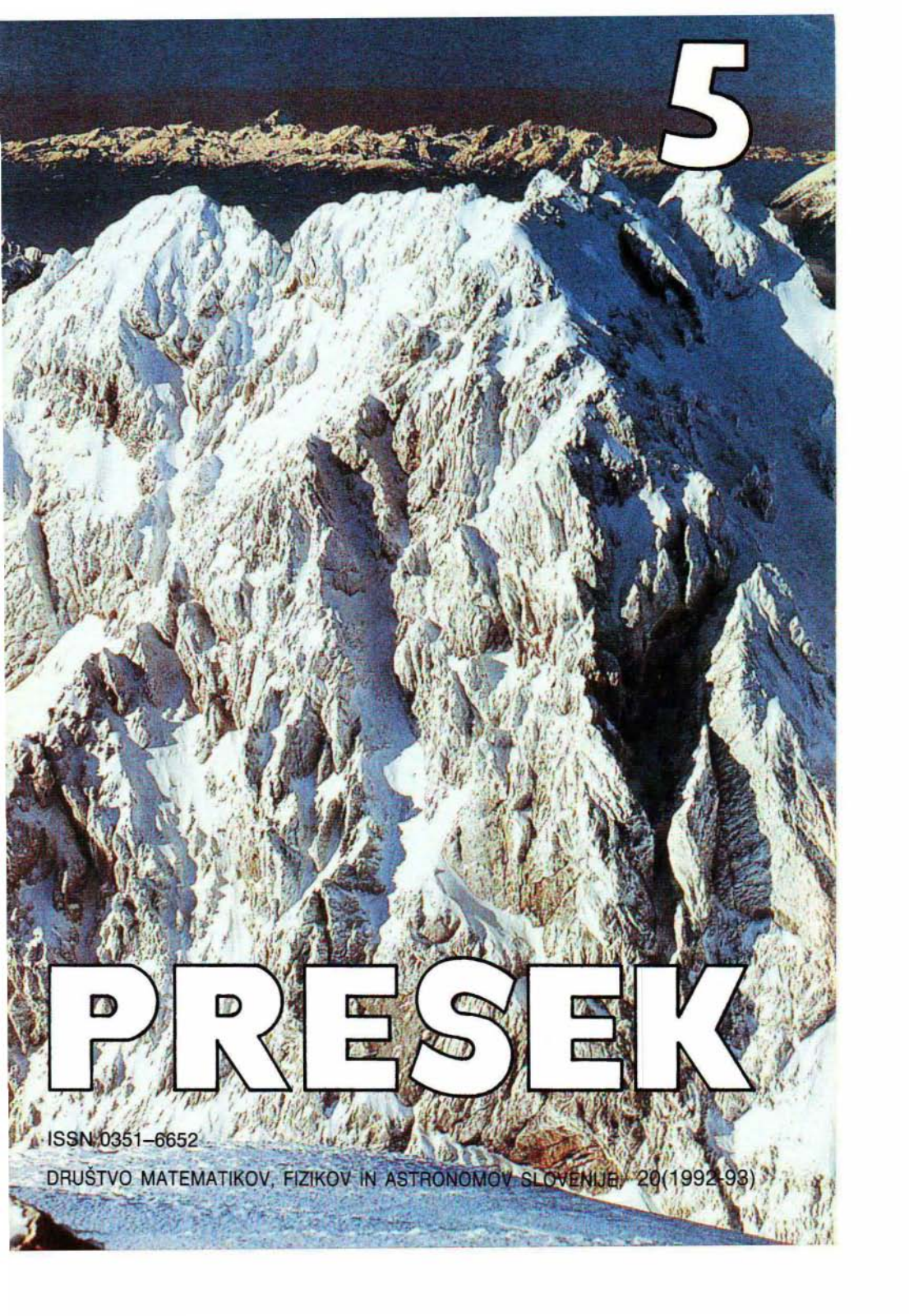




5

PRESEK

ISSN 0351-6652

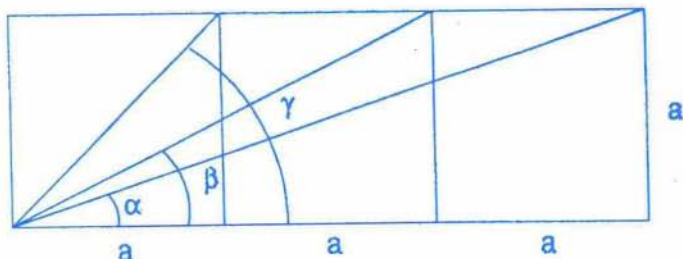
DRUŠTVO MATEMATIKOV, FIZIKOV IN ASTRONOMOV SLOVENIJE, 20(1992-93)

VSEBINA

FIZIKA	Fatamorgana in daljnogled (Janez Strnad).....	258-267
	Pospeški motornih koles (Mitja Slavinec).....	308-311
	Poštna kočija (Božidar Casar).....	313-315
MATEMATIKA	Pravokotne enačbe na racionalni številski mreži (György Szabó, prevod Borut Zalar).....	268-272
	Pravilo 72 in število e (Peter Legiša).....	290-293
RAČUNALNIŠTVO	Potenčna števila in Mathematica (Tomaž Pisanski).....	294-300
ASTRONOMIJA	Astronom iz Slovenskih Goric (Marijan Prosén).....	320-III
TEKMOVANJA	Rešitve nalog s 30. srednješolskega tekmovanja iz fizike (Ciril Dominko, Bojan Golli).....	276-280
	1. državno tekmovanje osnovnošolcev iz matematike – rešitve s str. 253 (Aleksander Potočnik).....	281-283
	36. matematično tekmovanje srednješolcev Slovenije – rešitve s str. 238 (Darjo Felda).....	316-319
NOVICE	Ernst Eduard Kummer (Jože Grasselli).....	284-286
	Obvestilo astronomskega društva Javornik (Mirjam Galičič).....	286-287
	33. mednarodna matematična olimpiada v Moskvi (Tomaž Cedilnik).....	306-307
NALOGE	Koti v kvadratih (Neža Mramor).....	257
	Raznobarvne oči (Neža Mramor).....	267
	Umor v Nori vasi (Mateja Rojc).....	273-274
	Paralelogrami (Boris Lavrič).....	280
	Sistemi linearnih diofantskih enačb (Vilko Domajnko)...	301-303
	Sto deliteljev (Marija Vencelj).....	315
RAZVEDRILO	Pisma bralcev (Marija Vencelj).....	274-275
	Številka križanka (Geoffrey Marnell, prev. in prir. Darjo Felda).....	288-289
	Negativna števila (Mihael Blaško).....	303
	Premo in obratno sorazmerje (Iz uredništva).....	303
REŠITVE NALOG	Naloge za mlajše bralce - s str. 249 (Borut Zalar).....	272-273
	Ni časa za šolo - s str. 242 (Neža Mramor).....	283
	Naloga za sistematične bralce - s str. 256 (Borut Zalar).....	287
	Jetniki in kape - s str. 193 (Neža Mramor).....	301
	Kanin s Kočne - s str. P-3/III (Boris Lavrič).....	304-306
	Križanka Ob stoletnici smrti slovenskega fizika – s str. 224 (Marko Bokalič).....	307
	Lom svetlobe za okras - s str. 256 (Andrej Likar).....	311-312
	Skrit račun - s str. 231 (Marija Vencelj).....	312
	Še ena iz številskih sestavov - s str. 199 (Borut Čampelj)...	319
NA OVITKU	Pogled z Grintovca prek Kočne na Julijce (foto Peter Janežič; slika je vzeta iz knjige Janežič, Kmecl: Sij gora). Glej tudi prispevek na strani 304.....	I
	Slika vodnega stolpa s plinsko lečo (slika je vzeta iz revije Nature). Glej tudi prispevek na strani 258.....	IV

KOTI V KVADRATIH

Trije enako veliki kvadrati leže drug ob drugem kot na sliki. Spojnice levega spodnjega oglišča prvega kvadrata z desnimi zgornjimi oglišči posameznih kvadratov oklepajo kote α , β , γ s skupno nosilko osnovnic. Kolikšna je vsota kotov $\alpha + \beta + \gamma$? No, pravilnega odgovora ni težko uganiti, vendar pa poskusite svojo domnevo potrditi s kakšnim lepim dokazom.



Neža Mramor

PRESEK

list za mlade matematike, fizike, astronome in računalnikarje
20. letnik, šolsko leto 1992/93, številka 5, strani 257 — 320

UREDNIŠKI ODBOR: Vladimir Batagelj, Tanja Bečan (jezikovni pregled), Dušica Boben (oblikovanje teksta), Mirko Dobovišek (glavni urednik), Vilko Domajnko, Roman Drnovšek (novice), Darjo Felda (tekmovanja), Bojan Golli, Marjan Hribar, Boštjan Jaklič (tehnični urednik), Martin Juvan (računalništvo), Sandi Klavžar, Edvard Kramar, Boris Lavrič, Andrej Likar (fizika), Matija Lokar, Franci Oblak, Peter Petek, Pavla Ranzinger (astronomija), Marjan Smerke (svetovalec za fotografijo), Miha Štalec, Jana Vrabec (nove knjige), Marija Vencelj (matematika, odgovorna urednica).

Dopisi in naročnine: Društvo matematikov, fizikov in astronomov Slovenije - Podružnica Ljubljana - Komisija za tisk, Presek, Jadranska c. 19, 61111 Ljubljana, p.p. 64, tel. (061) 265-061/53, št. ŽR 50101-678-47233. Naročnina za šolsko leto 1992/93 po 1.11.1992 je 800 SIT, za skupinska naročila šol 640 SIT, posamezna številka 160 SIT, za tujino 12000 LIT, devizna nakazila SKB banka d.d. Ljubljana, val-27621- 42961/9, Ajdovščina 4, Ljubljana.

List sofinancirajo MZT, MŠŠ in MK
Ofset tisk DELO - Tiskarna, Ljubljana

Po mnenju MZT št. 415-52/92 z dne 5.2.1992 šteje revija med proizvode iz 13. točke tarifne št. 3 zakona o prometnem davku, za katere se plačuje 5% prometni davek.

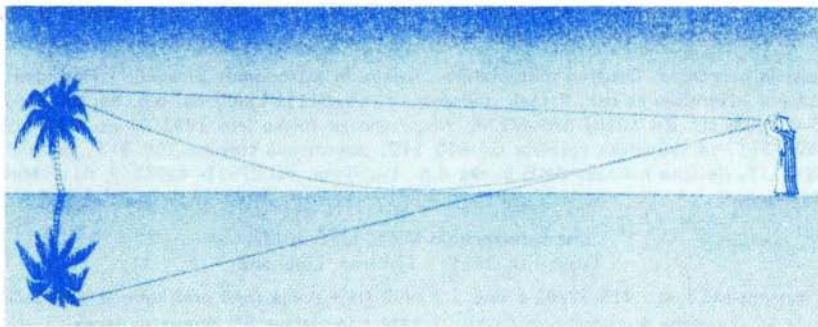
Tekst je oblikovan z računalnikom SLIM 286, ALTECH, Ljubljana
© 1993 Društvo matematikov, fizikov in astronomov Slovenije - 1146

FATAMORGANA IN DALJNOGLED

Ali ni nekoliko nenavadno fatamorgano, izjemen pojav, ki ga opazijo predvsem v oddaljenih krajih, povezovati z daljnogledom, uporabno optično napravo? Ne, ker ima oboje skupno osnovo: *lom svetlobe*. Pojdimo lepo po vrsti. Najprej povejmo nekaj besed o lomu svetlobe v zraku in potem poročajmo o nenavadnem daljnogledu, ki uporablja namesto leče segret zrak. Nazadnje začnimo vse skupaj še z nekaj računi.

O lomu je Presek pisal v članku *O naravi svetlobe in o lomu*, **14** (1987) 194. Samo na hitro ponovimo. Curek se lomi od pravokotnice na mejo med območjema, če potuje na drugem območju z večjo hitrostjo kot na prvem. Razmerje med hitrostjo svetlobe v praznem prostoru in hitrostjo svetlobe v snovi vpeljemo kot *lomni kvocient snovi*. Lomni kvocient praznega prostora je enak 1, lomni kvocient zraka pa je samo malo večji kot 1, v navadnih okoliščinah 1,0003. Svetloba potuje v zraku samo malo počasneje kot v praznem prostoru. Čim gostejši je zrak, tem večji lomni kvocient ima, tem manjša je v njem hitrost svetlobe glede na hitrost v praznem prostoru. Razlika lomnih kvocientov $n - n_{\text{prazni prostor}} = n - 1$ je tem večja, čim gostejši je zrak. Gostota zraka pri nespremenjenem tlaku pa je tem večja, čim nižja je temperatura. Potemtakem je lomni kvocient zraka tem manjši, tem bliže 1, čim višja je temperatura.

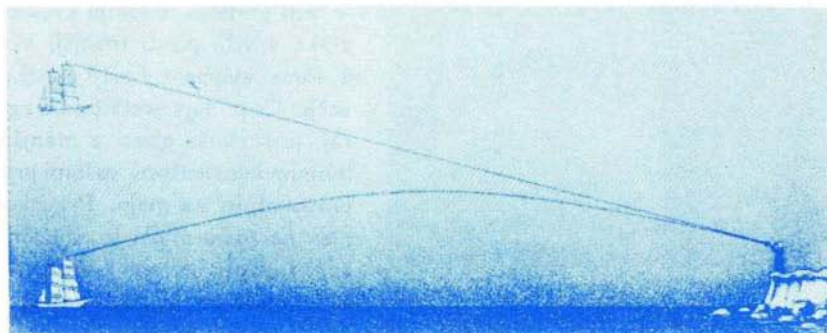
Tla se zaradi sončnega obsevanja lahko močno segrejejo, na primer puščava ali asfaltna cesta. Zrak v plasti tik ob tleh se segreje od njih, zrak v višji plasti se segreje manj. V plasti ob tleh je lomni kvocient zraka manjši, bliže 1, v višji plasti pa večji. Če prihaja svetloba od zgoraj, iz hladnejših plasti z večjim lomnim kvocientom, se lomi od pravokotnice na mejo. Pravokotnica



Slika 1. Nastanek fatamorgane. Zrak je močno segret le neposredno ob tleh in izrazito ukrivljeni so le žarki, ki gredo skozi plast tik ob tleh. Ocenjeni odklon je zato precej prevelik.

na mejo plasti je navpična, zato se svetloba lomi od tal. Ker se lomni kvocient postopno spreminja, se svetloba postopno lomi. Žarek se ukrivi, v navedenem primeru od tal.

Opazujemo v takih razmerah oddaljeno drevo. Žarki z njegovega vrha naravnost do očesa pridejo po razmeroma hladnih plasteh zraka in se komaj kaj ukrivijo. Vendar pridejo do očesa tudi žarki z vrha, ki gredo skozi močno segreto plast blizu tal. Tako vidimo vrh drevesa dvakrat, prvič skoraj tam, kjer bi ga pričakovali, in drugič navidez premaknjenega navzdol (slika 1). Do očesa pridejo tudi malo ukrivljeni žarki z dna drevesa. Zato vidimo dve sliki drevesa: pokončno, ki je malo popačena, in obrnjeno, ki je bolj popačena. Navajeni smo, da vidimo pokončno in obrnjeno sliko predmeta ob vodi, ko nastane obrnjena slika z zrcalnim odbojem na gladini. Zaradi te izkušnje ob dvojni sliki drevesa pomislimo na vodno gladino, čeprav so v bližini samo



Slika 2. Nastanek zgornje fatamorgane in fotografija na arktičnem ledu.



vroča tla, nobene vode. To je *fata morgana*. V izročilu je za varljive pojave te vrste kriva vila (italijansko *fata*) Morgana. Menda izhaja poimenovanje iz Mesinske ožine med Apeninskim polotokom in Sicilijo, kjer so podobni pojavi pogostni.

Zgornja ali obrnjena *fata morgana* nastane, če se temperatura z višino spreminja obrnjeno: višja plast zraka se segreje, pod njo pa ostane hladna plast. V tem primeru je lomni kvocient zraka v višji plasti manjši, bližje 1, lomni kvocient v nižji plasti pa večji. Če prihaja svetloba od zgoraj, iz toplejše plasti z manjšim lomnim kvocientom, se lomi proti pravokotnici na mejo. Pravokotnica na mejo plasti je navpična, zato se svetloba lomi k tlom. Ker se lomni kvocient postopno spre-

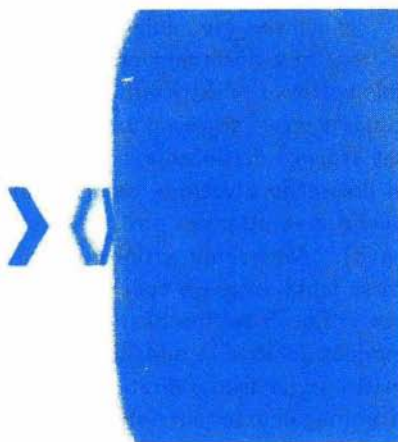


Slika 3. Fotografija iz Hiller-sovega članka (zgoraj). Na povečanem delu spodaj je mogoče videti skupino ljudi, obrnjeno sliko in v prečni smeri skršeno neobrnjeno sliko. Ker je razlika temperature majhna, mora biti predmet v veliki razdalji, v tem primeru 163 metrov. Objektiv fotografskega aparata je bil 16 centimetrov oddaljen od stene.

minja, se svetloba postopno lomi. Žarek se ukrivi proti tlom, ne od tal (slika 2). Zaradi tega vidimo predmet navidez dvignjen. Do tega pojava pride nad hladnim morjem ali nad ledom. Poročajo o primerih, ko so ljudje ladje videli, čeprav so bile te zaradi ukrivljenosti Zemlje še pod obzorjem.

Fatamorgano je prvi pojasnil matematik Gaspard Monge, ki je spremljal Napoleona na pohodu v Egipt leta 1798. V laboratoriju jo je poskušal opazovati Wollastone leta 1800. V zraku mu to ni uspelo, več uspeha je imel s plastmi raztopin s spremenljivim lomnim kvocientom. Tedaj so že vedeli, da opazimo pri fatamorgani v določenih okoliščinah tri slike: poleg obeh, ki smo ju omenili, še tretjo, bolj odklonjeno, pokončno in stisnjeno. V laboratoriju v zraku ni bilo mogoče dobiti dobrih ponovljivih fotografij. Pač pa je Wilhelm Hillers objavil v članku *Photographische Aufnahmen einer mehrfachen Luftspiegelung* (Fotografski posnetki večkratnega zrcaljenja v zraku) v *Physikalische Zeitschrift* **14** (1913) 718 lepo fotografijo, ki so jo naredili na prostem. Na 188 metrov dolgi navpični steni ob Labi pri Blankeneseju je bilo mogoče opazovati pojav skoraj vse leto, ko je sonce segrelo steno za nekaj stopinj nad okolico (slika 3).

Zares je bolje opazovati fatamorgano na navpični ravnini kot na vodoravni. Nad vodoravno segreto ploskvijo nastanejo vrtinci z vodoravno osjo, tako imenovane konveksijske celice. Ob navpični steni pa teče samo enakomeren tok zraka navgor in je razmere lažje nadzorovati. Fabri, Fiorio, Lazzeri in Violino z univerze v Pisi so v članku *Mirage in the laboratory* (Fatamorgana v laboratoriju) v *American Journal of Physics* **50** (1982) 517 objavili dobro fotografijo (slika 4). V tej reviji sicer najdemo še več zanimivih člankov o

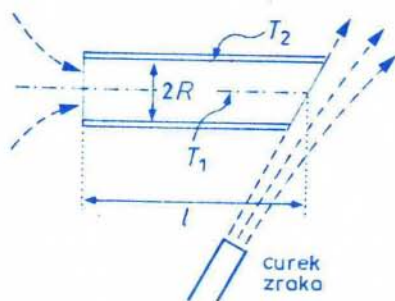


Slika 4. Fotografija fatamorgane v laboratoriju. Italijanski fiziki so segrevali hrpa-vo napično železno ploščo 86 cm·7 cm·1,2 cm s petimi likalniškimi grelniki, ki so dosegli največ moč 2 kW. Zaradi večje temperaturne razlike je zadostovala razmeroma kratka plošča. Razločno je mogoče videti pokončno sliko predmeta v obliki puščice, nekoliko nejasno obrnjeno sliko in še skrženo pokončno sliko.

fatamorgani. Pojav je mogoče računsko zasledovati. V najpreprostejšem približku, v katerem vzamemo, da se lomni kvocient spreminja linearno z razdaljo od plošče, so žarki parabole. Približki z bolj zapleteno odvisnostjo lomnega kvocienta od kraja so pripravljeni za računalnik. O tem lahko preberete članek Davis in Greenslada *Computer modeling of mirage formation* (Računalniško modeliranje nastanka fatamorgane) v *The Physics Teacher* 29 (1991) 47 in v razpravi, ki se je razvila po njem (prav tam, str. 485).

Kako naj na osnovi fatamorgane dobimo daljnogled? Ni težko. Del segrelih tal si mislimo zviti v cev. V osi cevi je zrak manj segret in ima večji lomni kvocient, ob robu cevi pa bolj in ima manjši lomni kvocient. Zaradi tega se žarki, ki so nagnjeni glede na os cevi, ukrivijo proti osi. Taka cev ima podoben učinek kot steklena leča. Žarke, ki izhajajo iz točke na osi, pripravi do tega, da se na osi zopet približno sestanejo. Točka predmeta na osi da sliko na osi, druge točke predmeta, malo bolj oddaljene od osi, pa prispevajo k sliki predmeta.

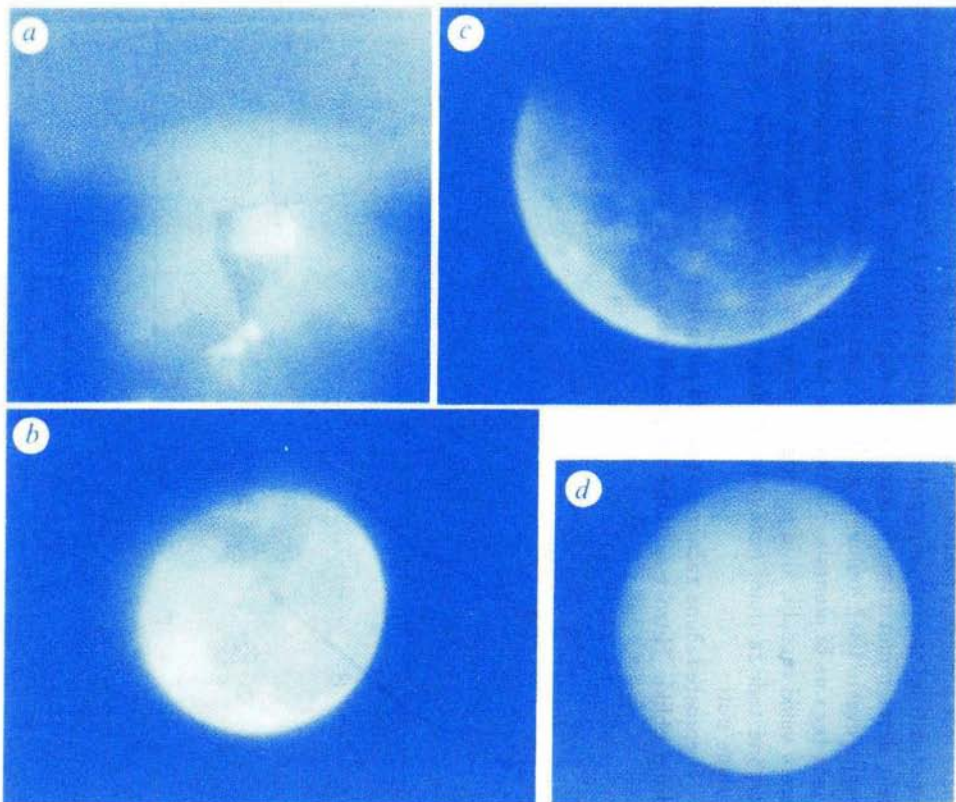
Kovinsko cev, dolgo 20 centimetrov in z notranjim premerom 8 milimetrov z električnim tokom z zunanje strani segrejejo za nekaj deset stopinj. Vrtinčenje zraka v cevi preprečijo z vetrom, se pravi, da pihajo zrak stransko proti cevi (slika 5). Motečemu vrtinčenju zraka se lahko izognejo tudi s tem, da cev vrtijo. S takšno plinsko lečo je mogoče dobiti slike oddaljenih predmetov in jih fotografirati, ne da bi si pomagali z lažjem fotografskega



Slika 5. Poenostavljena risba kovinske cevi, ki služi kot plinska leča.

aparata (slika 6). Vendar zajamejo z njo le majhno vidno polje. Poskuse s plinskimi lečami in z daljnogledi te vrste delajo že dlje časa na univerzi države Natal v Durbanu v Južni Afriki. Slike so vzete iz članka *A gas-lens telescope*, ki so ga Michaelis, Dempers, Kosch, Notcutt, Cunningham in Waltham objavili v londonski *Nature* 353 (1991) 547.

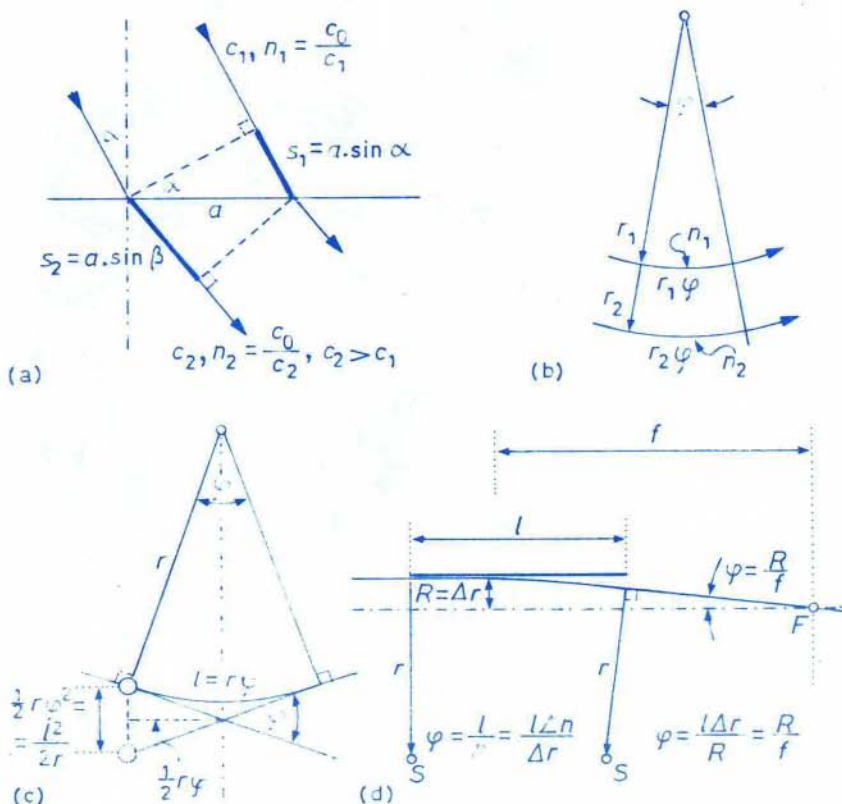
Raziskovanje plinskih leč ni kak konjiček. Leče te vrste utegnejo imeti pomembno vlogo. Z njimi je mogoče zbrati laserski curek na zelo majhen presek. Navadno je za to preprosteje uporabiti stekleno lečo. Vendar bi steklene leče odpovedale pri zelo močnih laserskih curkih z gostoto svetlobnega toka nad milijardo wattov na kvadratni centimeter, ker bi se preveč segrele.



Slika 6. Posnetek vodnega stolpa s plinsko lečo, kakršno kaže slika 5, iz razdalje 5 kilometrov (a), Lune (b), (c) in Sonca (d). Slike so vzete iz članka v Nature.

Plinske leče prenesajo svetlobni tok s stokrat večjo gostoto. Take leče utegnejo uporabiti pri spreminjanju poti umetnih satelitov z Zemlje. Če bi na umetni satelit deset minut usmerili laser, ki bi dajal po deset sunkov na sekundo z energijo dvesto tisoč joulov, bi ga lahko prestavili na bolj oddaljen tir. Steklena leča tega ne bi prenesla, plinska leča pa bi bila za to zelo pripravna: curek zbere v veliki razdalji, ki jo je mogoče naravnjavati. Plinske leče utegnejo biti uporabne tudi za manj nenavadne podvige, vsekakor pa so šele na začetku razvojne poti.

Preproste račune začnimo s tem, da ponovimo lomni zakon in ga izrazimo v drugi obliki. Hitrost svetlobe na prvem območju je c_1 in na drugem c_2 .



Slika 7. Iz lomnega zakona (a) dobimo radij kroga, ki ga položimo ob ukrivljeni žarek (b), in ocenimo razdaljo slike (c) in goriščno razdaljo plinske leče (d).

Lomni kot med lomljenim žarkom in pravokotnico na mejo β in vpadni kot med vpadnim žarkom in vpadno pravokotnico α (slika 7a) povezuje lomni zakon v obliki

$$\frac{\sin \alpha}{\sin \beta} = \frac{c_1}{c_2} = \frac{n_2}{n_1}.$$

Pri tem sta $n_1 = c_0/c_1$ in $n_2 = c_0/c_2$ lomna kvocienta prve in druge snovi in c_0 hitrost svetlobe v praznem prostoru. Lomni zakon izrazimo lahko drugače:

$$n_1 \sin \alpha = n_2 \sin \beta \quad \text{ali} \quad n_1 s_1 = n_2 s_2.$$

a je razdalja med sosednjima žarkoma na meji. Po tej obliki lomnega zakona je produkt (geometrijske) poti s in lomnega kvocienta n - temu produktu rečemo *optična pot* - merjen po katerem koli žarku med dvema presekom curka vedno enak.

V zraku, v katerem se temperatura zvezno spreminja, se žarki ukrivijo. Del ukrivljenega žarka lahko približno opišemo kot krog. Vzemimo dva kroga. Po prvem z radijem r_1 je med dvema presekom curka pot $r_1\varphi$ na mestu, kjer je lomni kvocient n_1 , po drugem pa po krogu z radijem $r_2 = r_1 + \Delta r$ pot $r_2\varphi$ na mestu, kjer je lomni kvocient $n_2 = n_1 + \Delta n$ (slika 7b). Po lomnem zakonu o enaki optični poti je $n_1 r_1 \varphi = n_2 r_2 \varphi$ in

$$n_1 r_1 = n_2 r_2 \quad \text{ali} \quad r_1 \Delta n = -n_1 \Delta r.$$

Pri tem smo zanemarili zelo majhen produkt $\Delta r \Delta n$. Iz zapisane enačbe lahko izračunamo radij kroga, po katerem se žarek lomi v zraku s spremenljivim lomnim kvocientom,

$$r_1 = -\frac{1}{\Delta n / \Delta r}.$$

Pri tem smo faktor n_1 zadomestili kar z 1, ker se lomni kvocient zelo malo razlikuje od 1.

Spremembo lomnega kvocienta s krajem $\Delta n / \Delta r$ izrazimo s spremembo lomnega kvocienta s temperaturo in s spremembo temperature s krajem: $(\Delta n / \Delta T) \cdot (\Delta T / \Delta r)$. Razlika $n - 1$ je sorazmerna z gostoto zraka, pri konstantnem tlaku pa je gostota obratno sorazmerna s temperaturo, ki jo merimo od absolutne ničle -273°C . Zapišemo $n_1 - 1 = A/T_1$ in $n_2 - 1 = A/T_2$ in prvo enačbo odštejemo od druge:

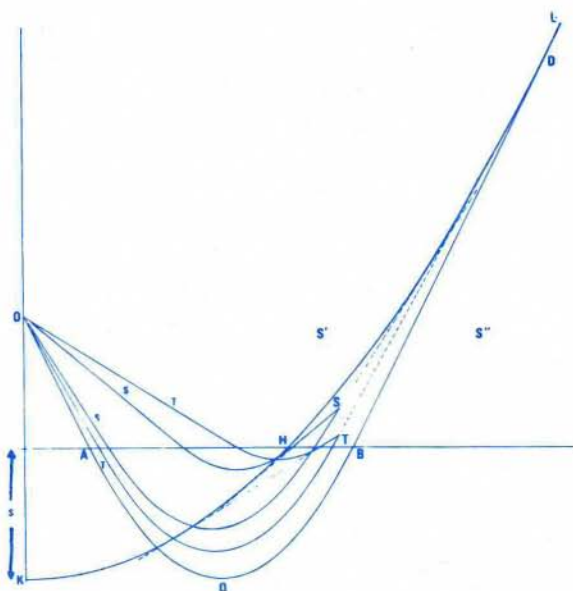
$$\Delta n = n_2 - n_1 = \frac{A}{T_2} - \frac{A}{T_1} = -\frac{A}{T_1} \cdot \frac{T_2 - T_1}{T_2} = -(n_1 - 1) \frac{\Delta T}{T_2}.$$

Radij kroga je potemtakem

$$r = \frac{T_2}{(n_1 - 1)(\Delta T / \Delta r)}.$$

Ocenimo temperaturo zraka tik ob tleh s 50°C , temperaturo dva centimetra višje s 30°C in spremembo temperature s krajem $\Delta T / \Delta r$ na 10 K/cm ali 10^3 K/m . Razliko $n_1 - 1$ ocenimo s $3 \cdot 10^{-4}$, za temperaturo ob tleh, ki jo moramo meriti od absolutne ničle, pa vstavimo $(50 + 273)\text{ K} = 323\text{ K}$ ali približno 300 K . To da za radij kroga r oceno

$$r = \frac{300\text{ K}}{3 \cdot 10^{-4}} \cdot \frac{1}{10^3\text{ K} \cdot \text{m}^{-1}} = 1\text{ km}.$$



Slika 8. Iz točk S in T prideta do opazovalca O po dve različno nagnjeni paraboli. Žarka, ki gresta iz točk S in T do točke O skoraj naravnost, zaradi preglednosti nista vrisana. Če je točka na območju S' , ni fatamorgane, če je na območju S'' , pa nastane samo obrnjena slika. Le na vmesnem območju dobimo še dodatno pokončno sliko (iz članka E.Fabrija in sodelavcev).

Če opazujemo predmet iz razdalje l okoli sto metrov, ga vidimo za kot l/r , to je okoli 0,1 radiana ali 6 stopinj, odklonjenega od zveznice. Na razdalji sto metrov ustreza temu premik $\frac{1}{2}l \cdot l/r$, to je okoli 0,05l ali pet metrov (slika 7c). S tem smo vsaj okvirno pojasnili fatomorgano.

Ocenimo še goriščno razdaljo plinske leče s premerom $2R$ in dolžino l . Za r vstavimo l/φ in upoštevamo, da seka žarek os v goriščni razdalji f , za katero velja $f = R/\varphi$ (slika 7d). Tako imamo naposled

$$f = \frac{R}{\varphi} = R \frac{\Delta r}{l \Delta n} = \frac{R^2}{l \Delta n} = \frac{R^2 T}{l(n_1 - 1) \Delta T}.$$

Za $n_1 - 1$ zopet vstavimo $3 \cdot 10^{-4}$, za l 0,2 m, za R in Δr $4 \cdot 10^{-3}$ m, za ΔT 45 K in za T 300 K, pa dobimo za f 1,7 metra. Izmerjena goriščna razdalja je manjša, meri okoli 1 meter.

Računi, v katerih namesto kroga dobimo kot boljši približek parabolo, niso znatno zahtevnejši, a se jim moramo odpovedati, ker je bralec najbrž že utrujen. Pokažimo samo z risbo, da na določenem območju prideta do opazovalca iz dane točke dve paraboli z različnima nagiboma (slika 8). To spominja na poševni met: točko na ravnini je mogoče doseči s parabolama z različnima nagiboma hitrosti v začetni točki.

Ali ni fatamorgana zanimiva tudi za fizika, ne samo za popotnika v daljnje dežele? Za eksperimentatorje je trd oreh in tudi teoretikom ponuja delo. Izkoristiti jo je mogoče kot zgled pri poučevanju, tudi za uporabo računalnika.

Janez Strnad

RAZNOBARVNE OČI

Trije mladi prijatelji, Blaž Črne, Primož Moder in Jernej Zelenko, so sedeli v parku in modrovali. Nenadoma je eden med njimi pripomnil: "Vsi naši priimki so v zvezi z barvami, barve, ki se v njih pojavljajo, pa so iste kot barve naših oči."

"Zanimivo!" se je oglasil fant s črnimi očmi. "Ali ste opazili, da se samo pri enem od nas treh barva oči in barva v priimku ujemata?"

"Res je!" je navdušeno potrdil Primož.

Ali ima Jernej zelene oči?

Neža Mramor

PRAVOKOTNE ENAČBE NA RACIONALNI ŠTEVILSKI MREŽI

1. Racionalna številka mreža in pravokotnost

Naj bo v ravnini podan pravokotni koordinatni sistem (x, y) in naj bo M množica vseh točk, ki imajo obe koordinati racionalni. Množico M bomo imenovali racionalna številka mreža.

Vsaki točki te mreže pripada torej par racionalnih števil (n, m) , koordinati točke v danem koordinatnem sistemu. Vsaki točki mreže priredimo daljico, ki povezuje to točko z izhodiščem koordinatnega sistema, torej s točko $(0, 0)$. V mreži definiramo seštevanje in pravokotnost.

- Seštevanje definiramo takole: Če je $A = (n, m)$ in $B = (k, l)$, je $A + B = (n + k, m + l)$. Na primer $(1, 2) + (3, -1) = (4, 1)$.
- Za točki $A = (n, m)$ in $B = (k, l)$ rečemo, da sta pravokotni, če sta pravokotni daljici OA in OB .

Če si narišemo trikotnik OAB in vzporednice s koordinatnima osema skozi točki A in B , vidimo, da iz Pitagorovega izreka sledi, da je $\overline{OA}^2 = n^2 + m^2$, $\overline{OB}^2 = k^2 + l^2$ ter $\overline{AB}^2 = (n - k)^2 + (m - l)^2$. Če naj bo trikotnik OAB pravokoten, mora tudi zanj veljati Pitagorov izrek, oziroma $n^2 + m^2 + k^2 + l^2 = (n - k)^2 + (m - l)^2$. Od tod sledi $nk + ml = 0$. To nam da možnost definicije pravokotnosti, ki je popolnoma algebrajska in enostavno računsko preverljiva: $A = (n, m)$ in $B = (k, l)$ sta pravokotni, če je $nk + ml = 0$. Tako na primer točki $A = (1, 2)$ in $B = (3, -2)$ nista pravokotni, saj je $1 \cdot 3 + 2 \cdot (-2) = -1 \neq 0$, medtem ko sta točki $C = (1, 2)$ in $D = (2, -1)$ pravokotni, ker je $1 \cdot 2 + 2 \cdot (-1) = 0$.

2. Dve enačbi z racionalnimi števili

Oglejmo si sedaj rešitvi dveh funkcijskih enačb, ki ju bomo potrebovali v nadaljevanju. Naj bo $\mathbb{Q}$ množica racionalnih števil in $f : \mathbb{Q} \rightarrow \mathbb{Q}$ neka funkcija. Potem veljata naslednji trditvi:

Trditev 1. Če je $f(x + y) = f(x) + f(y)$ za vsaka x in y , potem obstaja tako racionalno število a , da je $f(x) = ax$.

Dokaz. Iz $f(x) = f(x+0) = f(x) + f(0)$ sledi najprej $f(0) = 0$. Naj bo nadalje $a = f(1)$. Ker je $f: \mathbb{Q} \rightarrow \mathbb{Q}$, je seveda $a \in \mathbb{Q}$. Tedaj je $f(2) = f(1+1) = f(1) + f(1) = 2a$ in $f(3) = f(2+1) = f(2) + f(1) = 3a$. Naprej sklepamo podobno, saj iz $f(n) = na$ sledi $f(n+1) = f(n) + f(1) = na + a = (n+1)a$. Tisti z nekaj več znanja ste nedvomno prepoznali prijem, ki se imenuje princip popolne indukcije. Po njem sledi, da je $f(x) = ax$ za vsako naravno število x . Če pa je x negativno celo število, potem je $0 = f(0) = f(x + (-x)) = f(x) + (-ax)$, saj je $-x$ naravno število. To nam pove, da je $f(x) = ax$ za vsa cela števila x .

Naj bo zdaj x naravno število. Ker je $x \cdot \frac{1}{x} = 1$, dobimo po prejšnjem odstavku $a = f(1) = f(x \cdot \frac{1}{x}) = xf(\frac{1}{x})$, oziroma $f(\frac{1}{x}) = \frac{a}{x}$. Ker je $f(\frac{1}{x} + \frac{1}{-x}) = 0$, je $f(\frac{1}{x}) = \frac{a}{x}$ tudi za negativna cela števila x . Na koncu vzemimo še poljubno racionalno število $x = \frac{n}{m}$. Vzamemo lahko, da je n naravno, m pa celo število. Tedaj je $f(x) = f(\frac{n}{m}) = nf(\frac{1}{m}) = \frac{na}{m} = ax$ in dokaz je s tem končan.

Trditev 2. Če je $f(x+y) + f(x-y) = 2f(x) + 2f(y)$, potem obstaja tako racionalno število a , da je $f(x) = ax^2$.

Dokaz. Ponovno definirajmo $f(1) = a$. Najprej je $f(0) + f(0) = 2f(0) + 2f(0)$, kar pomeni, da je $f(0) = 0 = a \cdot 0^2$. Nadalje je $f(2) = f(1+1) = f(1+1) + f(1-1) = 2f(1) + 2f(1) = 4a = a \cdot 2^2$ in $f(3) = f(2+1) = 2f(2) + 2f(1) - f(2-1) = 9a = a \cdot 3^2$. Nadaljujmo! Iz $f(n-1) = a(n-1)^2$ in $f(n) = an^2$ sledi

$$f(n+1) = 2f(n) + 2f(1) - f(n-1) = 2an^2 + 2a - a(n-1)^2 = a(n+1)^2$$

in po principu popolne indukcije je $f(x) = ax^2$ za vsako naravno število x . Če je x negativno celo število, potem iz

$$f(x + (-x)) + f(x - (-x)) = 2f(x) + 2f(-x)$$

in

$$f(x + (-x)) + f(x - (-x)) = f(2x) = f(x+x) + f(x-x) = 4f(x)$$

dobimo, da je $f(-x) = f(x) = ax^2$.

Za ulomke postopamo podobno kot v dokazu prejšnje trditve.

3. Primer pravokotne enačbe

Naj bo M racionalna številska mreža. Pravokotna enačba na tej mreži je taka enačba z dvema spremenljivkama A in B , ki jo rešujemo pri dodatnem pogoju, da sta A in B pravokotni točki v mreži. Oglejmo si preprost primer take enačbe.

Naloga. Poišči vse take funkcije $f : M \rightarrow \mathbb{Q}$, za katere velja $f(A + B) = f(A) + f(B)$, če sta A in B pravokotna.

Trditev 3. Naj bo $A = (x, y)$ poljubna točka mreže. Izberimo si tri ulomke a, b in c . Definirajmo funkcijo $f : M \rightarrow \mathbb{Q}$ s predpisom $f(A) = ax + by + c(x^2 + y^2)$. Tedaj je f ena od rešitev naše naloge.

Dokaz. Naj bosta $A = (n, m)$ in $B = (k, l)$ pravokotni točki mreže. Iz prvega razdelka sledi, da je $nk + ml = 0$. Tedaj je

$$\begin{aligned} f(A + B) - f(A) - f(B) &= a(n + k) + b(m + l) + c((n + k)^2 + (m + l)^2) - \\ &\quad - an - bm - c(n^2 + m^2) - ak - bl - c(k^2 + l^2) = 2c(nk + ml) = 0 \end{aligned}$$

in dokaz je končan.

Zdaj se seveda zastavi vprašanje, ali so to vse možne rešitve naše naloge. Dokazali bomo, da je odgovor pritrdilen. Najprej bomo ločeno opazovali sode in lihe rešitve. (Funkcija f se imenuje soda, če je $f(-A) = f(A)$, in liha, če je $f(-A) = -f(A)$. Tako je na primer $f(A) = ax + by$ liha, $f(A) = c(x^2 + y^2)$ pa soda. Funkcija $h(x, y) = x + y + x^2 + y^2$ pa ni niti soda niti liha.)

Trditev 4. Naj bo $f : M \rightarrow \mathbb{Q}$ liha rešitev naše naloge. Tedaj je $f(x, y) = ax + by$ za neka $a, b \in \mathbb{Q}$.

Dokaz. Vzemimo dve poljubni racionalni števili x, y . Točki (x, x) in $(y, -y)$ sta pravokotni, prav tako točki $(x + y, 0)$ in $(0, x - y)$. Ker je f rešitev naše naloge, je

$$f(x + y, x - y) = f(x + y, 0) + f(0, x - y) = f(x, x) + f(y, -y).$$

Če zamenjamo x in y , dobimo

$$f(x+y, 0) + f(0, -(x-y)) = f(y, y) + f(x, -x).$$

Ker sta $(x, 0)$ in $(0, x)$ ter $(y, 0)$ in $(0, y)$ para pravokotnih točk, velja $f(x, x) = f(x, 0) + f(0, x)$ in $f(y, -y) = f(y, 0) + f(0, -y)$. Zaradi lihosti funkcije f sledi iz dosedanjega:

$$f(x+y, 0) + f(0, x-y) = f(x, 0) + f(0, x) + f(y, 0) - f(0, y),$$

$$f(x+y, 0) - f(0, x-y) = f(y, 0) + f(0, y) + f(x, 0) - f(0, x).$$

Če obe enakosti seštejemo in delimo z 2, dobimo $f(x+y, 0) = f(x, 0) + f(y, 0)$. Podobno dobimo tudi $f(0, x+y) = f(0, x) + f(0, y)$. Po trditvi 1 je $f(x, 0) = ax$ in $f(0, x) = bx$ za neka $a, b \in \mathbb{Q}$. Ker sta za poljubno točko (x, y) mreže točki $(x, 0)$ in $(0, y)$ pravokotni, takoj sledi

$$f(x, y) = f(x, 0) + f(0, y) = ax + by$$

in s tem je dokaz končan.

Trditev 5. Naj bo f soda rešitev naše naloge. Tedaj je $f(x, y) = c(x^2 + y^2)$ za neki $c \in \mathbb{Q}$.

Dokaz. Tudi tu veljata enakosti:

$$f(x+y, 0) + f(0, x-y) = f(x, 0) + f(0, x) + f(y, 0) + f(0, -y),$$

$$f(x+y, 0) + f(0, -(x-y)) = f(y, 0) + f(0, y) + f(x, 0) + f(0, -x).$$

Če vstavimo $x = y = 0$, dobimo $f(0, 0) = 0$. Zaradi sodosti funkcije f , pa je

$$f(x+y, 0) + f(0, x-y) = f(x, 0) + f(0, x) + f(y, 0) + f(0, y). \quad (1)$$

Za $x = y$ sledi od tod

$$f(2x, 0) = 2f(x, 0) + 2f(0, x).$$

Če vstavimo še $x = -y$, dobimo

$$f(0, 2x) = 2f(x, 0) + 2f(0, x) = f(2x, 0).$$

Če vstavimo $\frac{x}{2}$ namesto x , dobimo $f(x, 0) = f(0, x)$ in nato iz (1)

$$f(x + y, 0) + f(x - y, 0) = 2f(x, 0) + 2f(y, 0).$$

Po trditvi 2 je $f(x, 0) = cx^2 = f(0, x)$. Torej je $f(x, y) = f(x, 0) + f(0, y) = cx^2 + cy^2$ in dokaz je končan.

Trditev 6. Vsaka rešitev naše naloge je oblike $f(x, y) = ax + by + c(x^2 + y^2)$.

Dokaz. Naj bo $f(x, y)$ rešitev naloge. Definirajmo $g(x, y) = f(x, y) + f(-x, -y)$. Takoj lahko preverimo, da je g tudi rešitev, in sicer soda. Po trditvi 5 je tedaj

$$f(x, y) + f(-x, -y) = 2c(x^2 + y^2).$$

Funkcija $h(x, y) = f(x, y) - f(-x, -y)$ je liha rešitev in je po trditvi 4

$$f(x, y) - f(-x, -y) = 2ax + 2by.$$

Seštejemo in delimo z dva, pa dobimo

$$f(x, y) = ax + by + c(x^2 + y^2).$$

György Szabó
(prevedel Borut Zalar)

NALOGE ZA MLAJŠE BRALCE - Rešitve s str. 249

1. naloga. Označimo število lastovk na drogovih z d_1 , d_2 in d_3 . Na začetku so bile $d_1 = x$, $d_2 = y$ ter $d_3 = z$ neznane iskane količine. Po prvem preletu je bilo $d_1 = x - 6$, $d_2 = y + 6$ ter $d_3 = z$. Na koncu je bilo $12 = \frac{36}{3} = d_1 = x - 6 = d_2 = y + 6 - 4 = d_3 = z + 4$. Torej je bilo na začetku $d_1 = 18$, $d_2 = 10$ ter $d_3 = 8$.

2. naloga. Prvo število označimo z x , drugo pa z y . Ker je njuna vsota 180, imamo prvo enačbo $x + y = 180$. Ker je ostanek x pri deljenju z y enak pet, imamo drugo enačbo $x = ky + 5$. Če to vstavimo v prvo enačbo, dobimo $y(k + 1) = 175$. Število 175 ima deljitelje 5, 7, 25, 35. Od tod dobimo rešitve: 1) $x = 173$, $y = 7$, 2) $x = 155$, $y = 25$, 3) $x = 145$, $y = 35$.

3. naloga. (a) $2 = \frac{5+5}{5}$
 (b) $31 = 5 \times 5 + 5 + \frac{5}{5}$
 (c) $28 = 22 + 2 + 2 + 2$
 (d) $23 = 22 + \frac{2}{2}$
 (e) $100 = 99 + \frac{99}{99}$
 (f) $100 = 111 - 11$

4. naloga. Rešitev je $568 \times 24 = 13632$. Še nekaj besed o reševanju. V številu 568 so nam neznane enice, ki ne prispevajo bistveno k velikosti produkta. To pomeni, da moramo najprej uganiti število desetic v drugem faktorju. Če bi bilo drugo število 14 , bi produkt nikakor ne mogel presežati 10000 ; če pa bi bilo drugo število 34 , bi produkt bil že prevelik (večji od 15000). Torej je drugo število 24 . Zdaj lahko nastavimo enačbo $(560 + a) \times 24 = 13630 + b$, oziroma $24a = 190 + b$. Od tod vidimo, da je $24a$ tisti večkratnik števila 24 , ki leži med 190 in 199 ; to pa je $192 = 8 \cdot 24$.

Borut Zalar

UMOR V NORI VASI

V Nori vasi se je pripetil dogodek stoletja – umor. Novica se je kot požar razširila po vasi: umorili so psihiatra. Nora vas ni znana kot posebno pametna vas, prej nasprotno, saj je v tej vasi polovica prebivalcev psihiatrov, druga polovica pa se s psihoanalizo ukvarja v prostem času. Pa pustimo čenče.

Policija iz Nore vasi je preiskala prizorišče umora in ugotovila, da so bili na dan umora naročeni štirje pacienti: Andrej Norec, Boris Prismoda, Cene Tepec ter Darko Cepec (ni nujno, da v tem vrstnem redu). Ker nihče izmed njih ni hotel priznati zločina, so sprožili sodni proces, na katerem so zaslišali prav vse vaščane (če bi koga izmed njih izpustili, bi se zagotovo pritožil). Priče so izjavile, da razen pacientov psihiatra ni obiskal nihče drug in da je vsak pacient obiskal psihiatra natančno enkrat, vendar se ne spomnijo, v katerem vrstnem redu. Pacienti so dali naslednje izjave:

Andrej Norec:

- (1) Nihče izmed nas ni ubil psihiatra.
- (2) Ko sem odhajal, je bil psihiater še živ.

Boris Prismoda:

- (3) Pri psihiatru sem bil naročen kot drugi.
- (4) Ko sem prišel, je bil psihiater že mrtev.

Cene Tepec:

- (5) Jaz sem tretji obiskal psihiatra.
- (6) Psihiater je bil še živ, ko sem odšel.

Darko Cepec:

- (7) Morilec je obiskal psihiatra pred mano.
- (8) Ko sem prišel jaz, je bil psihiater že mrtev.

Te izjave niso bile policiji kaj prida v pomoč, zato je prišla do zaključka (naj vidi širni svet, kakšno pametno policijo imajo v Nori vasi), da je psihiater naredil samomor.

Če vam prišepnem, da so Andrej, Boris, Cene in Darko znani kot najhujši lažnivci v Nori vasi (vedno lažejo), bi znali poiskati morilca?

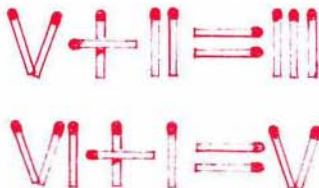
Mateja Rojc

PISMA BRALCEV

Jerneja, Karmen, Nina, Slađana, Valentina in Melita iz 5.a razreda Osnovne šole na Rakeku pri krožku iz zabavne matematike rade rešujejo naloge z vžigalicami. Nekaj so jih kar same sestavile in nam jih poslale. Naš risar je nekatere od njih lepo prerisal, vi pa jih poskusite rešiti. Če vam ne bo šlo od rok, pa poprosite za pomoč kar naše mlade sestavljalke.

Marija Vencelj

Odstrani eno vžigalico, da dobiš pravilno izjavo:



Dodaj eno vžigalico, da dobiš pravilno izjavo:



Premakni štiri vžigalice, da dobiš račun $|| - | = |$:



Odstrani eno vžigalico, da dobiš dva trikotnika:



Nina, Slađana, Valentina, Melita

Nobena izmed naslednjih izjav, sestavljenih iz vžigalic, ni pravilna. V vsaki prestavi natanko eno vžigalico tako, da dobiš pravilno enakost.



Jerneja in Karmen

REŠITVE NALOG S 30. SREDNJEŠOLSKEGA TEKMOVANJA IZ FIZIKE

Pri rešitvah navajamo in komentiramo le najpomembnejše korake; oznak za količine v rešitvi, ki so enolično in nedvoumno povezane s količinami v besedilu, ne pojasnjujemo posebej.

Skupina A

- Čas t_2 do prihoda tretjega vagona dobimo iz enačbe $2l = \frac{1}{2}at_2^2$, če je l dolžina vagona in a pospešek vlaka. Za čas prehoda tretjega vagona $t_3 = t_2 + \Delta t$, $\Delta t = 3$ s velja: $l = \frac{1}{2}a(t_3^2 - t_2^2) = \frac{1}{2}a(2t_2 + \Delta t)$. Drugo enačbo vstavimo v prvo in dobimo kvadratno enačbo za t_2 : $t_2^2 - 4\Delta t t_2 - 2\Delta t^2 = 0$ z rešitvijo $t_2 = (6 + 3\sqrt{6})$ s. Za čas prihoda n -tega vagona dobimo: $l = \frac{1}{2}a(2t_n + \Delta t')$, $\Delta t' = 1$ s, $t_n = \frac{1}{2}\Delta t/\Delta t'(2t_2 + \Delta t) - \frac{1}{2}\Delta t'$ in $t_n - t_2 = (16 + 6\sqrt{6})$ s.
- Iz ravnovesja navorov dobimo $\frac{1}{2}F_g a = F_1 h$, če je a stranica osnovne ploskve, F_g teža in h višina prijemališča sile F_1 , s katero potiskamo piramido. Sledi $h = \frac{1}{2}F_g a/F_1 = 89$ cm. Prijemališče sile je torej večje od višine piramide, 71 cm. S silo 450 N piramide ni mogoče prevrniti. Za silo 600 N sicer dobimo $h = 67$ cm, vendar je ta sila večja od sile lepenja $F_l = k_l F_g = 480$ N in piramida prej zdrsne.
- Polmer balona dobimo iz enačbe za ravnovesje sil

$$F_{\text{vzgon}} = F_g, \quad (\sigma_z - \sigma_{\text{He}}) \frac{4\pi r^3}{3} = F_g,$$

$$r = \sqrt[3]{\frac{3F_g}{4\pi(\sigma_z - \sigma_{\text{He}})}} = 3,6 \text{ m}.$$

Silo na balon opazujemo na vodoravnem prerezu na polovici balona. Balon se ne strga, če je teža manjša od produkta natezne trdnosti γ in obsega balona, torej: $\gamma > F_g/2\pi r = 88$ N/m.

- Premik bata x dobimo iz enačbe za ravnovesja sil: $F_{\text{vzgon}} = F_g$, $\rho g S(H - x) = (M + m)g$, če je S ploščina osnovne ploskve valja, H njegova višina, M njegova masa, m masa bata in ρ gostota vode. Od tod dobimo $x = 14$ cm. Tlak v valju se poveča na $p_0 \frac{H}{H - x}$, če je p_0 normalni zračni tlak.

Sile na bat so v ravnovesju

$$Sp_0 \frac{H}{H-x} + kx = S(p_0 + \rho gh),$$

od koder dobimo globino bata $h = 24,0$ cm.

Skupina B

1. V primeru **b** je skupna sila kar vsota sil obeh krakov $F_b = 2F$. Da bo skupna sila enaka polovici, $F_a = \frac{1}{2}F_b = F$, morajo sile krakov in njihova rezultanta tvoriti enakostraničen trikotnik, torej $\varphi = 60^\circ$.
2. Ker tudi Zemlja kroži od zahoda proti vzhodu, točka na Zemlji "beži" pred satelitom in velja:

$$\omega_s t = 2\pi + \omega_Z t, \quad \omega_Z = \frac{2\pi}{t_0}, \quad \omega_s = \frac{2\pi}{t} + \frac{2\pi}{t_0} = 2,3 \cdot 10^{-4} \text{ rad/s},$$

če je $t = 11$ ur, $t_0 = 24$ ur, ω_s kotna hitrost satelita, ω_Z pa Zemlje. Iz Newtonovega zakona za kroženje satelita dobimo radij tira r in višino satelita nad površjem Zemlje h :

$$\frac{\kappa m m_Z}{r^2} = m \omega^2 r, \quad r = \sqrt[3]{\frac{\kappa m_Z}{\omega^2}} \approx 19600 \text{ km},$$

$$h = r - r_Z \approx 13200 \text{ km}.$$

3. Preden pesek pade na ploščo, ima gibalno količino $G_{y1} = mv_1$, $v_1 = \sqrt{2gh}$ in sprememba gibalne količine v navpični smeri je enaka $\Delta G_y = \int F_y dt = G_{y1}$. Zaradi sile trenja, $F_x = -kF_y$, se pri padcu pojavi sunek sile v vodoravni smeri in enačba za gibalno količino v smeri x ima tako obliko $(m+m)v' - mv_0 = \int F_x dt$, torej $mv_0 = 2mv' + km\sqrt{2gh}$. Od tu dobimo rešitev

$$v' = \frac{v_0 - k\sqrt{2gh}}{2}.$$

Ko je $k = 0$, dobimo $v' = v_0/2 = 1$ m/s, če pa naj se klada po trku ustavi, $v' = 0$, pa dobimo za višino $h = v_0^2/2gk^2 = 5,1$ m.

4. Ker je teža krogle manjša od vzgona na potopljeno kroglo, krogla že plava.

Skupina C

1. Ko kondenzatorja zvežemo, mora biti na obeh enaka napetost, torej: $(C_1 + C_2)U = C_1U_1 \pm C_2U_2$. Od tod dobimo $U_a = 411,8 \text{ V}$ in $U_b = 372,6 \text{ V}$.

Začetna energija je enaka $E_0 = \frac{1}{2}(C_1U_1^2 + C_2U_2^2) = 0,0450 \text{ J}$.

Končna energija je v prvem primeru: $E_1 = \frac{1}{2}(C_1 + C_2)U_a^2 = 0,0432 \text{ J}$, v drugem pa $E_2 = \frac{1}{2}(C_1 + C_2)U_b^2 = 0,0345 \text{ J}$.

V prvem primeru gre v izgubo 4 %, v drugem pa 21,3 % energije.

2. a) Kroglica se giblje enakomerno pospešeno v navpični in v vodoravni smeri. Pospešek v vodoravni smeri je $a_x = F_e/m = e\sigma/m\varepsilon_0$, če je σ površinska gostota naboja, e naboj in m masa kroglice. Kroglica prožno trči s ploščo in se pri tem naelektri z nasprotno predznačenim nabojem, ki ima enako velikost kot prvotni. Zato se velikost pospeška v vodoravni smeri ne spremeni. Za čas povratka velja $d = \frac{1}{2}a_xt^2$, če je d razdalja med ploščama. Od tod izračunamo $t = 4,2 \text{ s}$. Da se kroglica vrne na prvotno višino, mora za gibanje v navpični smeri veljati $v_0t - \frac{1}{2}gt^2 = 0$, in $v_0 = 20,6 \text{ m/s}$.
- b) Kroglica prvič trči ob steno ob času t_1 : $\frac{1}{2}d = \frac{1}{2}a_xt_1^2$ s hitrostjo v vodoravni smeri $v_1 = a_xt_1 = \sqrt{a_xd} = 0,067 \text{ m/s}$. Ker se hitrost enakomerno povečuje, ima ob drugem trku hitrost $3v_1$, ob tretjem $5v_1, \dots$. Vrednost sile na intervalu $[0, v_1]$ je F_e , 0 na $[v_1, 3v_1]$ in $-F_e$ na $[-v_1, -3v_1]$, F_e na $[3v_1, 5v_1] \dots$.
3. Za spremembo magnetnega pretoka $\Delta\Phi$, ko premaknemo okvir za $\Delta r = v\Delta t$, velja

$$\Delta\Phi = \frac{\mu_0 I a}{2\pi} \left(\frac{1}{r+a} - \frac{1}{r} \right) v\Delta t,$$

če je a stranica okvira in r oddaljenost bližnje stranice vodnika. Za inducirani tok I' dobimo

$$I' = \frac{U_i}{R} = \frac{\Delta\Phi}{R\Delta t} = \frac{\mu_0 I a v}{2\pi R} \left(\frac{1}{r+a} - \frac{1}{r} \right).$$

Sila na okvir je razlika sil na sprednjo in zadnjo stranico:

$$\begin{aligned} F &= I'a(B_1 - B_2) = \\ &= \frac{\mu_0 I a^2 v}{2\pi R} \left(\frac{1}{r+a} - \frac{1}{r} \right) \cdot \frac{\mu_0 I}{2\pi} \left(\frac{1}{r+a} - \frac{1}{r} \right) = 16,2 \text{ mN}. \end{aligned}$$

4. a) Hitrost ionov v curku dobimo iz $\frac{1}{2}mv_0^2 = e_0U_0$, $v_0 = 8.0 \cdot 10^4$ m/s. Magnetna sila uravnovesi električno: $e_0E = e_0v_0B$, torej $B = E/v_0 = 1.25$ T.
- b) Sila na ion s hitrostjo v je $F = e_0vB - e_0E = e_0(v - v_0)B = e_0\Delta vB$. Odklon na steni je potem $y = at^2/2$, $t = l/v_0$, torej

$$y = \frac{e_0\Delta vBl^2}{2mv_0^2} = \frac{e_0\Delta vBl^2}{4e_0U_0} = 0.625 \text{ mm}.$$

- c) Iz rezultata pri b) dobimo $\Delta v' = (1/0.625) 80 \text{ m/s} = 128 \text{ m/s}$.

Skupina D

1. a) Pospešek izračunamo najhitreje kar iz zakona o ohranitvi energije:

$$\begin{aligned}(M+m)g\Delta h &= \frac{1}{2}Mv^2 \cdot 2 + \frac{1}{2}mv^2 \cdot \frac{3}{2}, \\ v^2 &= \frac{(M+m)gh}{(M+3m/4)}, \\ v^2 &= 2as, \quad s = \frac{h}{\sin \varphi}.\end{aligned}$$

Pospešek sistema je potem

$$a = \frac{v^2 \sin \varphi}{2h} = \frac{(M+m)}{2(M+3m/4)} g \sin \varphi = 0,88 \text{ m/s}^2.$$

- b) Naklon na notranjem plašču cevi, kjer se kotali palica, mora biti takšen, da povzroči kotaljenje palice s pospeškom a :

$$\begin{aligned}a &= \frac{2}{3}g \sin(\varphi + \delta) \approx \frac{2}{3}g(\sin \varphi + \delta \cos \varphi), \\ \delta &= -\frac{M}{4M+3m} \cdot \operatorname{tg} \varphi = -2,3^\circ\end{aligned}$$

2. Centripetalna sila na majhen krožni lok z dolžino $\Delta l = R\Delta\varphi$ je takole povezana s silo F , ki napenja vrv: $F_r = F\Delta\varphi$. Newtonov zakon za kroženje delca z maso Δm pravi: $\Delta m\omega_0^2 R = F_r = F\Delta l/R$. Od tod

dobimo za hitrost valovanja na vrvi c : $c^2 = F/\mu = F\Delta l/\Delta m = \omega_0^2 R^2$. Pogoj za valovne dolžine stoječega valovanja je $2\pi R = N\lambda$. Možne frekvence so torej: $\nu_1 = N\omega_0/2\pi$.

3. a-c) Enako kot 4. naloga pri skupini C, le $\Delta v' = (0.3/0.625) 80 \text{ m/s} = 38,4 \text{ m/s}$.

d) Ioni, ki se v komori gibljejo s hitrostjo $v_0 + \Delta v'$, imajo pred pospeševanjem hitrost v_1 in kinetično energijo

$$\frac{1}{2}mv_1^2 = \frac{1}{2}m(v_0 + \Delta v')^2 - e_0 U_0 = mv_0 \Delta v'.$$

Velja

$$kT \approx \frac{1}{2}mv_1^2 \approx mv_0 \Delta v', \quad T \approx \frac{mv_0 \Delta v'}{k} \approx 4800 \text{ K}.$$

4. a) Izkoristek je sorazmeren z $(I - I_0)/P_{\text{LED}}$, če je P_{LED} moč, ki se troši na svetleči diodi, ter $I = U_{FD}/R$, $I_0 = U_{FD}(0)/R$ in $R = 1 \text{ M}\Omega$. Iz tabele ugotovimo, da je to pri toku $I = 0,5 \text{ }\mu\text{A}$ ($I_{\text{LED}} = 6 \text{ mA}$).
b) Za tok na fotodiodi velja

$$I = N_e e_0 = N_f q e_0 = \frac{\Phi q e_0}{h\nu} = \frac{\Phi q e_0 \lambda}{hc}.$$

Celotni tok dobimo s seštevanjem prispevkov, navedenih v tabeli:

$$\Phi = \sum_i \Phi(r_i) 2\pi r_i d / d^2 = \frac{2\pi h\nu}{dq e_0} \sum_i I(r_i) r_i.$$

Izkoristek $\eta = \Phi/P_{\text{LED}} \approx 0.001$.

Ciril Dominko, Bojan Golli

PARALELOGRAMI

Paralelogram $\mathcal{A}$ je včrtan v paralelogram $\mathcal{B}$, kadar oglišča prvega ležijo na straneh drugega.

1. Poišči vse paralelograme, včrtane v dani paralelogram $ABCD$.
2. Poišči vse pravokotnike, včrtane v dani kvadrat $ABCD$.

Boris Lavrič

1. DRŽAVNO TEKMOVANJE OSNOVNOŠOLCEV IZ MATEMATIKE - Rešitve nalog s str. 253

7. razred

1. Desetiški zapis: $aabb = 1000a + 100a + 10b + b = 1100a + 11b = 11(100a + b)$.

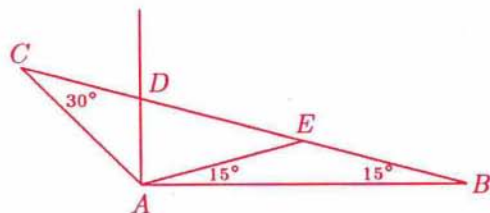
Število $aabb$ je večkratnik števila 11, zato je deljivo z 11.

2. Zapišimo $202^{303} = ((2 \cdot 101)^3)^{101} = (2^3 \cdot 101^3)^{101}$ in

$303^{202} = ((3 \cdot 101)^2)^{101} = (3^2 \cdot 101^2)^{101}$, pa ugotovimo

$2^3 \cdot 101^3 > 3^2 \cdot 101^2 \iff 8 \cdot 101 \cdot 101^2 > 9 \cdot 101^2 \implies (2^3 \cdot 101^3)^{101} > (3^2 \cdot 101^2)^{101}$.

3.

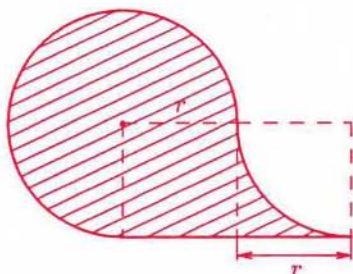


Narišemo kot $\angle BAE = 15^\circ$. V trikotniku $\triangle ABE$ sta kota ob osnovnici enaka, zato je $\overline{AE} = \overline{BE}$. Kot $\angle AED$ je zunanji kot trikotnika $\triangle ABE$, zato je $\angle AED = 30^\circ$. V trikotniku $\triangle AEC$ sta kota ob osnovnici enaka, zato je $\overline{AE} = \overline{AC}$. Za trikotnik $\triangle AED$ velja:

$\angle EDA = 75^\circ$ in $\angle EAD = 75^\circ$, zato je $\overline{AE} = \overline{DE}$, od tod pa dobimo $\overline{BD} = \overline{BE} + \overline{ED} \implies \overline{BD} = 2 \cdot \overline{AE} \implies \overline{BD} = 2 \cdot \overline{AC}$.

4. Na 10000 m^2 potrebujemo $45 \text{ kg } H_3PO_4$. Na 1 m^2 potrebujemo $\frac{45}{10000}$ kg fosforjeve kisline. Za njivo, ki ima ploščino 18000 m^2 torej potrebujemo $\frac{45 \cdot 18000}{10000}$ kg fosforjeve kisline, to je 81 kg . Dobimo enačbo $\frac{18}{100} \cdot x = 81$, ki ima rešitev $x = 450 \text{ kg}$. Pripraviti moramo 450 kg superfosfata.

5.



Najprej ugotovimo $o = 2\pi r + 2r$, od tod pa je $2r(\pi + 1) = 16(\pi + 1)$ in $r = 8$ cm. Za ploščino velja $p = \frac{1}{2}\pi r^2 + 2r^2 = 32(4 + \pi)$ cm².

8. razred

1. Trimestno število je $\overline{ab7} = 100a + 10b + 7$, dvomestno število pa $\overline{ba} = 10b + a$. Tako dobimo enačbo $(100a + 10b + 7) - 4 \cdot (10b + a) = 685$, ki jo poenostavimo $96a - 30b = 678$, $16a - 5b = 113$. Od tod sledi $a \in \{8, 9\}$. Če je $a = 8$, potem je $5b = 15$, $b = 3$ in tedaj je trimestno število 837. Če je $a = 9$, potem je $5b = 58$. Ta možnost odpade, zato je edino tako trimestno število 837.

2. Zaradi $n_1 \cdot 2\pi r_1 = n_2 \cdot 2\pi r_2$ oziroma $n_1 \cdot r_1 = n_2 \cdot r_2$ imamo $n_1 = \frac{r_2}{r_1} \cdot n_2$, $n_1 = \frac{5}{4}n_2$. Potem računamo:

$$n_1 + n_2 = 648, \frac{9}{4}n_2 = 648, n_2 = 288, n_1 = 360.$$

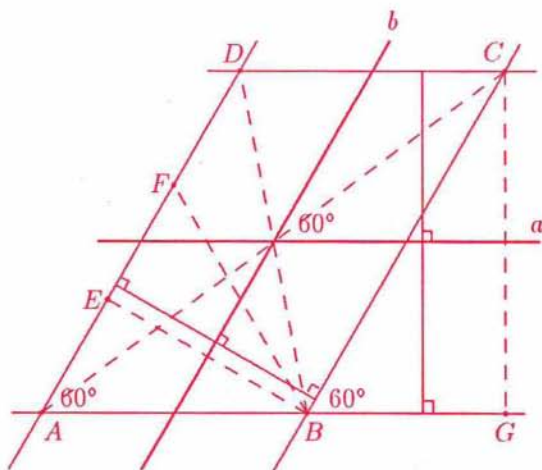
Sprednje kolo se zavrti 360-krat, zadnje pa 288-krat.

3.

	ROB	PROSTORNINA	POVRŠINA
prva kocka	a	a^3	$6a^2$
druga kocka	$a\sqrt{3}$	$(a\sqrt{3})^3 = 3a^3\sqrt{3}$	$6(a\sqrt{3})^2 = 18a^2$
tretja kocka	$3a$	$27a^3$	$54a^2$

Razmerje prostornin je $a^3 : 3a^3\sqrt{3} : 27a^3 = 1 : 3\sqrt{3} : 27$. Ker velja $18a^2 = 6a^2 + 12a^2$, je površina druge kocke za 200% večja od površine prve kocke in podobno je $54a^2 = 6a^2 + 48a^2$, zato je površina tretje kocke za 800% večja od površine prve kocke.

4.



Daljica AB je stranica enakostraničnega trikotnika $\triangle ABF$, ki ima višino $\overline{EB} = 6$ cm. $\overline{AB} = \overline{CD} = \frac{2 \cdot 6}{\sqrt{3}} = 4\sqrt{3} (\doteq 6,9)$ cm. $\overline{CG} = 9$ cm, $\overline{BC} = \frac{2 \cdot 9}{\sqrt{3}}$ cm, $\overline{BC} = \overline{AD} = 6\sqrt{3} (\doteq 10,4)$ cm. $\overline{AC}^2 = \overline{CG}^2 + (\overline{AB} + \frac{\overline{BC}}{2})^2 = 9^2 + (4\sqrt{3} + 3\sqrt{3})^2 = 228$, $\overline{AC} = 2\sqrt{57} (\doteq 15,1)$ cm. $\overline{BD}^2 = \overline{BE}^2 + \overline{ED}^2 = \overline{BE}^2 + (\overline{AD} - \frac{\overline{AB}}{2})^2 = 6^2 + (6\sqrt{3} - 2\sqrt{3})^2 = 84$, $\overline{BD} = 2\sqrt{21} (\doteq 9,2)$ cm.

5. Enačbo $\frac{3(x-ax+1)}{2} - \frac{ax+b-4}{3} = \frac{2(b-ax)}{6} + \frac{3}{2}$ pomnožimo s 6: $9(x - ax + 1) - 2(ax + b - 4) = 2(b - ax) + 9$. Odpravimo oklepaje in uredimo $9x - 9ax = 4b - 8$ oziroma $9x(1 - a) = 4(b - 2)$.

a) Če je $1 - a \neq 0$, $a \neq 1$, lahko levo in desno stran delimo z $(1 - a)$ in dobimo edino rešitev $x = \frac{4(b-2)}{9(1-a)}$.

b) Enačba $9x(1 - a) = 4(b - 2)$ nima rešitve, če je $a = 1$ in $b \neq 2$.

Aleksander Potočnik

NI ČASA ZA ŠOLO – Rešitev s str. 242

Težava pri Janezkovem računu je v tem, da se nekatere njegove dejavnosti prekrivajo in je zato Janezek določene ure upošteval dvakrat. Na primer ure, ki jih med počitnicami porabi za spanje in zato, da je, je štel po dvakrat. Take napake so precej pogoste v raznih statističnih raziskavah.

Neža Mramor

ERNST EDUARD KUMMER

V letošnjem maju mineva sto let, odkar je umrl veliki nemški matematik E.E.Kummer. Rodil se je leta 1810 v dolnjelužiškem mestecu Žari (takrat Sorau) na meji s Šlezijo. Tri leta star je izgubil očeta, po poklicu zdravnik. Pobral ga je tifus, ki so ga v nemirnih časih Napoleonovih vojn prenašali vojaki. Odtlej je skrb za Ernsta Eduarda in njegovega starejšega brata ležala na materinih ramenih. Družina je živela v skromnih razmerah. Ko



E.E. Kummer

je Kummer končal gimnazijo v domačem kraju, je odšel študirat v Halle. Po krajšem omahovanju se je odločil za matematiko. K tej odločitvi ga je nagnilo prepričanje, ki ga je izrazil z besedami: "Kar v matematiki kdo odkrije za resnično, morajo vsi potrditi." S tem naj bi bilo povedano, da matematičnim ugotovitvam pritiče splošna in brezčasna veljavnost.

Kummer je služboval najprej več let na gimnaziji v šlezijemskem mestu Legnici, nato je deloval na univerzi v Vroclavu, od leta 1855 dalje

pa na univerzi v Berlinu. Tu sta se mu kmalu pridružila matematika Leopold Kronecker (1823 - 1891) in Karl Weierstrass (1815 - 1897). Ti trije moške so dajali tedanji berlinski matematiki svetovni ugled.

S svojimi izsledki je Kummer obogatil različna področja matematike: analizo, algebro, teorijo števil, geometrijo. Naj se dotaknemo le njegovega prispevka k reševanju Fermatovega problema. Metode, ki jih je Kummer pri tem razvil, so imele daljnosežen vpliv na razvoj algebre in teorije števil.

Že starogrškim matematikom je bilo znano, da ima enačba

$$x^2 + y^2 = z^2$$

neskončno rešitev v tujih naravnih številih x, y, z . Rešitve zajamemo s pitagorejskimi trojicami. Kaj pa, če namesto eksponenta 2 vzamemo eksponent 3, 4, 5, ...? V zvezi s tem vprašanjem je Pierre Fermat (1601 - 1665)

zapisal: Če je eksponent n naravno število in $n \geq 3$, enačba

$$x^n + y^n = z^n \quad (1)$$

nima rešitve v naravnih številih x, y, z . Pristavil je še, da ima za to trditev čudovit dokaz. Ker Fermat dokaza ni sporočil, ni mogoče preveriti, ali je bil ta čudoviti dokaz res dokaz. Tako se je rodil Fermatov problem: dognati omenjeno Fermatovo trditev ali pa jo s kakšnim nasprotnim primerom ovreči. Ne prvo ne drugo se do danes ni zgodilo.

Prepričati se je mogoče, da bo Fermatova trditev dokazana, če po-kažemo, da velja za eksponent 4 in za vsak lihi praštevski eksponent.

Že pred Kummrovim nastopom so dokazali, da za eksponent 4 in praštevilske eksponente 3, 5, 7 enačbe (1) ni mogoče izpolniti z naravnimi števili x, y, z . Kummer je vpeljal razdelitev lihih praštevil na regularna in iregularna praštevila in pokazal, da je Fermatova trditev resnična za vse regularne praštevilske eksponente. Dognal je tudi, da je med 37 lihimi praštevili, ki so pod 164, le osem iregularnih, namreč 37, 59, 67, 101, 103, 131, 149 in 157. Za vse druge lihe praštevilske eksponente pod 164 torej Fermatova trditev velja. To je bil velik dosežek. Ni pa se Kummru posrečilo odgovoriti na vprašanje, ali je regularnih praštevil neskončno. Tega tudi danes ne vemo. Pač pa je dognano, da je iregularnih praštevil neskončno. Za iregularne praštevilske eksponente je seveda treba Fermatovo trditev posebej dokazovati. Tudi v tej smeri je prišel Kummer do pomembnih ugotovitev.

V devetindvajsetem letu starosti je bil Kummer izbran za člana berlinske akademije, pozneje je bil daljšo dobo tajnik njenega matematično fizikalnega razreda. Rektorsko službo je opravljal dvakrat, najprej v Vroclavu, nato v Berlinu. Pariška akademija mu je leta 1857 podelila nagrado, ki je bila leta 1850 razpisana za rešitev Fermatovega problema. Kummer se tega natečaja ni udeležil, saj ni imel popolne rešitve. Komisija, ki je pregledovala poslane vloge - med člani je bil tudi A.L. Cauchy (1789 - 1857) - je bila mnenja, da je največ, kar je bilo ob Fermatovem problemu doseženo, vsebovano v Kummrovih delih. Predlagala je, da se razpis zaključi, nagrada pa naj pripada Kummru za "lepe raziskave o kompleksnih številih..." (mišljene so metode, ki smo jih zgoraj omenili). Predlog komisije je bil sprejet.

Leta 1884 je Kummer nehal predavati in se je popolnoma umaknil iz javnosti v krog svoje družine - preživelo ga je devet sinov in hčera.

Za konec si oglejmo Kummrov dokaz, da je praštevil neskončno mnogo. Dokaz se naslanja na dejstvo, da je vsako od 1 večje naravno število deljivo vsaj z enim praštevilom in poteka takole: Če je praštevilo le končno mnogo,

npr. t , so to

$$p_1 < p_2 < \dots < p_t. \quad (2)$$

Njihov produkt $n = p_1 p_2 \dots p_t$ je večji od 2 (saj je $p_1 = 2, p_2 = 3$), naravno število $n - 1$ tedaj nad 1 in zato deljivo z vsaj enim praštevilom p_i iz (2). Ker p_i deli tudi n , je s p_i deljiva razlika $n - (n - 1) = 1$. To pa ne gre, saj število 1 ni deljivo z nobenim praštevilom. Zato praštevil ni le končno mnogo.

Jože Grasselli

OBVESTILO ASTRONOMSKEGA DRUŠTVA JAVORNIK

Redni mesečni sestanki **Astronomskega društva Javornik** so vsak **tretji torek** v mesecu ob **17. uri** na **Oddelku za fiziko**, Jadranska 19, učilnica **F2**. Na začetku sestanka je predavanje z astronomsko vsebino, sledijo poročila o opazovanjih, dogovori za prihodnja opazovanja, izmenjava izkušenj.

Predvidena predavanja v naslednjih mesecih:

– *Dogodek v Tunguski*

Leta 1908 je močvirnato, redko poseljeno področje Sibirije doživelo nenavadno eksplozijo. Domnevali so, da je padel meteorit, vendar doslej niso našli trdnih ostankov. Danes se nekateri nagibajo k mnenju, da je verjetneje šlo za asteroid. Skupina članov mednarodne meteorske organizacije je pred tremi leti odšla na raziskovalno ekspedicijo na področje Tunguske. O napornem potovanju, raziskovanju, zbiranju materiala in rezultatih bo **aprila** ob spremljavi diapozitivov govoril **Korado Korlevič**, ki je bil eden glavnih pobudnikov ekspedicije.

– *Mreža all-sky kamer*

Mednarodna meteorska organizacija (IMO) spremlja aktivnost meteorskih rojev. Ker je fotografija med najbolj verodostojnimi metodami detekcije meteorjev, so se odločili postaviti mrežo širokokotnih kamer po vsem svetu. Te naj bi stalno spremljale meteorsko aktivnost. Danes mreža pokriva pretežni del zahodne Evrope. V ADJ smo se odločili, da se vključimo v projekt mreže. **Niko Štritof** bo **maja** govoril o pomenu in vlogi mreže, izgradnji kamer in vključevanju Slovenije v opisani projekt.

– *Kako gledam na kozmologijo?*

Kozmologija je veda, ki raziskuje vesolje kot celoto. Njen nastanek je povezan z modeliranjem osnovnih idej, podprtih z meritvami. Za kozmologijo so posebej pomembni *Hubbleova konstanta*, *črno sevanje* in *pogostnost elementov v vesolju*. **Prof. dr. Andrej Čadež** bo na **junijskem** sestanku povzel razvoj in današnje kozmološko znanje ter predstavil svoje razumevanje vesolja. Nakazal bo pomembna kozmološka vprašanja in njihovo povezanost s človekom.

Ker vas preko Preseka težko sproti obveščamo o vsebini sestankov, lahko tekoče informacije dobite na naslovu ADJ, Tavčarjeva 2, Ljubljana, p.p. 504, kjer je vsak torek (razen tretjega v mesecu) od 17. do 19. ure tudi odprta društvena soba. Lahko tudi pokličete na telefonsko številko (061) 265 061 int. 67.

Mirjam Galičič

NALOGA ZA SISTEMATIČNE BRALCE – Rešitev s str. 256

Označimo iskana števila z x , y in z . Privzamemo lahko, da je x najmanjše, z pa največje število. Kdaj veliko število deli vsoto dveh majhnih? Vsota $x + y$ je lahko enaka z , $2z$, $3z$ in tako naprej. Toda če sta števili x , y majhni (obe manjši od z), potem je celo možnost $x + y = 2z$ izločena, kar pomeni, da v našem primeru obvezno velja $x + y = z$.

Imamo torej trojico $(x, y, x + y)$. Določiti moramo še zvezo med x in y . Iz pogojev naloge izpeljemo še dve trditvi: x deli $y + z = 2y + x$ ter y deli $x + z = 2x + y$. Od tod sledi, da x deli $2y$ in y deli $2x$. Zdaj lahko pišemo $2y = nx$ ter $2x = my$. Če ti dve enakosti zmnožimo, dobimo $4xy = nmxy$ oziroma $4 = nm$. Zdaj moramo pregledati tri možnosti:

1. možnost: $n = 1$ in $m = 4$. Tedaj je $x = 2y$, kar je v nasprotju s predpostavko, da je x manjši kot y . Ta možnost odpade.

2. možnost: $n = m = 2$. Tedaj je $x = y$, kar je v nasprotju s pogoji naloge, zato tudi ta možnost odpade.

3. možnost: $n = 4$ in $m = 1$. Tedaj je $y = 2x$ in dobimo edino rešitev $y = 2x$. To pomeni, da so rešitve naše naloge trojice $(x, 2x, 3x)$, kjer je število x poljubno naravno število. Takim rešitvam rečemo enoparametrične, ker jih lahko izrazimo z enim samim parametrom (namreč x).

Borut Zalar

ŠTEVILSKA KRIŽANKA

Križanka je iz knjižice *Numberchains* avtorja *Geoffreya Marnella*.

1		2	3		4		5	6		7		8
		9		10					11			
12	13			14			15		16			
	17		18						19			
20			21		22		23	24				
25	26	27			28	29				30		
31				32				33	34	35		36
				37	38		39		40			
		41	42				43	44				
45							46		47	48		
		49		50			51			52		53
54						55			56			
		57							58			

VODORAVNO

- Številu sledi njegov kub
- Vsaka številka je kvadrat
- Številu sledi njegova četrta potenca
- Dva krat 26 *N*

NAVPIČNO

- Anagram kuba
- Številu sledi njegov dvakratnik
- Padajoče številke
- Kvadratu sledi še en kvadrat
- Različne številke, vse so kvadrati

VODORAVNO

12. Kub
14. Številu sledi njegov kvadrat
15. Od 45 V odštej 15 N
17. Številu sledi njegov dvakratnik
19. Kvadratu sledi njegov dvakratnik
21. Številu sledi njegov kvadrat
23. Vsota števk je 28
25. Večkratnik števila 58 V
28. Četrta potenci sledi kvadrat
31. Od 7 N odštej 33 V
33. Od 7 N odštej 31 V
37. Seštej 41 V in 45 N
40. Kvadratu sledi kub
41. Od 37 V odštej 45 N , je praštevilo
43. Kvadrat
45. Seštej 15 V in 15 N
46. Vsota števk je 10
49. Vsota števk je 21
51. Ni praštevilo
52. Kvadrat števila 48 N
54. Kub
55. Kvadrat v kvadratu
57. Kub
58. Delitelj števila 25 V

Kvadrat v kvadratu pomeni: v število, ki je kvadrat, vrnemo kvadrat. Primeri:
14921, 12161, 12896.

NAVPIČNO

7. Seštej 31 V in 33 V
8. Palindrom
10. Številu sledi njegov dvakratnik
13. Praštevilo
15. Četrta potenca
16. Delitelj števila 32 N
18. Kvadrat v kvadratu
20. Delitelj števila 29 N
22. Pred številom je njegov kvadrat
24. Dva krat 6 N
26. Polovica števila iz prvih treh števk pod 5 V
27. Praštevilo
29. Večkratnik števila 20 N
30. Kvadrat, ki ostane kvadrat, če števke pišemo v obratnem vrstnem redu
32. Večkratnik števila 16 N
34. Kub
35. Število 27 N , zapisano v obratnem vrstnem redu, je praštevilo
36. Kvadratu sledi še en kvadrat
38. Kvadratu sledi kub
39. Praštevilo
41. Kvadrat v kvadratu
42. Enakomerno naraščajoče številke
44. Kub
45. Od 37 V odštej 41 V
47. Vsebuje iste številke kot 53 N
48. Glej 52 V
50. Kub
51. Anagram četrte potence
53. Glej 47 N
56. Dvakratnik praštevil

Prevod in priredba Darjo Felda

PRAVILO 72 IN ŠTEVILO e

V januarski številki revije National Geographic je članek z naslovom *Moč denarja*. V njem je omenjeno PRAVILO 72, ki ga uporabljajo bankirji in finančni izvedenci.

Pravilo je zelo preprosto: Če hočemo izvedeti, v koliko letih se pri obrestovanju s p procenti začetni znesek podvoji, delimo 72 s p .

Denimo, da vložimo devize v hranilnico po 8 % obrestni meri. Koliko časa bo trajalo, da se začetni kapital podvoji? Delimo 72 z 8, pa dobimo odgovor: 9 let.

Po članku *Moč denarja* bi za to pravilo (katerega avtor ni znan) morali vedeti vsi.

Pa preverimo stvar na našem primeru. Po enem letu moramo obstoječemu znesku prišteti 8 procentov. Namesto tega lahko obstoječi znesek pomnožimo z $1{,}08$. Tako se po dveh letih začetni kapital pomnoži z $1{,}08^2$, po devetih letih pa z

$$1{,}08^9 \doteq 1{,}999,$$

kar je res praktično enako 2.

Oglejmo si še en primer. Denimo, da je inflacija 12 %. Čez koliko časa se bodo cene podvojile? Uporabimo PRAVILO 72. Delimo 72 z 12, odgovor je: 6 let. Preverimo stvar z žepnim računalnikom:

$$1{,}12^6 \doteq 1{,}974.$$

Vzemimo, da je inflacija 3% mesečno. Po PRAVILU 72 traja podvojitvev $72:3 = 24$ mesecev. Uporabimo tipko x^y ali y^x na žepnem računalniku in ugotovimo, da je v resnici

$$1{,}03^{24} \doteq 2{,}033.$$

Vidimo, da gre za približno formulo, ki pa daje presenetljivo dobre rezultate. Vprašamo se lahko, kakšna je matematična razlaga tega pravila.

Tu se lahko spomnimo na **število e** . To je število, h kateremu stremijo izrazi

$$\left(1 + \frac{1}{n}\right)^n,$$

ko se število n veča čez vse meje. Na primer:

$$1 \cdot 1^{10} \doteq 2 \cdot 59$$

$$1 \cdot 01^{100} \doteq 2 \cdot 70$$

$$1 \cdot 001^{1000} \doteq 2 \cdot 717$$

$$1 \cdot 0001^{10000} \doteq 2 \cdot 7181.$$

Izkaže se, da je število

$$e = 2 \cdot 71828 \dots$$

ena najvažnejših matematičnih konstant. Privzamemo lahko, da je za velike n

$$\left(1 + \frac{1}{n}\right)^n \doteq e.$$

Prav tako boste morali verjeti, da tu sploh ni nujno, da je število n naravno število. Denimo, da je

$$\frac{1}{n} = \frac{p}{100},$$

kjer je p število procentov. Tako imamo formulo

$$\left(1 + \frac{p}{100}\right)^{\frac{100}{p}} \doteq e,$$

če je le $n = \frac{100}{p}$ dovolj velik, se pravi p dovolj majhen.

PRAVILO 72 pa trdi:

$$\left(1 + \frac{p}{100}\right)^{\frac{72}{p}} \doteq 2.$$

Poskusimo to preveriti.

Upoštevajmo, da je po pravilu za potenciranje potenc

$$\left(1 + \frac{p}{100}\right)^{\frac{72}{p}} = \left(1 + \frac{p}{100}\right)^{\frac{100}{p} \cdot \frac{72}{100}} = \left(\left(1 + \frac{p}{100}\right)^{\frac{100}{p}}\right)^{\frac{72}{100}} \doteq e^{0 \cdot 72},$$

če je p dovolj majhen.

Z računalnikom ugotovimo, da je

$$e^{0 \cdot 72} \doteq 2 \cdot 05,$$

kar se res ne razlikuje dosti od 2.

Če bi bili natančnejši, bi ugotovili, da je

$$e^{0.693} \doteq 2.000.$$

Torej bi za zelo majhne obrestne mere namesto PRAVILA 72 morali vzeti "pravilo 70". (Za tiste, ki poznate logaritme, je $0.693\dots$ prav naravni logaritem števila 2.) Ker pa se obrestne mere navadno sučejo okrog 8 %, je bilo izbrano PRAVILO 72, ki daje na tem območju natančnejše rezultate. Poleg tega je 72 "lepo" število, deljivo z mnogimi števili, kar smo tudi izkoristili v naših primerih.

Oglejmo si še napako PRAVILA 72. Absolutna napaka pove, koliko se po PRAVILU 72 izračunana vrednost razlikuje od 2, in je torej enaka

$$\left| \left(1 + \frac{p}{100} \right)^{\frac{72}{p}} - 2 \right|.$$

Relativno napako dobimo, če to delimo s pravo vrednostjo, se pravi z 2. Če relativno napako pomnožimo s 100, dobimo njeno vrednost v procentih. Na sliki 1 imamo narisano relativno napako PRAVILA 72 v procentih, če obrestna mera znaša $p\%$, in to za p od 1 do 24. Vidimo, da za obrestne mere od 5 do 11 % ta napaka znaša manj kot 1 procent, če pa je obrestna mera blizu 8 %, je napaka praktično enaka 0. Na prvi pogled je videti, kot da sta oba dela grafa na sliki 1 ravni črti, vendar seveda to ni res, le zelo podobna sta ravnima črtama. Slike so narejene s programom Mathematica (in s pomočjo kolega Marka Petkovška).

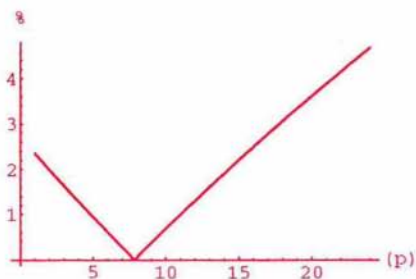
Za tiste, ki dovolj dobro poznate pojem odvoda, lahko povemo še nekaj več. Če narišemo izraz za relativno napako brez absolutne vrednosti, se pravi graf funkcije

$$f(x) = 50 \left(\left(1 + \frac{x}{100} \right)^{\frac{72}{x}} - 2 \right),$$

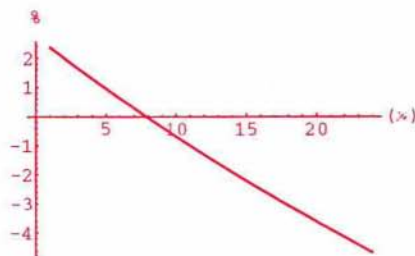
dobimo sliko 2. Kot vidimo, ta funkcija seka os x blizu točke 8 in je, kot smo že omenili, zelo podobna premici. Odvod funkcije f izračunamo tako, da potenco v oklepaju zapišemo kot

$$e^{\frac{72}{x} \ln(1 + \frac{x}{100})}$$

in potem odvajamo kot posredno funkcijo. Hitro izračunamo, da je $f'(8) \doteq -0.325$.



Slika 1



Slika 2

Po Newtonovi metodi lahko zdaj izračunamo, da krivulja seka abscisno os v točki 7,85 (na tri mesta natančno). Za to obrestno mero je torej PRAVILO 72 točno. Obenem iz izračunanega nagiba v točki 8 še enkrat vidimo, da relativna napaka PRAVILA 72 na intervalu od 5 do 11 znaša manj kot 1 %. Pri ocenjevanju nagiba "na oko" ne smemo pozabiti, da merilo na obeh oseh ni enako!

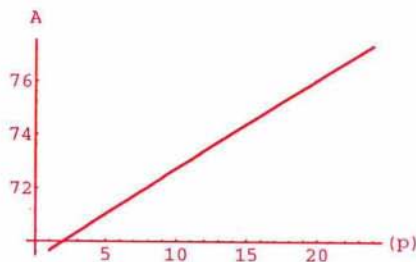
Na koncu si oglejmo še eno pot do PRAVILA 72. Denimo, da iščemo število A , da bo

$$\left(1 + \frac{p}{100}\right)^{\frac{A}{p}} = 2.$$

Uporabimo logaritem na obeh straneh:

$$\frac{A}{p} \log\left(1 + \frac{p}{100}\right) = \log 2$$

$$A = \frac{p \log 2}{\log\left(1 + \frac{p}{100}\right)}.$$



Slika 3

Na sliki 3 je graf za A . Vidimo, da se spet sučemo okrog števila 72. Za majhne obrestne mere - okrog 2 % - bi bilo ugodnejše "pravilo 70". Pri zelo velikih obrestnih merah pa podvojitve nastopi tako hitro, da moramo potrebni čas izračunati drugače.

Peter Legiša

POTENČNA ŠTEVILA IN MATHEMATICA

Ko sem v prvi številki dvajsetega letnika Preseka prebral članek *Potenčna števila*, ki ga je napisal *prof. Jože Grasselli*, sem sedel za računalnik, pogledal sistem za simbolično računanje Mathematica in pogledal, ali mi lahko računalnik pomaga pri branju tega zanimivega prispevka.

Najprej sem pogledal, kakšno orodje ima Mathematica namenjeno potenčnim številom.

```
Mathematica 2.0 for MS-DOS 386/7 (June 21, 1991)  
Copyright 1988-91 Wolfram Research, Inc.
```

```
In[1]:= ?Prime*  
Prime PrimePi PrimeQ
```

```
In[1]:= ?Power*  
Power PowerExpand PowerMod
```

Nič pametnega ne najdemo pod praštevili *Prime*... niti pod potencami *Power*... Zato se lotimo kar razstavljanja na prafaktorje. Na primer: $100 = 2^2 5^2$ in $99 = 3^2 11^1$. Mathematica razstavlja števila z ukazom *FactorInteger*.

```
In[1]:= FactorInteger[100]  
Out[1]= {{2, 2}, {5, 2}}  
  
In[2]:= FactorInteger[99]  
Out[2]= {{3, 2}, {11, 1}}
```

Za rezultat dobimo seznam, katerega elementi so zopet dvoelementni seznam. Prvi element je praštevilo, drugi pa ustrezni eksponent.

Pri potenčnih številih so zanimivi predvsem eksponenti. Število 99 ni potenčno, ker se v njegovem razcepu na praštevila pojavlja tudi eksponent 1. Z ukazom *Transpose* v izrazu *Out[2]* zberemo na prvem mestu praštevila, na drugem pa eksponente. Pri tem se izraz *%2* nanaša na *Out[2]*.

```
In[3]:= Transpose[%2]  
Out[3]= {{3, 11}, {2, 1}}
```

Z ukazom *Last* dobimo zadnji element seznama, v našem primeru bodo to eksponenti, za tem pa z ukazom *Min* izberemo najmanjšega med njimi.

```
In[4]:= Last[%3]  
Out[4]= {2, 1}  
  
In[5]:= Min[%4]  
Out[5]= 1
```

Ker je rezultat 1, vemo, da 99 ni potenčno število. Če bi isto zaporedje ukazov izvedli pri številu 100, bi dobili na koncu rezultat 2, ki je več kot 1, in bi upravičeno sklepali, da je število 100 potenčno število.

Na osnovi te ugotovitve lahko zdaj napišemo v Mathematici ukaz z imenom *PotencnoStevilo*, ki za poljubno naravno število pove, ali je potenčno ali ni.

```
In[6]:= PotencnoStevilo[x_] := Min[Last[Transpose[FactorInteger[x]]]] > 1
In[7]:= PotencnoStevilo[10]
Out[7]= False
In[8]:= PotencnoStevilo[1]
Last::nolast: {} has a length of zero and no last element.
Out[8]= Last[{}] > 1
In[9]:= PotencnoStevilo[4]
Out[9]= True
```

Pri preskusu ukaza *PotencnoStevilo* smo ugotovili, da odpove pri argumentu 1. To je razumljivo, saj število 1 ni niti praštevilo niti ni sestavljeno število. Zato ukaz *FactorInteger[1]* vrne prazen seznam, ta pa nima zadnjega elementa.

V naslednji vrstici uporabimo vgrajeni ukaz *Table*. Ukaz *Table* nam vrne seznam. V našem primeru je to seznam parov oblike $\{i, \text{PotencnoStevilo}[i]\}$, pri čemer i zavzame zapored vrednosti 1, 2, ..., 40.

```
In[10]:= Table[{i, PotencnoStevilo[i]}, {i, 40}]
Last::nolast: {} has a length of zero and no last element.
Out[10]= {{1, Last[{}]} > 1}, {2, False}, {3, False}, {4, True}, {5, False},
> {6, False}, {7, False}, {8, True}, {9, True}, {10, False}, {11, False},
> {12, False}, {13, False}, {14, False}, {15, False}, {16, True},
> {17, False}, {18, False}, {19, False}, {20, False}, {21, False},
> {22, False}, {23, False}, {24, False}, {25, True}, {26, False},
> {27, True}, {28, False}, {29, False}, {30, False}, {31, False},
> {32, True}, {33, False}, {34, False}, {35, False}, {36, True},
> {37, False}, {38, False}, {39, False}, {40, False}}
```

Očitno so v zgornjem seznamu potenčna števila le tista, poleg katerih stoji zapisan *True*. V Mathematici jih lahko izberemo iz seznama z ukazom *Select*. Če pozabimo, kako natančno moramo uporabiti ukaz, lahko povprašamo za nasvet Mathematico.

```
In[11]:= ?Select
Select[list, crit] picks out all elements ei of list for which crit[ei] is
True. Select[list, crit, n] picks out the first n elements for which
crit[ei] is True.
```

Še kratek preizkus:

```
In[11]:= Select[Table[i,{i,2,100}],PotencnoStevilo]
Out[11]= {4, 8, 9, 16, 25, 27, 32, 36, 49, 64, 72, 81, 100}
```

in zdaj zares:

```
In[12]:= Select[Table[i,{i,2,10000}],PotencnoStevilo]
Out[12]= {4, 8, 9, 16, 25, 27, 32, 36, 49, 64, 72, 81, 100, 108, 121, 125,
> 128, 144, 169, 196, 200, 216, 225, 243, 256, 288, 289, 324, 343, 361,
> 392, 400, 432, 441, 484, 500, 512, 529, 576, 625, 648, 675, 676, 729,
> 784, 800, 841, 864, 900, 961, 968, 972, 1000, 1024, 1089, 1125, 1152,
> 1156, 1225, 1296, 1323, 1331, 1352, 1369, 1372, 1444, 1521, 1568, 1600,
> 1681, 1728, 1764, 1800, 1849, 1936, 1944, 2000, 2025, 2048, 2116, 2187,
> 2197, 2209, 2304, 2312, 2401, 2500, 2592, 2601, 2700, 2704, 2744, 2809,
> 2888, 2916, 3025, 3087, 3125, 3136, 3200, 3249, 3267, 3364, 3375, 3456,
> 3481, 3528, 3600, 3721, 3844, 3872, 3888, 3969, 4000, 4096, 4225, 4232,
> 4356, 4489, 4500, 4563, 4608, 4624, 4761, 4900, 4913, 5000, 5041, 5184,
> 5292, 5324, 5329, 5400, 5408, 5476, 5488, 5625, 5776, 5832, 5929, 6075,
> 6084, 6125, 6241, 6272, 6400, 6561, 6724, 6728, 6859, 6889, 6912, 7056,
> 7200, 7225, 7396, 7569, 7688, 7744, 7776, 7803, 7921, 8000, 8100, 8192,
> 8281, 8464, 8575, 8649, 8712, 8748, 8788, 8836, 9000, 9025, 9216, 9248,
> 9261, 9409, 9604, 9747, 9800, 9801, 10000}

In[13]:= Length[%12]
Out[13]= 184
```

Med prvimi 10000 naravnimi števili je 184 potenčnih. Pri tem smo si pomagali z vgrajenim ukazom *Length*, ki vrne dolžino seznama.

Kako blizu pa so si sosednja potenčna števila? V članku profesorja Grassellija je dokazano, da je v zaporedju potenčnih števil neskončno parov takih števil, da sta števili para zaporedni naravni števili.

Pri preiskovanju bomo uporabili ukaz *Partition*.

```
In[14]:= ?Partition
Partition[list, n] partitions list into non-overlapping sublists of length n.
Partition[list, n, d] generates sublists with offset d. Partition[list,
{n1, n2, ...}, {d1, d2, ...}] partitions successive levels in list into
length ni sublists with offsets di.
```

Iz zaporedja hočemo napraviti zaporedje sosednjih parov. Kdor ne razume angleško, naj ugane, kako deluje ukaz *Partition* iz naslednjega primera.

```
In[14]:= Partition[Table[i,{i,10}],2,1]
Out[14]= {{1, 2}, {2, 3}, {3, 4}, {4, 5}, {5, 6}, {6, 7}, {7, 8}, {8, 9},
> {9, 10}}
```


Učinek naslednje vrstice lahko razumemo, težje pa je razložiti natančno delovanje vgrajenega ukaza *Apply*. Pri tem *Subtract* seveda pomeni odštevanje.

```
In[15]:= Apply[Subtract,%14,1]
Out[15]= {-1,-1,-1,-1,-1,-1,-1,-1,-1,-1}
```

Prvi element v seznamu *Out[15]* ustreza razliki 1 – 2, drugi 2 – 3, in tako dalje. Vse skupaj ponovimo na zaporedju potenčnih števil, le da na koncu z vgrajenim ukazom *Minus* zamenjamo predznake števil v seznamu.

```
In[16]:= Partition[%12,2,1]
Out[16]= {{4, 8}, {8, 9}, {9, 16}, {16, 25}, {25, 27}, {27, 32}, {32, 36},
> {36, 49}, {49, 64}, {64, 72}, {72, 81}, {81, 100}, {100, 108},
...
> {9025, 9216}, {9216, 9248}, {9248, 9261}, {9261, 9409}, {9409, 9604},
> {9604, 9747}, {9747, 9800}, {9800, 9801}, {9801, 10000}}

In[17]:= Apply[Subtract,%16,1]
Out[17]= {-4,-1,-7,-9,-2,-5,-4,-13,-15,-8,-9,-19,-8,-13,-4,-3,
> -16,-25,-27,-4,-16,-9,-18,-13,-32,-1,-35,-19,-18,-31,-8,
...
> -32,-27,-118,-79,-100,-92,-89,-183,-111,-74,-63,-36,-40,
> -48,-164,-25,-191,-32,-13,-148,-195,-143,-53,-1,-199}

In[18]:= Minus[%17]
Out[18]= {4, 1, 7, 9, 2, 5, 4, 13, 15, 8, 9, 19, 8, 13, 4, 3, 16, 25, 27, 4,
> 16, 9, 18, 13, 32, 1, 35, 19, 18, 31, 8, 32, 9, 43, 16, 12, 17, 47, 49,
> 23, 27, 1, 53, 55, 16, 41, 23, 36, 61, 7, 4, 28, 24, 65, 36, 27, 4, 69,
> 71, 27, 8, 21, 17, 3, 72, 77, 47, 32, 81, 47, 36, 36, 49, 87, 8, 56, 25,
> 23, 68, 71, 10, 12, 95, 8, 89, 99, 92, 9, 99, 4, 40, 65, 79, 28, 109,
> 62, 38, 11, 64, 49, 18, 97, 11, 81, 25, 47, 72, 121, 123, 28, 16, 81,
> 31, 96, 129, 7, 124, 133, 11, 63, 45, 16, 137, 139, 13, 87, 41, 143,
> 108, 32, 5, 71, 8, 68, 12, 137, 151, 56, 97, 146, 9, 41, 116, 31, 128,
> 161, 163, 4, 131, 30, 23, 144, 144, 25, 171, 173, 119, 56, 32, 27, 118,
> 79, 100, 92, 89, 183, 111, 74, 63, 36, 40, 48, 164, 25, 191, 32, 13,
> 148, 195, 143, 53, 1, 199}
```

Z ukazom *Sort* zaporedje uredimo, z ukazom *Union* pa združimo enake elemente.

```
In[19]:= Sort[%18]
Out[19]= {1, 1, 1, 1, 2, 3, 3, 4, 4, 4, 4, 4, 4, 4, 5, 5, 7, 7, 7, 8, 8,
> 8, 8, 8, 8, 9, 9, 9, 9, 9, 9, 10, 11, 11, 11, 12, 12, 12, 13, 13, 13,
...
> 137, 139, 143, 143, 144, 144, 146, 148, 151, 161, 163, 164, 171, 173,
> 183, 191, 195, 199}
```

```

In[20]:= Union[%19]
Out[20]= {1, 2, 3, 4, 5, 7, 8, 9, 10, 11, 12, 13, 15, 16, 17, 18, 19, 21, 23,
> 24, 25, 27, 28, 30, 31, 32, 35, 36, 38, 40, 41, 43, 45, 47, 48, 49, 53,
> 55, 56, 61, 62, 63, 64, 65, 68, 69, 71, 72, 74, 77, 79, 81, 87, 89, 92,
> 95, 96, 97, 99, 100, 108, 109, 111, 116, 118, 119, 121, 123, 124, 128,
> 129, 131, 133, 137, 139, 143, 144, 146, 148, 151, 161, 163, 164, 171,
> 173, 183, 191, 195, 199}

```

Iz *Out[18]* vidimo, da so do 10000 štirje zaporedni pari potenčnih števil: (8,9), (288,289), (675,676) in (9800,9801). Z Mathematico zlahka faktoriziramo zadnje tri pare.

```

In[21]:= FactorInteger[288]
Out[21]= {{2, 5}, {3, 2}}

In[22]:= FactorInteger[289]
Out[22]= {{17, 2}}

In[23]:= FactorInteger[675]
Out[23]= {{3, 3}, {5, 2}}

In[24]:= FactorInteger[676]
Out[24]= {{2, 2}, {13, 2}}

In[25]:= FactorInteger[9800]
Out[25]= {{2, 3}, {5, 2}, {7, 2}}

In[26]:= FactorInteger[9801]
Out[26]= {{3, 4}, {11, 2}}

```

Za konec zastavimo bralcu še nekaj vprašanj. V zaporedju razlik *Out[20]* je največje število 199. To razliko doseže en sam par potenčnih števil do 10000, ravno $10000 - 9801 = 199$. V zaporednju *Out[20]*, oziroma v *Out[18]* manjkajo števila 6, 14, 20, 22, ... Ker smo opazovali potenčna števila le do 10000, je razumljivo, da so v zaporednju *Out[20]* luknje. Če bi mejo 10000 porinili navzgor, bi se te luknje gotovo polnile. Ni pa jasno, ali bi se tudi vse zapolnile.

Vprašanje 1. Ali za poljubno naravno število n obstaja tak par sosednjih potenčnih števil p in P , da je $P - p > n$?

Negativen odgovor na to vprašanje bi pomenil tudi negativen odgovor na naslednje vprašanje.

Vprašanje 2. Ali za poljubno naravno število n obstaja tak par sosednjih potenčnih števil p in P , da je $P - p = n$?

Tudi zadnje vprašanje je po svoje zanimivo. Če je odgovor nanj pozitiven, ga morda lahko najdemo z ugibanjem in preskušanjem, torej z Mathematico. Če pa je odgovor negativen, potem brez matematike ne bo šlo.

Vprašanje 3. Poišči najmanjši par sosednjih potenčnih števil p in P , da bo $P - p = 6$, ali dokaži, da takega para ni.

Na srečo je odgovor na prvo vprašanje pozitiven. Na tem mestu tega ne bomo dokazovali. Z Mathematico bomo le poiskali empirične argumente za to trditev. Ideja dokaza je preprosta. Naj $p(k)$ označuje število potenčnih števil, ki niso večja od k , in naj bo $n(k) = \max\{i/(p(i) + 1); i \leq k\}$. Ker je prvo potenčno število 4, drugo pa 8, je smiselno opazovati $n(k)$ za vrednosti $k \geq 8$. Zaradi lažjega računanja bomo privzeli, da sta tudi 0 in k potenčni števili. Tedaj med prvimi k naravnimi števili obstaja vsaj en par sosednjih potenčnih števil P in p , tako da je $P - p \geq n(k)$. Lahko bi se sicer zgodilo, da je $P = k$ in k ni potenčno število, vendar tedaj gledamo na k kot na zamenjavo za naslednje večje potenčno število. Taka zamenjava ne pokvari ocene za sosednji potenčni števili. Z Mathematico si lahko narišemo, kako naraščajo vrednosti $n(k)$. Z $r(k)$ bomo označili maksimalno razliko med dvema sosednjima potenčnima številoma, od katerih nobeno ni večje od k . Tudi tu sta 0 in k upoštevani kot potenčni števili.

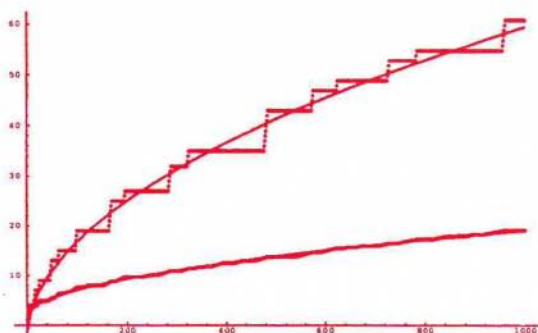
Program je rekurziven in uporablja zahtevne objektno orientirane zmogljivosti Mathematice, zato ga na tem mestu ne bomo podrobneje razlagali:

```
n[0] = 0
n[k_] := n[k] = If[k > (p[k] + 1)*n[k - 1], N[k/(p[k] + 1)], n[k - 1]]
p[1] = 0
p[k_] := p[k] = If[PotencnoStevilo[k], 1 + p[k - 1], p[k - 1]]
r[0] = 0
r[k_] := r[k] = If[p[k] == 0, k, If[k < b[k] + r[b[k]], r[b[k]], k - b[k]]]
b[k_] := b[k] = If[p[k] == 0, 0, If[PotencnoStevilo[k - 1], k - 1, b[k - 1]]]
```

Rezultate do 1000 dobimo najprej v obliki seznamov:

```
In[27]:= Table[n[k], {k, 1000}]
Out[27]= {1., 2., 3., 3., 3., 3., 3.5, 3.5, 3.5, 3.5, 3.5, 3.5, 3.5, 3.5,
> 3.75, 3.75, 3.75, 3.75, 3.8, 4., 4.2, 4.4, 4.6, 4.8, 4.8, 4.8, 4.8, 4.8,
...
> 19.2, 19.2, 19.2, 19.2, 19.2, 19.2, 19.2, 19.2, 19.2, 19.2, 19.2, 19.2,
> 19.2, 19.2, 19.2, 19.2, 19.2, 19.2}
```

```
In[28]:= Table[r[k], {k, 1000}]
Out[28]= {1, 2, 3, 4, 4, 4, 4, 4, 4, 4, 5, 6, 7, 7, 7, 7, 7, 7,
> 7, 8, 9, 9, 9, 9, 9, 9, 9, 9, 9, 9, 9, 9, 9, 9, 9, 9, 9, 10,
...
> 61, 61, 61, 61, 61, 61, 61, 61, 61, 61, 61, 61, 61, 61, 61, 61, 61,
> 61, 61, 61, 61, 61, 61, 61, 61, 61, 61, 61, 61, 61, 61, 61, 61}
```

Slika 1: Funkciji $n(k)$ in $r(k)$, za $k = 1, 2, \dots, 1000$, hkrati z njuni-
ma aproksimacijama $\nu(k) = 1.48473 + 0.557407\sqrt{k}$ in $\rho(k) = -2.94041 + 1.98026\sqrt{k}$.

V obeh primerih števila počasi naraščajo. Z ukazom *ListPlot* bi lahko tabeli narisali. Oblika krivulje obakrat spominja na funkcijo $f(x) = \sqrt{x}$. Ukaz *Fit* je v Mathematici namenjen aproksimaciji podatkov. Z njim bomo poskušali poiskati najboljše vrednosti za a in b , tako da bodo podatki kar najmanj odstopali od funkcije $a + b\sqrt{x}$.

```
In[29]:= ?Fit*
```

Fit[data, funs, vars] finds a least-squares fit to a list of data as a linear combination of the functions funs of variables vars. The data can have the form $\{\{x_1, y_1, \dots, f_1\}, \{x_2, y_2, \dots, f_2\}, \dots\}$, where the number of coordinates $x, y, \dots$ is equal to the number of variables in the list vars. The data can also be of the form $\{f_1, f_2, \dots\}$, with a single coordinate assumed to take values $1, 2, \dots$. The argument funs can be any list of functions that depend only on the objects vars.

```
In[29]:= Fit[%27,{1,Sqrt[x]},x]
```

```
Out[29]= 1.48473 + 0.557407 Sqrt[x]
```

```
In[30]:= Fit[%28,{1,Sqrt[x]},x]
```

```
Out[30]= -2.94041 + 1.98026 Sqrt[x]
```

Za $n(k)$ smo dobili torej $a = 1.48473$ in $b = 0.557407$, za $r(k)$ pa smo dobili $a = -2.94041$ in $b = 1.98026$. Na sliki 1 vidimo ob podatkih iz *Out[27]* in *Out[28]* še funkciji iz *Out[29]* in *Out[30]*. Našli smo dovolj indicjev za hipotezo, da je med prvimi n naravnimi števili kvečjemu $c\sqrt{n}$ potenčnih števil, pri čemer je c izbrana konstanta. Ker so vsi kvadrati potenčna števila, konstanta c ne more biti manjša od 1. Naši eksperimenti kažejo, da bi prava vrednost utegnila biti okoli števila 2. Strog dokaz te hipoteze pa prepuščamo bralcu.

Tomaž Pisanski

JETNIKI IN KAPE – Rešitev s str. 193

Kapa prvega jetnika je bila črna. Kajti če bi imel prvi jetnik belo kapo, bi lahko eden od preostalih dveh uganil barvo svoje kape. Če bi bila tudi kapa drugega bela, bi tretji takoj povedal barvo svoje kape, ker sta beli kapi samo dve. Če bi tretji jetnik molčal, bi torej drugi v vrsti vedel, da je barva njegove kape črna. Ker pa sta drugi in tretji v vrsti molčala, je prvi vedel, da mora biti njegova kapa črna.

Neža Mramor

SISTEMI LINEARNIH DIOFANTSKIH ENAČB

1. Pet družin je izkopal skupni vodnjak. Vsaka izmed njih je prispevala tudi vrv, s katero naj bi si pomagali pri spuščanju vedra na dno vodnjaka.

Če bi vzeli dve dolžini vrvi prve družine, bi do dna vodnjaka zmanjkalo natanko za dolžino vrvi druge družine. Če bi vzeli tri dolžine vrvi druge družine, bi do dna vodnjaka zmanjkalo za dolžino vrvi tretje družine. Če bi vzeli štiri dolžine vrvi tretje družine, bi do dna vodnjaka zmanjkalo za dolžino vrvi četrte družine. Če bi vzeli pet dolžin vrvi četrte družine, bi do dna vodnjaka zmanjkalo natanko za dolžino vrvi pete družine. In nazadnje – če bi vzeli šest dolžin vrvi pete družine, bi do dna vodnjaka zmanjkalo natanko za dolžino vrvi prve družine.

Poišči globino vodnjaka in dolžine vrvi vsake izmed petih družin.

(Dodatek: zanimajo nas le celoštevilске rešitve naloge.)

*Kitajska, iz knjige Devet poglavij
matematične umetnosti, pribl. 1. st.n.št.)*

2. En petelinček stane pet čienov, ena kokoška tri čiene in troje piščet le en čien. Za sto čienov smo na trgu dobili vsega skupaj sto pernatih.

Koliko je bilo med njimi petelinčkov, koliko kokošk in koliko piščet?

(Zhang Quijian, okoli 450)

3. Če sto mernikov žita razdeliš med sto ljudi tako, da dobi vsak moški tri mernike, vsaka ženska po dva mernika in vsak otrok po pol mernika, povej, koliko moških, koliko žensk in koliko otrok je prišlo po žito.

(Alcuin, 735-804)

4. Enaindvajset sodov, med katerimi je tretjina polnih medu, tretjina le do polovice napolnjenih z medom, tretjina sodov pa je praznih, je treba razdeliti med tri ljudi tako, da bo vsak dobil enako količino medu in enako število sodov. Pri tem je treba paziti tudi na to, da nihče ne bo dobil več kakor štiri sode iste vrste (polne, prazne ali polprazne). Kako jim jih je torej treba razdeliti?



(Alcuin, 735-804)

5. Prvi mož ima pet rubinov, osem safirjev, sedem biserov in devetdeset denarjev, drugi mož pa sedem rubinov, devet safirjev, šest biserov in dvainšestdeset denarjev. Moža sta enako bogata.

Kakšna je cena posamezne vrste draguljev v denarjih, če se izraža s celimi števili?

(Bhâskara II., 1114- ?)

6. Na trgu ponujajo ptice po naslednjih cenah: pet golobov stane tri drahme, sedem žerjavov pet drahem, devet gosi sedem drahem, za tri pave pa je treba odšteti devet drahem. Dam ti sto drahem, ti pa mi prinesi vsega skupaj stotero teh ptic. Tako ti čast odličnika med aritmetiki zagotovo ne uide.

(Bhâskara II., 1114 - ?)

7. Na večerji je bilo enainštirideset ljudi, med njimi nekaj moških, nekaj žensk, pa tudi otrok ni manjkalo. Račun za njihovo skupno večerjo je znesel štirideset sujev. Vsak moški je plačal štiri suje, vsaka ženska tri suje, za otroke pa so plačali po tretjino suja za vsakega. Koliko moških, koliko žensk in koliko otrok je bilo na večerji?

(Bachet, 1581 - 1638)

8. "Gospa Spooner je klicala zjutraj," pravi špecerist svojemu pomočniku. "Hotela je imeti natanko dvajset funtov čaja, ki stane 2 šilinga in $4\frac{1}{2}$ penija za funt. Tega čaja nimamo. Imamo pa čaj po 2 šilinga in 6 penijev, pa nekoliko slabšega po 2 šilinga in 3 penije in še onega poceni indijskega, ki je le po 1

šiling in 9 penijev za funt. Vendar pa je gospa izbirčna, hoče prav tistega po 2 šilinga in $4\frac{1}{2}$ penija."

"In kaj nameravaš storiti?" ga naivno vpraša pomočnik.

"Hm? Poslušaj, zmešal boš vse tri vrste čaja in to v ustreznih razmerjih, tako da bo dvajset funtov te mešanice natanko ustrezalo željeni ceni gospe Spooner."

Ubogí pomočnik, le kako bo izvedel to nalogo? Ali mu znate pomagati? (Pojasnilo: 1 šiling je 12 penijev.)

(H.E. Dudeney, 1847 - 1930)

Vilko Domajnko

NEGATIVNA ŠTEVILA

Jože in Martin sta opravljala izpit za poklicne voznike v večerni šoli. Pri matematiki je bil prvi na vrsti Martin.

"Kaj si bil vprašan?" je hotel vedeti Jože.

"Nič posebnega," je bil moder Martin. "Negativna števila."

"Joj, o tem pa nič ne vem!" je zastokal Jože.

"Ti bom razložil," pravi Martin. "Veš to je tisto... Z remize odpelješ prazen avtobus, na prvi postaji vstopita dva potnika, na drugi trije, na tretji pa jih gre šest dol. Potem pa mora na četrti postaji vstopiti en potnik, da imaš spet prazen avtobus!"

Mihael Blaško

PREMO IN OBRATNO SORAZMERJE

Bližajo se sprejemni izpiti in celo Matic poskuša biti zbran pri matematiki. Pa kaj, ko je zunaj tako lepo, da ti misli kar same za pogledom pobegnejo ven, proč od šole.

"No, Matic, gre pri tej nalogi za premo ali za obratno sorazmerje?" ga nazaj v trdo šolsko resničnost postavi učiteljičin glas.

"...?"

"Pa pogledjva najprej lažjo nalogo: Metka lahko sama opleve cvetlično gredico v eni uri. V kolikšnem času sta gotovi, če ji na pomoč priskoči sošolka Špela?"

"V dveh urah," butne Matic, "ker klepetata!"

Iz uredništva

REŠITVE NALOG

KANIN S KOČNE - Rešitev s str. P-3/III

V uredništvo je prispela le ena rešitev nagradne naloge *Kanin s Kočne*. Avtor te rešitve je opazil, da je Andrej prezrl ukrivljenost zemeljske površine, vendar njegova nadaljnja utemeljitev sicer pravilnega odgovora (Andrej ne sklepa pravilno!) ni korektna. Zavêdel ga je podatek, da ležijo vrhovi Kočne, Kanjavca in Kanina približno na istem vzporedniku.

Odpravimo Andrejevo napako in si dovolimo morsko gladino videti kot del površja krogle. Označimo z A vrh Kočne, z B vrh Kanina in s C središče zemlje. Vzemimo, da na ravnini skozi A , B in C leži tudi vrh Kanjavca K , namišljena morska gladina pa to ravnino seka v krožnici K . Presečišče premice CK z daljico AB zaznamujmo z D in izračunajmo razdaljo

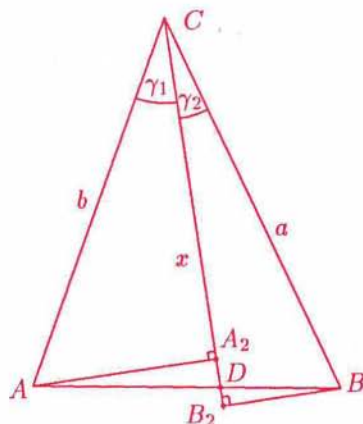
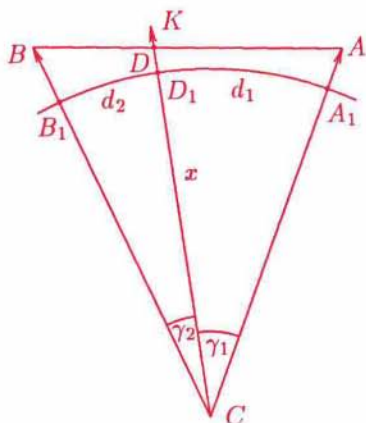
$$x = |CD|.$$

Če je namreč $x < |CK|$, potem s Kočne ne vidimo Kanina, če pa je $x > |CK|$, bi ga utegnili videti.

Točke A_1 , B_1 in D_1 naj bodo presečišča daljic AC , BC in DC s krožnico K . Potem poznamo dolžine lokov A_1D_1 in B_1D_1

$$d_1 = \widehat{A_1D_1} = 54 \text{ km}, \quad d_2 = \widehat{B_1D_1} = 28 \text{ km}.$$

Od tod dobimo kota



$$\gamma_1 = \angle ACD = \angle A_1CD_1, \gamma_2 = \angle BCD = \angle B_1CD_1,$$

ki ju izrazimo v radianih

$$\gamma_1 = \frac{d_1}{r}, \quad \gamma_2 = \frac{d_2}{r}, \quad (1)$$

pri čemer je r polmer zemlje.

Iskano dolžino x izračunajmo s pomočjo desne slike. Skozi A in skozi B narišimo pravokotnici na premico CD . Prva naj seče CD v točki A_2 , druga pa v točki B_2 . Nato dolžini daljic AA_2 in BB_2 izrazimo s stranicama $a = |BC|$, $b = |AC|$ in kotoma γ_1 , γ_2

$$|BB_2| = a \sin \gamma_1, \quad |AA_2| = b \sin \gamma_2.$$

Ploščina p trikotnika ABC je vsota ploščin trikotnikov BCD in ACD , torej velja

$$p = \frac{1}{2}|CD||BB_2| + \frac{1}{2}|CD||AA_2| = \frac{1}{2}x(a \sin \gamma_1 + b \sin \gamma_2).$$

Ploščino trikotnika ABC lahko izračunamo tudi s formulo

$$p = \frac{1}{2}ab \sin \gamma,$$

kjer je $\gamma = \gamma_1 + \gamma_2$. Zato je

$$x(a \sin \gamma_1 + b \sin \gamma_2) = ab \sin \gamma,$$

od koder sledi

$$x = \frac{ab \sin \gamma}{a \sin \gamma_1 + b \sin \gamma_2}. \quad (2)$$

V konkretnem primeru računajmo v kilometrih, vzemimo $r = 6370$ in upoštevajmo nadmorski višini Kočne in Kanina ter postavimo fotografski aparat 1 meter nad vrh Kočne: $v_1 = 2.541$ in $v_2 = 2.587$. Seveda je potem

$$a = r + v_1 = 6372.541, \quad b = r + v_2 = 6372.587.$$

Uporabimo (1) in s formulo (2) navsezadnje izračunamo

$$x = 6372.452 < 6372.568 = |CK|.$$

Kanjavec je torej kar 116m previsok za nemoten pogled s Kočne na Kanin.

Je naše sklepanje neoporečno, ali nam jo realnost lahko še kako zagode in se bo morda na Kočno treba vzpeti?

Boris Lavrič

33. MEDNARODNA MATEMATIČNA OLIMPIADA V MOSKVI

Mednarodna matematična olimpiada je bila organizirana v Moskvi. Udeležilo se je 65 držav. Slovenija ni bila povabljen. Ruska federacija, ki je po razpadu Sovjetske zveze prevzela organizacijo matematične olimpiade, se je sklicevala na dejstvo, da pravno nasledstvo Jugoslavije še ni rešeno, zato se Slovenija obravnava kot država, ki se hoče na novo vključiti. Pravilnik pa določa, da se iz take države prvo leto povabi samo opazovalca. Tekmovalci lahko sicer sodelujejo že prvo leto, vendar tekmujejo izven konkurence in na lastne stroške. Ker sem na 32. matematični olimpiadi na Švedskem osvojil bronasto kolajno, smo poskušali najti način, da bi se lahko udeležil tekmovanja. Ugotovili smo, da lahko sodelujem kot gost kake druge države, ki nima kompletne ekipe. Švicarski ekipi smo predlagali, da me vzamejo medse, kar so z navdušenjem sprejeli. Dan pred odhodom švicarske ekipe v Moskvo sem se tako odpeljal v Bern.

V ponedeljek, 13. julija smo se tekmovalci zbrali v hotelu Izmailovo. Naslednji dan smo se odpeljali na ogled Moskve. Med drugim smo si ogledali tudi Rdeči trg z znamenitimi palačami preteklih in sedanje dobe. Popoldne je bila otvoritev tekmovanja. Med pozdravnimi govori so nam predstavili svojo kulturo. Za razvedrilo so nam pokazali tudi nekaj cirkuških točk.

V sredo je bil prvi dan tekmovanja. Organizacija je bila ob sprejemu komaj še sprejemljiva, ob tekmovanju pa je praktično odpovedala. Do Univerze v Moskvi, kjer je bilo tekmovanje, smo prišli prepozno, vendar smo vseeno morali čakati skoraj dve uri na začetek tekmovanja. Dodatni zapleti so bili, ker sem hotel naloge v angleščini, dobil sem jih pa v nemščini. Vendar sem naloge dobil še pravočasno.

Naslednji dan, ko je bil drugi del tekmovanja, ni bilo bistveno drugače. Bile so podobne jezikovne težave, naloge so mi prinesli nekoliko prepozno, vendar sem lahko tudi toliko pozneje oddal rešitve.

V ponedeljek dopoldne je bila zaključna slovesnost in podelitev nagrad. Za las (za eno točko) sem zgrešil bronasto kolajno. Kljub temu sem bil najboljši tekmovalec v ekipi (se ve, kateri). Po zaključni slovesnosti smo si še enkrat ogledali muzej, zvečer pa so priredili skupno večerjo za vse udeležence. Izmenjavali smo si darila in se poslavljali.

V prostem času in na izletih smo se udeleženci tekmovanja spoznavali in družili med seboj. Druženje z vrstniki istih interesov je vedno zelo prijetno, še posebej, če so ti doma z različnih koncev sveta. Čeprav so se organizacijske nerodnosti vrstile druga za drugo, niso mogle pokvariti vzdušja ob olimpiadi.

Za tiste, ki bi se radi preizkusili v reševanju, je tu še naloga, ki se mi je zdela sorazmerno lahka:

Naj bo $\mathbb{R}$ množica vseh realnih števil. Poišči vse funkcije $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, za katere velja:

$$f(x^2 + f(y)) = y + f^2(x) \quad \forall x, y \in \mathbb{R}$$

$$f(x)^2$$

Tomaž Cedilnik

KRIŽANKA OB STOLETNICI SMRTI SLOVENSKEGA FIZIKA – Rešitev s str. 224



POSPEŠKI MOTORNIH KOLES

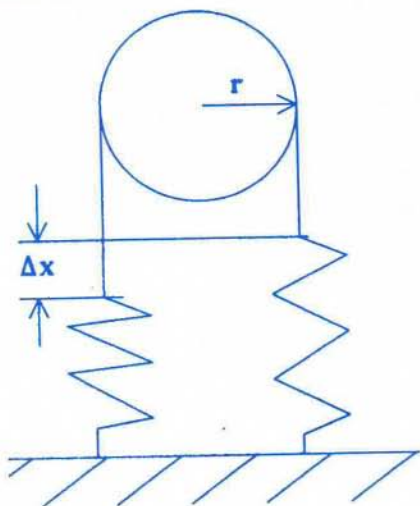
Motorna kolesa so dosti lažja od avtomobilov, poganjajo pa jih enako ali celo bolj zmogljivi motorji, zato imajo kar nekajkrat večje pospeške. Pospešek pri avtomobilih ali motornih kolesih po navadi podamo z najkrajšim časom, ki ga na začetku mirujoče vozilo potrebuje, da doseže hitrost 100 km/h.

Moč motorja je odvisna od števila vrtljajev na časovno enoto, zato se med pospeševanjem spreminja. Oglejmo si, kako merimo moči motorjev v odvisnosti od njihove frekvence. Izmerimo jo lahko na motorni gredi ali na pogonskem, to je zadnjem kolesu. Zaradi izgub v menjalniku in na pogonski verigi ali kardanu je lahko moč na kolesu tudi do 10% manjša kot na motorni gredi.

Za moč velja enačba:

$$P = M\omega, \quad (1)$$

kjer je M navor motorja na obremenjeni gredi, ω pa kotna hitrost gredi. Kotna hitrost vrtenja je tista fizikalna količina, ki jo lahko najbolj natančno merimo.



Slika 1

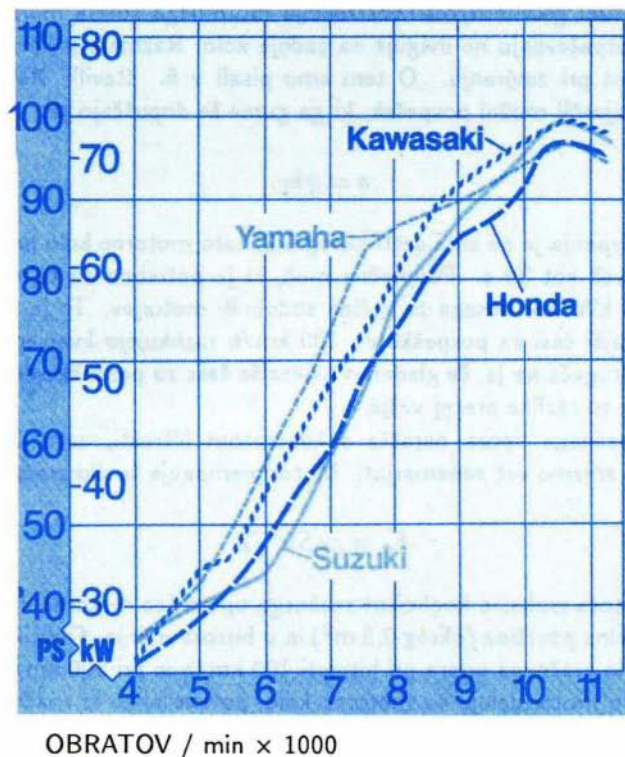
Ostane nam torej le še meritev navora, kar naredimo s Pronyjevo zavoro (slika 1). Ta je zgrajena iz valja (s polmerom r), ki ga objamemo s trakom. Silo trenja F_t med trakom in valjem določimo iz relativnega raztezka dveh vzmeti, pritrjenih na vsako stran traku. Navor osi na trak je torej uravnovešen z navorom sile trenja na znani ročici r . Tako dobljeni navor pomnožimo še s kotno hitrostjo, ki jo moramo posebej izmeriti, in enačba (1) dobi končno obliko:

$$P = M\omega = F_t r \omega = k \Delta x r \omega. \quad (2)$$

Tu je k koeficient vzmeti, Δx pa njun relativni raztezek. Pri merjenju velikih moči je sila trenja velika, zato moramo poskrbeti za zadostno odvajanje toplote, ki se pri tem sprošča. Navor

tako izmerimo pri različnih frekvencah motorja, da ugotovimo, kako se njegova moč spreminja s kotno hitrostjo.

MOČ



Slika 2

Na diagramu (slika 2) je prikazan rezultat neke take meritve. Vidimo, da se moč motorja spreminja približno linearno s številom vrtljajev, zato ocenimo povprečno moč motorja $\bar{P}$ med pospeševanjem motornega kolesa na polovico njegove največje moči P . Po času t motorno kolo doseže hitrost v in opravljeno delo motorja se naloži v kinetično energijo motornega kolesa:

$$\bar{P}t = \frac{1}{2}Pt = \frac{1}{2}mv^2. \quad (3)$$

Iz te enačbe sledi, da bi motorno kolo z maso 300 kg in največjo močjo motorja 100 kW pospeševalo do hitrosti 100 km/h manj kot 2,5 s. Pri tem smo zanemarili zračni upor in energijo, ki se je naložila v vrtilno energijo koles.

Tako velikih pospeškov guma na pogonskem kolesu ne prenese, saj bi zdrsnila in tudi geometrijska konstrukcija motornega kolesa mora biti taka, da se pri pospeševanju ne dviguje na zadnje kolo. Razmere pri pospeševanju so enake kot pri zaviranju. O tem smo pisali v 6. številki XVIII. letnika Preseka. Največji možni pospešek, ki ga gume še dopuščajo je:

$$a = gk_1. \quad (4)$$

Koeficient lepenja je na suhi cesti okrog 0,9, zato motorno kolo pospešuje do 100 km/h več kot 30 s. Povprečna moč, ki je potrebna za take pospeške, je okrog 35 kW, kar dosega že večina sodobnih motorjev. To je tudi razlog, da se najkrajši časi za pospeške do 100 km/h razlikujejo kvečjemu za kako sekundo. Drugače pa je, če gledamo najkrajše čase za pospeške do 200 km/h ali več, kjer so razlike precej večje.

Sila zračnega upora narašča s kvadratom hitrosti, zato je pri višjih hitrostih ne smemo več zanemarjati. Motor premaguje še silo zračnega upora:

$$F_c = \rho c S v^2 / 2. \quad (5)$$

Tu je ρ gostota zraka, c koeficient zračnega upora (za motorna kolesa okrog 0,7), S je čelna površina (okrog $0,5 \text{ m}^2$) in v hitrost vožnje. Ocenimo velikosti sil motorja in zračnega upora pri hitrosti 100 km/h in pri 200 km/h. Če je F sila, s katero motor deluje na motorno kolo, potem lahko iz enačbe:

$$P = Fv \quad (6)$$

izračunamo, da pri hitrosti 100 km/h motor z močjo 100 kW deluje s silo 3600 N. Silo zračnega upora, ki je pri tej hitrosti manj kot 200 N, smo v gornjih ocenah upravičeno zanemarili. Pri hitrosti 200 km/h se sila motorja zmanjša na polovico, sila zračnega upora pa postane štirikrat večja. To pomeni, da se porabi skoraj polovica moči motorja za premagovanje zračnega upora. Pri tem zmogljivosti gum niso več pomembne. Pri dirkah, kjer motorna kolesa dosežejo velike hitrosti, je premoč močnih motorjev očitna.

Sila kotalnega upora se s hitrostjo ne spreminja in po navadi ne presega 100 N, tako da jo lahko v vseh primerih zanemarimo.

Na koncu ocenimo še največje možne hitrosti motornih koles. Dosežejo jih, ko je sila zračnega upora enaka sili motorja. Združimo enačbi (5) in (6):

$$P = F_v = \frac{1}{2} \rho C S v^3. \quad (7)$$

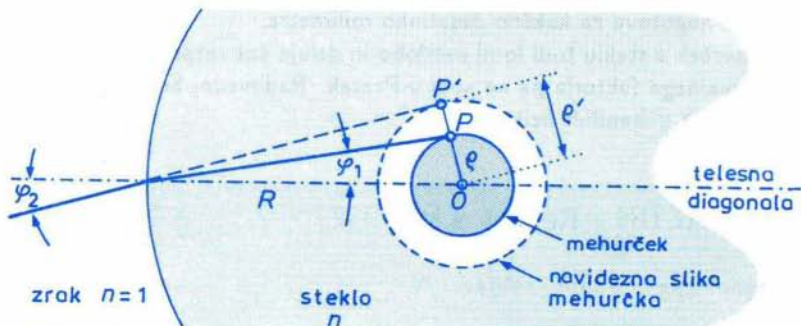
Iz enačbe (7) razberemo, da moč, potrebna za doseganje največje možne hitrosti, narašča s tretjo potenco le-te. Za prej opisano motorno kolo dobimo največjo hitrost okoli 270 km/h, pri dirkalnikih pa je zaradi močnejših motorjev in boljših aerodinamičnih lastnosti največja hitrost okoli 300 km/h.

Za velike zmogljivosti motornih koles je najpomembnejša moč motorjev, ki jih poganjajo. Pri nizkih hitrostih vpliva na pospešek še kvaliteta gum in geometrijska konstrukcija, za največjo možno hitrost, ki jo motorno kolo lahko doseže, pa so ob moči motorja najpomembnejše njegove aerodinamične lastnosti.

Mitja Slavinec

LOM SVETLOBE ZA OKRAS – Rešitev s str. 256

V nalogi smo v četrti letošnji številki Preseka od bralcev terjali račun lomnega količnika stekla, ki sestavlja skulpturo v obliki krogle, prisekane s kocko. Kaže, da je bila naloga pretežka, saj na zastavljeno vprašanje nismo prejeli nobenega odgovora.



Na sliki je prerez skulpture vzdolž telesne diagonale. Mehurček s premerom 8,0 mm in obla, ki razmejuje steklo in zrak, imata skupno središče. Žarki, ki bi potovali iz tega središča, se na meji ne bi nič lomili. Središče se

REŠITVE NALOG

torej preslika samo vase. Poglejmo, kako se lomi Žarek iz točke P na robu mehurčka in potuje proti presečišču telesne diagonale in oble. Vpadni kot smo označili s φ_1 , lomeči pa s φ_2 . Zanju velja lomni zakon

$$\frac{\sin \varphi_2}{\sin \varphi_1} = n.$$

Kot φ_2 je večji od kota φ_1 , zato je slika P' bolj oddaljena od središča kot točka P. Radi verjamemo, da se podaljški vseh drugih žarkov tudi zberejo v P' . Slika mehurčka je torej večja od originala. S slike razberemo, da velja še:

$$\frac{\rho}{R} = \sin \varphi_1$$

in

$$\frac{\rho'}{R} = \sin \varphi_2,$$

kjer je ρ polmer mehurčka, ρ' pa polmer njegove navidezne slike. Končno dobimo

$$\frac{\rho'}{\rho} = n.$$

S podatki o premeru mehurčka, ki ga izmerimo pri prehodu žarkov skozi ravno ploskev, in premeru slike 12,3 mm, ki jo vidimo pri opazovanju vzdolž telesne diagonale, dobimo $n = 1,54$. Relativno napako ocenimo na 2%, ker so meritve negotove za kakšno desetinko milimetra.

Mehurček v steklu tudi lomi svetlobo in deluje kot razpršilna leča. Račun pomanjševalnega faktorja pa ne sodi v Presek. Radovedni bralec ga bo našel v zahtevnejših učbenikih fizike.

Andrej Likar

SKRIT RAČUN - Rešitev s str. 231

Kriptogram ima eno samo rešitev:

$$21952 = 7 \cdot 56^2.$$

Poiščete jo lahko ali s premislekom ali s pomočjo računalnika.

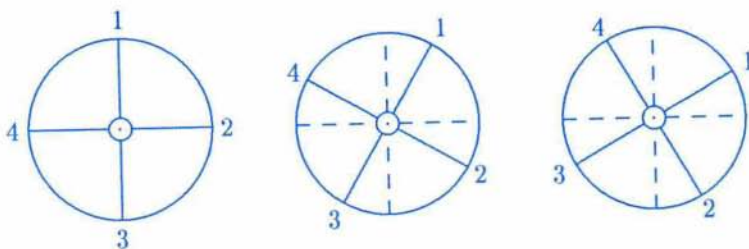
Marija Vencelj

POŠTNA KOČIJA

Če v kinu opazujemo vožnjo poštne kočije natančneje, se včasih kolo vrti v nasprotni smeri, kot bi pričakovali ali pa se sploh ne vrti. Ste si kdaj skušali pojasniti to posebnost?

Filmske kamere, s katerimi snemajo filme, naredijo vsako sekundo 24 posnetkov. Naše oko poveže posamezne prizore v kontinuirano dogajanje po "najkrajši vmesni poti". To slabost našega očesa pridno izkoriščajo mojstri risank. Za vsako sekundo risanke narišejo npr. 16 sličic, ki jih potem posnamejo na filmski trak. Ko se filmski trak zavrti, junaki risank oživijo.

In zdaj k našemu kolesu. Dogovorimo se, da bomo vrtenje kolesa opazovali v sistemu, ki se pelje skupaj s kočijo. V našem sistemu bo kočija mirovala, prav tako tudi os kolesa.

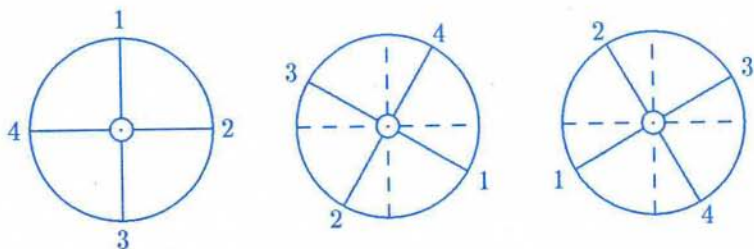


Slika 1. Prvi trije posnetki kolesa, če se kolo vrti s kotno hitrostjo $\omega = 12,57 \text{ rd/s}$.

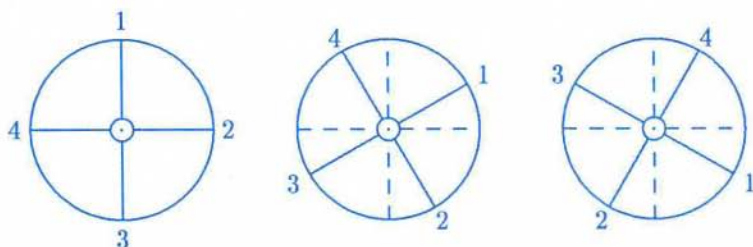
Izberimo si kolo s štirimi prečkami, ki jih po vrsti označimo z 1, 2, 3, 4 (slika 1). Prvi posnetek naj kamera naredi ob času $t = 0$, drugega ob času $t = \frac{1}{24} \text{ s}$, tretjega ob času $t = \frac{2}{24} \text{ s}$, Če se kolo zavrti v $\frac{1}{24} \text{ s}$ za kot $\alpha = 30^\circ$ v smeri urinih kazalcev, nam slika 1 kaže lego prečk na prvih treh posnetkih. Iz enačbe

$$\omega = \frac{2\pi}{t_0} \quad (1)$$

lahko hitro izračunamo kotno hitrost ω . V gornji enačbi pomeni t_0 obhodni čas, to je čas, v katerem kolo naredi en poln obrat. V našem primeru je obhodni čas $t_0 = 0,5 \text{ s}$, kotna hitrost pa $\omega = 12,57 \text{ rd/s}$. Pri opazovanju posnetka se nam bo zdelo, da se kolo vrti s to kotno hitrostjo v smeri gibanja urinih kazalcev. Zaenkrat torej nič nenavadnega.



Slika 2. Prvi trije posnetki kolesa, če se kolo vrti s kotno hitrostjo $\omega = 50,27 \text{ rd/s}$.



Slika 3. Prvi trije posnetki kolesa, če se kolo vrti s kotno hitrostjo $\omega = 25,13 \text{ rd/s}$.

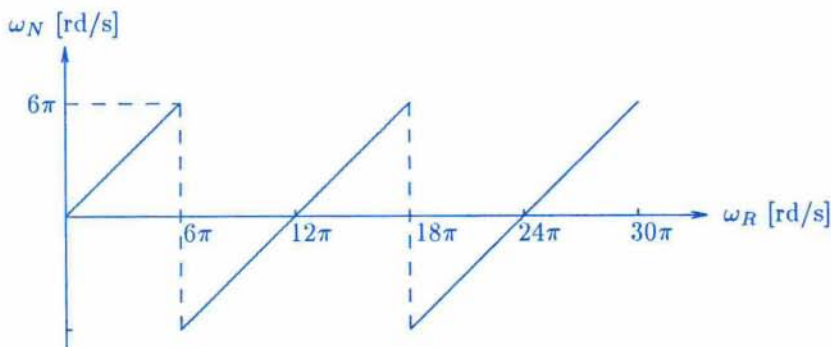
Kaj pa, če se kolo zavrti v $\frac{1}{24}$ s za kot $\alpha = 120^\circ$? V tem primeru nam lego prečk na prvih treh posnetkih kaže slika 2. Resnično kotno hitrost kolesa tudi v tem primeru v hipu izračunamo. Obhodni čas je $t_0 = \frac{3}{24}$ s, kotna hitrost pa $\omega = 50,27 \text{ rd/s}$. Ker pa ne moremo ločiti med sabo posameznih prečk, ki so med seboj enake, bomo imeli o vrtenju zmotno predstavo: "pomotoma" bomo zamenjali drugi posnetek na sliki 2 z drugim posnetkom na sliki 1, tretji posnetek na sliki 2 pa s tretjim posnetkom na sliki 1. Še vedno se nam bo torej zdelo, da se kolo vrti s kotno hitrostjo $\omega = 12,57 \text{ rd/s}$! Enako kotno hitrost bomo zaznali tudi v vseh primerih, v katerih se bo kolo zavrtelo v $\frac{1}{24}$ s za kot $30^\circ + n \cdot 90^\circ$ ($n = 1, 2, 3, \dots$). Resnična kotna hitrost pa bo z naraščajočim n seveda naraščala.

Oglejmo si sedaj primer, ko se kolo zavrti v $\frac{1}{24}$ s za kot $\alpha = 60^\circ$. V tem primeru nam lego prečk na prvih treh posnetkih kaže slika 3. Resnična kotna hitrost, s katero se vrti kolo, je $\omega = 25,13 \text{ rd/s}$. Pri opazovanju posnetka bomo videli, da se je prečka 1 zavrtela s svojega začetnega položaja za 30° v nasprotni smeri gibanja urinih kazalcev. Enako velja za prečke 2, 3 in 4.

Podobno bomo dojeli tudi tretji posnetek na sliki 3. Skratka, zdelo se nam bo, da se kolo vrti v nasprotni smeri gibanja urinih kazalcev, in sicer s kotno hitrostjo $\omega = 12,57 \text{ rd/s}$. Ker smo že prej ugotovili, da ne opazimo razlike v kotni hitrosti, če prištejemo k izbranemu začetnemu kotu še kot $n \cdot 90^\circ$, lahko tudi tu povemo, da bomo v vseh primerih, v katerih se bo kolo v $\frac{1}{24}$ s zavrtelo za kot $60^\circ + n \cdot 90^\circ$, zaznali kotno hitrost $\omega = 12,57 \text{ rd/s}$ v nasprotni smeri gibanja urinih kazalcev.

In kje je tista meja, ko se nam smer vrtenja kolesa navidezno obrne? Če bi se kolo v $\frac{1}{24}$ s zavrtelo za kot $\alpha = 45^\circ$ (oziroma za kot $\alpha = 45^\circ + n \cdot 90^\circ$), bi se nam enkrat zdelo, da se kolo vrti v smeri gibanja urinih kazalcev, drugič pa spet, da se vrti v nasprotni smeri. V našem primeru je torej meja pri kotni hitrosti $\omega = 18,85 \text{ rd/s}$ (oziroma $\omega = 18,85 \text{ rd/s} + n \cdot 38,70 \text{ rd/s}$).

Za konec narišimo še graf navidezne kotne hitrosti ω_N v odvisnosti od resnične kotne hitrosti ω_R .



Slika 4. Graf navidezne kotne hitrosti ω_N v odvisnosti od resnične kotne hitrosti ω_R .

Poskušajte ugotoviti, kaj pomenijo točke, kjer daljice v našem grafu sekajo vodoravno os! Kako bi povezali kotno hitrost kolesa s hitrostjo, s katero se pelje avto? Kako se računi spremenijo v primeru, ko je število prečk na kolesu drugačno? Pa prijetno zabavo!

Božidar Casar

STO DELITELJEV

Poišči najmanjše naravno število, ki ima natanko 100 deliteljev.

Marija Vencelj

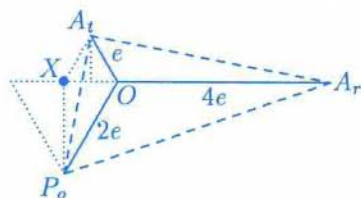
36. MATEMATIČNO TEKMOVANJE SREDNJEŠOLCEV SLOVENIJE – Rešitve s str. 238

Prvi letnik

1. Hitro ugotovimo, da ležijo v poljubnih treh zaporednih poljih ista tri števila. Tako je število 17 v prvem, četrtem, sedmem, desetem in trinajstem polju; število 20 pa v drugem, petem, osmem in enajstem. Ker je vsota vseh števil v tabeli enaka 217, leži na vseh preostalih mestih število 13.

2. Recimo, da števila niso enaka. Naj bo $a_0 > a_1$. Da bo veljala enakost $a_0^{a_1} = a_1^{a_2}$, mora biti $a_1 < a_2$. Potem pa po vrsti sklepamo $a_0 > a_1 \Rightarrow a_1 < a_2 \Rightarrow a_2 > a_3 \Rightarrow \dots \Rightarrow a_{1991} < a_{1992} \Rightarrow a_{1992} > a_0 \Rightarrow a_0 < a_1$ in zaidemo v protislovje.

3. Izhodiščno točko označimo z O , mušketirje pa z A_t , P_o in A_r . V vsakem trenutku je eden od mušketirjev (npr. Athos) oddaljen eno enoto od izhodiščne točke, drugi (Porthos) dve enoti in tretji (Aramis) štiri enote. Ker je trikotnik $\triangle P_o O X$ polovica enakostraničnega trikotnika, je $\overline{XP_o} = e\sqrt{3}$ in



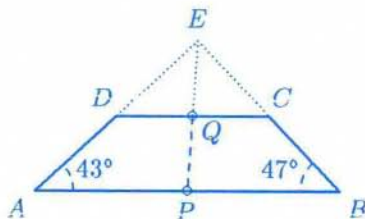
$\overline{XO} = e$. Sledi $\overline{P_o A_r} = \sqrt{(e\sqrt{3})^2 + (e + 4e)^2} = e\sqrt{28}$. Podobno dobimo

še $\overline{P_o A_t} = \sqrt{(e\sqrt{3} + \frac{1}{2}e\sqrt{3})^2 + (\frac{1}{2}e)^2} = e\sqrt{7}$ in $\overline{A_t A_r} =$

$= \sqrt{(\frac{1}{2}e\sqrt{3})^2 + (\frac{1}{2}e + 4e)^2} = e\sqrt{21}$. Od tod pa ni več težko videti

$$\overline{P_o A_r}^2 = \overline{P_o A_t}^2 + \overline{A_t A_r}^2.$$

4. Ker sta kota $\sphericalangle DAB$ in $\sphericalangle ABC$ komplementarna, se premici skozi A in D ter B in C sekata pod prvim kotom. Torej leži točka E na krogu s polmerom a in središčem P . Iz $\frac{\overline{DC}}{\overline{AB}} = \frac{1}{2}$ sledi $\frac{\overline{EQ}}{\overline{EP}} = \frac{1}{2}$. Izračunamo še $\overline{PQ} = \overline{EP} - \overline{EQ} = \frac{1}{2}a$.



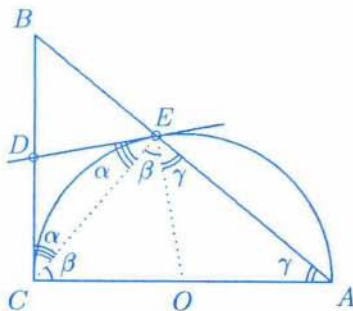
Drugi letnik

1. Ker dà četrta potenca od 5 različnega praštevila pri deljenju s 5 ostane 1, mora biti vsaj eno od teh praštevil enako 5, sicer bi bila vsota deljiva s 5. Ker 2 ne more biti v tej peterki, je 5 lahko le prvo ali drugo praštevilo v tej peterki. Preveriti je mogoče, da sta števili $3^4 + 5^4 + 7^4 + 11^4 + 13^4 = 46309$ in $5^4 + 7^4 + 11^4 + 13^4 + 17^4 = 129749$ res praštevili.

2. Naj bo $6n + 3 = u^2$ za neki $u \in \mathbb{N}$. Zaradi $3|u$ pišimo $u = 3v$, pa imamo $2n + 1 = 3v^2$ in v je lih: $v = 2k + 1$. Tako je $2n + 1 = 12k^2 + 12k + 3$ ali $n = 6k^2 + 6k + 1$. Če je torej $n = 6k^2 + 6k + 1$ ($k \in \mathbb{N}$), je število $6n + 3 = 9(2k + 1)^2$ popolni kvadrat.

3. Če sistem prepíšemo v obliki $(x + 1)(y + 1) = 20$, $(y + 1)(z + 1) = 12$ in $(z + 1)(x + 1) = 15$ ter označimo $a = x + 1$, $b = y + 1$ in $c = z + 1$, dobimo preprost sistem $ab = 20$, $bc = 12$ in $ca = 15$ z rešitvama $a_1 = 5$, $b_1 = 4$, $c_1 = 3$ in $a_2 = -5$, $b_2 = -4$, $c_2 = -3$. Dani sistem rešita dve trojki (x, y, z) : $(4, 3, 2)$ in $(-6, -5, -4)$.

4. Pomagamo si s sliko, na kateri označimo tri pare skladnih kotov v ustreznih enakokrakih trikotnikih AEO , ECO (v obeh sta po dve stranici polmera polkrožnice) in CED (enaka tangentna odseka DC in DE). Potem je $\sphericalangle BED = 180^\circ - (\alpha + \beta + \gamma)$ in v trikotniku ABC še $\sphericalangle B = 180^\circ - (\alpha + \beta + \gamma)$, trikotnik EBD je res enakokrak.



Tretji letnik

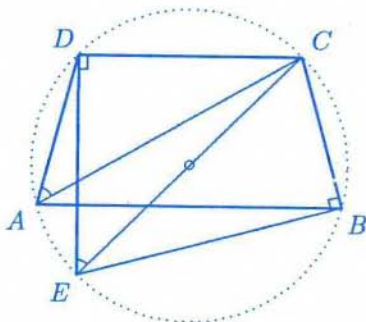
1. Prav hitro se prepričamo, da moramo vzeti vsoto $a_1a_2 + a_3a_4 + \dots + a_{2n-1}a_{2n}$. Vedno moramo namreč vzeti skupaj po dve največji števili. Če a_{2n-1} in a_{2n} ne bi vzeli skupaj, bi imeli $a_{2n}a_1 + a_{2n-1}a_k < a_{2n}a_{2n-1} + a_1a_k$, ki sledi iz $(a_{2n} - a_k)(a_{2n-1} - a_1) > 0$.

2. Prepíšimo sistem drugače: $(a-1)^3 + 2(a-1) = -2$, $(b-1)^3 + 2(b-1) = 2$.

Označimo $x = a - 1$ in $y = b - 1$ ter seštejmo enačbi: $x^3 + y^3 + 2(x + y) = 0$. Slednje zapišimo $(x + y)(x^2 - xy + y^2 + 2) = 0$, od koder preberemo $x + y = 0$, drugi faktor pa ima negativno diskriminanto, če ga gledamo kot kvadratno funkcijo $y = y(x)$ ali $x = x(y)$. Zato je $a + b = x + y + 2 = 2$.

3. Upoštevamo $\frac{x+k-1}{k} \geq \sqrt[k]{x}$ za $k = 1, 2, \dots, m$, zmnožimo te neenakosti med seboj in imamo rešitev.

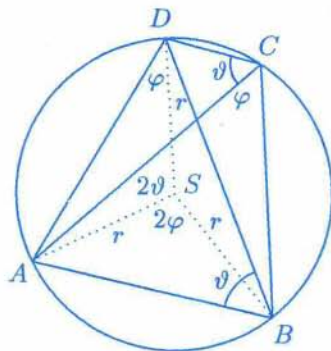
4. Enakokraki trapez je tetivni štirikotnik. Iz $\angle DAC = \frac{1}{4}\pi = \angle DEC$ vidimo, da ležijo A, E, C in D na isti krožnici. Premer te krožnice je EC , saj je $\angle EDC$ pravi. Ker leži tudi B na tej krožnici, je po Talesovem izreku kot $\angle EBC$ pravi.



Četrty letnik

1. Trditev očitno velja za $n = 2$. Recimo, da za neki $n \in \mathbb{N}$ velja $S_n = |a_1 - a_2| + |a_2 - a_3| + \dots + |a_{n-1} - a_n| + |a_n - a_1| = 2k$. Potem je $S_{n+1} = S_n + |a_n - a_{n+1}| + |a_{n+1} - a_1| - |a_n - a_1|$. Ker je S_n sodo, bo S_{n+1} sodo, če dokažemo, da je $|a_n - a_{n+1}| + |a_{n+1} - a_1| - |a_n - a_1|$ sodo. Prepričati se moramo, da za poljubna cela števila a, b, c izraz $|a - b| + |b - c| - |c - a|$ predstavlja sodo število, kar pa ni težko, saj moramo le preveriti 6 možnosti.

2. Najprej je $\angle ACD = \angle ABD = \vartheta$ in $\angle ACB = \angle ADB = \varphi$ (kota nad istim lokom) ter $\angle DSA = 2\vartheta$ in $\angle ASB = 2\varphi$ (središčna kota). Kosinusni izrek za trikotnik ABS da $AB^2 = r^2 + r^2 - 2 \cdot r \cdot r \cdot \cos(2\varphi) = 4r^2 \frac{1 - \cos(2\varphi)}{2}$ oziroma $AB = 2r \sin \varphi$. Analogno dobimo za trikotnik ASD : $AD = 2r \sin \vartheta$. Tako je $AB + AD = 2r(\sin \varphi + \sin \vartheta)$, zaradi pogoja v nalogi pa $BD = 2r$. Kot $\angle BCD = \varphi + \vartheta$ je torej obodni nad premerom in je pravi.



3. V prvi pogoj naloge vstavimo $x = 0$ in dobimo $\cos \alpha = 0$ ter $\alpha = \frac{\pi}{2}$. Prvi pogoj se tako prevede v $f(x) - f(-x) = -\sin x$. V drugem pogoju upoštevajmo $\cos(\pi + \beta) = -\cos \beta$: $f(x \cdot \cos \beta) + f(-x \cdot \cos \beta) = \cos(x + \beta)$. Vidimo, da $\beta \neq \frac{\pi}{2}$, saj bi sicer za vsak x veljalo $f(0) = -\frac{1}{2} \sin x$, zato lahko namesto x vstavimo $x/(\cos \beta)$ in dobimo $f(x) + f(-x) = \cos(x/(\cos \beta) + \beta)$.

Seštejmo in odštejmo obe spremenjeni enakosti, pa imamo

$f(x) = \frac{1}{2}(\cos(\frac{x}{\cos \beta} + \beta) - \sin x)$ in $f(-x) = \frac{1}{2}(\cos(\frac{x}{\cos \beta} + \beta) + \sin x)$. Ti dve enakosti morata veljati za vsak x . Vstavimo v prvo $x = -\beta \cos \beta$ in v drugo $x = \beta \cos \beta$, pa imamo $\frac{1}{2}(\cos(-\beta + \beta) + \sin(\beta \cos \beta)) = \frac{1}{2}(\cos(\beta + \beta) + \sin(\beta \cos \beta))$, od tod $\cos 0 = \cos 2\beta$ in $\beta = 0$.

Končno izrazimo še $f(x) = \frac{1}{2}(\cos x - \sin x)$.

4. Denimo, da to ni res. Naj obstajata najdaljši disjunktni poti, ena z začetkom v kraju A in koncem v B , druga z začetkom v C in koncem v D . Po predpostavki lahko pridemo iz kraja A v kraj C . Naj bo X zadnji kraj na poti iz A v C , ki še leži na najdaljši poti AB , Y pa prvi kraj, ki na poti iz A v C že leži na najdaljši poti CD . Označimo z $a = d(A, X)$, $b = d(X, B)$, $x = d(X, Y)$, $c = d(C, Y)$ in $d = d(Y, D)$ dolžine poti med posameznimi kraji. Velja $a + b = c + d = M$, če je M dolžina najdaljše poti. Veljati bi moralo tudi $a + c + x \leq M$ in $b + d + x \leq M$, vendar smo v protislovju, ko neenačbi seštejemo.

Darjo Felda

ŠE ENA IZ ŠTEVILSKIH SESTAVOV – Rešitev s str. 199

Naj r pomeni razliko med bazo in številko števila. Potem je: $(1(1+r) + 1)(4(4+r) + 4) = (8(8+r) + 8) - (2(2+r) + 2)$. Od tod dobimo $2r^2 + 11r - 13 = 0$ in $r_1 = 1$, $r_2 = -\frac{13}{2}$.

$r_2 = -\frac{13}{2}$ ni rešitev, ker tedaj števila a , b , c in d niso cela. Od tod sledi $a = 2$, $b = 3$, $c = 5$ in $d = 9$.

Borut Čampelj

ASTRONOM IZ SLOVENSКИH GORIC

Med slovenskimi astronomi, izjemnimi po veličini duha in dela posebej izstopa humanist, matematik in astronom, pravnik, jezikoslovec in pedagog *Bernard Perger*. Štejejo ga med najpomembnejše in najuglednejše profesorje dunajske univerze.

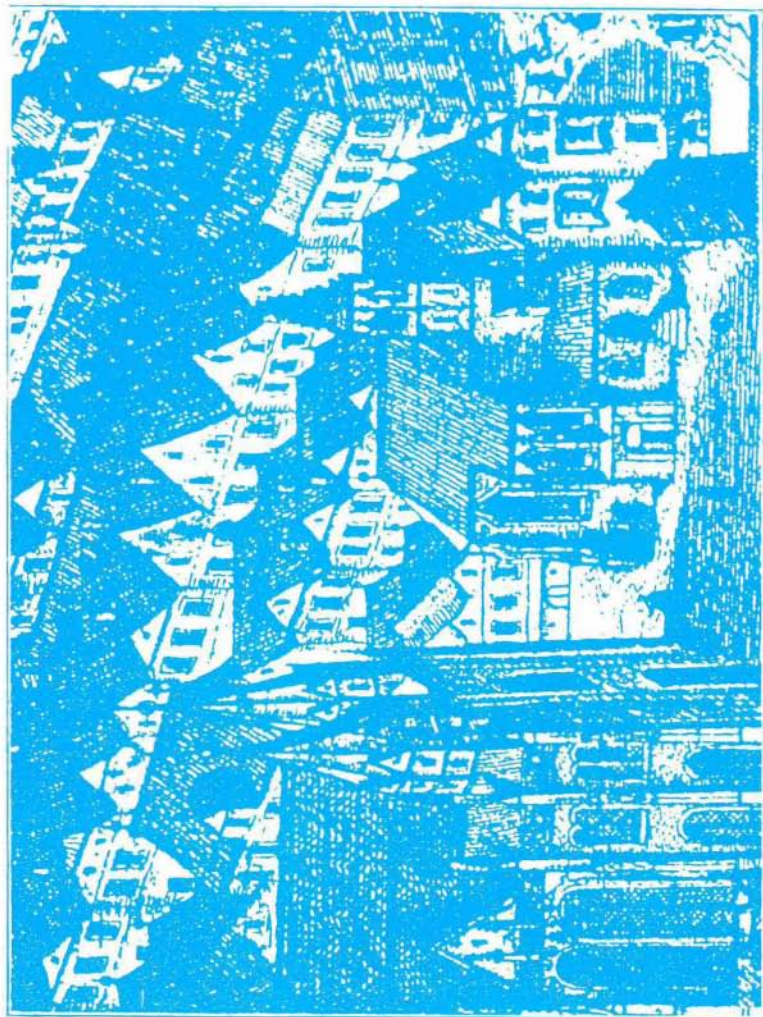
Bernard Perger je bil najbrž kmečkega stanu. Rojen je bil okoli leta 1440 v Ščavnici v Slovenskih Goricah, umrl pa je verjetno leta 1502. Vemo, da se je 1459 vpisal na dunajsko univerzo in 1464 doktoriral na filozofski (artistični) fakulteti, kjer je nato predaval geometrijo, optiko, matematiko in astronomijo. Leta 1465 se je vpisal na medicinsko fakulteto, čez 10 let pa še na pravno. Bil je dekan filozofske fakultete in rektor dunajske univerze. Po letu 1475 je prevzel predavanja na Visoki šoli sv. Štefana (bil je tudi njen rektor) in se vedno bolj usmerjal v jezikoslovje. Predaval je latinsko slovnico, klasike in tudi pravo. Od 1490 do 1501 je bil univerzni superintendant, to je najvišji predstavnik (namestnik) deželnega vladarja (sprva cesarja Friderika III. in pozneje njegovega naslednika Maksimilijana I.) v tričlanskem vodstvu univerze. Skrbel je za stike med univerzo in vlado in je v določenem smislu deloval tudi kot diplomat. Perger je imel vsa vladna pooblastila, da je smel izdajati ukrepe za izboljšanje pouka in izvajanje reforme študijskega načrta.

Tako kot je vladar zaupal diplomatske naloge Pergerju, je on cesarju posredoval svoje almanahе (koledarje), v katerih so se po takratnih navadah prepletali astronomski podatki z astrološkimi napovedmi in zdravniškimi nasveti. (Take, vendar že tiskane almanahе, sta pozneje izdajala tudi dva slovenska astronoma: Andrej Perlah in Jakob Strauss; glej *Presek* 17, 214, 239 in 336.)

Bernard Perger si je zelo prizadeval za izboljšanje pouka latinščine. Ta pouk je bil tedaj zastarel. Humaniste, ki so poučevali na univerzi, in njihove študente je zanimala predvsem praktična uporaba znanja latinščine. Pri svojih pedagoških reformah za izboljšanje pouka je Perger pogrešal primeren učbenik latinske slovnice. Zato se je odločil, da takega napiše sam. Po nekem italijanskem učbeniku latinščine je priredil svojo v nemškem jeziku tolmačeno latinsko slovnico (*Grammatica nova*). To je bila moderno napisana slovnica, ki je glede načina obravnavanja snovi prekosila italijanski učbenik. Bila je prava vojna napoved zastarelemu in okostenelemu pouku latinščine, saj se je odlikovala po jasnosti, preglednosti in razumnosti podajanja snovi. Pomembnost Pergerjevih reformnih metod za izboljšanje pouka latinščine dokazuje izredno veliko število izdaj njegove slovnice. Doživela jih je vsaj 30 v šestih nemško govorečih državah, večino še za njegovega življenja.

Kakor drugi odlični znanstveniki tedanjega časa, se je tudi Perger ukvarjal z različnimi znanostmi. Zato ga uvrščamo tudi med astronome, čeprav ni zapustil tiskanih del. V rokopisu pa se je ohranil njegov almanah z astronomskimi podatki za leta od 1482 do 1500.

Marijan Prosén



Slika 1. Za stolnico sv. Štefana na Dunaju je vidna stavba istoimenske visoke šole, kjer je poučeval Perger.

