienti in ostanki dobljeni z Evklidovim algoritmom, za $1 \leq i \leq n$ velja $r_{i-2} = k_i r_{i-1} + r_i$. Z matematično indukcijo bomo pokazali, da velja $r_i \geq f_{n-i}$ za $i = n-1, n-2, \dots, 0, -1$. Ker je zaporedje ostankov strogo padajoče, vsi členi razen zadnjega pa so pozitivni, ocena velja pri $i = n-1$ in pri $i = n-2$. Opravimo še induksijski korak. Prejšnji ostanek r_{i-2} je enak $k_i r_{i-1} + r_i$, to število pa po induksijski predpostavki ni manjše od $f_{n-(i-1)} + f_{n-i} = f_{n-(i-2)}$. Pri oceni smo tudi upoštevali, da so vsi kvocienti k_i naravna števila, torej večji ali enaki 1. Ocene za velikost ostankov so s tem dokazane.

Če v izpeljane neenakosti vstavimo $i = -1$ in $i = 0$, vidimo, da je $a \geq f_{n+1}$ in $b \geq f_n$. Zaporedni Fibonaccijevi števili f_{n+1} in f_n torej tvorita najmanjši par različnih naravnih števil, pri katerih Evklidov algoritem potrebuje za izračun največjega skupnega delitelja n deljenj.

Označimo s φ razmerje zlatega reza, torej $\varphi = \frac{1+\sqrt{5}}{2}$. Pokažimo, da je $f_n \geq \varphi^{n-2}$. Oceno dokažemo z matematično indukcijo. Za $n = 1$ in $n = 2$ trditev očitno drži. Izpeljimo še induksijski korak. Privzemimo, da je $f_n \geq \varphi^{n-2}$ in $f_{n-1} \geq \varphi^{n-3}$. Potem pa je tudi $f_{n+1} = f_n + f_{n-1} \geq \varphi^{n-2} + \varphi^{n-3} = \varphi^{n-3}(\varphi + 1) = \varphi^{n-3}\varphi^2 = \varphi^{n-1}$, saj je $\frac{1+\sqrt{5}}{2} + 1 = (\frac{1+\sqrt{5}}{2})^2$.

Gornji rezultat o številu deljenj, ki jih potrebuje Evklidov algoritem, lahko povemo tudi nekoliko drugače. Ker je $a \geq f_{n+1} \geq \varphi^{n-1}$, z logaritmiranjem dobimo $\log_{\varphi} a \geq n-1$. Število deljenj n , ki jih opravi Evklidov algoritem, je torej kvečjemu $1 + \log_{\varphi} a$.

Martin Juvan

SPODNJA MEJA ŠTEVILA POTREBNIH SEMEN

V visokogorskih krajih je poleti le malo časa za rast buč. Buče so namreč zelo občutljive na mraz. Zato moramo pripraviti sadike v topli gredi in jih presaditi, ko je čas za to primeren. Vzemimo, da imamo bučno seme, ki ima 50 odstotno kaljivost. Nastane vprašanje, koliko zrn moramo posaditi, da bo zraslo, denimo, več kot 140 sadik. Če bi nam na to vprašanje nekdo kar naravnost odgovoril, da jih potrebujemo pač 280, bi to pomenilo, da ne pozna dobro pojma kaljivost. Podatek, da ima seme 50 odstotno kaljivost, namreč pomeni, da je za vsako seme verjetnost, da bo vzkliko, enaka $p = 0,50$. Iz tega podatka bi lahko izračunali verjetnost, da jih bo vzkliko več kot 140 od posejanih 280, vendar to nalogo rešimo nekoliko splošneje.

Označimo s p verjetnost, da bo posamezno seme vzkliko in s $q = 1 - p$ verjetnost, da ne bo. Ker so dogodki, da bo posamezno seme vzkliko, med seboj neodvisni in se zato njihove verjetnosti množijo, je verjetnost dogodka, da bo izmed n posejanih semen vzkliko k izbranih semen, enaka $p^k q^{n-k}$. Ker lahko k semen izberemo izmed n na natanko $\binom{n}{k}$ načinov, je zato verjetnost, da bo izmed n posejanih semen vzkliko natanko k , enaka

$$\binom{n}{k} p^k q^{n-k}.$$

Ta formula je bila prvič objavljena leta 1713, odkril pa jo je eden članov družine znamenitih švicarskih matematikov in fizikov Bernoullijev. Zato ji pravimo Bernoullijeva formula. Zdaj bi lahko izračunali verjetnost dogodka, da bo izmed 280 semen s kaljivostjo $p = 0,50$ vzkliko več kot 140. Ta je enaka $\sum_{k=141}^{280} \binom{280}{k} 0.5^k 0.5^{280-k}$ in te vsote ni kar tako lahko izračunati, če bi se tega lotili členoma. Če kaj vemo o binomskih simbolih, hitro uganemo, da je dovolj izračunati le en člen! Vsota je le malo manjša od polovice, točneje, enaka je 0.476.

Zdaj šele lahko zares zastavimo naše vprašanje. Kot vidimo, lahko pri vsakem številu posejanih semen izračunamo verjetnost dogodka, da bo vzkliko več kot 140 semen. Izberimo si neko verjetnost α , kolikor smo pripravljeni tvegati. Pri tej stopnji tveganja se vprašamo, koliko semen naj posejemo, da jih bo vzkliko več kot 140 z verjetnostjo $1 - \alpha$. Označimo z m najmanjše zaželeno število sadik. Odgovor je: število n mora biti tako, da verjetnost

dogodka, da bo število k vzklilih sadik večje od m , ne bo presegala verjetnosti $1 - \alpha$. Zapišimo s formulo:

$$P(k \geq m) = \sum_{k=m}^n \binom{n}{k} p^k q^{n-k} \geq 1 - \alpha. \quad (a)$$

Zgornja formula je hudo zapletena, zato se je pri reševanju takih in podobnih problemov že zelo kmalu pokazala potreba po preprostejši približni formuli. Prve take formule so nastale že v osemnajstem stoletju. Še danes uporabno formulo pa je izpeljal Laplace že leta 1832. Pokazal je, da se da zgornja vsota nadomestiti s približno enako vrednostjo ploščine pod neko krivuljo, ki ji danes pravimo "normalna krivulja". To krivuljo in njeno ploščino se je dalo tabelirati. Tako so taki problemi postali bolj enostavno, čeprav le približno rešljivi. Po Laplaceovi formuli je zgornja vsota približno enaka

$$P(k \geq m) \cong 0,50 + \Phi\left(-\frac{m - np}{\sqrt{npq}}\right),$$

kjer je Φ tabelirana v [1] in še bolj natančno v [2]. Naš problem se torej približno prevede na problem

$$-\frac{m - np}{\sqrt{npq}} \geq \Phi^{-1}(0,5 - \alpha),$$

kjer smo upoštevali, da je funkcija Φ monotona naraščajoča. Od tod dobimo, če vpeljemo $x = \sqrt{np}$,

$$f(x) = x^2 - x\Phi^{-1}(0,5 - \alpha)\sqrt{q} - m \geq 0.$$

Funkcija $f(x)$ je kvadratna in ima dve ničli, od katerih je ena negativna, druga pa pozitivna, slednjo označimo z x_+ (glej sliko). Ker nas ta funkcija zanima le pri pozitivnih x , rešijo zgornjo neenačbo natanko tisti x , ki niso manjši od x_+ . Torej je odgovor na zastavljeno vprašanje $n \geq \frac{1}{p}x_+^2$.

Oglejmo si zdaj, kako to deluje na konkretnih številih. Izberimo si stopnjo tveganja $\alpha = 0,02$, kaljivost $p = 0,50$ in od tod $q = 0,50$. Iz tabele v [1] izračunamo s pomočjo interpolacije $\Phi^{-1}(0,48) \cong 2,08$. S kvadratno interpolacijo bi lahko dobili precej boljši približek. Z uporabo natančnejše tabele v [2] pa še boljšega 2,054. Od tod dobimo za x_+ približek 12,62, torej mora biti n večji od 318, to pa je le malo več kot 280. Le nekaj več posejanih semen nam torej bistveno zmanjša tveganje, da ne bi dobili dovolj

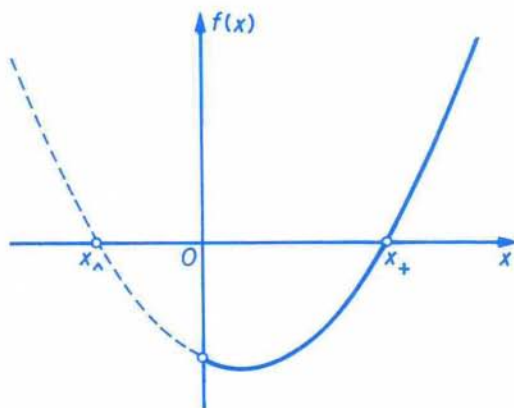
sadik. Ker je dobljeno število precej veliko, lahko naknadno ugotovimo, da je bila uporaba Laplaceove približne formule upravičena, saj je pri tako velikih številih njena napaka v okviru natančnosti našega računanja.

Več o Bernoullijevi in Laplaceovi formuli bralec najde v [2].

Poskušajmo rešiti zgornji problem pri drugih podatkih. Vprašajmo se: Koliko semen naj posadimo v lončke, da bo vzklilo vsaj 14 semen (malo gospodarstvo), pri isti stopnji tveganja (0,02) in enaki kaljivosti (0,50). Čeprav vemo, da je po Laplaceovi formuli ocena za (a) vprašljiva, napravimo ta račun. Po isti poti kot zgoraj dobimo za (število potrebnih semen) $n = 42$, kar ni samo malo več kot $2 \times 14 = 28$. Ali je res zaradi neustrezne uporabe Laplaceove formule ocena za n tako slaba? Ne! Majhen račun pokaže, da je vsota (a) za $n = 40$

$$\sum_{k=14}^{40} \binom{40}{k} p^k q^{n-k} > 0,98$$

pri $n = 39$ pa še ne. Napaka sploh ni velika, 40 namesto 42. Spoznali pa smo, da pri majhnem številu m potrebnih sadik število semen n , ki jih moramo posaditi, ni le malo večje od $\frac{m}{p}$ temveč $n \geq x_+^2/p$.



[1] J.A. Čibej, Verjetnostni račun in statistika, DZS, Ljubljana, 1987

[2] R. Jamnik, Verjetnostni račun, DMFA, Ljubljana, 1987

FIZIKA V UMETNOSTI

... Kje je že bil tisti možakar, ki sem ga videl nekje na sliki? Ah da, v Mrtvem morju, plaval je na hrbtu in bral knjigo pod odprtim senčnikom. Ne bi mogel potoniti, tudi če bi poskušal: tako je gosto od soli. Zato, ker je teža vode, ne, teža telesa v vodi je enaka teži česa že? Ali pa je prostornina enaka teži? Nekakšna taka zakonitost je. Vance v srednji šoli, ki je med poučevanjem pokal s prstnimi členki. Šolski učni načrt. Pokajoči učni načrt. Kaj je pravzaprav teža, ko govoriš o teži? Devet metrov in pol v sekundi v sekundi. Zakon o padajočih telesih: v sekundi v sekundi. Vsa padajo proti zemlji. Zemlja. Sila zemeljske gravitacije je teža...

James Joyce, Ulikses, 1. knjiga, izbral Andrej Likar

NALOGE IZ PROGRAMIRANJA – pascal in logo

Zastavimo si nekaj preprostih programerskih nalog, ki zahtevajo delo z nizi. V programskih jezikih pascal in logo poskušaj sprogramirati rešitve naslednjih štirih nalog.

1. naloga: Napiši funkcijski podprogram, ki kot parameter dobi samostalni ženskega spola s končnico -a in vrne vse sklone tega samostalnika, združene v dolg niz, v katerem so posamezne besede ločene s presledki! Tako pri samostalniku miza dobimo odgovor

miza mize mizi mizo pri mizi z mizo.

2. naloga: Sestavi logično funkcijo, ki za podani besedi ugotovi, ali sta sestavljeni iz enakih znakov! Število pojavitev posameznega znaka pri tem ni pomembno. Tako naj na primer pri besedah kot in otok funkcija vrne vrednost *resnično*, pri besedah kot in otrok pa vrednost *neresnično*.

3. naloga: Napiši logično funkcijo, ki za podani besedi odloči, ali je druga beseda premetanka prve! Funkcija torej vrne vrednost *resnično* natanko tedaj, ko sta besedi sestavljeni iz enakih znakov, pri čemer se tudi število pojavitev posameznih znakov pri obeh besedah ujema. Tako je beseda zima premetanka besede miza, medtem ko beseda romar ni premetanka besede omara.

NALOGE

4. naloga: Pri nekaterih operacijskih sistemih lahko v opisu imen datotek uporabljamo tudi nadomestna znaka * in ?. Prvi nadomesti poljubno zaporedje znakov, drugi pa zamenja le nič ali en znak. Sestavi logično funkcijo, ki za podana niza ugotovi, ali prvi niz ustreza shemi, ki jo določa drugi niz! Tako shemi *a* ustrezajo vsi nizi, ki vsebujejo vsaj eno črko a, shemi z* pa vsi nizi, ki se začno s črko z. Shema ??? opisuje vse nize, ki nimajo več kot treh črk.

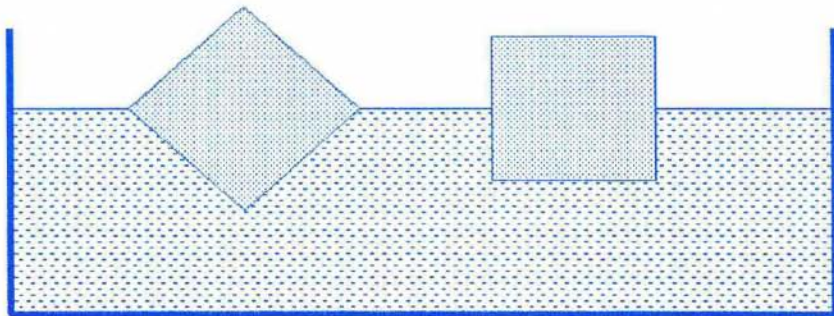
Martin Juvan

PLAVAJOČA PRIZMA

V knjigi Jearla Walkerja *The Flying Circus of Physics* (Leteči fizikalni cirkus) najdemo tudi tole nalogo:

Kako plava homogena dolga kvadratna prizma v tekočini? Tako kot v levem ali kot v desnem primeru na sliki?

Tudi če se zdi odgovor očiten, velja poizkusiti z nekaj dolgimi kvadri iz različnih snovi v različnih tekočinah. Dobljene rezultate uredite glede na razmerje gostot kvadra in tekočine. Se ujemajo z občutkom?



Za Presekovce pa tole dodatno vprašanje: Bi znali s premislekom ugotoviti, kako plava v vodi kvadratna prizma:

1. z gostoto 500 kg/m^3 ,
2. z zelo majhno gostoto,
3. z gostoto, blizu gostote vode?

Matjaž Vencelj

NOVE KNJIGE

Breuer, H.: **ATLAS KLASIČNE IN MODERNE FIZIKE / R. Breuer (risbe); prevedel in priredil J. Strnad. - DZS, Ljubljana 1993, 400 str.**

Ko bi ga imeli pri roki takrat, ko smo se pripravljali na maturo ali na izpit iz fizike! Si predstavljate lepo pregledne rdeče podčrtane zapiske? Pa ne študentovih. Profesorjeve!

Tak vtis je name naredil Atlas klasične in moderne fizike, ko sem ga prvič dobila v roke. Knjiga je v začetku oktobra izšla pri Državni založbi Slovenije. Trdo vezana, na kvalitetnem papirju z lepimi barvnimi slikami in pravnjega (ne prevelikega) formata za knjigo, ki jo pogosto vzameš v roke.

Nemški Atlas zur Physik je napisal Hans Breuer, risbe je narisala Rosemarie Breuer. Slovenska izdaja je nekoliko spremenjena. Profesor Strnad sam pravi v predgovoru takole: *Vrstni red sem prilagodil slovenskim srednješolskim in univerzitetnim učbenikom, popravil napake in izboljšal šibka mesta, ki sem se jih zavedel.*

Z vsebino nas seznani na zadnji strani platnic: *Atlas klasične in moderne fizike je učna knjiga, ki z besedilom, enačbami in risbami daje pregled čez klasično in moderno fiziko. Namenjena je študentom matematike, fizike, tehnike, medicine in drugih strok in diplomantom teh strok ter srednješolcem. V roke jo lahko vzamejo tudi drugi, ki se želijo poučiti o zgradbi fizike nasploh ali o kakem posebnem vprašanju iz nje.*

Knjiga ni učbenik ne leksikon, ampak nekaj med njima. Gradivo obravnava sistematično, ne po geslih. Vendar pojasnjuje pojave, pojme, izreke in zakone dokaj neodvisno, tudi za ceno ponavljanja. Njena posebnost je tudi to, da so risbe enako pomembne kot besedilo in se oboje dopolnjuje.

Pri razvrstitvi poglavij se ravna po naših učbenikih. Uvodnim pripombam o fiziki in matematičnih pomagalah sledijo poglavja klasične fizike: mehanika, toplota, elektrika in optika. Moderna fizika zajema teorijo relativnosti, atomiko in kvantno mehaniko. Precej pozornosti posveča fiziki trdnin, polprevodnikom in polprevodniškim napravam.

Knjiga bo koristna opora pri študiju za izpit, priročnik in berilo za fiziko.

Na naslednjih dveh straneh predstavljamo slučajno odprto stran v knjigi. Knjiga je praviloma organizirana tako, da je na eni od dveh sosednjih strani besedilo, na drugi temu besedilu pripadajoče risbe. Za razliko od prikazanega so v knjigi risbe večbarvne, kar povečuje preglednost vsebine.

Marija Vencelj

Zračni tlak

Zračni tlak pojema z višino. Tlak se zmanjša za :

$$dp = -\rho g dz,$$

ko se dvignemo za majhno višino dz . Os z usmerimo zdaj navpično navzgor, ρ pa je gostota zraka v višini z .

Za gostoto bi po *Boylovem zakonu* veljala zveza $\rho = p'/p'$, če bi bila temperatura ozračja konstantna. ρ' je gostota zraka pri tlaku p' v višini $z = 0$. V tem primeru bi po-
jemanje tlaka opisala *barometrična enačba*:

$$p = p' \exp(-z/z_1).$$

V njej je p tlak v višini z in $z_1 = p'/\rho'g = 8,5$ km. Z barometrično enačbo lahko po tlaku določimo približno višino.

Na Mount Everestu na višini 8,8 km bi bil tlak $1 \text{ bar} \cdot \exp(-8,8/8,5) = 0,36$ bara, torej približno tretjina navadnega zračnega tlaka, če bi veljala barometrična enačba. Zračni tlak bi se v tem primeru zmanjšal na polovico na višini vsa-
kih $8,5 \ln 2 = 5,9$ km.

Vendar temperatura z višino pojema. Za gostoto zraka bi veljala zveza $p = p'(p/p')^{1/\kappa}$, če bi v ozračju veljala enačba *adiabate*. v kateri je $\kappa = c_p/c_v$ razmerje specifičnih toplot, za zrak $\kappa = 1,4$. V tem primeru bi po-
jemanje tlaka opisala enačba:

$$p = p' \left(1 - \frac{\kappa - 1}{\kappa} \cdot \frac{z}{z'} \right)^{\kappa/(\kappa - 1)}$$

V višini $\kappa z'/(\kappa - 1) = 3,5z' = 30$ km bi bil tlak enak 0. Tam bi dosegla temperatura absolutno ničlo, saj je temperatura T soraz-
merna s p na $(\kappa - 1)/\kappa$. Temperatura pade za približno 1 kelvin, ko se dvignemo za 100 m. Ozračje približno opišemo zdaj kot izoter-
mno, zdaj kot adiabatsno.

Črte enakega zračnega tlaka so *izobare*. Na vremenski karti sklenjene izobare nakazujejo območja z visokim ali nizkim zračnim tla-
kom.

Izparilni tlak vode

Tališče in sublimacijska temperatura ter vre-
lišče kapljev so odvisni od tlaka. Posebej
podajmo odvisnost vrelišča vode od tlaka ali
odvisnost izparilnega tlaka vode od tempera-
ture.

tlak	vrelišče
1,05 bar	101,035 °C
1,04	100,76
1,03	100,465
1,02	100,19
1,01	99,895
1,00	99,62
0,99	99,34
0,98	99,07
0,97	98,795

Merjenje tlaka

Tlak merimo z *manometri*, s katerimi zaja-
memo okoli dvajset velikostnih stopenj. Po-
gosto merimo tlačno razliko.

Merjenje tlaka v plinu. Navadni zračni tlak
je po dogovoru 1,01325 bara. Zračni tlak
merimo lahko z *zaprtim kapljevinskim mano-*
metrom, na primer z živim srebrom.

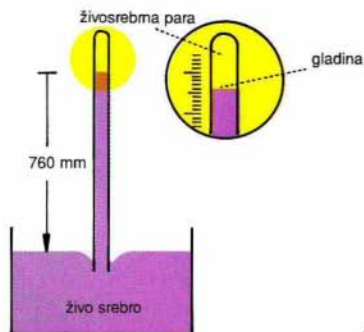
Živosrebrni manometer je prvi upora-
bil leta 1643 Evangelista Torricelli (1608
do 1647). Meter dolgo zaprto stekleno
cevko je napolnil z živim srebrom in jo
v posodi z živim srebrom postavil nav-
pično. Stolpec živega srebra uravnovesi
zračni tlak. Tlak živosrebrne pare nad
gladino živega srebra v cevki je zane-
marljivo majhen. Pri navadnem zračnem
tlaku meri višinska razlika gladin živega
srebra v cevki in v veliki posodi okoli 76
centimetrov.

Pri enakem poskusu z vodo meri raz-
lika gladin približno 10 metrov. Poskus
je leta 1654 pokazal Otto von Guericke
(1602 do 1686) državnemu zboru v Re-
gensburgu.

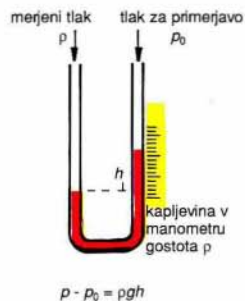
Odpri kapljevinski manometer ima cevko v
obliki črke U. En krak priključimo na pro-
stor s povečanim tlakom. V ravnovesju je
gladina kapljevine v tistem kraku za h nižja
kot v drugem in tlak nad kapljevino v prvem
kraku je za $\Delta p = \rho gh$ večji kot v drugem.
Pri tem je ρ gostota kapljevine. S takim ma-
nometrom merimo tlake od nekaj barov do
deset milibarov.

Aneroid sestavlja kovinska posodica, iz ka-
tere so izsesali zrak. Čim večji je zuna-
nji tlak, tem bolj se stena posodice vtisne,
vzvodi pa prenesejo njen premik na kazalec.
Z njim merimo tlake od sto barov do deset
milibarov.

Manometer na opno ima z opno iz prožne
snovi, na primer gumija ali kovine, zaprto
posodico. Čim večji je tlak, tem bolj se opna



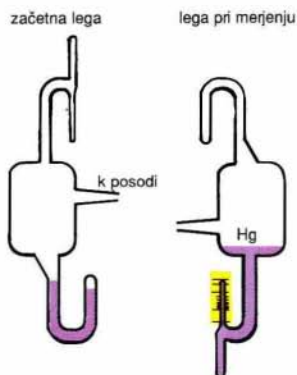
Toricelijev živosrebni manometer



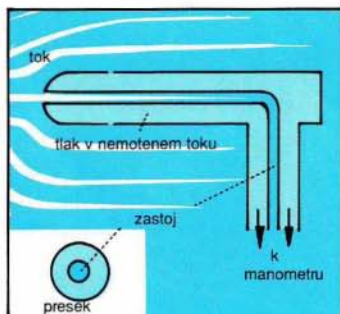
Odprti kapljevinski manometer



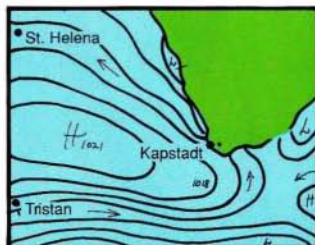
Aneroid



McLeodov manometer



Prandtlava cev



izobare v milibarh

Izobare na vremenskem zemljevidu

