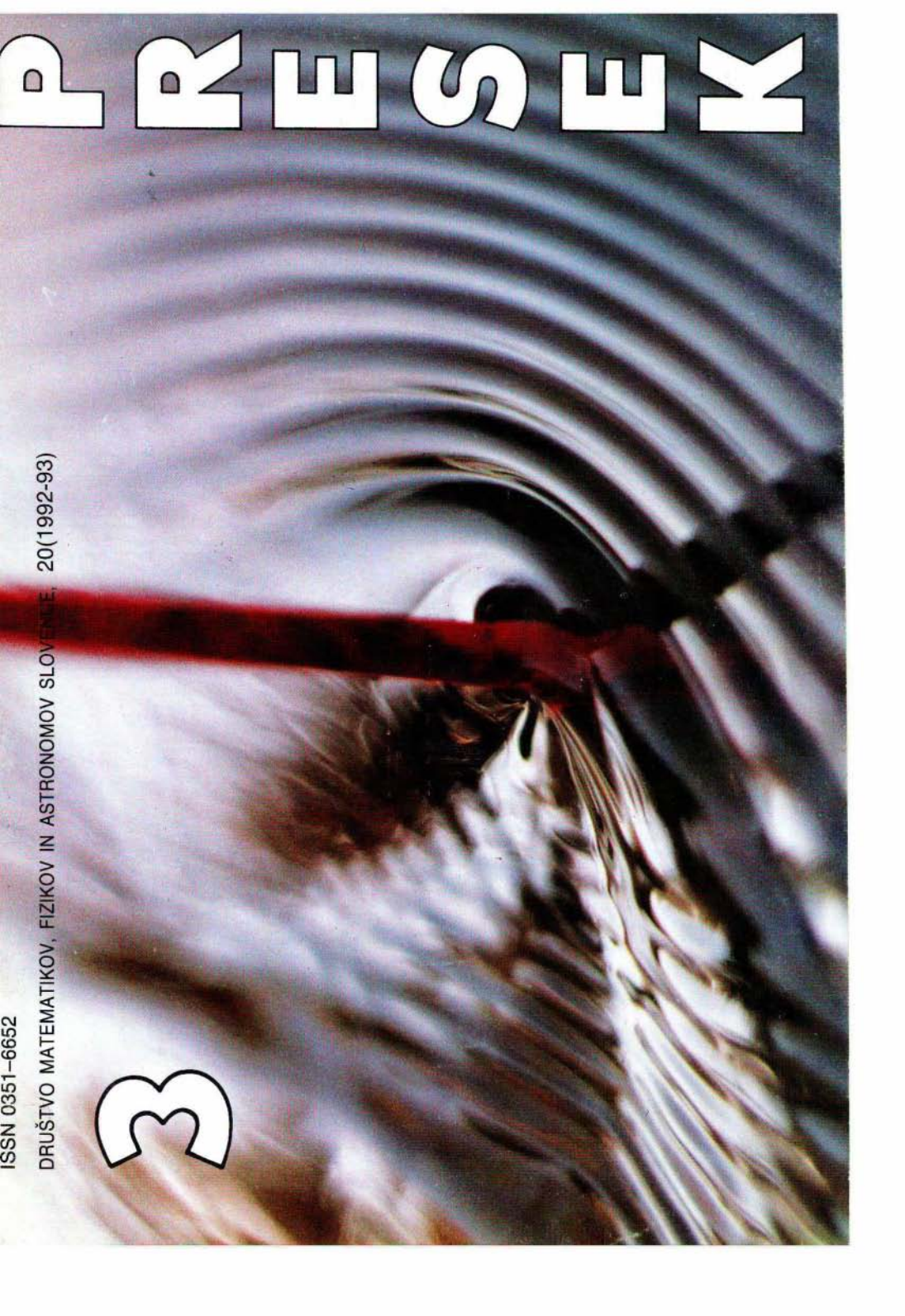


PRESEK

ISSN 0351-6652

DRUŠTVO MATEMATIKOV, FIZIKOV IN ASTRONOMOV SLOVENIJE, 20(1992-93)

3



PRESEK - list za mlade matematike, fizike, astronome in računalnikarje
20. letnik, leto 1992/93, številka 3, strani 129-192

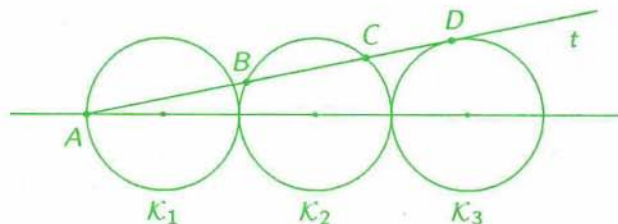
VSEBINA

FIZIKA	Mirujoče interferenčno polje (Andrej Likar)	130-131
	Avtomobili formule 1 in fizika (Janez Strnad)	142-144
	Začarani krog (Andrej Likar)	170-173
	Zrcalce, zrcalce na steni . . . (Janez Strnad)	186-190
MATEMATIKA	Kvadrati racionalnih števil (Jože Grasselli)	134-136
	Paralelogramsko pravilo (Boris Lavrič)	146-150
	Stari slovenski geometrijski izrazi (Milan Hladnik)	174-184
ASTRONOMIJA	Pionir vesoljskih poletov (Marijan Prosén)	138-141
RAČUNALNIŠTVO	Zaklepanje datotek (Milan Ambrožič in Erik Karič)	162-166
TEKMOVANJA	Urniki tekmovanj v letu 1993 (Darjo Felda)	131-133
	Naloge za ogrevanje - rešitve s str. 124 (Aleksander Potočnik)	150-152
	8. šolsko tekmovanje iz matematike za srednješolce - rešitve s str. 111 (Darjo Felda)	156-158
	Poročilo o tekmovanju iz srednješolske fizike v šolskem letu 1991/92 (Ciril Dominko)	158-159
	27. občinsko tekmovanje osnovnošolcev iz matematike (Aleksander Potočnik)	166-168
	18. izbirno tekmovanje srednješolcev iz matematike (Matjaž Željko)	191-192
NALOGE	Izračunaj tetivo (Marija Vencelj)	129
	O zlati verigi (Borut Zalar)	136
	Potovanje Jacka Londona (Viktor Velkavrh)	145
	Naloga iz številskih sestavov (Borut Čampelj)	192
	Kanin s Kočne (Boris Lavrič)	III
RAZVEDRILO	Križanka Ob stoletnici smrti slovenskega matematika (Marko Bokalič)	160-161
	Računanje s približki (Marija Vencelj)	169
	Utrine iz šolskih klopi (Helena Paternost)	169
REŠITVE NALOG	Nagradni sistemi linearnih enačb, 2. del - s str. 34 (Vilko Domajnko)	137
	Kongres v Pragi - s str. 77 (Borut Zalar)	137
	Križanka Nobelovi nagrajenci za fiziko II - s str. 96 (Marko Bokalič)	141
	Enostavni plašči - s str. 128 (Boris Lavrič)	168
	Skriti datum - s str. 70 (Marija Vencelj)	169
	Bele luknje ali limite po tangramsko - s str. 352, P XIX/6 (Vilko Domajnko)	185
	Naloge za najmlajše bralce - s str. P-2/III (Borut Zalar)	185
NOVE KNJIGE	Lokar M., Juvan M., 121 nalog iz pascala (Jože Marinček)	144-145
	Smullyan R., Šahirazada (Milena Strnad)	173
NOVICE	Matematična konferenca v Miasu (Marko Kranjc in Bojan Gornik)	153
	Franc Močnik (Peter Legiša)	154-156
NA OVITKU	Kapilarni valovi na gladini tekoče vode. Valovita makadamska cesta. Vse fotografije Andrej Likar. Glej tudi članka na straneh 130 in 170.	I,IV

IZRAČUNAJ TETIVO

Tri krožnice K_1, K_2, K_3 imajo središča na isti premici, vse tri polmer enak 1 in se zapored dotikajo, kot kaže slika. Iz točke $A \in K_1$ poteka tangenta t na krožnico K_3 .

Izračunaj dolžino tetive BC , ki jo krožnica K_2 odreže na tej tangenti. (Namig: naloga sploh ni težka!)



Marija Vencelj

PRESEK

list za mlade matematike, fizike, astronome in računalnikarje
20. letnik, šolsko leto 1992/93, številka 3, strani 129 – 192

UREDNIŠKI ODBOR: Vladimir Batagelj, Tanja Bečan (jezikovni pregled), Dušica Boben (oblikovanje teksta), Mirko Dobovišek (glavni urednik), Vilko Domajnko, Roman Drnovšek (novice), Darjo Felda (tekmovanja), Bojan Golli, Marjan Hribar, Boštjan Jaklič (tehnični urednik), Martin Juvan (računalništvo), Sandi Klavžar, Edvard Kramar, Boris Lavrič, Andrej Likar (fizika), Matija Lokar, Franci Oblak, Peter Petek, Pavla Ranzinger (astronomija), Marjan Smerke (svetovalec za fotografijo), Miha Štalec (risbe), Jana Vrabec (nove knjige), Marija Vencelj (matematika, odgovorna urednica).

Dopise pošiljajte in list naročajte na naslov: Društvo matematikov, fizikov in astronomov Slovenije - Podružnica Ljubljana - Komisija za tisk, Presek, Jadranska c. 19, 61111 Ljubljana, p.p. 64, tel. (061) 265-061/53, št. žiro računa 50101-678-47233. Naročnina za šolsko leto 1992/93, vplačana po 1.11.1992, je za posamezne naročnike **800 SIT**, za skupinska naročila šol **640 SIT**, posamezna številka **160 SIT**, za tujino 12000 LIT.

List sofinancirajo MZT, MŠŠ in MK

Ofset tisk DELO - Tiskarna, Ljubljana

Tekst je oblikovan z računalnikom SLIM 286, ALTECH, Ljubljana

© 1992 Društvo matematikov, fizikov in astronomov Slovenije – 1137

MIRUJOČE INTERFERENČNO POLJE

V vsakdanjem življenju interferenčni pojavi niso izraziti. Še največkrat imamo opraviti z interferenco, ko na novo postavljamo UKV televizijsko anteno. Izkušnja kaže, da se kvaliteta slike na zaslonu močno spreminja z lego antene. Mesto z zelo dobrim sprejemom je le za seženj oddaljeno od mesta, kjer sprejema sploh ni.

Interferenco opazujemo na mestih, kjer se prepletajo valovanja iz različnih virov, ki nihajo z enako frekvenco in s stalno fazno razliko. Predstavljamo si lahko, da vsak vir po svoje vzbudi snov na opazovanem mestu, ne oziraje se na druge vire. Snov se odzove tako, da je njen odmik enak vsoti odmkov, ki bi jih dobili s posameznimi valovanji. Pravimo, da valovanja interferirajo. Posledica tega je, da se amplituda nihanja snovi spreminja s krajem. Mesta, kjer valovanje zelo oslabi, imenujemo vozle. Tu viri nihajo snov nesložno: nekaj virov bi snov zanihalo v eno smer, drugi pa se upirajo in bi jo zanihali z enako amplitudo ravno v nasprotni smeri. Snov pa se ne premakne nikamor. Vozli tvorijo na vodni površini vozelné črte, v prostoru, po katerem se širijo na primer elektromagnetni ali zvočni valovi, pa vozelné ploskve. S staljšča opazovalca so vozelné točke, črte ali ploskve nekaj posebnega, saj jih je s poskusom lahko izslediti.

Pri zvočnem ali elektromagnetnem valovanju moramo valovno polje opaziti z detektorjem in ga nato na podlagi meritev narisati. Ko opazujemo valove na vodni gladini, lahko gledamo celotno interferenčno polje neposredno. Kljub preglednosti valovanja na vodni površini nas pri opazovanju begajo potujoči valovi - pogled nehote sledi valovom in tako vozelné črte radi spregledamo. V šolah si pomagajo z utripajočo lučjo, ki valove navidez ustavi.

Če smo blizu potoka, lahko opazujemo interferenčno polje pri ustavljenih potujočih valovih. V mirno tekoči vodi s primerno hitrostjo teka opazimo, da se vodna gladina ob vodnih bilkah ali plitvinah naguba (slika na naslovni strani). Gre za kapilarne valove, ki se širijo proti vodnemu toku in to s hitrostjo, ki je enaka hitrosti vode na gladini. Ti sicer potujoči valovi zato za opazovalca s kopnega mirujejo. Interferenčno polje z vozelnimi črtami dobimo, če sta v vodi dve oviri na primerni razdalji, denimo centimeter narazen. Pri poskusu na naših slikah (slika 1a,b na zadnji strani ovitka) smo konca bakrene žice privezali na težko jekleno palico, ki smo jo položili na dno potoka. Vozelné črte lepo vidimo, če gledamo proti vodnemu toku. Zaradi turbulentnega toka vode vozelné črte plapolajo po gladini. Bolj ko sta

TEKMOVANJA

žički narazen, bolj na gosto so posejane vozalne črte.

Na sliki 2 na zadnji strani vidimo zamotano interferenčno polje z zanimivim vzorcem, ki ga tvorijo kapilarni valovi za ovirama.

Andrej Likar

URNIK TEKMOVANJ V LETU 1993

področje	šola	tekmovanje	datum
matematika	osnovna	šolsko občinsko državno	do 10. aprila 17. april 15. maj
	srednja	izbirno državno olimpiada	20. marec 17. april julij
fizika	osnovna	področno državno	3. april 8. maj
	srednja	izbirno državno olimpiada	2. april 8. maj junij
logika	osnovna in srednja	izbirno državno	24. september 23. oktober
matematika za razvedrilo	osnovna in srednja	državno	4. september
računalništvo	osnovna	šolsko področno državno	26. marec 23. ali 24. april 22. maj
	srednja	državno	14. – 15. maj
raziskovanje inovatorstvo	srednja	državno	junij

Nekaj informacij o tekmovanjih

Matematika – osnovna šola

Vsa tekmovanja bodo potekala v skladu s *Pravilnikom o tekmovanju osnovnošolcev iz matematike za Vegova priznanja*. Pojasnila lahko dobite pri g. Aleksandru POTOČNIKU, OŠ Božidarja Jakca, Nusdorferjeva 10, Ljubljana, telefon (061) – 443 – 074 ali (061) – 442 – 900.

Matematika – srednja šola

Razpis izbirnega tekmovanja (za vse učence, ki želijo sodelovati na državnem tekmovanju) bomo tako kot doslej skupaj s prijavnici poslali na šole. Vsa pojasnila daje g. Darjo FELDA, Fakulteta za elektrotehniko in računalništvo, Tržaška 25, Ljubljana, tel. (061) – 265 – 161, int. 233.

Fizika – osnovna šola

Državno tekmovanje iz fizike za osnovno šolo bo na Pedagoški fakulteti v Mariboru, Koroška c. 160.

Tekmovanje je ekipno, vsako ekipo sestavljata dva učenca. Vsi, ki želijo sodelovati na državnem tekmovanju, se morajo obvezno udeležiti področnega tekmovanja v ustrezni organizacijski enoti Zavoda Republike Slovenije za šolstvo in šport:

- v Celju, na Gimnaziji Lava, Pot na Lavo 22 (J. Dolenšek);
- v Mariboru, na Pedagoški fakulteti, Koroška c. 160 (M. Cvahte);
- v Kopru, na Gimnaziji Koper, Cankarjeva 2 (E. Okretič);
- v Ljubljani, na OŠ Dravlje, Klopčičeva 1 (V. Harej);
- za Dravograd, na OŠ Radlje ob Dravi, Koroška 17 (F. Pogorelnik);
- za Gorenjsko, na OŠ Antona Tomaža Linhart, Radovljica (J. Stare);
- za Mursko Soboto, na Gimnaziji F. Miklošiča, Ljutomer (D. Uršič);
- za Novo mesto, na OŠ Grm, Trdinova 7 (F. Turk);
- v Novi Gorici, na OŠ IX. korpusa, Kidričeva 36 (A. Fakin).

Prijave pošljite na naslov organizatorja tekmovanja v domači regiji najkasneje do 27. 3. 1993. Predhodno izvedite šolska tekmovanja. Vsaka šola, ki ima tri oddelke ali manj, lahko prijavi po eno ekipo iz 7. oziroma 8. razreda. Šola, ki ima v tekmovalnem razredu (7. ali 8. razred) štiri ali več oddelkov, lahko za ta razred prijavi dve ekipi. Podružnične šole se prijavljajo samostojno.

Dodatne informacije dobite pri g. J. SAKELŠEK, OŠ Ketteja in Murna, Ljubljana, tel. (061) – 444 – 401.

Fizika – srednja šola

Razpis za tekmovanja bomo skupaj s prijavnici poslali na šole do konca februarja. Informacije dobite pri g. Cirilu DOMINKU, na Gimnaziji Bežigrad, Peričeva 4, Ljubljana, telefon (061) – 321 – 567 ali (061) – 311 – 024.

Matematika za razvedrilo

Vse informacije dobite v časopisih *Logika & Razvedrilna matematika* in *Ugankarski domenek*.

Logika

Na državnem tekmovanju tekmujejo učenci, ki bodo v času tekmovanj na predmetni stopnji osnovne šole, učenci srednjih šol in študenti. Šole, ki bodo organizirale izbirno tekmovanje, se morajo prijaviti na razpis do **1. junija** na ZOTKS, Komisija za logiko, Lepi pot 6, 61001 Ljubljana. Učenci šol, ki ne bodo organizirale izbirnega tekmovanja, se lahko prijavijo do 30. avgusta na najbližji šoli, kjer bodo tekmovanje izvedli. Druge informacije daje g. A. JUS na ZOTKS, tel. (061) – 213 – 727 ali (061) – 268 – 010.

Računalništvo – osnovna šola

Razpisi za tekmovanje so že na šolah. Informacije dobite pri g. A. JUSU, ZOTKS – Svet za tehnično vzgojo mladine, Lepi pot 6, Ljubljana, tel. (061) – 213 – 727 ali (061) – 268 – 010.

Računalništvo – srednja šola

I. Raziskovalne naloge

Strokovna komisija bo pregledala naloge, ki bodo do **1. maja** prispele na naslov Gibanje znanost mladini, Lepi pot 6, Ljubljana. Na osnovi dobljenih ocen bo določila tiste učence, ki bodo svoje naloge ustno zagovarjali.

II. Tekmovanje iz znanja računalništva

Mentorji naj pošljejo prijavo šole s poimenskim seznamom tekmovalcev (ne več kot po 5 učencev za vsako od treh tekmovalnih skupin) do **10. aprila** na Gibanje znanost mladini. Pri tem naj upoštevajo pravila, ki že vrsto let veljajo za to tekmovanje.

Potrditev prijav in natančni raspored tekmovanja bodo šole dobile teden dni pred tekmovanjem. Šolam priporočamo, da izvedejo predtekmovanja in tako izberejo najboljše predstavnike. Učenci šol, ki se ne bodo prijavile na tekmovanje kot organizacije, se lahko sami prijavijo na isti naslov, prav tako najkasneje do 10. aprila. Informacije daje g. R. DORN, Fakulteta za elektrotehniko in računalništvo, Tržaška 25, Ljubljana, tel. (061)–273–489.

Raziskovanje in inovatorstvo

Razpise za 26. srečanje mladih raziskovalcev in inovatorjev Slovenije so srednje šole že dobile, podrobnejše informacije pa dobite pri g. B. SOTOŠKU, ZOTKS – Gibanje znanost mladini, Lepi pot 6, Ljubljana, p.p. 99, tel. (061) – 213 – 727 ali (061) – 268 – 010.

Darjo Felda

KVADRATI RACIONALNIH ŠTEVIL

Število 7 se da zapisati kot vsota štirih kvadratov **celih** števil

$$7 = 2^2 + 1^2 + 1^2 + 1^2. \quad (1)$$

Če vzamemo kakšno drugo ne preveliko naravno število, po krajšem poskušanju tudi zanj najdemo takšno izrazitev. Nekaj zgledov:

$$\begin{aligned} 15 &= 3^2 + 2^2 + 1^2 + 1^2 \\ 17 &= 4^2 + 1^2 + 0^2 + 0^2 = 3^2 + 2^2 + 2^2 + 0^2 \\ 28 &= 5^2 + 1^2 + 1^2 + 1^2 = 4^2 + 2^2 + 2^2 + 2^2 = 3^2 + 3^2 + 3^2 + 1^2. \end{aligned} \quad (2)$$

Seveda se je ob takih opažanjih že davno porodila domneva, ali ni morda vsako naravno število vsota štirih kvadratov celih števil. Ta domneva drži. Lagrange (1736 - 1813) je namreč dokazal: **Če je n naravno število, obstajajo takšna cela števila a, b, c, d , da je**

$$n = a^2 + b^2 + c^2 + d^2. \quad (3)$$

Zgledi (2) kažejo, da je dano naravno število n v splošnem mogoče na več načinov razbiti na vsoto štirih kvadratov celih števil. Je pa takih načinov le končno mnogo. Med števili $0, 1, 2, \dots, n$ je namreč le končno mnogo kvadratov celih števil in le ti pridejo v poštev za sumande v (3).

Čisto drugače pa je, če vprašujemo po izrazitvah naravnega števila z vsoto štirih kvadratov **racionalnih** števil.

Pokažimo najprej, da je mogoče 1 zapisati na neskončno načinov z vsoto dveh kvadratov racionalnih števil.

Naj bosta k, l naravni števili. Števili

$$E = \frac{k^2 - l^2}{k^2 + l^2}, F = \frac{2kl}{k^2 + l^2}$$

sta racionalni in kratek račun pokaže, da je

$$E^2 + F^2 = 1.$$

Ko spreminjamo k, l po naravnih številih tako, da sta k, l tuja, eden sod in drugi lih ter $k > l$, dobimo same različne pare E, F . To pomeni: **Obstaja neskončno različnih racionalnih parov E, F , za katere je $E^2 + F^2 = 1$.**

Nekaj takih parov navaja tablica

k	l	E	F
2	1	$\frac{3}{5}$	$\frac{4}{5}$
3	2	$\frac{5}{13}$	$\frac{12}{13}$
4	1	$\frac{15}{17}$	$\frac{8}{17}$
4	3	$\frac{7}{25}$	$\frac{24}{25}$
5	2	$\frac{21}{29}$	$\frac{20}{29}$
5	4	$\frac{9}{41}$	$\frac{40}{41}$

Povrnimo se k izrazitvi (3). Število n je naravno. Zato a, b, c, d ne morejo biti vsi nič. Vzemimo, da a ni nič. Pri celih a, b in racionalnih E, F sta $aE + bF, aF - bE$ racionalni števili. Velja tudi

$$a^2 + b^2 = (aE + bF)^2 + (aF - bE)^2. \quad (4)$$

O tem se prepričamo, ko na desni kvadriramo in upoštevamo, da je $E^2 + F^2 = 1$. Ko E, F spreminjamo, se sumanda na desni v (4) spreminjata, vsota pa ostaja $a^2 + b^2$. Naj bo u kakšna vrednost, ki jo zavzame $aE + bF$. Ker je $F = \sqrt{1 - E^2}$, iz $aE + b\sqrt{1 - E^2} = u$ izhaja kvadratna enačba $(aE - u)^2 = b^2(1 - E^2)$ za E . Obstajata zato največ dva različna E in tako največ dva različna para E, F , ko ima $aE + bF$ vrednost u . Ker je parov E, F neskončno, dobimo z njimi neskončno različnih vrednosti za $aE + bF$. Vsota $a^2 + b^2 > 0$ se da torej zmeraj na neskončno načinov izraziti z vsoto dveh kvadratov racionalnih števil. Podobno je

$$c^2 + d^2 = (cE + dF)^2 + (cF - dE)^2. \quad (5)$$

Če od števil c, d vsaj eno ni nič, je spet naravno število $c^2 + d^2$ na neskončno načinov izrazljivo z vsoto dveh kvadratov racionalnih števil.

Iz (3) po (4) in (5) sledi

$$n = (aE + bF)^2 + (aF - bE)^2 + (cE + dF)^2 + (cF - dE)^2. \quad (6)$$

Tako smo ugotovili: **Naravno število je mogoče na neskončno različnih načinov zapisati kot vsoto štirih kvadratov racionalnih števil.**

Zgled. V izrazitvi (1) števila 7 je $a = 2, b = c = d = 1$. Ko vzamemo iz tabele $E = \frac{5}{13}, F = \frac{12}{13}$, dobimo po (6)

$$7 = \left(\frac{22}{13}\right)^2 + \left(\frac{19}{13}\right)^2 + \left(\frac{17}{13}\right)^2 + \left(\frac{7}{13}\right)^2.$$

V (5) lahko za E, F izberemo tudi drugačni vrednosti kot v (4). Za $E_1 = \frac{3}{5}, F_1 = \frac{4}{5}$ je

$$7 = \left(\frac{22}{13}\right)^2 + \left(\frac{19}{13}\right)^2 + \left(\frac{7}{5}\right)^2 + \left(\frac{1}{5}\right)^2.$$

Pomudimo se sedaj še pri pozitivnih racionalnih številih. Pozitivno racionalno število ima obliko $\frac{n}{m}$, kjer sta n, m naravni števili. Naj bo m kvadrat naravnega števila $v, m = v^2$. Videli smo, da obstaja neskončno četreric racionalnih števil A, B, C, D , ko je $n = A^2 + B^2 + C^2 + D^2$. Iz vsake teh izrazitev izhaja

$$\frac{n}{v^2} = \left(\frac{A}{v}\right)^2 + \left(\frac{B}{v}\right)^2 + \left(\frac{C}{v}\right)^2 + \left(\frac{D}{v}\right)^2$$

in $\frac{A}{v}, \frac{B}{v}, \frac{C}{v}, \frac{D}{v}$ so racionalna števila. Če m ni kvadrat naravnega števila, pišemo $n/m = (nm)/(m^2)$. Število $(nm)/(m^2)$ že ima v imenovalcu kvadrat naravnega števila in smo tako pri pravkar obravnavanem primeru. Vidimo: **Pozitivno racionalno število je mogoče na neskončno načinov izraziti z vsoto štirih kvadratov racionalnih števil.**

Jože Grasselli

O ZLATI VERIGI

V srednjem veku je bilo zlato najbolj cenjeno plačilno sredstvo.

Pa je do vaše gostilne prijahal vitez, ki je imel pri sebi zlato verigo, sestavljeno iz šestih členov. Veriga je bila nesklenjena, torej taka z dvema koncema. Vitez je izvedel, da stane ena nočitev v gostišču toliko, kolikor je vreden en člen njegove verige. Gostilničar je zahteval, da poravna prenočišče vsak dan sproti. Postavil pa je vitezu še dodatni pogoj. Sprejel bo samo en razklenjen (torej poškodovan) člen verige, ostali morajo biti celi.

Toda vitez gostilničarju ni prav preveč zaupal in ni hotel plačati prenočišča vnaprej, ampak se je odločil, da bo plačeval vsak dan sproti.

Koliko dni lahko torej ostane v gostilni, če razen zlate verige nima pri sebi drugega plačilnega sredstva?

Borut Zalar

RESITVE NALOG

NAGRADNI SISTEMI LINEARNIH ENAČB (2. del)

– Rešitve s str. 34

1. Snop debeložrnatega žita da $9\frac{1}{4}$ dujev, snop srednježrnatega $4\frac{1}{4}$ dujev in snop drobožrnatega $2\frac{3}{4}$ dujev zrnja.
2. prvi ima 9 kovancev, drugi 7, tretji 10, četrti 8 in peti 11.
3. Prvi trgovec ima 7, drugi 8, tretji pa 9 zlatnikov.
4. Rubin stane 25 kovancev, smaragd 20, biser pa 2 kovanca.
5. Butara garu paličic stane 300 kuanov, čin želvovine je po 180 kuanov, zavitek kadila pa po 64 kuanov.
6. Otrok tehta 25 funtov, gospa O'Toole 135, pes pa 10 funtov.
7. Billie je star 3 leta in 6 mesecev, Charlie 10 let in 6 mesecev, Gertrude ima 1 leto in 9 mesecev, Henrietta 5 let in 3 mesece, Janet pa 21 let.
8. Vsi trije so pripeljali na sejem 39 živali; Hodges jih je pripeljal 11, Jackes 7 in Durrant 21.

Večina reševalcev, ki so nam poslali odgovore, je rešila pravilno vse naloge. Odločili smo se, da med njimi prejme knjižno nagrado **Sašo Pukšič** iz Stranic. Čestitamo.

Vilko Domajnko

KONGRES V PRAGI - Rešitev s str. 77

Označimo matematike s številkami od 1 do 6. Zdaj bomo ločili dva primera: Lahko se zgodi, da obstaja matematik, ki se lahko sporazumeva s tremi ostalimi, ali pa takega matematika ni.

V prvem primeru lahko brez škode za splošnost predpostavimo, da se 1 lahko sporazumeva z 2,3 in 4. V trojki (2,3,4) obstajata dva, na primer 2 in 3, ki se lahko sporazumevata med seboj, in tako je (1,2,3) iskana trojica.

V drugem primeru obstajajo trije matematiki, na primer 2,3 in 4, s katerimi 1 ne more govoriti brez tolmača. Dokazali bomo, da je (2,3,4) iskana trojica. Če bi to ne bilo res, bi dva izmed njih, na primer 2 in 3, ne govorila nobenega skupnega jezika. Toda tedaj bi se v trojici (1,2,3) nobena dva matematika ne mogla sporazumevati, kar je v nasprotju s pogoji naloge.

Borut Zalar

ASTRONOMIJA

PIONIR VESOLJSKIH POLETOV

Poteka sto let od rojstva pomembnega načrtovalca človekovega prodora v vesolje in enega od začetnikov raketne in vesoljske tehnike (astronavtike), Slovenca *Hermana Potočnika* (slika 1).



Slika 1. Herman Potočnik (1892 do 1929)

leta življenja je preživel pri bratu na Dunaju in vse svoje umske sposobnosti usmeril v načrtovanje človekovega prodora v vesolje. O teh problemih je mrzlično pisal knjigo. Zavedal se je, da mu je preostalo le še bore malo življenja, ki ga mora plodno izkoristiti. Knjiga (napisana v nemškem jeziku), je izšla leta 1929 v Berlinu tik pred avtorjevo smrtjo. Njen poslovenjeni naslov je *Problem vožnje po vesolju* (slika 2).

V knjigi je Potočnik obdelal načrt za človekovo osvajanje vesolja, raketno tehniko, načine človekovega preživetja, gibanja in delovanja v vesoljski postaji. Na koncu knjige daljnovidno, vendar le načelno nakazuje možnosti resničnega poleta na druga vesoljska telesa, na planete in k najbližjim zvezdam.

Rojen je bil 22.12.1892 v Pulju, kjer je služboval njegov oče kot zdravnik in general avstrijske mornarice. Potočnikov oče je bil doma iz okolice Slovenj Gradca, mati pa iz Maribora. Mati je zgodaj ovdovela in se vrnila v domači kraj. Tako je Herman preživel otroštvo v Mariboru, kjer je obiskoval osnovno šolo. Nato je obiskoval avstrijske vojaške šole. Leta 1913 je zaključil šolanje na vojaški akademiji. Kot inženirski poročnik - strokovnjak za železniške in mostovne gradnje je prvo svetovno vojno preživel na različnih bojiščih, tudi na soški fronti. Zbolel je za jetiko, 1919 so ga upokojili kot stotnika. Nato je na Dunaju študiral strojništvo. Leta 1925 je postal inženir strojništva - specialist za raketno tehniko. Po diplomi se ni zaposlil. Zadnja štiri

Potočnik je obdelal različne možnosti raketnih poletov v breztežnem vesoljskem prostoru in uporabo reakcijske sile pri zemeljskih poletih na velike razdalje - za primer medcelinskega letalskega prometa.

Obravnaval je umetne zemeljske satelite. Te so obravnavali v svojih delih že drugi avtorji. Vendar Potočnik dodaja novo zamisel za satelit, ki naj bi krožil z enako kotno hitrostjo kot se vrti Zemlja in bil tako stalno nad istim krajem zemeljske površine. Izračunal je, da naj bi krožil tak satelit na višini 35 900 km nad zemeljskim površjem in da bi se moral gibati s hitrostjo 3 080 m/s. Na tej nadmorski višini naj bi vtirili vesoljsko postajo, ki bi služila vzpostavljanju komunikacij. (To so uresničili leta 1963 z izstrelitvijo ameriškega geostacionarnega telekomunikacijskega satelita Syncom, ki je zavzel lego, kot jo je izračunal Potočnik.)

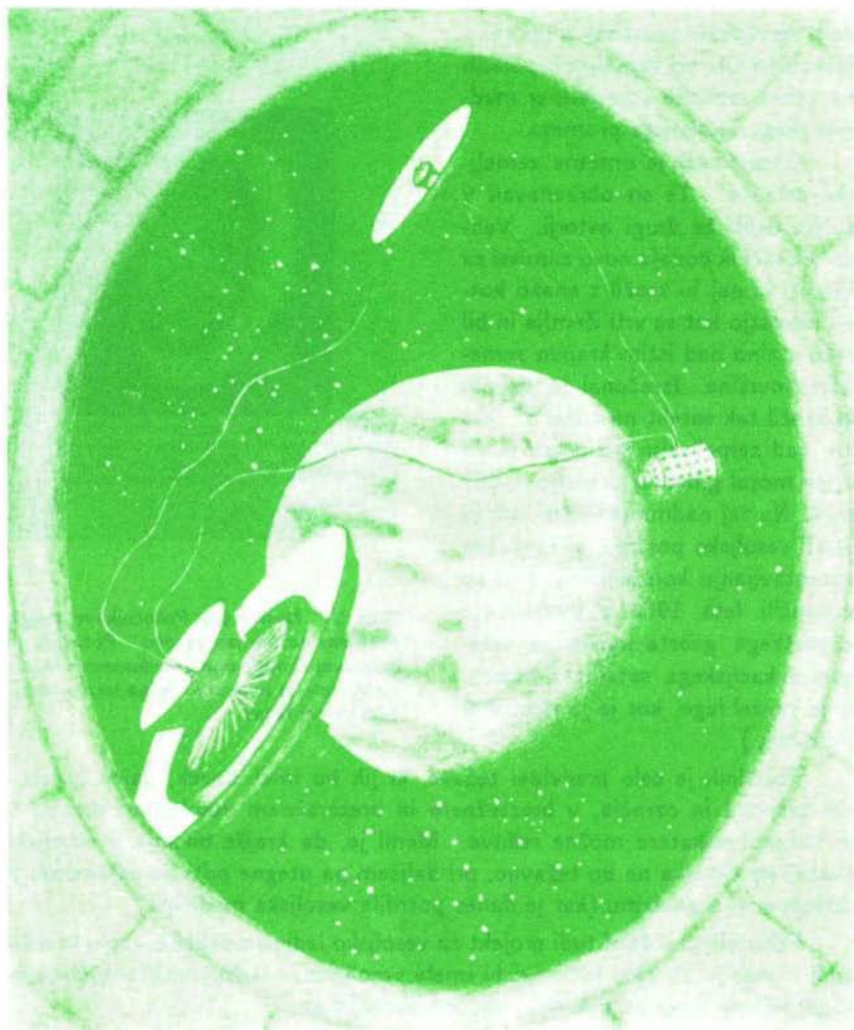
Potočnik je celo predvidel težave, ki jih bo imel človek, vaje zemeljske težnosti in ozračja, v breztežnem in brezračnem vesoljskem prostoru, in nakazal nekatere možne rešitve. Menil je, da krajše bivanje v vesoljski postaji za človeka ne bo težavno, pri daljšem pa utegne priti do sprememb v človekovem organizmu (kar je danes potrdila vesoljska medicina).

Potočnik je izdelal tudi projekt za vesoljsko ladjo za daljše bivanje in delo ljudi v vesolju. V taki ladji naj bi imela vesoljska posadka svoje zatočišče in zagotovljene osnovne pogoje, podobne zemeljskim.

V svoji knjigi Herman Potočnik piše, da ni namen njegovih razmišljanj prepričati, da bi že jutri potovali k drugim vesoljskim telesom. Želi le povedati, da se vožnja po vesoljskem prostoru človeku ne bi smela zdeti nekaj nemogočega, neuresničljivega, ampak da je to verjetno tudi tehnično povsem rešljivo, kar se je pozneje izkazalo za resnično.



Slika 2. Naslovnica Potočnikove knjige *Problem vožnje po vesolju*. Potočnik je izdal svojo knjigo pod psevdonimom Noordung, zato je avtorstvo dolga leta povzročalo precej težav.



Slika 3. Pogled na vesoljsko postajo, ki jo je načrtoval Potočnik. Ta postaja je sestavljena iz stanovanjskega kolesa, sončno - energijske centrale in observatorija za astronomska opazovanja. V ozadju je Zemlja. Slika je vzeta iz Potočnikove knjige. Narisal jo je avtor sam.

Potočnikova knjiga je izšla v prelomnem obdobju, ko se je človek od teoretičnih razmišljanj že povzpел do prvih praktičnih uresničitvev. Leta 1935 so z raketo na tekoče gorivo dosegli višino 2,3 km, 1957 so izstrelili prvi umetni zemeljski satelit, 1959 je sonda Lunik 2 prvič zadela Luno, 1961 je Jurij Gagarin prvič obkrožil Zemljo, 1963 so izstrelili prvi geostacionarni satelit, 1969 je z Apolla 11 stopil prvi človek na drugo vesoljsko telo - Luno, 1975 so prvič spojili vesoljski postaji Apollo in Sojuz na krožnici okrog Zemlje, proti drugim planetom so že poletele vesoljske sonde, nekaj pa jih celo zapušča naše Osončje. Vse to je napovedal Potočnik v svoji knjigi. Njegov projekt obljudene vesoljske postaje pa še čaka na uresničitvev.

Potočnikova knjiga *Problem vožnje po vesolju* je tako zgledno in pomembno delo, da so se iz njega učili kasnejši vodilni možje astronautike in izjavljali, da jim ni služila le kot učbenik, ampak tudi kot vzpodbuda za ustvarjalno delo. Leta 1986 je Slovenska matica izdala slovenski prevod te znamenite knjige.

Marijan Prosén

KRIŽANKA NOBELOVI NAGRAJENCI ZA FIZIKO – Rešitev s str. 96

TELEFON NAGRAJEN 1901-1902	EMILIO NAGRAJEN 1902-1903	ALBERT NAGRAJEN 1903-1904	WILSON NAGRAJEN 1904-1905	ROBERT NAGRAJEN 1905-1906	WILLIAM NAGRAJEN 1906-1907	ROBERT NAGRAJEN 1907-1908	ALBERT NAGRAJEN 1908-1909	WILSON NAGRAJEN 1909-1910	ROBERT NAGRAJEN 1910-1911	ALBERT NAGRAJEN 1911-1912	WILSON NAGRAJEN 1912-1913	ROBERT NAGRAJEN 1913-1914	ALBERT NAGRAJEN 1914-1915	WILSON NAGRAJEN 1915-1916	ROBERT NAGRAJEN 1916-1917	ALBERT NAGRAJEN 1917-1918	WILSON NAGRAJEN 1918-1919	ROBERT NAGRAJEN 1919-1920	ALBERT NAGRAJEN 1920-1921	WILSON NAGRAJEN 1921-1922	ROBERT NAGRAJEN 1922-1923	ALBERT NAGRAJEN 1923-1924	WILSON NAGRAJEN 1924-1925	ROBERT NAGRAJEN 1925-1926	ALBERT NAGRAJEN 1926-1927	WILSON NAGRAJEN 1927-1928	ROBERT NAGRAJEN 1928-1929	ALBERT NAGRAJEN 1929-1930	WILSON NAGRAJEN 1930-1931	ROBERT NAGRAJEN 1931-1932	ALBERT NAGRAJEN 1932-1933	WILSON NAGRAJEN 1933-1934	ROBERT NAGRAJEN 1934-1935	ALBERT NAGRAJEN 1935-1936	WILSON NAGRAJEN 1936-1937	ROBERT NAGRAJEN 1937-1938	ALBERT NAGRAJEN 1938-1939	WILSON NAGRAJEN 1939-1940	ROBERT NAGRAJEN 1940-1941	ALBERT NAGRAJEN 1941-1942	WILSON NAGRAJEN 1942-1943	ROBERT NAGRAJEN 1943-1944	ALBERT NAGRAJEN 1944-1945	WILSON NAGRAJEN 1945-1946	ROBERT NAGRAJEN 1946-1947	ALBERT NAGRAJEN 1947-1948	WILSON NAGRAJEN 1948-1949	ROBERT NAGRAJEN 1949-1950	ALBERT NAGRAJEN 1950-1951	WILSON NAGRAJEN 1951-1952	ROBERT NAGRAJEN 1952-1953	ALBERT NAGRAJEN 1953-1954	WILSON NAGRAJEN 1954-1955	ROBERT NAGRAJEN 1955-1956	ALBERT NAGRAJEN 1956-1957	WILSON NAGRAJEN 1957-1958	ROBERT NAGRAJEN 1958-1959	ALBERT NAGRAJEN 1959-1960	WILSON NAGRAJEN 1960-1961	ROBERT NAGRAJEN 1961-1962	ALBERT NAGRAJEN 1962-1963	WILSON NAGRAJEN 1963-1964	ROBERT NAGRAJEN 1964-1965	ALBERT NAGRAJEN 1965-1966	WILSON NAGRAJEN 1966-1967	ROBERT NAGRAJEN 1967-1968	ALBERT NAGRAJEN 1968-1969	WILSON NAGRAJEN 1969-1970	ROBERT NAGRAJEN 1970-1971	ALBERT NAGRAJEN 1971-1972	WILSON NAGRAJEN 1972-1973	ROBERT NAGRAJEN 1973-1974	ALBERT NAGRAJEN 1974-1975	WILSON NAGRAJEN 1975-1976	ROBERT NAGRAJEN 1976-1977	ALBERT NAGRAJEN 1977-1978	WILSON NAGRAJEN 1978-1979	ROBERT NAGRAJEN 1979-1980	ALBERT NAGRAJEN 1980-1981	WILSON NAGRAJEN 1981-1982	ROBERT NAGRAJEN 1982-1983	ALBERT NAGRAJEN 1983-1984	WILSON NAGRAJEN 1984-1985	ROBERT NAGRAJEN 1985-1986	ALBERT NAGRAJEN 1986-1987	WILSON NAGRAJEN 1987-1988	ROBERT NAGRAJEN 1988-1989	ALBERT NAGRAJEN 1989-1990	WILSON NAGRAJEN 1990-1991	ROBERT NAGRAJEN 1991-1992	ALBERT NAGRAJEN 1992-1993	WILSON NAGRAJEN 1993-1994	ROBERT NAGRAJEN 1994-1995	ALBERT NAGRAJEN 1995-1996	WILSON NAGRAJEN 1996-1997	ROBERT NAGRAJEN 1997-1998	ALBERT NAGRAJEN 1998-1999	WILSON NAGRAJEN 1999-2000	ROBERT NAGRAJEN 2000-2001	ALBERT NAGRAJEN 2001-2002	WILSON NAGRAJEN 2002-2003	ROBERT NAGRAJEN 2003-2004	ALBERT NAGRAJEN 2004-2005	WILSON NAGRAJEN 2005-2006	ROBERT NAGRAJEN 2006-2007	ALBERT NAGRAJEN 2007-2008	WILSON NAGRAJEN 2008-2009	ROBERT NAGRAJEN 2009-2010	ALBERT NAGRAJEN 2010-2011	WILSON NAGRAJEN 2011-2012	ROBERT NAGRAJEN 2012-2013	ALBERT NAGRAJEN 2013-2014	WILSON NAGRAJEN 2014-2015	ROBERT NAGRAJEN 2015-2016	ALBERT NAGRAJEN 2016-2017	WILSON NAGRAJEN 2017-2018	ROBERT NAGRAJEN 2018-2019	ALBERT NAGRAJEN 2019-2020	WILSON NAGRAJEN 2020-2021	ROBERT NAGRAJEN 2021-2022	ALBERT NAGRAJEN 2022-2023	WILSON NAGRAJEN 2023-2024	ROBERT NAGRAJEN 2024-2025	ALBERT NAGRAJEN 2025-2026	WILSON NAGRAJEN 2026-2027	ROBERT NAGRAJEN 2027-2028	ALBERT NAGRAJEN 2028-2029	WILSON NAGRAJEN 2029-2030	ROBERT NAGRAJEN 2030-2031	ALBERT NAGRAJEN 2031-2032	WILSON NAGRAJEN 2032-2033	ROBERT NAGRAJEN 2033-2034	ALBERT NAGRAJEN 2034-2035	WILSON NAGRAJEN 2035-2036	ROBERT NAGRAJEN 2036-2037	ALBERT NAGRAJEN 2037-2038	WILSON NAGRAJEN 2038-2039	ROBERT NAGRAJEN 2039-2040	ALBERT NAGRAJEN 2040-2041	WILSON NAGRAJEN 2041-2042	ROBERT NAGRAJEN 2042-2043	ALBERT NAGRAJEN 2043-2044	WILSON NAGRAJEN 2044-2045	ROBERT NAGRAJEN 2045-2046	ALBERT NAGRAJEN 2046-2047	WILSON NAGRAJEN 2047-2048	ROBERT NAGRAJEN 2048-2049	ALBERT NAGRAJEN 2049-2050	WILSON NAGRAJEN 2050-2051	ROBERT NAGRAJEN 2051-2052	ALBERT NAGRAJEN 2052-2053	WILSON NAGRAJEN 2053-2054	ROBERT NAGRAJEN 2054-2055	ALBERT NAGRAJEN 2055-2056	WILSON NAGRAJEN 2056-2057	ROBERT NAGRAJEN 2057-2058	ALBERT NAGRAJEN 2058-2059	WILSON NAGRAJEN 2059-2060	ROBERT NAGRAJEN 2060-2061	ALBERT NAGRAJEN 2061-2062	WILSON NAGRAJEN 2062-2063	ROBERT NAGRAJEN 2063-2064	ALBERT NAGRAJEN 2064-2065	WILSON NAGRAJEN 2065-2066	ROBERT NAGRAJEN 2066-2067	ALBERT NAGRAJEN 2067-2068	WILSON NAGRAJEN 2068-2069	ROBERT NAGRAJEN 2069-2070	ALBERT NAGRAJEN 2070-2071	WILSON NAGRAJEN 2071-2072	ROBERT NAGRAJEN 2072-2073	ALBERT NAGRAJEN 2073-2074	WILSON NAGRAJEN 2074-2075	ROBERT NAGRAJEN 2075-2076	ALBERT NAGRAJEN 2076-2077	WILSON NAGRAJEN 2077-2078	ROBERT NAGRAJEN 2078-2079	ALBERT NAGRAJEN 2079-2080	WILSON NAGRAJEN 2080-2081	ROBERT NAGRAJEN 2081-2082	ALBERT NAGRAJEN 2082-2083	WILSON NAGRAJEN 2083-2084	ROBERT NAGRAJEN 2084-2085	ALBERT NAGRAJEN 2085-2086	WILSON NAGRAJEN 2086-2087	ROBERT NAGRAJEN 2087-2088	ALBERT NAGRAJEN 2088-2089	WILSON NAGRAJEN 2089-2090	ROBERT NAGRAJEN 2090-2091	ALBERT NAGRAJEN 2091-2092	WILSON NAGRAJEN 2092-2093	ROBERT NAGRAJEN 2093-2094	ALBERT NAGRAJEN 2094-2095	WILSON NAGRAJEN 2095-2096	ROBERT NAGRAJEN 2096-2097	ALBERT NAGRAJEN 2097-2098	WILSON NAGRAJEN 2098-2099	ROBERT NAGRAJEN 2099-2100	ALBERT NAGRAJEN 2100-2101	WILSON NAGRAJEN 2101-2102	ROBERT NAGRAJEN 2102-2103	ALBERT NAGRAJEN 2103-2104	WILSON NAGRAJEN 2104-2105	ROBERT NAGRAJEN 2105-2106	ALBERT NAGRAJEN 2106-2107	WILSON NAGRAJEN 2107-2108	ROBERT NAGRAJEN 2108-2109	ALBERT NAGRAJEN 2109-2110	WILSON NAGRAJEN 2110-2111	ROBERT NAGRAJEN 2111-2112	ALBERT NAGRAJEN 2112-2113	WILSON NAGRAJEN 2113-2114	ROBERT NAGRAJEN 2114-2115	ALBERT NAGRAJEN 2115-2116	WILSON NAGRAJEN 2116-2117	ROBERT NAGRAJEN 2117-2118	ALBERT NAGRAJEN 2118-2119	WILSON NAGRAJEN 2119-2120	ROBERT NAGRAJEN 2120-2121	ALBERT NAGRAJEN 2121-2122	WILSON NAGRAJEN 2122-2123	ROBERT NAGRAJEN 2123-2124	ALBERT NAGRAJEN 2124-2125	WILSON NAGRAJEN 2125-2126	ROBERT NAGRAJEN 2126-2127	ALBERT NAGRAJEN 2127-2128	WILSON NAGRAJEN 2128-2129	ROBERT NAGRAJEN 2129-2130	ALBERT NAGRAJEN 2130-2131	WILSON NAGRAJEN 2131-2132	ROBERT NAGRAJEN 2132-2133	ALBERT NAGRAJEN 2133-2134	WILSON NAGRAJEN 2134-2135	ROBERT NAGRAJEN 2135-2136	ALBERT NAGRAJEN 2136-2137	WILSON NAGRAJEN 2137-2138	ROBERT NAGRAJEN 2138-2139	ALBERT NAGRAJEN 2139-2140	WILSON NAGRAJEN 2140-2141	ROBERT NAGRAJEN 2141-2142	ALBERT NAGRAJEN 2142-2143	WILSON NAGRAJEN 2143-2144	ROBERT NAGRAJEN 2144-2145	ALBERT NAGRAJEN 2145-2146	WILSON NAGRAJEN 2146-2147	ROBERT NAGRAJEN 2147-2148	ALBERT NAGRAJEN 2148-2149	WILSON NAGRAJEN 2149-2150	ROBERT NAGRAJEN 2150-2151	ALBERT NAGRAJEN 2151-2152	WILSON NAGRAJEN 2152-2153	ROBERT NAGRAJEN 2153-2154	ALBERT NAGRAJEN 2154-2155	WILSON NAGRAJEN 2155-2156	ROBERT NAGRAJEN 2156-2157	ALBERT NAGRAJEN 2157-2158	WILSON NAGRAJEN 2158-2159	ROBERT NAGRAJEN 2159-2160	ALBERT NAGRAJEN 2160-2161	WILSON NAGRAJEN 2161-2162	ROBERT NAGRAJEN 2162-2163	ALBERT NAGRAJEN 2163-2164	WILSON NAGRAJEN 2164-2165	ROBERT NAGRAJEN 2165-2166	ALBERT NAGRAJEN 2166-2167	WILSON NAGRAJEN 2167-2168	ROBERT NAGRAJEN 2168-2169	ALBERT NAGRAJEN 2169-2170	WILSON NAGRAJEN 2170-2171	ROBERT NAGRAJEN 2171-2172	ALBERT NAGRAJEN 2172-2173	WILSON NAGRAJEN 2173-2174	ROBERT NAGRAJEN 2174-2175	ALBERT NAGRAJEN 2175-2176	WILSON NAGRAJEN 2176-2177	ROBERT NAGRAJEN 2177-2178	ALBERT NAGRAJEN 2178-2179	WILSON NAGRAJEN 2179-2180	ROBERT NAGRAJEN 2180-2181	ALBERT NAGRAJEN 2181-2182	WILSON NAGRAJEN 2182-2183	ROBERT NAGRAJEN 2183-2184	ALBERT NAGRAJEN 2184-2185	WILSON NAGRAJEN 2185-2186	ROBERT NAGRAJEN 2186-2187	ALBERT NAGRAJEN 2187-2188	WILSON NAGRAJEN 2188-2189	ROBERT NAGRAJEN 2189-2190	ALBERT NAGRAJEN 2190-2191	WILSON NAGRAJEN 2191-2192	ROBERT NAGRAJEN 2192-2193	ALBERT NAGRAJEN 2193-2194	WILSON NAGRAJEN 2194-2195	ROBERT NAGRAJEN 2195-2196	ALBERT NAGRAJEN 2196-2197	WILSON NAGRAJEN 2197-2198	ROBERT NAGRAJEN 2198-2199	ALBERT NAGRAJEN 2199-2200	WILSON NAGRAJEN 2200-2201	ROBERT NAGRAJEN 2201-2202	ALBERT NAGRAJEN 2202-2203	WILSON NAGRAJEN 2203-2204	ROBERT NAGRAJEN 2204-2205	ALBERT NAGRAJEN 2205-2206	WILSON NAGRAJEN 2206-2207	ROBERT NAGRAJEN 2207-2208	ALBERT NAGRAJEN 2208-2209	WILSON NAGRAJEN 2209-2210	ROBERT NAGRAJEN 2210-2211	ALBERT NAGRAJEN 2211-2212	WILSON NAGRAJEN 2212-2213	ROBERT NAGRAJEN 2213-2214	ALBERT NAGRAJEN 2214-2215	WILSON NAGRAJEN 2215-2216	ROBERT NAGRAJEN 2216-2217	ALBERT NAGRAJEN 2217-2218	WILSON NAGRAJEN 2218-2219	ROBERT NAGRAJEN 2219-2220	ALBERT NAGRAJEN 2220-2221	WILSON NAGRAJEN 2221-2222	ROBERT NAGRAJEN 2222-2223	ALBERT NAGRAJEN 2223-2224	WILSON NAGRAJEN 2224-2225	ROBERT NAGRAJEN 2225-2226	ALBERT NAGRAJEN 2226-2227	WILSON NAGRAJEN 2227-2228	ROBERT NAGRAJEN 2228-2229	ALBERT NAGRAJEN 2229-2230	WILSON NAGRAJEN 2230-2231	ROBERT NAGRAJEN 2231-2232	ALBERT NAGRAJEN 2232-2233	WILSON NAGRAJEN 2233-2234	ROBERT NAGRAJEN 2234-2235	ALBERT NAGRAJEN 2235-2236	WILSON NAGRAJEN 2236-2237	ROBERT NAGRAJEN 2237-2238	ALBERT NAGRAJEN 2238-2239	WILSON NAGRAJEN 2239-2240	ROBERT NAGRAJEN 2240-2241	ALBERT NAGRAJEN 2241-2242	WILSON NAGRAJEN 2242-2243	ROBERT NAGRAJEN 2243-2244	ALBERT NAGRAJEN 2244-2245	WILSON NAGRAJEN 2245-2246	ROBERT NAGRAJEN 2246-2247	ALBERT NAGRAJEN 2247-2248	WILSON NAGRAJEN 2248-2249	ROBERT NAGRAJEN 2249-2250	ALBERT NAGRAJEN 2250-2251	WILSON NAGRAJEN 2251-2252	ROBERT NAGRAJEN 2252-2253	ALBERT NAGRAJEN 2253-2254	WILSON NAGRAJEN 2254-2255	ROBERT NAGRAJEN 2255-2256	ALBERT NAGRAJEN 2256-2257	WILSON NAGRAJEN 2257-2258	ROBERT NAGRAJEN 2258-2259	ALBERT NAGRAJEN 2259-2260	WILSON NAGRAJEN 2260-2261	ROBERT NAGRAJEN 2261-2262	ALBERT NAGRAJEN 2262-2263	WILSON NAGRAJEN 2263-2264	ROBERT NAGRAJEN 2264-2265	ALBERT NAGRAJEN 2265-2266	WILSON NAGRAJEN 2266-2267	ROBERT NAGRAJEN 2267-2268	ALBERT NAGRAJEN 2268-2269	WILSON NAGRAJEN 2269-2270	ROBERT NAGRAJEN 2270-2271	ALBERT NAGRAJEN 2271-2272	WILSON NAGRAJEN 2272-2273	ROBERT NAGRAJEN 2273-2274	ALBERT NAGRAJEN 2274-2275	WILSON NAGRAJEN 2275-2276	ROBERT NAGRAJEN 2276-2277	ALBERT NAGRAJEN 2277-2278	WILSON NAGRAJEN 2278-2279	ROBERT NAGRAJEN 2279-2280	ALBERT NAGRAJEN 2280-2281	WILSON NAGRAJEN 2281-2282	ROBERT NAGRAJEN 2282-2283	ALBERT NAGRAJEN 2283-2284	WILSON NAGRAJEN 2284-2285	ROBERT NAGRAJEN 2285-2286	ALBERT NAGRAJEN 2286-2287	WILSON NAGRAJEN 2287-2288	ROBERT NAGRAJEN 2288-2289	ALBERT NAGRAJEN 2289-2290	WILSON NAGRAJEN 2290-2291	ROBERT NAGRAJEN 2291-2292	ALBERT NAGRAJEN 2292-2293	WILSON NAGRAJEN 2293-2294	ROBERT NAGRAJEN 2294-2295	ALBERT NAGRAJEN 2295-2296	WILSON NAGRAJEN 2296-2297	ROBERT NAGRAJEN 2297-2298	ALBERT NAGRAJEN 2298-2299	WILSON NAGRAJEN 2299-2300	ROBERT NAGRAJEN 2300-2301	ALBERT NAGRAJEN 2301-2302	WILSON NAGRAJEN 2302-2303	ROBERT NAGRAJEN 2303-2304	ALBERT NAGRAJEN 2304-2305	WILSON NAGRAJEN 2305-2306	ROBERT NAGRAJEN 2306-2307	ALBERT NAGRAJEN 2307-2308	WILSON NAGRAJEN 2308-2309	ROBERT NAGRAJEN 2309-2310	ALBERT NAGRAJEN 2310-2311	WILSON NAGRAJEN 2311-2312	ROBERT NAGRAJEN 2312-2313	ALBERT NAGRAJEN 2313-2314	WILSON NAGRAJEN 2314-2315	ROBERT NAGRAJEN 2315-2316	ALBERT NAGRAJEN 2316-2317	WILSON NAGRAJEN 2317-2318	ROBERT NAGRAJEN 2318-2319	ALBERT NAGRAJEN 2319-2320	WILSON NAGRAJEN 2320-2321	ROBERT NAGRAJEN 2321-2322	ALBERT NAGRAJEN 2322-2323	WILSON NAGRAJEN 2323-2324	ROBERT NAGRAJEN 2324-2325	ALBERT NAGRAJEN 2325-2326	WILSON NAGRAJEN 2326-2327	ROBERT NAGRAJEN 2327-2328	ALBERT NAGRAJEN 2328-2329	WILSON NAGRAJEN 2329-2330	ROBERT NAGRAJEN 2330-2331	ALBERT NAGRAJEN 2331-2332	WILSON NAGRAJEN 2332-2333	ROBERT NAGRAJEN 2333-2334	ALBERT NAGRAJEN 2334-2335	WILSON NAGRAJEN 2335-2336	ROBERT NAGRAJEN 2336-2337	ALBERT NAGRAJEN 2337-2338	WILSON NAGRAJEN 2338-2339	ROBERT NAGRAJEN 2339-2340	ALBERT NAGRAJEN 2340-2341	WILSON NAGRAJEN 2341-2342	ROBERT NAGRAJEN 2342-2343	ALBERT NAGRAJEN 2343-2344	WILSON NAGRAJEN 2344-2345	ROBERT NAGRAJEN 2345-2346	ALBERT NAGRAJEN 2346-2347	WILSON NAGRAJEN 2347-2348	ROBERT NAGRAJEN 2348-2349	ALBERT NAGRAJEN 2349-2350	WILSON NAGRAJEN 2350-2351	ROBERT NAGRAJEN 2351-2352	ALBERT NAGRAJEN 2352-2353	WILSON NAGRAJEN 2353-2354	ROBERT NAGRAJEN 2354-2355	ALBERT NAGRAJEN 2355-2356	WILSON NAGRAJEN 2356-2357	ROBERT NAGRAJEN 2357-2358	ALBERT NAGRAJEN 2358-2359	WILSON NAGRAJEN 2359-2360	ROBERT NAGRAJEN 2360-2361	ALBERT NAGRAJEN 2361-2362	WILSON NAGRAJEN 2362-2363	ROBERT NAGRAJEN 2363-2364	ALBERT NAGRAJEN 2364-2365	WILSON NAGRAJEN 2365-2366	ROBERT NAGRAJEN 2366-2367	ALBERT NAGRAJEN 2367-2368	WILSON NAGRAJEN 2368-2369	ROBERT NAGRAJEN 2369-2370	ALBERT NAGRAJEN 2370-2371	WILSON NAGRAJEN 2371-2372	ROBERT NAGRAJEN 2372-2373	ALBERT NAGRAJEN 2373-2374	WILSON NAGRAJEN 2374-2375	ROBERT NAGRAJEN 2375-2376	ALBERT NAGRAJEN 2376-2377	WILSON NAGRAJEN 2377-2378	ROBERT NAGRAJEN 2378-2379	ALBERT NAGRAJEN 2379-2380	WILSON NAGRAJEN 2380-2381	ROBERT NAGRAJEN 2381-2382	ALBERT NAGRAJEN 2382-2383	WILSON NAGRAJEN 2383-2384	ROBERT NAGRAJEN 2384-2385	ALBERT NAGRAJEN 2385-2386	WILSON NAGRAJEN 2386-23877
----------------------------------	---------------------------------	---------------------------------	---------------------------------	---------------------------------	----------------------------------	---------------------------------	---------------------------------	---------------------------------	---------------------------------	---------------------------------	---------------------------------	---------------------------------	---------------------------------	---------------------------------	---------------------------------	---------------------------------	---------------------------------	---------------------------------	---------------------------------	---------------------------------	---------------------------------	---------------------------------	---------------------------------	---------------------------------	---------------------------------	---------------------------------	---------------------------------	---------------------------------	---------------------------------	---------------------------------	---------------------------------	---------------------------------	---------------------------------	---------------------------------	---------------------------------	---------------------------------	---------------------------------	---------------------------------	---------------------------------	---------------------------------	---------------------------------	---------------------------------	---------------------------------	---------------------------------	---------------------------------	---------------------------------	---------------------------------	---------------------------------	---------------------------------	---------------------------------	---------------------------------	---------------------------------	---------------------------------	---------------------------------	---------------------------------	---------------------------------	---------------------------------	---------------------------------	---------------------------------	---------------------------------	---------------------------------	---------------------------------	---------------------------------	---------------------------------	---------------------------------	---------------------------------	---------------------------------	---------------------------------	---------------------------------	---------------------------------	---------------------------------	---------------------------------	---------------------------------	---------------------------------	---------------------------------	---------------------------------	---------------------------------	---------------------------------	---------------------------------	---------------------------------	---------------------------------	---------------------------------	---------------------------------	---------------------------------	---------------------------------	---------------------------------	---------------------------------	---------------------------------	---------------------------------	---------------------------------	---------------------------------	---------------------------------	---------------------------------	---------------------------------	---------------------------------	---------------------------------	---------------------------------	---------------------------------	---------------------------------	---------------------------------	---------------------------------	---------------------------------	---------------------------------	---------------------------------	---------------------------------	---------------------------------	---------------------------------	---------------------------------	---------------------------------	---------------------------------	---------------------------------	---------------------------------	---------------------------------	---------------------------------	---------------------------------	---------------------------------	---------------------------------	---------------------------------	---------------------------------	---------------------------------	---------------------------------	---------------------------------	---------------------------------	---------------------------------	---------------------------------	---------------------------------	---------------------------------	---------------------------------	---------------------------------	---------------------------------	---------------------------------	---------------------------------	---------------------------------	---------------------------------	---------------------------------	---------------------------------	---------------------------------	---------------------------------	---------------------------------	---------------------------------	---------------------------------	---------------------------------	---------------------------------	---------------------------------	---------------------------------	---------------------------------	---------------------------------	---------------------------------	---------------------------------	---------------------------------	---------------------------------	---------------------------------	---------------------------------	---------------------------------	---------------------------------	---------------------------------	---------------------------------	---------------------------------	---------------------------------	---------------------------------	---------------------------------	---------------------------------	---------------------------------	---------------------------------	---------------------------------	---------------------------------	---------------------------------	---------------------------------	---------------------------------	---------------------------------	---------------------------------	---------------------------------	---------------------------------	---------------------------------	---------------------------------	---------------------------------	---------------------------------	---------------------------------	---------------------------------	---------------------------------	---------------------------------	---------------------------------	---------------------------------	---------------------------------	---------------------------------	---------------------------------	---------------------------------	---------------------------------	---------------------------------	---------------------------------	---------------------------------	---------------------------------	---------------------------------	---------------------------------	---------------------------------	---------------------------------	---------------------------------	---------------------------------	---------------------------------	---------------------------------	---------------------------------	---------------------------------	---------------------------------	---------------------------------	---------------------------------	---------------------------------	---------------------------------	---------------------------------	---------------------------------	---------------------------------	---------------------------------	---------------------------------	---------------------------------	---------------------------------	---------------------------------	---------------------------------	---------------------------------	---------------------------------	---------------------------------	---------------------------------	---------------------------------	---------------------------------	---------------------------------	---------------------------------	---------------------------------	---------------------------------	---------------------------------	---------------------------------	---------------------------------	---------------------------------	---------------------------------	---------------------------------	---------------------------------	---------------------------------	---------------------------------	---------------------------------	---------------------------------	---------------------------------	---------------------------------	---------------------------------	---------------------------------	---------------------------------	---------------------------------	---------------------------------	---------------------------------	---------------------------------	---------------------------------	---------------------------------	---------------------------------	---------------------------------	---------------------------------	---------------------------------	---------------------------------	---------------------------------	---------------------------------	---------------------------------	---------------------------------	---------------------------------	---------------------------------	---------------------------------	---------------------------------	---------------------------------	---------------------------------	---------------------------------	---------------------------------	---------------------------------	---------------------------------	---------------------------------	---------------------------------	---------------------------------	---------------------------------	---------------------------------	---------------------------------	---------------------------------	---------------------------------	---------------------------------	---------------------------------	---------------------------------	---------------------------------	---------------------------------	---------------------------------	---------------------------------	---------------------------------	---------------------------------	---------------------------------	---------------------------------	---------------------------------	---------------------------------	---------------------------------	---------------------------------	---------------------------------	---------------------------------	---------------------------------	---------------------------------	---------------------------------	---------------------------------	---------------------------------	---------------------------------	---------------------------------	---------------------------------	---------------------------------	---------------------------------	---------------------------------	---------------------------------	---------------------------------	---------------------------------	---------------------------------	---------------------------------	---------------------------------	---------------------------------	---------------------------------	---------------------------------	---------------------------------	---------------------------------	---------------------------------	---------------------------------	---------------------------------	---------------------------------	---------------------------------	---------------------------------	---------------------------------	---------------------------------	---------------------------------	---------------------------------	---------------------------------	---------------------------------	---------------------------------	---------------------------------	---------------------------------	---------------------------------	---------------------------------	---------------------------------	---------------------------------	---------------------------------	---------------------------------	---------------------------------	---------------------------------	---------------------------------	---------------------------------	---------------------------------	---------------------------------	---------------------------------	---------------------------------	---------------------------------	---------------------------------	---------------------------------	---------------------------------	---------------------------------	---------------------------------	---------------------------------	---------------------------------	---------------------------------	---------------------------------	---------------------------------	---------------------------------	---------------------------------	---------------------------------	---------------------------------	---------------------------------	---------------------------------	---------------------------------	---------------------------------	---------------------------------	---------------------------------	---------------------------------	---------------------------------	---------------------------------	---------------------------------	---------------------------------	---------------------------------	---------------------------------	---------------------------------	---------------------------------	---------------------------------	---------------------------------	---------------------------------	---------------------------------	---------------------------------	---------------------------------	---------------------------------	---------------------------------	---------------------------------	---------------------------------	---------------------------------	---------------------------------	---------------------------------	---------------------------------	---------------------------------	---------------------------------	---------------------------------	---------------------------------	---------------------------------	---------------------------------	---------------------------------	---------------------------------	---------------------------------	---------------------------------	---------------------------------	---------------------------------	---------------------------------	---------------------------------	---------------------------------	---------------------------------	---------------------------------	---------------------------------	---------------------------------	---------------------------------	---------------------------------	---------------------------------	---------------------------------	---------------------------------	---------------------------------	---------------------------------	---------------------------------	---------------------------------	---------------------------------	---------------------------------	---------------------------------	---------------------------------	---------------------------------	---------------------------------	---------------------------------	---------------------------------	---------------------------------	---------------------------------	---------------------------------	---------------------------------	---------------------------------	---------------------------------	---------------------------------	---------------------------------	---------------------------------	---------------------------------	---------------------------------	---------------------------------	---------------------------------	---------------------------------	---------------------------------	---------------------------------	---------------------------------	---------------------------------	---------------------------------	---------------------------------	---------------------------------	---------------------------------	---------------------------------	---------------------------------	---------------------------------	---------------------------------	---------------------------------	---------------------------------	---------------------------------	---------------------------------	---------------------------------	---------------------------------	---------------------------------	---------------------------------	---------------------------------	---------------------------------	---------------------------------	---------------------------------	---------------------------------	---------------------------------	---------------------------------	---------------------------------	---------------------------------	---------------------------------	---------------------------------	---------------------------------	---------------------------------	---------------------------------	---------------------------------	---------------------------------	---------------------------------	---------------------------------	---------------------------------	---------------------------------	---------------------------------	---------------------------------	---------------------------------	---------------------------------	---------------------------------	---------------------------------	---------------------------------	----------------------------------

AVTOMOBILI FORMULE 1 IN FIZIKA

Avtomobil je ena izmed naprav, brez katerih bi si dandanes težko zamislili življenje. Knjižica *Vozí me, avto, v daljave* se ukvarja z vsakdanjimi avtomobili, to pot pa si oglejmo, kako je z dirkalnimi avtomobili formule 1. Tudi k njihovem razvoju je prispevala fizika precejšen delež. Veliko podrobnih podatkov sodi med poslovne tajnosti in jih ni mogoče dobiti. Uporabljeni pa so vzeti iz članka *A winning formula for Mansell*, ki ga je julija v New Scientistu objavila Amanda Weawer. Angleži se veselijo. Uspeh moštva Williams in svetovnega prvaka Nigela Mansella za leto 1992 in Riccarda Patreseja pripisujejo tudi uporabi fizike in znanstvenih prijemov. Pravijo, da k uspehu stroj prispeva 3/10, dirkalec 1/4, prav toliko ogrodje, gorivo pa 1/5.

Vozila formule 1 morajo ustrezati omejitvam mednarodne zveze za avtomobilski šport FISA. V stroju ne sme stiskati zraka v valje črpalka, ampak morajo zrak sesati bati kot v stroju navadnega avtomobla. Število valjev s krožno osnovno ploskvijo ne sme preseči 12 in njihova skupna prostornina ne $3,5 \text{ dm}^3$. V eni tekmi sme dirkalec porabiti samo 220 litrov goriva, katerega gostota ne sme preseči $0,79 \text{ g/cm}^3$ in oktansko število ne 102.

Zaradi teh omejitev je razplet vsako sezono še dodatno negotov, tekmovanje pa bolj privlačno. Kaj pomaga zmogljiv avtomobil, če dirkalec zgubi tekmo, ker mu poide gorivo. To se je primerilo Ayrtonu Senni kar dvakrat v letu 1991, ko je osvojil svetovno prvenstvo. Stroj mora biti močan, a ne sme porabiti preveč goriva. Zahtevi si seveda nasprotujeta. Podobnih nasprotujočih si zahtev je več in moštvo ter tovarna, ki se bolje odločita, dosežeta večji uspeh.

Pri vožnji z enakomerno hitrostjo sta sila trenja pri kotaljenju in zračni upor skupaj enako velika kot sila tal na pogonski kolesi. Če se ne oziramo na trenje, je zračni upor sorazmeren s kvadratom hitrosti in njegova moč celo z njenim kubom. Glede moči ustreza tedaj dvakrat večji hitrosti osemkrat večja moč. Avtomobili formule 1 dosežejo hitrost 250 kilometrov na uro in več. Ker je zračni upor tako pomemben, dajo dirkalnemu avtomobilu zelo majhen čelni presek in s premišljeno izbiro oblike kolikor mogoče zmanjšajo koeficient zračnega upora. Na drugi strani je sila trenja pri kotaljenju odvisna od teže avtomobila, torej je ugodnejši avtomobil z manjšo težo. Zato so v stroju valji, bati in glava iz aluminijevih zlitin, preostali deli pa iz magnezijevih, ki so še lažje, a manj trdne.

Dvanajst valjev da sicer veliko moč, a avtomobil je težji in poraba večja. Tako uporabljajo dvanajstvaljni stroj Honde le pri McLarenovem moštvu.

Da sicer največjo moč in doseže pri veliki hitrosti največji pospešek. Toda hladilnik je velik in ima velik upor. Wiliamsovo moštvo je v letu 1992 uporabilo desetvaljni stroj iz Renaultovih tovarn, Bennetonovo pa celo samo osemvaljni Fordov. Desetvaljni stroj je krajši in hladilnik ima manjši presek. Zračni upor je manjši že zaradi manjšega preseka, pa tudi zato, ker je pri krajšem stroju več svobode pri iskanju najugodnejše oblike, in s tem manjšega koeficienta upora. S poskusi v vetrovniku so določili najugodnejšo obliko nosu in dovodov k hladilniku.

Stroj dirkalnega avtomobila formule 1 dela z močjo nad 700 kilowattov, kar je več kot desetkratna moč srednjevelikega običajnega avtomobila. Podrobnejših podatkov seveda ni mogoče dobiti, pač pa pri Williamsu le povedo, da se je moč njihovega stroja od prejšnjega leta povečala za desetino. Moč stroja je sorazmerna s frekvenco, to je s številom vrtljajev na minuto. Frekvenco je uspelo zvečati za tisoč vrtljajev na minuto, to je na kakih 14 tisoč vrtljajev na minuto. (Stroj navadnega avtomobila se vrti z več kot dvakrat manjšo frekvenco.) Kaže, da so to izboljšavo dosegli tako, da so zmanjšali kapljice, v katere se razprši gorivo, in tudi z dodatki gorivu dosegli hitrejšo zgorevanje.

Posebno vlogo imajo pri dirkalnem avtomobilu krilca, ki spominjajo na letalsko krilo. To spelje tok zraka tako, da deluje zrak nanj s komponento sile v smeri gibanja, uporom in s komponento navpično navgor, dinamičnim vzgonom ali prečno silo. Krilca pri avtomobilu naj ob čim manjšem uporu poskrbijo za prečno silo navzdol. Tako zagotovijo, da se pogonski kolesi s čim večjo ploskvijo dotikata tal in da delujejo nanju neprekinjeno, tudi v zavoju in na neravnih mestih. Prečna sila sicer ustreza večji sili trenja in ima v tem pogledu podoben učinek kot večja masa avtomobila. Toda le masa določa silo, ki je potrebna za pospeševanje in zavijanje. Zato je ugodno imeti avtomobil z majhno maso in s krilci, ki ob majhnem uporu poskrbijo za veliko prečno silo navzdol.

Da je stik pogonskih koles s cesto pomemben, sklepamo tudi po *aktivnem vzmetenju*, ki so ga leta 1987 vpeljali pri Lotusu. Letos so ga izpopolnjenega uporabili tudi pri Williamsu. Kot navadni avtomobil ima tudi dirkalni avtomobil vzmeti, ki poskrbijo, da ogrodje pri gibanju ne sledi vsem neravnostim tal, in blažilce, ki preprečujejo nihanje. Pri navadnem avtomobilu naj bi bila vožnja zaradi tega "mehka", pri dirkalnem pa naj bi čim večja površina kolesa ostala v neprekinjenem stiku s cestiščem. Vzvodi, ki povezujejo vzmeti z blažilci, so pritrjeni na valje, napolnjene s kapljevino, v katero segajo elektronski čutilniki. Podatki iz teh čutilnikov in iz merilnikov za komponenti pospeška

v smeri vožnje in v prečni smeri pri zavijanju se stekajo v dva mikroprocesorja. Mikroprocesorja na levi in na desni strani avtomobila uravnavata tlak kapljevine v valjih in s tem zagotovita čim boljši stik pogonskih koles s cestniščem. Pri Williamsu so prejšnja leta imeli težave s to zadevo, ko pa so letos spremenili programsko opremo, je bila zrela za uporabo.

Dirkalni avtomobili se od večine navadnih razlikujejo po polavtomatskem menjalniku. Dirkalec v avtomobilih moštev Williams, McLaren in Ferrari ima na volanu stikalo, s katerim izbere zaželeno prestavo. Tako ne umakne rok z volana in sklopka prekine zvezo med pogonskim kolesom in strojem za najkrajši mogoči čas. Prav Mansellu se je primerilo lani, da je v zadnjem krogu zgubil prvo mesto na dirki zaradi težav s pretikanjem.

Dirkanje z avtomobili formule 1 se zdi marsikomu vznemirljivo opravilo. Vendar podrobnejši pogled pokaže, da je za dirkalce in za moštvo, posebej njegov tehnični del, to resno delo. Zanesljivost izhaja le iz dolgotrajnega preskušanja na dirkališču in v laboratoriju ter odpravljanja napak.

Janez Strnad

Lokar M., Juvan M., 121 NALOG IZ PASCALA, DMFA Slovenije, Ljubljana 1992, 128 str. (Izbrana poglavja iz matematike in računalništva)

Čeprav se je zadnja leta računalništvo pri nas hitro razvijalo, smo še vedno priče pomanjkanju domače literature. Zato smo se toliko bolj razveselili nove zbirke nalog iz pascala. Knjiga nas spremlja pri prvih korakih v svet programiranja. Pri tem pascala ne uči, saj so temu namenjeni ustrezni učbeniki, pač pa slednje dopolnjuje pri razumevanju in utrjevanju snovi.

Naloge so razdeljene na devet poglavij. Ta pokrivajo osnovne elemente pascala. Najprej sta na vrsti stavka **Write** in **Writeln**, potem pride delo s celoštevilskimi in realnimi spremenljivkami ter stavek **Readln**. Sledijo kontrolni stavki in znakovna tipa **Char** in **String**. Na koncu so obdelane še tabele. Naloge so opremljene z rešitvami in komentarji. Rešitve se naslanjajo na najbolj razširjeno narečje pascala pri nas, torej na turbo pascal, z manjšimi popravki pa jih je moč prenesti na poljubno drugo narečje. Seveda pa je priložena rešitev samo pomoč v stiski in je bolje, če naloge rešimo sami. V okviru poglavja so naloge urejene po zahtevnosti. Reševati jih velja v enakem vrstnem redu, kot so nanizane v knjigi, saj se pri rešitvah pogosto upoštevajo znanje in prijemi iz prejšnjih nalog.

V zbirki ni nalog iz težjih poglavij pascala, kot so podprogrami, rekurzija, delo z datotekami in delo s kazalci. Osnovno vodilo avtorjev je bilo, da ne gre poučevati teh poglavij, dokler osnovna snov ni dobro predelana in domača. Zato bomo žal morali počakati na nadaljevanje zbirke, saj so ravno na teh področjih največje težave z razumevanjem snovi.

Čeprav je namenjena začetnikom, pa bo zbirka koristna tudi za tiste, ki že nekoliko poznajo pascal, saj sta pri reševanju nalog avtorja dostikrat uporabila in razložila prijeme, ki jih uporabljamo pri "resnem" programiranju, od zamenjave vrednosti dveh spremenljivk do računanja naslednjega člena polinomskega zaporedja. Prav tako bo koristen pripomoček učiteljem v srednjih šolah, saj so naloge za dijake ravno prav zahtevne in zanimive.

Jože Marinček

POTOVANJE JACKA LONDONA

V eni svojih zgodb opisuje Jack London potovanje na saneh, v katere je bilo vpreženih pet polarnih psov. Z njimi je hitel iz Skagwaja v svoj tabor, kjer je njegov tovariš potreboval nujno pomoč.

V zgodbi so zanimive podrobnosti, ki omogočajo bralcu, da izračuna dolžino prevožene poti: Prvih 24 ur so sani vozile s polno hitrostjo, kakršno je na začetku potovanja predvidel pisatelj. Takoj na začetku drugega dne pa sta se dva psa iztrgala iz vprege in pobegnili s krdelom volkov. Jack London je moral nadaljevati pot s tremi psi, ki so lahko vlekli sani le s tremi petinami prvotne hitrosti. Zato je prispel v svoj tabor šele dva dni po predvidenem roku.



V tej zvezi avtor omenja: "Ko bi mi psa ostala v vpregi še 50 milj, bi zamudil le en sam dan."

V povesti ni nikjer omenjeno, kakšna je bila razdalja od Skagwaya do tabora. Poskusite ugotoviti!

Po Kordemskem povzel
Viktor Velkavrh

PARALELOGRAMSKO PRAVILO

Načrtajmo paralelogram $ABCD$ z diagonalama AC , BD in iz oglišč C , D spustimo višini CM , DN na nosilko stranice AB . Pravokotna trikotnika AND in BMD sta skladna, iz slike tedaj preberemo enakosti

$$g = |AN| = |BM|,$$

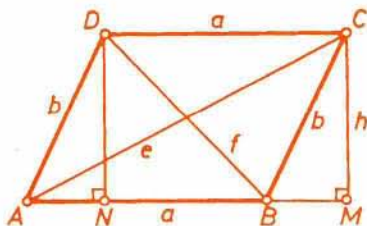
$$h = |DN| = |CM|.$$

$$a = |AB| = |CD|,$$

$$b = |BC| = |AD|.$$

Zaznamujmo še

$$e = |AC|, f = |BD|.$$



Pitagorov izrek za trikotnika AMC in BND nam da enakosti

$$e^2 = |AM|^2 + h^2, f^2 = |BN|^2 + h^2.$$

Seštejmo ju, upoštevajmo, da je ena od daljic AM in BN dolga $a + g$, druga pa $|a - g|$, in dobimo

$$e^2 + f^2 = (a + g)^2 + (a - g)^2 + 2h^2 = 2(a^2 + g^2 + h^2).$$

Od tod zaradi enakosti $g^2 + h^2 = b^2$ za pravokotni trikotnik AND takoj sledi

paralelogramsko pravilo

$$e^2 + f^2 = 2(a^2 + b^2).$$

Kratko in elegantno lahko to pravilo dokažemo s pomočjo vektorjev, kar pa prepustimo tistim, ki te vsaj nekoliko poznajo.

Oglejmo si zdaj splošnejši primer. Vzemimo štiri točke A , B , C in D v prostoru. Dolžine stranic AB , BC , CD in DA štirikotnika $ABCD$ zaznamujmo zaporedoma z a , b , c , d , dolžini diagonal AC , BD pa z e in f .

Dokažimo, da velja neenakost

$$a^2 + b^2 + c^2 + d^2 \geq e^2 + f^2, \quad (1)$$

in razmislimo, za katere štirikotnike $ABCD$ se (1) prelevi v enakost.

Nad stranicama AB in BC zgradimo paralelogram $ABCD_1$, nad stranicama CD in DA pa paralelogram AB_1CD . Iz zvez

$$AB_1 \parallel CD, |AB_1| = |CD| = c,$$

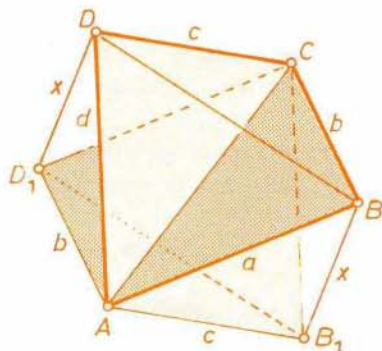
$$AD_1 \parallel BC, |AD_1| = |BC| = b$$

in

$$AD \parallel B_1C, BC \parallel AD_1$$

sledi

$$B_1D_1 \parallel BD, BB_1 \parallel DD_1$$



(Oglej si vzporedni premik BB_1 .), zato je tudi BDD_1B_1 paralelogram.

Označimo

$$x = |BB_1| = |DD_1|,$$

zapišimo paralelogramsko pravilo za našete paralelograme

$$e^2 + |B_1D|^2 = 2(c^2 + d^2)$$

$$e^2 + |BD_1|^2 = 2(a^2 + b^2)$$

$$|B_1D|^2 + |BD_1|^2 = 2(x^2 + f^2)$$

in od vsote prvih dveh enakosti odštejmo tretjo. Po preureditvi dobimo zvezo

$$x^2 = a^2 + b^2 + c^2 + d^2 - (e^2 + f^2),$$

ki dokazuje neenakost (1).

Enačaja nastopi v (1) seveda le tedaj, ko je $x = 0$, torej ko B sovpada z B_1 in D z D_1 . To se zgodi natanko takrat, kadar $ABCD$ sovpada z AB_1CD in je potemtakem paralelogram z diagonalama AC in BD . Od tod sledi naslednji rezultat.

IZREK 1. V štirikotniku $ABCD$ velja neenakost

$$a^2 + b^2 + c^2 + d^2 \geq e^2 + f^2.$$

Enačaj je dosežen tedaj in le tedaj, kadar je $ABCD$ paralelogram z diagonalama AC in BD .

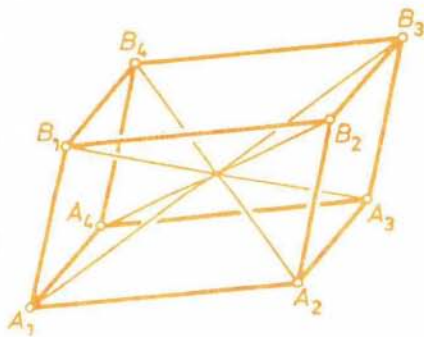
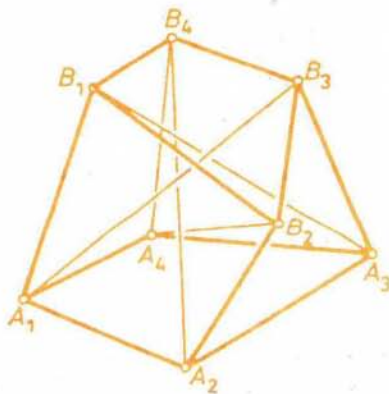
Prostorska posplošitev paralelograma je paralelepiped. To telo omejujejo trije pari skladnih vzporednih paralelogramov, ki se stikajo v dvanajstih robovih in osmih ogliščih. Paralelepiped ima štiri telesne diagonale. Je morda vsota kvadratov njihovih dolžin enaka vsoti kvadratov dolžin vseh njegovih robov?

Odgovorimo na to vprašanje v splošnejšem okviru. Vzemimo osem točk v prostoru, razvrstimo jih v zaporedje in označimo z

$$A_1, A_2, A_3, A_4, B_1, B_2, B_3, B_4.$$

Nekatere daljice, ki vežejo pare teh točk, imenujmo "robovi", nekatere pa "telesne diagonale". Dolžine "robov" zaznamujemo z

$$\begin{aligned} |A_1A_2| &= a_1, |A_2A_3| = a_2, |A_3A_4| = a_3, |A_4A_1| = a_4, \\ |B_1B_2| &= b_1, |B_2B_3| = b_2, |B_3B_4| = b_3, |B_4B_1| = b_4, \\ |A_1B_1| &= c_1, |A_2B_2| = c_2, |A_3B_3| = c_3, |A_4B_4| = c_4, \end{aligned}$$



"telesne diagonale" pa naj merijo

$$|A_1B_3| = d_1, |A_2B_4| = d_2, |A_3B_1| = d_3, |A_4B_2| = d_4.$$

Dokažimo, da velja

IZREK 2. Točke $A_1, A_2, A_3, A_4, B_1, B_2, B_3, B_4$ v prostoru izpolnjujejo neenakost

$$a_1^2 + a_2^2 + a_3^2 + a_4^2 + b_1^2 + b_2^2 + b_3^2 + b_4^2 + c_1^2 + c_2^2 + c_3^2 + c_4^2 \geq d_1^2 + d_2^2 + d_3^2 + d_4^2.$$

Enačaj je dosežen natanko takrat, kadar je $A_1A_2A_3A_4B_1B_2B_3B_4$ paralelepiped s telesnimi diagonalami A_1B_3, A_2B_4, A_3B_1 in A_4B_2 .

Dokaz. Seštejmo neenakosti, ki jim po izreku 1 ustrezajo štirikotniki

$$A_1A_2A_3A_4, B_1B_2B_3B_4, A_1A_3B_3B_1, A_4A_2B_2B_4. \quad (2)$$

Brž ko dobljeno neenakost poenostavimo, najdemo oceno iz izreka 2. Če je $A_1A_2A_3A_4B_1B_2B_3B_4$ paralelepiped s telesnimi diagonalami A_1B_3, A_2B_4, A_3B_1 in A_4B_2 , so vsi štirje obravnavani štirikotniki paralelogrami, zato tedaj v neenakosti izreka 2 velja enačaj.

Predpostavimo zdaj, da je v tej neenakosti dosežen enačaj. S pomočjo izreka 1 vidimo, da so potem štirikotniki (2) paralelogrami. Ker imata tudi osmerici točk

$$A_1A_2B_2B_1A_4A_3B_3B_4, A_2A_3B_3B_2A_1A_4B_4B_1$$

iste "robove" in "telesne diagonale" kot prvotna osmerica, so tudi

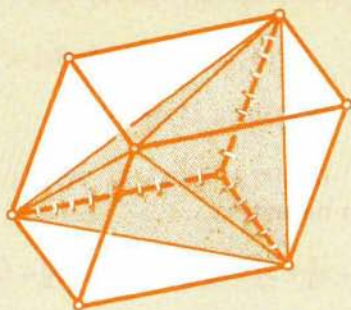
$$A_1A_2B_2B_1, A_2A_3B_3B_2, A_3A_4B_4B_3, A_4A_1B_1B_4$$

paralelogrami. Od tod sledi, da je $A_1A_2A_3A_4B_1B_2B_3B_4$ paralelepiped s telesnimi diagonalami A_1B_3, A_2B_4, A_3B_1 in A_4B_2 , dokaz izreka pa je s tem končan.

Sklenimo članek z nalogami.

1. S pomočjo paralelogramskega pravila izrazi dolžine težiščnic trikotnika z dolžinami njegovih stranic.

2. Včrtaj v dani paralelepiped $\mathcal{P}$ tetraeder $\mathcal{T}$ kot kaže slika. Dokaži, da je vsota kvadratov dolžin robov paralelepipeda $\mathcal{P}$ enaka vsoti kvadratov dolžin robov tetraedra $\mathcal{T}$.



3. Izrazi razdaljo med središčema nasproti ležečih robov tetraedra z dolžinami njegovih robov. Podobno izrazi še dolžine težiščnic tetraedra. Težiščnica tetraedra veže njegovo oglišče s težiščem nasproti ležeče stranice.

Boris Lavrič

NALOGE ZA OGREVANJE - rešitve s str. 124

5. razred

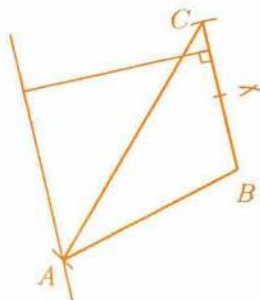
1. Vrednost izraza je 2014.
2. Oba jezika je govorilo 68 turistov.
3. Narišemo krožnico s polmerom 3 cm in dva med seboj pravokotna premera. V presečiščih krožnice in premerov narišemo tangente na krožnico.
4. Narišemo premico p in premico n , ki je pravokotna na p . Na premici n izberemo točko S , ki je od p oddaljena 3 cm, nato pa narišemo krožnico, ki ima središče v S in polmer 3 cm.
5. Hitrost avtomobila je 60 kilometrov na uro ali 1 kilometer na minuto. Da bo na vsakem kilometru pridobil pol minute, mora 1 km prevoziti v pol minute, torej v eni minuti 2 km oziroma v eni uri 120 km. Hitrost mora povečati za 60 km/h.

6. razred

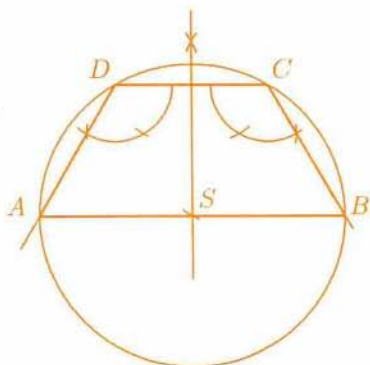
1. Vrednost izraza je 0.

2. Učenec je prebral prvi dan $\frac{3}{5}$, drugi dan $\frac{5}{9} \cdot (\frac{5}{5} - \frac{3}{5}) = \frac{2}{9}$, tretji dan $\frac{3}{8} \cdot (\frac{2}{5} - \frac{2}{9}) = \frac{1}{15}$ in četrti dan $\frac{8}{45} - \frac{1}{15} = \frac{5}{45}$ knjige. Ker je $\frac{5}{45}$ od x enako 80, je $x = 720$. Knjiga ima torej 720 strani, prvi dan je prebral 432 strani, drugi dan 160 strani in tretji dan 48 strani.

3. Narišemo stranico a in njeno središče, nato pa višino in vzporednico stranici a . Oglišče A na vzporednici določimo tako, da iz središča stranice a odmerimo težiščnico.



4.



Narišemo osnovnico c in njeno simetralo ter kota γ in δ . Središče očrtanega kroga na simetrali stranice c določimo tako, da iz oglišča C ali D odmerimo polmer. Narišemo očrtano krožnico, ki seka nosilki krakov v točkah A in B .

5. Najmanjši skupni večkratnik števil 6 in 8 je 24. Vnuka se bosta spet srečala pri babici čez 24 dni, to je v četrtek.

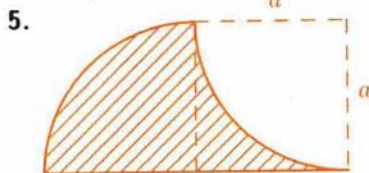
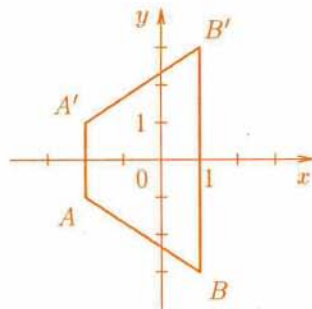
7. razred

1. Vrednost izraza je 1.

2. Iz besedila naloge sledi, da 3 l predstavlja 15% posode. Posoda torej drži 20 litrov.

3. En delavec izkoplje v eni uri $\frac{1}{275}$ jarka, 25 delavcev v 2 urah $\frac{2}{11}$ jarka, torej za vseh 45 delavcev ostane $\frac{9}{11}$ jarka. Tako dobimo enačbo $\frac{45 \cdot x}{275} = \frac{9}{11}$, ki ima rešitev $x = 5$. Celotni jarek bo izkopen v 7 urah.

4. Najprej zapišimo $A'(-2, 1)$, $B'(1, 3)$. Dobljeni lik je trapez s ploščino $p = \frac{a+c}{2} \cdot v = \frac{6+2}{2} \cdot 3 = 12$.

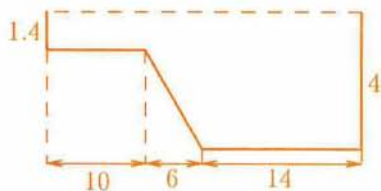


Ploščina črtkanega lika je $p = a^2$, zato $a = 5$. Potem je njegov obseg $o = \frac{2\pi a}{2} + 2a = a(\pi + 2)$ oziroma $o = 5(\pi + 2) \doteq 25,7$.

8. razred

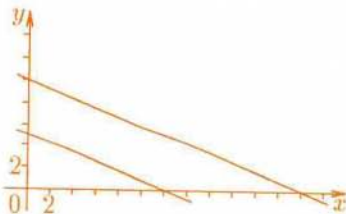
1. Enačba ima rešitev $x = 5$.
2. Naj bo dani ulomek $\frac{x-3}{x}$. Iz besedila naloge sestavimo enačbo $\frac{x-5}{x-2} = \frac{1}{2}$, ki ima rešitev $x = 8$. Obratni ulomek je torej $\frac{8}{5}$.

- 3.
- a) V bazenu je $V = (\frac{20+14}{2} \cdot 2,6 + 30 \cdot 1,2) \cdot 12 = 962,4 \text{ m}^3$ vode.
- b) Iz $\Delta V = 30 \cdot \Delta h \cdot 12$ sledi, da se gladina vode dvigne za $\Delta h = \frac{\Delta V}{360} = \frac{1}{120} \doteq 0,0083 \text{ m}$.



4. Ploščino lika izračunamo kot razliko ploščin dveh pravokotnih trikotnikov:

$$p = \frac{24 \cdot 10}{2} - \frac{12 \cdot 5}{2} = 90.$$



5. Poenostavljeni izraz je $\frac{a-1}{a+1}$, vrednost pa -2.

Aleksander Potočnik

MATEMATIČNA KONFERENCA V MIASU

Od 1. do 8. avgusta 1992 je bila v bližini mesta Mias pod Uralom v Rusiji matematična konferenca v organizaciji ruskih matematikov. Slovensko odpravo smo sestavljali štirje člani: dijaki Tomaž CEDILNIK (Gimnazija Bežigrad), Marko KRAJNC (II Gimnazija Maribor) in Bojan GORNIK (Gimnazija Novo mesto) ter vodja ekipe Matjaž ŽELJKO. Dijake so izbrali organizatorji v Rusiji na podlagi rezultatov z *Mednarodnega matematičnega tekmovanja mest*.

Iz Ljubljane smo 30. julija odpotovali najprej v Moskvo. Že na letališču so nas sprejeli prijazni gostitelji, s katerimi smo se še isti dan odpravili z vlakom v 2000 kilometrov oddaljeni Mias. Na konferenci je sodelovalo približno trideset udeležencev iz več držav, med drugim iz Rusije, Ukrajine, Nemčije, Avstralije in Nove Zelandije. Konferenca je potekala v prijetnem ozračju počitniškega naselja ob jezeru, kjer smo tudi stanovali. Na konferenci smo najprej poslušali predavanja v angleščini z nekaterih področij matematike, nato pa reševali naloge iz predavane snovi. Po prvih dveh dnevih predavanj smo imeli dva dneva premora, namenjena reševanju nalog, pri čemer so nam bili predavatelji na razpolago za morebitna vprašanja. Peti dan je bil namenjen skupnemu pregledu do tedaj rešenih nalog, v naslednjih dveh dneh pa smo si skupaj ogledali rešitve vseh nalog. Zadnji dan smo konferenco zaključili s prireditvijo, ki smo se je udeležili vsi dijaki in predavatelji.

Med konferenco so nam prireditelji organizirali nekaj izletov, na katerih smo si ogledali mesto Mias, bližnji narodni park Ilmen z mnogimi jezери in čudovitimi gozdovi in enega največjih geoloških muzejev na podurskem področju.

Po konferenci smo odpotovali v Moskvo, kjer smo preostale tri dni do odhoda domov izkoristili za ogled nekaterih najpomembnejših znamenitosti ruske prestolnice, pri čemer so nam bili gostitelji radi na voljo za vsako pomoč in nasvet. Tako smo videli Kremelj, Rdeči trg, Leninov mavzolej, trgovsko ulico Arbat, Univerzo, Novodevičeski samostan in še nekaj drugih. V Slovenijo smo se vrnili 13. avgusta.

Celotno doživetje je bilo dragoceno: spoznali smo deželo, njene ljudi, pridobili nove prijatelje, se naučili marsikaj novega na matematičnem področju, nenazadnje pa sta bila ta dva tedna tudi veliko kulinarčno doživetje.

Marko Krajnc, Bojan Gornik

FRANC MOČNIK

Doktor Franc Močnik je bil naš najplodovitejši in najuspešnejši pisec matematičnih učbenikov. Poglejmo si njegovo življenjsko pot.

Rodil se je v Cerknem leta 1814. Oče Andrej je bil kmet in gostilničar. Po ljudski šoli v Idriji je Franc Močnik končal gimnazijo in licej v Ljubljani. Med njegovimi učitelji je bil tudi Matija Čop.

Nato se je vpisal na bogoslovje v Gorici in ga končal leta 1836. Vendar ni postal duhovnik, ampak učitelj na takratni normalki v Gorici. Ob delu je opravljal izpite na graškem vseučilišču in leta 1840 doktoriral. Obenem je začel izdajati svoje prve učbenike in priročnike za učitelje.

Leta 1846 je šel za profesorja elementarne matematike in trgovskega računstva na tehniško akademijo v Lvov (v današnji Ukrajini). Leta 1849 je postal profesor elementarne matematike na vseučilišču v Olomucu (na Češkem).

Že leto kasneje pa se je vrnil v domačo deželo kot šolski svetovalec in šolski referent pri kranjski deželni vladi. Eden njegovih prvih ukrepov je bil, da je za slovenske otroke v prvem razredu tedanjih glavnih šol (ki so deloma ustrezale poznejšim meščanskim šolam) uvedel 8 ur pouka na teden v slovenskem jeziku. Ko so se učitelji na ljubljanski normalki upirali vpeljavi slovenščine, jim je Močnik zagrozil, da jih bo odpustil. To je takoj pomagalo in od takrat je bil slovenščini zagotovljen prostor v glavnih šolah.

Po približno desetih letih dela v Ljubljani se je Močnik preselil v Gradec, kjer je opravljal enako službo kot v Ljubljani. Ob upokojitvi leta 1871 je za svoje zasluge dobil viteški naslov. Umrli je leta 1892 v Gradcu.

Glavno Močnikovo delo so matematični učbeniki. Pisal jih je v nemščini. Zdi se, da je imel namen pisati jih tudi v slovenščini, vendar mu je zato po vsej verjetnosti zmanjkalo časa. Sestavil jih je namreč za praktično vse smeri takratnih osnovnih in srednjih šol. Večkrat jih je predeloval in prilagajal novim učnim načrtom in novim potrebam. Leta 1893 je bilo sočasno v uporabi v avstroogrskih srednjih šolah 36, v ljudskih šolah pa 59 različnih Močnikovih učbenikov. To neverjetno število gre seveda tudi na račun prevodov v kakih 13 jezikov. Močnikove knjige so uporabljali tudi v nekaterih sosednjih državah. Po njegovi smrti so številne knjige predelovali in jih še naprej prevajali. Zadnje izdaje teh priredb so izšle leta 1938.

Kako gledamo na Močnikove učbenike danes? Nekaj si jih lahko preberemo v slovenščini. Že leta 1846 je izšla knjiga Napeljevanje iz glave počtevati za prvi klas ljudskih šol. Medtem ko je prevod razlage marsikje neizdelan,

pa naloge zvenijo še danes živo in neposredno. Na koncu te prve računice najdemo "Poštev obrest, ali činžev", se pravi obrestni račun.

Samo leto pozneje je izšlo Napeljevanje v računstvo za drugi in tretji klas farnih in glavnih šol. Razlaga v tej knjigi je boljje prevedena kot v prvi. Tako imamo že izraze "tisuč" ali "tavžent" namesto "jezer", "številke" namesto "števke", "odštevati" namesto "odjemati" v prvi knjigi. Zanimivo je, da kot prevajalec obakrat velja Blaž Potočnik, ki ga sicer marsikdo pozna le po bodici, ki jo je nanj naslovil Prešeren. Ta knjižica vsebuje tudi računanje z ulomki ter prema in obratna sorazmerja. Za ulomek uporablja besedo "razdelin". Najprivlačnejši del knjige so naloge, ki prav živo in plastično opisujejo takratno življenje. Značilna vaja iz deljenja je tale:

Med 52 pogorelcov je po enakih delih razdeliti 925 goldinarjev 36 krajcarjev. Koliko bo dobil vsak?

V peti računici za ljudske šole najdemo obravnavo deljivosti, največje skupne mere in najmanjšega skupnega večkratnika, računanje kvadratnega in kubičnega korena. Na koncu so osnove praktičnega računstva za gospodinjstvo, kmetijo, obrt in trgovino.

Učbeniki za srednjo šolo so podobni tistim za zadnje razrede ljudskih šol (ki so bile 6-8 letne), vendar je obravnava natančnejša in podrobnejša. Geometrija se začne z merjenjem in risanjem v naravi in na papirju. Sicer pa je obravnava povsem moderna in sloni na skladnostnih izrekih za trikotnik. Geometrija za nižje gimnazije je podobna, le več poudarka je na teoriji.

V algebri za višjo gimnazijo (1855) najdemo potence z racionalnimi eksponenti, kompleksna števila, logaritme, aritmetično in geometrijsko zaporedje, kombinatoriko in verjetnostni račun, vključno s pojmom matematičnega upanja.

Za matematika je morda najzanimivejši učbenik aritmetike in algebre za višje gimnazije iz leta 1874. V njem srečamo pojem konvergence, binomsko vrsto, diferenčni račun in interpolacijo. Omenjena je celo zveznost. Za računanje ničel polinomov pa sta tu Newtonova metoda (razložena elementarno) in sekantna metoda.

Zelo popolna je Geometrija za višje gimnazije (1870). Obravnava je aksiomatična tako na ravnini kot v prostoru. Dokazan je Eulerjev izrek za poliedre. Obravnavana so vsa pravilna telesa. Tu so še kotne funkcije za vse kote, trigonometrija, sferna geometrija in sferna trigonometrija. Analitična geometrija vsebuje vrtenje koordinatnega sistema in krivulje drugega reda.

Geometrija za višje razrede srednjih šol vsebuje približno enako snov. Tu so še usmerjene daljice, središčni razteg ter potenca točke glede na krog.

Iz Močnikovih knjig je očitno, da je avtor po matematični nadarjenosti po vsej verjetnosti precej presegal svoje srednješolske kolege. Zelo dobro je namreč znal oceniti, kaj je bistveno, kaj nepomembno pri razlagi. Predvsem pa je, kljub letom, ki so pretekla, poznavalcu jasno, da je te knjige pisal nekdo z veliko ljubeznijo in izredno željo, posredovati trdne in praktično uporabne osnove matematike. Priredbe, nastale po Močnikovi smrti, so del tega notranjega žara izgubile. Zaradi kvalitete Močnikovega dela pa so te knjige ostale v uporabi še več desetletij.

Peter Legiša

8. ŠOLSKO TEKMOVANJE IZ MATEMATIKE ZA SREDNJEŠOLCE – Rešitve s str. 111

Prvi letnik

1. Iz $0 = (a + b + c + d)^2 = a^2 + b^2 + c^2 + d^2 + 2(ab + ac + ad + bc + bd + cd) = 2 + 2(ab + ac + ad + bc + bd + cd)$ sledi $ab + ac + ad + bc + bd + cd = -1$.

2. Ker je vsota MUHA + MUHA sodo število, je N soda številka, zato vsi soglasniki predstavljajo sode številke, samoglasniki pa lihe. V enakosti nastopa 5 različnih soglasnikov, zato so zajete vse sode številke. S sklepanjem pridemo do $2309 + 2309 = 4618$.

3. Recimo, da je imel Janezek x bankovcev po 5 tolarjev. Zapišimo enačbo $x \cdot 5 + (84 - x) \cdot 50 = x \cdot 10 + (84 - x) \cdot 2 \cdot 10$, pa dobimo rešitev $x = 72$.

4. Če bi tak pravokotnik obstajal, bi veljalo $2(a + b) = 2\sqrt{a^2 + b^2}$ oziroma $a^2 + 2ab + b^2 = a^2 + b^2$ ali $2ab = 0$. Imel bi vsaj eno stranico dolžine 0, zato takega pravokotnika ni.

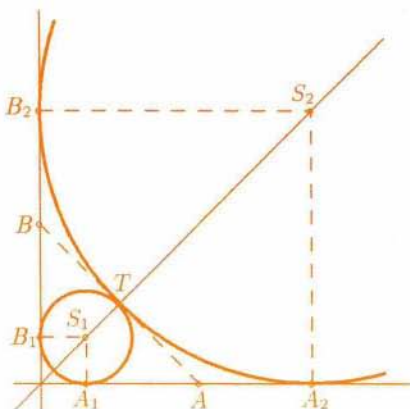
Drugi letnik

1. Najhitreje gre, če opazimo, da je $a + 3 - 4\sqrt{a-1} = (\sqrt{a-1} - 2)^2$ in $a + 8 - 6\sqrt{a-1} = (3 - \sqrt{a-1})^2$. Potem je $|3 - \sqrt{a-1}| + |\sqrt{a-1} - 2| = 1$, če velja pogoj $5 \leq a \leq 10$. Pri $a < 5$ (in $a \geq 1$ zaradi $\sqrt{a-1}$) je izraz $\sqrt{a-1} - 2$ negativen, pri $a > 10$ pa je $3 - \sqrt{a-1}$ negativen, zato enakost ne velja več.

Nalogo lahko rešimo tudi z zaporednim kvadriranjem.

2. Iz $(\vec{a} + 2\vec{b}) \cdot (5\vec{a} - 4\vec{b}) = 0$ dobimo $\vec{a} \cdot \vec{b} = \frac{1}{2} = \cos \varphi$ in $\varphi = 60^\circ$.

3. Skozi dano točko T potegnimo pravokotnico na simetralo lihih kvadrantov. Ta seka osi v A in B . Zaradi enako dolgih tangentnih odsekov naneseemo razdaljo $BT (= AT)$ na obe strani obeh presečnih točk in dobimo točke B_1 in B_2 ter A_1 in A_2 . Pravokotnici na osi skozi A_1 in B_1 se sekata v S_1 , pravokotnici skozi A_2 in B_2 pa v S_2 . Tako imamo dve rešitvi: krog s središčem S_1 in s polmerom $S_1A_1 (= S_1B_1)$ ter krog s središčem S_2 in polmerom $S_2A_2 (= S_2B_2)$.



4. Trikotnika $\triangle PTS_1$ in $\triangle VQS_2$ sta enakokraka. Zaradi vzporednosti PT_1 in QS_2 sta kota $\sphericalangle PS_1T$ in $\sphericalangle VS_2Q$ suplementarna. Seštejmo vseh šest kotov obeh trikotnikov: $2\alpha + \sphericalangle PS_1T + 2\beta + \sphericalangle VS_2Q = 360^\circ$. Od tod dobimo $\alpha + \beta = 90^\circ$.

Tretji letnik

1. Odpravimo oklepaje $a^4 - 8a^3 + 19a^2 - 12a = a^4 - 8a^3 + 24a^2 - 32a + 16$ in uredimo $5a^2 - 20a + 16 = 0$ ter rešimo kvadratno enačbo: $a_{1,2} = \frac{10 \pm 2\sqrt{5}}{5}$.

2. Enačbo pomnožimo z 2, prenesemo vse člene na levo stran, preoblikujemo in dobimo: $(2^x - 3^x)^2 + (2^x - 5^x)^2 + (3^x - 5^x)^2 = 0$. Od tod pa sledi $2^x = 3^x = 5^x$, kar nam da edino rešitev $x = 0$.

3. V števcu nastopa razstavljena razlika kvadratov, zato je ulomek enak $\frac{(1 - \sin \alpha)^2 - \cos^2 \alpha}{\sin \alpha(1 - \sin \alpha)} = \frac{-2 \sin \alpha + 2 \sin^2 \alpha}{\sin \alpha(1 - \sin \alpha)} = -2$.

4. Pravilna je možnost (b), saj bo kvocient največji, ko bo $\sphericalangle ZXY$ pravi kot (uporabimo sinusni izrek).

Četrti letnik

1. Zapišimo $101 \cdot \frac{2a_1 + 100 \cdot 2}{2} = 12827$, pa dobimo $a_1 = 27$.

2. Vstavimo $x = 2$ in $x = \frac{1}{2}$ ter iz sistema enačb $f(2) + 3f(\frac{1}{2}) = 4$ in $f(\frac{1}{2}) + 3f(2) = \frac{1}{4}$ izračunamo $f(2) = -\frac{13}{32}$.

3. Rešimo enačbo na y : $y_{1,2} = \frac{2x \pm \sqrt{4x^2 - 4(x+1)(x-1)}}{2(x+1)} = \frac{x \pm 1}{x+1}$.
Narisati je treba torej grafa funkcij $y = 1$ in $y = \frac{x-1}{x+1}$.

4. Na intervalu $(-4, 4)$ so funkcije $y = x$, $y = \operatorname{tg} \frac{\pi x}{8}$ in $y = 2^x$ strogo naraščajoče, zato je možna samo ena rešitev, ki jo prav hitro najdemo: $x = 2$.

Darjo Felda

POROČILO O TEKMOVANJU IZ SREDNJEŠOLSKE FIZIKE V ŠOLSKEM LETU 1991/92

Zaradi spremenjenega programa fizike v srednjih šolah je tekmovanje potekalo po novem programu. Program tekmovanja je bil spremenjen vsebinsko in organizacijsko. Odslej tekmujejo učenci vseh štirih letnikov, za razliko od prejšnjih let, ko so imeli učenci prvega letnika posebno tekmovanje. Vsebinsko je tekmovanje razdeljeno na štiri skupine (A,B,C,D), pri čemer se olimpijska ekipa izbere med tekmovalci skupine D.

Na predtekmovanje, ki so ga izvedle šole same, se je prijavilo 905 učencev iz 31 srednjih šol. Državno (republiško) tekmovanje, 30. po vrsti, je bilo 23. maja v Celju. Udeležilo se ga je 206 tekmovalcev iz 27-ih srednjih šol. V skupini A je tekmovalo 74 učencev, v skupini B 54 učencev, v skupini C 42 učencev in v skupini D 36 učencev. Tekmovalce je spremljalo 32 mentorjev.

Med tekmovanjem, ki se je odvijalo v prostorih organizatorja - Gimnazije Celje, so se mentorji pogovarjali o spremenjenem programu tekmovanja in o sodelovanju mentorjev pri sestavljanju nalog v bodoče. Po končanem reševanju nalog, ko je tekmovalna komisija pregledovala naloge, so si tekmovalci in mentorji ogledali stari del mesta Celja in Pokrajinski muzej. Ob zaključku tekmovanja je komisija podelila 3 prve nagrade, 10 drugih nagrad, 17 tretjih nagrad in 20 pohval.

Letos je Republika Slovenija dobila pravico sodelovanja na fizikalnih olimpiadah. Olimpiade, ki je bila julija na Finskem, sta se udeležila Krešimir Macan in Tadej Mali, prvo in drugonagrajeni iz skupine D.

Podeljene nagrade in pohvale po skupinah:

Skupina A

II. nagrada: ARPAD BURMEN, Gimnazija Murska Sobota; MITJA PIRC, Gimnazija Brežice.

III. nagrada: MIHA JURAS, Gimnazija Bežigrad Ljubljana; TILÉN KOKLIČ, Gimnazija Celje; IZTOK KAVKLER, Srednja tehniška šola Celje.

Pohvale: GREGOR VIDMAR, Gimnazija Ivančna Gorica; MAŠA OSTRUH, Gimnazija Celje; MARKO GLAŽAR, Gimnazija Bežigrad Ljubljana; JAŠA PELKIČ, II. Gimnazija Maribor; BOŠTJAN JURKOŠEK, Srednja tehniška šola Celje; ANDREJ BARTOLIČ, Naravoslovni srednješolski center Nova Gorica; BLAŽ MAVČIČ, Gimnazija Kranj.

Skupina B

I. nagrada: MITJA MASTNAK, Srednja tehniška šola Celje; GREGOR STRAŽAR, Gimnazija Bežigrad Ljubljana.

II. nagrada: GREGOR VEBLE, II. Gimnazija Maribor; MIHA NASTRAN, Gimnazija Kranj; SAMO PLIBERŠEK, II. Gimnazija Maribor; ROK LESKOVEC, Srednja elektrotehnična šola Ljubljana.

III. nagrada: ANTON BAJŽELJ, Gimnazija Kranj; MATJAŽ VENCELJ, Gimnazija Bežigrad Ljubljana; DANIEL SVENŠEK, II. Gimnazija Maribor; PETER ŠUŠTAR, Gimnazija Kranj; ALEŠA LOTRIČ, Gimnazija Kranj; JANKO KOLAR, Gimnazija Ptuj.

Pohvale: JERNEJ DOLENŠEK, Srednja tehniška šola Celje; PRIMOŽ ŽAGAR, Gimnazija Šentvid Ljubljana; ANDREJ BRGLEZ, II. Gimnazija Maribor; BOŠTJAN BANDELJ, Gimnazija Bežigrad Ljubljana.

Skupina C

II. nagrada: JURE ZUPAN, Gimnazija Bežigrad Ljubljana; KRISTIJAN HAULE, Gimnazija Ravne na Koroškem; DAMJAN ŠKULJ, Gimnazija Brežice.

III. nagrada: MOJCA VILFAN, Gimnazija Bežigrad Ljubljana; MIHA TOMŠIČ, Gimnazija Bežigrad Ljubljana; OLIVER CRNOJA, Srednja ekonomska in naravoslovna šola Škofja Loka; JANEZ ZALETELJ, Gimnazija Novo mesto; MATEJ PRAPROTNIK, II. gimnazija Maribor.

Pohvale: MATJAŽ MIHELJ, Naravoslovni srednješolski center Nova Gorica; ALEŠ LASIČ, Gimnazija Bežigrad Ljubljana; TOMAŽ ŽMAVC, Gimnazija Kranj; JANEZ BOGATAJ, Iskra - srednja šola Kranj; BOŠTJAN MARUŠIČ, Naravoslovni srednješolski center Nova Gorica.

Skupina D

I. nagrada: KREŠIMIR MACAN, Gimnazija Bežigrad.

II. nagrada: TADEJ MALI, Gimnazija Bežigrad.

III. nagrada: UROŠ BOHINC, Gimnazija Kranj; TOMAŽ SUŠNIK, Gimnazija Šentvid Ljubljana; MATJAŽ KOTNIK, II. gimnazija Maribor.

Pohvale: DAMJAN DEMŠAR, CSUI Jesenice; ALEN GREGOROVICH, Gimnazija Koper; DEJAN LIPOVEC, Gimnazija Murska Sobota; ANDREJ KOS, CSUI Jesenice.

Opomba: V naslednji številki Preseka bo objavljen program državnega tekmovanja, vsebinsko razdeljen po skupinah A, B, C, D in naloge z državnega tekmovanja v Celju.

Ciril Dominko

KRIŽANKA

					POPRAVLJALEC UR	VIŠINSKA TOČKA	POSREDNIK	GERMAN- SKI NAHOD	SKLADA- TELJ MAČA- TURJAN
				ROMAN TONETA SVETINE					
				AMIGRALKA (GINGER)					
				MAKS FABIANI					
AVTOR MARKO BOKALČ	MESTO NA MORAV- SKEM	DRŽAVA NA SEVERU JUŽNE AMERIKE	OZNAKA TRAVNIKA	IZVLEČEK IZ RŽENIH ROŽIČKOV	MATI GRŠKIH BOGOV	TITAN RUSKI VLADARSKI NASLOV			DRŽAVA V JV AZIJ
SLOV- SKLA- DATELJ (SLAVKO)							LOJZE DOLINAR	MATILJA ČOP IVO ANDRIČ	MELENA ZUPANČIČ
NAD- REALIZEM									
TURČLIA			TELESNA STRAŽA KINEMA- TOGRAFI						LJUBLJANA, RADUSKI VOJTELEJ (ČRT)
GRAFIK DEBENJAK									
SOKRATOV TOŽNIK ATENSKI KRZNAR									
NASPROT- NIKI AZOV V NORD. MITOLOG									
KRALJ BOGOV PRI EGIPČANIH									

ZAKLEPANJE DATOTEK

Programerji velikokrat zaklepajo svoje datoteke pred radovednimi pogledi. Bralec lahko vidi le nerazumljivo zaporedje znakov namesto smiselnega besedila.

Oglejmo si enostaven način zaklepanja, ki ga imenujemo Vigenerova metoda. V računalništvu ima vsak znak (med znake štejemo na primer male in velike črke, številke, ločila, presledek, ...) svojo kodo, ki je nenegativno celo število. Kode so enolične: različnima znakoma pripadata različni kodi. Največ se uporablja koda ASCII (American Standard Code for Information Interchange). Razširjeni nabor ASCII vsebuje 256 znakov s kodami od 0 do 255. Črkam od 'A' do 'Z' angleške abecede po vrsti pripadajo kode od 65 do 90, črkam od 'a' do 'z' pa kode od 97 do 122.

Pri Vigenerovi metodi uporabljamo ključ: naj bo to na primer besedica 'komet'. Stavek, ki ga želimo zakleniti, naj bo 'Jaz sem Tone'. Vsak znak se prepiše v znak, katerega koda je vsota kode znaka in istoležnega znaka v ključu po modulu 256, to je ostanek dobljene vsote pri deljenju s številom 256. Na primer prvi znak besedila 'J' ima kodo 74, prvi znak ključa 'k' ima kodo 107, nov znak ima kodo 181, ... Pri šestem znaku nam zmanjka znakov iz ključa, zato začnemo spet na začetku ključa. Zapišimo ves potek zaklepanja v strnjeni obliki:

stavek:	J	a	z		s	e	m		T	o	n	e	
koda:	74	97	122	32	115	101	109	32	84	111	110	101	46
ključ:	k	o	m	e	t	k	o	m	e	t	k	o	m
koda:	107	111	109	101	116	107	111	109	101	116	107	111	109
vsota kod:	181	208	231	133	231	208	220	141	185	227	217	212	155

Zapišimo še enačbo, ki opiše, kako se spremeni posamezni znak prvotnega besedila. Namesto z znaki bomo računali z njihovimi ASCII kodami. Prvoten tekst naj ima n znakov, katerih kode bomo označili z a_0 do a_{n-1} . Ključ naj ima j znakov s kodami od u_0 do u_{j-1} . Kode znakov v zaklenjenem besedilu bomo označili z b_0 do b_{n-1} . Iz zgornjega opisa zaklepanja dobimo enačbe:

$$b_i = (a_i + u_{i \bmod j}) \bmod 256, \quad 0 \leq i < n.$$

(Oznaka $x \bmod y$ pomeni ostanek, ki ga dobimo, če x delimo z y .) Besedilo

odklenemo enostavno tako, da od kod znakov odštejemo kode ključa:

$$a_i = (b_i - u_i \bmod j) \bmod 256, \quad 0 \leq i < n.$$

Vprašanje je, kaj dobimo z dvakratnim zaklepanjem besedila z dvema različnima ključema. Izkaže se, da to ustreza enkratnemu zaklepanju, katerega ključ je na poseben način sestavljen iz obeh posameznih ključev. Drugi ključ naj ima k znakov s kodami od v_0 do v_{k-1} . Dvakrat zaklenjeno besedilo naj ima kode od c_0 do c_{n-1} . Za $0 \leq i < n$ veljajo enačbe:

$$b_i = (a_i + u_i \bmod j) \bmod 256 \quad \text{in} \quad c_i = (b_i + v_i \bmod k) \bmod 256.$$

Z upoštevanjem obeh skupin enačb pri istem indeksu dobimo zvezo med začetnimi in končnimi kodami:

$$\begin{aligned} c_i &= ((a_i + u_i \bmod j) \bmod 256 + v_i \bmod k) \bmod 256 \\ &= (a_i + u_i \bmod j + v_i \bmod k) \bmod 256 \\ &= (a_i + (u_i \bmod j + v_i \bmod k) \bmod 256) \bmod 256. \end{aligned}$$

Pri tem smo upoštevali zvezo: $(a + (b \bmod c)) \bmod c = (a + b) \bmod c$. Kode znakov v ključu, ki opisuje sestavljeno zaklepanje, so tako določene z

$$w_i = (u_i \bmod j + v_i \bmod k) \bmod 256, \quad 0 \leq i < l. \quad (1)$$

Dolžina l novega ključa je najmanjši skupni večkratnik dolžin obeh ključev. Da je temu res tako, naj bralec premisli sam. Da si lažje predstavljamo, kako dobimo nov ključ, si oglejmo primer, kjer je prvi ključ besedica 'Ti' (kodi 84 in 105), drugi ključ pa 'Jaz' (kode 74, 97 in 122). Nov ključ bo iz šestih znakov s kodami:

$$\begin{aligned} w_0 &= 84 + 74 = 158, & w_1 &= 105 + 97 = 202, & w_2 &= 84 + 122 = 206, \\ w_3 &= 105 + 74 = 179, & w_4 &= 84 + 97 = 181, & w_5 &= 105 + 122 = 227. \end{aligned}$$

Tako smo uvedli dvočleno operacijo, ki ključema na zgoraj opisan način priredi nov ključ. To operacijo lahko opišemo tudi drugače. Zaporedje ASCII kod znakov posameznega ključa zapišemo kot vrstico. Na primer ključu 'komet' ustreza vrstica (107, 111, 109, 101, 116). Elementi vrstic so cela števila med 0 in 255, dolžina vrstic pa je poljubna. Dvočlena operacija (imenovali jo bomo množenje) naj namesto nad ključema deluje kar nad

ustreznima vrsticama. Če sta ključa 'Ti' in 'Jaz', bomo ustrezni vrstici množili takole:

$$(84, 105)(74, 97, 122) = (158, 202, 206, 179, 181, 227).$$

Opozoriti je treba še na to, da lahko včasih dva različna ključa delujeta enako na vsakem besedilu. Pravimo, da sta *ekvivalentna*. Množico vseh med seboj ekvivalentnih ključev imenujemo *razred*. Enako pravimo za vrstice. Zgled: ključa 'ABC' in 'ABCABC' sta ekvivalentna, torej sta ekvivalentni tudi vrstici (65, 66, 67) in (65, 66, 67, 65, 66, 67). Z razmislekom, kako delujejo različni ključji na poljubnem besedilu, uvidimo, da so v istem razredu samo taki ključji, v katerih se ponavlja neko zaporedje znakov. Zgled: 'abc', 'abcabc', 'abcabcabc', ... Najkrajši ključ v razredu imenujemo *primitivni ključ*, ustrezno vrstico pa *primitivno vrstico*. Seveda je v vsakem razredu le ena taka vrstica. Vrstice bomo označevali z malimi črkami, na primer $a = (12, 0, 255)$. Ekvivalentnost dveh vrstic a in b bomo označili takole: $a \equiv b$. Množenje vrstic ima nekaj zanimivih lastnosti:

- komutativnost: $ab = ba$,
- asociativnost: $(ab)c = a(bc)$,
- ohranitev ekvivalentnosti: $a \equiv b \Rightarrow ac \equiv bc$. Velja tudi: $a \not\equiv b \Rightarrow ac \not\equiv bc$.

Dokažimo vse tri lastnosti:

- Ta lastnost sledi neposredno iz formule (1) in komutativnosti običajnega seštevanja.
- Z dokazom asociativnosti je več dela. Imejmo tri vrstice:
 $a = (a_0, a_1, \dots, a_{j-1})$, $b = (b_0, b_1, \dots, b_{k-1})$ in $c = (c_0, c_1, \dots, c_{l-1})$.
 Ali sta vrstici $u = a(bc)$ in $v = (ab)c$ enaki? Da! Dolžina obeh je enaka kar najmanjšemu skupnemu večkratniku števil j, k in l , saj velja

$$V(j, V(k, l)) = V(V(j, k), l) = V(j, k, l).$$

Elementi vrstic so zaradi asociativnosti seštevanja tudi paroma enaki:

$$u_i = (a_i \bmod j + b_i \bmod k + c_i \bmod l) \bmod 256 = v_i.$$

- To sledi iz dejstva, da ekvivalentna ključja, ki ustrezata vrsticama a in b , enako spremenita začetno besedilo; ko pa delujemo še s ključem, ki ustreza vrstici c , dobimo nazadnje enaki končni besedili.

Zaradi tretje lastnosti je dovolj, če iz vsakega razreda vzamemo le eno (primitivno) vrstico ter računamo z njo. Ko zmnožimo dve taki vrstici, za rezultat množenja namesto dejanskega produkta proglasimo kar primitivno vrstico iz razreda, v katerem je produkt. Tako dobimo dvočleno operacijo na množici primitivnih vrstic. Zgled: vrstice (5), (5, 5), (5, 5, 5), ... so v istem razredu, torej namesto $(1, 3)(4, 2) = (5, 5)$ pišemo $(1, 3)(4, 2) = (5)$. V tako skrčeni množici vrstic je posebej odlikovana vrstica (0), ki jo bomo imenovali **enota** in označili z e . Za poljubno vrstico a velja $ea = ae = a$. Za vsako vrstico a obstaja tudi inverzna vrstica a^{-1} , tako da je $aa^{-1} = a^{-1}a = e$. Če je $a = (a_0, a_1, \dots, a_{n-1})$, potem je $a^{-1} = (256 - a_0, 256 - a_1, \dots, 256 - a_{n-1})$. Inverznih elementov a^{-1} je zaradi lastnosti (c) natanko za en razred. Pokazati moramo še, da je na zgoraj opisani način dobljena vrstica a^{-1} res primitivna, če je a primitivna. To pa ni težko. Če a^{-1} ne bi bila primitivna, bi se v njej ponavljala zaporedja elementov, torej bi se ponavljala tudi v a . Množica primitivnih vrstic s tako prirejeno operacijo množenja ima lastnosti grupe. Pri grupi zahtevamo asociativnost množenja, obstoj enote in obstoj inverznega elementa k vsakemu elementu. Naša množica je celo komunitativna grupa.

Število različnih primitivnih ključev je seveda neskončno. Nepoklicani radovednež bi imel res veliko dela, če bi hotel najti skrivni ključ. Vseh različnih ključev dolžine n je kar 256^n . Bralec naj sam izračuna, koliko je to, če je na primer ključ iz desetih znakov.

Nazadnje napišimo še podprogram v turbo pascalu za zaklepanje in odklepanje besedila.

```

procedure ZakleniOdkleni(kljuc: string; ime1,ime2: string; z: boolean);
{ S ključem kljuc zaklene (z=true) ali odklene (z=false) besedilo. }
{ Besedilo bere z datoteke ime1 in zapisuje na datoteko ime2. }
var
  i: integer;
  znak: char;
  vhod,izhod: text;
begin
  assign(vhod,ime1); reset(vhod);
  assign(izhod,ime2); rewrite(izhod);
  i:=0 ;
  while not eof(vhod) do begin
    while not eoln(vhod) do begin
      i:=i+1;
      read(vhod,znak);
      if z then
        znak := chr((ord(znak)+ord(kljuc[i])) mod 256)
    end
  end
end

```

```

else
    znak := chr((ord(znak)-ord(kljuc[i])) mod 256);
    write(izhod,znak);
    if i=Length(kljuc) then i := 0;
end;
readln(vhod); writeln(izhod);
end;
close(vhod); close(izhod);
end; { ZakleniOdkleni}

```

Zaklepanje besedila lahko povzroči težave, če ima zaklenjeni znak kodo 13 ali 10. Znak s tema kodama namreč označujeta konec vrstice v običajnih tekstovnih datotekah. Zato mora programer predvideti, kako se bodo spremenili znaki vhodne datoteke, in izbrati primeren ključ, ali pa kako drugače dopolniti gornji podprogram.

Milan Ambrožič, Erik Karič

27. OBČINSKO TEKMOVANJE OSNOVNOŠOLCEV IZ MATEMATIKE

22. aprila 1992 se je 1704 šestošolcev, 1582 sedmošolcev in 1677 osmošolcev na občinskem tekmovanju potegovalo za srebrno Vegovo priznanje. Osvojilo ga je 347 učencev 6. razreda, 443 učencev 7. razreda in 523 učencev 8. razreda. Naloge, ki jih je pod predsedstvom prof. Terezije Uran izbrala republiška tekmovalna komisija, so bile:

6. razred

1. Trije sošolci so iz kock zgradili tri enako visoke stolpe, ki niso bili višji od 2 m, tako da so postavljali kocko na kocko. Prvi je uporabil kocke z robom 8 cm, drugi kocke z robom 1,5 dm, tretji pa kocke z robom 2 dm.
a) Koliko cm je visok vsak stolp?
b) Koliko kock so porabili za vse tri stolpe?
2. Pravokotnik in kvadrat imata enaki ploščini. Dolžina osnovnice pravokotnika je 1992 cm. Določi najmanjšo višino pravokotnika in stranico kvadrata. (Vsa merska števila so naravna števila.)
3. Ako se proda neko blago za 180 goldinarjev, je 10% izgube. Za koliko treba blago prodati, da bode 5% dobička? (*Take naloge so reševali tvoji vrstniki pred 100 leti.*)

4. V enakokrakem trikotniku $\triangle ABC$ meri kot ob vrhu ($\angle C$) 45° . Nariši simetralo kota $\angle ABC$ in višino na stranico AC iz oglišča B . Izračunaj, koliko meri kot med višino in simetralo.

5. Načrtaj krog s polmerom $r = 2$ cm in tetivo $\overline{MN} = 3$ cm. Krogu očrtaj enakostranični trikotnik, tako da ena stranica leži vzporedno s tetivo MN . Opiši načrtovanje.

7. razred

1. Izračunaj ploščino pravilnega 12-kotnika, ki je včrtan krogu s polmerom $r = 20$ cm.

2. V trikotniku $\triangle ABC$ se kota α in β razlikujeta za 30° . Na stranici BC izberi točko D tako, da je $\overline{AC} = \overline{CD}$. Izračunaj kot $\angle BAD$.

3. V koordinatni ravnini so dane točke $A(4, 2)$, $B(9, 4)$, $C(-1, 3)$, $D(-3, 0)$ in $E(0, 0)$. Nariši vektorja $\overrightarrow{AB}$ in $\overrightarrow{CD}$. Z načrtovanjem določi koordinati točk F in G , če velja $\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{CD} = \overrightarrow{EF}$ in $\overrightarrow{AB} - \overrightarrow{CD} = \overrightarrow{EG}$. (Napotek: na koordinatnih oseh izberi enaki enoti.)

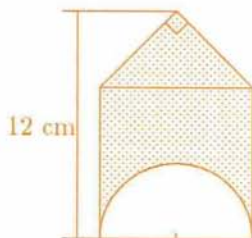
4. Gospod obljubi svojemu slugi na leto obleko in 144 goldinarjev. Čez tri mesece ga odpusti in sluga dobi obleko in 18 goldinarjev. Za koliko se mu je obleka zaračunala?

(Take naloge so reševali tvoji vrstniki pred 100 leti.

Sluga zasluži vsak mesec enako.

Vprašanje sprašuje po vrednosti obleke.)

5. Lik je sestavljen iz enakokrakega pravokotnega trikotnika in kvadrata z izrezanim polkrogom, kot kaže slika. Izračunaj ploščino lika. Podatek je na sliki.



8. razred

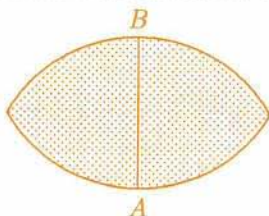
1. Pet delavcev je za neko delo zaračunalo 10500 SIT. Denar so razdelili tako, da sta prva dva dobila $\frac{2}{5}$ skupnega dela ostalih treh. Prva dva sta si svoj delež razdelila v razmerju 2:3, drugi trije pa v razmerju 3:4:5. Koliko je dobil vsak od njih?

2. Zapisane izjave so nepopolne in veljajo le, če jim dodamo še en podatek ali pogoj. Dobro premisli in pri vsaki izjavi zapiši potreben dodatni pogoj.

- Levo in desno stran enačbe smemo deliti z istim številom.
- Najmanjši skupni večkratnik števil a in b je njun produkt $a \cdot b$.
- Če celoto razdelimo na pet delov, je en del petina celote.
- Dve premici sta vzporedni, če nimata skupne točke.
- Prostornina valja je $2\pi r^3$.

3. Nejc je dobil od Anice sliko velikosti $8\text{cm} \times 10\text{cm}$ (8cm široka in 10cm visoka), od Brede sliko velikosti $10\text{cm} \times 12\text{cm}$ in od Cvetke sliko velikosti $12\text{cm} \times 15\text{cm}$. Katero od slik je dal povečati na velikost $15\text{cm} \times 18\text{cm}$? Utemelji.

4. Krožna loka na sliki imata središči v krajiščih daljice AB z dolžino a . Z a izrazi obseg in ploščino osenčenega lika.

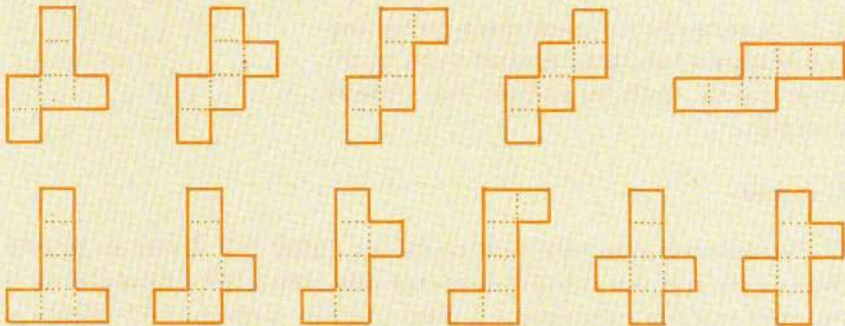


5. Pokončna prizma ima za osnovno ploskev deltoid s krajšo diagonalo e . Kota z vrhoma v krajiščih daljše diagonale merita 90° in 60° . Višina prizme je enaka daljši diagonali deltoida. Z e izrazi prostornino in površino prizme.

Aleksander Potočnik

ENOSTAVNI PLAŠČI – Rešitev s str. 128

Prerezati je treba 7 robov kocke. Obstaja 11 paroma neskladnih enostavnih ravninskih plaščev dane kocke:



Boris Lavrič

RAČUNANJE S PRIBLIŽKI

- **Najprej naloga:**

Kolikšna je vsota petih števil, podanih z decimalnim zapisom:

$$0.113 + 0.014152 + 1.00 + 3.6 + 0.0031?$$

a) 4.730252 b) 4.7 c) 4.730

- **Nato pa še nekaj teorije:**

"Koliko pa je stara tale mumija?" vpraša obiskovalec v muzeju.

"Tri tisoč petnajst let," odgovori čuvaj kot iz topa.

"Kako pa veste to tako natančno?"

"Ja, veste, gospod, ko sem jaz prišel pred petnajstimi leti sèm v službo, so govorili, da je stara tri tisoč let ... "

Marija Vencelj

UTRINEK IZ ŠOLSKIH KLOPI

Pri pospravljanju lanskih šolskih papirjev sem našla naslednji ogleda vreden izdelek učenca prvega letnika.

Naloga se je glasila:

Določi vrednost za x tako, da bo imel vektor $\vec{a} = (-2x, 1, 2)$ velikost 3.

Učenec je veselo računal:

$$|\vec{a}| = 3, \quad a = \sqrt{4x^2 + 5}, \quad a = 2x + \sqrt{5}, \quad 2x = a - \sqrt{5}, \quad 2x = 3 - \sqrt{5}, \\ 2x = \sqrt{9} - \sqrt{5}, \quad 2x = \sqrt{4}, \quad 2x = 2, \quad x = 1.$$

Spomnim se, da ni mogel razumeti, da ni za nalogo dobil nič točk, saj je imel vendar pravi rezultat.

Helena Paternost

SKRITI DATUM - Rešitev s str. 70

Ker je znani Slovenec umrl pred 190 leti, se je moral roditi v 18. stoletju, torej se njegova rojstna letnica začne s števkou 1 in nadaljuje s 7. Pogled na številski krog pove, da moramo, da pridemo od 1 do 7, v smeri urinega kazalca preskočiti dve števili. Če nadaljujemo po tem pravilu (za mesec in dan seveda v obratni smeri), dobimo zaporedje 2-3-3-1-7-5-4, in od tod rojstni datum 23. 3. 1754 matematika Jurija Vege.

Marija Vencelj

ZAČARANI KROG

V vsakdanjih pogovorih pogosto omenjamo začarani krog. Denimo, da ima učenec v šoli težave. Slabo zna, ker se ne uči dovolj. Ve, da bi moral doma več delati, a nekako ne najde prave energije za delo. Pravi takole: "Sem v začaranem krogu: čim slabše ocene imam v šoli, tem težje se spravim k učenju." V Slovarju slovenskega knjižnega jezika je začarani krog jedrnatopisan kot proces ali pojav, pri katerem posledice rodijo nove vzroke.

V začaranem krogu sta med seboj povezana dva dejavnika. Sprememba enega dejavnika (slabe ocene) vpliva na spremembo drugega (intenzivnost učenja doma), ta pa še poveča spremembo prvega (še slabše ocene). Učenec v začaranem krogu bo nazadnje prav hitro pristal v končnem stanju kroga: same slabe ocene in lenarjenje doma. Pri dobrem učencu sta dejavnika povezana drugače. Slaba ocena ga spodbudi k intenzivnejšemu delu, dobra pa ga malo poleni. Učenec je v stabilnem stanju: slabo oceno hitro popravi, odlično pa pokvari.

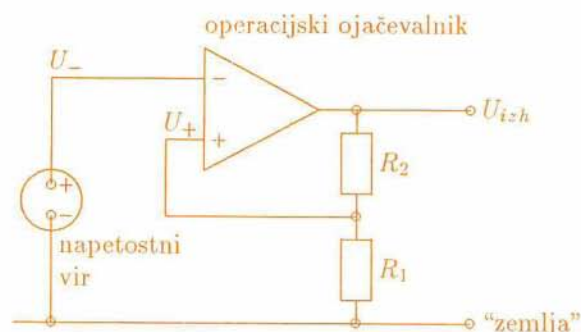
Tudi v naravi zasledimo pojave, ki jih vodi začarani krog. Oglejmo si preprost primer. Palico postavimo z ostrim koncem čim bolj navpično na tla, jo umirimo in nato spustimo. Čeprav se še tako trudimo, palice ne moremo postaviti popolnoma navpično. Majhna napaka v legi povzroči, da se začne palica vse hitreje oddaljevati od navpičnice in končno pade. Začarani krog opišemo v tem primeru takole: Malo nagnjeni palici se zaradi teže hitrost zgornjega konca poveča, večja hitrost pa pomeni še večji nagib.

Pri naslednjem primeru se spomnimo nadležnih valov na cesti. Najpogosteje nanje naletimo na makadamskih cestah v hribih ali pred asfaltiranimi križišči, kjer avtomobili pogosto zavirajo (slika A na zadnji strani ovitka). Nastanek valov vodi začarani krog. Navidez še tako gladka cesta ni brez vzboklin. Zavirajoče vozilo na hribčku poskoči in naredi malo naprej vdolbino v mehki cesti. Naslednja vozila število vdolbin povečujejo, narašča pa tudi globina vdolbin. Vdolbine torej zanihajo vozila, ta pa v istem ritmu poglobljajo valove. Pri nastanku valov je pomembno, da imajo vozila približno enako hitrost in kolesa podobne nihajne čase. Ker so avtomobili podobno grajeni, se pojavijo valovi na tistih odsekih ceste, kjer imajo vozila približno enake hitrosti.

Kdo še ni delal sneženega moža? Majhno kepo začnemo valiti po mokrem snegu. Kepe se sneg oprime in majhna kepa lahko postane tako velika, da je niti valiti ne moremo več. V hribih zmore droban kamenček tako sprožiti velik plaz, ki podira vse pred seboj.

V začaranem krogu se na začetku zelo majhna sprememba enega dejavnika sčasoma zelo poveča. Drobna kepa se spremeni v rušilni plaz, gladka cesta postane valovita, navpična palica pade, učenec konča z negativno oceno. Vsi ti pojavi so nam v nadlego in se jim poskušamo izogniti. Začarani krog pa nam je lahko tudi v pomoč. Učenec, ki ga dobre ocene spodbujajo k še večji dejavnosti, se veliko nauči. Osnovne delce, na primer elektrone, protone, fotone in delce alfa, zaznavamo z Geiger-Muellerjevo cevjo. Delci ionizirajo plin v cevi, sproščeni elektroni pa na poti k tanki žički na sredi cevi sprožijo plaz novih elektronov. Končno prispe na žičko toliko naboja, da sproži števeno napravo.

Oglejmo si še en tak začarani krog, ki se vrti nam v prid. To je elektronski prožilnik. Kaže ga slika 1, sestavljajo ga *operacijski ojačevalnik* in upornika.



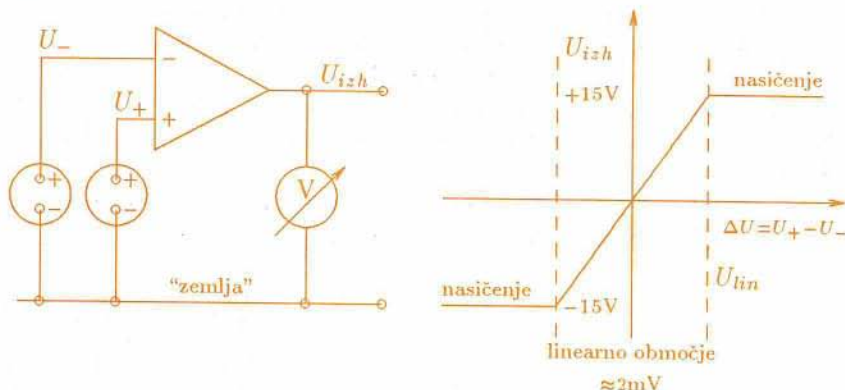
Slika 1. Skica elektronskega prožilnika. Izhodna napetost U_{izh} je $+15\text{ V}$. V trenutku, ko se napetost vira U_- dovolj približa napetosti praga U_+ , se začne začarani krog. Izhodna napetost se v hipu prevesi od $+15\text{ V}$ na -15 V .

Navada je, da označimo upornike s pravokotniki, ojačevalnik pa s trikotnikom. Za upornik velja Ohmov zakon

$$U = IR,$$

kjer je U napetost med priključkoma upornika z uporom R , I pa tok, ki teče skozenj. Operacijski ojačevalnik je sicer zapleten elektronski element, a ga lahko prav preprosto opišemo. Ima dva vhoda, ki sta na skici označena z matematičnima znakoma $+$ in $-$, ter izhod, na skici je v desnem oglišču trikotnika. Vhoda povežemo z viroma napetosti, kot kaže slika 2, na izhodu pa merimo napetost med izhodnim priključkom in vodnikom, ki je skupen in ki se ga je oprijelo ime "zemlja". Operacijski ojačevalnik močno ojači razliko napetosti $\Delta U = U_+ - U_-$, vendar je na izhodu napetost omejena. Ne more biti večja kot $+15$ voltov in ne manjša od -15 voltov, saj sta to napajalni napetosti ojačevalnika. Če je torej razlika ΔU večja kot denimo 1 milivolt, je

na izhodu iz ojačevalnika napetost $+15\text{ V}$, če pa je manjša kot -1 mV , pa dobimo na izhodu negativno napetost -15 V . Razlika napetosti ΔU , ki je po absolutni vrednosti manjša od enega milivolta, pa se ojači: na izhodu dobimo napetost, ki je v našem primeru 15000-krat večja od ΔU .



Slika 2. Operacijski ojačevalnik močno ojači razliko napetosti $\Delta U = U_+ - U_-$ le, če je njena absolutna vrednost manjša kot U_{lin} , denimo $U_{lin} = 1\text{ mV}$, sicer je ojačevalnik v nasičenju. Vrednost 1 mV za U_{lin} smo zapisali le zaradi nazornosti. Vrednosti za U_{lin} so navadno še manjše.

Sedaj si oglejmo vezje. Napetost U_+ na $+$ vhodu je določena z uporoma R_1 in R_2 ter z izhodno napetostjo. Na $-$ vhodu naj bo napetost $U_- = 0$, izhodna napetost U_{izh} pa naj bo $+15\text{ V}$. Tok I skozi upornika R_1 in R_2 sledi iz Ohmovega zakona:

$$U_{izh} = (R_1 + R_2)I,$$

napetost U_+ pa tudi:

$$U_+ = R_1 I = \frac{R_1}{R_1 + R_2} U_{izh}.$$

Napetosti U_+ bomo rekli *napetost praga*. Elektronski prožilnik je pripravljen. Sedaj na $-$ vhod priključimo nastavljivi vir napetosti in napetost počasi spreminjamo od vrednosti 0 V navzgor. V trenutku, ko se ta napetost na manj kot milivolt približa napetosti praga, se začne začarani krog. Izhodna napetost se začne zmanjševati, s tem pa se niža napetost praga. V naslednjem hipu postane razlika napetosti ΔU zelo majhna, hkrati z njo je zelo majhna tudi napetost na izhodu. Napetost praga se krepko zniža, razlika napetosti

ΔU pa se po absolutni vrednosti močno poveča. V končnem stanju je na izhodu iz operacijskega ojačevalnika napetost -15 V, nova napetost praga pa je negativna. Prožilna napetost U_- torej zmanjša izhodno napetost (učenčeve ocene), s tem pa se zniža napetost praga (volja za delo), kar še bolj zmanjša izhodno napetost (ocene).

Elektronski prožilnik v izpopolnjenih izvedbah sodi med osnovna vezja pri elektronskih stoparicah, voltmetrih, analogno-digitalnih pretvornikih in drugje. Prednost prožilnika je, da se njegovo stanje bliskovito prevesi iz začetnega stanja v končno. Ta hitri prehod pa omogoči začarani krog.

Andrej Likar

Smullyan R., ŠAHIRAZADA, DZS, Ljubljana 1992, 190 str. (Zbirka Z logiko v leto 2000)

Državna založba Slovenije že vrsto let skrbi za to, da lahko tudi slovenski bralci posegajo po knjigah, ki bistrijo duha, ne da bi bile dolgočasne. Tako je nastala zbirka Z logiko v leto 2000, ki je bralcem Preseka ni treba več predstavljati. V njej je pred kratkim izšla že osma knjiga: *Šahirazada Raymonda Smullyana* z izvirnim naslovom *The Chess Mysteries of the Arabian Knights*.

Prijetno branje ponuja veliko užitka vsem, ki radi rešujejo logične uganke. Knjigo lahko razume vsakdo, ne da bi moral biti izkušen šahist. Naslov sicer obeta šahovske probleme, a ti so s šahovskega vidika prav preprosti. V glavnem je treba vedeti le, kako se premikajo šahovske figure. Naloge se bistveno razlikujejo od običajnih šahovskih problemov, v katerih je osnovno vprašanje, v koliko potezah lahko beli matira črnega ali obratno. Lahko bi rekli, da vsebuje knjiga več študij iz šahovske logike. Tako kot sorodna knjiga istega pisca *Šahovski problemi Sherlocka Holmesa* se tudi ta ukvarja z retrogradno šahovsko analizo. Ta od bralca zahteva, da ugotovi, s katerimi potezami je nastala dana šahovska pozicija.

Branje je še prijetneje, ker so vsa vprašanja zavita v orientalske zgodbe. Od tod tudi naslov *Šahirazada*.

Bralci si bodo gotovo hitro pridobili občutek za reševanje zastavljenih problemov, za tiste manj izkušene pa so na koncu knjige navedene tudi rešitve.

Knjigo je lepo poslovenil Branko Gradišnik ob strokovni pomoči odličnega šahista in matematika Petra Petka. Za prijetni zunanji videz je poskrbel oblikovalec Vili Vrhovec. Knjigo kot urednica toplo priporočam.

Milena Strnad

STARI SLOVENSKI GEOMETRIJSKI IZRAZI

Leta 1856 so na Dunaju natisnili učbenik geometrije (Lehrbuch der Geometrie), ki je eden prvih tovrstnih učbenikov za avstrijske nižje realke. Čeprav je izšel brez navedbe avtorjevega imena, je znano, da ga je napisal znameniti slovenski pisec matematičnih učbenikov in eden največjih tedanjih evropskih matematičnih pedagogov dr. Franc Močnik (1814-1892). Novembra je minilo 100 let od njegove smrti.

Za slovenske matematike ima omenjeni učbenik še prav poseben pomen. Čeprav je pisan v nemščini, so v njem (kot dopolnilo nemškemu izrazu) prvič objavljena slovenska imena geometrijskih pojmov, razne besedne zveze in tudi nekatere trditve iz geometrije. Prispevali so jih slovenski profesorji matematike na ljubljanski realki, ustanovljeni leta 1852. To prvo slovensko geometrijsko izrazje je danes seveda močno zastarelo, modernim ušesom zveni nenavadno in smešno, včasih celo nerazumljivo. Kljub temu, ali pa nemara prav zato, je še vedno zanimivo s strokovnega in jezikovnega vidika, predvsem pa je dokument časa, ko so naši predniki orali ledino slovenski matematični terminologiji.

Geometrija ali (po starem) merstvo

V nadaljevanju si na nekaj primerih oglejmo, kako je izgledala geometrija za nižje razrede srednjih šol (oziroma za sedanje višje razrede osnovnih šol) pred skoraj 140 leti. Naj pripomnimo, da je navedeno besedilo sestavljeno iz originalnih slovenskih stavkov v knjigi, le združili in uredili smo jih nekoliko po svoje, izpustili pa razlago, ki je v knjigi napisana v nemščini.

Najprej je seveda potrebno razložiti osnovne pojme.

Truplo je veličina prostorska, ki ima troje razprostrjenje, dolgost, širokost in visokost. Truplo je torej na vse strani omejen prostor. Plan je prostorska veličina, ki ima dvoje razprostrjenje: dolgost in širokost. Čerta je veličina prostorska, ktera ima le eno razprostrjenje, namreč dolgost. Pika torej ni veličina.

Skozi dve piki moremo le eno samo naravnostno čerto, brez števila veliko pa krivih čert potegniti. Naravnostna čerta je nar krajši čerta med dvema pikama. Dve naravnostne čerti se zamorete le po njunim nameru, in po dolgosti, ne pa po njuni podobi razločiti; dve krive čerti zamorete tudi po podobi različne biti.

Treba se je naučiti:

Kako se k dani naravnostni čerti vštrična potegne. Kako se razméra dveh naravnostnih čert s številkami naznani. Kako se naravnostna čerta s sežnji (koraki) meri, kako se razpoljuje, kako se na poljubno mnogo enakih delov razdeli, kako se po določeni razmeri razdeli. Kako se na dano naravnostno čerto iz kakšne zvnaj nje ležeče pike navpičnica postavi. Kako se na kakšno piko naravnostne navpičnica postavi. Kako se vogel narisa, kateri je danemu voglu enak. Kako se dani vogel razpoljuje.

Kotom je sploh posvečena posebna skrb, saj jih je toliko različnih vrst in so med njimi tako različne povezave.

Uklonjen vogel je manjši kakor naravnosten. Izbuhnjen vogel je večji kakor naravnosten. Stisnjen vogel je manjši kakor prav. Stegnjeni vogel je večji, kakor pravi, pa manjši, kakor naravnostni. Dva prava vogla sta si enaka. Dva križna vogla sta si enaka. Dva vogla, katerih stegna na ravno tisto stran vštrič molé, sta si enaka. Dva stranska vogla storita en naravnosten vogel. Vsi vogli, kateri na eni strani naravnostne čerte okoli ravno tistiga temena drugi zraven družiga ležé, storé en naravnosten vogel ali pa dva prava. Vsi vogli, kateri okoli ene pike drugi zraven družiga ležé, storé dva naravnostna ali pa štiri prave vogle. Enota vogelne mére je pravi vogel.

Če kakšina naravnostna čerta dve vštrične prereže, sta po dva in dva zavjemna vogla med sabo enaka. Če naravnostna čerta dve vštrične prereže, sta po dva in dva menjavna vogla enaka. Če naravnostna čerta dve vštrične prereže, zneseta dva in dva vogla, ki na eni strani rezavke ležita, toliko, kolikor dva prava vogla ali 180^0 . Če naravnostna čerta dve druge tako prereže, de so zavjemni vogli enaki, morate te dve čerti vštrične biti. Če naravnostna čerta dve druge naravnostne tako prereže, de sta dva notrenja vogla, ki na ravno tisti strani prerezavne čerte ležita, skupaj dvema pravima enaka, morate prerezane čerti vštrične biti. Če dve naravnostni čerti v ravno tisti plani na tretji naravnostni navpik stojíte, ste te dve čerti vštrične.

Nato pride na vrsto trikotnik, najprej seveda praktični napotki za konstruiranje, nato izreki o podobnosti in skladnosti ter druge lastnosti.

Trivogel je podoba s tremi naravnostnimi čertami oklenjena.

Kako se pravovogelni ali pa stisnjenovogelni trivogel narisa. Kako se enakostégnat trivogel narisa. Kako se enakostranski trivogel narisa. Kako se s tremi danimi stranmi trivogel narisa. Kako se z dvema stranema in z voglam, ki ga oklepate, trivogel narisa. Kako se z dvema stranema in z voglam, ki

daljši strani nasprot leži, trivogel narisa. Kako se iz ene strani in iz obeh, k nji prislonjenih voglov trivogel sestavi. Kako se narisa trivogel, kateri je z drugim trivoglam stičen. Kako se na naravnostni čerti trivogel narisa, ki je danimu trivoglu podoben.

Dva trivogla sta si podobna, to je imata enako podobo, če imata vse tri vogle enake, in če ste po dve strani, ki enakim voglam nasproti ležite, med sabo v enaki razmeri. Ako se v trivoglu k eni strani vštrična potegne, je daní trivogel novimu manjšimu podoben. Če so v dveh trivoglih vsi trije vogli vzajemno enaki, sta si trivogla podobna. Dva trivogla sta si podobna, če imata po en vogel vzajemno enak, in če so strani, ki ta dva vogla oklepajo, med seboj v enaki razmeri. Dva trivogla sta si podobna, če ste po dve in dve strani med seboj v enaki razmeri. Dva trivogla sta si podobna, če so tri strani vzajemno vštrične. Ako se v trivoglu ena stran na več enakih delov razdeli, in vsaka delivna pika z nasprotnim verhvoglam zveže, se tako tudi vsaka čerta, ki se z uno stranjo vštrič potegne, na ravno toliko delov razdeli.

Znesek vsih notrenjih voglov trivogla je enak dvema pravima ali 180° . Vsak zunanji vogel trivogla je enak znesku obeh notranjih nasprotnih voglov.

Dva trivogla se krijeta ali sta stična, če imata vse tri strani ino vse tri vogle zaporedoma vzajemno enake. Dva trivogla sta stična, če so v obeh vse tri strani vzajemno enake. Dva trivogla sta stična, če so njih po dve in dve strani, in vogel, ki ga oklepate, vzajemno enaki. Dva trivogla sta stična, če so v njih ena stran in ti strani prislonjeni vogli vzajemno enaki. Dva pravovogelna trivogla sta stična, če sta v njih podpona in ena pripona enake. Če ste v trivoglu dve strani enake, sta tudi njima nasproti ležeča vogla enaka. Če sta v trivoglu dva vogla enaka, ste tudi njima nasproti ležeče strani enake. Če sta pa v trivoglu dva vogla neenaka, ste tudi njima nasproti ležeče strani neenake, in sicer leži večimu voglu tudi večí stran nasproti. V pravovogelnim trivoglu je podpona, v stegnjenovogelnim trivoglu je pa stegnjenimu voglu nasproti ležeča stran nar večí.

Navpična čerta je nar krajši čerta, ki se zamore od kakšne pike do druge naravnostne čerte potegniti. Če se v enakostegnatim trivoglu podkladna čerta razpoli, in če se razpolivna pika z verham (temenam) zveže, stoji vezavna čerta navpik na podkladni čerti. Če se v enakostegnatim trivoglu čerta z verha navpik na podkladno čerto spusti, se podkladna s tem razpoli. Če se na kakšim naravnostni čerti na ravno tisti, ali na nasprotnih straneh dva enakostegnata trivogla narisata ino skozi njuna verha naravnostna čerta potegne, razpoli te čerta prvič verha vogla, razpoli drugič občno podkladno, in stoji zadnjič na podkladni navpik.

Ne manjka niti Pitagorov izrek:

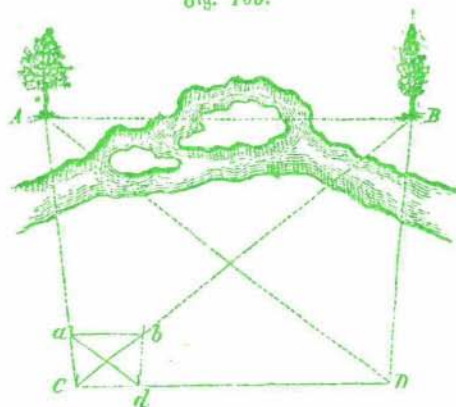
V pravovogelnim trivoglu je štirjak podpone enak znesku iz štirjakov obeh pripon.

Sledijo štiri- in večkotniki:

Podoba s štirimi naravnostnimi črtami omejena se imenuje štirivogel. Znesek vsih voglov v štirivoglu stori 360^0 ali pa štiri prave vogle. Dva štirivogla sta stična, če imata vse strani in vse vogle zaporedoma enake. Kako se narisa štirivogel, kateri je z danim štirivoglam stičen. Dva štirivogla, ki imata vse vogle zaporedoma enake, in v katerih imate po dve enako ležeči strani enako razmero, sta si podobna. Kako se narisa štirivogel, ki je danemu štirivoglu podoben.

§. 212. Die Länge einer Geraden zu bestimmen, die an ihren beiden Endpunkten unzugänglich ist. Kako se dolžnost naravnostne črte zméri, ktera je na obeh koncih nepristopljiva.

Es sei z. B. die Entfernung der beiden Bäume A und B (Fig. 165), welche sich jenseits eines Flusses befinden, zu Fig. 165.



Kako izmerimo dolžino daljice z nedostopnima krajiščema. Slika je iz knjige Lehrbuch der Geometrie iz leta 1856, po kateri je povzet tale zapis.

Vsaka z naravnostnimi čertami omejena podoba se imenuje tudi mnogovogel. V vsakim mnogovoglu znesejo vsi vogli skupaj dvakrat toliko pravih voglov, kolikor je strani v mnogovoglu, manj štiri prave vogle. Vštrične med vštričnimi so med soboj enake. V vsakim vštričniku so nasprotni strani enake. Vsaki vštričnik se razdeli po medvogelnici v dva stična trivogla. Če ste v kakšnem štirivoglu po dve nasproti ležeči strani enake, je ta štirivogel vštričnik. Če se v pravilnim mnogovoglu dva obvodna vogla razpolita, in če se prerezno piko z družimi mnogovogelovimi končnimi pikami po naravnostnih čertah sklene, se tedaj mnogovogel v zgolj stične trivogle razdeli.

Posebej je obravnavan krog in njemu včrtani ali očrtani liki.

Vsi dosredki ravno tistiga kroga so si enaki. Kako se srednja pika kroga najde. Skozi kakšno piko v obvodu kroga pritično čerto potegniti. Kako se skozi piko, ki je zunaj kroga, memo njega pritična čerta potegne. Vsi krogosredni vogli v ravno tistim krogu znesó štiri prave vogle ali pa 360^0 . Kako se lok razpoli. Kako se krogovi obvod na dve enake polovici razdeli. Kako se krogovi obvod na šest enakih delov razdeli. Kako se krogovi obvod na deset enakih delov razdeli. Kako se krogovi obvod na poljubno veliko enakih delov razdeli. Kako se polokrog na stopove razdeli ali prenašavnik naredi. Kako se v krog pravilen mnogovogel vrisa. Kako se okrog pravilniga mnogovogla krog orisa. Kako se pravilen mnogovogel narisa, kadar dolgost strani ni odmerjena. Kako se pravilen mnogovogel narisuje, v katerim ima vsaka stran določeno dolgost. Kako se okoli kroga pravilen mnogovogel nariše. Kako se v pravilen mnogovogel krog vrisa. Če se dva kroga režeta, imata njuna obvoda dve piki med seboj občne.

K enakim sponam grejo tudi enaki loki, in naopak: k enakim lokam grejo tudi enake sponi. Naravnostna čerta, ki krogovo srednjo piko s sredo sponi poveže, stoji navpik na sponi. Če se iz srede kroga navpik na spono čerta potegne, se spona razpoli. Če se v krogu spona razpoli, in na sredi nje čerta navpik postavi, mora ta čerta skozi sredo kroga iti. Če se na koncu dosrednika čerta navpik postavi, se ta imenuje pritlikavna čerta (pritičnica) tega kroga. K enakim voglam v sredi kroga grejo tudi enake sponi in enaki loki, in nasproti: k enakim sponam grejo enaki sredinski vogli, in k enakim lokam grejo tudi enaki sredinski vogli. Če sredinski in obvodni vogel na ravno tistim loku stojita, je sredinski vogel dvakrat tako velik kakor obvodni vogel. Vogel v polkrogu je prav vogel. Stran pravilniga v krog vrisaniga šestvogla je enaka dosredku tega kroga. K vsakemu pravilnemu mnogovoglu se zamore

krog vrisati in tudi orisati. Če se krogovi obvod na več enacih delov razdeli, in če se skozi dve in dve ena za drugo ležeče delivne pike spona potegne, je mnogovogel, ki ga spona naredi, pravilen mnogovogel. Če se krog na več enacih delov razdeli, in če se skozi vsako delivno piko pritičnica potegne, oklenejo te pritičnice pravilen mnogovogel.

Od krivulj so omenjene spirala, elipsa, parabola in hiperbola.

Kako se zavitka nariše, de so njeni ovinki enako dalječ saksebi. Kako se polžalica narisa, de prostor med ovinki vedno večji prihaja.

Elipsa je nazaj v sé zavrnjena krivka, v kateri ste dalji vsaktere pike od dveh danih pik skupaj štete enake odmerjeni naravnostni čerti. Za vsaktero elipsino piko mora znesek obeh vodilnic enak biti veliki osi.

Ako je velika os in oddaljenost obeh ognjiš znana, kako se zamore poljubno mnogo pik v elipsi najti. Kako se središe, velika os in ognjiše dane elipse najde. Kako se elipsa s pomočjo niti z enim potegljajem nariše. Kako se v pravovogelnik vertna leha eliptične podobe nariše. Kako se po sestavljeni več lokov približevavna elipsa narisa.

Parabola je tista kriva čerta, v kateri je vsaka pika ravno tako daleč od dane ravne čerte, kakor od dane pike. Kako se poljubno veliko pik v paraboli določi, če sta ognjiše in ravnavka znana. Kako se os in ognjiše dane parabole najde. Kako se parabola z enim potegljajem nariše. V paraboli se imajo odsečke med seboj ravno kakor štirjaki rednic.

Hiperbola je tista kriva čerta, v kateri je razloček oddaljenja vsaktere pike od dveh danih pik enak dani naravnostni čerti. Kako se najde poljubno mnogo pik v hiperboli, če so poglavitna os in obe ognjiši znane.

Posebej so dana navodila, kako se računajo ploščine likov.

Štirjakova planjava se dobi, če se dolgost strani sama s seboj množi. Planjava pravovogelnika se najde, če se podkladna čerta z visokostjo množi. Planjava krivovogelniga vštričnika je enaka podkladni čerti množeni z visokostjo. Planjava trivogla se najde, če se podkladna čerta z visokostjo množi in množina z 2 deli. Planjava pravovogelniga trivogla je enaka polovici množine obeh pripon. Planjava polvštričnika se najde, če se obe štrične strani soštejete, in njun znesek s polovico visokosti množi. Planjava pravilniga mnogovogla je enaka obsegu množenimu s polovico dalje med srednjo piko in eno stranjo.

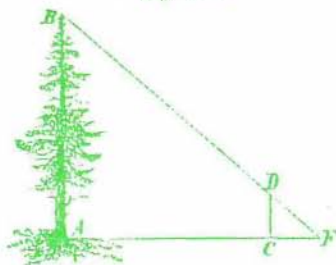
Krogova plan je enaka obvodu množenimu s polovico dosredka. Krogova plan je enaka štirjaku dosredka množenimu s 3.1416. Plani dveh krogov ste v isti razmeri ena proti drugi, kakor štirjaki njunih dosredkov, ali pa, kar je enako, kakor štirjaki njunih presredkov.

Elipsna plan se dobi, če se znesek obeh polosi s 3.1416 množi.

Drugi, krajši del knjige zajema stereometrija, ki se ukvarja večinoma z računanjem površin in prostornin osnovnih geometrijskih teles.

§. 213. Die Höhe eines zugänglichen Gegenstandes zu bestimmen. Kako se višina pristopljiva reči zméri.

a. Es sei z. B. die Höhe eines Baumes AB (Fig. 166) zu finden. Man wählt einen Punkt C, von dem man in gerader Linie zu A hin messen kann, steckt in C einen Stab CD vertikal ein, und legt sich hinter denselben in so einer Lage auf den Rücken, daß man die Spitze D des Stabes mit der Spitze B des Baumes in gerader Richtung erblickt; den Ort F, wo sich das Auge befunden hat, und wo die Verlängerung der Geraden BD hinfällt, bezeichnet man mit einem Pflocke, und mißt die Entfernung FC und FA, so wie die Länge des Stabes CD. Nun hat man zwei ähnliche Dreiecke ABF und CDF, daher ist $AB:CD = AF:CF$, woraus man das unbekannte Glied AB finden kann. Wäre z. B. $CD = 6'$, $CF = 8'$, $AF = 35'$, so hätte man die Proportion $AB:6 = 35:8$, woraus $AB = 26\frac{1}{2}' = 4'' 2\frac{1}{2}'$ folgt.



Die Höhe eines zugänglichen Gegenstandes zu bestimmen. Kako se višina pristopljiva reči zméri.

Ravan je plan, na kateri se na vse strani naravnostne čerte potegniti zamorejo. Oddaljenje dveh vštricnih plani je navpična čerta, koja se od ene do druge plani spusti. Vogel nagnjenja dveh plani je tisti vogel, kteriga med seboj naredite naravnostni, ki se v teh dveh planeh na prerezavno čerto v kakšni njeni piki navpik postavite. Znesek vsih robatih voglov, koji rogelj obmejujejo, je manjši, kakor štirje pravi vogli.

Pri prizmi se zrajtajo narpred vse stranske plati kakor vštričniki; njih znesek da poverhnost postranskih plati; k temu se prišteje dvojno stalo. Pri piramidi se zrajtajo narpred plati kakor trivogli in temu znesku se prišteje stalo. Pri pravilnih truplih se le ena sama plat preraja, in njena velikost se množi s številam plati. Valjarjeva poverhnost se dobi, če se narpred končnici kakor krogi, potlej pa njegov ovitek preraja, in poslednjič ti zneski soštejejo. Pri ravnim valjarju se dobi ovitek (plajš), če se obvod valjarjevega stala ž njegovo visokostjo množi. Koželjeva poverhnost se dobi, če se narpred stalo in ovitek preraja, potem pa oboje sošteje. Pri navpičnim koželju se ovitek dobi, če se obvod koželjevega stala s polovico njegove strani množi. Krogelna poverhnost je enaka štirjaku njeniga premerka množenimu s 3.14 ali bolj na tanko s 3.141593. Ako je poverhnost kakšniga trupla iz raznih plani sostavljena, se mora v take plani razdeliti, ktere je mogoče posamim prerajtati, in ti zneski naj se potem soštejejo.

Trupelni zapopadek kočnika se dobi, če se dolgost ene strani trikrat sama seboj množi (na kočnik, na tretjo stopnio povzdigne). Če se hoče nasproti iz kočnosti kaciga kočnika dolgost njegoviga roba najti, je le treba, tisto številko poiskati, koja trikrat sama seboj množena da kočni zapopadek, to se pravi, kočna korenika se mora poiskati. Kočnost pravovogelniga vštričnostenja je enaka množini iz dolgosti, širokosti in visokosti, ali pa množini iz podlagne plani in visokosti. Kočnost naravnostniga nepravovogelnika vštričnostenja je enaka plani njegoviga stala množeni z visokostjo. Kočnost napoševniga vštričnostenja je enaka podkladni planjavi množeni z visokostjo. Kočnost vsake trivoglate prizme je enaka stalu množenimu z visokostjo. Kočnost vsaktere mnogostranske prizme je enaka stalu množenimu z visokostjo. Kočnost vsaktere kakor si bodi upodobljene prizme se najde, če se stalo z visokostjo množi. Kočnost piramide se najde, če se stalo s tretjim delam visokosti množi. Kočnost valjarja se dobi, če se stalo z visokostjo množi. Kočnost koželja se dobi, če se njegovo stalo s tretjim delam visokosti množi. Kočnost krogle se dobi, če se nje poverhnost s tretji delam dosredka ali s šestim delam premerka množi. Krogelna kočnost se tudi dobi, če se premerek na kočnik povzdigne in z 0.5236 množi. Kočnost dveh krogel ste med seboj v ravno taki razmeri,

v kakoršni sta kočnika njunih premerkov. De se kočnost kaciga sestavljeniga trupla dobi, je le treba, ga s soštevanjem ali pa odštevanjem na take dele razdeliti, kateri se posamim prerajati zamorejo, in njih tako najdeni zapopadki se, kakor je treba, soštevajo ali odštevajo.

Pri geometrijskem pouku je bil velik poudarek dan uporabnemu znanju, ki naj mladega človeka usposobi, da se bo znašel v vsakdanjem življenju, pri obrti in delu. Potrebno je bilo znati prerisovati tudi nepravilna telesa in zlasti izračunavati njihove prostornine.

Kako se prerisuje na prezretni plošči. Kako se prerisuje s pomočjo previdljiviga papira. Kako se prerisuje s povečano ali pa z zmanjšano mero.

Kako se razdalja med dvema pikama na polji določi, če se ta zavoljo med njima ležečiga napotja ne more naravnost meriti, če se pa zamore od kake tretje pike do obeh meriti. Kako se dalja med dvema pikama na polji določi, če je le do ene same priti mogoče.

Kako se dolgost naravnostne čerte zmeri, ktera se zavoljo v nji ležečiga napotja ne more naravnost meriti. Kako se dolgost naravnostne čerte zmeri, če se zamore le k enimu koncu taiste pristopiti. Kako se dolgost naravnostne čerta zmeri, ktera je na obeh koncih nepristopljiva. Kako se višočina pristopljive reči zmeri. Kako se višočina nepristopljive reči zmeri. Kako se najde razloček višočine med dvema blizo skupaj ležečima postajama. Kako se najde razloček višave med dvema stajama, ki ste tako dalječ ena od druge, de se ne more iz ene same med njima ležeče staje do obeh meriti. Kako se ena ali več pik določi, ki z dano piko enako visoko leže.

Kočnost nepravilniga trupla se najde, če se truplo v posodo, ktere kočnost je znana, dene, ter posoda z vodo ali peskom napolni. Potem se truplo iz posode vzame, in voda ali pesek v posodi zmeri. Razloček med tem in zapopadkam cele posode pokaže kočnost nepravilniga trupla. De se zve, koliko kočnih čevljev ali palcov kaka nepravilna posoda derži, se tista z vodo napolni, in ta voda vlije potem v drugo posodo, na kateri steni je mera, ki kaže kočni zapopadek te posode na palce in čertice.

Kočni zapopadek trupel se da tudi z vago določiti in sicer tako: Napervo se določi, koliko en kočni palec ali en kočni čevlj daniga trupla tehta, potem se tehta celo dano truplo, in naposled se najdena teža celiga trupla deli s težo eniga palca ali eniga čevlja in številka, ki se tako dobi, kaže kočnost daniga trupla. Tako se da tudi zapopadek vsaktere posode določiti. Znano je, de kočni čevlj vode $56\frac{1}{2}$ funta tehta; če se torej posoda zvaga in potem z vodo

napolni in zopet zvaga, se najde teža v posodi zapopadene vode, in če se ta teža s $56\frac{1}{2}$ deli, se dobi število v posodi zapopadenih kočnih čevljev.

Kočni zapopadek soda se dobi, če se dvojna plan kroga pod veho in enojna na dnu sošteje in s tretjino tega zneska sodova dolgost, kakor de bi bil pravi valjar, množi.

Kočnost okrogliga hloda se dobi, če se plani obeh koncov soštejete, in potem polovica tega števila s hlodovo dolgostjo, kakor de bi bil pravi valjar, množi. Kočnost na štiri vogle obdelaniga hloda se dobi, če se končne plani soštejete, in s polovico tega števila hlodova dolgost množi. Pri pre-rajtovanji, kako naj se okrogel hlod obteše, de bo štirivoglati tram nar večji kočni zapopadek imel, se vzame razmera krožniga premerka proti strani nje-mu vrisaniga štirjaka kakor 10 proti 7 ($10 : 7$). Dolgost štirjakove strani se toraj dobi, če se krožni premer s $\frac{7}{10}$ množi. Tako je mogoče iz mere okrog-liga hloda že naprej določiti, kakšen kočni zapopadek bo iz njega iztesani tram imel. Če ima tram biti prizmatisk, se poiše štirjak, ki se da krogu tanji-ga konca vrisati, in ta se množi s hlodovo dolgostjo; če pa tram nima na obeh konceh enako debel biti, se morata pa štirjaka obeh koncov poiskati, in polovica njunih zneskov se množi s hlodovo dolgostjo. Ako je debelost prizmatiskiga trama dana, se zamore določiti, koliko palcov mora zgornji pre-merek okrogliga hloda meriti, de se bo zamogel tram odmerjene debelosti iz njega izdelati. Če ima biti končnica obdelaniga trama štirjaška, da štirjakova stran množena s $\frac{10}{7}$ iskani premer okrogliga hloda. Če ima pa biti končnica obdelaniga trama pravovogelnik, je iskani premer okrogliga hloda podpona pravovogelniga trivogla, kteriga pripone so, kakor strani daniga pravovogelni-ka, znane, iz kterih se tudi ta lahko zrajta.

Slovarček

Kdor ni vsega razumel, naj pogleda v kratek slovarček, kjer smo zbrali stare slovenske izraze iz Močnikove knjige skupaj z njihovim "prevodom" v sodobni slovenski matematični jezik.

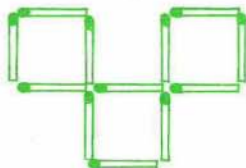
(preiskovavno, djan-sko) merstvo	(teoretična, praktič-na) geometrija	(naravnostna, kriva) čerta	(ravna, ukrivljena) črta
zobrazujoče merstvo	opisna geometrija	krivka	krivulja
planomerstvo	planimetrija	pika	točka
truplomerstvo	stereometrija	srednja pika, središče	središče
geometriško truplo	geometrijsko telo	vštričnica	vzporednica
okrogle trupa	obla telesa	presečna pika	presečišče
roglate trupa	oglate telesa	pravovogelnica	pravokotnica

(ravne, krive) planí	(ravne, ukrívljene) ploskve	prostovisno	navpično
prilíčje, razmera	razmerje	liveljno	vodoravno
vogel	kot	obvod	obod
vogelna stopa	kotna stopinja	polomerek, dosredek	polmer
prenašavnik	kotomer	premer, presredek	premer
stegno	krak	obvodni vogel	obodni kot
naravnosten vogel	iztegnjeni kot	sosrednji	koncentrični
uklonjen, dupli vogel	konveksni, izbočeni kot	pritikati	dotikati se
		prerezati	presekati
		sorédnice	koordinate
izbuhnjen vogel	konkavni, vdrti kot	odsečka	abscisa
prav vogel	pravi kot	odsečkina čerta	abscisna os
stisnjen vogel	ostri kot	rédnica	ordinata
stegnjen vogel	topí kot	dalja, oddáljenje	razdalja
stranski vogel	sokot	sreda, središe	sredina
križni vogel	sovršni kot	planini prostor, planja	ploščina
zavjemni vogli	nasprotna kota	ognjiše, pališe	gorišče
menjavni vogli	izmenična kota	vodilnica, vodilni žarek	radij vektor
obmerek	obseg		
trivogel	trikotnik	verh, teme	teme
podkladna, temeljna čerta	osnovnica	izsredenje	ekscentričnost
enakostegnat	enakokrak	ravnavka, rediteljka	premica vodnica (vodilja)
enakostranski	enakostranični	primerek	parameter
pravovogelni trivogel	pravokotni trikotnik	podklad, polaga	projekcija
stisnjenovogelni tri-vogel	ostrokotni trikotnik	vogel nagnjenja	naklonski kot
stegnjenovogelni tri-vogel	topokotni trikotnik	rogelj, trupelni vogel	telesno oglišče
podpona	hipothenuza	robov vogel	kot med ploskvama
pripona	kateta	stalo	osnovna ploskev
podoba, obrazek	lik	končnici	stranski ploskvi
podobne podobe	podobni liki	poverhnost	površina
stične podobe	skladni liki	kočnost, trupelni zapadek	prostornina
raznobežnik	trapezoid	robač	prizma
polvštričnik	trapez	piramidni čok	prisekana piramida
vštričnik	paralelogram	čveterostenje	tetraeder
raznovštričnik	romboid	osmerostenje	oktaeder
enakovštričnik	romb	dvajsterostenje	ikozaeder
pravovogelnik	pravokotnik	šesterostenje	kvader
štirjak	kvadrat	dvanajsterostenje	dodekaeder
pravilni mnogovogel	pravilni večkotnik	vštričnostenje	paralelepiped
medvogelnica	diagonala	kočnik	kocka
obla čerta, oblica	oval	valjar	valj
zavitka, polžalica	spirala	plajš, ovitek	plášč
spona, titva	tetiva	kožélj, kegelj	stožec
preseknica	presečnica	kugla, krogla	krogla
pritičnica	tangenta	krogelni pokrov	krogelna kapica

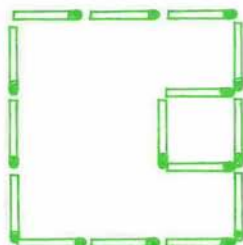
REŠITVE NALOG

NALOGE ZA NAJMLAJŠE BRALCE - Rešitve s str. P-2/III

1.



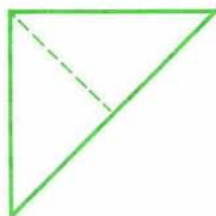
2.



3. (a) Najprej prereži kvadrat na polovico. Nato dobljena dela položi drugega na drugega in ponovno prereži na pol. Tako dobiš štiri enake dele. Ta postopek ponovi še dvakrat in na koncu bo kvadrat razrezan na 16 enakih delov.

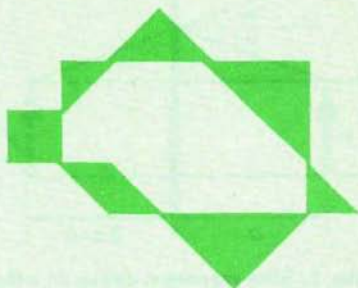
(b) Najprej prereži kvadrat po diagonali. Dobljena trikotnika položi drugega na drugega in prereži, kot kaže skica:

Borut Zalar



BELE LUKNJE ALI LIMITE PO TANGRAMSKO – Rešitev iz P XIX/6, str. 352

Prejeli smo nekaj odzivov Presekovih bralcev na članek o tangramskih luknjah iz lanskoletne 6. številke revije. Najboljšo rešitev je poslal **Peter Žurej** iz Podčetrka. Zgornja meja ploščine njegove tangramske luknje (glej risbo) je $2 + 6\sqrt{2} \approx 10,49$, kar je izjemno dobra rešitev. Poleg Petra dobi knjižno nagrado še **Barbara M. Gumzej** iz Grosuplja. Obema čestitamo.



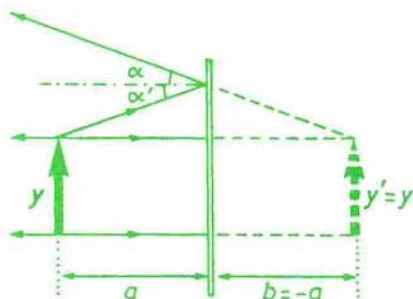
Vilko Domajnko

ZRCALCE, ZRCALCE NA STENI...

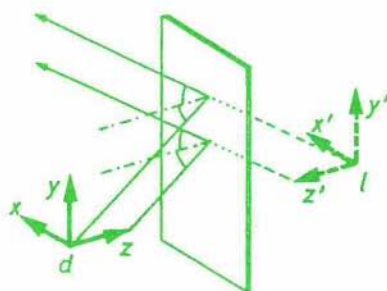
Od vseh optičnih naprav najpogosteje uporabljamo *ravno zrcalo*. Tako preprosto je, da mu učbeniki fizike ne posvečajo veliko pozornosti. Sliko je mogoče narisati zgolj z odbojnim zakonom. Odbojni kot je enak vpadnemu. Vpadni in odbiti žarek ter vpadna pravokotnica ležijo v isti ravnini. Pred zrcalo postavimo usmerjeno daljico, ki je vzporedna z zrcalom. Ugotovimo, da je njena slika *pokončna*, ker puščici slike in predmeta kažeta v isto smer; *enako velika*, ker je slika enako velika kot predmet, in *navidezna*, ker se v točki slike sekajo podaljški žarkov iz točke predmeta (slika 1). Navidezno sliko vidimo z očesom, ne moremo pa je opaziti na zaslonu, s katerim prestrežemo svetlobo.

Nekateri učbeniki omenjajo, da sta leva in desna stran na sliki zamenjani. Temu brez razmišljanja pritrdimo. Ali ni slika desne roke v zrcalu leva roka? A zakaj na sliki ni zamenjano zgoraj in spodaj? Ali zato, ker imamo levo in desno oko in ne spodnje in zgornje? A kako to, da se zdita desna in leva stran zamenjani, ko opazujemo sliko z enim očesom? Vprašanja kažejo, da zadeva le ni tako preprosta. Raziščimo jo nekoliko podrobneje.

Izhajajmo iz odbojnega zakona, ki je zrasel iz izkušenj in ki ga je mogoče tudi izpeljati, tako da mu povsem zaupamo. Predmetu damo tri razsežnosti: izberemo tri med seboj pravokotne robove kocke. Vsak izmed njih je daljica in se preslika v daljico. Obe daljici x in y , ki sta vzporedni z zrcalom, sta enakopравни in njuni sliki x' in y' sta pokončni. Tudi daljico z , ki je pravokotna na zrcalo, preslikamo tako, da preslikamo njeni krajišči. A slika z' je *obrnjena* (slika 2). Predmeta ne moremo prevesti v njegovo sliko v zrcalu s sukanjem



Slika 1. Slika vzporedne daljice pri odboju na ravnem zrcalu. Navidezno slike in podaljške žarkov rišemo črtkano.



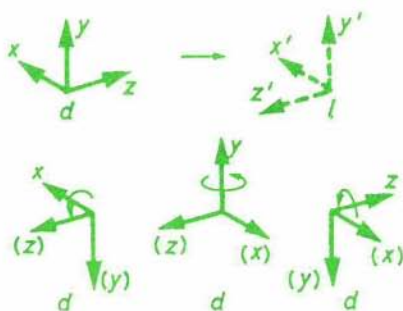
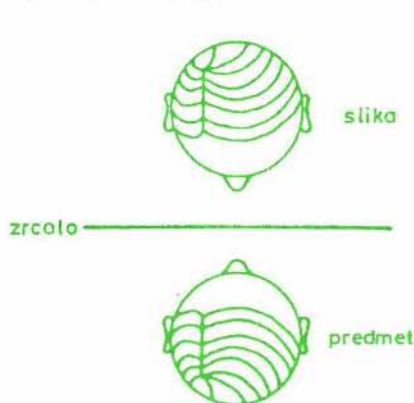
Slika 2. Robovi kocke in njihova slika v zrcalu.

za 180° ne okoli osi x ne okoli osi y ne okoli osi z (slika 3). V ravnem zrcalu ne vidimo zasukanega predmeta, ampak popačen predmet. Če se opazuje v zrcalu nekdo s prečo na levi, je tudi na sliki v zrcalu preča na levi, tako da se slika ne sklada z zasukano glavo (slika 4). Tega se je zavedal pesnik John Updike, ki ga je nekajkrat pritegnila fizika. Njegovo pesem *Zrcalo* navedimo v fizikalni prepesnitvi ("a kind of apish error posed in fearful symmetry" nekoliko omilimo):

V zrcalu
ne vidiš sebe,
popačenost simetrična
zre v tebe.

Izjava o tem, da sta na sliki v zrcalu zamenjani desna in leva stran, se ne sklada s tem, kar smo ugotovili. Zakaj mislimo, da zrcalo zamenja desno in levo stran? Zakaj se *zdita* leva in desna stran slike zamenjani? Tega ne more pojasniti samo fizika. Razlaga je povezana s posebnostmi naših možganov, ki obdelajo to, kar zaznajo oči. Ploskovno sliko, ki jo da zrcalo, primerjajo s prejšnjimi izkušnjami. Zasukati se moramo za 180° okoli osi, ki je vzporedna z zrcalom, če želimo videti predmet.

Slika 3. Robov kocke ne moremo prevesti v njihovo sliko v zrcalu s sukanjem. Robovi x, y, z sestavljajo spočetka in po zasukih desni koordinatni sistem (d), robovi slike x', y', z' pa levega (l).

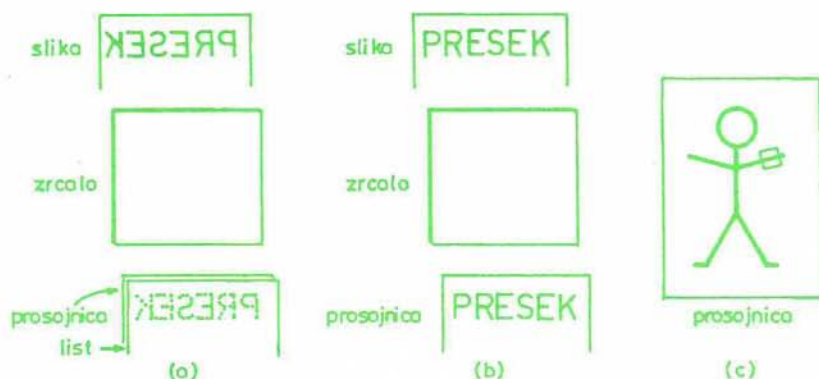


Slika 4. Glava s prečo in njena slika v zrcalu. Risba je vzeta iz članka E.C.Horsfielda *Perception and the lateral inversion fallacy*, European Journal of Physics 12 (1991) 207. Članku je posvetil urednik John Maddox uvodnik *The semantics of plane-mirror inversion* v Nature 353 (1991) 791.

Na državni univerzi v San Diegu v ZDA znajo prepričati študente, da zrcalo ne zamenja leve in desne strani. O tem so poročali I. Galili, F. Goldberg in S. Bendall v članku *Some reflections on plan mirrors and images* (Nekaj razmišljanj o ravnih zrcalnih in slikah), *The Physics Teacher* **30** (1990) 70.

Na prosojnico napišimo PRESEK in jo pripnemo na list papirja. Najprej obrnimo prosojnico proti študentom in nato proti zrcalu. Študenti bodo rekli, da zrcalo zamenja levo in desno stran (slika 5a). Nato obrnimo prosojnico zopet proti študentom in odstranimo papir. Zdaj se napis PRESEK sklada s svojo sliko (slika 5b). Prejšnjo sliko dobimo, ko zasučemo prosojnico za 180° okoli navpične osi.

Nato obrnemo proti zrcalu dlan desne roke. Zrcalna slika ustreza dlani leve roke. Kako to, ko pa zrcalo ne zamenja leve in desne strani? Na prosojnico narišemo možica z veliko uro na eni roki (slika 5c). Ali ima možic uro na desni ali na levi? Odvisno od tega, ali gleda nas ali zrcalo. Naj gleda zrcalo, ko ima uro na levi roki. Zrcalna slika ima uro na desni, čeprav je to seveda še vedo možiceva leva roka. Ti poskusi prepričajo študente, da spremeni zrcalo smer, ki je pravokotna na zrcalo, kot smo ugotovili. Pri taki preslikavi pa se spremeni *ročnost*: leva roka preide v desno, a ostane leva roka možica. Besedi levo in desno uporabljamo v dveh pomenih. Najprej z njima opišemo lego glede na opazovalca in nato lego dela predmeta, to je uro, glede na druge dele predmeta.



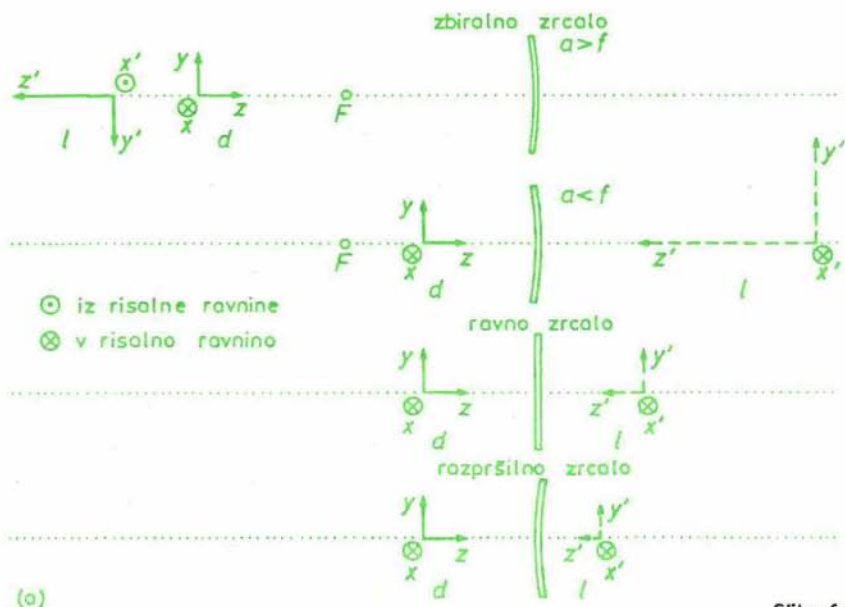
Slika 5. Opazovalec gleda v zrcalu napis PRESEK (a), opazovalec gleda v zrcalu napis PRESEK na prosojnici (b) in možic z uro (c).

Matematik odpravi ravno zrcalo na kratko. Zrcaljenje (na eni osi ali na treh oseh) je liha preslikava, ki zamenja levo in desno, zasuk za 180° pa soda, ki ne zamenja levo in desno. Sestava obeh preslikav je liha preslikava. Pri tem zadeva levo in desno (po fizikovo) zgolj lego delov predmeta glede na druge dele.

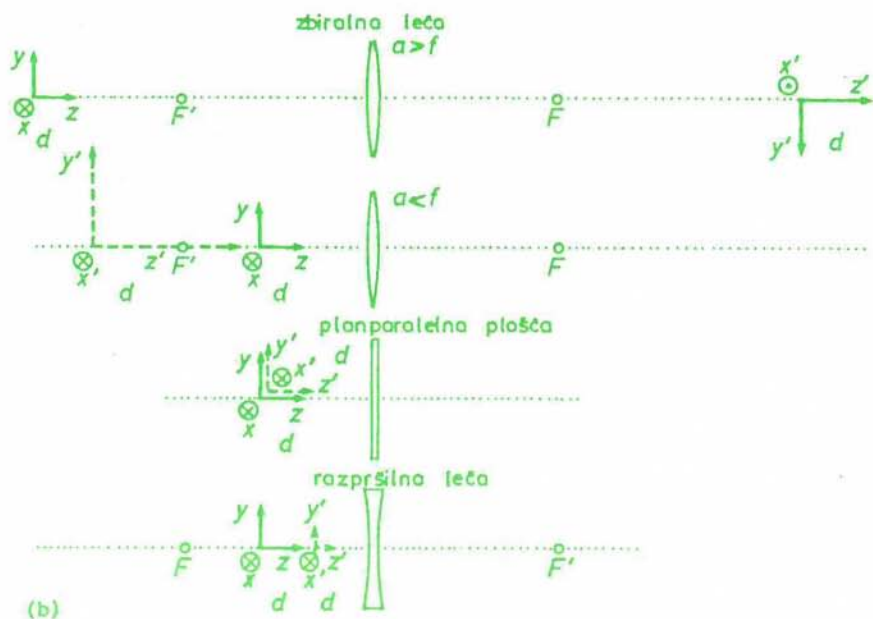
Mislím, da sloni odgovor [na vprašanje, zakaj se zdi levo in desno na zrcalni sliki zamenjano] na dveh prepletenih ugotovitvah: (1) Zrcalo prevede desno v levo, kakor opiše članek, s tem, da spremeni smer ene izmed treh pravokotnih osi glede na drugi dve. Imamo dele telesa kot roke, noge, ušesa z lastnostjo ročnosti, ki jo zrcalo zamenja. (2) Imamo simetrijsko ravnino in levo in desno sta določeni glede na naša dva dela. Mi, ne zrcalo, imamo odlikovano smer. (Za telesa brez take simetrije je vprašanje, ali zrcalo zamenja levo in desno, brez pomena ali kvečjemu semantično [semantika je nauk o pomenu besed]). Na primer, zrcalno sliko kompasa lahko opišemo ali zasukano okoli smeri sever-jug ali okoli smeri vzhod-zahod, o levem in desnem ne razpravljamo. Splošneje lahko rečemo, da zaporedje točk iz smeri urnega kazalca preide v smer nasproti urnega kazalca.

Th.H.Ansbacher, *Left-right semantics*, The Physics Teacher **31** (1992) 70

Do podobnega sklepa kot pri ravnem zrcalu pridemo tudi pri ukrivljenih zrcalih. Pri lečah, pri katerih ni odboja, je drugače (slika 6). Tudi sicer je koristno upoštevati trirazsežne predmete, ker navadno obravnavamo samo slike daljic, ki so pravokotne na optično os.



Slika 6a.



Slika 6. Slike robov kocke pri zbiralnem, ravnem in razpršilnem zrcalu (slika (a) na prejšnji strani) in pri zbiralni leči, planparalelni ploščici in razpršilni leči (b). Pri zrcalih je ravno zrcalo na prehodu od zbiralnih k razpršilnim, pri tankih lečah prevzame to vlogo planparalelna ploščica. Razdalja slike in predmeta a in b sta povezani z enačbo $b = a / [(a/f) - 1]$, v kateri je f goriščna razdalja. Za višino slike velja $y' = y / [(a/f) - 1]$, če je y višina predmeta (pravokotna na optično os). Dolžino slike v smeri optične osi dobimo kot $\Delta b = (a + \Delta a) / [(a + \Delta a)/f - 1] - a / (a/f - 1)$. Za zbiralno zrcalo in lečo je $f > 0$, za ravno zrcalo in planparalelno ploščico $1/f = 0$ in za razpršilno zrcalo in lečo $f < 0$. Pri zrcalu ustreza pozitivna razdalja b obrnjeni pravi sliki na isti strani zrcala kot predmet, negativna pa pokončni navidezni sliki na nasprotni strani. Pri leči ustreza pozitivna razdalja b obrnjeni pravi sliki na nasprotni strani zrcala kot predmet in negativna pokončni navidezni sliki na isti strani.

Iz vsega tega izhajajo še pomembna splošna ugotovitve. Naravo spoznavamo prek čutnih zaznav, ki jim, kot je znano, ne smemo preveč zaupati. Ravno zrcalo nam je pokazalo, da ne smemo vedno zaupati niti prepričanju na osnovi zaznav, ki smo jih prej vložili v spomin. Pri spoznavanju narave si ne pomagamo samo s poskusi in računanjem, ampak tudi z jezikom in logiko, v katero so vpletene tudi nazorne predstave in prepričanje.

Janez Strnad

18. IZBIRNO TEKMOVANJE SREDNJEŠOLCEV IZ MATEMATIKE

Za udeležbo na državnem tekmovanju iz matematike so morali dijaki srednjih šol streti kar nekaj orehov. Z zadnjim prgiščem le-teh so se spoprijeli 14. marca letos. Kako trdi so bili ti orehi, pa naj presodijo bralci sami.

Prvi letnik

1. Dokaži, da enačba $(3x + y)^2 + y^2 = 1111$ nima celoštevilskih rešitev.
2. Katera od nič različna realna števila x , y in z zadoščajo neenačbam:
 $\frac{1}{x}yz < -x + y + z$, $\frac{1}{y}zx < -y + z + x$ in $\frac{1}{z}xy < -z + x + y$?
3. Naj bo AB hipotenuza pravokotnega trikotnika $\triangle ABC$. Za točko D zunaj trikotnika naj velja $\angle DAB = \angle DCA = \frac{\pi}{4}$. Izrazi ploščino trikotnika $\triangle ADC$ z dolžinami stranic trikotnika $\triangle ABC$.
4. V levem spodnjem polju šahovnice stoji trdnjava. Dva igralca jo izmenoma premikata. Igralec na potezi mora premakniti trdnjavo ali desno ali navzgor za vsaj eno polje. Kateri igralec lahko vedno zmagaja, če izgubi tisti, ki premakne trdnjavo v desno zgornje polje?

Drugi letnik

1. Ogljišče A ostrokotnega trikotnika $\triangle ABC$ naj bo enako oddaljeno od višinske točke in od središča trikotniku očrtanega kroga. Izračunaj kot $\angle BAC$.
2. Nariši graf funkcije $f(x) = \frac{2x}{\sqrt{1 - (\frac{1-x^2}{1+x^2})^2}}$.
3. V notranjosti pravokotnega trikotnika $\triangle ABC$ s katetama $\overline{BC} = a$ in $\overline{AC} = b$ izberemo tako točko T , da imajo trikotniki $\triangle ABT$, $\triangle BCT$ in $\triangle CAT$ enake ploščine.
 Dokaži, da je $\text{ctg } \angle ATB = -\frac{2}{3}(\frac{a}{b} + \frac{b}{a})$.
4. Ali lahko na robove tetraedra razporedimo števila od 1 do 6 tako, da so vsote števil s stranic vsake mejne ploskve enake?

Tretji letnik

1. Izračunaj prostornino pokončne tristrane piramide $ABCD$ z vrhom D in $\angle ADB = \frac{\pi}{2}$. Prostornino izrazi s pomočjo kota $\angle ACB = \varphi$, dolžine roba $\overline{CD} = d$ in ploščine p osnovne ploskve piramide. (Piramida je pokončna natanko tedaj, ko ima vse stranske robove enako dolge.)
2. Poišči vse rešitve enačbe $3x^3 + ax^2 + bx - 10 = 0$, če veš, da sta števili a in b racionalni in je $2 - \sqrt{2}$ rešitev te enačbe.
3. Ali obstaja polinom p s celoštevilskimi koeficienti, da velja $p(2) = 4$ in $p(6) = 6$?
4. Nariši graf funkcije $f(x) = \log(\operatorname{tg}^2 x + 1) + \log(1 + \cos 2x)$.

Četrty letnik

1. Izračunaj vsoto prvih 17 členov aritmetičnega zaporedja $a_1, a_2, a_3, \dots$, če veš, da velja $a_4 + a_8 + a_{11} + a_{13} = 16$.
2. Naj bo 999 števek 1000 mestnega števila enakih 5. Dokaži, da to število ne more biti popolni kvadrat.
3. Naj za funkcijo $f: \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{R}$ velja

$$f(1) + 2f(2) + 3f(3) + \dots + nf(n) = n(n+1)f(n) \quad \text{za } n \geq 2$$

in $f(1) = 1$. Določi $f(1992)$.

4. Označimo z F tisto gorišče elipse $\frac{x^2}{144} + \frac{y^2}{169} = 1$, ki leži bližje premici $5y = 169$. Naj bo T poljubna točka na elipsi in T' pravokotna projekcija točke T na dano premico. Izračunaj razmerje razdalj $d(F, T)$ in $d(T, T')$.

Matjaž Željko

NALOGA IZ ŠTEVILSKIH SESTAVOV

Za katere pare a in b velja $11_{(a)} \cdot 22_{(a+1)} = 44_{(b)}$.

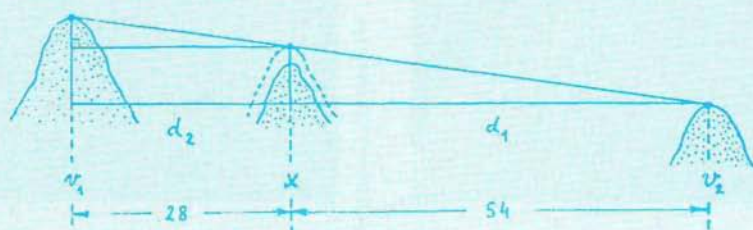
Borut Čampelj

NAGRADNA NALOGA KANIN S KOČNE

Andrej se odpravlja na 2540 metrov visoki vrh Kočne nad Jezerskim, odkoder namerava fotografirati Julijce. S pomočjo zemljevida skuša ugotoviti, če bo lahko ujel v kamero tudi 2587 metrov visoki Kanin, ki leži skoraj natančno proti zahodu z vrha Kočne. Opazil je, da utegne zapreti pogled nanj 2568 metrov visoki Kanjavec, saj leži prav med obema vrhovoma. Najprej izmeri razdalji

Kanin – Kanjavec: 28 km, Kanjavec – Kočna: 54 km

in nariše skico.



Nato računa višino, ki bi na mestu Kanjavca še omogočala pogled s Kočne na Kanin. Račun nekoliko posploši in si pomaga s Talesovim izrekom o sorazmerjih. Iz enakosti

$$(x - v_2) : d_1 = (v_1 - v_2) : (d_1 + d_2)$$

kaj hitro izračuna iskano nadmorsko višino

$$x = \frac{v_1 d_1 + v_2 d_2}{d_1 + d_2}.$$

V konkretnem primeru izrazi razdalje v kilometrih

$$v_1 = 2.587, v_2 = 2.541, d_1 = 54, d_2 = 28$$

(fotografski aparat postavi 1 meter nad vrh Kočne) in dobi $x = 2.5712 \dots$, torej dobre 3 metre več kot je visok Kanjavec. Od tod razbere, da bo v jasnem vremenu z ustrezno povečavo ujel v objektiv tudi vrh Kanina. Ali sklepa pravilno?

Odgovore pošljite v naše uredništvo najkasneje mesec dni po izidu te številke Preseka.

Boris Lavrič



(a)

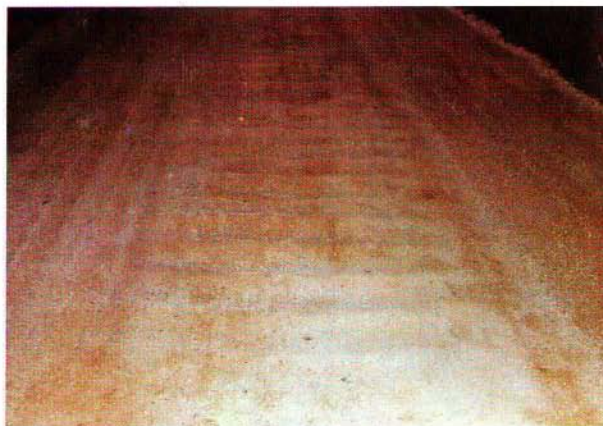
Slika 1. Interferenčne proge pri kapilarnih valovih na dveh ovirah.



(b)



Slika 2. Vzorec, ki nastane pri srečanju valov za ovirama.



Slika A. Valovita makadamska cesta.