

P R E S E K

A

ISSN 0351-6652

DRUŠTVO MATEMATIKOV, FIZIKOV IN ASTRONOMOV SLOVENIJE, 20(1992-93)

VSEBINA

ASTRONOMIJA	Severna krona (Marian Prosén).....	210-213
MATEMATIKA	Števila, ki so vsote dveh kubov (Ivan Vidav)	226-231
	Ornamenti na ravnini (Milena Strnad)	244-249
FIZIKA	Smučanje pri veleslalomu (Janez Strnad)	232-236
	Lom svetlobe za okras (Andrej Likar)	256, III
TEKMOVANJA	Program republiškega tekmovanja srednješolcev iz fizike (Ciril Dominko, Bojan Golli)	197-199
	Naloge s 30. srednješolskega tekmovanja iz fizike (Ciril Dominko, Bojan Golli)	205-209
	18. izbirno tekmovanje srednješolcev iz matematike - rešitve s str. 191 (Matjaž Željko)	214-217
	Popravek urnika tekmovanj iz matematike v letu 1993 (Darjo Felda)	217
	36. matematično tekmovanje srednješolcev Slovenije (Darjo Felda)	238-241
	27. občinsko tekmovanje osnovnošolcev iz matematike - rešitve s str. 166 (Aleksander Potočnik)	250-252
	1. državno tekmovanje osnovnošolcev iz matematike (Aleksander Potočnik)	253-255
NALOGE	Jetniki in kape (Neža Mramor)	193
	Še ena iz številskih sestavov (Borut Čampelj)	199
	Skrit račun (Presek)	231
	Naloge za mlajše bralce (Borut Zalar)	249
	Naloga za sistematične bralce (Borut Zalar)	256
REŠITVE NALOG	Potovanje Jacka Londona - s str. 145 (Viktor Velkavrh)	196
	Sprehajanje po krožnici - s str. 71 (Marko Lovrečič Saražin)	202-204
	O zlati verigi - s str. 136 (Borut Zalar)	213
	Izračunaj tetivo - s str. 129 (Marija Vencelj)	236
	Križanka Ob stoletnici slovenskega matematika - s str. 160 (Marko Bokalič)	243
	Naloga iz številskih sestavov - s str. 192 (Borut Čampelj) ...	255
NOVICE	Stefanova stoletnica (Janez Strnad)	194-196
	Profesor Ivan Vidav - nagrajenec Republike Slovenije za znanstveno delo (Marija Vencelj)	200-202
	Ob 350. letnici rojstva Isaaca Newtona (Roman Drnovšek)	218-222
	Vabilo na marčevski mesečni sestanek Astronomskega društva Javornik (Mirjam Galičič)	241-242
	Obvestilo Maranda	243
RAZVEDRILO	Križanka Ob stoletnici smrti slovenskega fizika (Marko Bokalič)	224-225
	Ni časa za šolo (Neža Mramor)	242
	Utrinek (Janez Zupan)	255
NOVE KNJIGE	Svatensson I., Miselni vzorci in spomin (Izidor Hafner)	217
	Prosén M., Mala astronomija (Bogdan Kilar)	222-223
	Sitar S., Jožef Stefan (Tomaž Pisanski)	223
	Grasselli J., Diofantski približki (Boris Lavrič)	237
NA OVITKU	Zaobljena steklena kocka z mehurčkom zraka na sredi (foto Andrej Likar). Glej tudi članek na strani 256.	I
	Jožef Stefan na znamki (Janez Strnad)	IV
	Potočnik na znamki (Marian Prosén)	IV

JETNIKI IN KAPE

Pred mnogimi leti se je neki kitajski mandarin odločil, da pomilosti nekaj svojih jetnikov. Poklical je trojico jetnikov in jim ukazal, naj se postavijo drug za drugim v vrsto. Potem jim je pokazal pet kap, dve beli in tri črne. Vsakemu jetniku so na glavo nataknili kapo, vendar nobeden ni videl barve svoje kape. Pač pa je tretji v vrsti videl kapi prvega in drugega, drugi je videl kapo prvega, prvi pa ni videl nobene kape. Mandarin je obljubil, da bo pomilostil vsakega, ki ugaane barvo svoje kape. Drugi in tretji jetnik sta molčala in očitno nista vedela, kakšni sta barvi njunih kap. Prvi jetnik je malo razmišljal, potem pa je mandarinu povedal barvo svoje kape. Kakšne barve je bila njegova kapa?

Neža Mramor

(Prirejeno iz knjige Miodraga Petkovića "Zanimljivi matematički problemi".)



PRESEK

list za mlade matematike, fizike, astronome in računalnikarje
20. letnik, šolsko leto 1992/93, številka 4, strani 193 – 256

UREDNIŠKI ODBOR: Vladimir Batagelj, Tanja Bečan (jezikovni pregled), Dušica Boben (oblikovanje teksta), Mirko Dobovišek (glavni urednik), Vilko Domajnko, Roman Drnovšek (novice), Darjo Felda (tekmovanja), Bojan Golli, Marjan Hribar, Boštjan Jaklič (tehnični urednik), Martin Juvan (računalništvo), Sandi Klavžar, Edvard Kramar, Boris Lavrič, Andrej Likar (fizika), Matija Lokar, Franci Oblak, Peter Petek, Pavla Ranzinger (astronomija), Marjan Smerke (svetovalec za fotografijo), Miha Štalec, Jana Vrabec (nove knjige), Marija Vencelj (matematika, odgovorna urednica).

Dopisi in naročnine: Društvo matematikov, fizikov in astronomov Slovenije - Podružnica Ljubljana - Komisija za tisk, Presek, Jadranska c. 19, 61111 Ljubljana, p.p. 64, tel. (061) 265-061/53, št. ŽR 50101-678-47233. Naročnina za šolsko leto 1992/93 po 1.11.1992 je **800 SIT**, za skupinska naročila šol **640 SIT**, posamezna številka **160 SIT**, za tujino 12000 LIT, devizna nakazila SKB banka d.d. Ljubljana, val-27621- 42961/9, Ajdovščina 4, Ljubljana.

List sofinancirajo MZT, MŠŠ in MK
Ofset tisk DELO - Tiskarna, Ljubljana

Po mnenju MZT št. 415-52/92 z dne 5.2.1992 šteje revija med proizvode iz 13. točke tarifne št. 3 zakona o prometnem davku, za katere se plačuje 5% prometni davek.

Tekst je oblikovan z računalnikom SLIM 286, ALTECH, Ljubljana
© 1992 Društvo matematikov, fizikov in astronomov Slovenije – 1141

STEFANOVA STOLETNICA

7. januarja je minilo sto let od smrti slovenskega fizika Jožefa Stefana, ki je odkril *zakon o sevanju*. To je edini fizikalni zakon, ki nosi ime po kakem Slovcu. Pot do njega je bila zavita in malo je Stefanu pomagala tudi sreča. Poskusimo na kratko opisati glavne korake na tej poti.

Stefana je zelo zanimala termodinamika, ki se je začela razvijati z odkritjem energijskega zakona sredi prejšnjega stoletja. Pozneje se je razvila *kinetična teorija plinov*, ki je lastnosti plinov pojasnila z zamislijo, da jih sestavlja množica drobnih molekul. Te se hitro gibljejo in trkajo med seboj in s steno posode. Med drugimi pojavi so raziskali v njenem okviru tudi prevajanje toplote v plinu. Napovedi o tem pa ni bilo mogoče preskusiti. Dotlej še nikomur ni uspelo, da bi prevajanje toplote v plinu zajel z merjenjem.

Toplota prehaja s telesa na telo z nižjo temperaturo pri *prevajanju*, *konvekciji* in *sevanju*. Pri prevajanju prehaja skozi mirujočo snov, na primer skozi stene hladilnika. Pri konvekciji jo prenaša tok plina ali kapljevine, na primer pri sušenju las s sušilnikom. Sevanje lahko potuje tudi skozi prazen prostor, na primer s Sonca na Zemljo. Prevajanje toplote v plinu je mogoče raziskati, če izločimo konvekcijo in sevanje. Stefan je izmeril prevajanje toplote v tanki plasti zraka ali drugega plina med valjastima bakrenima posodicama (slika 1). Plast je bila tako tanka, da se v njej ni mogla razviti konvekcija, temperaturi obeh posodic pa sta se tako malo razlikovali, da je bilo sevanje zanemarljivo. Svoje ugotovitve je Stefan objavil v letih 1872 in 1875. Z njimi je podprl napovedi kinetične teorije plinov, med njimi tudi napoved, da prevajanje v plinu ni odvisno od tlaka.

Sevanje so tedaj opisovali z zakonom, ki sta ga leta 1817 postavila Francoza Pierre Louis Dulong in Alexis Thérèse Petit. Segreto dokaj veliko bučko živosrebrnega termometra sta zaprla v večjo hlajeno kroglasto posodo in opazovala, kako hitro se je ohlajala. Merjenje sta ponavljala pri vse nižjem tlaku in se nadejala, da sta izločila prevajanje in konvekcijo, ko je tlak padel na nekaj tisočin navadnega zračnega tlaka. Stefan je na osnovi svojih merjenj vedel, da sta se sicer izognila konvekciji, ne pa prevajanju.

Na pomanjkljivost Dulong-Petitovega zakona je Stefana opozorila ne navadno nizka temperatura sončnega površja, ki jo je napovedal zakon. Poskušal je najti boljši zakon. Postavil je domnevo, da je gostota energijskega toka, to je energija, ki jo izseva kvadratni meter površja segretega telesa v sekundi, sorazmerna s potenco absolutne temperature. To temperaturo z ničlo pri $-273\text{ }^{\circ}\text{C}$ so začeli uporabljati v kinetični teoriji plinov in je

Dulong in Petit še nista poznala. Zakaj je Stefan tako domneval, ni povedal.

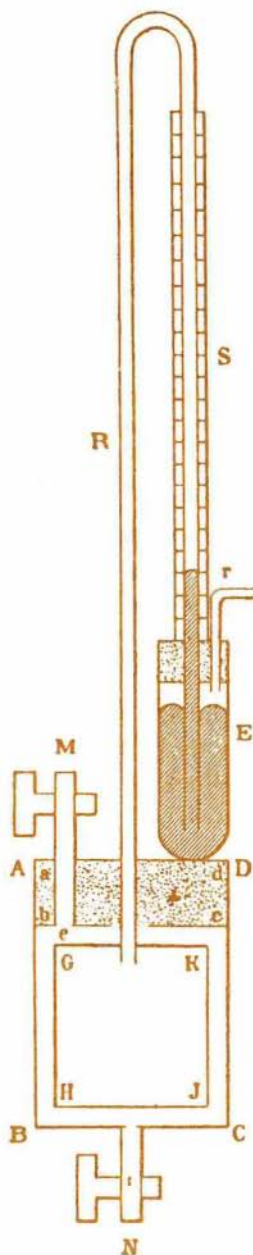
Irskega fizika in kemika Johna Tyndalla je zanimala infrardeča svetloba, to je nevidna svetloba z večjo valovno dolžino, kot jo ima rdeča svetloba. S termobaterijo je meril gostoto energijskega toka te svetlobe, ki ga je oddajala platinska žička, ko jo je segrel z električnim tokom. Toda niso ga zanimale podrobnosti in ni meril temperature, navedel je samo barvo, v kateri je žarela žička. Med drugim je ugotovil, da je gostota energijskega toka pri belem žaru žičke 11,7-krat večja kot pri temnem rdečem žaru.

Pisec uspešnega učbenika termodinamike Adolph Wüllner je navedbi barve dodal podatek o temperaturi: temno rdečemu žaru 525 °C in belemu žaru 1200 °C. Jožef Stefan je poznal podatka v učbeniku in je izračunal absolutni temperaturi: $(525 + 273)$ stopinj = 798 stopinj in $(1200 + 273)$ stopinj = 1473 stopinj. (Dandanes v tej zvezi ne govorimo o stopinjah, ampak o kelvinih.) Ugotovil je, da je moral razmerje temperatur potencirati s 4, da je dobil približno 11,7. Tako je prišel leta 1879 do zakona, ki ga imenujemo po njem:

$$j = \sigma T^4.$$

V njem je j gostota energijskega toka, T absolutna temperatura in σ Stefanova konstanta. Stefan je izračunal površinsko temperaturo Sonca in kot prvi dobil smiselni podatek okoli 6000 kelvinov.

Naprava, s katero je Jožef Stefan prvi izmeril toplotno prevodnost plinov. Med valjastima bakrenima posodica ma je bila tanka plast zraka ali kakega drugega plina. Notranja posodica je bila priključena na živosrebrni manometer. Stefan je napravo potopil v vodo s kosi ledu in opazoval, kako je pojemal tlak in z njim temperatura v notranji posodici.



Stefan je mislil, da njegov zakon samo nekoliko bolje opiše sevanje teles kot Dulong-Petitov. Toda pokazalo se je, da je zakon pomembnejši in velja popolnoma splošno, a le za telo, ki vse vpadlo sevanje absorbira. Tako telo, imenovali so ga *črno*, pri dani temperaturi od vseh teles najmočnejše seva. Stefanov učenec Ludwig Boltzmann je leta 1884 zakon izpeljal s termodinamičnimi prijemi. Podrobno raziskovanje sevanja črnega telesa je Maxa Plancka in druge fizike pripeljalo na prag *kvantne fizike*.

Jožef Stefan je bil kot fizik vsestranski: delal je poskuse, meril (pri toplotni prevodnosti plinov), računal (pri zakonu o sevanju) in segel na vsa območja tedanje fizike. Poleg tega je v mladosti pisal slovenske pesmi in poljudnoznanstvene sestavke in jih objavljajal v tedanjih revijah. Prvi je tudi opozoril na pomen Prešerna za Slovence.

Janez Strnad

Stefanova življenjska pot

24.3.1835 je bil rojen pri Sv. Petru, ki je zdaj del Celovca.

1845 začne obiskovati gimnazijo v Celovcu.

1857 opravi profesorski izpit in napiše prvo znanstveno razpravo.

1858 opravi strogi izpit in dobi naslov doktor.

1860 postane dopisni član akademije znanosti.

1863 postane najmlajši redni profesor na Avstro-Ogrskem.

1865 prejme Liebenovo nagrado ter postane redni član akademije znanosti in direktor fizikalnega inštituta na univerzi.

POTOVANJE JACKA LONDONA - Rešitev s str. 145

V zgodbi zvemo, da bi dodatnih 50 milj potovanja s polno hitrostjo skrajšalo potovanje za 1 dan. Če bi se torej Jack London vozil še 100 milj s polno hitrostjo, bi bilo potovanje krajše za dva dni in bi prispel v tabor v predvidenem času. Od tod sklepamo, da je po prvem dnevu ostalo do konca potovanja še 100 milj. Ker je pisatelj teh sto milj vozil s $\frac{3}{5}$ polne hitrosti in pri tem izgubil dva dni, je za ta del poti potreboval 5 namesto 3 dni. Polna hitrost bi torej bila $\frac{100}{3}$ milj na dan.

Od tod pa že lahko izračunamo, da je razdalja od Skagwaya do tabora enaka $133\frac{1}{3}$ milje.

Viktor Velkavrh

PROGRAM REPUBLIŠKEGA TEKMOVANJA SREDNJEŠOLCEV IZ FIZIKE

Zaradi spremenjenih programov fizike v srednjih šolah je Komisija za popularizacijo fizike v srednji šoli spremenila program v posameznih tekmovalnih skupinah.

SPLOŠNA PRAVILA

1. Skupine A, B in C približno obsegajo snov prvega, drugega in tretjega letnika novega programa za gimnazije. Dijaki z gimnazij praviloma tekmujejo po tem razporedu, dijaki z drugih srednjih šol pa izberejo skupino, ki najbolj ustreza njihovem znanju in zanimanju. Dijaki, ki so v eni od teh skupin že osvojili nagrado, naslednje leto ne morejo ponovno tekmovali v isti skupini.
2. Skupina D obsega nekoliko skrajšan program mednarodnega tekmovanja (fizikalne olimpiade) in je namenjena predvsem dijakom četrtega letnika. V tej skupini lahko nastopijo tudi uspešni dijaki nižjih letnikov.
3. Dijaki, ki se bodo udeležili mednarodne olimpiade, bodo izbrani med najuspešnejšimi tekmovalci iz skupine D.
4. Tekmovalci v skupinah B in C morajo imeti pregledno znanje snovi iz predhodne skupine A oziroma skupin A in B.
5. Za reševanje naloge zadošča znanje srednješolske matematike. Znanje integriranja ali reševanja diferencialnih enačb ni potrebno.
6. V nalogah lahko nastopajo novi fizikalni pojmi, pojavi in naprave, ki se pri pouku ne obravnavajo, če so v nalogi posebej opisani in razloženi.
7. Pri reševanju nalog lahko dijaki uporabljajo računalnik, srednješolski učbenik fizike in fizikalni priročnik. Raba zbirk rešenih nalog ni dovoljena.
7. Tekmovalci rešujejo praviloma štiri naloge. Za reševanje imajo na razpolago 2.5 polne ure v skupinah A, B in C ter 3 ure v skupini D.
8. Komisija si bo prizadevala, da bo v prihodnje vsaj v skupini D tudi eksperimentalni del tekmovanja.

Skupina A

Statika

- Sile. Ravnovesje točkastega telesa.
- Navor. Ravnovesje togega telesa. Težišče.
- Elastične sile. Hookov zakon. Raztezanje žic. Stisljivost.

Hidrostatika

- Hidrostatični tlak. Vzgon.
- Površinska napetost.
- Boylov zakon.

Gibanje

- Premo enakomerno in neenakomerno gibanje.

Skupina B**Sestavljena gibanja.**

- Vodoravni in poševni met.
- Enakomerno in neenakomerno kroženje.

II. Newtonov zakon.

- Sile pri kroženju.
- Gravitacijska sila.

Gibalna količina

- Izrek o gibalni količini. Sila curka.
- Izrek o ohranitvi gibalne količine. Trki.

Energija

- Kinetična, potencialna, prožnostna energija. Energijski zakon.
- Delo. Moč.

Toplota

- Toplotno raztezanje snovi.
- Plinski zakoni (izotermna, izohorna in izobarna sprememba).
- Kalorimetrija.
- Prevajanje toplote.

Skupina C**Električni tok**

- Ohmov zakon. Kirchhoffovi zakoni.
- Električno delo. Moč.

Električno polje

- Električna sila. Električna poljska jakost.
- Električno polje točkastih nabojev.
- Električno polje ravne plošče in kondenzatorja.
- Influenca.
- Energija električnega polja.

Magnetno polje

- Magnetna sila. Magnetni navor.
- Magnetno polje dolge tuljave in ravne žice.
- Energija magnetnega polja.

Snov v električnem in magnetnem polju.**Gibanje nabitih delcev v električnem in magnetnem polju.****Indukcija pri premikanju vodnika v magnetnem polju.****Indukcijski zakon.**

Skupina D

Mehanika

- Newtonovi zakoni. Gibalna količina. Kinetična in potencialna energija. Delo. Moč. Ohranitveni zakoni.
- Kroženje. Gravitacija.
- Vrtenje togega telesa okoli stalne osi. Navor. Vrtilna količina. Vztrajnostni moment. Kotaljenje.

Toplota

- Plinska enačba.
- Kinetična teorija plinov.
- Notranja energija. Delo. Toplota.
- Izotermna in adiabatna sprememba. Toplotni stroji.
- Prevajanje toplote.

Elektrika in magnetizem

- Električna sila. Jakost električnega polja. Potencial.
- Kapaciteta kondenzatorja. Dielektrik.
- Ohmov zakon. Kirchhoffovi zakoni. Delo in moč pri stalnem in izmeničnem toku.
- Magnetno polje ravnega vodnika in dolge tuljave. Sila in navor v magnetnem polju.
- Indukcijski zakon. Induktivnost tuljave.
- Izmenični tok skozi kondenzator in tuljavo.
- Gibanje delcev v električnem in magnetnem polju.
- Električne naprave in instrumenti.

Nihanje in valovanje

- Nihalo na vzmet. Težno nihalo. Energija nihanja.
- Električni nihajni krog. Energija kondenzatorja in tuljave.
- Valovanje na struni in na vodni površini. Zvok.
- Valovni pojavi. Interferenca, odboj, lom, lastna nihanja, uklon elektromagnetnega valovanja na reži in mrežici.
- Geometrijska optika. Enačba leče. Enačba preslikave.
- Sevanje črnega telesa. Wienov in Stefanov zakon.

Delci in valovanja

- Fotoefekt. Energija in gibalna količina fotona.
- De Brogliejeva valovna dolžina delcev v curku.
- Energijski nivoji v vodikovem atomu. Optični spektri.
- Radioaktivnost. Razpadni čas. Razpolovna debelina.
- Energijske bilance pri jedrskih reakcijah.

Ciril Dominko, Bojan Golli

ŠE ENA IZ ŠTEVILSKIH SESTAVOV

Reši enačbo $11_{(a)} \cdot 44_{(c)} = 88_{(d)} - 22_{(b)}$, če velja, da je razlika med posamezno števkovo števila in bazo, v kateri je število zapisano, pri vseh nastopajočih številih enaka.

Borut Čampelj

PROFESOR IVAN VIDAV - NAGRAJENEC REPUBLIKE SLOVENIJE ZA ZNANSTVENO DELO

Slovenske matematike je pred novim letom razveselila vest, da je naš učitelj prof. dr. Ivan Vidav eden od dobitnikov prvih državnih nagrad Republike Slovenije za znanstveno delo. In to tiste z najuglednejšim predznakom - za življenjsko delo.

Preseku je še posebej v čast, da tako velik znanstvenik kdaj pa kdaj napiše prispevek tudi zanj. V tej številki objavljamo nagrajenčev članek o številih, ki so vsote dveh kubov. Kot naročen je prispevek ob podelitvi nagrade že čakal pripravljen na Presekovi uredniški mizi.

Tako nam ene od profesorjevih dejavnosti - skrbi za popularizacijo matematike - ni potrebno posebej predstavljati. Skrbna razlaga obravnavane snovi, iz katere veje ljubezniva naklonjenost tudi do manj veččega bralca Preseka, govori sama zase.



Rojen na Opčinah pri Trstu je profesor Vidav odraščal in do mature obiskoval šolo v Mariboru. Nato je na Univerzi v Ljubljani študiral matematiko. Sam pravi, da ga je v matematiko privedlo pravzaprav zanimanje za astronomijo. Kakorkoli že, komaj triindvajsetleten je ne le diplomiral, ampak tudi že kar doktoriral iz matematike. Njegova doktorska disertacija o Kleinovih izrekih v teoriji diferencialnih enačb sodi še v klasično matematiko. Že s tem delom je profesor Vidav močno opozoril matematični svet nase, njegov veliki učitelj Josip Plemelj pa je spoznal, da je rešen skrbi za svoje nasledstvo v slovenski matematiki.

Znanstveno delovanje profesorja Vidava se je kmalu razširilo in preusmerilo na sodobnejša matematična področja. Z njegovim delom je postala analiza vodilna smer v slovenski matematiki. Pojmi kot so Banachove algebre, C^* -algebre in algebre operatorjev na Hilbertovem prostoru, krepko zvezne polgrupe, analitične funkcije z vrednostmi v normiranih prostorih bralcem Preseka seveda ne pomenijo veliko. Zato povejmo le, da je profesor Vidav sam ali s

sodelavci napisal kar štirideset znanstvenih člankov, leta 1970 dobil Kidričevo nagrado za delo s področja krepko zveznih polgrup in njihovo uporabo v fiziki, po vsem svetu pa je postal znan z delom o metrični karakterizaciji sebi adjungiranega operatorja na Hilbertovem prostoru. Eden najglobljih rezultatov v algebri operatorjev upravičeno nosi tudi njegovo ime: *Vidavov in Palmerjev izrek*.

Matematično delo profesorja Vidava pa ni omejeno le na znanstveno raziskovanje. Prav nasprotno! Nagrajenec je eden tistih neverjetnih in redkih ljudi, ki ob vrhunskem znanstvenem delu najdejo dovolj časa in volje tudi za zavzeto pedagoško in široko strokovno delo. To trditev potrjuje okoli trideset prispevkov za slovenski strokovni reviji *Obzornik za matematiko in fiziko* in *Presek* ter kar osemnajst napisanih knjig. Poleg učbenikov višje matematike in monografij, napisanih kot pomoč pri dodiplomskem in podiplomskem študiju matematike, najdemo v zbirki tudi tri knjige, namenjene srednješolcem in ljubiteljem matematike.* Vsaka njegovih knjig je zgled povezave matematične strogosti in izjemne razumljivosti.

Tudi kot univerzitetni učitelj matematike je profesor Vidav opravil velikansko delo. Dolga leta je zaradi pomanjkanja kadrov opravljal z velikim pedagoškim žarom in nedosegljivo kvaliteto najmanj dvojno učno obveznost. Predaval je številne specialne matematične predmete za študente matematike, nekaj časa tudi višjo matematiko za študente tehniških fakultet. Njegova za-sluga je tudi organizacija znanstvenega dela iz matematike pri nas. Bil je prvi pobudnik podiplomskega študija matematike na ljubljanski univerzi in ob njegovem začetku prevzel glavnino dela kot predavatelj in mentor. Tako je kar šestnajst slovenskih doktorjev matematike izdelalo svojo disertacijo pod njegovim vodstvom. Naš profesor kljub upokojitvi leta 1986 še sedaj predava v okviru podiplomskega študija za matematike-pedagoge.

Še bi lahko pripovedovali o njegovem delu v Društvu matematikov, fizikov in astronomov Slovenije, a naj za mlade Presekove bralce zaključimo s podatkom, da je bil vrsto let tudi predsednik komisije za tekmovanja mladih matematikov.

Za svoje delo je prejel številna družbena priznanja, ki pa so ob njegovi veliki skromnosti pomenila več njegovim sodelavcem in učencem, kakor nje-mu samemu. Tako je dobitnik Prešernove nagrade za leto 1952, Kidričeve nagrade leta 1970, nagrade AVNOJ leta 1981 in Žagarjeve nagrade za leto

* Mladim bralcem utegne biti še posebej všeč knjižica *Rešeni in nerešeni problemi matematike*, ki jo lahko kupite ali naročite po pošti pri Komisiji za tisk DMFA, Jadranska 19, Ljubljana, tel. (061) 265-061/53.

1988. Leta 1958 je bil izvoljen za dopisnega člana Slovenske akademije znanosti in umetnosti, od leta 1962 pa je njen redni član. Je zaslužni profesor Univerze v Ljubljani, kar je najvišji naziv, ki ga podeljuje slovenska Alma mater.

Spoštovanemu profesorju iskreno čestitamo k nagradi in mu hkrati voščimo vse lepo tudi ob življenjskem jubileju.

Marija Vencelj

SPREHAJANJE PO KROŽNICI – Rešitev s str. 71

Namesto da bi oštevilčili n točk na krožnici, zapišimo števila od 1 do n kot zaporedje:

$$1, 2, 3, \dots, n-2, n-1, n. \quad (1)$$

Prečrtajmo vsak drugi člen tega zaporedja, začeniši z 2. S tem obdržimo natanko vsa liha števila in sedaj imamo dve možnosti:

- $n = 2n_1$ je sodo število. Ostanek zaporedja je

$$1, 3, \dots, 2n_1 - 3, 2n_1 - 1.$$

Število n_1 je prav število členov novega zaporedja. Naslednji člen, ki ga je treba prečrtati, je 3;

- $n = 2n_1 + 1$ je liho število. V tem primeru je ostanek zaporedja

$$1, 3, \dots, 2n_1 - 1, 2n_1 + 1.$$

Zadnje prečrtano število je bilo $2n_1$, torej moramo naslednjič prečrtati 1, ker $2n_1 + 1$ ostane. Dobimo

$$3, 5, \dots, 2n_1 - 1, 2n_1 + 1.$$

Tudi v tem zaporedju je število členov enako n_1 . Naslednji člen, ki ga je treba prečrtati, pa je 5.

Oba primera, tako sodi kot lihi, lahko spravimo pod skupno streho na naslednji način: Naj bo $n = 2n_1 + c_0$, pri čemer je c_0 enak bodisi 0 (n je

RESITIVNE NALOGE

sodo) bodisi 1 (n je liho). Uvedimo oznake

$$x_1 = 1, x_2 = 2, \dots, x_{n-1} = n-1, x_n = n$$

za člene zaporedja (1) in konstruirajmo novo zaporedje s predpisom

$$y_i = x_{2i+2c_0-1}, \quad (2)$$

pri čemer i preteče vsa naravna števila od 1 do n_1 . V novem zaporedju imamo n_1 členov in naslednji, ki ga je treba prečrtati, je y_2 . Nato pa se vsa zgodba ponovi! Število n_1 je bodisi sodo ali liho, zato je $n_1 = 2n_2 + c_1$, pri čemer je c_1 enak 0 ali 1. Upoštevajmo pravilo (2) tako, da nadomestimo x z y in c_0 s c_1 , ter naredimo novo zaporedje

$$z_i = y_{2i+2c_1-1}. \quad (3)$$

Tokrat i teče od 1 do n_2 . V izrazu (3) lahko y_{2i+2c_1-1} nadomestimo z izrazom (2) in dobimo

$$z_i = y_{2i+2c_1-1} = x_{2 \cdot (2i+2c_1-1) + 2c_0 - 1} = x_{4i+4c_1+2c_0-3}.$$

Če upoštevamo, kako so bili definirani $x_1, \dots, x_n$, pa lahko zapišemo $z_i = 4i + 4c_1 + 2c_0 - 3$. Poleg tega velja

$$n = 2n_1 + c_0 = 2 \cdot (2n_2 + c_1) + c_0 = 4n_2 + 2c_1 + c_0.$$

S ponovitvijo postopka pridelfamo naslednje zaporedje členov w_i , za katerega velja

$$w_i = z_{2i+2c_2-1} = 8i + 8c_2 + 4c_1 + 2c_0 - 7.$$

Tukaj i teče od 1 do n_3 , pri čemer je $n_2 = 2n_3 + c_2$ in c_2 je enak 0 ali 1. Seveda je $n = 4n_2 + 2c_1 + c_0 = 8n_3 + 4c_2 + 2c_1 + c_0$. S ponavljanjem postopka tako pridobivamo nova zaporedja, ki so podzaporedja prejšnjih in imajo čedalje manj členov. Če je na k -tem koraku število členov enako n_k , je

$$n = 2n_1 + c_0 = 4n_2 + 2c_1 + c_0 = \dots = 2^k n_k + 2^{k-1} c_{k-1} + \dots + 2c_1 + c_0. \quad (4)$$

Posamezen člen pa se izraža z

$$s_i = 2^k i + (2^k c_{k-1} + 2^{k-1} c_{k-2} + \dots + 4c_1 + 2c_0) - 2^k + 1. \quad (5)$$

Ker število členov v zaporedjih pada, bomo po končno mnogo korakov osnovno zalogo števil "izčrpali". Naša naloga pravzaprav sprašuje po zadnjem preostalem številu, torej po zaporedju opisane oblike z enim samim členom. Pa naj bo $n_k = 1$ za neki k . Tedaj iz (4) sledi

$$n = 2^k + 2^{k-1}c_{k-1} + \dots + 2c_1 + c_0, \quad c_0, c_1, \dots, c_{k-1} \in \{0, 1\},$$

kar je dvojiški zapis števila n , ki ima $k + 1$ mest. Sedaj zlahka izračunamo krožni ostanek a_n števila n , saj je to edini člen tega zadnjega zaporedja. Dobimo ga, če v (5) postavimo $i = 1$:

$$\begin{aligned} a_n = s_1 &= \\ &= 2^k + 2^k c_{k-1} + \dots + 4c_1 + 2c_0 - 2^k + 1 = \\ &= 2^k c_{k-1} + \dots + 4c_1 + 2c_0 + 1. \end{aligned}$$

Navodilo za konstrukcijo krožnega ostanka je torej naslednje: V dvojiškem zapisu števila n prestavimo vodilno enico (tj. tisto z leve strani) na konec (desno stran), pa dobimo krožni ostanek, zapisan v dvojiškem sestavu.

Še eno navodilo dobimo, če nekoliko preračunamo:

$$\begin{aligned} a_n &= 2^k c_{k-1} + \dots + 4c_1 + 2c_0 + 1 = \\ &= 2 \cdot (2^{k-1} c_{k-1} + \dots + 2c_1 + c_0) + 1 = \\ &= 2 \cdot (2^k + 2^{k-1} c_{k-1} + \dots + 2c_1 + c_0 - 2^k) + 1 = \\ &= 2 \cdot (2^k + 2^{k-1} c_{k-1} + \dots + 2c_1 + c_0) - 2^{k+1} + 1 = \\ &= 2n - 2^{k+1} + 1. \end{aligned}$$

Ker je $k + 1$ število mest v dvojiškem zapisu za n , je k edino celo število z lastnostjo $2^k \leq n < 2^{k+1}$. Za krožni ostanek torej velja formula

$$a_n = 2n - 2^r + 1,$$

kjer je r najmanjše celo število, za katerega je $2^r > n$. Pri $n = 2001$ je npr. $2^{11} > 2001 > 2^{10}$ in

$$a_n = 2 \cdot 2001 - 2^{11} + 1 = 4002 - 2048 + 1 = 1955.$$

Dvojiški zapis je običajni način predstavitve števil v računalniku. Naloga za računalnikarje: Sprogramirajte "prestavljanje vodilne enice na konec"!

Marko Lovrečič Saražin

TEKMOVANJA

NALOGE S 30. SREDNJEŠOLSKEGA TEKMOVANJA IZ FIZIKE

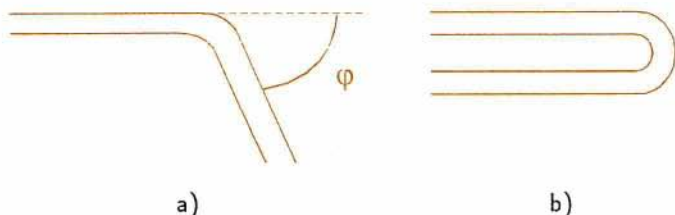
Kot smo obljubili v prejšnji številki Preseka, objavljamo besedila nalog, ki so jih tekmovalci reševali 23. maja 1992 v Celju. Rešitve bomo objavili v naslednji številki.

Skupina A

1. Vlak prične voziti enakomerno pospešeno s postaje. Tretji vagon vozi mimo nas 3,0 s. Čez koliko časa po tistem, ko je mimo nas odpeljal tretji vagon, pripelje do nas vagon, ki bo mimo nas vozil le 1,0 s? Na začetku speljevanja stojimo pri prednjem odbijaču prvega vagona. (Dolžino vagona merimo od začetka prednjega odbijača do konca zadnjega odbijača.)
2. Na ravni podlagi stoji pravilna 4-stranična piramida, katere stranske ploskve so enakostranični trikotniki s stranicami 1,0 m. Teža piramide je 800 N, koeficient lepenja med piramido in podlago je 0,60. V kateri višini moramo potiskati na stransko ploskev s silo 450 N v vodoravni smeri, da se piramida prevrne preko roba? V kateri višini pa, če je sila 600 N? Rešitve komentiraj!
3. Zgraditi želimo balon, ki bo nosil skupno težo 2000 N in bo napolnjen s helijem s specifično težo $1,6 \text{ N/m}^3$. Na razpolago imamo dovolj platna, zanima pa nas, ali bo dovolj trdno. Natezno trdnost platna določimo tako, da na primer 1 dm širok trak platna obremenimo v smeri vzdolž traku in izmerimo silo, pri kateri se trak strga. Izračunaj, kolikšna vsaj mora biti natezna trdnost platna, da se balon pri počasnem dviganju ne bo raztrgal. Specifična teža zraka je 12 N/m^3 .
4. V spodaj odprtem valju z maso 500 g, presekom osnovne ploskve 100 cm^2 in višino 20 cm je bat z maso 100 g, ki je z lahko vzmetjo s koeficientom 200 N/m pritrjen na zgornjo (notranjo) osnovno ploskev valja. Na vrhu valja je majhna luknjica. Valj postavimo navpično in vzmet se ravno toliko raztegne, da pride bat do spodnje osnovne ploskve valja. Potem zamašimo luknjico in valj previdno spustimo v vodo z gostoto $1,0 \text{ kg/m}^3$ tako, da se med potapljanjem ne prevrne. Izračunaj, kako globoko se potopi spodnja osnovna ploskev valja. Bat dobro tesni.

Skupina B

1. Skozi cev, ki je ukrivljena kot kaže slika a, teče voda. Kolikšen naj bo kot φ , da bo na koleno cevi delovala sila, ki bo po velikosti enaka polovici sile, ki deluje na koleno, če je cev ukrivljena za kot 180° (Glej sliko b)?



2. Satelit kroži v ekvatorialni ravnini Zemlje z zahoda proti vzhodu. Nad določeno točko na Zemlji se pojavi vsakih 11 ur. Na kolikšni višini kroži satelit? Masa Zemlje je $6,0 \cdot 10^{24}$ kg, radij Zemlje je 6400 km, gravitacijska konstanta pa $6,67 \cdot 10^{-11} \text{ Nm}^2/\text{kg}^2$.
3. Plošča drsi s hitrostjo 2,0 m/s po ravni podlagi brez trenja. Nanjo pade z višine 1,0 m vreča peska, ki ima enako maso kot plošča, in obleži na plošči. Izračunaj hitrost plošče po padcu vreče peska. Izračunaj še, s katere višine moramo spustiti vrečo peska na ploščo, da se ta hipoma ustavi, če je koeficient trenja med podlago in ploščo 0,2, hitrost plošče tik pred padcem vreče nanjo pa 2,0 m/s.
4. Votlo aluminijasto kroglo z zunanjim premerom 20 cm in debelino sten 1,4 cm ohladimo in potopimo v vodo pri 0°C . Kolikšna mora biti začetna temperatura krogle, da bo ta po daljšem času lebdela v vodi? Gostota aluminija je $2,70 \text{ kg/dm}^3$, vode $1,00 \text{ kg/dm}^3$ in ledu $0,92 \text{ kg/dm}^3$. Specifična talilna toplota ledu je 336 kJ/kg , specifična toplota aluminija pa $880 \text{ Jkg}^{-1}\text{K}^{-1}$.

Skupina C

1. Kondenzator s kapaciteto $0,01 \mu\text{F}$ je nabit na 1000 V, kondenzator s kapaciteto $0,5 \mu\text{F}$ pa na 400 V. Pri prvem poskusu zvežemo obe pozitivni elektrodi preko upornika za $1000 \text{ k}\Omega$ in obe negativni elektrodi preko enakega upornika. Pri drugem poskusu pa en kondenzator obrnemo, tako da sta preko upornikov povezani pozitivna z negativno in negativna s pozitivno elektrodo. Za oba poskusa izračunaj, kolikšni sta končni napetosti in kolikšen del začetne energije se pretvori v toploto na upornikih?

2. Na dveh velikih navpičnih ploščah na medsebojni razdalji 20 cm je enakomerno razmazan naboj, na levi je površinska gostota 10^{-5} As/m^2 , na desni pa -10^{-5} As/m^2 . Z majhno kroglico z maso 5 mg se najprej dotaknemo leve plošče. Pri tem steče na kroglico v trenutku naboj 10^{-10} As . Kroglico nato postavimo na sredino med plošči in jo sunemo navpično navzgor. Čez nekaj časa se kroglica vrne nazaj v začetno točko. Skiciraj pot kroglice. Trk kroglice s ploščo je prožen.
- a) S kolikšno hitrostjo smo kroglico izstrelili?
 - b) Z diagramom prikaži odvisnost vodoravne komponente sile od vodoravne komponente hitrosti kroglice za časovni interval, v katerem se kroglica večkrat odbije.
3. Vodnik, po katerem teče tok 1000 A, se nahaja v ravnini kvadratnega žičnega okvira s stranico 1 m. Okvir vlečemo stran od vodnika s konstantno hitrostjo 5 m/s. Pri tem sta dve stranici okvira vzporedni z vodnikom. S kolikšno silo vlečemo okvir v trenutku, ko je bližja stranica okvira od vodnika oddaljena 10 cm? Upor okvira je $10^{-3} \Omega$.
4. Vodoraven curek enkrat ioniziranih atomov ^{12}C pospešimo z napetostjo 400 V in nato vodimo skozi komoro z dolžino 1 dm, v kateri je električno polje 10^5 V/m v navpični smeri.
- a) Določi gostoto in smer magnetnega polja v komori, pri kateri se curek ne bo odklonil.
 - b) Za koliko se curek odkloni od vodoravne smeri, če se hitrost ionov spremeni za 0,1 %?
 - c) Hitrosti ionov v curku niso enake, temveč so porazdeljene v določenem intervalu okoli hitrosti, pri kateri se curek ne odkloni. Določi širini hitrostnega intervala, če curek naredi pego z višino 1 mm na zaslonu na steni komore, ki je na nasprotni strani vstopne odprtine.

Masa atoma ^{12}C je $2,0 \cdot 10^{-26} \text{ kg}$, osnovni naboj pa $1,60 \cdot 10^{-19} \text{ As}$.

Skupina D

Opomba: Zaradi velikega števila vprašanj tekmovalna komisija ne pričakuje, da boš odgovoril na vsa zastavljena vprašanja. Vendar upoštevaj, da bomo pri izbiri ekipe za mednarodno olimpiado z večjo težo upoštevali pravilne odgovore na 4. nalogo.

1. Po klancu z naklonom 10° se brez drsenja kotili cev s tanko steno in z maso 4 kg. V cevi je palica valjaste oblike in z maso 0,5 kg, ki se prav tako kotili brez drsenja. Ko telesi spustimo, je palica v taki legi, da se

glede na cev med kotaljenjem ne premika.

- a) Kolikšen je pospešek sistema?
- b) Kolikšen kot oklepa zveznica med osjo cevi in osjo palice s pravokotnico na klanec?

Privzameš lahko, da so vsi koti majhni, kar pomeni, da za majhen kot α velja $\cos \alpha \doteq 1$ in $\sin \alpha \doteq \alpha$.

2. Iz vrvi naredimo krožno zanko in jo vrtimo v vodoravni ravnini z veliko kotno hitrostjo ω_0 okrog navpične osi. Kolikšna je lahko frekvenca stoječega valovanja, ki nastane na vrvi?
3. Vodoraven curek enkrat ioniziranih atomov ^{12}C pospešimo z napetostjo 400 V in nato vodimo skozi komoro z dolžino 1 dm, v kateri je električno polje 10^5 V/m v navpični smeri.

- a) Določi gostoto in smer magnetnega polja v komori, pri kateri se curek ne bo odklonil.
- b) Za koliko pa se curek odkloni od vodoravne smeri, če se hitrost ionov spremeni za 0,1 %?
- c) Hitrosti ionov v curku niso enake, temveč so porazdeljene v določenem intervalu okoli hitrosti, pri kateri se curek ne odkloni. Določi širini hitrostnega intervala, če curek naredi pego z višino 0,3 mm na zaslonu na steni komore, ki je na nasprotni strani vstopne odprtine.
- d) Razpršenost hitrosti je posledica visoke temperature ionov predno jih začnemo pospeševati. Oцени to temperaturo.

Osnovne konstante: $N_A = 6,02 \cdot 10^{26} \text{ kmol}^{-1}$, $c_0 = 3,0 \cdot 10^8 \text{ m/s}$, $e_0 = 1,602 \cdot 10^{-19} \text{ As}$, $k = 1,38 \cdot 10^{-23} \text{ J/K}$.

4. Izkoristek svetleče diode (LED) določamo z merjenjem svetlobnega toka (svetlobne moči), ki ga dioda oddaja, in merjenjem električne moči, ki jo troši. Svetlobni tok merimo s fotodiodo.

V svetleči diodi se del električne energije porablja za vzbujanje elektronov v višji nivo. Ko se vzbujen elektron vrne v osnovni nivo, odda foton z energijo: $W_f = hc/\lambda$, če je h Planckova konstanta, c hitrost svetlobe in λ valovna dolžina oddane svetlobe. Izkoristek diode vpeljemo kot razmerje med oddanim energijskim tokom svetlobe Φ in električno močjo P , ki jo troši dioda: $\eta = \Phi/P$.

Ko svetloba pade na občutljivo površino fotodiode, del fotonov izbije nekaj elektronov iz kovine in v fotodiodi steče tok. Kvantni izkoristek fotodiode vpeljemo kot $q = N_e/N_f$, če je N_f število vpadlih fotonov in N_e število izbitih elektronov v izbrani časovni enoti.

Podatki za fotodiodo so:

kvantni izkoristek fotodiode	$q = 0,88$
občutljiva površina fotodiode	$3 \text{ mm} \times 3 \text{ mm}$
valovna dolžina svetlobe	$\lambda = 635 \text{ nm}$.

Pri eksperimentu merimo padec napetosti U_{FD} na $1 \text{ M}\Omega$ -skem uporniku, ki je zvezan zaporedno s fotodiodo. Merimo še tok (I_{LED}) in napetost (U_{LED}) na svetleči diodi. Rezultati značilne meritve so zbrani v tabeli:

$U_{FD} [\text{V}]$	$I_{LED} [\mu\text{A}]$	$U_{LED} [\text{V}]$	$U_{FD} [\text{V}]$	$I_{LED} [\mu\text{A}]$	$U_{LED} [\text{V}]$
1.806	2.70	1.752	0.903	1.123	1.705
1.637	2.30	1.742	0.711	0.889	1.708
1.511	2.08	1.735	0.448	0.555	1.673
1.225	1.61	1.722	0.315	0.410	1.659
1.117	1.43	1.718	0.192	0.258	1.637

Napetost na fotodiodi, ko nanjo ne svetimo s svetlečo diodo, je 0.006 V .

- Določi, pri katerem toku skozi fotodiodo ima svetleča dioda največji izkoristek.
- Da določimo največji izkoristek svetleče diode, moramo izmeriti še celotni svetlobni tok Φ , ki ga svetleča dioda oddaja. Pri meritvi privzamemo, da dioda seva svetlobo v obliki stožca. Fotodiodo premikamo v radialni smeri od osi stožca in na različnih oddaljenostih r_i od osi izmerimo naslednje napetosti:

$r_i [\text{mm}]$	$U_{FD} [\text{V}]$	r_i	U_{FD}	r_i	U_{FD}	r_i	U_{FD}
0	1.833	15	0.997	30	0.681	45	0.082
3	1.906	18	0.642	33	0.266	48	0.071
6	1.846	21	0.313	36	0.119	51	0.066
9	1.750	24	0.343	39	0.097	54	0.050
12	1.347	27	0.637	42	0.089	57	0.045

- Skiciraj in komentiraj, kako si predstavljaš eksperimentalno postavitev in nariši električno vezje.
- Ali lahko iz zgornjih meritev oceniš napako rezultata?

(Prirejena eksperimentalna naloga z XXI. mednarodne olimpiade na Nizozemskem.)

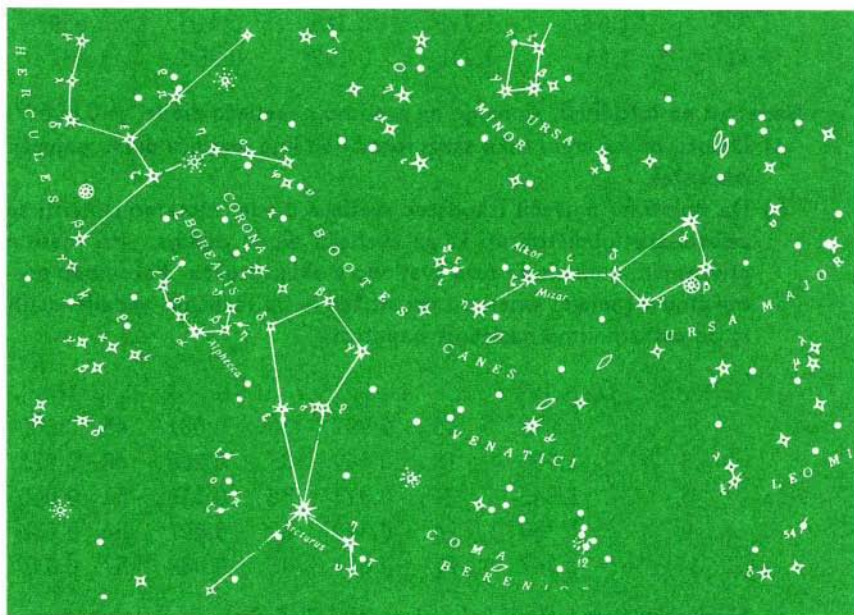
Ciril Dominko, Bojan Golli

ASTRONOMIJA

SEVERNA KRONA

Vneti opazovalci nočnega neba so že davno opazili, da sedem s prostim očesom vidnih zvezd med ozvezdema Volarja in Herkula oblikuje skupinico, ki je razporejena v polkrogu in spominjajo na krono. Zato so to skupinico zvezd poimenovali kar ozvezdje Krona. Pozneje so ozvezdje preimenovali v Venec, ker so na zvezdnih kartah začeli upodabljati ozvezdje Južna krona. Danes najdemo v zvezdnih kartah obe: Južno in Severno krono. (Glej *Karti severnega in južnega neba*, Presekova knjižnica **31**, 1989.)

Severno krono z lahko izsledimo na nebu. Posebno lepo je vidna z lovskim daljnogledom. V sredini te majhne, a silno ljubke skupinice zvezd leži najsvetlejša med njimi (α). To je zvezda *Alfeka* (*Gemma*), kar po naše pomeni *Biser* (slika 1).



Slika 1. Del pomladnega zvezdnega neba, ki prikazuje tudi lego ozvezdja Severna krona (Corona Borealis). Ozvezdje je vidno od marca do oktobra.

Ozvezdje Severna krona je s svojimi sedmimi v značilnem polkrogu razporejenimi zvezdami podžigalo ljudsko domišljijo, da je spleta o njem številne zgodbe. Eno od njih smo priredili za bralce Preseka. Vzeli smo jo iz grške

mitologije. Pripoveduje o snidenju prelepe Ariadne, hčerke kretskega kralja Minosa, z zmagoslavnim grškim herojem Tezejem in o njunem žalostnem slovesu. (V enciklopediji ali zgodovinskem učbeniku preberi mit o Tezeju, kajti tu bomo povedali le tisti del zgodbe, ki je povezana z zvezdnim nebom.)

Ko je Tezej premagal strašno pošast, krvoločnega Minotavra (ki so mu morali prinašati v labirint najlepše mladenke in najpostavnejše mladeniče, da jih je požrl) in se je z Ariadnino pomočjo vrnil iz labirinta, se je odločil, da z otoka odpotuje domov v rodno Grčijo. S seboj je odpeljal Ariadno, ki se je v Tezeja zaljubila.

Na poti domov se je Tezej izkrcał na otoku Naksosu. Tu se mu je v sanjah prikazal bog rodovitnosti, vina in veselja Dioniz in mu rekel, da so bogovi pravzaprav njemu namenili Ariadno za ženo. Tezej si ni upal biti neposlušen do bogov. Z veliko žalostjo v srcu je zapustil otok, kjer je na skalnati obali še spala Ariadna. Njena glava je bila ovenčana z zlato krono, v katero so bili vgrajeni rubini. To krono (venec), ki jo je skoval sam bog ognja in kovaških spretnosti Hefajst, je Tezeju slovesno izročila nereida Tetida kot svatbeno darilo.

Ko se je Ariadna zbudila in spoznala, da jo je zapustil nezvesti Tezej, je začela iz obupa jokati. Približal se ji je Dioniz. S čela ji je snel krono in jo vrgel v nebo. Medtem, ko se je dvigala, so se njeni dragoceni kamni spreminjali v zvezde in se utrdili na nebesnem svodu tako, da so se ohranili v obliki krone.

Ariadna, razočarana nad nezvestim Tezejem, ki mu je z zvijačo rešila življenje in si zato nakopala očetovo jezo, je bila ginjena nad nenadno čudovito prijetno spremembo, da pred njo stoji sam bog Dioniz. In privolila je, da postane njegova žena. Zvezdna krona na nebu pa naj ostane tam za vse večne čase kot spomin na Ariadnino lepoto in ljubezni bogov do nje.

Na zvezdnih kartah so Severno krono prikazovali kot lovorjev venec, tiaro, venec iz ptic, cvetov, listov (slika 2). Često jo imenujejo Ariadnina krona, Hefajstova krona, Srebrno kolo, Ščit, Krožnik. Pri nas je zanjo udomačeno ime Kolo svete Katarine ali tudi Marijina krona. To naj bi bilo kolo, na katerem so do smrti izmučili sv. Katarino okrog leta 305 v Aleksandriji.

V tem ozvezdju je leta 1866 izbruhnila slavna nova - zvezda *T Severne krone*. Nenadoma je zablestela in bila osem dni tako svetla kot zvezda Biser, potem pa je njen sij hipno zbledel in zvezda je postala nevidna. Leta 1946 je ta zvezda ponovno tako močno zasvetila in po kratkem času spet ugasnila. Gre za ponavljajočo se novo. Mnogo ljubiteljev astronomije usmerja svoje daljnoglede v to področje neba, da bi morda spet zapazili porast sija te zvezde.

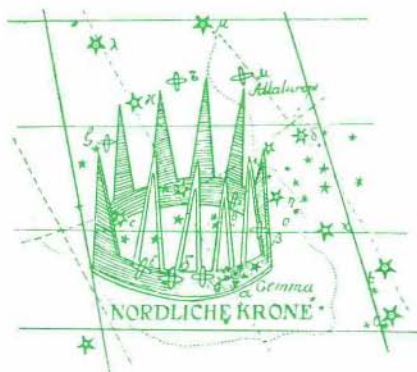
a)



b)

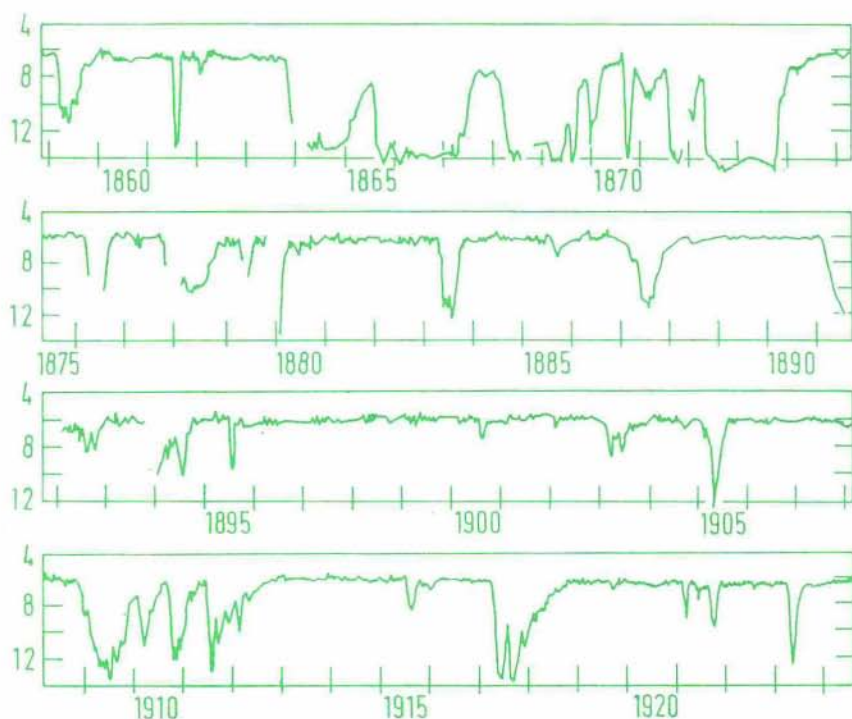


c)



Slika 2. Ozvezdje Severna krona, kot so ga prikazovali v zvezdnih atlasih: a - 17. stoletje, b - 18. stoletje, c - 19. stoletje.

Še bolj zanimiva pa je spremenljivka *R Severne krone*. Običajno izbruh snovi iz notranjosti zvezde povzroči povečanje sija zvezde. V nekaterih primerih pa gre za bolj zamotan pojav, pri katerem izbruh snovi iz notranjosti zvezde v vrhnje plasti zvezdne atmosfere ne povzroči zvečanja sija, ampak prav obratno - oslabljenje. Take so na primer zvezde tipa *R Severne krone*. Danes je znanih le okoli petdeset zvezd te vrste. Prvo, to je prav *R Severne krone*, je odkril angleški astronom Pigott že leta 1785. (Tedaj je bila to deveta po vrsti odkrita spremenljivka; danes je znanih okoli 30 000.) Taka zvezda ima navadno sij, ki je na meji vidnosti človeškega očesa (6^m). To je njen maksimalni sij. Nenadoma, povsem nepričakovano, njen sij zelo oslabi, tako da zvezdo lahko opazujemo le z daljnogledom. Zmanjšanje sija (svetlobe) ni vedno enako (slika 3). Vse zvezde te vrste so nadorjakinje. Spreminjanje njihovega sija lahko opazujemo z daljnogledom manjše povečave.



Slika 3. Spreminjanje sija zvezde R Severne krone od 1859 do 1924. Zakaj pride do takega spreminjanja sija? Najbrž gre za občasne izbruhe plinastega ogljika, ki v hladnejših plasteh zvezdne atmosfere kristalizira in tvori grafitne oblake. Ti vpijejo (absorbirajo) svetlobo, ki prihaja iz notranjosti zvezde.

Marijan Prosen

O ZLATI VERIGI - Rešitev s str. 136

Vitez lahko ostane v gostilni vseh šest dni. Ne smete spregledati, da lahko gostilničar vrača vitezu "drobiž". Plačilo poteka takole:

Najprej vitez prepili četrti obroček in tako dobi verigo (1,2,3), verigo (5,6) in poškodovani obroček (4). Prvi dan da gostilničarju obroček (4). Drugi dan mu da verigo (5,6) in dobi nazaj obroček (4). Tretji dan mu da verigo (1,2,3) in dobi nazaj verigo (5,6). Četrty dan mu da še obroček (4). Peti dan mu da verigo (5,6) in dobi nazaj obroček (4), ki ga šesti dan preda gostilničarju, in odjezdi naprej brez prebite pare v žepu.

Borut Zalar

18. IZBIRNO TEKMOVANJE SREDNJEŠOLCEV IZ MATEMATIKE - Rešitve s str. 191

Prvi letnik

1. Kvadrat celega števila ima lahko pri deljenju s 3 ostanek 0 ali 1. Število $3x + y$ ima enak ostanek pri deljenju s 3 kot y , zato leva stran ne more imeti ostanka 1 pri deljenju s 3; tak ostanek pa ima desna stran, saj je $1111 = 370 \cdot 3 + 1$.

2. Ni težko videti, da morajo biti števila x , y in z različna. Ker je sistem neenačb simetričen v vseh treh spremenljivkah, lahko predpostavimo, da $x < y < z$. Iz druge neenačbe sledi $\frac{z}{y}(x - y) < x - y$, od koder dobimo po deljenju $z(x - y) < 0$ neenačbo $\frac{z}{y} > 1$. Ker je $z > y$, mora biti $y > 0$. Iz tretje enačbe podobno izpeljemo neenačbo $\frac{y}{z} > 1$. Ker je $z > y$, mora biti $z < 0$. Skupaj z neenakostjo $y > 0$ pa pridemo v protislovje s predpostavko $y < z$. Takih števil torej ni.

3. Ker je $\angle DBA = \angle DCA = \frac{\pi}{4}$, je kot $\angle ADB$ pravi in leži zato točka D na krogu, očrtanem trikotniku $\triangle ABC$. Ker je CE simetrala kota $\angle ACB$, velja: $\frac{AC}{AE} = \frac{BC}{BE}$. Od tod sledi $\overline{AE} =$

$$= \frac{\overline{AC} \cdot \overline{AB}}{\overline{AC} + \overline{BC}}, \text{ oziroma } m = \frac{bc}{a+b}.$$

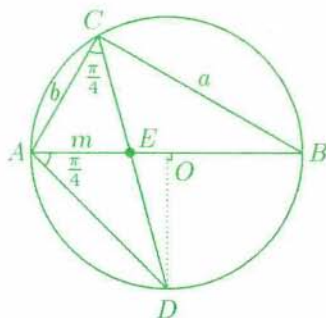
$$\text{Računajmo: } PADE = \frac{1}{2} m \cdot \overline{OD} = \\ = \frac{1}{4} mc = \frac{bc^2}{4(a+b)} \text{ in } PAEC = \\ = \frac{1}{2} mv_c = \frac{1}{2} m \cdot \frac{ab}{c} = \frac{ab^2}{2(a+b)}. \text{ Torej:}$$

$$PADC = PADE + PAEC = \frac{bc^2 + 2ab}{4(a+b)}.$$

4. Pobarvajmo polja a_1 , b_2 , c_3 , d_4 , e_5 , f_6 , g_8 in f_7 črno, vsa ostala pa belo. Drugi igralec lahko vedno premakne trdnjavo na črno polje, saj mora prvi vedno premakniti figuro na belo polje in je na začetku igre figura na črnem polju. Ker je polje h_8 belo, bo drugi igralec pri opisani strategiji vedno zmagal.

Drugi letnik

1. Postavimo koordinatno izhodišče v središče trikotniku očrtanega kroga. Potem so krajevni vektorji oglišč trikotnika enako dolgi in s skalarnim pro-



duktom lahko preverimo, da ima višinska točka trikotnika krajevni vektor $\vec{h} = \vec{a} + \vec{b} + \vec{c}$. Iz pogoja naloge sledi $|\vec{h} - \vec{a}| = |\vec{a}|$ oziroma $(\vec{h} - \vec{a}) \cdot (\vec{h} - \vec{a}) = \vec{a} \cdot \vec{a}$. Od tod izpeljemo $\vec{b} \cdot \vec{c} = -\frac{1}{2}$, kar nam da $\angle BAC = \frac{\pi}{3}$.

2. Izraz preoblikujemo:

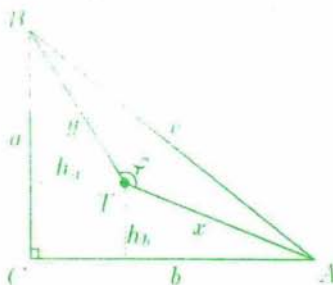
$$f(x) = \frac{x}{|x|}(1+x^2) = \begin{cases} -(1+x^2); & x < 0 \\ 1+x^2; & x > 0 \end{cases}$$

V točki $x = 0$ pa funkcija ni definirana.

3. Enakost ploščin trikotnikov $\triangle ABT$, $\triangle BCT$ in $\triangle CAT$ nam da: $\frac{1}{2}ah_a = \frac{1}{2}bh_b = \frac{1}{3} \cdot \frac{1}{2}ab$.

Sledi: $h_a = \frac{1}{3}b$ in $h_b = \frac{1}{3}a$. Po Pitagorovem izreku dobimo $x^2 = (\frac{1}{3}a)^2 + (\frac{2}{3}b)^2$ in $y^2 = (\frac{2}{3}a)^2 + (\frac{1}{3}b)^2$. V trikotniku $\triangle ABT$ velja $c^2 = x^2 + y^2 - 2xy \cos \varphi$ in $\frac{1}{2}xy \sin \varphi = \frac{1}{6}ab$. Sledi:

$$\operatorname{ctg} \varphi = \frac{\cos \varphi}{\sin \varphi} = -\frac{2}{3} \left(\frac{a}{b} + \frac{b}{a} \right).$$



4. Z s_1, s_2, s_3 in s_4 označimo vsote na mejnih ploskvah. Ker vsak rob pripada dvema mejnima ploskvama, je $s_1 + s_2 + s_3 + s_4 = 2(1 + 2 + \dots + 6) = 42$. Števila s_i ne morejo biti enaka, saj 42 ni deljivo s 4.

Tretji letnik

1. Ker je piramida pokončna, je $\overline{AD} = \overline{BD} = d$ in zato iz pogoja $\angle ADB = \frac{\pi}{2}$ sledi $\overline{BA} = d\sqrt{2}$. Polmer kroga, očrtanega trikotniku ABC je $r = \frac{abd\sqrt{2}}{4p}$, kjer smo z $a = \overline{BC}$ in $b = \overline{AC}$ označili neznani dolžini stranic, s p pa ploščino tega trikotnika. Z upoštevanjem zveze $p = \frac{1}{2}ab \sin \varphi$ izpeljemo $r = \frac{d\sqrt{2}}{2 \sin \varphi}$. Pri pokončni tristrani piramidi sovпада nožišče višine piramide s središčem osnovnici očrtanega kroga in lahko izračunamo višino piramide po Pitagorovem izreku:

$$h = d \sqrt{1 - \frac{1}{2 \sin^2 \varphi}}. \text{ Prostornina piramide je torej:}$$

$$V = \frac{hp}{3} = \frac{dp}{3} \sqrt{1 - \frac{1}{2 \sin^2 \varphi}}.$$

2. Ker sta števili a in b racionalni, je $2 + \sqrt{2}$ tudi rešitev enačbe. Po Vietovi formuli najdemo še tretji koren te enačbe: $\frac{10}{3(2-\sqrt{2})(2+\sqrt{2})} = \frac{5}{3}$.

3. Pišimo $p(x) = a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \dots + a_1 x + a_0$. Za poljubni različni vrednosti x in y binom $(x-y)$ deli $p(x) - p(y)$, saj so vsi členi v $p(x) - p(y)$ oblike $a_k(x^k - y^k)$ za $k = 1, \dots, n$.

Tak polinom ne obstaja, ker $6 - 2 = 4$ ne deli $p(6) - p(2) = 2$.

4. Z elementarnimi trigonometrijskimi transformacijami pokažemo, da je $f(x) \equiv \log 2$ povsod, kjer je f sploh definirana.

Očitno je $\mathcal{D}_f = \mathbb{R} \setminus \{\frac{\pi}{2} + k\pi; k \in \mathbb{Z}\}$.

Četrti letnik

1. Splošni člen aritmetičnega zaporedja z diferenco d in začetnim členom a_1 je $a_n = a_1 + (n-1)d$. Potem velja $16 = a_4 + a_8 + a_{11} + a_{13} = 4(a_1 + 8d)$ in $a_1 + a_2 + \dots + a_{17} = 17(a_1 + 8d)$. Iskana vsota je torej 68.

2. Ni težko preveriti, da se lahko kvadrati celih števil končajo le na 1, 4, 5, 6, 9 in 0. Če je zadnja številka 5, mora biti predzadnja 2; vsota števk tega števila je $999 \cdot 5 + 2 \equiv 2 \pmod{3}$. Če se število konča na 50, 51, 54 ali 59, pa iz $50 \equiv 2 \pmod{4}$, $51 \equiv 3 \pmod{4}$, $54 \equiv 2 \pmod{4}$, $59 \equiv 3 \pmod{4}$ sledi trditev naloge, saj ima kvadrat naravnega števila pri deljenju s 4 lahko ostanek le 0 ali 1.

Če pa se število konča na 56, je vsota števk $999 \cdot 5 + 6 \equiv 0 \pmod{3}$ in $999 \cdot 5 + 6 \not\equiv 0 \pmod{9}$. Tudi v tem primeru število ni popolni kvadrat, saj je deljivo s 3, ni pa deljivo z 9.

3. Iz rekurzivne zveze dobimo z odštevanjem

$$(n+1)(n+2)f(n+1) - n(n+1)f(n) = (n+1)f(n+1).$$

Od tod izpeljemo $(n+1)f(n+1) = nf(n) = \dots = 2f(2)$. Seveda je $f(2) = \frac{1}{4}$. Od tod ni več težko videti $f(1992) = \frac{2}{1992}f(2) = \frac{1}{3984}$.

4. Gorišči elipse z enačbo $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$ ($a > b$) sta $F_1 = (0, -e)$ in $F_2 = (0, e)$, kjer smo označili $e = \sqrt{a^2 - b^2}$. Iskano gorišče je torej $F = (0, \sqrt{13^2 - 12^2}) = (0, 5)$. Številsko izsrednost elipse je $\varepsilon = \frac{e}{a} = \frac{5}{13}$ in

od tod ni težko opaziti, da je podana premica ravno vodnica elipse. Lastnost vodnice pa je

$$\varepsilon = \frac{d(F, T)}{d(T, T')} = \frac{5}{13}.$$

Iskano razmerje lahko izračunamo tudi analitično.

Matjaž Željko

POPRAVEK URNIKA TEKMOVANJ IZ MATEMATIKE V LETU 1993

Izbirno tekmovanje za srednješolce bo v soboto, 17. aprila, državno pa 22. maja.

Darjo Felda

Svantesson I., MISELNI VZORCI IN SPOMIN, Cankarjeva založba, Ljubljana 1992, str. 94

Miselni vzorci so posebna tehnika zapisovanja. Ta se od običajnega (linearne-ga) zapisovanja stavkov drugega za drugim razlikuje po strukturi, ki odraža zgradbo in odnose med rečmi, ki jih opisujemo.

Spoznali bomo, kaj miselni vzorci so, kako jih sestavljamo in uporabljamo. Pri tem ima posebno vlogo iskanje ključnih besed, to je nosilk informacije.

Knjiga pojasnjuje tudi delovanje možganov, tipe spomina in načine urjenja spomina z uporabo mnemonike.

Kot primere uporabe miselnih vzorcev pisec navaja reševanje problemov, obnavljanje in povezovanje (knjig, predavanj), nevihto možganov in porajanje misli ter zapisovanje (na sestankih, predavanjih). Pogrešamo pa primere uporabe v matematiki.

Posledica takšnega načina dela je krepitev spomina, prihranek časa, urejenost pri delu in razvijanje kreativnosti.

Knjiga je napisana v enostavnem jeziku, obogatena z mnogimi ilustracijami, zato bo razumljiva tudi mlajšim.

Izidor Hafner

OB 350. LETNICI ROJSTVA ISAACA NEWTONA

Sir Isaac Newton, eden največjih učenjakov vseh časov, je bralcu bolj ali manj dobro znan. Newtona poznamo predvsem kot utemeljitelja osnovnih zakonov fizike, manj pa kot matematika, ki je razvil za sodobno znanost tako nujno potrebni orodji, kot sta diferencialni in integralni račun.

Po takratnem julijanskem koledarju je bil Newton rojen na božični dan leta 1642 v Woolsthorpu v Angliji, po današnjem gregorijanskem koledarju pa je njegov rojstni datum 4. januar 1643. Rodil se je po očetovi smrti in prezgodaj, tako da so ga komaj ohranili pri življenju. Mati se je čez tri leta ponovno poročila in pustila malega Newtona pri starih starših.

Kot otrok Newton ni bil dovolj močan, da bi sodeloval v nasilnih igrah svojih vrstnikov. Zato si je poiskal tako zabavo, kjer se je lahko pokazal njegov genij. Po lastnih načrtih je konstruiral različne mehanske naprave, kot so zmaji, sončne ure, vodne ure, lutke. V prvih letih šolanja se je Newton zdel rahlo počasen pri učenju in ni kazal pretiranega zanimanja za šolo. Nekoč ga je napadel razredni nasilnež, ki pa je bil tudi najboljši učenec v razredu. Po nasvetu enega od učiteljev ga je Newton izzval na pošten boj in ga premagal. Od tedaj je poleg svojih pesti poskušal prav tako dobro uporabljati tudi svojo glavo in kmalu postal najboljši učenec v šoli.

Preden se je vpisal na univerzo, je pomagal materi na kmetiji. (Njegov očim je bil tedaj že mrtev.) Menda se je izkazal za najslabšega poljedelca na svetu. Njegov stric, ki je predaval na koledžu Trinity v Cambridgeu in je kmalu odkril Newtonovo nadarjenost, si je prizadeval, da bi študiral v Cambridgeu. To se je leta 1660 tudi zgodilo in štiri leta kasneje je Newton diplomiral, vendar brez posebnih odlik.

V letih 1664 in 1665 se je po Londonu razširila epidimija kuge, zato se je Newton pred prežečo nevarnostjo umaknil na materino kmetijo, kjer je imel veliko časa za razmišljanje. Tedaj naj bi (star komaj 23 let) odkril infinitezimalni račun, ki vključuje odvajanje in integriranje funkcij. Neodvisno od njega je do enakih rezultatov prišel tudi nemški filozof in matematik Gottfried Leibniz (1646 - 1716), s katerim se je kasneje Newton zapletel v borbo za prvenstvo. Ko so namreč "navadni" ljudje zvedeli za izredno pomembnost infinitezimalnega računa (čeprav večina ni vedela, kaj to sploh je), je naenkrat postalo pomembno, kdo ga je odkril: Anglež ali Nemec. Zato danes osnovnemu izreku analize, ki povezuje odvajanje in integriranje funkcij, pravimo Newton-Leibnizova formula. Newton se je takrat ukvarjal tudi z neskončnimi vrstami in med drugim posplošil **binomski izrek**. S pomočjo

indukcije je lahko pokazati, da za poljubni realni števili a in b ter poljubno naravno število n velja zveza

$$(a + b)^n = a^n + n a^{n-1} b + \dots + \binom{n}{k} a^{n-k} b^k + \dots + n a b^{n-1} + b^n,$$

kjer smo (za $k = 1, 2, 3, \dots, n$) vpeljali binomski simbol

$$\binom{n}{k} = \frac{n \cdot (n-1) \cdot \dots \cdot (n-k+2) \cdot (n-k+1)}{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot \dots \cdot k}.$$

Newton je to formulo razširil na primer, ko je n poljuben ulomek. Tedaj se vsota na desni ne konča, pač pa se nadaljuje v neskončno vrsto. (Bralec naj sam poskusi zapisati vrsto za funkcijo $\sqrt{1+x}$.)

Na materini kmetiji se je Newton tudi začel spraševati, če ista sila, zaradi katere pade jabolko z drevesa navpično na tla, drži v svojem prijemu tudi Luno. To je bila začetna misel, ki je vodila do odkritja osnovnega zakona gravitacije. Newton je teoretično dokazal, da je pospešek premo sorazmeren gravitacijski sili, ki upada s kvadratom razdalje od središča Zemlje. Z upoštevanjem, kolikokrat je zemeljska gravitacija na oddaljenosti Lune manjša od tiste na površju Zemlje, je izračunal pospešek Lune. Ker je bila ta vrednost za eno osmino manjša od izmerjene vrednosti, je podvomil o pravilnosti svoje teorije in je zato nadaljno obravnavanje problemov gravitacije odložil za približno petnajst let.

V teh letih se je Newton ukvarjal tudi z optiko. Eksperimenti s svetlobo in tako dobljena spoznanja so mu prinesli slavo. Leta 1667 se je vrnil v Cambridge in čez dve leti nasledil svojega profesorja matematike Isaaca Barrowa (1630 - 1677), ki je odstopil profesorsko mesto svojemu nedosegljivemu učencu. Newton je izdelal tudi zrcalni daljnogled, ki zbira svetlobo z odbojem parabolčnih zrcal in ne več z lomom pri prehodu skozi lečo. O njem je leta 1672 poročal Kraljevi družbi in kmalu nato je bil izvoljen za njenega člana. Zanimivo je, da so tudi današnji teleskopi grajeni po zgledu Newtonovega.

Leta 1684 je Newtona njegov prijatelj Halley (1656 - 1742) vprašal, kako bi se gibali planeti, če bi med njimi obstajale privlačne sile, ki bi upadale s kvadratom razdalje. Newton, ki se je s tem vprašanjem že ukvarjal, mu je takoj odgovoril, da po elipsah in da je to tudi dokazal. Na tem mestu velja pripomniti, da je Newton vedno odlašal z objavo svojih rezultatov, ker se je po objavah že večkrat sprl s svojimi kritiki. Tokrat pa ga je Halley le prepričal, naj o vsem tem napiše knjigo. Tako je leta 1687 (na Halleyeve stroške) izdal knjigo, ki velja za največje znanstveno delo, kar jih je bilo kdaj napisanih.

Njen naslov je **Philosophiae Naturalis Principia Mathematica** oziroma v prevodu **Matematični principi naravoslovja** in je, kot je bilo takrat v navadi, napisana v latinščini. V njej je Newton na eleganten način podal celotno podobo vesolja. Jasne razlage in privlačne matematične izpeljave so v evropskih učenjakih vzbujale občudovanje in spoštovanje. Presek je "Principom" ob tristoletnici njihovega nastanka posvetil celo številko.¹

Potem ko je leta 1687 Newton pred kraljem Jakobom II. uspešno branil pravice univerze v Cambridgeu, so ga izvolili za poslanca v parlamentu. Hodil je na vse seje, vendar ni nikoli govoril. Ob neki priložnosti je sicer vstal, zato so vsi onemeli, da bi slišali velikega znanstvenika. Toda Newton je le prosil, naj zaradi prepiha zaprejo okno.

Petdesetleten je Newton doživel živčni zlom in skoraj dve leti preživel v odmaknjenosti. Nekateri mislijo, da se je pri alkimističnih poskusih zastrupil z živim srebrom ali s talijem, drugi pa so prepričani, da so neverjetni napori osemnajstmesečnega pisanja "Principov" zahtevali svoj davek.

¹ J. Strnad : *Do Newtonovih zakonov - Ob tristoletnici "Principov"*, Presek 14 (1986/87), štev. 7



Leta 1731 so v čast Isaaca Newtona skovali medaljo v kovnici v londonskem Towru. Na eni strani je podoba slavljenca, na drugi pa alegorična figura matematike z latinskim napisom "Felix cognoscere causas" (Srečnej, ki pozna vzroke). Podoba prikazuje Znanost, ki v rokah drži upodobitev sončnega sistema.

Leta 1696 je bil Newton imenovan za nadzornika državne kovnice denarja, čez tri leta pa je napredoval do upravnika kovnice. Na tem mestu je bil odgovoren za kovanje denarja. Imenovanje je bilo sicer za Newtona velika čast, vendar se je s tem prekinilo njegovo znanstveno delo. Novo delovno dolžnost je izpolnjeval s takšnim zagonom, da je povzročil pravo revolucijo. Postopke kovanja denarja je izpopolnil do take mere, da je postal strah in trepet ponarejevalcev.

Švicarski matematik Johann Bernoulli (1667 - 1748) in nemški matematik Gottfried Leibniz sta leta 1696 evropskim matematikom postavila dva problema. Eden izmed njiju je naslednji problem: Zamislimo si dve točki, ki ju slučajno izberemo v prostoru, vendar ne na isti višini. Po kakšni krivulji se mora brez trenja in samo pod vplivom sile teže gibati točka, da bo v najkrajšem času prispela iz zgornje točke v spodnjo? To je tako imenovani problem **brahistokrone** (= najkrajšega časa).² Potem ko so se evropski matematiki z njim ukvarjali že šest mesecev, je zanj zvedel Newton. Utrujen od težkega dela v kovnici se je pravkar vrnil domov. Problem je rešil še isti dan in njegovo rešitev (skupaj z rešitvijo drugega problema) anonimno sporočil Kraljevi družbi. Ko je Bernoulli videl rešitev, je v trenutku prepoznal avtorja. "Prepoznal sem leva po njegovih šapah," je vzkliknil.

Newton je bil trdno prepričan v obstoj vsevednega Stvarnika vesolja, sam sebi pa se je zdel kot deček, ki se igra na morski obali in se zabava s tem, da občasno najde kako lepo školjko, pri tem pa pred njim leži veliki ocean resnice popolnoma neodkrit. Da je bil res zelo skromen (ali pa se je znal takega delati), vidimo iz nekega leta 1676 napisanega pisma, kjer je zapisal: "Če sem videl dlje kot drugi ljudje, je to zato, ker sem stal na ramenih velikanov." Seveda so tudi drugi ljudje v tistem času stopali na ramena istih velikanov, toda le Newton je videl najdlje.

Veliki učenjak je bil vedno zelo prevzet s svojim delom in zato odmaknjen od dogajanj v okolici. O njegovi raztresenosti kroži precej zgodb. Če gre verjeti eni izmed njih, je Newton nekoč pri jahanju razjahal svojega konja in ga začel voditi po klancu navzgor. Ko pa je hotel konja ponovno zajahati, je presenečen ugotovil, da v roki drži samo uzdo, medtem ko se njegov konj veselo potepa naokrog.

² Radovedni bralec si lahko rešitev tega problema ogleda v knjigah F. Križanič : *Navadne in parcialne diferencialne enačbe*, I. Vidav: *Variacijski račun*.

Newton je bil že za življenja spoštovan kot malokateri znanstvenik. (Z njim se morda lahko primerjata le grški matematik Arhimed in nemški fizik Einstein.) Dosegel je vsa priznanja in časti, na katera lahko človek v svoji akademski karieri tiho upa. Vse od leta 1703 do smrti je bil predsednik Kraljeve družbe, leta 1705 pa mu je kraljica Ana podelila plemiški naziv. Ko je 20. 3. 1727 v Londonu umrl, so ga z vsemi častmi pokopali v westminstrski opatiji. Veliki francoski književnik Voltaire (1694-1778), ki je bil takrat v Angliji na obisku, je z občudovanjem ugotavljal, da so matematika počastili, kot drugod počastijo le kralje.

Roman Drnovšek

Prosén M., MALA ASTRONOMIJA, Math, Ljubljana 1991, 96 str.

Pri založbi Math d.o.o. v Ljubljani je leta 1991 na 96 straneh izšla knjiga astronoma Marijana Proséna: MALA ASTRONOMIJA. Plodoviti pisec je tokrat dopolnil slovensko poljudno-znanstveno astronomsko literaturo s knjigo, ki na relativno malo straneh veliko pove. Knjigi se pozna, da je pisana s pedagoškimi izkušnjami in z ljubeznijo do stroke, ki ji avtor pripada. Knjiga je namenjena predvsem srednješolski mladini, dobrodošla pa bo vsakemu, ki želi dobiti o sodobni astronomiji kolikor toliko zaključeno osnovno podobo.

Knjiga je pisana tako, da bralca spodbuja k premišljevanju in samostojnemu študiju ter daje tudi navodila za preprosta astronomska opazovanja.

Snov je razporejena v 6 poglavij. Uvodnemu poglavju Astronomija - naravoslovna veda, sledijo poglavja: Nebesna kroglja, Opazovalne naprave, Osončje, Zvezde, Galaksije. Bralcu bosta ob zaključku knjige dobrodošla povzetek obravnavane snovi in sklep, ki nakazuje pot naprej. Na koncu vsakega poglavja so vaje in vprašanja, ki naj vzpodbudijo k samostojnemu delu in študiju. K temu naj pripomore seznam Viri in literatura, kjer so navedeni v slovenskem jeziku dostopni poljudni članki in knjige iz astronomije.

V Dodatku nahajamo 4 zvezdne karte (žal brez razlage za uporabo) ter mnoge koristne podatke in tabele o Zemlji, Soncu, Luni, planetih in zvezdah. Slike so primerne, tekst pri nekaterih slikah pa preskop, nekaj jih je brez teksta (npr. slika na strani 33). Računalniške slike so zanimive, vendar so nekatere blede oziroma premalo kontrastne (slike na straneh 32 in 47).

Žal na svetu skoraj ni knjige brez pomanjkljivosti. Tako tudi Mala astronomija ni izjema: Na strani 11 beremo razlago (slika in tekst), da je Veliki voz le del ozvezdja Velikega medveda, na straneh 82 in 91 pa avtor

NOVE KNJIGE

Ursa Major prevaja z Veliki voz. Obrazec za izračun zemljepisne širine na strani 16 je napačen, tekst in slika pa sta pomanjkljiva. Obrazec na strani 20 spodaj velja tudi v primeru, če je deklinacija negativna. Na strani 24 se je za premer Sonca zapisalo 1,4 milijarde km namesto 1,4 milijona km, na strani 51 2000 planetoidov namesto 4000, na strani 86 pa letnica 1848 namesto 1846. Tekst v zgledu na strani 53 je pomanjkljiv, saj bralcu ni kar tako jasno, zakaj velja $a = r/2$. Moti tudi neskladnost nekaterih podatkov: Na strani 31 ima Uran 5 satelitov, na strani 86 pa 15. Na strani 42 je navedeno, da vsebuje Sonce 330000 Zemljinih mas, na strani 84 pa 333000 mas Zemlje. Na strani 67 je oddaljenost Sonca od središča Galaksije 30000 svetlobnih let, na strani 87 pa 25000. Zelo dobrodošlo bi bilo tudi stvarno kazalo, ki pa ga knjiga nima.

Navedene pomanjkljivosti (ki jih skrben pregled lahko odpravi) bistveno sploh ne zmanjšujejo vrednosti knjige; zato jo priporočamo vsem, ki jim je namenjena.

Bogdan Kilar

Sitar S., JOŽEF STEFAN, Park, Ljubljana 1993, 176 str.

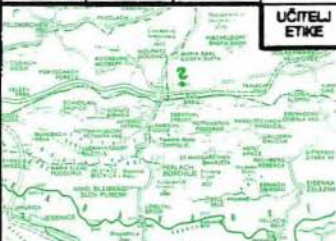
Večina študentov po svetovnih univerzah med študijem nikoli ne sliši za dosežke kakega Slovenca. Po drugi strani pa je nemogoče študirati fiziko kjerkoli na svetu, ne da bi trčili na delo in ime slovitega Slovenca Jožefa Stefana, ki je umrl pred 100 leti. Žal se le redki fiziki po svetu zavedajo, da je bil Stefan Slovenec, pa tudi sami se premalo zavedamo, da je mogoče z našo znanostjo vsaj tako uspešno promovirati Slovenijo, kakor je to mogoče na primer z literaturo.

Precejšnji del Sitarjeve odlične knjige govori o razmerju med umetnostjo in znanostjo, saj je mladi Stefan deloval tudi kot pesnik in publicist. To pa ni edino, v čemer se Sitarjevo delo loči od običajne biografije. Poleg Stefanovega življenja in dela je v knjigi skiciran tudi razvoj slovenske fizike skupaj z drugimi zanimivimi zgodovinskimi podatki, ki Stefana plastično postavljajo v čas in prostor ter osvetljujejo neizbrisno sled, ki jo je ta veliki Boltzmannov učitelj zapustil nam vsem.

Prepričan sem, da bo lahko knjiga služila inventivnemu učitelju v šoli za obvezno branje in govorne vaje, saj kar spodbuja diskusije, v katerih bodo lahko učitelji in učenci dopolnjevali avtorjeve poudarke, pa če se z njegovimi pogledi strinjajo ali ne. Menim, da knjiga sodi na police vsakega mladega razumnika.

Tomaž Pisanski

KRIŽANKA

					MOČAN EKSPLO- ZIV	BELJAKO- VINASTA SNOV, KERATIN	$I = \sigma T^4$	ETIOPSKA POKRAJINA, DOMOVINA KAVE	POVRŠIN- SKA MERA	
				SEVERNO ATLANTSKA RIBA						
				SLOVENSKI KOPAR (FRANCE)						
				JANEZ STRNAD						
									KRAJ JUŽNO OD PIVKE	
										BALZAC JUNAJ STRICE
AVTOR MARKO BOKALIČ	ORODJE ZA ZEMELJSKA DELA	VRTEČI SE DEL ELEKTRO- MOTORJA	OSNOVNA MERA V FIZIKI	VRSTA VRBE VRSTA LOJJEVCA				DONAVSKA LUKA V VOJVO- DINI		
SLOV PEVEC (VLADO)								PLATONSKA KOMNA ENOTA ZA MOČ		
VELIKA FRANCO- SKA REKA					ČASNI- KARSTVO					
KORALNI OTOK					PRED- PLAČLO GLASBENI POJEM					
POGON- SKI STROJ						ZVONKO TRONTELJ PEŠNICA NOVY			BELJAKOVINSKO ŽN ŽIVALSKEGA IZVOJ UDAREC Z NOG	
PREDPISI								NEMŠKI FIZIK, KI JE DODATNO UTEMELJIL STEFANOV ZAKON NAJBOLJŠA ŠOL. OCENA		
				UČITELJ ETIKE				DOTA- KANJE VILKO UKMAR		
				80 SEKUND						

OB STOLETNICI SMRTI SLOVENSKEGA FIZIKA

				NEMŠKI FILOZOF (IMMANUEL)	NESPAMETNA ŽENSKA	SLOV. FIZIK V ZDA (DUŠAN)	OSEBNI ZAJMEK	OZVEZDJE OB NEBES- NEM EKVATORJU	MEZOZOIK: TRIAS ? KREDA		EGIPČAN- SKI BOG
			SEMENSKO VLAKNO INDONE- ZIJSKEGA DREVEŠA								
			VELE- MESTNA CESTA								
			NABIT DELEC								
NEKDANJA OZNAKA USTANOVE NA SLIKI											
OV C JK	MESTO OB TISI V VOJVO- DINI	SOONI PISAR					TKANINA Z VTAKNIMI KOVIN- SKIMI NITMI	GRŠ.ČRKA			
	DEL ŽELEZ. PROGE							TEŽKO DRUŽBENO STANJE			
					NASIČEN OGLJIKOVODIK (SPLOŠNO)						
					2	SL. PISATELJ (SMILJAN)					
			SLNOVARNI- KA (MOČKA)						POJAV, KI GA JE PROUČEVAL STEFAN	KIRURŠKI NOŽ	
			SOZVOČJE TREH TONOV				LEPOTNA KRALJICA				
							VAS NAD OSPOM				
	KENJSKI VOJITELJ DANIEL	SLOV. KOROŠKI PESNIK (FRAN)	POVEČANJE DOLŽINE VZMETI								
			POLTIK MESIC								
ILO JA					RIMSKA 1001		IGRALKA GARDNER				
					FIZIKALNA KOLUČINA		IT. IGRALEC (FRANCO)				
								ALUMINIJ			
								NIKO PRIJATELJ			
								IVO BAN			
	PRIPO- VEDNA PEŠNITEV					OPERNI SPEVI					
	TEKOČA VODA					IZUMI- TELJ DINAMITA (ALFRED)					

ŠTEVILA, KI SO VSOTE DVEH KUBOV

O slavnem indijskem matematiku Srinivasi Ramanujanu (1887 - 1920) je šel glas, da je vsako naravno število njegov osebni prijatelj. Vedel je namreč, kaj je značilno za posamezna števila. Ko je med bivanjem v Angliji zbolel in nekaj časa ležal v neki londonski bolnišnici, ga je obiskal angleški matematik G.H. Hardy. Povedal je, da se je pripeljal s taksijem s številko 1729 in da se mu ta številka zdi pusta in nezanimiva. "Prav nasprotno", je rekel Ramanujan, "zelo zanimiva je. 1729 je najmanjše naravno število, ki se da na dva različna načina zapisati kot vsota dveh kubov." Res je

$$1729 = 1^3 + 12^3 = 9^3 + 10^3.$$

Ali so še druga števila s to lastnostjo? Preden odgovorimo na to in podobna vprašanja, si pogledajmo, kako je z vsotami kvadratov.

Najmanjše naravno število, ki se da na dva različna načina zapisati kot vsota dveh kvadratov, je 25, namreč

$$25 = 3^2 + 4^2 = 5^2 + 0^2.$$

Prav tako je

$$50 = 1^2 + 7^2 = 5^2 + 5^2.$$

V drugi izrazitvi števila 25 nastopa sumand nič, v drugi izrazitvi števila 50 sta sumanda enaka in zato nista tuji si števili. Pač pa se da 65 zapisati na dva načina kot vsota kvadratov dveh od nič različnih tujih si števil, namreč

$$65 = 1^2 + 8^2 = 4^2 + 7^2.$$

Bralec naj se sam prepriča, da velja isto za števila 85, 145 in 221. So pa tudi števila, ki jih lahko izrazimo na več kakor dva načina kot vsoto dveh kvadratov, na primer 1105 na štiri načine:

$$1105 = 4^2 + 33^2 = 9^2 + 32^2 = 12^2 + 31^2 = 23^2 + 24^2.$$

Povrnimo se zdaj h kubom! Ni vsako naravno število vsota dveh kubov. Pravzaprav so taka števila zelo redka. Na primer $9 = 1^3 + 2^3$ je, 10, 11, 12, 13, 14 in 15 pa niso.

Naj bo dano naravno število m . Če je vsota dveh kubov, obstajata naravni števili x in y , ki zadoščata enačbi

$$x^3 + y^3 = m. \quad (1)$$

Pri danem m bi radi ugotovili, ali je ta enačba rešljiva z naravnima številoma x in y , in če je, našli rešitev. Obstaja več metod, kako se lotiti te naloge. Oglejmo si najpreprostejšo, namreč s poskušanjem. Zapišimo enačbo (1) v obliki

$$y^3 = m - x^3.$$

Ker niti x niti y ni negativen, mora biti

$$0 \leq x^3 \leq m, \quad \text{torej} \quad 0 \leq x \leq \sqrt[3]{m}.$$

V izraz $m - x^3$ vstavimo za x zaporedoma 0, 1, 2, ... do največjega naravnega števila, ki ni večje od $\sqrt[3]{m}$, in vsakokrat pogledamo, ali je razlika $m - x^3$ popolni kub. S končno mnogo koraki tako ugotovimo, ali je enačba (1) rešljiva, in najdemo rešitev, kadar je.

Zgled 1. Naj bo $m = 1241$. Tu je $\sqrt[3]{m} = \sqrt[3]{1241} < 11$. S poskušanjem ugotovimo, da je izraz $1241 - x^3$ popolni kub pri $x = 8$:

$$1241 - x^3 = 1241 - 8^3 = 1241 - 512 = 729 = 9^3.$$

Ena rešitev enačbe (1) je v tem primeru $x = 8$, $y = 9$, število 1241 pa je vsota dveh kubov: $1241 = 8^3 + 9^3$.

Zgled 2. Pri $m = 1320$ imamo $\sqrt[3]{m} = \sqrt[3]{1320} < 11$. Za noben x med 0 in 10 ni razlika $1320 - x^3$ popolni kub. Zato število 1320 ni vsota dveh kubov.

Včasih ima enačba (1) dve ali celo več rešitev v naravnih številih. Tedaj se da m zapisati na dva (ali več) načinov kot vsota dveh kubov. Vendar je treba tu opozoriti na tole: Število 35 lahko izrazimo v obliki $35 = 2^3 + 3^3$ in v obliki $35 = 3^3 + 2^3$. Vendar v tem primeru ne bomo rekli, da smo 35 zapisali na dva načina kot vsoto dveh kubov, saj smo drugi zapis dobili tako, da smo v prvem zapisu samo sumanda zamenjali. Rešitvi (x_1, y_1) in (x_2, y_2) enačbe (1) dasta različna zapisa le tedaj, kadar se x_2 razlikuje od x_1 in y_1 (potem se seveda tudi y_2 razlikuje od x_1 in y_1). Če smo dve taki rešitvi našli, je

$$m = x_1^3 + y_1^3 = x_2^3 + y_2^3 \quad (2)$$

in smo m izrazili na dva različna načina kot vsoto dveh kubov.

Ramanujan je ugotovil, da je najmanjši m , pri katerem ima enačba (1) dve različni rešitvi v naravnih številih, enak 1729. Ni pa to edini tak m . Nadaljnji primer je

$$443889 = 17^3 + 76^3 = 38^3 + 73^3. \quad (3)$$

Ali je v (2) lahko katero izmed števil x_1, y_1, x_2, y_2 enako nič? (Spomnimo se primera s kvadrati: $25 = 3^2 + 4^2 = 5^2 + 0^2$.) Denimo, da bi bil $y_2 = 0$. Potem bi veljala enačba

$$x_1^3 + y_1^3 = x_2^3, \quad (4)$$

kjer so x_1, y_1, x_2 naravna števila in nobeno od njih ni enako nič. To pa je Fermatova enačba za tretje potence. Vemo, da Fermatova trditev za tretje potence velja: Enačba (4) ni rešljiva v naravnih od nič različnih številih. Zato se nobeno naravno število, ki je kub, ne da izraziti kot vsota dveh od nič različnih kubov.

Doslej nas je zanimalo vprašanje, kdaj je m vsota dveh kubov **naravnih** števil, in smo zato iskali rešitve enačbe (1) le v naravnih številih. Lahko pa si zastavimo tudi vprašanje, kdaj je m vsota dveh kubov **celih** (pozitivnih ali negativnih) števil. V tem primeru moramo iskati rešive enačbe (1) v celih številih x in y . Ker je m pozitiven, je kvečjemu eno izmed števil x in y negativno. Pa naj bo eno negativno! Smemo privzeti, da je y negativen. Zamenjajmo y z $-y$, kjer je zdaj y naravno število. Ker je $(-y)^3 = -y^3$, imamo namesto enačbe (1) enačbo

$$x^3 - y^3 = m. \quad (5)$$

Spet iščemo njene rešitve v naravnih številih x in y . Če rešitev obstaja, je m razlika dveh kubov naravnih števil, npr. $7 = 2^3 - 1^3$.

Kako pri danem m ugotovimo, ali je enačba (5) rešljiva z naravnima številoma x in y ? Ker je m pozitiven, mora seveda biti $x > y$ in, ker sta x in y naravni števili, je x najmanj za 1 večji od y , torej $x \geq y + 1$. Zato velja ocena

$$m = x^3 - y^3 \geq (y + 1)^3 - y^3 = 3y^2 + 3y + 1 > 3y^2.$$

Potemtakem je

$$3y^2 < m \quad \text{in od tod} \quad y < \sqrt{m/3}.$$

V izraz $m + x^3$ vstavimo za x po vrsti 0, 1, 2, ... do največjega naravnega števila, ki ne presega $\sqrt{m/3}$, in vsakokrat pogledamo, ali je ta izraz popolni kub. Tako spet v končno mnogo korakov ugotovimo, ali je enačba (5) rešljiva in, če je, najdemo rešitev.

Zgled 1. Naj bo $m = 169$. Tu je $\sqrt{m/3} = \sqrt{169/3} < 8$. V izraz $169 + x^3$ vstavimo za x števila od 0 do 7. Pri $x = 7$ dobimo popolni kub

$$x^3 + 169 = 7^3 + 169 = 343 + 169 = 512 + 8^3.$$

Zato je 169 razlika dveh kubov naravnih števil: $169 = 8^3 - 7^3$. Ker lahko pišemo $169 = 8^3 + (-7)^3$, je 169 tudi vsota dveh kubov celih števil.

Zgled 2. Vzemimo $m = 200$, tako da je $\sqrt{m/3} = \sqrt{200/3} < 9$. Preskus pokaže, da izraz $200 + x^3$ ni popolni kub za nobeno naravno število x med 0 in 8. Zato število 200 ni razlika dveh kubov.

Če ima enačba (1) dve različni rešitvi v celih številih x in y , smo izrazili m na dva načina kot vsoto dveh kubov celih števil. Najmanjši pozitivni m , pri katerem obstajata dve taki rešitvi, je 91. Imamo namreč

$$91 = 3^3 + 4^3 = 6^3 + (-5)^3.$$

Ali obstajajo naravna števila, ki se dajo na tri različne načine izraziti kot vsote dveh kubov celih števil? Obstajajo in celo taka so, ki jih lahko izrazimo na več kakor tri načine. Kako pridemo do njih? Ena metoda je tale: Namesto celoštevilskih rešitev enačbe (1) iščemo njene racionalne rešitve, to je take, kjer sta x in y racionalni števili. Seveda je vsaka rešitev v celih številih tudi racionalna rešitev, narobe pa ne velja in je zato racionalnih rešitev v splošnem dosti več kakor celoštevilskih. Izkaže se, da ima enačba (1) pri nekaterih m celo neskončno racionalnih rešitev (celoštevilskih pa je vselej le končno mnogo). Povejmo brez dokaza, da to velja pri $m = 7$ in $m = 9$. Tukaj tudi ne bomo opisovali metod, ki nas privedejo iz danih racionalnih rešitev do novih takih rešitev.

Naj bo torej m število, pri katerem ima enačba (1) neskončno racionalnih rešitev, in naj bo $r > 1$ poljubno naravno število. Izberimo si r racionalnih rešitev enačbe (1), ki jih zaznamujemo z

$$(x_1, y_1), (x_2, y_2), \dots, (x_r, y_r). \quad (6)$$

Za vsak indeks i velja zveza $x_i^3 + y_i^3 = m$. Vsi x_i in y_i so racionalna števila in se dajo zato zapisati v obliki okrajšanih ulomkov. Če je D najmanjši skupni imenovalac teh ulomkov, so $Dx_1, Dy_1, Dx_2, Dy_2, \dots, Dx_r, Dy_r$ cela števila.

Oglejmo si zdaj enačbo

$$x^3 + y^3 = D^3 m. \quad (7)$$

Za vsak indeks i zadoščata $x = Dx_i$ in $y = Dy_i$ tej enačbi. Res je

$$x^3 + y^3 = (Dx_i)^3 + (Dy_i)^3 = D^3(x_i^3 + y_i^3) = D^3 m.$$

Tako smo našli r celoštevilskih rešitev enačbe (7), število $D^3 m$ pa se da na r različnih načinov zapisati kot vsota dveh kubov celih števil, namreč

$$D^3 m = (Dx_1)^3 + (Dy_1)^3 = (Dx_2)^3 + (Dy_2)^3 = \dots = (Dx_r)^3 + (Dy_r)^3. \quad (8)$$

Zgled. Povedali smo, da ima enačba

$$x^3 + y^3 = 7$$

neskončno racionalnih rešitev. Vzemimo naslednje tri

$$x_1 = 2, y_1 = -1; \quad x_2 = \frac{5}{3}, y_2 = \frac{4}{3}; \quad x_3 = \frac{73}{38}, y_3 = -\frac{17}{38}.$$

Najmanjši skupni imenovalac teh ulomkov je $D = 114$. Zato lahko zapišemo število $7 \times 114^3 = 10370808$ na tri načine kot vsoto dveh kubov:

$$10370808 = 190^3 + 152^3 = 228^3 + (-114)^3 = 219^3 + (-51)^3. \quad (9)$$

V izrazitvah (8) niso vselej vsi kubi pozitivni, ker so lahko nekatera izmed števil x_i in y_i negativna. V pravkar navedenem zgledu sta dva kuba negativna. Velja pa tole: Če ima enačba (1) pri nekem m neskončno racionalnih rešitev, ima tudi neskončno pozitivnih racionalnih rešitev. Zato smemo privzeti, da so vse rešitve (6) pozitivne. Tako pridemo do števila $D^3 m$, ki se da zapisati na r različnih načinov kot vsota dveh kubov naravnih števil.

Pri natančnejšem ogledu izrazitve (9) opazimo, da imata 190 in 152 skupni faktor 38, nadalje 228 in 114 skupni faktor 114, 219 in 51 pa skupni faktor 3. Število 10370808 smo sicer izrazili na tri različne načine kot vsoto dveh kubov, vendar ne kot vsoto dveh kubov tujih si celih števil. Ali sploh obstajajo naravna števila, ki se dajo zapisati na tri načine kot vsota dveh kubov tujih si celih števil? Obstajajo, in sicer je najmanjše med njimi število 3242197, pripadajoča izrazitev pa se glasi

$$3242197 = 76^3 + 141^3 = 85^3 + 138^3 = 202^3 + (-171)^3. \quad (10)$$

Še vedno nismo povsem zadovoljni: Zadnji člen je tu negativen. Paul Vojta pa je našel leta 1983 število, ki se da izraziti na tri različne načine kot vsota dveh kubov pozitivnih tujih si celih števil. In sicer je

$$15170835645 = 517^3 + 2468^3 = 709^3 + 2456^3 = 1733^3 + 2152^3. \quad (11)$$

Ni znano, ali obstajajo števila, ki se dajo na štiri načine zapisati kot vsote dveh kubov tujih si naravnih števil.

Na koncu se spet povrnimo k Ramanujanu. Hardy ga je tedaj v bolnišnici vprašal, če morda pozna najmanjše naravno število, ki se izraža na dva različna načina kot vsota dveh četrtih potenc naravnih števil. Ramanujan je odgovoril, da ga ne pozna, da pa mora biti to število po njegovem mnenju izredno veliko. V knjigi *An Introduction to the Theory of Numbers* navajata avtorja Hardy in Wright tale primer

$$635318657 = 133^4 + 134^4 = 59^4 + 158^4. \quad (12)$$

Število 635318657 je najmanjše s to lastnostjo.

Naloge

1. Koliko je od 1 do 1000 naravnih števil, ki so vsote dveh kubov naravnih števil (oziroma so kubi)?
2. Katera izmed števil 218, 360, 728, 866, 930 se dajo zapisati kot razlike dveh kubov naravnih števil?
3. Razstavi na prafaktorje števila, ki nastopajo v izrazitvah (3), (10) in (11)!
4. Dokaži, da nobeno liho praštevilo ni vsota dveh kubov naravnih števil!

Navodilo:

V zadnjih dveh nalogah si pomagamo z identiteto $x^3 + y^3 = (x + y)(x^2 - xy + y^2)$.

Ivan Vidav

SKRIT RAČUN

Poišči rešitev naslednjega kriptograma:

$$VIDAV = 7 \cdot (AS)^2$$

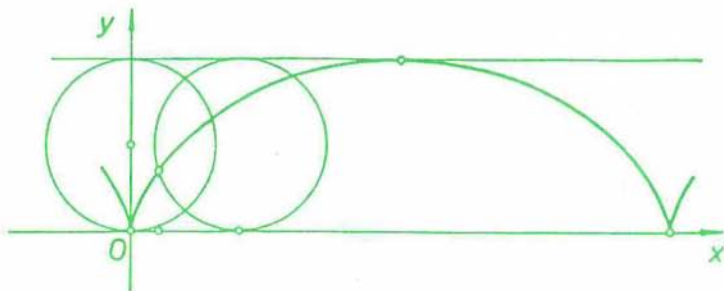
Posamezne črke pomenijo številke v desetiškem zapisu, različne črke seveda različne številke.

Presek

SMUČANJE PRI VELESRLALOMU

Tekmovalc v veleslalomu vidi ob štartu pred seboj klanec in prva vratca. Po kateri poti naj se požene, da bo najhitrejši? Ali naj se usmeri naravnost proti notranjemu količku? Ta pot je najkrajša, a ni najboljša, če količek ne stoji v smeri naravnost proti dolini. Tekmovalc najbolj pospeši, če se usmeri naravnost proti dolini. Toda ta pot ga vodi od količka proč in je daljša. Tekmovalc ne razmišlja, ampak po izkušnjah poišče srednjo pot. Najprej se požene naravnost proti dolini, da čim prej doseže kolikor mogoče veliko hitrost, in nato postopno zavija proti količku.

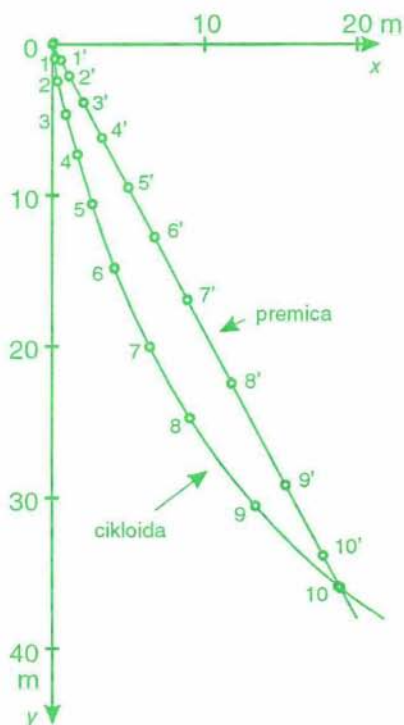
Podobno vprašanje so si postavili matematiki že pred koncem 17. stoletja. Po kakšni krivulji v navpični ravnini naj se giblje drobno telo, da bo v najkrajšem času prišlo iz začetne točke v končno? Najbolje je misliti na preluknjano kroglico, ki drsi brez trenja po debelejši žici z obliko poti od prve do druge točke. O krivulji s to lastnostjo, imenovali so jo *brahistokrono*, so razpravljali Gottfried Wilhelm Leibniz (1646 do 1716) in brata Jakob (1654 do 1705) in Johann Bernoulli (1667 do 1748). Starejši Bernoulli velja za začetnika *variacijskega računa* prav zaradi svojega prispevka k spoznanju (v letih 1696 in 1697), da je brahistokrona *cikloida*. To krivuljo opiše točka na obodu valja, ki se kotali po vodoravni podlagi, ne da drsel (slika 1).



Slika 1. Po cikloidi se giblje točka na obodu valja, ki se enakomerno kotali po vodoravni podlagi in nič ne drsi.

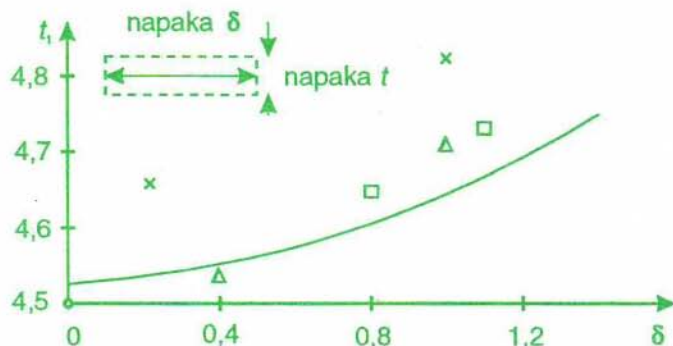
Pri smučanju je klanec brez grbin nagnjena, ne navpična ravnina. Od začetne točke, to je od štarta, do končne, to je do notranjega količka, dospe tekmovalc najhitreje, če se smuča po cikloidi. Cikloida je obrnjena tako, da ima ost v začetni točki. Pri tem zanemarimo trenje smučí na snegu in zračni upor ter ne upoštevamo, da se tekmovalc poganja s palicami. Francoski smučarji so se namenili misel podrobneje preskusiti. Izbrali so si

gladek zglajen klanec z nagibom dobrih 26° in postavili točko, do katere se bilo treba prismočati, 37 metrov po klancu v smeri proti dolini in 19 metrov vstran (slika 2). Nato so se trije dobri smučarji spustili od prve točke do druge po raznih poteh. Izmerili so jim čas in določili pot. Zapeljali so zdaj po cikloidi, zdaj po zveznici med točkama ali vmesnih krivuljah. Zares so namerili po krivulji, ki se je skoraj prilegala cikloidi, za desetino sekunde krajši čas kot po zveznici (slika 3). Pri času okoli štiri sekunde in pol je vredno upoštevanja.

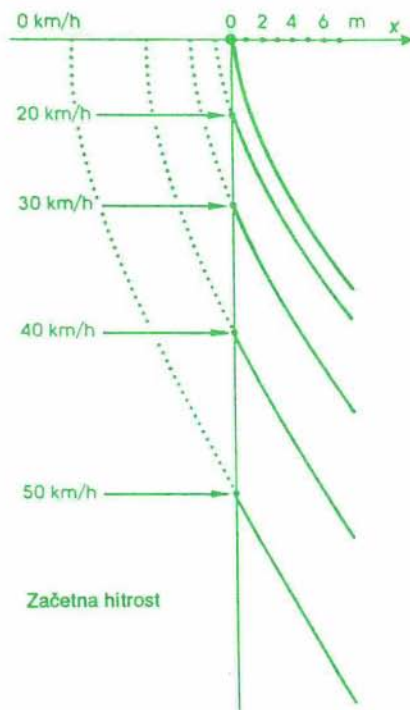


Slika 2. Smučar bi rad porabil najkrajši čas za pot od točke O do točke P. Po cikloidi rabi čas 4,52 sekunde, po premici pa 4,65 sekunde. Lego smučarja v zaporednih desetinah prvega časa (0,452 s) kažejo točke. Po ustreznih točkah je mogoče presoditi, kako smučar po premici zaostaja za smučarjem po cikloidi.

Doslej smo razmišljali le o vožnji od štarta do prvih vratc. Od prvih vratc naprej vozi tekmovalec podobno kot pred prvimi vrati, le da že ima določeno hitrost. Tako je, kot bi se začel smučati više na klancu. Čim večja je začetna hitrost, to je hitrost v prejšnjih vratih, tem manj je cikloida ukrivljena (slika 4). Tako razumemo načelo današnjih tekmovalcev: potegni naravnost (od vratc do vratc), suči kratko (ob količku) - francosko TDVC: *tirer droit, virer court*. Naše razmišljanje ga naknadno potrjuje. Načelo je uporabno pri veleslalomu, pri katerem je treba prevoziti 70 do 90 vratc na klancu z višinsko razliko okoli 300 metrov in srednjim nagibom okoli 25° . Smiselno prilagojeno pa lahko uporabijo tudi pri superveleslalomu in celo pri smuku. Ker ima večjo hitrost, pa tekmovalec ne vozi tako tesno ob količku kot pri veleslalomu, da smučanje ne bi postalo manj zanesljivo.



Slika 3. Na navpično os je nanesen čas, ki ga rabi smučar za pot od točke O do točke P, na vodoravno pa parameter δ . Ta parameter podaja, kako se tir razlikuje od cikloide ($\delta = 0$). Pri premici meri $\delta = 1$. Točke kažejo izmerjene vrednosti za tri različne smučarje, ki so se spustili po šestih različnih tirih. Krivulja kaže izračunani čas. Račun da za cikloido čas 4,52 sekunde in za premico 4,65 sekunde. Izmerjeni čas je zaradi trenja, ki smo ga zanemarili, nekoliko daljši. Napako pri merjenju časa in pri določanju parametra kaže črtkani pravokotnik. Podatki so vzeti iz članka Gilberta Reinischa *Ski: le chemin le plus court n'est pas le plus rapide* (Smučanje: najkrajša pot ni najhitrejša) Recherche 23 (1992) 356.



Slika 4. Čim večja je hitrost v prejšnjih vraticih, tem bolj raven je tir, po katerem je čas za smučanje do naslednjih vratc najkrajši. Premislek po tej risbi potrjuje načelo "potegni naravnost, suči kratko".

Pospremimo razmišljanje z računi. V ravnino z nagibom α postavimo pravokotni koordinati sistem z izhodiščem v začetni točki, vodoravno osjo x in osjo y v smeri naravnost v dolino (slika 1). Mislimo na preluknjano kroglico, ki se brez trenja giblje po ukrivljeni žici. Na kroglico deluje poleg teže še sila žice, ki je vselej pravokotna na smer gibanja. Tako sila žice na kroglici ne opravi nobenega dela. V izreku o kinetični in potencialni energiji upoštevamo tedaj samo kinetično in potencialno energijo: njuna vsota se ne spreminja. Kroglica na začetku miruje v izhodišču, zato je tedaj vsota kinetične in potencialne energije enaka nič, in taka ostane:

$$\frac{1}{2}mv^2 - may = 0.$$

$a = g \sin \alpha$ je komponenta težnega pospeška g po klancu navzdol, to je v smeri osi y . Mase kroglice m se lahko takoj znebimo. Negativni znak potencialne energije opozarja na to, da višina pojema, ko y narašča. Hitrost je določena kot kvocient kratkega odseka poti ds in časovnega razmika dt , v katerem kroglica prepotuje odsek $v = ds/dt$. Ta časovni razmik je $dt = ds/\sqrt{2ay}$ in časovni razmik od začetne točke $T_1 (0,0)$ do končne točke $T_2 (x_1, y_1)$ dobimo tako, da prispevke za vse kratke odseke seštejemo

$$t = \int_{(1)}^{(2)} \frac{ds}{\sqrt{2ay}}.$$

Treba je določiti tir $y(x)$, pri katerem je čas t najkrajši pri določeni začetni in končni točki. Naloga ni lahka in sodi v variacijski račun. Tu jo bomo preskočili in kar zapisali odgovor.

Čas je najkrajši, če se kroglica giblje po cikloidi:

$$x = R(\varphi - \sin \varphi), \quad y = R(1 - \cos \varphi).$$

R je radij valja, s kotaljenjem katerega nastane cikloida, φ pa njegov zasuk. Kratek odsek poti izračunamo s Pitagorovim izrekom:

$$ds = \sqrt{(dy/d\varphi)^2 + (dx/d\varphi)^2} d\varphi = \sqrt{2R(1 - \cos \varphi)} d\varphi = \sqrt{2y} d\varphi$$

in s tem dobimo kar

$$t = \sqrt{\frac{R}{a}} \varphi.$$

Z našimi podatki $\alpha = 26,1^\circ$, $a = 9,8 \text{ ms}^{-2} \sin 26,1^\circ = 4,32 \text{ m/s}^2$, $x_1 = 19 \text{ m}$ in $y_1 = 37 \text{ m}$ najprej numerično rešimo enačbo $x_1/y_1 = 0,514 = (\varphi_1 - \sin \varphi_1)/(1 - \cos \varphi_1)$ in dobimo $\varphi_1 = 1,44$ radiana. S tem sledi $R = y_1/(1 - \cos \varphi_1) = 42,8 \text{ m}$ in $t_1 = \sqrt{R/a} \varphi_1 = 4,52 \text{ s}$.

Za primerjavo izračunajmo še čas po najkrajši poti, po odseku premice, za katero velja $y = (y_1/x_1)x$. V tem primeru je $ds = \sqrt{y_1^2/x_1^2 + 1} dx$ in

$$t = \int_0^{x_1} \frac{ds}{\sqrt{2(y_1/x_1)a}} x^{-1/2} dx = \sqrt{\frac{2(y_1^2 + x_1^2)}{ay_1}} = 4,65 \text{ s}.$$

Po tiru, ki je manj ukrivljen kot cikloida, a bolj kot premica, dobimo vmesne čase (slika 3).

Janez Strnad

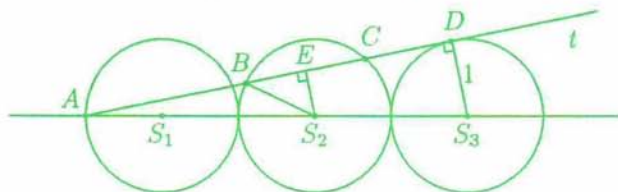
IZRAČUNAJ TETIVO - Rešitev s str. 129

Nalogo so najbrž brez težav ugnali tudi osnovnošolci. Pa si rešitev kljub temu oglejmo. Polmer S_3D tretje krožnice oklepa v točki D s tangento t pravi kot. Prav tako oklepa s t pravi kot spojnica S_2E , kjer je E razpolovišče tetive BC . To pomeni, da sta trikotnika $\triangle AS_2E$ in $\triangle AS_3D$ podobna. Ker so polmeri krožnic enaki 1, sledi iz sorazmerja:

$$\overline{ES_2} : \overline{AS_2} = \overline{DS_3} : \overline{AS_3}$$

$\overline{ES_2} = \frac{3}{5}$ in nato z uporabo Pitagorovega izreka za trikotnik $\triangle BES_2$ še:

$$\overline{BC} = 2\overline{BE} = \frac{8}{5}.$$



Marija Vencelj

Grasselli J., DIOFANTSKI PRIBLIŽKI, DMFA Slovenije, Ljubljana 1992, 204 str. (Knjižnica Sigma; 51)

Med najzanimivejše matematične rokopise iz grško-rimske antike sodi Diofantovo delo *Arithmetica* (šest ohranjenih knjig), ki je nastalo okoli leta 250. Obravnava enačbe s celimi števili in išče njihove celoštevilске in racionalne rešitve. Danes se po Diofantu imenujeta kar dve področji teorije števil: diofantske enačbe in diofantski približki. Prav tako sta tudi naslova Grassellijevih knjig – kratkih uvodov v ti dve področji. "*Diofantske enačbe*" so izšle leta 1984 v Knjižnici Sigma, "*Diofantski približki*" pa ob koncu lanskega leta.

Teorija diofantskih približkov je s pomembnimi rezultati znanih matematikov polno zaživela v drugi polovici prejšnjega stoletja. Klasični del te teorije proučuje določene zakonitosti in vednje racionalnih števil na realni premici. Marsikateri dosežek te teorije se da s preprostimi sredstvi približati bralcu, ki nima posebnega matematičnega predznanja. V tem duhu je pisana naslovna Grassellijeva knjiga. Preglejmo prav na kratko njeno vsebino.

Potrebno gradivo iz splošne teorije števil je pisec zbral v uvodnem poglavju. Večji del tega poglavja zavzema teorija verižnih ulomkov. Nanjo je naslonjen marsikateri dokaz v nadaljevanju knjige, osrednjo vlogo pa odigra v drugem poglavju, kjer se avtor ukvarja z racionalnimi približki iracionalnih števil. Poleg Dirichletovega izreka tu obdelava hkratno aproksimiranje sistemov števil in zato (na elementaren način) uvede pojem racionalne odvisnosti, poglavje pa zaključi z izrekom Minkowskega. V tretje poglavje vključi tudi znameniti Kroneckerjev izrek, v nekoliko zahtevnejšem zadnjem poglavju pa govori o enakomernosti porazdelitve sistemov števil na premici in na ravnini.

V kratkem dodatku pisec dopolni obdelano snov z nekaterimi globljimi rezultati, ki pa jih zaradi zahtevnosti navede brez dokazov. Vsako poglavje ilustrirajo zgledi iz obravnavane snovi, sklene pa ga bogat izbor različno težkih nalog. Rešitve teh nalog so zbrane na koncu knjige.

V Grassellijevi knjigi je teorija diofantskih približkov prvič sistematično obravnavana v slovenskem jeziku. Knjiga je napisana jasno in razumljivo. Z izjemo nekaterih razdelkov, ki so posebej označeni, za njeno razumevanje zadostuje le poznavanje preprostih lastnosti celih, racionalnih in realnih števil. Zato je knjiga dostopna širokemu krogu bralcev – tudi mladim bralcem Preseka, ki jih matematika dovolj privlači.

Boris Lavrič

36. MATEMATIČNO TEKMOVANJE SREDNJEŠOLCEV SLOVENIJE

Leto 1992 je vlada Republike Slovenije razglasila za *Plemljevo leto*, saj je minilo 25 let od smrti velikega slovenskega matematika *prof. dr. Josipa Plemlja*. Pri *Komisiji za popularizacijo matematike v srednji šoli* smo zato menili, da bi bilo lepo, če bi se najboljši slovenski mladi matematiki – srednješolci zbrali na Bledu, Plemljevem rojstnem kraju. Gostiteljici sta bili *Srednja šola gostinsko turistične in ekonomske usmeritve* ter *Osnovna šola prof. dr. Josipa Plemlja*. V soboto, 4. aprila 1992 se je v kraju ob jezeru zbralo 162 učencev ($41 + 42 + 37 + 42$) s 37 srednjih šol. Tri ure in pol so imeli na voljo za reševanje naslednjih nalog:

Prvi letnik

1. V prazna polja tabele vpiši števila, tako da bodo vsote števil iz po treh zaporednih polj tabele med seboj enake in da bo vsota vseh števil v tabeli enaka 217.

			17		20										
--	--	--	----	--	----	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--

2. Za naravna števila $a_0, a_1, a_2, \dots, a_{1992}$ velja

$$a_0^{a_1} = a_1^{a_2} = a_2^{a_3} = \dots = a_{1991}^{a_{1992}} = a_{1992}^{a_0}.$$

Dokaži, da je $a_0 = a_1 = a_2 = \dots = a_{1992}$.

3. Trije mušketirji Athos, Porthos in Aramis so po kratkem pogovoru pod lipo odjahali vsak v svojo smer. Kot med vsakima dvema smerema je 120° . Njihove hitrosti so 10 km/h, 20 km/h in 40 km/h. Dokaži, da so njihovi položaji v vsakem trenutku oglišča pravokotnega trikotnika.

4. V trapezu $ABCD$ z osnovnicama $AB = 2a$ in $CD = a$ je $\angle DAB = 43^\circ$ in $\angle ABC = 47^\circ$. Kolikšna je razdalja med razpoloviščema osnovnic?

Drugi letnik

1. Dokaži, da obstajata kvečjemu dve praštevili, ki sta enaki vsoti četrtyh potenc petih zaporednih praštevil.
2. Dokaži, da je med števili oblike $3+6n$, kjer je n naravno število, neskončno mnogo popolnih kvadratov.

3. Reši sistem enačb

$$x + y + xy = 19$$

$$y + z + yz = 11$$

$$z + x + zx = 14$$

4. Dan je pravokotni trikotnik ABC s pravim kotom pri C . Nad AC narišimo polkrožnico, ki seka hipotenuzo v točki E . Tangenta na polkrožnico skozi E seka stranico BC v točki D . Dokaži, da je trikotnik EBD enakokrak.

Tretji letnik

1. Dano je $2n$ pozitivnih števil $a_1 < a_2 < a_3 < \dots < a_{2n}$. Kako jih je treba postaviti v pare, da bo vsota n produktov po dveh številih iz posameznih parov največja?

2. Za realni števili a in b velja $a^3 - 3a^2 + 5a = 1$ in $b^3 - 3b^2 + 5b = 5$. Izračunaj $a + b$.

3. Dokaži, da je

$$\frac{x(x+1)(x+2)\cdots(x+m-1)}{m \cdot (m-1) \cdot (m-2) \cdots 3 \cdot 2 \cdot 1} \geq x^{1+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\cdots+\frac{1}{m}},$$

če je x poljubno pozitivno število in m naravno število.

4. V enakokrakem trapezu $ABCD$ je $\angle DAC = 45^\circ$. Ogljšče C zavrtimo okrog D za kot 90° v smeri urinega kazalca in dobimo točko E . Kolikšen je kot $\angle EBC$?

Četrty letnik

1. Dokaži, da je za poljubna cela števila $a_1, a_2, \dots, a_n$ število $|a_1 - a_2| + |a_2 - a_3| + \dots + |a_{n-1} - a_n| + |a_n - a_1|$ sodo.

2. V tetivnem štirikotniku $ABCD$ velja

$$BD = \frac{AB + AD}{\sin \varphi + \sin \vartheta},$$

kjer je $\varphi = \angle ADB$ in $\vartheta = \angle ABD$. Dokaži, da je $\varphi + \vartheta = 90^\circ$.

3. Poišči realni števili α in β ($0 \leq \alpha, \beta < \pi$) tako, da bo obstajala funkcija $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, za katero bo veljalo

$$\begin{aligned} f(x \cdot \sin \alpha) - f(x \cdot \sin(\pi + \alpha)) &= \cos(x + \alpha) \text{ in} \\ f(x \cdot \cos \beta) + f(x \cdot \cos(\pi + \beta)) &= \cos(x + \beta) \end{aligned}$$

za vsak $x \in \mathbb{R}$. Poišči še funkcijo $f(x)$.

4. V Indiji Koromandiji lahko pridemo z letalom iz poljubnega mesta v katerokoli drugo mesto. Če ni direktnega leta, lahko tja pridemo s presedanjem. Med potovanjem iz enega mesta v drugo lahko v vsakem mestu pristanemo največ enkrat. Rečemo, da je dolžina poti med mestoma enaka številu vzletov, ki jih doživimo na potovanju med tema dvema mestoma. Dokaži: če obstajata dve najdaljši poti, se sekata.

Tekmovalna komisija je podelila skupaj 6 prvih, 6 drugih in 15 tretjih nagrad ter 43 pohval. Najboljši so bili:

Prvi letnik

Druga nagrada: Mitja PIRC (Gimnazija in ekonomska šola Brežice).

Tretja nagrada: Tadej NOVAK (SENŠ RM Kamnik), Anže SLOSAR (Gimnazija Koper) in Nataša HOČEVAR (CSŠ – Gimnazija Velenje).

Pohvala: Marko ŽNIDARIČ in Domen KROPIN (II. gimnazija Maribor), Dejan VELUŠČEK, Robert ŠIFRER in Matej CEPIN (Gimnazija Bežigrad Ljubljana), Uroš MALI (SŠTZU Novo mesto), Peter KINK (Gimnazija in ekonomska šola Brežice), Damjan MURN (Gimnazija Novo mesto), Andrej STUDEN (Gimnazija Kranj), Andrej BARTOLIČ (NSC Nova Gorica) ter Sonja VIRAG (Gimnazija Murska Sobota).

Drugi letnik

Prva nagrada: Domen PRAŠNIKAR (Gimnazija Bežigrad Ljubljana), Srečko MAKSI-MOVIČ (Gimnazija Poljane Ljubljana) in Boštjan KUZMAN (CSŠ – Gimnazija Velenje).

Druga nagrada: Jernej KOVAČIČ in Petra IPAVEC (Gimnazija Bežigrad Ljubljana).

Tretja nagrada: Iztok KAVKLER (Srednja tehniška šola Celje), Marko OREŠKOVIČ (Gimnazija Bežigrad Ljubljana), Gvido CIGALE (Gimnazija Jurija Vege, Idrija) in Damijan DOLINAR (SENŠ RM Kamnik).

Pohvala: Sonja RATEJ in Urban SENIČAR (Srednja tehniška šola Celje), Kruno ABRA-MOVIČ, Miha MIHIČ in Rok KOVAČIČ (Gimnazija Kočevje), Damijan KUHAR (Gimnazija Kranj), Andrej ERHATIČ (II. gimnazija Maribor), Dejan PARAVAN in Narvika BOVCON (NSC Nova Gorica), Jože PIŽEM (Gimnazija Josipa Jurčiča, Ivančna Gorica), Ivor GRU-BIŠIČ (CSUI Jesenice), Tadej ČEPELJNIK in Meta DEMŠAR (Gimnazija Šentvid Ljubljana), Primož MORAVEC (Gimnazija Novo mesto), Sabina MIHELJ (Gimnazija Koper), Maja POHAR (Gimnazija Poljane Ljubljana), Tanja VEBER (Gimnazija Celje), Samo JEVERICA (Gimnazija Bežigrad Ljubljana), Mitja MARKOVIČ (SKSMŠ Maribor), Sebastijan HROVATIN (Srednja šola Postojna) ter Ana KLANJŠČEK (Gimnazija Tolmin).

Tretji letnik

Prva nagrada: Mitja MASTNAK (Srednja tehniška šola Celje) in Bojan GORNIK (Gimnazija Novo mesto).

Tretja nagrada: Tomaž URBIČ (Gimnazija Novo mesto) in Andrej SRAKAR (Gimnazija Bežigrad Ljubljana).

Pohvala: Jernej DOLENŠEK (Srednja tehniška šola Celje), Marko KRAJNC in Samo FIŠINGER (II. gimnazija Maribor).

Četrty letnik

Prva nagrada: Tomaž CEDILNIK (Gimnazija Bežigrad Ljubljana).

Druga nagrada: Gregor ŠEGA in Gregor PETKOVŠEK (Gimnazija Bežigrad Ljubljana) ter Gregor IRT (Gimnazija Vič Ljubljana).

Tretja nagrada: Damjan DEMŠAR (CSUI Jesenice), Elvis BELAC (Gimnazija Koper), Andrej STROJNIK in Mojca VILFAN (Gimnazija Bežigrad Ljubljana), Tomaž SUŠNIK (Gimnazija Šentvid Ljubljana) in Robi MOHORČIČ (Gimnazija Novo mesto).

Pohvala: Peter LUŽEVIČ (Srednja tehniška šola Celje), Marko SLAPAR (Gimnazija Kranj), Mojca PIŠKURIČ in Marko KUKRIKA (Gimnazija Bežigrad Ljubljana), Matjaž KOTNIK (II. gimnazija Maribor), Smiljan VODOVNIK (Gimnazija Ravne), Tomaž REJEC (Gimnazija Tolmin) in Rok DEŽELAK (Gimnazija Trbovlje).

Pri Komisiji za popularizacijo matematike v srednji šoli smo na osnovi rezultatov tega in prejšnjih tekmovanj ter mednarodnega tekmovanja mest določili pet olimpijcev. Četrtošolec Tomaž Cedilnik in tretješolci Bojan Gornik, Marko Krajnc, Mitja Mastnak ter Andrej Srakar naj bi odpotovali na 33. Mednarodno matematično olimpiado, a nas organizatorji žal niso povabili.

Darjo Felda

VABILO NA MARČEVSKI MESEČNI SESTANEK ASTRONOMSKEGA DRUŠTVA JAVORNIK

ki bo **16. 3. 1993 ob 17h** v predavalnici **F2** na Fakulteti za fiziko, Jadranska 19, Ljubljana. (Tja vas pripelje mestni avtobus številka **1**, smer *Mestni log.*)

Spored:

- **METEORJI, predavanje mag. Arama Karaliča.**

Izvedeli boste, kaj so meteorji in kako jih opazujemo. Predavatelj bo predstavil tudi mednarodno meteorsko organizacijo **IMO** in vas seznanil z možnostjo priključitve opazovanjem v južni Franciji.

RAZVEDRILO

- **Astronomska opazovanja.**

- Poročila o opazovanjih na Javorniku v januarju in februarju 1993 (Niko Štritof, Jure Dobnikar in drugi).
- Vsi, ki ste opazovali sami, pa o tem še niste poročali, ste vabljeni, da nam opišete svoje rezultate in vtise.
- Rezervacije observatorija za april in maj 1993.

- **Poročilo o letnem srečanju slovenskih astronomov.**

Poročal bo predsednik ADJ, dipl. astronom Aleš Arnšek.

- **Pogovor o mladinskih raziskovalnih nalogah s področja astronomije.**

Dijaki, ki iščete nasvet, samo mentorja ali mentorja in temo, oglasite se!

Mesečni sestanek je odprtega tipa; pridete lahko vsi, ki vas zanima astronomija ali delo v društvu. Vabljeni vsi, ki se želite česa naučiti ali pa svoje znanje in izkušnje posredovati drugim.

Za IO ADJ:

Mirjam Galičič

NI ČASA ZA ŠOLO

"Pa saj za šolo nimam časa" je Janezek razložil šolski socialni delavki. "Spim po osem ur na dan, kar skupaj znese, če ima vsak dan 24 ur, približno 122 dni na leto. Ob sobotah in nedeljah ni šole, kar pomeni 104 dni letno. Poletne in zimske počitnice skupaj so kakšnih 75 dni. Približno po dve uri na dan jem, kar znese skupaj 30 dni na leto, vsaj dve uri na dan pa potrebujem za svoj prosti čas – za šport in zabavo – torej še 30 dni na leto." Medtem ko je razlagal, je Janezek na list papirja pisal številke, na koncu pa jih je seštel:

spanje (8 ur na dan) 122

sobote in nedelje 104

počitnice 75

hrana (2 uri na dan) 30

prosti čas (2 uri na dan) 30

skupaj 361 dni

"No, vidite," je nadaljeval. "Tako mi ostane samo štiri dni na leto za bolezni in druge nepredvidene dogodke. In pri tem sploh nisem štel božiča in prvega maja!"

"Presneti mulc, že spet me hoče na finto vreč," si je momljala socialna delavka in se praskala po glavi. Toda vse številke so se lepo seštele.

Kaj je narobe z Janezkovim računom?

Neža Mramor

(Iz knjige Martina Gardnerja "Entertaining Mathematical Puzzles")

OBVESTILO

Od novembra 1992 je pri Marandu v veljavi poseben cenik Borlandovih izdelkov, ki velja za vse v šolstvu. Tako lahko sedaj po posebno ugodnih pogojih kupijo programe vse neprofitne šolske ustanove, vsi zaposleni v šolstvu kot tudi vsi učenci, dijaki in študenti. Slednji morajo ob nakupu priložiti veljavno potrdilo o šolanju. Da je ponudba res izjemna, nam povejo cene paketov (v ceno ni vračunan 5 % prometni davek):

Turbo Pascal 7.0	9.990 SIT
Turbo Pascal za Windows	11.990 SIT
Borland Pascal 7.0	24.990 SIT
Turbo C++ za Windows	11.990 SIT
Borland C++	19.990 SIT
Borland C++ & AF	29.990 SIT
Paradox 4.0 Academic	14.990 SIT
Quattro Pro 4.0 Scholar	14.990 SIT
Quattro Pro za Windows	14.990 SIT

Programne lahko kupite tudi v trgovini komisije za tisk DMFA Slovenije na Jadranski 19, Ljubljana.

OB STOLETNICI SMRTI SLOVENSKEGA MATEMATIKA – Rešitev s str. 160

	UK	AN	NA		P	O	T	O	Č	N	I	K	
	R	O	G		E	R	S	O	B	D	O	L	Ž
	M	A	T		E	M	A	T	I	K	A	K	I
	F	R	A		N	C	M	O	Č	N	I	K	V
O	S	T	E	R	C	M	Č	S	A	R	A	C	
S	U	R	R	E	A	L	I	Z	E	M	D	A	
T	R	G	A	R	D	A	K	A	N	O	N	I	
R	I	K	O					R	O	J	S	T	
A	N	I	C					E	R	K	N	O	
V	A	N	I					Z	A	R	A	T	
A	M	O	N					A	N	T	E	M	

ORNAMENTI NA RAVNINI

Ob besedi *ornament* pomislimo na okrasne trakove, geometrijske vzorce s starogrške keramike,..., ki jih sestavljajo večkrat ponovljeni *osnovni vzorci* ali *motivi*. Morda se ob tem spomnimo tudi slike, ki jo dobimo, če poljuben predmet postavimo med dve vzporedni, nasproti si stoječi ravni zrcali. Njegova slika je neskončnokrat ponavljajoči se vzorec, torej ornament, ki je simetričen ne glede na obliko predmeta samega.

Bralcem Preseka priključimo v spomin katero od slik iz španske Alhambre in članek *Ornamenti na traku* iz 3. številke lanskega Preseka ter zapis o ornamentih in grupah iz letošnje 2. številke.

Definicijo *ornamenta na ravnini* bomo naslonili na definicijo ornamenta na traku. Ornament na ravnini naj bo vsaka risba na ravnini, za katero obstajata dva nevzporedna neničelna vektorja $\vec{a}$ in $\vec{b}$, da velja:

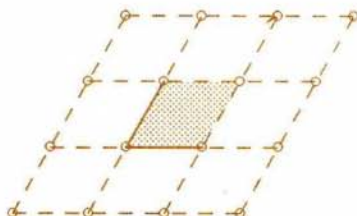
1. Risba je neobčutljiva na translaciji $T_{\vec{a}}$ in $T_{\vec{b}}$. To pomeni, da po premiku za $\vec{a}$ oziroma $\vec{b}$ risba preide sama vase.
2. Risba ni neobčutljiva na nobeno translacijo $T_{k\vec{a}}$ in na nobeno translacijo $T_{k\vec{b}}$, kjer je $0 < k < 1$. To pomeni, da pri nobenem premiku, krajšem od $|\vec{a}|$ v smeri $\vec{a}$, in pri nobenem premiku, krajšem od $|\vec{b}|$ v smeri $\vec{b}$, risba ne preide vase.

V letošnji 2. številki Preseka smo srečali pojem ravninske mreže, določene s parom nevzporednih vektorjev. Očitno je, da je že množica vozlišč ravninske mreže zelo preprost ornament na ravnini (slika 1).

Vzemimo poljuben ornament na ravnini z ustreznima vektorjema $\vec{a}$ in $\vec{b}$ iz definicije in si oglejmo tema vektorjema pripadajočo ravninsko mrežo. Ta je seveda odvisna od izbire začetne točke. Ob primerni povezavi štirih vozlišč te



Slika 1. Vozlišča mreže kot najpreprostejši ornament.



Slika 2. Osnovni paralelogram ornamenta.

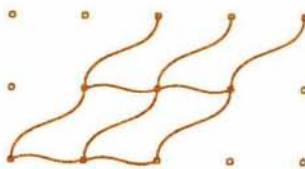
mreže lahko dobimo paralelogram. V primeru, da v notranjosti paralelograma ni nobenega vozlišča mreže, ga imenujemo *osnovni paralelogram ornamenta* (slika2). Pri tem dve sosednji stranici štejemo k paralelogramu, preostalih dveh pa ne.

Zaradi druge zahteve iz definicije ornamenta sledi, da ima osnovni paralelogram od nič različno ploščino. Če na osnovni paralelogram delujemo s translacijsko grupo, ki jo generirata translaciji $T_{\vec{a}}$ in $T_{\vec{b}}$, napolnimo vso ravnino in sicer prekrijemo vsako točko ravnine natanko enkrat.

Del ornamenta, ki leži v osnovnem paralelogramu, imenujemo *osnovni vzorec*.

Osnovnih paralelogramov danega ornamenta je zaradi poljubne izbire začetne točke v mreži neskončno mnogo. Zato je tudi osnovnih vzorcev neskončno mnogo. Zares pa so nekateri med njimi posebej opazni. Lahko bi rekli, da so tipični za dani ornament.

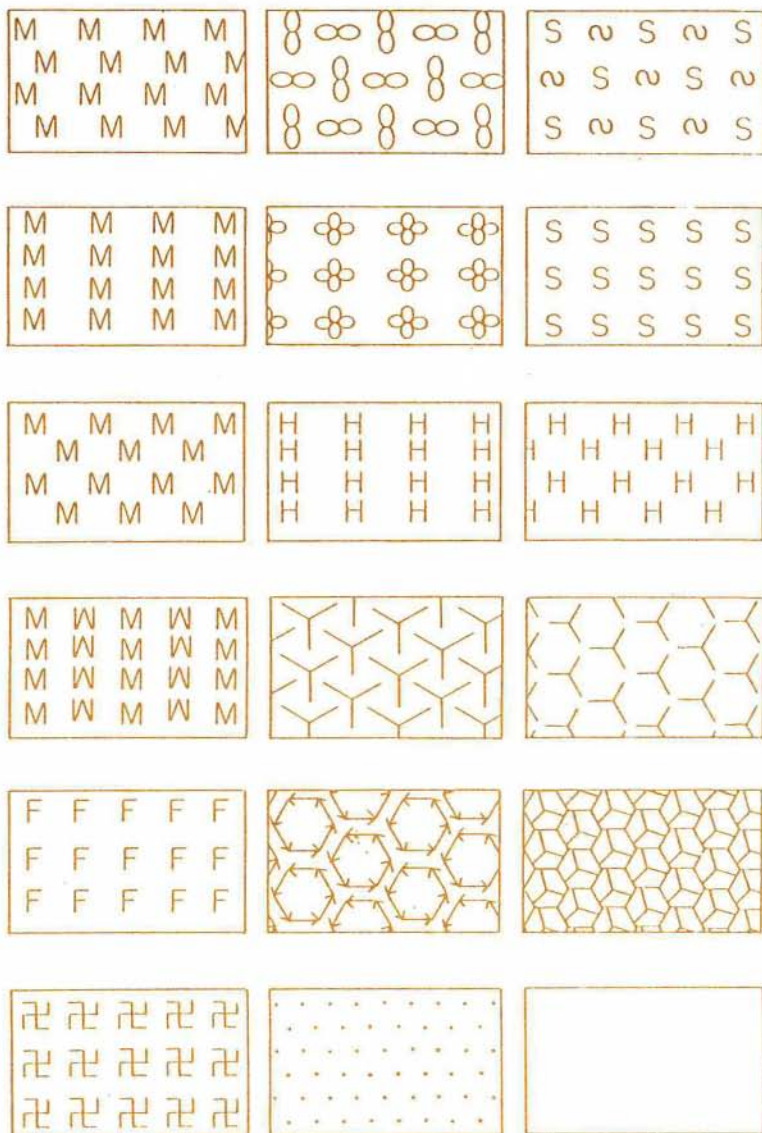
Če v osnovnem paralelogramu po dve in dve vzporedni stranici nadomestimo s skladnima krivuljama, dobimo zopet lik, s katerim napolnimo vso ravnino, če nanj delujemo s translacijsko grupo, ki jo generirata $T_{\vec{a}}$ in $T_{\vec{b}}$. Tudi v tem primeru dobimo vsako točko natanko enkrat. Vsake-mu liku s to lastnostjo pravimo *tipični lik* ornamenta. Vsi tipični liki zopet niso enako opazni. To je odvisno od posameznega ornamenta (slika3).



Slika 3. Tipični lik ornamenta.

Vsem ornamentom je skupno, da simetrijska grupa vsakega ornamenta vsebuje translacijsko grupo, ki jo generirata dve nevzporedni translaciji. Spomnimo se, da je simetrijska grupa grupa vseh izometrij, ki ornament ohranjajo.

Seveda pa se simetrijske grupe različnih ornamentov lahko med seboj razlikujejo. Če imata dva ornamenta isto simetrijsko grupo, pravimo, da sta iste vrste. Že v članku *Ornamenti in grupe* smo omenili, da je na ravnini 17 kristalografskih grup, to je grup, ki ohranjajo ravninsko mrežo. Prvi je že leta 1891 navedel vse ruski kristalograf *Fedorov*, strogo matematično pa sta njihov obstoj dokazala leta 1897 *Fricke* in *Klein* in neodvisno od njiju še *Nieggel* in *Polya* leta 1924. Pravimo jim tudi *tapetne grupe*, kar je za ravninske grupe zelo primeren izraz. Na ravnini imamo torej 17 različnih vrst ornamentov. Shematsko so prikazane na sliki 4.



Slika 4. Grafična ponazoritev sedemnajstih kristalografskih ali tapetnih grup.

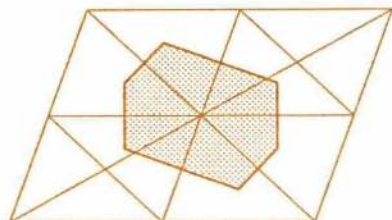
V zvezi z ornamenti si oglejmo zanimiv problem, ki izhaja iz naslednje lastnosti osnovnega vzorca ornamenta:

Osnovni paralelogram ali tipični del ornamenta, na katerega deluje ustrezna translacijska grupa, pokrije vso ravnino tako, da vse slike prekrijejo vsako točko ravnine natanko enkrat. Pravimo, da smo s paralelogrami oziroma tipičnimi liki ravnino tlakovali.

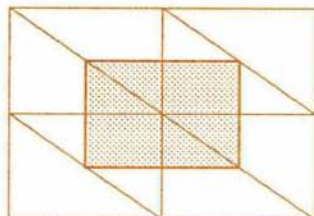
Ravnino lahko tlakujemo tudi z drugačnimi liki, ki niso tipični. Primer je osnovna celica mreže. Definiramo jo glede na izbrano vozlišče mreže. Pravimo:

Osnovna celica je množica vseh tistih točk ravnine, ki leže izbranemu vozlišču bližje kot kateremu koli drugemu vozlišču. Njene stranice leže na simetralah daljic, ki vežejo izbrano vozlišče s sosednjimi vozlišči (slika 5).

V splošnem je ta celica šestkotnik, ki ima po dve in dve stranici vzporedni. Samo v posebnem primeru, ko je osnovni paralelogram romb s kotom $\frac{\pi}{3}$, je šestkotnik pravilen, v pravokotnik pa se izrodi le, če je tudi osnovni paralelogram mreže pravokotnik (slika 6). Zakaj je tako, lahko premislite sami.



Slika 5. Osnovna celica mreže.



Slika 6. Izrojena osnovna celica.

Tudi osnovna celica mreže ima lastnost, da ravnino v celoti pokrije, če nanjo delujemo s translacijsko grupo, ki jo generirata $T_{\vec{a}}$ in $T_{\vec{b}}$, torej lahko z njo ravnino tlakujemo.

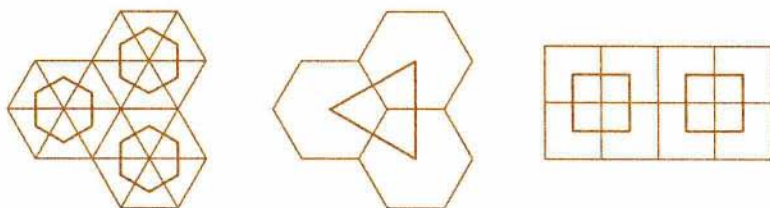
Osnovno znanje geometrije zadostuje, da odgovorimo tudi na vprašanje: S katerimi pravilnimi večkotniki lahko tlakujemo ravnino? To gre le s takimi pravilnimi n -kotniki, za katere je polni kot večkratnik notranjega kota:

$$k \frac{n-2}{n} 180^\circ = 360^\circ, \quad k \in \mathbb{N}.$$

Od tod sledi:

$$k = \frac{2n}{n-2} = 2 + \frac{4}{n-2}.$$

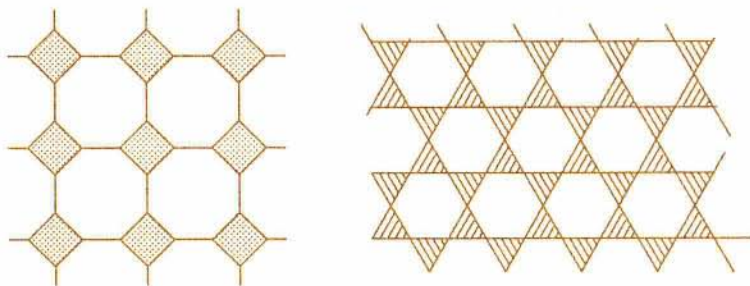
Število $n-2$ kotnika mora biti delitelj števila 4, torej je lahko 1, 2 ali 4. Sledi, da ravnino lahko tlakujemo le z enakostraničnim trikotnikom, kvadratom in pravilnim šestkotnikom (slika 7).



Slika 7. Pravilno tlakovanje ravnine in dualnost ornamentov.

Mimogrede s slike 7 razberimo še povezave med posameznimi ornamenti, ki jih sestavimo iz enakostraničnega trikotnika, kvadrata ali pravilnega šestkotnika. Vidimo, da je stičišče oglišč šestih trikotnikov hkrati središče pravilnega šestkotnika, ki ga vrišemo v ornament; središča treh dotikajočih se šestkotnikov pa povežemo v enakostranični trikotnik. Središča večkotnika v enem ornamentu tvorijo oglišča večkotnika drugega ornamenta. Takim ornamentom pravimo, da so *dualni*. Tretji ornament, ki ga sestavljajo kvadrati, je dualen sam sebi.

Pravilni večkotniki ne izčrpajo vseh možnih tlakovanj ravnine. Za osnovni vzorec si namreč lahko izberemo sestavo dveh ali več pravilnih večkotnikov (slika 8).



Slika 8. Zahtevnejše tlakovanje ravnine.

Vse obstoječe različne tapetne grupe so pri risanju ornamentov uporabljali že stari Egipčani, največjo dovršenost pri njihovi uporabi pa so dosegli arabski umetniki. Oboji so s svojo intuicijo prehiteli matematike. To ne preseneča, saj stroga matematična obravnava ornamentov temelji na zahtevni teoriji, ki je doživela razcvet šele v 20. stoletju.

Ne preseneča niti to, da ornamenti še naprej vznemirjajo umetnike. Izmed vseh omenimo le nizozemskega slikarja *Mauritsa Cornelisa Escherja*, ki je dosegel pri risanju ornamentov in tlakovanju ravnine pravo mojstrstvo. Zasluži si, da o njem spregovorimo prihodnjič nekoliko obširneje.

Milena Strnad

NALOGE ZA MLAJŠE BRALCE

Naslednje naloge so primerne za vse, ki imajo vsaj štiri razrede osnovne šole in obvladajo štiri osnovne računske operacije. Razporejene so tako, da lažjim sledijo težje.

Naloga 1. Na treh drogovih sedi 36 lastovk. S prvega na drugi drog zleti šest lastovk. Čez pol ure zletijo z drugega na tretji drog štiri lastovke. Zdaj je na vseh drogovih enako število lastovk. Koliko lastovk je bilo na posameznih drogovih na začetku?

Naloga 2. Vsota dveh števil je 180. Če delimo večje število z manjšim, dobimo ostanek 5. Kateri števili sta to? Poiščite vse možne rešitve!

Naloga 3. Napišite

- (a) število 2 s tremi petkami,
- (b) število 31 s petimi petkami,
- (c) število 28 s petimi dvojkami,
- (d) število 23 s štirimi dvojkami,
- (e) število 100 s šestimi enakimi števki,
- (f) število 100 s petimi enakimi števki.

Uporabljate lahko štiri računske operacije. Njihove znake lahko vrivate med števila v poljubni količini in vrstnem redu. Število 6 bi s tremi dvojkami naprimer zapisali kot $6 = 2 \times 2 + 2$.

Naloga 4. Dopolnite manjkajoče številke v naslednjem računu tako, da bo pravilen. Račun:

$$56 * \times * 4 = 1363*$$

Borut Zalar

27. OBČINSKO TEKMOVANJE OSNOVNOŠOLCEV IZ MATEMATIKE - Rešitve nalog s str. 166

6. razred

1. Robovi kock so dolgi 8 cm, 15 cm in 20 cm.

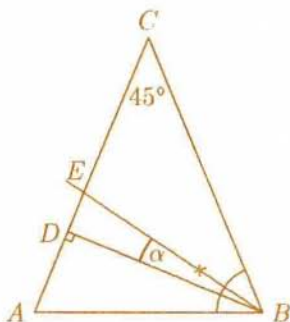
a) Najmanjši skupni večkratnik števil 8, 15 in 20 je $v(8, 15, 20) = 2^3 \cdot 3 \cdot 5 = 120$. Vsak stolp je visok 120 cm.

b) $120 : 8 = 15$, $120 : 15 = 8$, $120 : 20 = 6$. Prvi je porabil 15 kock, drugi 8 kock, tretji pa 6 kock. Za vse tri stolpe so porabili 29 kock.

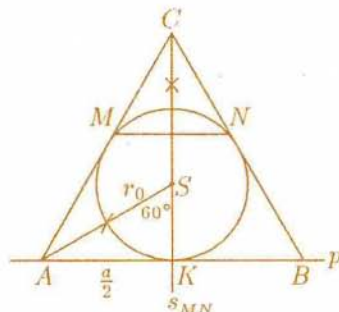
2. Mersko število 1992 razcepimo na prafaktorje $1992 = 2^3 \cdot 3 \cdot 83$. Ker imata pravokotnik in kvadrat enaki ploščini, velja $(2^3 \cdot 3 \cdot 83) \cdot (2 \cdot 3 \cdot 83) = (2^2 \cdot 3 \cdot 83)^2$. Najmanjše mersko število višine pravokotnika je $2 \cdot 3 \cdot 83 = 498$, mersko število dolžine stranice kvadrata je $2^2 \cdot 3 \cdot 83 = 996$.

3. Ker je 90% od x enako 180, velja $\frac{90 \cdot x}{100 \cdot 1} = \frac{180 \cdot 100}{100}$, zato je $90 \cdot x = 18000$ in $x = 200$. 5% od 200 je 10. Blago morajo prodati za 210 goldinarjev.

4. Ker je $\triangle ABC$ enakokrak, je
 $\angle CAB = \frac{180^\circ - 45^\circ}{2} = 67^\circ 30'$,
 $\angle ABD = 90^\circ - 67^\circ 30' = 22^\circ 30'$,
 $\angle ABE = \frac{67^\circ 30'}{2} = 33^\circ 45'$,
 $\angle DBE = 33^\circ 45' - 22^\circ 30'$,
 $\angle DBE = 11^\circ 15'$.

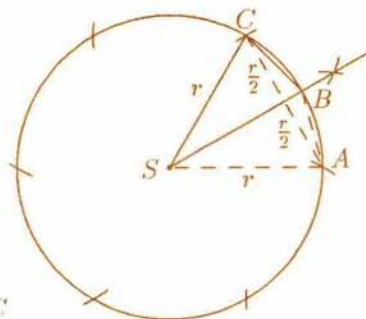


5. Narišemo krog, tetivo MN in njeno simetralo. Nato s šestilom narišemo kot $\angle S = 60^\circ$ in premico $p \parallel MN$ skozi K , ki je presečišče tetivne simetrale s krožnico. Presečišče kraka narisane kota in premice p je oglišče A , nato pa $\overline{SA} = \overline{SC} = \overline{SB} = r_0$ in $\triangle ABC$ je načrtan.

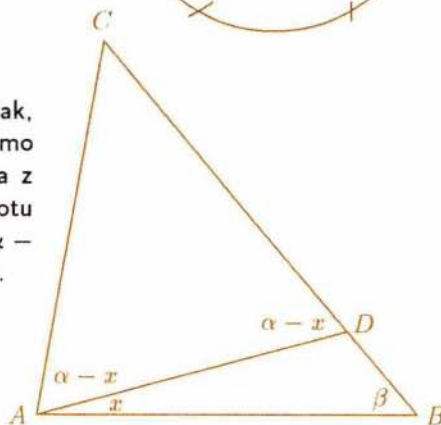


7. razred

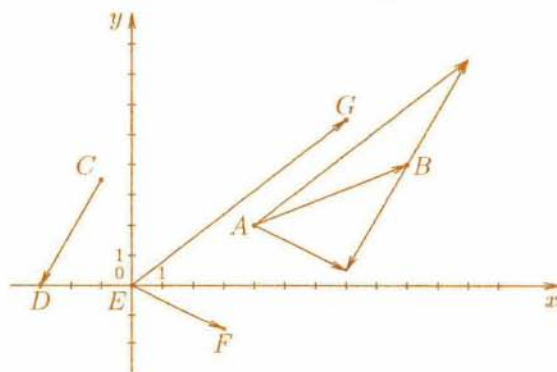
1. Ploščina trikotnika $\triangle SBC$ je $p_{SBC} = \frac{1}{2} \cdot r \cdot \frac{r}{2}$. Ploščina pravilnega dvanajstkotnika je $12 \cdot \frac{1}{2} \cdot r \cdot \frac{r}{2} = 3r^2$. Za $r = 20$ cm dobimo $3r^2 = 2 \cdot 20^2 = 1200$. Ploščina je 1200 cm^2 .



2. Trikotnik $\triangle ADC$ je enakokrak, zato $\angle DAC \equiv \angle ADC$. Označimo kot $\angle BAD$ z x , kot $\angle DAC$ pa z $\alpha - x$. Po izreku o zunanjem kotu trikotnika je $\alpha - x = x + \beta$, $\alpha - \beta = 2x$, $30^\circ = 2x$ in $x = 15^\circ$.

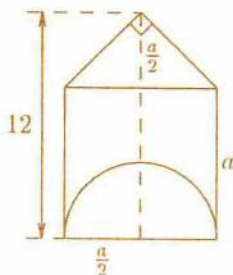


3.


 $F(3, -1'5), G(7, 5'5)$

4. Nalogo rešimo s sklepanjem. Na mesec je sluga prislužil $\frac{1}{12}$ obleke in 12 goldinarjev ($144:12=12$). V treh mesecih: četrta obleke in 36 goldinarjev. Ker je dobil le 18 goldinarjev, je bila vrednost $\frac{3}{4}$ obleke 18 goldinarjev, vrednost cele obleke pa 24 goldinarjev.

5. Iz $a + \frac{a}{2} = 12$ cm, dobimo $a = 8$ cm, nato pa $p = (\frac{a}{2})^2 + a^2 - \frac{1}{2} \cdot \pi \cdot (\frac{a}{2})^2 = 8 \cdot (10 - \pi)$, $p \doteq 54,88$ cm².



8. razred

1. Označimo z x skupni delež tretjega, četrtega in petega delavca. Tedaj je: $\frac{2}{5}x + x = 10500$ in $x = 7500$. $2y + 3y = 3000$ in $y = 600$. $3z + 4z + 5z = 7500$ in $z = 625$. Prvi delavec je dobil 1200 SIT, drugi 1800 SIT, tretji 1875 SIT, četrty 2500 SIT in peti 3125 SIT.

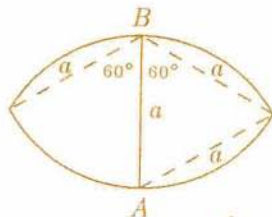
2.

- a) ... z istim številom, različnim od 0.
- b) ..., če sta si števili tuji, $D(a, b) = 1$.
- c) ... na pet enakih delov, ...
- č) ... premici v isti ravnini..
- d) ..., če je valj enakostraničen.

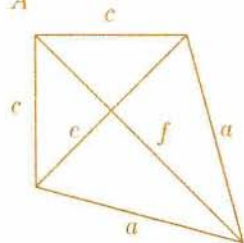
3.

- a) Aničina slika: $8 : 10 \neq 15 : 18$
 - b) Bredina slika: $10 : 12 = 15 : 18$, $5 : 6 = 5 : 6$
 - c) Cvetkina slika: $12 : 15 \neq 15 : 18$
- Povečati je dal Bredino sliko.

4. Obseg je $o = \frac{4 \cdot 2\pi a}{6} = \frac{4\pi a}{3}$, ploščina pa $p = \frac{4\pi a^2}{6} - \frac{2a^2\sqrt{3}}{4} = \frac{4\pi a^2}{6} - \frac{3a^2\sqrt{3}}{6} = \frac{a^2}{6}(4\pi - 3\sqrt{3})$.



5. Najprej ugotovimo $e = c\sqrt{2}$, $a = e$, zato je $c = \frac{e\sqrt{2}}{2}$ ter $f = \frac{e}{2} + \frac{e\sqrt{3}}{2} = \frac{e}{2}(1 + \sqrt{3})$ in $v = f$. Nato izračunamo površino $P = 2O + pl = \frac{2ef}{2} + (2c + 2e) \cdot v = ef + (e\sqrt{2} + 2e) \cdot v = (e + e\sqrt{2} + 2e) \cdot v = e(3 + \sqrt{2}) \cdot \frac{e}{2}(1 + \sqrt{3}) = \frac{e^2}{2}(3 + \sqrt{2} + 3\sqrt{3} + \sqrt{6})$ in prostornino $V = Ov = \frac{ef}{2} \cdot f^2 = \frac{e^3}{8}(1 + 3 + 2\sqrt{3}) = \frac{e^3}{8}(4 + 2\sqrt{3}) = \frac{e^3}{4}(2 + \sqrt{3})$.



Aleksander Potočnik

1. DRŽAVNO TEKMOVANJE OSNOVNOŠOLCEV IZ MATEMATIKE

V soboto, 16. maja 1992, se je 196 sedmošolcev in 303 osmošolci, ki so se na občinskem tekmovanju najbolje odrezali, zbralo v Ljubljani, Mariboru, Celju, Kopru, Novem mestu in Novi Gorici na državnem tekmovanju.

Petnajstčlanska komisija pod predsedstvom prof. Terezije Uran je pripravila naloge, pregledala rešitve in določila kriterij za podelitev zlatih Vegovih priznanj.

Zlato Vegovo priznanje so osvojili sedmošolci (bilo jih je 72), ki so dosegli vsaj 13 od 25 možnih točk, in osmošolci (bilo jih je 118), ki so dosegli najmanj 17 od 25 možnih točk.

Nagrade pa so osvojili:

7.razred

- I. nagrada: Matjaž KONVALINKA, OŠ Franceta Bevka, Ljubljana;
Tanja ZAVRL, OŠ Ivana Groharja, Škofja Loka;
Gorazd LAMPIČ, OŠ Ledina, Ljubljana.
- II. nagrada: Mitja ŠLENC, OŠ Božidarja Jakca, Ljubljana;
- III. nagrada: Mitja LUŠTREK, OŠ Komenda-Moste, Komenda.

8.razred

- I. nagrada: Dejan TUŠAR, OŠ Ivana Roba, Šempeter;
Kristijan CAFUTA, OŠ Ljudski vrt, Ptuj;
Bojan PAVŠIČ, OŠ Martina Konšaka, Maribor;
Lara MAJCEN, OŠ Prežihovega Voranca, Ljubljana;
Gorazd BRUMEN, OŠ Valentina Vodnika, Ljubljana;
Tina PANGRŠIČ, OŠ Zalog, Ljubljana.
- II. nagrada: Vesna KROSELJ, OŠ Šentjernej;
Polona CURK, OŠ Ajdovščina;
Sašo KRESLIN, OŠ Beltinci;
Igor KLEP, OŠ Borisa Kidriča, Kidričevo;
Blaž VEHAR, OŠ Cvetka Golarja, Škofja Loka;
Miha ČEBULJ, OŠ Koseze, Ljubljana;
Katja JAKOPIČ, OŠ Ledina, Ljubljana;
Drago BOKAL, OŠ Polhov Gradec;
Jelena ZORIČ, OŠ Vide Pregarc, Ljubljana.
- III. nagrada: Agata KOPAČ, OŠ Padlih prvoborcev, Žiri;
Katja MAJER, OŠ Bojana Iliča, Maribor;
Peter JEGLIČ, OŠ Dr. Vita Kraigherja, Ljubljana;
Simona IPŠA, OŠ II Murska Sobota;
Irena ŠARC, OŠ Ivana Novaka Očka, Ljubljana;
Helena SCHWEIGER, OŠ Mirana Jarca, Črnomelj;
Sebastijan BORKO, OŠ Pohorskega odreda, Slovenska Bistrica;
Miha VEBER, OŠ Pohorskega odreda, Slovenska Bistrica;
Klemen ŽAGAR, OŠ Preska, Medvode;
Matej ŠPINDLER, OŠ Stična;
Sanja FIDLER, OŠ Trnovo, Ljubljana.

Naloge

7. razred

1. Štirimestno število ima v desetiškem zapisu paroma enaki prvo in drugo števk (cifro) ter tretjo in četrto števko.

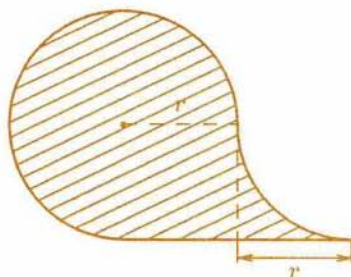
Dokaži, da je to število deljivo z 11.

2. V trikotniku $\triangle ABC$ meri kot β ($\angle B$) 15° , kot γ ($\angle C$) pa 30° . Premica skozi oglišče A je pravokotna na stranico AB in seka stranico BC v točki D . Dokaži, da je $\overline{BD} = 2 \cdot \overline{AC}$.

3. Kaj je več: 202^{303} ali 303^{202} ? Utemelji z računom.

4. Na 1 ha njivske površine, zasejane z žitom, potrebujemo 45 kg fosforjeve kisline. Koliko superfosfata moramo pripraviti za njivo, ki ima obliko pravokotnika in je dolga 150 m, široka 120 m, če vsebuje superfosfat 18% fosforjeve kisline?

5. Obseg lika na sliki meri $(16\pi + 16)$ cm. Izračunaj njegovo ploščino.



8. razred

1. Dvomesno število ima v desetiškem zapisu na mestu enic enako števk (cifro) kot trimesno število na mestu stotic. Števki na mestih desetic sta pri obeh številih enaki. Trimesno število ima na mestu enic števko 7. Razlika med trimesnim številom in štirikratnikom dvomesnega števila je 685.

Poišči vsa taka trimesna števila.

2. Polmer sprednjega kolesa voza je 2 dm 8 cm, polmer zadnjega kolesa pa 3 dm 5 cm. Na določeni poti se obe kolesi skupaj zavrtita 648-krat.

Kolikokrat se zavrti sprednje in kolikokrat zadnje kolo?

3. Prva kocka ima rob a , druga kocka ima rob enak telesni diagonali prve kocke, telesna diagonala druge kocke je enaka robu tretje kocke.

a) V kolikšnem razmerju so prostornine kock? Razmerje poenostavi.

b) Za koliko procentov je površina druge kocke večja od površine prve kocke in za koliko procentov je površina tretje kocke večja od površine prve kocke?

4. Premici a in b ležita v ravnini lista in oklepata kot 60° . Poišči vse točke ravnine, ki so od premice a oddaljene 4,5 cm, od premice b pa 3 cm. Izračunaj medsebojne razdalje dobljenih točk.

5. Za katere vrednosti števil a in b ima enačba

$$\frac{3(x - ax + 1)}{2} - \frac{ax + b - 4}{3} = \frac{2(b - ax)}{6} + 1\frac{1}{2}$$

- a) eno samo rešitev,
b) nima rešitve?

Aleksander Potočnik

NALOGA IZ ŠTEVILSKIH SESTAVOV – Rešitev s str. 192

Iz enačbe sledi:

$$(a+1)(2(a+1)+2) = 4b+4$$

$$b = \frac{a(a+3)}{2}$$

Števili a in b sta bazi, zato morata biti naravni števili, in sicer $b > 4$ ter $a > 1$. Ker je število $a(a+3)$ sodo za vsako naravno število a , je b za vsak $a \in \mathbb{N}$ celo število. Vidi se, da je $b > 4$ za vsak $a > 1$.

Sledi, da je rešitev neskončno mnogo in so oblike:

$$a \in \mathbb{N} \setminus \{1\}, b = \frac{a(a+3)}{2}; \quad \text{npr.: } (2, 5), (3, 9), (4, 14), (5, 20), \dots$$

Borut Čampelj

UTRINEK

Jure je razlagal sošolcu Igorju:

"Ne vem, zakaj učitelj vedno zaplete reševanje matematičnih problemov z uvajanjem **neznanke** x . Sam to vedno rešujem veliko bolj enostavno in tudi bolj zanimiva je matematika na tak način. Naj bo problem še tako težak, enostavno ga rešim s pomočjo **znanke** **Petre**."

Janez Zupan

LOM SVETLOBE ZA OKRAS

Pred leti mi je v neki izložbi lepih predmetov vzbudila pozornost steklena skulptura v obliki kocke z zaobljenimi robovi, sredi nje pa je bil večji zračni mehurček. Oblikovalec je prav spretno izrabil lom svetlobe, saj pri izbranih zornih kotih vidimo hkrati celo štiri slike tega mehurčka (slika na naslovn strani).

Oglejmo si ta predmet podrobneje. Po obliki je to krogla, ki jo prisekamo s kocko. Središče krogle je v presečišču telesnih diagonal kocke, premer krogle pa je nekaj manjši od diagonale stranskih ploskev kocke. Krogla tako zaobli vse oglate dele kocke, ravni deli telesa pa imajo obliko kroga. Razdalja med nasprotnima ravnima ploskvama je pri našem predmetu 4,6 cm, polmer krogle 6,0 cm, premer zračnega mehurčka na sredi pa je 0,8 cm.

Ko gledamo skulpturo vzdolž telesne diagonale kocke, vidimo štiri slike zračnega mehurčka. Slika na sredi je povečana, saj deluje obla ploskev kot povečevalno steklo, le da je mehurček v steklu. Ostale tri slike nastanejo z lomom svetlobe na stranskih ravnih ploskvah.

Sedaj pa naloga za naše bralce. Ali lahko s slike določimo lomni kvocient stekla, iz katerega je predmet, če poznamo še našete mere?

Mehurček v steklu tudi lomi svetlobo. Skulpturo položimo na sliko v knjigi. Svetloba, ki gre skozi mehurček, tvori močno pomanjšano sliko (slika 1 na naslednji strani). Mehurček lomi svetlobo tako kot razpršilna leča. Ali znate izračunati pomanjševalni faktor ?

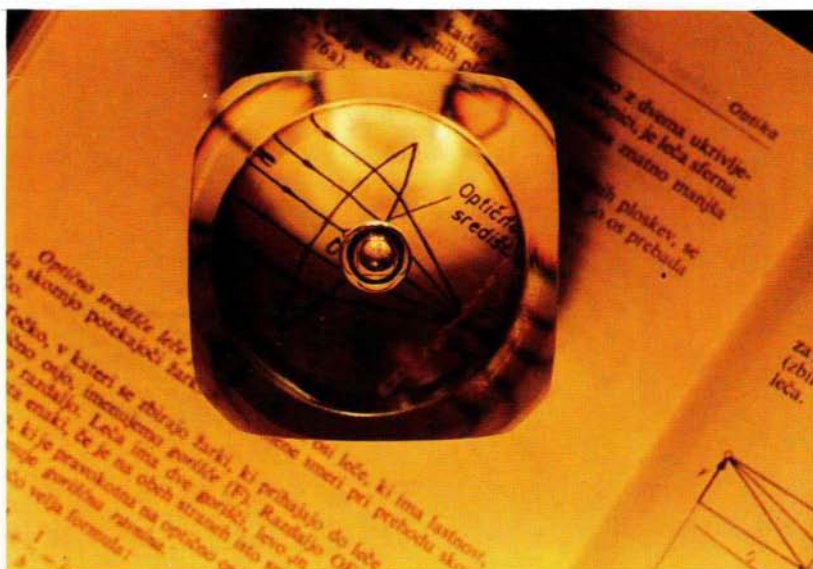
Andrej Likar

NALOGA ZA SISTEMATIČNE BRALCE

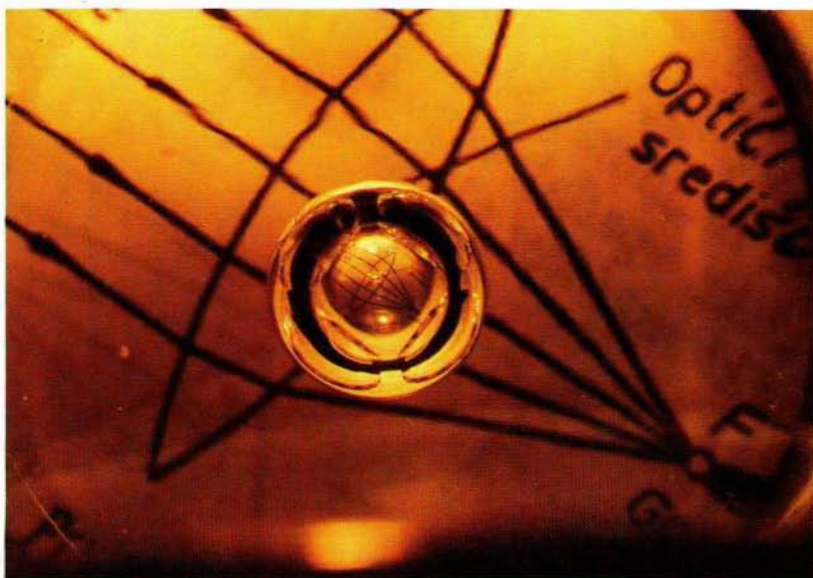
Naloge na matematičnih tekmovanjih in v srednješolskih časopisih lahko razvrstimo v tri skupine: Nekatere naloge rešimo s trikomi; nekatere zahtevajo poznavanje izrekov, identitet ali neenakosti, ki jih večina ne pozna (te naloge so tudi vzrok za neobjektivnost rezultatov marsikaterega tekmovanja, saj privilegirajo učence s šol, kjer imajo boljše mentorje in krožke); nekatere naloge pa zahtevajo sistematičen pristop k reševanju. V to skupino spada tudi naslednja naloga. Natančno preverite vse možnosti in pazite, da kakšne ne pozabite.

Naloga. Trojica (1,2,3) ima to lastnost, da je vsota dveh števil vedno deljiva s tretjim. Poiščite vse trojice neničelnih paroma različnih števil, ki imajo to lastnost.

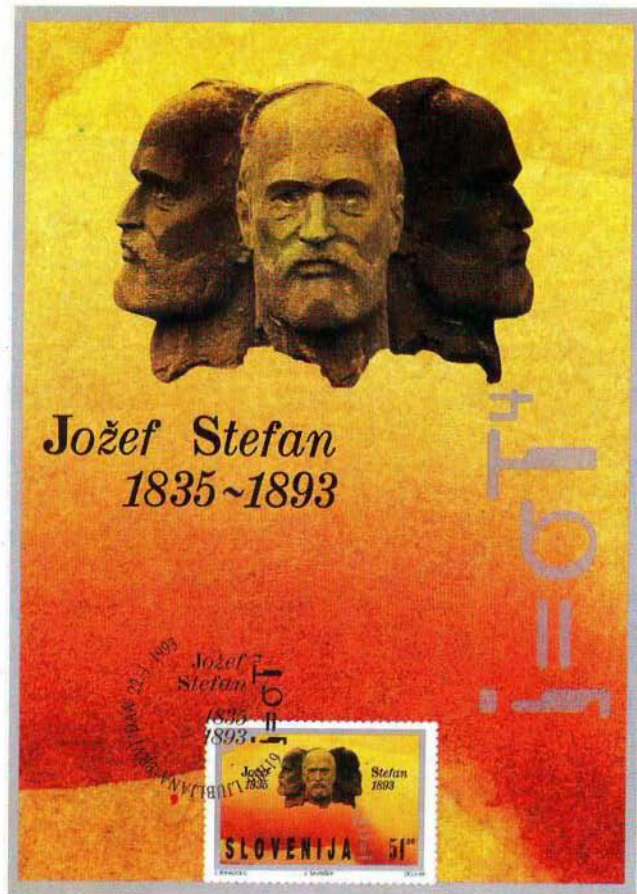
Borut Zalar



Slika 1a. Zračni mehurček deluje kot razpršilna leča.



Slika 1b. Povečani srednji del slike 1a.



JOŽEF STEFAN NA ZNAMKI

Ministrstvo za promet in zveze ter slovenska pošta sta ob stoletnici smrti slovenskega znanstvenika Jožefa Stefana izdala lepo znamko, ki jo je po doprsem kipu, delu kiparja A. Savinška, oblikoval arhitekt Janez Suhadolc. Znamka je velika 40,32 × 28,8 mm, tu pa je predstavljena na povečanem motivu znamke in z žigom prvega dne, 22. januarja 1993, ko je bila izdana.

Janez Strnad

POTOČNIK NA ZNAMKI

Ob stoletnici rojstva našega rojaka **Hermana Potočnika**, ki je med prvimi načrtoval vesoljsko ladjo s človeško posadko in utiral nove poti v astronautiki, je v Sloveniji izšla priložnostna znamka. Zasnoval in oblikoval jo je arhitekt Grega Košak. Podobno znamko so izdali tudi Avstrijci. Pomembne obletnice pa smo se spomnili tudi pri *Preseku*. Tako v prejšnji številki *Preseka* lahko prebereš krajši prispevek o življenju in delu tega znamenitega znanstvenika.



Marijan Prosén