DRUŠTVO MATEMATIKOV, FIZIKOV IN ASTRONOMOV SLOVENIJE, 20(1992-93)
ISSN 0351-6652

PRESEK

6

PRESEK - list za mlade matematike, fizike, astronome in računalnikarje
20. letnik, leto 1992/93, številka 6, strani 321-384

VSEBINA

NAGRADNA UGANKA

H	K	E	A	R	A	K	T	V	O	J	A	N
K												I
L												G
L												A
E												T
Z												I
O												D
S												L
B												N
S	I	O	A	O	E	O	R	J	O	R	C	E

Črkovni okvir skriva vprašanje za naše bralce. Vprašanje in odgovor nanj pošljite najkasneje do 1. julija na Uredništvo Preseka, Jadranska 19, 61111 Ljubljana, p.p. 64. Dva izžrebana reševalca s pravilno rešitvijo čaka lepa knjižna nagrada.

Marija Vencelj

PRESEK

list za mlade matematike, fizike, astronome in računalnikarje

20. letnik, šolsko leto 1992/93, številka 6, strani 321 — 384

Dopisi in naročnine: Društvo matematikov, fizikov in astronomov Slovenije - Podružnica Ljubljana - Komisija za tisk, Presek, Jadranska c. 19, 61111 Ljubljana, p.p. 64, tel. (061) 265-061/53, št. ŽR 50101-678-47233. Naročnina za šolsko leto 1992/93 po 1.11.1992 je **800 SIT**, za skupinska naročila šol **640 SIT**, posamezna številka **160 SIT**, za tujino 12000 LIT, devizna nakazila SKB banka d.d. Ljubljana, val-27621- 42961/9, Ajdovščina 4, Ljubljana.

List sofinancirajo MZT, MŠŠ in MK

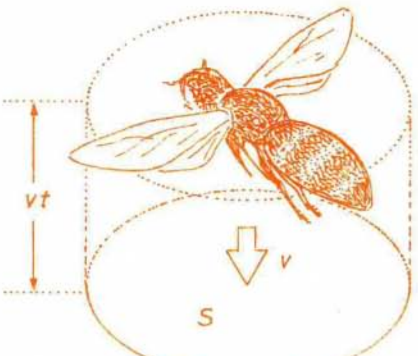
Ofset tisk DELO - Tiskarna, Ljubljana

Po mnenju MZT št. 415-52/92 z dne 5.2.1992 šteje revija med proizvode iz 13. točke tarifne št. 3 zakona o prometnem davku, za katere se plačuje 5% prometni davek.

Tekst je oblikovan z računalnikom SLIM 286, ALTECH, Ljubljana

ČEBELA NA PAŠI

Opazujmo čebelo, ki na cvetovih nabira nektar. Zdi se, da leti brez truda in da pri tem ne opravi kaj dosti dela. Ali je res tako? Ocenimo torej, koliko sladkorja mora čebela pojesti zgolj zato, da se šest ur obdrži lebdeč v zraku. Obravnava bo kar se da preprosta, saj nam gre le za grobo oceno.



Slika 1. Pri lebdenju potiskajo krila zrak navzdol. Poenostavljeno privzamemo, da se le zrak v stebričku s presekom S in višino vt giblje navzdol s hitrostjo v. Gibanje zraka je v resnici zelo zapleteno. Pri oceni preseka S upoštevamo, da je dolžina čebele 1,5 cm.

Pri lebdenju mora čebela s krili ustvariti curek zraka s hitrostjo v navzdol, nasprotna sila zraka na krila pa pri tem uravnovesi težo čebele. Silo izračunamo iz zakona o gibalni količini: Sunek sile na telo je enak spremembi gibalne količine tega telesa. Pri nas je telo stebriček zraka z višino vt in presekom S (slika 1). Čebela ta stebriček v času t s krili pospeši od mirovanja do hitrosti v. Pri tem naj bo čas t mnogo daljši od časa enega zamaha s krili. Sunek sile je kar produkt med silo in časom, ko ta sila potiska telo, Ft; sprememba gibalne količine telesa pa je pri nas kar $m_z v$, saj na začetku zrak z maso m_z miruje, na koncu pa se giblje s hitrostjo v. Velja torej:

$$Ft = m_z v.$$

Maso stebrička zraka izračunamo tako, da prostornino stebrička pomnožimo z gostoto zraka:

$$m_z = \varrho S v t.$$

Iz obeh enačb sledi, da je sila F kril na stebriček zraka:

$$F = \varrho S v^2.$$

Po tretjem Newtonovem zakonu je sila stebrička zraka na krila prav tako velika, a usmerjena nasprotno. Prav ta sila uravnoveša težo čebele, saj le-ta med lebdenjem miruje. Iz pogoja:

$$F = mg,$$

kjer smo z m označili maso čebele, g pa je pospešek prostega pada, sledi za hitrost v:

$$v = \sqrt{\frac{mg}{\varrho S}}.$$

Iz čebelarskih knjig zvemo, da je masa čebele delavke okrog 80 mg, pri letenju pa s krili zamahne 200-krat v sekundi. Presek zračnega stebrička S ocenimo na 2 cm^2. Hitrost zraka v stebričku je potem $v = 2$ ms^{-1}. Preverimo ta rezultat s frekvenco, s katero čebela maha s krili. Privzemimo, da nihajo krila sinusno z amplitudo s_0. Povprečna hitrost kril navzdol je potem

$$\bar{v} = \frac{2s_0}{T/2}.$$

Upoštevali smo, da se krila v polovičnem času T celega nihaja premaknejo za dvojno amplitudo. Povprečna hitrost $\bar{v}$ pa mora biti dvakrat večja kot hitrost zraka v stebričku, saj so krila dejavna le pri zamahu navzdol:

$$\bar{v} = 2v.$$

Frekvenca je iz teh enačb:

$$\nu = \frac{1}{T} = \frac{v}{2s_0}.$$

Dvojno amplitudo $2s_0$ ocenimo na 1 cm in dobimo $\nu = 200$ s^{-1}, kar se sklada s pravo vrednostjo.

Kljub smiselnemu rezultatu za hitrost v moramo priznati, da smo opisali lebdenje zelo grobo. Gibanje zraka je pri lebdenju zelo zapleteno. Podrobna opazovanja so pokazala, da pri vsakem zamahu krila ustvarijo svitkast zračni vrtinec, ki potuje navzdol. Podoben svitek dima znajo kadilci oblikovati z usti.

Mehanično moč, ki jo opravljajo krila, dobimo iz znane zveze:

$$P = Fv.$$

Sila F je pri lebdenju enaka teži, torej:

$$P = mg\sqrt{\frac{mg}{\varrho S}}.$$

Z navedenimi podatki je to $P = 1,6$ mW ali, preračunano na en kilogram mase čebele, $P/m = 20$ W/kg. Človek z maso 70 kg, ki dela z močjo 1,4 kW, ima enako razmerje med močjo in maso.

Za šesturno lebdenje, kolikor ocenjujemo, da čebela dnevno preživi v zraku, opravi čebela delo:

$$A = Pt = 1,6 \cdot 6 \cdot 3600 \text{ mWs} = 35 \text{ J}.$$

Koliko medu mora pojesti, da lahko opravi tolikšno delo? Pri zgorevanju enega kilograma sladkorja se sprosti 14 MJ energije. Čebela torej porabi najmanj 2,5 mg sladkorja za svoj let, če vso sproščeno energijo porabi prav za opravljanje dela. Vemo pa, da živali le približno eno tretjino sproščene energije porabijo za opravljanje dela, ostali dve tretjini pa se izgubita s hlajenjem telesa. Tudi pri toplotnih strojih je tako. Čebela porabi za let kar 8 mg sladkorja, kar je kar desetina njene mase. Z našega stališča je let hudo garanje. Koliko sladkorja pa čebela prinese dnevno v panj? Denimo, da šteje čebelja družina 40000 delavk, ki v ugodnih razmerah prinesejo v panj dva kilograma sladkorja na dan. Na eno čebelo odpade torej dnevno 50 mg sladkorja. Tudi če so naše ocene za faktor 2 napačne, vidimo, da porabi čebela za svoj let precejšen del sladkorja, ki ga nabere.

Andrej Likar

UMOR V NORI VASI – Rešitev s str. 273

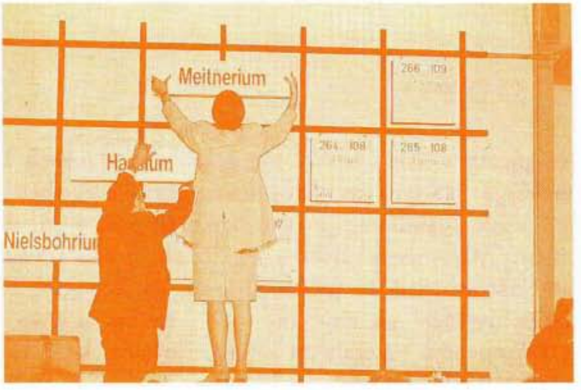
Iz trditev (4) in (8) lahko zaključimo, da sta psihiatra najprej obiskala Boris in Darko, saj je bil psihiater še živ, ko sta prišla, in mrtev, ko sta Andrej (2) in Cene (6) odšla. Iz (3) pa sledi, da je bil Boris prvi naročen, torej ga je drugi obiskal Darko. Ker Cene ni obiskal psihiatra kot tretji (5), ga je lahko samo zadnji in je bil tretji naročen Andrej.

Vrstni red obiskov je naslednji: Boris, Darko, Andrej in Cene. Psihiatra je lahko ubil Darko, saj je bil psihiater še živ, ko je prišel (8), ali pa Andrej - psihiater je bil že mrtev, ko je Andrej odšel (2). Iz (7) zaključimo, da je morilec Andrej.

Mateja Rojc

KRST TREH NOVIH ELEMENTOV

Kot udeleženec poletnega programa za študente na raziskovalni ustanovi Gesellschaft für Schwerionenforschung v Darmstadtu v Nemčiji sem prisostvoval nenavadni prireditvi. 7. septembra 1992 so krstili tri najtežje doslej znane kemijske elemente, ki so jih odkrili na linearnem pospeševalniku UNILAC. Njihova vrstna števila so 107, 108 in 109. Nove elemente so sicer odkrili že v letih med 1981 in 1988, vendar je postopek preverjanja meritev trajal vse do lani.



Slika 1. Slovesnost ob krstu treh novih kemijskih elementov je dosegla vrhunec, ko so na veliko stensko karto nuklidov dodali nova imena (foto: A. Vilfan).

Element z vrstnim številom 107 se imenuje nielsbohrij po slovitem danskem fiziku Nielsu Bohru (1885-1965) in nosi v periodni preglednici oznako Ns. Element 108 so krstili za hassij (Hs) po nemški zvezni deželi Hessen, v kateri se raziskovalna ustanova nahaja. Element 109 je dobil ime meitnerij (Mt) po fizičarki Lisi Meitner (1878-1968), ki je skupaj z Ottom Hahnom bistveno pripomogla k odkritju cepitve atomskih jeder.

Glavno zaslugo za odkritje novih elementov ima skupina profesorja Petra Armbrusterja. Te nove elemente so pridobili pri obstreljevanju tarč iz bizmuta in svinca s kromovimi oziroma železovimi jedri, ki so jih prej pospešili do visokih energij. Pri tem je prišlo do reakcij:

$$
\begin{aligned}
{}^{209}\mathrm{Bi} + {}^{54}\mathrm{Cr} &\rightarrow {}^{262}\mathrm{Ns} + \mathrm{n} \\
{}^{208}\mathrm{Pb} + {}^{58}\mathrm{Fe} &\rightarrow {}^{265}\mathrm{Hs} + \mathrm{n} \\
{}^{209}\mathrm{Bi} + {}^{58}\mathrm{Fe} &\rightarrow {}^{266}\mathrm{Mt} + \mathrm{n}
\end{aligned}
$$

"Otroci" nielsbohrij, hassij in meitnerij seveda svojega krsta niso dočakali, saj imajo vsi trije razpadne čase z velikostno stopnjo nekaj milisekund. Njihov obstoj so lahko ugotovili le posredno, preko njihovih razpadnih produktov. Pri nielsbohriju so odkrili vsega 38 atomov, pri hassiju 3, pri meitneriju pa le 2.

Omenimo še, da elementi z vrstnimi števili 104, 105 in 106 zaradi spora med Rusi in Američani za zdaj še nimajo imen, vendar naj bi se tudi to vprašanje kmalu razrešilo.

Andrej Vilfan

GLASBENI TROBOJ

Tri ljubljanske glasbene šole - viška, bežigrajska in glasbena šola Center so priredile tekmovanje. Na vsakem inštrumentu je vsako glasbeno šolo zastopal po en učenec. Vsak udeleženec je tako lahko zasedel prvo, drugo ali tretje mesto na svojem inštrumentu, delitev mesta pa ni bila mogoča. Uvrstitve na posameznih inštrumentih so točkovali tako, da je najbolje uvrščeni dobil največ, najslabše uvrščeni pa najmanj točk. Urška, učenka glasbene šole Center, je na tekmovanju navijala za svojega sošolca, ki je šolo zastopal na trobenti. Po tekmovanju je doma povedala:

"Naša šola je zmagala na trobenti, v skupni uvrstitvi pa je bila boljša viška glasbena šola, ki je skupaj nabrala 22 točk. Mi in Bežigrajčani smo uspeli zbrati le 9 točk."

"Ali so bili na tekmovanju tudi kitaristi?" je vprašala Urškina mama.

"Bili so, ampak se ne spomnim, kdo je zmagal. Bolj so me zanimali trobentači," je odgovorila Urška.

Katera šola je zmagala med kitaristi? Koliko prvih, koliko drugih in koliko tretjih mest je dosegla vsaka šola?

Neža Mramor

KOCKA, KOCKA ...

V dano kocko včrtaj manjšo kocko tako, da na vsaki stranici večje kocke leži vsaj eno oglišče manjše. Koliko je takšnih včrtanih kock?

Boris Lavrič

TRIKRAT ZANIMIVA PRAŠTEVILA

Števila 2, 3, 5, 7, 11, 13, 17, ... so zaporedna *praštevila*. Deljiva so le z 1 in s samim seboj. Seštejmo prvih nekaj praštevil:

$$\begin{aligned} 2 &= 2 \\ 5 &= 2+3 \\ 10 &= 2+3+5 \\ 17 &= 2+3+5+7 \\ &\dots \end{aligned}$$

Dobili smo zaporedje: 2, 5, 10, 17, ... Recimo, da so števila v tem zaporedju *zanimiva*. Očitno so nekatera praštevila zanimiva. To so:

$$\{2, 5, 17, 41, 197, 281, 7699, 8893, 22039, 24133, 25237, \dots\}$$

Zdaj pa seštejmo prvih nekaj zanimivih praštevil:

$$\begin{aligned} 2 &= 2 \\ 7 &= 2+5 \\ 24 &= 2+5+17 \\ &\dots \end{aligned}$$

Dobili smo *dvakrat zanimiva* števila. Tudi med njimi so očitno praštevila:

$$\{2, 7, 117241, 1351781, 3703429, \dots\}$$

Število **3703429** je torej peto dvakrat zanimivo praštevilo.
Postopek lahko ponovimo:

$$\begin{aligned} 2 &= 2 \\ 9 &= 2+7 \\ 117250 &= 2+7+117241 \\ &\dots \end{aligned}$$

in dobimo *trikrat zanimiva števila*. Očitno je 2 trikrat zanimivo praštevilo. Ali obstaja še kakšno trikrat zanimivo praštevilo? Ali obstaja šesto dvakrat zanimivo praštevilo? Le-to bi bilo šesto praštevilo z lastnostjo, da je vsota prvih nekaj zanimivih praštevilih. Vsako zanimivo praštevilo pa je vsota prvih nekaj praštevil. Kar zapletena definicija, kajne? Verjetno ni treba posebej poudariti, da smo si pri računanju pomagali z računalnikom, natančneje, z Mathematico.

Tomaž Pisanski

KOLIKO JE URA?

Pred kratkim je Gerald Weinstein v časopisu American Mathematical Monthly postavil tole vprašanje: Ali lahko ugotovimo točen čas, če poznamo lego obeh kazalcev na uri, ne vemo pa, kateri kaže ure in kateri minute? [1])

Odgovor se glasi: Ne vedno. Obstaja končno število leg kazalcev, pri katerih ne moremo določiti časa. To vidimo takole: Naj bo prvi kazalec med številkama a in $a+1$, in sicer naj bo njegova natančna lega $a+u, 0 \leq u < 1$. (Dolžino med dvema zaporednima številkama na uri označimo torej z 1.) Lega drugega kazalca pa naj bo $b+v, 0 \leq v < 1$. (Kadar je prvi (oz. drugi) kazalec med 12 in 1, vzamemo $a = 0$ (oz. $b = 0$).) Denimo, da prvi kazalec kaže ure. V času, ko je prišel od a do $a+u$, je drugi kazalec pretekel pot od številke 12 do $b+v$. Ker je hitrost drugega 12-krat večja, mora biti $12u = b+v$. Kadar ta enakost ni izpolnjena, prvi kazalec ne kaže ur temveč minute. Če pa je izpolnjena, nismo gotovi, da je urni kazalec. Poglejmo še drugi kazalec. Kakor pri prvem ugotovimo, da drugi ne kaže ur, kadar ni izpolnjena enakost $12v = a+u$. Na vprašanje, kateri je urni in kateri minutni kazalec, lahko odgovorimo, če ena od omenjenih enakosti ni izpolnjena. V dvomu pa smo tedaj, kadar sta izpolnjeni obe, kadar je torej

$$12u - v = b \quad \text{in} \quad -u + 12v = a.$$

Izračunajmo od tod u in v:

$$u = \frac{a+12b}{143}, \quad v = \frac{12a+b}{143}. \tag{$*$}$$

Če je $a = b$, je tudi $u = v$; tedaj oba kazalca sovpadata in čas je določen. Koliko je ura, ne moremo ugotoviti le v primeru, ko je $a \neq b$ in se u in v izražata z (*). Lahko je namreč a ur in $5(b+v)$ minut ali pa b ur in $5(a+u)$ minut. Ker imamo za a dvanajst možnosti ($a = 0, 1, \ldots, 11$) in pri izbranem a enajst možnosti za b (ker je $a \neq b$), je vseh leg $12 \times 11 = 132$. V teh primerih ne vemo, kateri je urni in kateri minutni kazalec; zato je različnih leg polovico manj, torej $132 : 2 = 66$.

Weinstein je postavil še dodatno vprašanje: Kaj pa, če poznamo lego sekundnega kazalca, morda je tedaj čas vselej določen?

---

[1]) Amer. Math. Monthly, V. 99, 1992, str. 873, Naloga 10260.

Denimo, da prvi kazalec kaže minute. Razmak med dvema številkama na uri pomeni 5 minut. Torej je preteklo $5u$ minut od trenutka, ko je bil ta kazalec usmerjen proti a. Število $5u$ ni nujno celo. Presežek nad celim številom pokaže sekundni kazalec (presežek je treba pomnožiti s 60). Če se presežek ne sklada z lego sekundnega kazalca, potem prvi kazalec ne kaže minut temveč ure. Prav tako ugotovimo, da drugi kazalec ni minutni, kadar se z lego sekundnega kazalca ne ujema presežek števila $5v$ nad celim številom. V dvomu bi ostali tedaj, kadar bi bila oba presežka v skladu z lego sekundnega kazalca. V tem primeru pa bi morala biti oba presežka enaka in zato $5v-5u$ celo število. Od prej vemo, da prideta v poštev le u in v, ki se izražata z (*). Od tod izračunamo

$$5v-5u=\frac{5\cdot 11(a-b)}{143}=\frac{5(a-b)}{13}.$$

Desna stran je celo število le tedaj, če je razlika $a-b$ deljiva s 13. Ker sta a in b manjša od 12, mora biti $a-b=0$, se pravi $a=b$. V tem primeru pa se kazalca na uri ujemata in lahko razberemo, koliko je ura.

Tako smo ugotovili: Če poznamo lego obeh (velikih) kazalcev na uri in lego sekundnega kazalca, lahko določimo čas, čeprav ne vemo, kateri od kazalcev kaže ure in kateri minute.

Ivan Vidav

ŠTEVILSKA KRIŽANKA – Rešitev s str. 288

5	1	2	5	■	4	■	4	1	8	9	■	8
2	■	6	1	2	9	6	■	4	■	4	1	8
1	2	5	■	3	9	■	1	9	2	2	■	8
■	3	2	6	4	■	■	2	■	4	9	9	8
2	■	■	8	6	4	■	9	2	9	8	■	■
6	2	3	1	■	2	5	6	9	■	■	1	■
1	0	1	4	9	■	2	■	8	4	1	4	9
■	9	■	■	9	9	2	1	■	9	3	4	3
■	■	6	7	6	3	■	1	2	1	■	■	6
3	2	1	8	■	4	■	■	1	3	4	2	■
1	■	6	9	3	3	■	6	9	■	7	8	4
5	1	2	■	4	■	6	5	7	6	4	■	0
8	■	5	8	3	2	■	2	■	2	0	7	7

Darjo Felda

450 LET HELIOCENTRIČNEGA SISTEMA

Letos mineva 450 let od izida knjige Nikolaja Kopernika De revolutionibus orbium coelestium (O kroženju nebesnih teles). Knjiga je izšla 1543 v Nürnbergu (tega leta je Nikolaj Kopernik tudi umrl). Kopernik, po rodu Poljak, se je rodil 19.2.1473 v mestu Torunj na Poljskem. Študiral je v Krakovu, pa tudi v Bologni, Padovi in Ferrari, in sicer medicino, matematiko, astronomijo, pravo, bogoslovje in klasične jezike.

Kopernik se je začel zanimati za astronomijo že kot dijak. Med študijem v Italiji se je seznanil z mnogimi izobraženci, ki so dvomili v Ptolemejev geocentrični sistem (Klavdij Ptolemej iz Teb, rojen v začetku 2.stoletja po Kr.). Zavzemali so se za heliocentrični sistem grškega filozofa Aristarha iz Samosa, ki je živel v 3. stoletju pred Kr., vendar je bil njegov sistem pozabljen. Tudi Kopernik sam je dvomil v geocentrični sistem, saj se mu je zdel preneroden in premalo skladen, da bi lahko veljal za končno resnico o zgradbi vesolja. Ptolemejev geocentrični sistem je uporabljal kar 79 pomožnih krogov, da je lahko pojasnil navidezna gibanja planetov med zvezdami!

Ko se je Kopernik vrnil iz Italije v domovino, je opravljal službo kanonika varmijskega kapitlja s sedežem v kraju Frombork - mestecu ob Baltiškem morju. Bavil se je z upravljanjem kapitlja. Večina kanonikov v tistem času ni bila posvečena v duhovnike. Tudi Kopernik sam ni bil duhovnik. V Fromborku se je skoraj 35 let bavil s heliocentričnim sistemom. Rezultat teh študij je že omenjena knjiga, ki je omogočila nov pogled na svet, nove filozofske smeri ter razvoj astronomije in fizike kot znanosti. Knjiga spada danes med najslavnejše knjige v človeški zgodovini. O tem seveda Kopernik ni ničesar vedel niti slutil. Pripovedujejo, da je prve odtise svoje knjige videl na smrtni postelji.

V knjigi razkriva Kopernik za tisto dobo revolucionarna spoznanja.

1.) Zemlja se vrti okoli svoje osi enakomerno od zahoda proti vzhodu. To gibanje imenujemo vrtenje (rotacija) Zemlje. V enem dnevu se Zemlja zavrti enkrat, kar povzroča navidezno gibanje zvezd in Sonca v obratni smeri, t.j. od vzhoda proti zahodu, seveda prav tako v enem dnevu. Izmenjava dneva in noči je torej odraz vrtenja Zemlje.

2.) V središču vesolja je Sonce in ne Zemlja.

3.) Zemlja je eden od planetov in se enakomerno giblje okoli Sonca (revolucija) po krožnici, ki so jo v geocentričnem sistemu imeli za tir Sonca okoli Zemlje.

4.) Planeti Merkur, Venera, Zemlja, Mars, Jupiter in Saturn enakomerno krožijo okoli Sonca v različnih razdaljah in z različnimi obhodnimi dobami.

5.) Razdalje zvezd od Zemlje (in Sonca) so tako velike, da gibanje Zemlje okoli Sonca ne vpliva na njihovo navidezno medsebojno razporeditev na nebu.

Kopernik je pravilno sklepal, da so pentlje in zavoji, ki jih planeti opisujejo na nebu med zvezdami, le posledica relativnega gibanja planetov in Zemlje. To so torej le navidezna gibanja, odvisna od različnih hitrosti in oddaljenosti planetov od Sonca in od Zemlje.

Slavni učenjak je izračunal (srednje) razdalje planetov od Sonca in to v enotah (srednje) razdalje Zemlja-Sonce. Te vrednosti so bile znane že Ptolemeju, le da so bile razumljene na drugačen način. Kopernik je torej podal dokaj dober model Sončevega sistema.

Svoj sistem je izpeljal iz opazovanj, predvsem pa na osnovi premišljevanja. V knjigi je sistem prikazan kot hipoteza, brez zveze s stvarnostjo, in le kot udobnejši način za izračunavanje leg planetov. To je bilo zelo verjetno zaradi tedaj stroge cerkvene cenzure. Zgodovinske raziskave o Kopernikovem življenju in delu pa kažejo, da je Kopernik brez dvoma verjel v svoj sistem kot v stvarnost.

Ob svojem izidu - danes slavna knjiga - ni zbudila veliko pozornosti. Niti cerkvene oblasti je niso "opazile". Kopernikova knjiga je prišla na indeks (prepoved razširjanja in čitanja) šele 73 let po izidu, to je leta 1616, in sicer zaradi Galilejevih odkritij ob opazovanjih zvezdnega neba. Katoliške oblasti so tedaj menile, da trditve v knjigi niso v skladu s Svetim pismom in da nasprotujejo veri. Prepoved knjige je ukinil papež Benedikt XIV leta 1757. Leta 1833 pa je bila ukinjena prepoved razširjanja in čitanja vseh spisov Kopernika, Galileja in Keplerja.

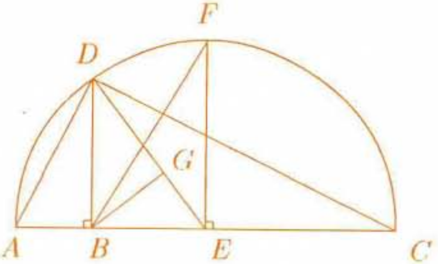
Omeniti velja, da sta Ptolemejev (geocentrični) in Kopernikov (heliocentrični) sistem v kinematičnem smislu (gibanje brez vzrokov) enakovredna. Le v dinamičnem smislu (upoštevanje sil) je geocentrični sistem zgrešen. Znano je, da se planeti gibljejo okoli Sonca po elipsah (kar je ugotovil šele Kepler leta 1609), in sicer s hitrostmi, ki niso stalne, ne pa enakomerno po krožnicah, kot trdi Kopernik. Manj pa je znano, da Kopernik uporablja v svoji knjigi še vedno 34 pomožnih krogov (ki nimajo nobene zveze s stvarnostjo), da bi pojasnil navidezna gibanja planetov med zvezdami. Že dolgo je tudi znano, da Sonce ni v središču vesoljstva (kot trdi Kopernik), ampak je le ena od mnogo milijard zvezd v naši Galaksiji. V tem smislu torej Kopernikov sistem ne drži popolnoma.

Bogdan Kilar

KAJ SO SREDINE IN KAKO JIH UPORABLJAMO?

Na predlanskem občnem zboru Društva matematikov, fizikov in astronomov Slovenije sem imel predavanje o neenakostih med sredinami, po katerem pa nisem utegnil odgovoriti na vsa zastavljena vprašanja. Takrat sem obljubil, da o tej temi napišem članek, v katerem bi ilustriral uporabo sredin in neenakosti med njimi. Primerov res ne primanjkuje, saj se na skoraj vsakem matematičnem tekmovanju pojavi kakšna naloga, ki se jo da rešiti s pomočjo sredin.

Oglejmo si za ogrevanje naslednjo risbo:



E je središče krožnice, A in C sta krajišči premera, D, F točki krožnice, DB in FE sta pravokotni na AC, BG pa na DE. Zadostuje, da v pravokotnih trikotnikih BGD, DBE in BEF uporabimo, da je kateta manjša od hipotenuze, pa dobimo $DG < BD < ED = EF < BF$. Označimo $AB = a$, $BC = b$. Takoj sledi

$$ED = \frac{a+b}{2}$$

in po višinskem izreku za pravokotni trikotnik ACD:

$$BD = \sqrt{ab}.$$

Nadalje sta podobna trikotnika BGD in EBD. Dobimo $DG/BD = BD/ED$, oziroma

$$DG = \frac{2ab}{a+b} = \left(\frac{\frac{1}{a}+\frac{1}{b}}{2}\right)^{-1}$$

Ker je $BE = \frac{b-a}{2}$, nam da Pitagorov izrek

$$BF = \sqrt{\left(\frac{a+b}{2}\right)^2 + \left(\frac{a-b}{2}\right)^2} = \sqrt{\frac{a^2+b^2}{2}}.$$

Torej velja

$$\frac{2ab}{a+b} < \sqrt{ab} < \frac{a+b}{2} < \sqrt{\frac{a^2+b^2}{2}}.$$

In že smo pri sredinah! Izraze, ki se pojavljajo v tej formuli, imenujemo po vrsti *harmonična, geometrijska, aritmetična* in *kvadratna sredina* števil a in b. Dokazali smo, da je harmonična sredina najmanjša, sledi ji geometrijska, potem aritmetična in končno je kvadratna sredina največja. Te neenakosti so poznali že starogrški matematiki. Podobni odnosi se namreč pogosto pojavljajo v geometriji, ki je bila v njihovem času najpomembnejši del matematike. Poznali so tudi naš dokaz!

Ne spreglejmo, da sta v dokazu a in b dolžini daljic, torej pozitivni števili, in da za poljubni pozitivni števili a in b obstaja ustrezna skica. Stroge neenakosti veljajo le, če je $a < b$ (ali $b < a$ — zakaj?). Kaj pa dobimo, če je $a = b$?

Kasneje so se matematiki lotili svoje priljubljene igre — posploševanja. Tako so posplošili definicije sredin na več števil: *harmonična, geometrijska, aritmetična* in *kvadratna sredina* pozitivnih števil $a_1, a_2, \ldots, a_n$ so po vrsti izrazi

$$\left(\frac{a_1^{-1} + \cdots + a_n^{-1}}{n}\right)^{-1}, \quad \sqrt[n]{a_1 a_2 \cdots a_n}, \quad \frac{a_1 + \cdots + a_n}{n}, \quad \sqrt{\frac{a_1^2 + \cdots + a_n^2}{n}}.$$

Posplošili pa so tudi izrek o neenakostih in dokazali, da med sredinami za poljuben n velja enak odnos kot za dve števili. Neenakosti so stroge natanko takrat, kadar števila $a_1, \ldots, a_n$ *niso* vsa enaka. Drugače povedano: če je $a_1 = a_2 = \cdots = a_n$, so vse sredine med seboj enake in samo v tem primeru se med različnima sredinama lahko pojavi enakost. Tega ne bomo dokazovali, ampak bomo pohiteli k primerom.[1]

---

[1] Kogar zanimajo dokazi, druge posplošitve in drugi primeri, jih lahko najde v članku *U. Milutinović*: "Nejednakosti među sredinama: primjeri s takmičenjâ", objavljenem v reviji "Matematika. Stručno-metodički časopis", Zagreb, 1991, št. 2, str. 43–52, ali v knjigi *D. S. Mitrinović, P. M. Vasić*: "Uvođenje mladih u naučni rad V - Sredine". Nasploh velja, da je literatura s tega področja zelo bogata.

1. Naj bodo v_a, v_b, v_c višine trikotnika s stranicami a, b, c; ρ naj bo polmer temu trikotniku včrtane krožnice. Dokaži, da je trikotnik enakostraničen natanko takrat, kadar je

$$v_a + v_b + v_c = 9\rho.$$

(Zahodnonemško zvezno tekmovanje, 1988)

Rešitev: $v_a + v_b + v_c = 9\rho$ je (zaradi $v_a = \frac{2P}{a}$, $v_b = \frac{2P}{b}$, $v_c = \frac{2P}{c}$, $\rho = \frac{2P}{a+b+c}$, kjer je P ploščina trikotnika) ekvivalentno

$$\frac{1}{a} + \frac{1}{b} + \frac{1}{c} = \frac{9}{a+b+c}$$

oziroma

$$\frac{a+b+c}{3} = \frac{3}{\frac{1}{a} + \frac{1}{b} + \frac{1}{c}},$$

torej temu, da je aritmetična sredina števil a, b, c enaka harmonični. To pa drži natanko takrat, kadar je $a = b = c$.

2. Podan je trikotnik ABC. Na premici AB določimo točki A_1, B_2 tako, da je $A_1A = BC$, $BB_2 = AC$ in da je A_1ABB_2 vrstni red teh točk. Podobno določimo na premici BC točki B_1 in C_2 tako, da bo njihov vrstni red B_1BCC_2 in da bo veljalo $B_1B = CA$, $CC_2 = AB$, na premici CA pa točki C_1 in A_2 v vrstnem redu C_1CAA_2 tako, da bo veljalo $C_1C = AB$, $AA_2 = BC$ (glej sliko). Dokaži, da ploščina šestkotnika $A_1A_2B_1B_2C_1C_2$ ni manjša od trinajstih ploščin trikotnika ABC.

Rešitev: Naj bo $P = P_{ABC}$, $P' = P_{A_1A_2B_1B_2C_1C_2}$. Poleg tega naj bo v_c višina trikotnika ABC iz oglišča C ter v_c' višina trikotnika AB_2C_1 iz oglišča C_1. Zaradi podobnosti trikotnikov (katerih?) dobimo

$$\frac{v_c'}{v_c} = \frac{b+c}{b},$$

oziroma

$$v_c' = \frac{b+c}{b} v_c.$$

Zato je

$$P_{AB_2C_1} = \frac{(b+c)v_c'}{2} = \frac{(b+c)^2 v_c}{2b} = \frac{(b+c)^2}{bc}P$$

ter

$$P_{AA_1A_2} = \frac{a^2}{bc}P.$$

Ponovimo ta postopek z A, A_1, oziroma B, B_1 — dobimo

$$\frac{P'}{P} = \frac{1}{P}(\ P_{AB_2C_1} + P_{AA_1A_2} + P_{BC_2A_1} + P_{BB_1B_2} +$$

$$+P_{CA_2B_1} + P_{CC_1C_2} - 2P_{ABC}) =$$

$$= \frac{(b+c)^2}{bc} + \frac{a^2}{bc} + \frac{(c+a)^2}{ca} + \frac{b^2}{ca} + \frac{(a+b)^2}{ab} + \frac{c^2}{ab} - 2 =$$

$$= 4 + \frac{(a^2+b^2+c^2)(a+b+c)}{abc}.$$

Željeno oceno dobimo kot posledico neenakosti med aritmetično in geometrijsko, oziroma kvadratno in aritmetično sredino:

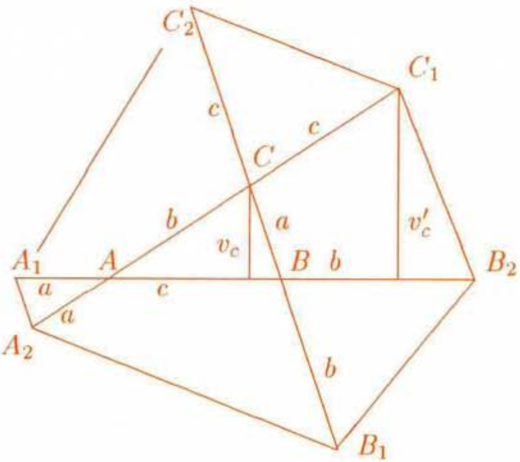
$$\sqrt[3]{abc} \leq \frac{a+b+c}{3} \Rightarrow \frac{(a+b+c)^3}{abc} \geq 27$$

$$\frac{a+b+c}{3} \leq \sqrt{\frac{a^2+b^2+c^2}{3}} \Rightarrow \frac{a^2+b^2+c^2}{(a+b+c)^2} \geq \frac{1}{3}.$$

Množenje teh neenakosti nam da

$$\frac{(a^2+b^2+c^2)(a+b+c)}{abc} \geq 9.$$

Opazimo, da smo hkrati dokazali, da je $P' = 13P$ natanko takrat, ko je trikotnik ABC enakostraničen.



3. Reši enačbo $x^{20} - 20x^{19} + \cdots + 1 = 0$, če veš, da so vse njene rešitve pozitivna realna števila! (Če so vam všeč zgodbice, lahko to nalogo spremenite v zgodbo o črnilu, ki se je učencu razlilo po zvezku. Enačbo, ki jo je imel za domačo nalogo, pa je učenec kljub temu rešil.)

   Rešitev: Naj bodo $x_1, \ldots, x_{20}$ koreni te enačbe. Vièteove formule nam dajo $x_1 + \cdots + x_{20} = 20$ in $x_1 x_2 \cdots x_{20} = 1$, zato je aritmetična sredina vseh korenov enaka geometrijski. To pa je možno samo, če so vsi koreni enaki. Torej je $x_1 = x_2 = \cdots = x_{20} = 1$ rešitev, ki smo jo iskali.

4. Določi vse polinome $p(x) = a_n x^n + a_{n-1}x^{n-1} + \cdots + a_1 x + a_0$, za katere je $\{a_n, a_{n-1}, \ldots, a_1, a_0\} \subseteq \{1, -1\}$ in za katere so vse rešitve enačbe $p(x) = 0$ realne.

   Rešitev: Lahko predpostavimo, da je $a_n = 1$. (Ostale dobimo tako, da le-te pomnožimo z -1.) Naj bodo $x_1, x_2, \ldots, x_n$ koreni takšnega polinoma p. Vièteove formule nam dajo $x_1 + x_2 + \cdots + x_n = -a_{n-1}$, $x_1x_2 + \cdots + x_{n-1}x_n = a_{n-2}$, $x_1 x_2 \cdots x_n = (-1)^n a_0$ in je $x_1^2 + x_2^2 + \cdots + x_n^2 = (x_1 + x_2 + \cdots + x_n)^2 - 2(x_1x_2 + \cdots + x_{n-1}x_n) = 1 \pm 2$. Ker so koreni realni, je možno samo $1 + 2 = 3$. Neenakost med aritmetično in geometrijsko sredino pozitivnih števil $x_1^2, x_2^2, \ldots, x_n^2$ (ker je njihov produkt 1, očitno nobeno izmed teh števil ni enako 0) nam da:

$$\frac{3}{n} = \frac{x_1^2 + x_2^2 + \cdots + x_n^2}{n} \geq \sqrt[n]{x_1^2 \cdots x_n^2} = 1,$$

torej je $n \leq 3$. Pri tem je $n = 3$ (ker tedaj velja enakost) le v primeru $x_1^2 = x_2^2 = x_3^2$, oziroma le, če so absolutne vrednosti vseh treh korenov enake. Ker je prosti člen enak 1, je ta skupna absolutna vrednost lahko enaka le 1. Polinoma $(x-1)^3$ in $(x+1)^3$ ne prideta v poštev (ker imata tudi koeficiente 3 ali -3), ostaneta samo možnosti $(x-1)^2(x+ +1) = x^3 - x^2 - x + 1$ in $(x-1)(x+1)^2 = x^3 + x^2 - x - 1$. Za $n = 1$ oziroma $n = 2$ lahko z neposrednim preverjanjem ugotovimo, da so $x+1, x-1, x^2+x-1, x^2-x-1$ edini iskani polinomi.

5. Določi maksimum funkcije $f(x) = \sin^n x \cos x$, $n \in \mathbb{N}$.

Rešitev: Očitno zadostuje, če obravnavamo f samo na intervalu $(0, \frac{\pi}{2})$, na katerem sta funkciji $\sin x$ in $\cos x$ pozitivni. Neenakost med geometrijsko in kvadratno sredino $(n+1)$-terice števil $(\sin x, \ldots, \sin x, \sqrt{n}\cos x)$ nam da

$$\sqrt[n+1]{\sin^n x \cdot \sqrt{n}\cos x} \leq \sqrt{\frac{\sin^2 x + \cdots + \sin^2 x + n\cos^2 x}{n+1}} = \sqrt{\frac{n}{n+1}},$$

iz česar sledi $f(x) \leq \sqrt{\frac{n^n}{(n+1)^{n+1}}}$. Pri tem doseže f ta ekstrem tedaj, ko je $\sin x = \sqrt{n}\cos x$, oziroma $\operatorname{tg} x = \sqrt{n}$.

6. Naj bodo $x_1, x_2, \ldots, x_n$ pozitivna realna števila. Dokaži, da je

$$\sum_{k=1}^{n} x_k + \sqrt{\sum_{k=1}^{n} x_k^2} \leq \frac{n+\sqrt{n}}{n^2}\left(\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{x_k}\right)\left(\sum_{k=1}^{n} x_k^2\right).$$

(Avstrija, 1987)

Rešitev: Označimo s H, A, K harmonično, aritmetično, oziroma kvadratno sredino števil $x_1, x_2, \ldots, x_n$. Takoj ugotovimo, da pravzaprav dokazujemo veljavnost neenakosti:

$$nA + \sqrt{n}K \leq \frac{n+\sqrt{n}}{n^2} \cdot \frac{n}{H} \cdot nK^2,$$

oziroma $nAH + \sqrt{n}KH \leq (n+\sqrt{n})K^2$. Ker je $A, H \leq K$, dobimo $AH \leq K^2$ oziroma $nAH \leq nK^2$. Podobno iz $K, H \leq K$ dobimo $KH \leq K^2$, oziroma $\sqrt{n}KH \leq \sqrt{n}K^2$. Če ti neenačbi seštejemo, dobimo trditev naloge. Poleg tega vidimo, da velja enakost natanko takrat, kadar je $A = H = K$, oziroma $x_1 = x_2 = \cdots = x_n$.

7. Naj bodo a, b, c pozitivna realna števila. Dokaži, da je

$$\frac{a}{b}+\frac{b}{c}+\frac{c}{a} \leq \frac{a^2}{b^2}+\frac{b^2}{c^2}+\frac{c^2}{a^2}.$$

(1. nordijska matematična olimpiada, 1987)

Rešitev: Neenakosti med kvadratno in aritmetično oziroma aritmetično in geometrijsko sredino števil $\frac{a}{b}, \frac{b}{c}, \frac{c}{a}$ nam dajo:

$$\frac{a^2}{b^2}+\frac{b^2}{c^2}+\frac{c^2}{a^2} \geq \frac{(\frac{a}{b}+\frac{b}{c}+\frac{c}{a})^2}{3} =$$

$$= \frac{\frac{a}{b}+\frac{b}{c}+\frac{c}{a}}{3} \cdot \left(\frac{a}{b}+\frac{b}{c}+\frac{c}{a}\right) \geq \sqrt[3]{\frac{a}{b} \cdot \frac{b}{c} \cdot \frac{c}{a}} \cdot \left(\frac{a}{b}+\frac{b}{c}+\frac{c}{a}\right) =$$

$$= \frac{a}{b}+\frac{b}{c}+\frac{c}{a}.$$

Enakost velja natanko takrat, ko je $\frac{a}{b}=\frac{b}{c}=\frac{c}{a}$, kar pa je ekvivalentno (zakaj?) pogoju $a=b=c$.

Za konec se sami preizkusite z naslednjimi nalogami:

1. Naj bodo $x_1, x_2, \ldots, x_n$ pozitivna realna števila in $S = x_1+x_2+\cdots+x_n$. Dokaži, da je

$$(1+x_1)(1+x_2)\cdots(1+x_n) \leq 1+S+\frac{S^2}{2!}+\frac{S^3}{3!}+\cdots+\frac{S^n}{n!}.$$

(1. azijsko-pacifiška olimpiada, 1989)

2. Naj bodo $a_1, \ldots, a_n$ pozitivna realna števila in naj bo S_k vsota vseh produktov po k števil, izbranih med števili $a_1, \ldots, a_n$. Dokaži, da je

$$S_k S_{n-k} \geq \binom{n}{k}^2 a_1 a_2 \cdots a_n$$

za $k = 1, \ldots, n-1$.

(2. azijsko-pacifiška olimpiada, 1990)

3. Diagonali štirikotnika $ABCD$ se sekata v notranjosti štirikotnika v točki O. Označimo ploščini trikotnikov AOB in COD s P_1 oziroma P_2, ploščino štirikotnika $ABCD$ pa s P. Dokaži, da je

$$\sqrt{P_1} + \sqrt{P_2} \leq \sqrt{P}$$

in da velja enakost natanko tedaj, ko sta stranici AB in CD vzporedni.

(Švedska, 1986; Madžarska, 1988)

4. Naj bodo $a_1, \ldots, a_n$ taka pozitivna realna števila, da velja

$$a_1 a_2 \cdots a_n = \frac{1}{2^{n^2+n}}.$$

Dokaži, da je

$$(1 + 2^{2\cdot 1} a_1)(1 + 2^{2\cdot 2} a_2) \cdots (1 + 2^{2\cdot n} a_n) \geq 2^n.$$

(2. magrebška olimpiada, 1985)

5. Naj bo $n \geq 2$ ter naj bodo $\alpha_1, \ldots, \alpha_n$ pozitivna realna števila, za katera velja $\alpha_1 + \alpha_2 + \cdots + \alpha_n = 1$. Dokaži, da je

$$\frac{\alpha_1}{1+\alpha_2+\alpha_3+\cdots+\alpha_n} + \frac{\alpha_2}{1+\alpha_1+\alpha_3+\cdots+\alpha_n} + \cdots +$$

$$+ \cdots + \frac{\alpha_n}{1+\alpha_1+\alpha_2+\cdots+\alpha_{n-1}} \geq \frac{n}{2n-1}.$$

(1. balkanska olimpiada, 1984)

6. Vsi koeficienti kvadratnega polinoma $f(x) = ax^2 + bx + c$ so pozitivni in velja $a+b+c = 1$. Dokaži: Če za pozitivna realna števila $x_1, \ldots, x_n$ velja $x_1 x_2 \cdots x_n = 1$, tedaj velja tudi $f(x_1) f(x_2) \cdots f(x_n) \geq 1$.

(Sovjetska zveza, 1990)

7. Dokaži, da za vsako naravno število n velja

$$\sqrt[n]{7} + \sqrt[n]{4} > 2\sqrt[n]{5}.$$

(Hrvatska, 1990)

8. Dokaži: Če za realna števila a, b, c velja $a+b+c=6$, tedaj je a^2+ $+ b^2+c^2 \geq 12$.

(Srbija, 1990)

9. Naj bodo x, y, z pozitivna realna števila, za katera velja $x+y+z=1$. Dokaži, da je tedaj

$$(1+\frac{1}{x})(1+\frac{1}{y})(1+\frac{1}{z}) \geq 64.$$

(Jugoslavija, 1989)

10. Naj bodo $a_1, \ldots, a_n$ pozitivna realna števila, za katera velja $a_1 a_2 \cdots a_n = 1$. Dokaži, da je

$$(4+a_1)(4+a_2)\cdots(4+a_n) \geq 5^n.$$

(Jugoslavija, 1987)

11. Naj bodo x, y, z pozitivna realna števila, takšna da velja $\frac{1}{x}+\frac{1}{y}+\frac{1}{z}=1$. Dokaži, da je $(x-1)(y-1)(z-1) \geq 8$.

(Jugoslavija, 1983)

12. Pri kateri vrednosti x ima funkcija

$$f(x)=\sqrt{1+\sqrt{2+\sqrt{3+\sqrt{4+x}}}}+\sqrt{1+\sqrt{2+\sqrt{3+\sqrt{4-x}}}}$$

maksimum?

(Leningrajski GU, sprejemni izpit, 1982)

13. Naj bodo $a, x_1, \ldots, x_n$ pozitivna realna števila in $n \geq 2$. Dokaži, da je

$$\frac{a^{x_1-x_2}}{x_1+x_2}+\frac{a^{x_2-x_3}}{x_2+x_3}+\cdots+\frac{a^{x_n-x_1}}{x_n+x_1} \geq \frac{n^2}{2(x_1+x_2+\cdots+x_n)}.$$

(Hrvatska, 1988)

14. Dokaži, da za poljubni nenegativni realni števili a in b velja

$$2\sqrt{a}+3\sqrt[3]{b} \geq 5\sqrt[5]{ab}.$$

(Hrvatska, 1987)

15. Dokaži, da za vsa naravna števila n velja

$$\left[\sqrt{n}+\sqrt{n+1}+\sqrt{n+2}+\sqrt{n+3}\right]=\left[\sqrt{16n+20}\right].$$

([x] pomeni največje celo število, ki ni večje od x; npr. $[5'17] = 5$, $[3] = 3$, $[\pi] = 3$, $[-2'1] = -3$)

("Mala olimpiada", 1990)

16. Dokaži neenakost

$$(1+\frac{1}{2^{51}})(1+\frac{1}{2^{52}})(1+\frac{1}{2^{53}})\cdots(1+\frac{1}{2^{100}})<1+\frac{1}{2^{49}}.$$

(Sovjetske republiške olimpiade, 1982)

17. Določi

$$\left[\sqrt{2}+\sqrt[3]{\frac{3}{2}}+\sqrt[4]{\frac{4}{3}}+\cdots+\sqrt[n+1]{\frac{n+1}{n}}\right],$$

kjer je [ ] funkcija iz 15. naloge.

(Iz revije "Matematika v škole")

18. Dokaži, da za poljubna pozitivna realna števila $a_1, a_2, \ldots, a_n$ in za $n \geq 2$ velja

$$\sum_{i=1}^{n}\frac{a_i-a_{i+2}}{a_{i+1}+a_{i+2}}\geq 0,$$

če definiramo $a_{n+1}=a_1$, $a_{n+2}=a_2$.

("Matematika v škole")

19. Naj bodo $x_1, x_2, \ldots, x_n$ pozitivna realna števila. Dokaži, da velja

$$\frac{x_1}{x_2+x_3+\cdots+x_n}+\frac{x_2}{x_1+x_3+\cdots+x_n}+\cdots+$$

$$+\cdots+\frac{x_n}{x_1+x_2+\cdots+x_{n-1}}\geq\frac{n}{n-1}.$$

20. Vsota pozitivnih števil $x_1, \ldots, x_n$ je enaka 1. Naj bo S največje izmed števil

$$\frac{x_1}{1+x_1}, \frac{x_2}{1+x_1+x_2}, \ldots, \frac{x_n}{1+x_1+x_2+\cdots+x_n}.$$

Določi najmanjšo vrednost za S. Pri katerih $x_1, \ldots, x_n$ jo doseže?

Želim vam veliko uspeha pri delu!

Uroš Milutinović

14. MEDNARODNO MATEMATIČNO TEKMOVANJE MEST – POMLADANSKI KROG

V prvem delu pomladanskega kroga 14.tekmovanja mest, ki je bil 19. marca letos, je tekmovalo 20 srednješolcev. Dijaki prvih in drugih letnikov so tekmovali v prvi skupini, ostali pa v drugi skupini. Reševali so naslednje naloge:

Prva skupina

1. Naj bo M točka na stranici AB trikotnika ABC. Dani sta dolžina $\overline{AB} = c$ in kot $\angle CMA = \varphi$. Poišči razdaljo med višinskima točkama trikotnikov AMC in BMC.

2. V vsaki od hiš A in B, ki imata po dve stanovanji, živijo psi in mačke. Vemo, da je delež mačk v prvem stanovanju hiše A (t.j. razmerje med številom mačk in številom vseh živali v tem stanovanju) večji od deleža mačk v prvem stanovanju hiše B in da je delež mačk v drugem stanovanju hiše A večji od deleža mačk v drugem stanovanju hiše B. Ali je delež mačk v hiši A večji od deleža mačk v hiši B?

3. Naj bodo a, b, c naravna števila, katerih največji skupni deljitelj je 1, in naj bo $\dfrac{ab}{a-b} = c$. Dokaži, da je $a-b$ popoln kvadrat.

4. Mravlja, ki se sprehaja po robovih kocke, lahko spreminja smer samo v ogliščih. V enem od oglišč je bila že 25-krat. Ali je možno, da je bila v vsakem od preostalih sedmih oglišč natanko 20-krat?

Druga skupina

1. Poišči vsa števila oblike 2^n, kjer je n naravno število, pri katerih je število, ki ga dobimo z brisanjem prve števke števila 2^n v desetiškem zapisu, spet potenca števila 2.
2. Naj bo $ABCD$ tetivni štirikotnik. Presečišče premic AB in CD označimo z M, presečišče premic BC in AD pa z N. Naj bo $BM = DN$. Dokaži, da je $CM = CN$.
3. Vsako od števil v drugi, tretji, ... vrsti naslednjega trikotnika

$$\begin{array}{ccccccccccc}
1 & \frac{1}{2} & & \frac{1}{3} & & \frac{1}{4} & & \cdots & & & \frac{1}{1993} \\
& \frac{1}{2} & \frac{1}{6} & & \frac{1}{12} & & \cdots & & \frac{1}{1992\cdot 1993} & & \\
& & \frac{1}{3} & \frac{1}{12} & & \cdots & & \cdots & & & \\
& & & \cdots & \cdots & \cdots & & & & &
\end{array}$$

je razlika števil nad njim. Poišči število na dnu trikotnika.
4. Imamo tri kupe kamnov. V vsaki potezi odvzamemo ali dodamo enemu kupu toliko kamnov, kot jih je na preostalih dveh skupaj. (Primer: $[12, 3, 5] \to [12, 20, 5]$ ali $[12, 3, 5] \to [4, 3, 5]$) Ali lahko po nekaj potezah odvzamemo vse kamne z vsaj enega kupa pri začetnem položaju $[1993, 199, 19]$?

Najuspešnejši dijaki v prvem delu so bili Iztok KAVKLER in Mitja MASTNAK (oba z Gimnazije Lava), Marko KRAJNC (z II. gimnazije Maribor), Bojan GORNIK (z Gimnazije Novo mesto) in Andrej SRAKAR (z Gimnazije Bežigrad).

V drugem delu tekmovanja, ki je bil teden dni kasneje, pa je sodelovalo 18 dijakov. Naloge v drugem delu so bile težje od nalog prvega dela, zato objavljamo le po dve nalogi za vsako skupino.

Prva skupina

1. Naj bo O središče kroga, ki se dotika stranice AC trikotnika ABC in podaljškov stranic AB in BC. Središče krožnice, na kateri ležijo točke A, B in O, označimo z D. Dokaži, da ležijo točke A, B, C in D na neki krožnici.

REŠITVE NALOG

2. V Petrovem razredu je poleg njega še 25 dijakov. Peter je opazil, da ima vsak izmed teh 25 dijakov različno število prijateljev. Koliko prijateljev ima Peter v tem razredu? (Podaj vse možne odgovore.)

Druga skupina

1. Znotraj kvadrata s stranico 1 se nahaja nekaj ne prekrivajočih se manjših (lahko različno velikih) kvadratov s stranicami vzporednimi stranicam večjega kvadrata. Potegnemo eno diagonalo večjega kvadrata in si ogledamo vsoto obsegov kvadratov, ki jih ta diagonala seka. Ali je lahko ta vsota večja od 1993?
2. Na tablo zaporedoma pišemo naravna števila. Število a_{n+1}, ki ga zapišemo za števili $a_1, a_2, \ldots, a_n$, je poljubno naravno število, ki ga ni moč izraziti v obliki vsote nekaj prejšnjih števil, vzetih enkrat ali večkrat (t.j. a_{n+1} ni oblike $k_1 a_1 + k_2 a_2 + \ldots + k_n a_n$, kjer so $k_1, k_2, \ldots, k_n$ nenegativna cela števila). Dokaži, da postopka ne moremo ponavljati v nedogled.

Najuspešnejši dijaki v drugem delu pa so bili Bojan GORNIK (z Gimnazije Novo mesto), Marko KRAJNC (z II. gimnazije Maribor), Lara MAJCEN (z Gimnazije Bežigrad) in Mitja MASTNAK (z Gimnazije Lava).

Matjaž Željko

STO DELITELJEV - Rešitev s str. 315

Naj bo n naravno število in

$$n = p_1^{\alpha_1} p_2^{\alpha_2} \ldots\ p_s^{\alpha_s} \qquad (1)$$

njegova razcepitev na praštevilske faktorje. Če je d poljuben delitelj števila n, je njegova praštevilska faktorizacija oblike

$$d = p_1^{x_1} p_2^{x_2} \ldots\ p_s^{x_s},$$

kjer so $x_1, x_2, \ldots, x_s$ cela števila, $0 \leq x_k \leq \alpha_k$, $k = 1, 2, \ldots, s$. Od tod razberemo, da je število različnih deliteljev števila n enako

$$N(n) = (\alpha_1 + 1)(\alpha_2 + 1) \ldots (\alpha_s + 1). \qquad (2)$$

Ta izraz pove, da je število deliteljev danega števila odvisno le od eksponentov praštevil, ki nastopajo v razcepitvi števila, prav nič pa od velikosti praštevil samih.

Najmanjše število n s predpisanim številom deliteljev bomo torej iskali med števili oblike (1), kjer bomo za $p_1, p_2, \ldots, p_s$ zapored vzeli najmanjša praštevila:

$$p_1 = 2,\ p_2 = 3,\ p_3 = 5,\ \ldots,$$

njihove eksponente pa določili iz (2) ob dodatnem pogoju

$$\alpha_1 \geq \alpha_2 \geq \ldots \geq \alpha_s.$$

Za $N(n) = 100$ dobimo devet možnosti:

α_1	99	49	24	24	19	9	9	4	4
α_2		1	3	1	4	9	4	4	4
α_3				1			1	3	1
α_4									1

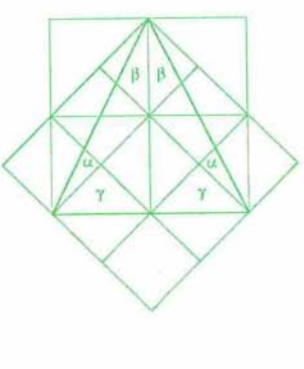
Najmanjše število daje zadnji stolpec. To je število

$$n = 2^4 \cdot 3^4 \cdot 5 \cdot 7 = 45360.$$

Sami se lahko pozabavate še z vprašanjem, ali obstaja kakšno od tega števila manjše število, ki ima več kakor sto deliteljev.

Marija Vencelj

KOTI V KVADRATIH - Rešitev s str. 257



Vsota kotov je seveda $90°$. En način, kako to dokažemo, je prikazan na sliki. Enakokraki trikotnik ima ob osnovnici kot $\alpha + \gamma$ in v vrhu kot 2β, torej ima vsoto kotov enako $180° = 2\alpha + 2\beta + 2\gamma$. Od tod sledi, da je $\alpha + \beta + \gamma = 90°$. Seveda pa to še zdaleč ni edini možni dokaz.

Neža Mramor

EULERJEV PROBLEM DELITVE KONVEKSNEGA VEČKOTNIKA NA TRIKOTNIKE

V tem prispevku bomo odgovorili na naslednji vprašanji:

1. Na koliko različnih načinov lahko dani konveksni n-kotnik s pomočjo njegovih diagonal razdelimo na same trikotnike tako, da se začrtane diagonale v notranjosti večkotnika ne sekajo?

2. Na koliko načinov lahko izračunamo produkt n različnih faktorjev tako, da zmnožimo vedno po dva faktorja in je tako dobljeni produkt eden od faktorjev v nadaljnjem množenju?

Prvo vprašanje je leta 1751 postavil švicarski matematik Leonhard Euler (1707 - 1783), z drugim pa se je leta 1838 prvi ukvarjal francoski matematik Catalan. Čeprav se problema na prvi pogled precej razlikujeta, pa je njuno reševanje tesno povezano.

Eulerjev problem bralcem, ki skrbno shranjujejo vse številke Preseka, ni neznan. V članku Marka Razpeta: Rezanje večkotnika na trikotnike (P 18 (1990/91), št. 1, str. 12 - 16) avtor (med drugim) bralca seznani z rešitvijo in le to tudi delno dokaže. Hkrati je v isti številki Preseka Vilko Domajnko na str. 35 zastavil Eulerjevo nalogo za naravna števila $n \leq 8$.

V Eulerjevo čast z e_n označimo število možnih delitev konveksnega n-kotnika na trikotnike. Za prvih nekaj naravnih števil lahko preprosto preštejemo vse možnosti. Tako ugotovimo, da je

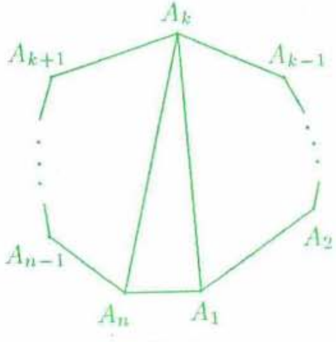
$$e_3 = 1, \quad e_4 = 2, \quad e_5 = 5 \quad \text{in} \quad e_6 = 14,$$

ter slej kot prej obupamo nad to metodo določanja števil e_n.

Leta 1758 je Segner, s katerim se je Euler dopisoval, našel naslednjo rekurzivno zvezo za zaporedje števil $\{e_n\}$:

$$e_n = e_2\, e_{n-1} + e_3\, e_{n-2} + e_4\, e_{n-3} + \ldots + e_{n-1}\, e_2\,, \qquad n \geq 3\,, \qquad (1)$$

kjer smo definirali $e_2 = 1$. Dokažimo to zvezo! V ta namen si oglejmo sliko 1.



Slika 1

Oglišča konveksnega n-kotnika označimo zaporedoma s črkami A_1, A_2, A_3, ..., A_n. Pri poljubni delitvi je stranica A_nA_1 stranica nekega trikotnika, denimo $A_nA_1A_k$, kjer je k naravno število med 2 in $(n-1)$. Na eni strani tega trikotnika imamo k-kotnik $A_1A_2 \ldots A_k$, na drugi stani pa $(n+1-k)$-kotnik $A_kA_{k+1} \ldots A_n$. Prvi večkotnik lahko razdelimo z diagonalami na trikotnike na e_k, drugega pa na e_{n+1-k} načinov. Ker pa poljubno delitev prvega večkotnika lahko kombiniramo s poljubno delitvijo drugega, imamo pri izbranem k natanko $e_k \cdot e_{n+1-k}$ delitev. Število k lahko zavzame poljubno naravno vrednost med 2 in $(n-1)$. Ker na ta način dobimo vse možne delitve prvotnega večkotnika, od tod dobimo (1). (Bralec naj sam premisli, zakaj je ugodno definirati $e_2 = 1$.)

Zvezo (1) imenujemo *Segnerjeva rekurzivna formula*. Lahko se prepričamo, da se sklada s prej določenimi vrednostmi e_3, e_4, e_5 in e_6. Dobimo pa še nekaj naslednjih členov zaporedja :

$$e_7 = e_2\,e_6 + e_3\,e_5 + e_4\,e_4 + e_5\,e_3 + e_6\,e_2 = 42\,,$$

$$e_8 = e_2\,e_7 + e_3\,e_6 + e_4\,e_5 + e_5\,e_4 + e_6\,e_3 + e_7\,e_2 = 132 \quad \text{itd.}$$

Pri velikih n tudi s pomočjo formule (1) težko določimo število e_n. Da bi dobili končno formulo za e_n, najprej rešimo drugi problem.

Začnimo z nekaj primeri: Produkt števil $2 \cdot 3 \cdot 4 \cdot 5$ lahko izračunamo na primer na naslednji način: $2 \cdot 3 = 6$, $4 \cdot 5 = 20$ in končno $6 \cdot 20 = 120$. Splošno lahko produkt štirih faktorjev $a\,b\,c\,d$ izračunamo na naslednjih pet načinov:

$$[(a \cdot b) \cdot c] \cdot d\ ,\ [a \cdot (b \cdot c)] \cdot d\ ,\ (a \cdot b) \cdot (c \cdot d)\ ,$$

$$a \cdot [(b \cdot c) \cdot d] \quad \text{in} \quad a \cdot [b \cdot (c \cdot d)]\,.$$

Tu smo upoštevali vrstni red faktorjev. Kaj pa, če le ta ni predpisan ? Tedaj lahko na primer množimo tudi takole

$$a \cdot [c \cdot (b \cdot d)] \quad \text{ali} \quad d \cdot [(c \cdot b) \cdot a]\,.$$

Ugotovili smo, da Catalanov problem pravzaprav vsebuje dve vprašanji:

1. Na koliko načinov lahko izračunamo produkt n različnih faktorjev, če je vrstni red faktorjev predpisan ?
2. Na koliko načinov lahko izračunamo produkt n različnih faktorjev, če vrstni red faktorjev ni predpisan ?

Števili, po katerih sprašujeta vprašanji, zaporedoma zaznamujmo s c_n in z r_n. Obe števili sta v preprosti zvezi

$$r_n = c_n \cdot n! \,, \tag{2}$$

kjer je $n!$ produkt prvih n naravnih števil. To bo brez težav, ob upoštevanju, da je število vseh možnih razvrstitev (permutacij) n elementov enako $n!$, pokazal bralec sam. Kot za zaporedje števil $\{e_n\}$ bomo tudi za zaporedji $\{c_n\}$ in $\{r_n\}$ poiskali rekurzivni zvezi, s pomočjo katerih bomo dobili formule za vsa tri zaporedja.

Najprej začnimo z zaporedjem $\{r_n\}$. Predstavljajmo si, da imamo zapisanih vseh r_n načinov množenja faktorjev $f_1, f_2, \ldots, f_n$. Tem poskusimo dodati še faktor f_{n+1} (ki ga označimo krajše s f), tako da dobimo vseh r_{n+1} načinov množenja faktorjev $f_1, f_2, \ldots, f_n, f_{n+1}$.

Naj bo P poljubno množenje produkta n faktorjev (eno izmed r_n možnih). Očitno vsebuje $(n-1)$ produktov oblike $A \cdot B$, kjer sta A in B podprodukta. Če je na primer $n = 4$ in $P = c \cdot [(a \cdot b) \cdot d]$, imamo za A in B naslednje možnosti :

$$A = a \,,\ B = b \,;\ \ A = a \cdot b \,,\ B = d \quad \text{in} \quad A = c \,,\ B = (a \cdot b) \cdot d \,.$$

Če uporabimo faktor f najprej enkrat kot faktor pred A, potem za A, nadalje enkrat kot faktor pred B in nato za B, dobimo iz produkta $A \cdot B$ naslednje štiri produkte

$$(f \cdot A) \cdot B \,,\ (A \cdot f) \cdot B \,,\ A \cdot (f \cdot B) \quad \text{in} \quad A \cdot (B \cdot f) \,.$$

Ker to lahko storimo za vseh $(n-1)$ podproduktov $A \cdot B$ v P, iz produkta P tako dobimo $4(n-1)$ produktov $(n+1)$ faktorjev. Poleg tega iz P dobimo tudi naslednji dve mogoči množenji $f \cdot P$ in $P \cdot f$. Torej iz enega množenja produkta n faktorjev dobimo $(4n-2)$ različnih množenj produkta $(n+1)$ faktorjev. Iz vseh r_n različnih množenj produkta n faktorjev potemtakem dobimo $(4n-2)\,r_n$ različnih množenj produkta $(n+1)$ faktorjev. Ugotovili smo torej, da je

$$r_{n+1} = (4n-2)\, r_n\,. \tag{3}$$

To je rekurzivna zveza med r_n in r_{n+1}. Da dobimo končno formulo za r_n, izračunajmo prvih nekaj členov zaporedja. Očitno je $r_2 = 2$, saj faktorja a in b lahko množimo na dva možna načina: $a \cdot b$ ali $b \cdot a$. Iz (3) potem dobimo zaporedoma $r_3 = 6\; r_2 = 2 \cdot 6$, $r_4 = 10\; r_3 = 2 \cdot 6 \cdot 10$ in tako naprej. Končno dobimo

$$r_n = 2 \cdot 6 \cdot 10 \cdot \ldots \cdot (4\,n-6)\,.$$

Poiščimo še rekurzivno zvezo za zaporedje $\{c_n\}$. Sedaj je vrstni red faktorjev predpisan, denimo, da je to že zaporedje $f_1, f_2, \ldots, f_n$ $(n \geq 2)$. Vsako od c_n množenj teh faktorjev je oblike ( ) $\cdot$ ( ), kjer prvi oklepaj vsebuje množenje prvih recimo k faktorjev $f_1, f_2, \ldots, f_k$, drugi pa naslednjih $(n-k)$ faktorjev $f_{k+1}, f_{k+2}, \ldots, f_n$. Tukaj je k poljubno naravno število, manjše od n. V prvem oklepaju je možnih c_k množenj, v drugem pa c_{n-k}. Ker lahko množenja v prvem oklepaju poljubno kombiniramo z množenji v drugem oklepaju, je pri danem k vseh množenj $c_k\, c_{n-k}$. Ker je k poljubno naravno število od 1 do $(n-1)$, končno dobimo

$$c_n = c_1\, c_{n-1} + c_2\, c_{n-2} + c_3\, c_{n-3} + \ldots + c_{n-1}\, c_1\,. \tag{4}$$

Z uporabo te rekurzivne zveze iz $c_1 = 1$ in $c_2 = 1$ izpeljemo

$$c_3 = c_1\, c_2 + c_2\, c_1 = 2\,, \quad c_4 = c_1\, c_3 + c_2\, c_2 + c_3\, c_1 = 5 \quad \text{itd.}$$

S pomočjo enakosti (2) dobimo tudi končno formulo za c_n :

$$c_n = \frac{r_n}{n!} = \frac{2 \cdot 6 \cdot 10 \cdot \ldots \cdot (4\,n-6)}{n!}\,.$$

Tako je Catalanov problem v celoti rešen. Končno rešitev Eulerjevega problema pa tudi že slutimo. Prvih nekaj členov zaporedij $\{e_n\}$ in $\{c_n\}$ se z zamikom enega člena namreč ujema, zaporedji pa zadoščata podobnima rekurzivnima enačbama. Zato postavimo hipotezo

$$e_n = c_{n-1}\,,$$

ki jo bralec s pomočjo indukcije ter zvez (1) in (4) brez težav tudi dokaže.

Končno torej lahko zapišemo

$$e_n = \frac{2 \cdot 6 \cdot 10 \cdot \ldots \cdot (4n - 10)}{(n-1)!} .$$

To formulo še nekoliko preoblikujmo

$$e_n = \frac{2^{n-2} \cdot 1 \cdot 3 \cdot 5 \cdot \ldots \cdot (2n-5)}{(n-1)!} =$$

$$= \frac{2^{n-2} \cdot (2n-3)!}{(n-1)! \cdot 2 \cdot 4 \cdot \ldots \cdot (2n-4) \cdot (2n-3)} =$$

$$= \frac{2^{n-2} \cdot (2n-3)!}{(n-1)! \cdot 2^{n-2} \cdot (n-2)! \cdot (2n-3)} .$$

Od tod dobimo

$$e_n = \frac{1}{2n-3} \binom{2n-3}{n-2} = \frac{1}{k} \binom{k}{t} ,$$

kjer je $t = n - 2$ število trikotnikov, ki nastanejo po delitvi konveksnega n-kotnika z diagonalami, $k = 2n - 3$ pa je tedaj število vseh stranic in diagonal.

Roman Drnovšek

SISTEMI LINEARNIH DIOFANTSKIH ENAČB – Rešitve s str. 301

1. $71k, 265k, 191k, 148k, 129k, 76k;\ k \in \mathbb{N}$
2. $(0, 25, 25), (4, 18, 78), (8, 11, 81), (12, 4, 84)$
3. $x = 20 - \frac{3k}{5}, y = k, z = 80 - \frac{2k}{5};\ k = 0, 5, 10, \ldots, 30$
4. $[(2, 3, 2), (2, 3, 2), (3, 1, 3)]$
5. $b = 2r + s - 28;\ r, s \in \mathbb{N}_0$ in $2r + s \geq 28$
6. $x = \frac{5z}{9} + 20u - 250, y = 350 - 21u - \frac{14z}{9};\ z \leq 90$ in $9/z, u = 10, 11, 12, \ldots, 16$
7. $5, 3, 33$
8. $(10, 10, 0), (12, 7, 1), (14, 4, 2), (16, 1, 3)$

Vilko Domajnko

GLASBENI TROBOJ - Rešitev s str. 326

Poiskati moramo število inštrumentov, ki so bili zastopani na tekmovanju, in pa tri različna naravna števila, od katerih največje predstavlja število točk, ki ga ekipi prisluži prvo mesto, drugo je število točk za drugo mesto, najmanjše pa je število točk za tretje mesto. Če bi bili na tekmovanju le trobentači in kitaristi, bi bilo število točk za prvo mesto največ osem, ker je Urškina ekipa, v tem primeru z dvema uvrstitvima, nabrala 9 točk. Vendar pa v tem primeru viška ekipa nikakor ne bi mogla nabrati 22 točk. Tudi v primeru treh in štirih inštrumentov se točk ne da razporediti tako, kot zahteva naloga. Rešitev dobimo šele če je inštrumentov pet, podana pa je v spodnji tabeli. Prvo mesto je vredno 5 točk, drugo 2 točki, tretje pa 1 točko.

	trobenta	kitara	3. inštr.	4. inštr.	5. inštr.	vsota
Bežigrad	1	2	2	2	2	9
Center	5	1	1	1	1	9
Vič	2	5	5	5	5	22

Neža Mramor

UTRINEK

..."V eni roki imaš sedem sladkorčkov in devet skadkorčkov v drugi roki. Koliko jih imaš vseh skupaj?"

"Nič," je rekla Ana. "Nobenega nimam v tej roki in nobenega v tej roki, torej jih nimam nič, in napak je govoriti, da jih imam, ko jih pa nimam."

Pogumna, vrla gospodična Haynes je vnovič poskusila.

"Mišljeno je, da si predstavljaj, dragi otrok, predstavljaj si, da jih imaš."

Ob tem navodilu si je Ana predstavljala in zmagoslavno naznanila: "Štirinajst."

"Oh ne, dragica," je rekla vrla gospodična Haynes, "imaš jih šestnajst. Vidiš, sedem in devet je šestnajst."

"To že vem," je rekla Ana, "ampak rekli ste, naj si predstavljam, in tako sem si predstavljala, da en sladkorček pojem in predstavljala sem si, da enega komu dam, in tako jih imam štirinajst."

Še danes mislim, da je Ana hotela ublažiti izraz muke in stiske na obrazu gospodične Haynes, ko je pristavila: "Ni mi bil všeč, ni bil dober," je rekla, kakor bi si sama hotela naložiti kazen.

Iz knjige Fynn: Gospod Bog, tukaj Ana (izbrala Dušica Boben)

KRIŽANKA NOBELOVI NAGRAJENCI ZA FIZIKO III

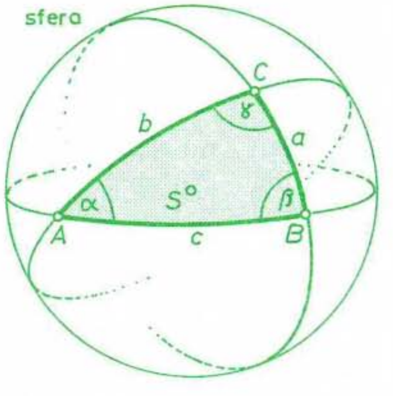
SESTAVIL MARKO BOKALIČ	ABDUS, PAKISTAN, 1979	MANOMETER	STROKOVNJAK ZA KMETIJSTVO	LETOVIŠČE NA POHORJU	ODTOČNI KANAL		NIELS, DANSKA, 1922	NORVEŠKI MATEMATIK (NIELS HENRIK)	ŠPANSKI KITARIST (FERNANDO)	
JOHANNES, NEMČIJA, 1919						NIKOLAJ, SZ, 1964				
PROGRAMSKI JEZIK						OGRAJEN PROSTOR ZA ŽIVINO				
ZELO POČASI (V GLASBI)						GUSTAV, NEMČIJA, 1925				
MESTO V INDIJI						LIBANON / OKRASNI KAMEN	L	I	ZENITU NASPROTNA TOČKA / PLES	
KNEŽEVINA V FRANCIJI							RIMSKA BOGINJA PLODNOSTI	PRIPADNIK BELE RASE / REALEN ČLOVEK	B	
	MOLIBDEN / LANTAN			VETROVKA / UMETNIKOVA DELAVNICA	A	N	O	R	A	
POMOŽNI IZREK V DALJŠEM DOKAZU	L	L	M	A	PRITOK DONAVE / ZVEZA DRŽAV JV AZIJE			E	L	LI
100 m²	A	R	DRŽAVNA PRISTOJBINA / PROSTOR ZA ŽIVINO	T	A	K	S	A	SL. IGRALKA (IRENA) / AŠKERČEVA PESEM	
	DRŽAJ	VIKTOR, AVSTR.-ZDA, 1936 / PESEM HVALNICA	H	A			DANSKI ŠAHIST / GRŠKA BOGINJA JUTRZARJE	L		
FRANC. MATEMATIK (MICHEL)	R	O	L	L		ALBERT, NEMČIJA, 1921		I		
POSTELJNO PREGRINJALO	O	D	E	J	A	ZLATI FILMSKI KIPEC		S		
PLANINSKI PREDEL NAD AJDOVŠČINO	Č	A	V	E	N	SLOV. PISATELJ (JOSIP)		T		

KRAJ PRI RIBNICI	KDOR JE V FEVDNEM ODNOSU		ČEBELJA SAMICA	IGRALEC SHARIF	IGRALEC CRUISE	SVOJEGLAVOST		LETOVIŠČE NA BRAČU	ALEKSANDER, SZ, 1964	OTOČEK V PRESPAN. JEZERU
	I	NEVILL FRANCIS, ANGLIJA, 1977	M		T	T	ZDRAVILIŠČE V BELGIJI			
		RIMSKI BOG LJUBEZNI	A	M	O	R	PRAKANTON V ŠVICI			
		IGOR, SZ, 1958 / NEKD. ŠVED. KRALJICA	T		M	M	KONEC MAGNETA / RDEČILO ZA USTNICE			
			L		KRAJ NA POHORJU	A				ISIDOR ISAAC, AVSTR.-ZDA, 1944
E	L	E	C	VRTNA HIŠICA	DUBROVNIK	ŽLEBIČ V DOGAH				
K	IME DVEH ARABSKIH KRALJEV / SVETI SPISI HINDUIZMA		A	V	D	URNA / CARLO, ITAL.-ZDA, 1984				
ŠTALEC IVAN / ETOVIŠČE V ISTRI	Š	I	GNOJNI IZPUŠČAJ / UŠJE JAJČECE	T	U	R	STIK DVEH PLOSKEV / SOSEDNJI PLANET	R	O	B
				A	PAMET, RAZUM	U	M	VIDAV IVAN / NARAVNO VEČANJE	V	I
				DUŠA UMRLEGA PRI SLOVANIH	ENOTA ZA TLAK	B	A	R	NEKDANJA PORTUGAL. POSEST V INDIJI	AFRIŠKA KRAVJA ANTILOPA
					WILLIAM, ANGLIJA, 1915 / VLADIMIR LAMUT		R	A		
		CLINTON JOSEPH, ZDA 1937			V		S	S		
		VELIKA VEŽA	H	A	L	A	GRŠKA ČRKA	T		

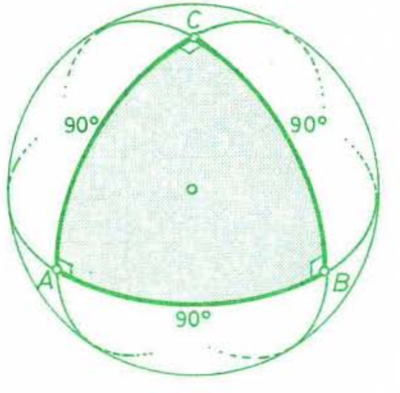
ENAKOSTRANIČNI TRIKOTNIK NA SFERI

Kakšen enakostranični trikotnik lahko narišemo na sferi, to je površini krogle? Odgovor je prav zanimiv.

Najprej poglejmo, kako je definiran *sferni trikotnik*, kot rečemo trikotniku na površini krogle. To je trikotnik, ki ga omejujejo loki treh glavnih (največjih) krožnic krogle (slika 1). Loki predstavljajo stranice trikotnika in jih merimo z ustreznimi središčnimi koti. Če so stranice med seboj enake, govorimo o enakostraničnem sfernem trikotniku. Tak trikotnik ima tudi vse kote enake.



Slika 1. Sferni trikotnik ABC s stranicami a, b, c in koti α, β, γ. Za sferne trikotnike velja: $0^\circ < a + b + c < 360^\circ; 180^\circ <$ $< \alpha + \beta + \gamma < 540^\circ$; ploščina je manjša od površine polkrogle $2\pi r^2$, če r pomeni polmer krogle, na površju katere leži sferni trikotnik.



Slika 2. Enakostranični in pravokotni sferni trikotnik ABC - *oktant* krogle. V oktantu merijo vse stranice 90° in vsi koti tudi 90°. Ploščina oktanta pa je $4\pi r^2/8 =$ $= \pi r^2/2$, če je r polmer krogle.

Zelo majhen sferni trikotnik lahko obravnavamo skoraj tako kot ravninskega. V ravninskem trikotniku je vsota notranjih kotov 180°, torej meri posamezni notranji kot v enakostraničnem trikotniku natanko 60°. V majhnem sfernem trikotniku pa je vsota kotov nekoliko večja od 180°, zato meri posamezni kot v majhnem enakostraničnem sfernem trikotniku le malo več od 60°. Recimo, da takemu sfernemu trikotniku večamo stranice tako, da ostaja trikotnik ves čas enakostraničen. Pridemo do zanimivega enakostraničnega sfernega trikotnika, v katerem merijo posamezne stranice 90° in posamezni koti tudi 90°. Tak sferni trikotnik je hkrati enakostraničen in pravokoten (slika 2). Vzemimo, da se stranice tega sfernega trikotnika še nadalje večajo. V nedogled to ne gre. Stranice se lahko večajo do določene vrednosti, prav tako koti, da ostane sferni trikotnik enakostraničen. Ni težko ugotoviti, da stranice ne morejo biti enake ali večje od 120°, koti pa ne morejo biti enaki ali večji od 180°. Razmislite o tem.

Marijan Prosén

ČE "DOBRO" OBVLADAŠ MATEMATIKO, LAHKO DOKAŽEŠ, DA JE $1 = 5$

Juretu se je zadnjič pri matematičnem preizkusu znanja zalomilo. Pisal je nezadostno. Samo pol točke mu je zmanjkalo do pozitivne ocene. Usodna je bila enačba $x^2 = 4$. Prehitro je napisal le eno rešitev $x = 2$. Na negativno rešitev ($x = -2$) pa je popolnoma pozabil. In je šla točka po vodi, s tem pa tudi pozitivna ocena! Skrbelo ga je, kaj bo doma. Kako naj pove staršem?

Sklenil je, da bo staršem zatrdil, da sicer matematiko zna za odlično, samo nesrečne okoliščine so privedle do tega, da je pisal nezadostno. Skratka, odločil se je, da bo staršem dokazal, da je

$$1 = 5.$$

Prosil je očeta, naj s svojim podpisom potrdi, da se strinja s tistim, kar bo napisal. Oče je privolil. Jure je napisal

$$-5 = -5$$

in oče je podpisal. Zapis je Jure spremenil takole:

$$1 - 6 = 25 - 30$$

in oče je podpisal. Zapis je Jure spet spremenil:

$$1 - 2.1.3 = 5^2 - 2.5.3$$

in oče je podpisal. Zapis je Jure potem dopolnil takole:

$$1^2 - 2.1.3 + 3^2 = 5^2 - 2.5.3 + 3^2$$

in oče je podpisal.

Očitno je bil Jure res kar dober matematik. Tudi oče se je še spomnil nekaj matematike iz osnovne in srednje šole. Kar sam je zapis spremenil v takole obliko:

$$(1-3)^2 = (5-3)^2$$

in dodal še svoj podpis. Jure pa je seveda očeta spomnil, da bi lahko zapis poenostavil.

"Saj se še spomniš kvadratnega korena števila," je spodbujal očeta.

"Seveda!" je rekel oče. "Takole bova napisala: $1-3=5-3$," in dodal svoj podpis.

Iz tega se seveda hitro vidi, da je

$$1 = 5.$$

"Oče!" je rekel Jure, "pravzaprav sem te hotel prositi, da mi podpišeš tole." Odprl je beležko, v kateri je pisalo: Matematično kontrolno nalogo sem pisal 1.

"Kot vidiš, pa je $1 = 5$. Ali podpišeš?" In oče je podpisal.

Kdo je bil boljši matematik, oče ali Jure?

* * *

Očitno je bil boljši matematik Jure, ker se je nekaj naučil na napaki, ki jo je naredil v šoli. Oče ne bi smel pristati na zvezo:

$$\text{Če je } (1-3)^2 = (5-3)^2,$$
$$\text{je tudi } 1-3 = 5-3.$$

Kvadrata sta res enaka, (-2) pa ni enako 2!

Janez Zupan

KOCKA, KOCKA ... - Rešitev s str. 326

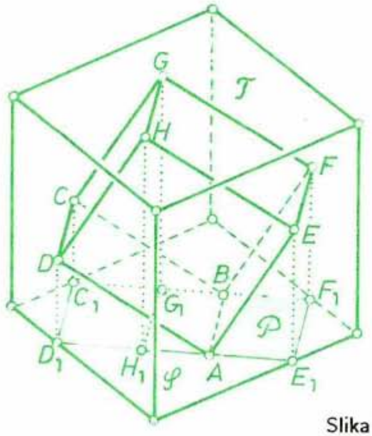
Na eni od stranic večje kocke $\mathcal{K}_o$ ležita vsaj dve oglišči včrtane kocke $\mathcal{K}_v$. Zaznamujmo to stranico z $\mathcal{S}$, njej nasprotno s $\mathcal{T}$, oglišči kocke $\mathcal{K}_v$, ki ležita na stranici $\mathcal{S}$, pa z A in B.

Daljica AB prav gotovo ne more biti telesna diagonala manjše kocke. Če bi bila AB diagonala kakšne stranice kocke $\mathcal{K}_v$, potem bi ta stranica ležala na $\mathcal{S}$, kocka $\mathcal{K}_v$ pa ne bi segala do stranice $\mathcal{T}$, ker je manjša od $\mathcal{K}_o$. Pogoji naloge tedaj ne bi bili izpolnjeni, torej je AB rob manjše kocke.

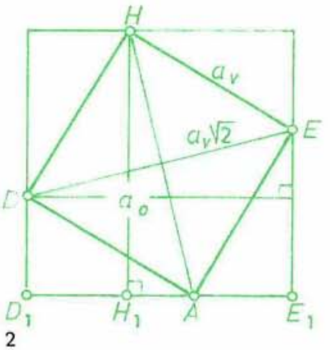
REŠITVE NALOG

Oglišča C, D, E, F dveh stranic kocke $\mathcal{K}_v$, ki se stikata v robu AB, ne morejo ležati na $\mathcal{S}$ ali $\mathcal{T}$, zato vsaka od ostalih štirih stranic kocke $\mathcal{K}_o$ vsebuje vsaj eno od njih. Rob GH, ki veže preostali dve oglišči kocke $\mathcal{K}_v$, je vzporeden AB, zato G in H ležita na $\mathcal{T}$.

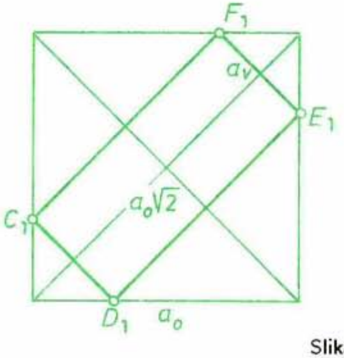
Pravokotna projekcija kocke $\mathcal{K}_v$ na stranico $\mathcal{S}$ je pravokotnik $\mathcal{P}$, ki ima oglišča na robu kvadrata $\mathcal{S}$. Dve stranici tega pravokotnika sta vzporedni AB in merita a_v, kjer je a_v dolžina roba kocke $\mathcal{K}_v$.



Slika 1



Slika 2



Slika 3

S pomočjo slike 2, kjer je narisan prerez obeh kock z ravnino skozi A in pravokotno na AB, lahko brez težav dokažemo, da sta drugi dve stranici pravokotnika $\mathcal{P}$ enako dolgi kot rob kocke $\mathcal{K}_o$, denimo a_o.

Pravokotnik $\mathcal{P}$ torej ni kvadrat. Rešitev naloge *Paralelogrami* v tej številki Preseka nam pove, da imata $\mathcal{P}$ in $\mathcal{S}$ skupno središče in da sta stranici pravokotnika $\mathcal{P}$ vzporedni diagonalama kvadrata $\mathcal{S}$. Slika 3 nam da oceno $a_o \leq \sqrt{2}a_v$, iz slike 3 pa razberemo, da velja $a_v = (\sqrt{2}-1)a_o$. Od tod sledi neenakost

$$a_v \leq (\sqrt{2}-1)\sqrt{2}a_v = (2-\sqrt{2})a_v,$$

ki pa za $a_v > 0$ ni mogoča.

V kocko torej ni mogoče včrtati manjše kocke, ki bi ustrezala pogojem naloge.

Boris Lavrič

UVOD V SVET OBJEKTOV

Objekti

Vsi poznamo zapise (**record**-e) v pascalu. Omogočajo nam, da zberemo skupaj med seboj povezane podatke. Objekt dobimo, če dodamo še podprograme, s katerimi obdelujemo te podatke. Tem podprogramom pravimo *metode*. Podatki določajo, kaj objekt *ve*. Metode določajo, kaj objekt *zna*. Na primer: celo število (`integer`) sicer ve za svojo vrednost, a si z njo ne zna pomagati. Naredimo objekt, ki bo svojo vrednost znal izpisati:

```
type
  IntegerPlus = object
    vem: integer;
    procedure znam;
  end;


procedure IntegerPlus.znam;
 begin
  write('  ',vem,'  ')
 end; {IntegerPlus.znam}
```

Enostaven primer uporabe bi bil:

```
var
 I: IntegerPlus;
begin
 I.vem := 1;
 I.znam;                                    { izpiše '␣ 1␣' }
end.
```

Seveda so lahko podatki, ki jih združuje objekt, mnogo bolj zapleteni kot so v našem primeru. Zato poznamo dve posebni metodi, *konstruktor* in *destruktor*. Konstruktor je metoda, ki naj bi jo uporabili prvo. Ponavadi jo izkoristimo za prireditev začetnih vrednosti. Destruktor naj bi uporabili kot zadnjo.

Dedovanje

Dedovanje je pomembna lastnost objektov. Omogoča nam, da ustvarimo nove objekte, ki "vedo" in "znajo" vse, kar znajo stari objekti, lahko pa vedo ali znajo še kaj več. Naredimo objekt celega števila, ki se zna izpisati, zna pa tudi povedati, ali je praštevilo:

```
type
  IntegerPlusPlus = object(IntegerPlus)
    function Prastevilo: boolean;
  end;


function IntegerPlusPlus.Prastevilo: boolean;
 var
  test: boolean;
  i: integer;
 begin
  test := Odd(vem);                              { Praštevilo je vedno liho. }
  i := 3;
  while test and (Sqr(i) <= vem) do begin
    test = vem mod i <> 0;
    i := i + 2;                { Ker je vem liho število, ima le lihe delitelje. }
  end;
  Prastevilo := test
 end; {IntegerPlusPlus.Prastevilo}


var
 I: IntegerPlusPlus;
begin
 I.vem := 1;
 I.znam;                                                    { izpiše '␣ 1␣' }
 writeln(' 'Je prastevilo?',I.Prastevilo)       { izpiše ' Je␣ praštevilo?␣ TRUE'}
end.
```

Vidimo, da je metoda lahko tudi funkcijski podprogram. Vsaka metoda pozna vse, kar objekt ve, torej vse njegove podatke, in jih lahko poljubno uporablja in spreminja.

Objekt `IntegerPlusPlus` ve in zna vse, kar zna objekt `IntegerPlus`. Zato nam metode `znam` ni bilo treba še enkrat deklarirati in kasneje napisati. Še več, objekt `IntegerPlus` lahko zapremo v neko enoto (**unit**) in prijateljici odstopimo samo prevedeno datoteko (.TPU), pa bo ona še vedno mogla definirati objekt `IntegerPlusPlus`, hkrati pa ne bo mogla šariti po našem programu (kar še posebej velja za njenega mlajšega brata). Pravimo, da je `IntegerPlusPlus` *naslednik* objekta `IntegerPlus`. Pascalu to sporočimo tako, da za besedico **object** napišemo v oklepaju ime prednika. Tudi vsem morebitnim naslednikom objekta `IntegerPlusPlus` bomo rekli nasledniki objekta `IntegerPlus`. Torej je lahko vsak objekt oče, ded, praded... cele družine objektov.

Zaradi dedovanja objektov so postala drugače stroga pascalova pravila o prirejanju nekoliko ohlapnejša. Do sedaj je veljalo, da lahko spremenljivki določenega tipa priredimo samo spremenljivko oziroma izraz istega tipa. Edina izjema so bile spremenljivke tipa `Real`, ki smo jim mogli prirediti tudi celoštevilske izraze. Pri objektih pa velja, da mu smemo prirediti objekt istega tipa ali njegovega naslednika. Če objekt, ki mu prirejamo vrednost, ne ve ali zna vsega, kar mu prirejamo, se odvečna informacija enostavno izgubi. Pravilo je torej enostavno: izraz mora biti sposoben zapolniti celoten objekt. Drugače bi lahko ostalo kakšno polje brez prirejene vrednosti, čemur pa se moramo na vsak način ogniti.

Nasledniki objekta lahko metode objekta (eno ali več) tudi spremenijo. Prepišimo objekt `IntegerPlusPlus` tako, da bo pred praštevilom izpisana zvezdica! Podprogram `Pokazi` pa bo izpisal vrednost enemu ali drugemu objektu.

```
type
  IntegerPlusPlus = object(IntegerPlus)
    procedure znam;
    function Prastevilo: boolean;
  end;


function IntegerPlusPlus.Prastevilo: boolean;
 var
  test: boolean;
  i: integer;
 begin
   {... kot prej ...}
 end;


procedure IntegerPlusPlus.znam;
 begin
  write('  ');
  if Prastevilo then write('*');
  write(vem,'  ')
 end; {IntegerPlusPlus.znam}


procedure Pokazi(var o: IntegerPlus);
{ Sprejme tudi argument tipa IntegerPlusPlus in sploh vseh naslednikov. }
 begin
  o.znam
 end; {Pokazi}


var
 I: IntegerPlus;
 J: IntegerPlusPlus;
```

```
begin
  I.vem := 17;  J.vem := 23;
  I.znam;                                  { izpiše '␣ 17␣" }
  J.znam;                                 { izpiše '␣ *23␣" }
  I := J;
  I.znam;                                  { izpiše '␣ 23␣" }
  Pokazi(I);                               { izpiše '␣ 23␣" }
  Pokazi(J);                               { izpiše '␣ 23␣" }
end.
```

Bodimo pozorni! Nasledniki lahko spreminjajo metode (in dodajajo nove), podatkovnemu polju objekta pa tipa ni moč spreminjati. Nasledniki lahko le dodajajo nova podatkovna polja.

Navidezne metode

Pri objektih ločimo dve vrsti metod: statične in navidezne. S statičnimi metodami se ukvarja prevajalnik. Ko pri prevajanju sreča objekt, ki uporabi neko svojo statično metodo, reče: "Aha! Točno vem, kaj hočeš" in to tudi naredi. Včasih pa to ni najbolje. Tako podprogram `Pokazi` ne more izkoristiti tega, da je ob drugem klicu parameter `J` pravzaprav tipa `IntegerPlusPlus`, ki zna izpisati zvezdico pred praštevilom. Ko je pascal prevajal podprogram `Pokazi`, mu je bilo povsem jasno, da ima opravka z objektom tipa `IntegerPlus`, torej je tudi "vedel", katero metodo bo uporabil.

Hoteli bi, da se prevajalnik šele ob klicu metode odloči, katero metodo bo uporabil: tisto iz objekta `IntegerPlus`, ono iz objekta `IntegerPlusPlus`, ali pa morebitno tretjo metodo iz nekega naslednika teh dveh objektov. To nam omogočajo navidezne metode. Trik je enostaven: za imenom metode napišemo rezervirano besedico **virtual**. Ko objekt pokliče tako metodo, si prevajalnik samo zapiše, da na tem mestu od objekta pričakujemo določeno akcijo.

Vsak objekt, ki uporablja vsaj eno navidezno metodo, se mora na tako delo pripraviti. To stori s posebno metodo, konstruktorjem. Ta poskrbi, da se podatki o objektu zapišejo v posebno tabelo, brez katere navidezne metode ne znajo delati. Prepišimo sedaj naša objekta z navideznimi metodami:

```
type
  IntegerPlus = object
    vem: integer;
    constructor dobro_jutro(n: integer);
    procedure znam; virtual;
  end;
```

```
IntegerPlusPlus = object(IntegerPlus)
  constructor dobro_jutro(n: integer);
  procedure znam; virtual;
  function Prastevilo: boolean;
end;
```

```
constructor IntegerPlus.dobro_jutro(n: integer);
 begin
  vem := n
 end; {IntegerPlus.dobro_jutro}

constructor IntegerPlusPlus.dobro_jutro(n: integer);
 begin
  vem := n
 end; {IntegerPlusPlus.dobro_jutro}
```

Seveda ni potrebno, da konstruktor nastavi začetne vrednosti objekta. Kode, ki konstruktor loči od ostalih metod, tako ali tako nikoli ne vidimo, saj jo doda prevajalnik. Konstruktor zato svoje delo opravi, tudi če je v pascalu povsem prazen. Zato mora imeti vsak objekt, ki ima vsaj eno navidezno metodo, svoj konstruktor (tisti, ki ga ima oče, ni dober).

Poglejmo, kaj si o novih objektih misli isti podprogram `Pokazi`:

```
begin
 I.dobro_jutro(17);         { Postavi vrednost polja I.vem na 17. }
 J.dobro_jutro(23);         { Postavi vrednost polja J.vem na 23. }
 Pokazi(I);                              { izpiše '␣ 17␣'' }
 Pokazi(J)                               { izpiše '␣ *23␣'' }
end.
```

V zadnjem primeru se nikoli nismo dotaknili polja `vem`. *Pravilo lepega programiranja pravi, da podatkovna polja objekta uporabljajo izključno metode tega objekta.* Skladno s tem moramo objektu `IntegerPlus` dodati vsaj še dve metodi:

```
type
  IntegerPlus = object
    vem: integer;
    constructor dobro_jutro(n: integer);
    procedure priredi(n: integer);
    function vrednost: integer;
    procedure znam; virtual;
  end;
```

```
procedure IntegerPlus.priredi(n: integer);
 begin
  vem := n
 end; {IntegerPlus.priredi}

function IntegerPlus.vrednost(n: integer);
 begin
  vrednost := vem
 end; {IntegerPlus.vrednost}
```

Sedaj že vemo, da isti metodi poznajo tudi objekti tipa `IntegerPlusPlus`.

Način, na katerega se objekti tipa `IntegerPlus` in `IntegerPlusPlus` kažejo podprogramu `Pokazi`, imenujemo *polimorfizem*. Ime metode je vedno enako, v našem primeru je to `znam`. Kaj pa se v resnici zgodi, je odvisno od objekta, kateremu metoda pripada.

Razvijmo za vajo še soroden objekt, ki bo poznal znak in ga bo znal izpisati:

```
type
  CharPlus = object
    vem: char;
    constructor dobro_jutro(c: char);
    procedure priredi(c: char);
    function vrni: char;
    procedure znam; virtual;
  end;

constructor CharPlus.dobro_jutro(c: char);
 begin
  vem := c
 end; {CharPlus.dobro_jutro}

procedure CharPlus.priredi(c: char);
 begin
  vem := c
 end; {CharPlus.priredi}

function CharPlus.vrni: char;
 begin
  vrni := vem
 end; {CharPlus.vrni}

procedure CharPlus.znam;
 begin
  writeln('  ',vem,'  ')
 end; {CharPlus.znam}
```

Vidimo, da sta si objekta `IntegerPlus` in `CharPlus` zelo podobna. Kako bi lahko to sorodnost zapisali tudi v pascalu?

Objekti močno poudarijo staro pravilo (katerega nihče ne posluša), da velja temeljito razmisliti in proučiti problem, predno se lotimo programiranja. Obema objektoma, `IntegerPlus` in `CharPlus`, je skupno to, da znata izpisati neki podatek. Kateri podatek izpišeta in kako to naredita, pa je seveda njuna stvar. Sedaj skušajmo vse sorodnosti potegniti iz obeh objektov v nov, skupni objekt:

```
type
  Osnova = object
    constructor dobro_jutro;
    procedure znam; virtual;
  end;

constructor Osnova.dobro_jutro;
 begin
 end; {Osnova.dobro_jutro}

procedure Osnova.znam;
 begin
 end; {Osnova.znam}
```

Metoda `Osnova.znam` je prazna, saj osnovni objekt ne nosi nobene informacije. Njegova naloga je samo to, da opiše, kaj je skupnega vsem njegovim naslednikom. Vsak naslednik pa bo že poskrbel, da se bo izpisal na pravilen način. Sorodnost med objekti (v našem primeru med `IntegerPlus` in `CharPlus`) bomo ohranili z dedovanjem, drugačne izpeljave metod pa nam bodo prinesle razlike.

```
type
  IntegerPlus = object(Osnova)
    vem: integer;
    constructor dobro_jutro(n: integer);
    procedure priredi(n: integer);
    function vrednost: integer;
    procedure znam; virtual;
  end;

  CharPlus = object(Osnova)
    vem: char;
    constructor dobro_jutro(n: char);
    procedure priredi(n: char);
    function vrednost: char;
    procedure znam; virtual;
  end;
```

Manjkajoče metode lahko bralec napiše sam.

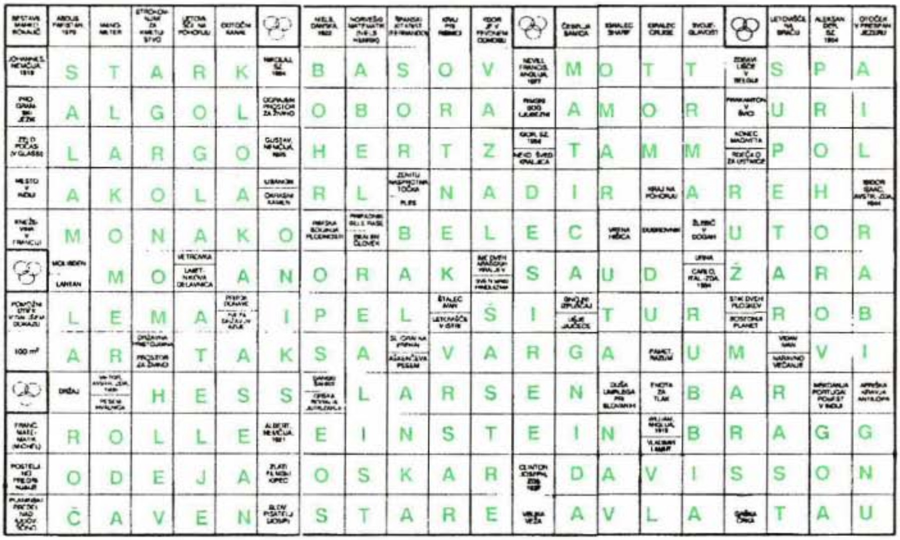
Sedaj lahko spremenimo še podprogram `Pokazi`:

```
procedure Pokazi(var o: Osnova);
 begin o.znam end;
```

Tako napisan podprogram pa pravilno izpiše objekte vseh v članku omenjenih tipov. Tako nam objekti omogočijo, da nam ni treba pisati enega podprograma za izpis celih števil, drugega za izpis znaka, še tretjega za nov tip, ki ga nenadoma potrebujemo. Dovolj je, da ga napišemo enkrat, vsakemu od teh tipov pa razložimo, kakšen je v resnici njegov izpis. Poenostavitve zaradi dela z objekti pridejo do izraza, ko se postopki zapletejo. Tako nam objekti prihranijo ogromno dela, ko se lotimo risanja grafičnih objektov (daljice, krogi itd.). Prav pri takšnih postopkih objekti resnično zaživijo.

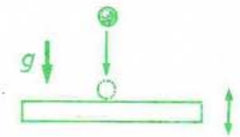
Jože Marinček

KRIŽANKA NOBELOVI NAGRAJENCI ZA FIZIKO III – Rešitev s str. 352



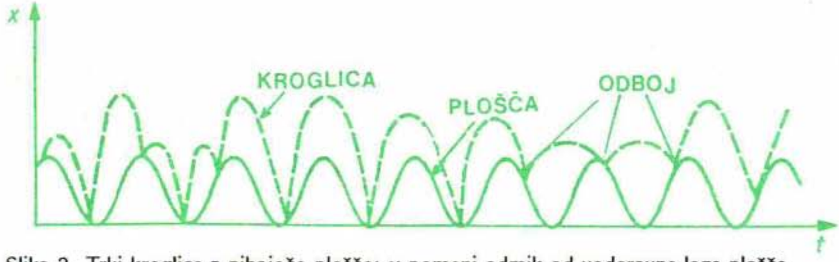
POSKAKUJOČA KROGLICA

V zadnjem času se pojavlja množica idej in metod, kako opisati nelinearne dinamične sisteme, ki nas popeljejo v svet kaosa. Na voljo imamo dve možnosti: matematični model s spremljajočimi računalniškimi simulacijami, h katerim se zateka zlasti matematika. Fiziki pa raje delajo poskuse in merijo. V kaos nas uvede tudi preprost poskus s poskakujočo kroglico na plošči, ki niha sinusno v navpični ravnini (slika 1).



Slika 1. V kaos nas uvede tudi preprost poskus s kroglico, ki poskakuje na nihajoči plošči.

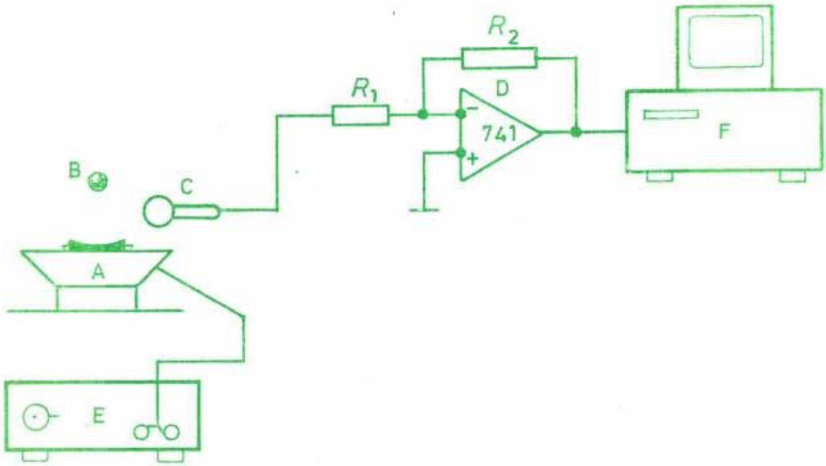
Ploščo pritrdimo na membrano zvočnika, ki ga napajamo s tonskim generatorjem. Da kroglica ne uide, prilepimo na ploščo konkavno lečo. Zvočnik priključimo na tonski generator, mikrofon pa preko ojačevalnika na osciloskop ali vmesnika na računalnik. Signal iz mikrofona moramo znatno ojačati. Zanima nas čas med zaporednima trkoma kroglice s ploščo. Trke zaznavamo z mikrofonom, čas med zaporednimi trki izmeri osciloskop ali računalnik.



Slika 2. Trki kroglice z nihajočo ploščo; x pomeni odmik od vodoravne lege plošče.

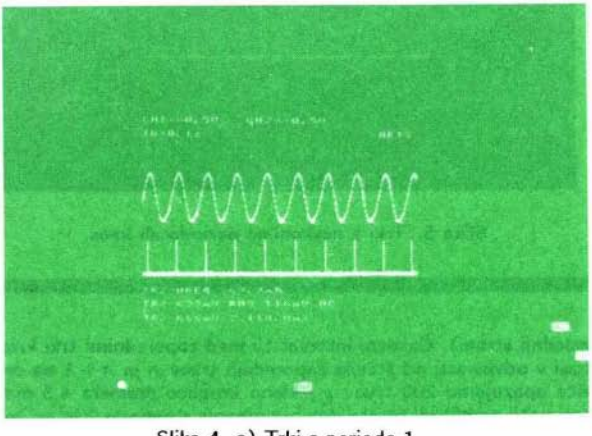
S potenciometrom na tonskem generatorju previdno spreminjamo amplitudo nihajoče plošče. Poskus se lepo posreči pri frekvenci okrog 10 Hz, če je leča steklena s premerom okrog 5 cm, kroglica pa jeklena s premerom okrog 4 mm. Poskakovanje kroglice lahko opazujemo na dvokanalnem osciloskopu. Tako lahko hkrati opazujemo signal, s katerim napajamo nihajočo ploščo, ter signal z mikrofona, ki meri zaporedne trke plošče s kroglico.

Pri nekaterih amplitudah nihajoče plošče se kroglica giblje periodično, tedaj so časi med zaporednimi trki enaki (slika 4a). Če amplitudo nihajoče plošče nekoliko povečamo, pride do trkov s podvojeno periodo (slika 4b). Pri

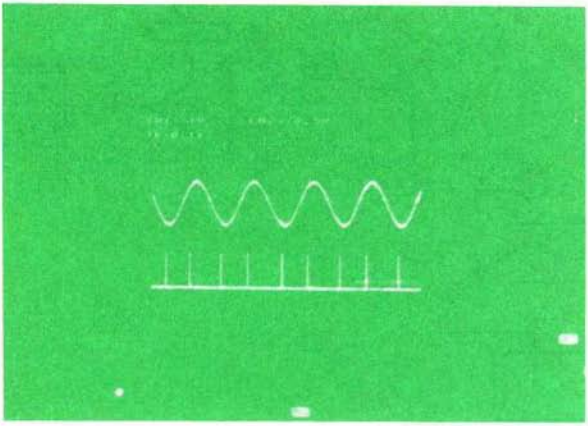


Slika 3. Naprava za merjenje časa med zaporednima trkoma kroglice z nihajočo ploščo. A zvočnik, B kroglica, C mikrofon, D ojačevalnik, E tonski generator, F osciloskop ali računalnik.

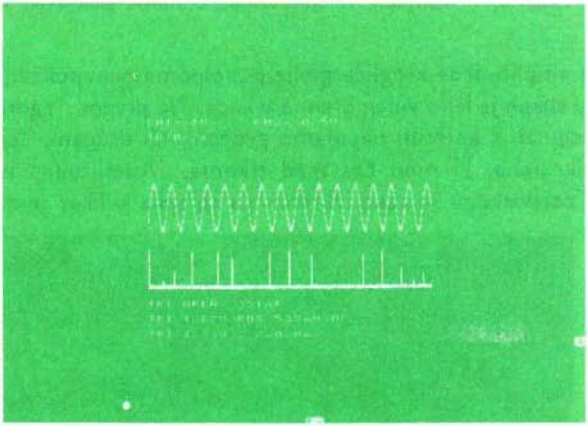
dovolj veliki amplitudi se kroglica giblje popolnoma nenapovedljivo, kaotično (slika 5). Na slikah je lepo viden prehod v kaos. Na prvem, "zgornjem" kanalu je prikazan signal, s katerim napajamo zvočnik, na drugem, "spodnjem" pa signal iz mikrofona, ki meri čas med trkoma. Amplitudna in frekvenčna območja na osciloskopu so tako izbrana, da so slike kolikor se da pregledne.



Slika 4. a) Trki s periodo 1.

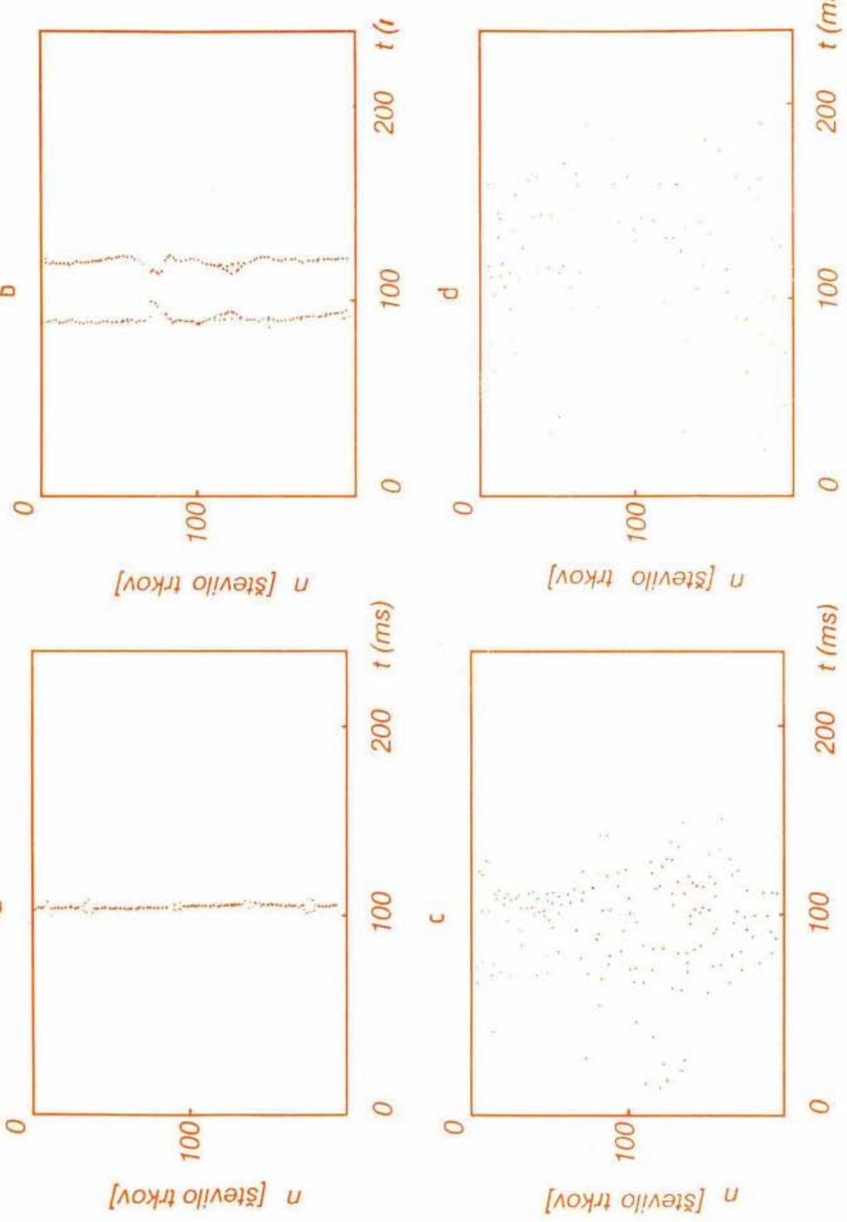


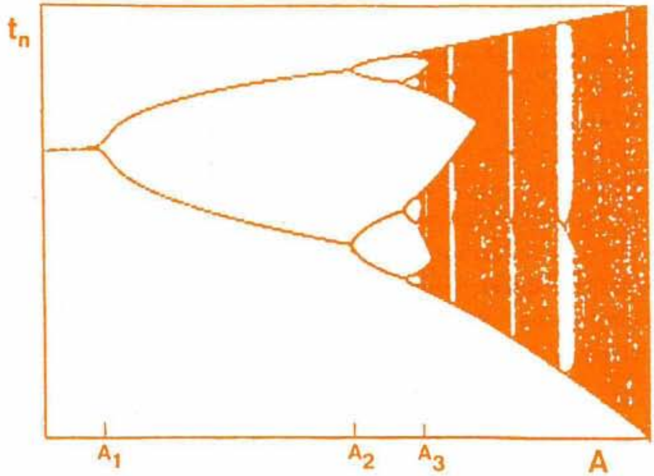
Slika 4. b) trki s periodo 2.



Slika 5. Trki z neskončno periodo ali kaos.

Slika 6 (na naslednji strani). Časovni interval t_n med zaporednimi trki kroglice z nihajočo ploščo na abscisi v odvisnosti od števila zaporednih trkov n in $n+1$ na ordinati. Pri dani amplitudi plošče opazujemo 200 trkov z jekleno kroglico premera 4,5 mm. a) gibanje s periodo 1, b) pri večji amplitudi plošče dobimo gibanje s periodo 2 in pri še večji amplitudi gibanje z neskončno periodo - kaos, c) in d).


a
b
c
d
n [število trkov]
t (ms)
0
100
200



Slika 7. Pri skrbnem in zelo počasnem večanju amplitude bi pri idealnem poskusu dobili zgornjo sliko. t_n bi v našem primeru bili časovni intervali med trki kroglice s ploščo in A amplituda napetosti, s katero napajamo zvočnik. Podvajanje period se zgodi v zelo ozkem amplitudnem pasu, zato je tak poskus težko narediti, saj ne moremo natančno nastaviti amplitude nihajoče plošče. Takšne in podobne slike ponavadi dobijo z računalniško simulacijo.

Stane Kodba

XXIII. MEDNARODNA FIZIKALNA OLIMPIADA

Mednarodno tekmovanje srednješolcev v znanju fizike je bilo lani v mestu Espoo na Finskem. Udeležila sta se ga tudi dva dijaka iz Slovenije, Krešimir Macan in Tadej Mali s SNŠ v Ljubljani in vodja ekipe Bojan Golli. Čeprav so se naši dijaki udeleževali tega pomembnega tekmovanja že od druge olimpiade naprej, nastop Slovenije kot samostojne ekipe ni bil samoumeven, saj država organizatorica vabi nove države po lastni presoji. Ker so se gostitelji še dobro spominjali uspešno organizirane olimpiade v Portorožu leta 1985, s povabilom ni bilo težav. Slovenija je sedaj postala stalna udeleženka olimpiad, saj statut pravi, da morajo organizatorji naslednjih tekmovanj obvezno povabiti vse udeleženke predhodnih olimpiad. Letos bomo zato lahko nastopili na olimpiadi v ZDA, ki bo v začetku julija.

Na tekmovanju dijaki en dan rešujejo teoretične naloge, en dan pa eksperimentalne. Dan odmora med tekmovanjema in dneve do proglasitve rezultatov dijaki izkoristijo za oglede in medsebojna srečanja. Med 36 državami

udeleženkami so bili tekmovalci prav z vseh delov sveta: Kitajske, ZDA, Avstralije ... in celo Surinama, ki ga že kar težko najdemo na zamljevidu.

Teoretični del tekmovanja je bil letos izjemno zahteven, saj je bila večina vprašanj iz snovi, ki je pri nas v srednji šoli ne obravnavamo. Zato so bili tu uspešnejši dijaki, ki imajo pred tekmovanjem obsežne dodatne tečaje in priprave. Dijaka iz Slovenije pri reševanju teh nalog nista bila uspešna. Eksperimentalne naloge so bile pristopnejše in tu je bolj odločala spretnost in razumevanje osnov fizike. Naša dva udeleženca sta bila med uspešnejšimi reševalci, žal pa eksperimentalni del tekmovanja prinaša manjše število točk.

Bralci se o zahtevnosti nalog lahko prepričajo sami. Objavljamo jih v nekoliko skrajšani obliki; izpustili smo obsežne praktične napotke pri eksperimentalnih nalogah ter podatke za vrednosti fizikalnih konstant, ki jih lahko najdemo v priročnikih.

Teoretične naloge

T1. Satelit, ki ga tvorijo brezmasno telo v središču in štiri majhna telesa B z masami po m, kroži v ekvatorialni ravnini okoli Zemlje. Telesa B so pritrjena na telo v središču z dolgimi togimi radialnimi palicami z dolžino r, med katerimi je konstanten kot 90°. Vseh pet teles leži v ekvatorialni ravnini in v tej ravnini krožijo okoli telesa v sredini s kotno hitrostjo ω, merjeno glede na oddaljene zvezde.

1. Določi sile, s katerimi delujejo radialne palice na telesa B v legah, ko sta radij vektor od središča Zemlje do satelita in radij vektor od središča satelita do telesa B vzporedna, nasprotno vzporedna ali pravokotna. (V teh legah približno velja, da so sile največje oziroma najmanjše.)
2. V telesih B so enake naprave, povezane s palicami. Vsaka od naprav povleče palico proti telesu B v trenutku, ko je sila, ki si jo določil pri

prejšnjem vprašanju, največja, ko je sila najmanjša, pa palico spusti za enako dolžino. Dolžina dela palice, ki se pri tem izvleče in nato povleče nazaj, je enaka 1 % povprečne dolžine radialne palice. (Povprečna dolžina palice se tako v dolgem časovnem obdobju ne spreminja.) Kolikšna je povprečna neto moč vsake od naprav?

3. Obravnavaj spremembe pri gibanju satelita, ki jih povzroča delovanje naprav. Ugotovi, če podčrtana količina narašča, se zmanjšuje, ali ostane nespremenjena: tirna hitrost satelita, radij tira satelita, kotna hitrost kroženja satelita, potencialna energija satelita. Ali lahko pride satelit v višjo orbito na račun dela, ki ga opravijo naprave? Ali lahko pride v tako visoko orbito, da praktično zapusti gravitacijsko polje Zemlje? Zakaj?

T2. Pri tej nalogi analiziramo longitudinalno gibanje atomov v linearni molekuli, t. j. gibanje v smeri osi molekule. Denimo, da je molekula sestavljena iz N atomov z masami m_1, m_2, ..., m_N, nanizanih po osi molekule. Predpostavimo, da je vsak atom povezan s svojima sosedoma s kemijsko vezjo. Vez aproksimiramo z brezmasno vzmetjo, za katero velja Hookov zakon. Vsaki vezi priredimo konstanto vzmeti k_1, k_2, ..., k_{N-1}.

Nihanje proste molekule je sestavljeno iz vsote nihanj, ki jih imenujemo lastna nihanja. Pri lastnem nihanju nihajo vsi atomi sinusno z enako frekvenco in gredo hkrati skozi ravnovesne lege.

1. Z x_i označimo odmik i-tega atoma iz njegove ravnovesne lege. Izrazi silo F_i, ki deluje na i-ti atom, kot funkcijo odmikov x_1, x_2, ..., x_N in konstant vzmeti k_1, k_2, ..., k_{N-1}, ki ustrezajo vezem. Kakšna zveza velja med silami F_1, F_2, ..., F_N? S pomočjo te zveze izpelji zvezo med odmiki x_1, x_2, ..., x_N in jo fizikalno interpretiraj.
2. Analiziraj nihanje dvoatomne molekule AB. Izpelji izraz za silo, ki deluje na atoma A in B. Določi možne načine nihanja molekule. Poišči pripadajoče frekvence in pojasni rezultat. Kako je mogoče, da atoma nihata z enako frekvenco, čeprav sta njuni masi različni?
3. Analiziraj nihanje triatomne molekule A_2B. (Atom B je med atomoma A.) Izrazi sile, ki vračajo atome v ravnovesno lego, kot funkcijo odmika atomov. Določi lastna nihanja molekule in pripadajoče nihajne frekvence.
4. Frekvenci dveh longitudinalnih lastnih načinov nihanj molekule CO_2 sta $3.998 \cdot 10^{13}$ Hz in $7.042 \cdot 10^{13}$ Hz. Izračunaj konstanto vzmeti, ki ustreza vezi med O in C. Kako dobro lahko obravnavani približek za strukturo vezi v molekuli opiše nihanje realne molekule? Relativna atomska masa atoma ogljika je 12, kisika pa 16. Atomska enota mase je $1.660 \cdot 10^{-27}$ kg.

T3. Kroglast satelit s premerom 1 m je v vesolju v bližini Zemlje, vendar nikoli ne zaide v njeno senco. Vsa površina satelita je pokrita z enako prevleko. Temperatura satelita je povsod enaka.

Temperatura površja Sonca je 6000 K in seva kot črno telo. Radij Sonca je $6.96 \cdot 10^8$ m, razdalja med Soncem in Zemljo pa $1.5 \cdot 10^{11}$ m. Satelit se segreje na temperaturo, pri kateri je izsevani svetlobni tok s satelita, ki ustreza sevanju črnega telesa, enak absorbiranemu sončnemu svetlobnemu toku. Gostota svetlobnega toka, ki ga seva črno telo, je podana s Stefan-Boltzmannovim zakonom $j = \sigma T^4$. Satelit absorbira vse vpadlo elektromagnetno sevanje.

1. Poišči izraz za temperaturo satelita.
2. Spekter sevanja črnega telesa s temperaturo T opiše Plankov zakon

$$u(T,\nu)d\nu = \frac{8\pi k^4 T^4}{c^3 h^3} \cdot \frac{\eta^3 d\eta}{e^\eta - 1},$$

če je $u\,d\nu$ gostota energije elektromagnetnega sevanja v frekvenčnem intervalu $[\nu, \nu + d\nu]$ in $\eta = h\nu/kT$; h je Planckova konstanta, k Boltzmannova konstanta in c hitrost svetlobe. Z integracijo po vseh frekvencah ν in vseh smereh, dobimo iz formule gostoto izsevanega svetlobnega toka, tako kot pri Stefan-Boltzmannovem zakonu. Za konstanto σ dobimo tako izraz $\sigma = (2\pi^5/15)(k^4/c^2h^3)$.

Pri številnih uporabah satelitov je potrebno, da je temperatura satelita čim nižja. Da to dosežejo, uporabljajo inženirji odbojno prevleko, ki odbija svetlobo s frekvenco, ki je večja od mejne frekvence. Privzemi, da mejna frekvenca ustreza vrednosti $h\nu/k = 1200$ K. Oceni, kolikšno temperaturo doseže satelit s takšno prevleko.
Rezultat izračunaj približno. Velja

$$\int_0^\infty \frac{\eta^3\,d\eta}{e^\eta - 1} = \frac{\pi^4}{15},$$

izraz $\eta^3/(e^\eta - 1)$ pa doseže maksimum pri $\eta \sim 2.82$. Za majhne η lahko razviješ eksponentno funkcijo kot $e^\eta = 1 + \eta$.
3. Pri pravem satelitu z raztegnjenimi sončnimi panelami, ki proizvajajo elektriko, predstavlja energija, ki se troši v instrumentih v notranjosti satelita, dodaten toplotni izvir. Denimo, da je celotna ustvarjena notranja moč enaka 1 kW, kolikšna bi bila temperatura satelita v primeru, opisanem pri vprašanju 2?

4. Proizvajalec oglaša poseben premaz takole: "Premaz izseva več kot 90 % vsega vpadlega sevanja, hkrati pa pri vseh frekvencah seva kot črno telo in tako odvaja veliko toplote s satelita. Temperatura satelita je tako najnižja možna." Lahko obstaja tak premaz?
5. Kakšne lastnosti mora imeti prevleka, da se temperatura krogelnega telesa, podobnega obravnavanemu satelitu pri vprašanju 1, dvigne?

Eksperimentalni nalogi

E1. Opazujemo električni preboj v zraku. Visoko napetost ustvarimo s piezoelektričnima elementoma. Eksperimentalni pripomočki so postavljeni na klanec, na katerem lahko drsi klada (jeklen valj) po posebnem vodilu (glej fotografijo). Drseča klada trči z piezoelektričnima elementoma in ju stisne. Zaradi stiskanja se krajišči piezoelementov električno nabijeta. Tako ustvarjeno napetost vodimo na iskrišče, ki mu lahko spreminjamo razdaljo med elektrodama. Če je razdalja dovolj majhna, med elektrodama preskoči iskra. Najmanjša napetost, pri kateri se pojavi iskra, se imenuje prebojna napetost.

Določi prebojno napetost kot funkcijo razdalje med elektrodama. Oceni napake in pojasni njihov izvor. Razmisli, če je rezultat splošno veljaven tudi v drugačnih okoliščinah. Opiši eksperimentalni postopek in povej, kako si razrešil eksperimentalne težave, ki so se pojavile pri merjenju.

Če stisnemo piezoelement, ki je bil na začetku neobremenjen in električno nevtralen, tako da pri stiskanju sila opravi mehanično delo E, se del tega, KE, pretvori v električno energijo. Imata jo nabita piezoelementa, ki si ju predstavljamo kot kondenzatorja. Vrednost konstante K je 0.5, kapaciteta enega piezoelementa je 20 pF ± 2 pF, masa drseče klade je 34.6 g, skupna masa spodnje klade in piezoelementov pa 87.5 ± 0.5 g.

E2. Pri nalogi imaš na razpolago:

- majhno svetilko, ki oddaja enako svetlobo kot bliskavka;
- neobičajno odbojno uklonsko mrežico, pritrjeno na plastično stojalo (košček digitalne CD plošče). Zareze na mrežici so krožni loki. Zato so odboji nekoliko zmaličeni, če jih primerjamo s tistimi pri običajni uklonski mrežici.
- 7 optičnih vzorcev

1. Določi razdaljo med zarezami kolikor mogoče natančno. Oceni napako, opiši in skiciraj postopek merjenja.

2. Vzorci 1 … 5 so barvni filtri. Katere valovne dolžine prepuščajo, katere absorbirajo? Ugotovi, kaj je vzorec 6.
3. Vzorec 7 je žična mrežica. Določi razdaljo med žicami v mrežici za obe med seboj pravokotni smeri. Opiši in skiciraj postopek merjenja.

Bojan Golli

DRAGI PRESEK!

Pošiljam ti tri umetnine z naše gimnazije. Prva in najlepša spada v prvi letnik in ima (zaradi svoje lepote) tudi pravilen rezultat.

1.

$$\begin{aligned}
&\left(\frac{1}{a^2}+\frac{1}{b^2}-2a^{-1}b^{-1}\right)\cdot\frac{1}{ab^{-1}+ba^{-1}-2}=\\
&=\left(\frac{a^{\cancel{2}}+b^{\cancel{2}}}{a^2b^2}-\frac{2}{\cancel{ab}}\right)\cdot\frac{1}{ab^{-1}+ba^{-1}-2}=\\
&=\frac{\cancel{a}+\cancel{b}-\cancel{2}}{a^2b^2}\cdot\frac{b+a}{\cancel{a}+\cancel{b}-\cancel{2}}=\frac{1}{\cancel{a^2b^2}}\cdot\frac{\cancel{b+a}}{1}=\frac{1}{ab}
\end{aligned}$$

Preostali dve sta iz tretjega letnika (kotne funkcije):

2.

$$\begin{aligned}
&\frac{\cos^2(\frac{\pi}{6})\cdot(-\sin\frac{\pi}{2})}{\cos^2(\frac{\pi}{3})}=\frac{\cancel{\cos^2}(30^\circ)\cdot\sin(-90^\circ)}{\cancel{\cos^2}(60^\circ)}=\\
&\frac{30^{\cancel{\circ}}\cdot\sin(-90^\circ)}{\cancel{60^\circ}\cdot 2}=\frac{-\sin(90^\circ)}{2}=-\sin(45^\circ)=-\frac{\pi}{4}
\end{aligned}$$

3.

$$\begin{aligned}
&\frac{\cos^2(-\frac{\pi}{6})\cdot\sin(-\frac{\pi}{2})}{\cos^2(-\frac{2\pi}{3})}=\frac{(30^\circ)^2\cdot(-90^\circ)}{(120^\circ)^2}=\\
&=-\frac{8100^\circ}{14400^\circ}=-\frac{81}{144}=-\frac{9}{16}
\end{aligned}$$

Lep pozdrav.

Vinko Horvat

KDAJ JE $a^b = b^a$?

1. Gremo mimo hiše, nad njenimi vežnimi vrati je pritrjena tablica s hišno številko 16. No, $16 = 2^4 = 4^2$! *Vidimo, da števili* $a = 2, b = 4$ *izpolnjujeta enačbo*

$$a^b = b^a. \tag{1}$$

Postanemo pozorni: Ali je še kaj naravnih števil $a, b, a \neq b$, za katere velja (1)?

Ko v (1) postavimo $a = 1$, dobimo $b = 1$; podobno iz $b = 1$ izhaja $a = 1$. Števili $a = 1, b = 1$ sicer ustrezata enačbi (1), ni pa $a \neq b$. To pomeni, da je enačbo (1) pri pogoju $a \neq b$ mogoče izpolniti kvečjemu, ko je $a > 1$ in $b > 1$. Vemo, da se od 1 večje naravno število enolično izraža s produktom praštevil (na vrstni red faktorjev se ne oziramo). Na to dejstvo se bomo naslanjali.

Vzemimo, da naravni števili $a > 1, b > 1, a \neq b$ izpolnjujeta enačbo (1). Mislimo si števili na levi in desni v (1) izraženi s produktom praštevil. Vsako praštevilo na levi je faktor v a, vsako praštevilo na desni faktor v b. Ker sta števili enaki, nastopajo po omenjenem dejstvu na levi in desni prav ista praštevila. Torej velja

$$a = p_1^{k_1} \cdots p_j^{k_j}, \quad b = p_1^{l_1} \cdots p_j^{l_j} \tag{2}$$

pri različnih praštevilih $p_1, \ldots, p_j$ in naravnih številih $k_1, \ldots, k_j, l_1, \ldots, l_j$. Ko vnesemo a, b iz (2) v (1), dobimo

$$p_1^{k_1 b} \cdots p_j^{k_j b} = p_1^{l_1 a} \cdots p_j^{l_j a}.$$

Zaradi enolične izrazljivosti naravnega števila s produktom praštevil mora biti

$$k_1 b = l_1 a, \ldots, k_j b = l_j a. \tag{3}$$

Ker je $a \neq b$, smemo vzeti $a < b$. Potem iz (3) sledijo ocene $k_1 < l_1, \ldots, k_j < l_j$. Ko te ocene upoštevamo v (2), vidimo, da a deli b. Zato je

$$b = sa \tag{4}$$

in s naravno število. Ker je $a < b$, je $s \geq 2$.

Za $s=2$ je po (4)

$$b=2a \tag{5}$$

in (1) se glasi $a^{2a}=(2a)^a$. Od tod izračunamo $a=2$, po (5) je $b=4$. To rešitev enačbe (1) smo srečali že zgoraj.

Naj bo v (4) sedaj $s\geq 3$. Enačba (1) dobi obliko $a^{sa}=(sa)^a$ in dalje $a^{s-1}=s$. Ker je $a\geq 2$, velja ocena

$$s=a^{s-1}\geq (1+1)^{s-1}.$$

Razvijemo vsoto po binomskem obrazcu, pa imamo

$$s\geq 1+(s-1)+\frac{(s-1)(s-2)}{2}+\ldots\geq s+\frac{(s-1)(s-2)}{2}$$

in torej

$$0\geq \frac{(s-1)(s-2)}{2}.$$

Ker je $s\geq 3$, zaidemo v protislovje

$$0\geq \frac{2\cdot 1}{2}=1.$$

V (4) torej $s\geq 3$ ni mogoče.

Tako smo našli: **Edina rešitev enačbe (1) v naravnih številih** a,b, $a<b$ **je** $a=2$, $b=4$.

2. Ali dobimo več rešitev enačbe (1), če sta a,b različna pozitivna ulomka? Najprej dve ugotovitvi.

Imejmo tuji naravni števili u,v in naj bo d največja skupna mera za $u+v,u$. Pri naravnih k,l je tedaj $u=dk, u+v=dl$. Ker je $v=dl-u=d(l-k)$, vidimo, da d deli v. Toda d deli tudi u in ker sta u,v tuja, je $d=1$. Velja torej:

I. Če sta u,v tuji naravni števili, sta tudi $u,u+v$ tuji naravni števili.

Doženimo še:

II. Če sta s,t od ena večji naravni števili, u,v tuji naravni števili in je $s^u=t^v$, obstaja naravno število g tako, da je $s=g^v, t=g^u$. Res! Ker je $s^u=t^v$, vsebujeta s,t prav iste praštevilske faktorje in velja

$$s=p_1^{k_1}\cdots p_j^{k_j},\quad t=p_1^{l_1}\cdots p_j^{l_j} \tag{6}$$

pri različnih praštevilih $p_1, \ldots, p_j$ in naravnih številih $k_1, \ldots, k_j, l_1, \ldots, l_j$. Zaradi $s^u = t^v$ je

$$p_1^{k_1 u} \cdots p_j^{k_j u} = p_1^{l_1 v} \cdots p_j^{l_j v}$$

in tako

$$k_1 u = l_1 v, \ldots, k_j u = l_j v. \tag{7}$$

Ker sta u, v tuja, iz prve enačbe v (7) izhaja, da v deli k_1 in u deli l_1. Zato je $k_1 = r_1 v, l_1 = r_1' u$ pri naravnih številih r_1, r_1'. Enačbo $k_1 u = l_1 v$ lahko sedaj pišemo $r_1 v u = r_1' u v$ in najdemo $r_1 = r_1'$. Ker velja podobno pri drugih enačbah v (7), dobimo $k_1 = r_1 v, l_1 = r_1 u, \ldots, k_j = r_j v, l_j = r_j u$ pri naravnih številih $r_1, \ldots, r_j$. Ko to upoštevamo v (6), imamo

$$s = (p_1^{r_1} \cdots p_j^{r_j})^v, \quad t = (p_1^{r_1} \cdots p_j^{r_j})^u.$$

Vzamemo za g število v oklepaju in trditev II je dognana.

Vrnimo se k enačbi (1). Naj bosta a, b pozitivna ulomka, ustrezajoča (1) in $a < b$. Kvocient $\frac{a}{b} = c$ je potem pozitiven ulomek, večji od 1. Ko

$$b = ca \tag{8}$$

vstavimo v (1), dobimo $a^{ca} = (ca)^a$ in dalje $a^{c-1} = c$. Od tod izračunamo

$$a = c^{\frac{1}{c-1}} \text{ in po (8) še } \quad b = c^{\frac{c}{c-1}}. \tag{9}$$

Ker je $c > 1$, je ulomek $\frac{1}{c-1}$ pozitiven. Ko ga okrajšamo, je

$$\frac{1}{c-1} = \frac{u}{v} \tag{10}$$

pri tujih naravnih številih u, v. Po (10) je $c = 1 + \frac{v}{u}$ in iz (9) izhaja

$$a = (\frac{u+v}{u})^{\frac{u}{v}}, \quad b = (\frac{u+v}{u})^{\frac{u+v}{v}}. \tag{11}$$

Pozitivna ulomka $a < b$, ustrezajoča (1), morata torej biti oblike (11) pri tujih naravnih številih u, v.

Če je $v = 1$, iz (11) sledi

$$a = (1 + \frac{1}{u})^u, \; b = (1 + \frac{1}{u})^{u+1}. \tag{12}$$

Za vsako naravno število u sta a, b iz (12) različna pozitivna ulomka. (Da ustrezata enačbi (1), je mogoče preveriti z vstavitvijo.) Za $u = 1$ dobimo iz (12) že znano rešitev $a = 2, b = 4$. Za $u = 2$ je $a = (3^2)/(2^2), b = (3^3)/(2^3)$, za $u = 3$ pa $a = (4^3)/(3^3), b = (4^4)/(3^4)$. Ko se u spreminja po vseh naravnih številih, dajeta obrazca (12) neskončno različnih pozitivnih ulomkov a, b, ki izpolnjujejo (1).

V obrazcih (11) naj bo zdaj $v \geq 2$. Ker je a ulomek, obstajata taki tuji naravni števili m, n, da je $a = \frac{m}{n}$, in po (11) lahko pišemo

$$(\frac{u+v}{u})^{\frac{u}{v}} = \frac{m}{n}.$$

Pri tem je $n \geq 2$, saj smo naravne rešitve našli že v razdelku 1. Ko odpravimo ulomke in potenciramo, je

$$(u+v)^u n^v = m^v u^u. \tag{13}$$

Ker sta u, v tuja, sta po ugotovitvi I tudi $u, u+v$ tuja; tudi $u^u, (u+v)^u$ sta potem tuja. Iz tujosti m, n sledi tujost za n^v, m^v. Po (13) mora torej u^u deliti n^v in n^v deliti u^u. Ker sta to naravni števili, je $u^u = n^v$. Zaradi $n \geq 2$, je $u \geq 2$; ker sta u, v tuja, po ugotovitvi II velja

$$u = g^v, \ n = g^u \tag{14}$$

pri naravnem številu g. Iz enakih razlogov je

$$u + v = h^v, \ m = h^u \tag{15}$$

pri naravnem številu h. Ker je $v \geq 2$, iz (14) in (15) izhaja

$$u = g^v < u + v = h^v < (g+1)^v = g^v + vg^{v-1} + \ldots$$

in po korenjenju

$$g < h < g + 1.$$

Naravno število h bi tako ležalo strogo med zaporednima naravnima številoma g in $g+1$. Takega naravnega števila pa ni. V obrazcih (11) torej $v \geq 2$ sploh ni mogoče.

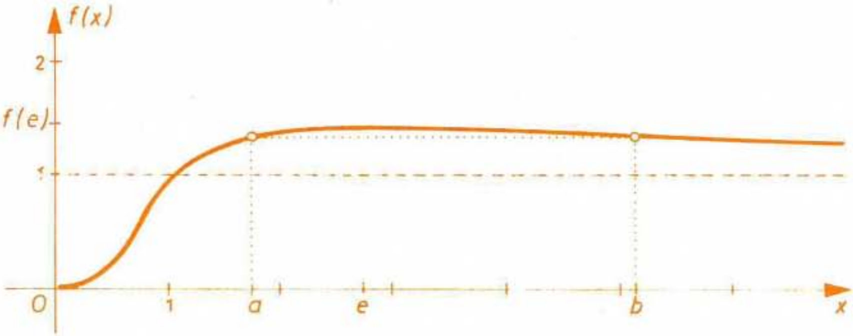
Tako smo ugotovili: **Vse pozitivne ulomke a, b, $a < b$, ki izpolnjujejo enačbo (1), zajamemo, ko v obrazcih (12) teče u po vseh naravnih številih.**

3. Če sta a, b pozitivni realni števili, je med pozitivnimi realnimi števili ravno eno, ki daje vrednost potence a^b. Pri računanju s takimi potencami veljajo enaka pravila, kot če sta osnova in eksponent potence naravni števili ali pozitivna ulomka. Kako je z rešitvami enačbe (1) v pozitivnih realnih številih?

Naj pozitivni realni števili $a, b, a < b$ izpolnjujeta enačbo (1). Potem velja tudi

$$a^{\frac{1}{a}} = b^{\frac{1}{b}}. \tag{16}$$

Rešitev enačbe (1) dajeta torej števili, pri katerih ima funkcija $f(x) = x^{\frac{1}{x}}$ enako vrednost. Potek funkcije $f(x)$ prikazuje slika.



Ko raste x od 0 do $e \doteq 2,72$, narašča $f(x)$ od 0 do $f(e) \doteq 1,45$. Ko raste x od e prek vsake meje, $f(x)$ pada in se zmeraj bolj približuje vrednosti 1. Če vzamemo kakšen a, $1 < a < e$, obstaja ravno en $b > e$, ko velja (16). Za $0 < a \leq 1$ in $a = e$ ni takega b, $b \neq a$, ki bi izpolnjeval enačbo (1). Vse to vidimo iz slike.

Oglejmo si še enkrat obrazca (9). Če je c od 1 večje realno število, sta števili a, b dobljeni po (9), pozitivni realni. Da izpolnjujeta enačbo (1), se prepričamo z vstavitvijo. Ko narašča c od 1 prek vsake meje, a vztrajno pada od e proti 1, b pa vztrajno raste od e prek vsake meje. To se da potrditi s kratkim računom. Vsakemu realnemu c, $1 < c < \infty$ pripada torej po (9) en a, $1 < a < e$ in en b, $e < b < \infty$.

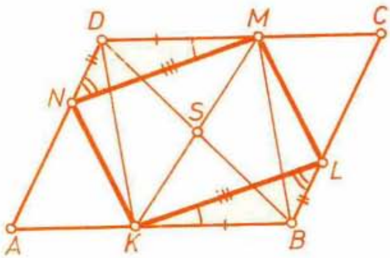
Povzemimo: **Vsako realno rešitev a, b, $a < b$ enačbe (1) dobimo ravno enkrat, ko v obrazcih (9) spreminjamo c po vseh realnih številih večjih od 1.**

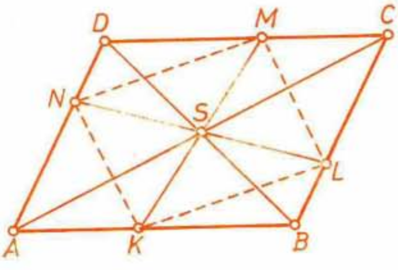
Jože Grasselli

REŠITVE NALOG

PARALELOGRAMI - Rešitev s strani 280

1. Najprej predpostavimo, da sosednji oglišči K, L včrtanega paralelograma $KLMN$ ležita na stranici AB paralelograma $ABCD$.





Kadar je $|KL| < |AB|$, zaradi $KL \parallel MN$ stranica MN leži na CD, če pa KL sovpada z AB, M leži na BC, N pa na AD. V prvem primeru moramo zahtevati le še enakost $|MN| = |KL|$, v drugem pa enakost $|BM| = |AN|$.

Obravnavati moramo še primer, ko oglišča včrtanega paralelograma ležijo na različnih stranicah paralelograma $ABCD$. Denimo, da so K, L, M in N zaporedoma na stranicah AB, BC, CD in AD. Zaradi vzporednosti

$$KL \parallel MN, \quad AB \parallel CD, \quad BC \parallel AD$$

in enakosti $|KL| = |MN|$ velja

$$\angle LKB = \angle NMD, \qquad \angle BLK = \angle DNM,$$

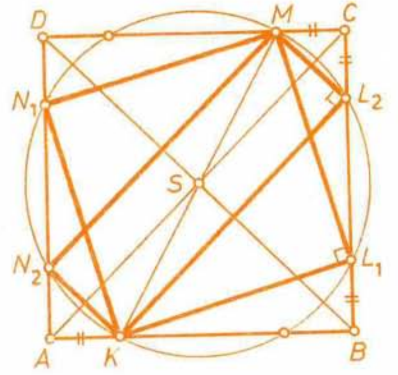
torej sta trikotnika BLK in DNM skladna. Od tod sledi, da sta $KBMD$ in $BLDN$ paralelograma, zato se diagonale KM, LN, AC in BD sekajo v skupni točki S in se razpolavljajo.

Včrtani paralelogram $KLMN$ dobimo tako, da skozi sečišče diagonal AC in BD načrtamo premici tako, da ena seka AB, druga pa CD. Sečišča s stranicami paralelograma $ABCD$ so oglišča včrtanega paralelograma.

2. Preprosto možnost, da sosednji oglišči včrtanega pravokotnika ležita na isti stranici kvadrata, prepustimo bralcu in poiščimo le včrtane pravokotnike $KLMN$, ki imajo oglišča na različnih stranicah kvadrata $ABCD$.

Iz rešitve naloge 1 sledi, da središče pravokotnika $KLMN$ sovpada s središčem kvadrata $ABCD$. Denimo, da je K katerakoli točka stranice AB, različna od njenih krajišč. Potem je M enolično določena točka na stranici CD

- zanjo velja $|AK| = |CM|$. Očrtajmo pravokotniku $KLMN$ krožnico in na njej poiščimo točko L, ki leži na BC. Krožnica seče BC v točkah L_1 in L_2, za kateri velja $|BL_1| = |L_2C| = |AK|$. Ker sta kota KL_1M in KL_2M prava, smo našli včrtana pravokotnika KL_1MN_1 in KL_2MN_2. Prvi je kvadrat, drugi pa ima stranici vzporedni diagonalama kvadrata $ABCD$, v primeru $|AK| = |KB|$ pa sovpadata. Tako dobimo družino včrtanih kvadratov in družino včrtanih nekvadratnih pravokotnikov.



$\Delta KBL_1 \cong \Delta L_1CM$

KL_1MN_1 kvadrat

$|KB| = |BL_2|$

$KL_2 \parallel AC, \quad L_2M \parallel BD$

Boris Lavrič

RAZNOBARVNE OČI – Rešitev s str. 267

V spodnji razpredelnici je vseh šest možnih razporeditev barv, ki so označene s č, m in z:

	1	2	3	4	5	6
Blaž Črne	č	č	m	m	z	z
Primož Moder	m	z	č	z	č	m
Jernej Zelenko	z	m	z	č	m	č

Druga, tretja in šesta razporeditev ustrezajo pogoju, da se samo ene oči ujemajo z barvo v priimku. Primož ne more imeti črnih oči, saj se je v pogovoru odzval na izjavo fanta s črnimi očmi, torej odpade tretja razporeditev. Mogoči sta torej druga razporeditev, po kateri ima Jernej modre oči, in šesta, kjer ima Jernej črne oči. V nobenem primeru pa ne more imeti zelenih oči.

Neža Mramor

PRESEK - list za mlade matematike, fizike, astronome in računalnikarje 20. letnik, leto 1992/93, številka 1-6, strani 1-384

UVODNIK

MATEMATIKA

FIZIKA

ASTRONOMIJA

REŠITVE NALOG

RAČUNALNIŠTVO

TEKMOVANJA

NALOGE

NOVE KNJIGE

RAZVEDRILO

NOVICE

KOPERNIK NA ZNAMKAH

Znamke z astronomsko vsebino ıajdemo v različnih državah. Gre za res nenavadno populaizacijo astronomije. V bistvu ırikazujejo zanimivosti iz vesoja in najpomembneje raziskoalce vesolja - astronome.

Okoli 150 držav je izdaɔ znamke s pestro astronomko tematiko. Največ znamk a je posvečenih reformatorju stronomije in znanosti sploh, Jikolaju Koperniku. Letos poeka 450 let od njegove smrti in d izida njegove slavne knjige De revolutionibus orbium coeestium - O kroženju nebesnih eles.

Marijan Prosen