

P
R
E
S
E
K



*Oil Painting by
Loran Speck
Carmel, California*

PRESEK - list za mlade matematike, fizike, astronome in računalnike
20. letnik, leto 1992/93, številka 2, strani 65-128

VSEBINA

RAČUNALNIŠTVO	Računalniki in umetnost (Matija Lokar)	65
	Največja luknja (Martin Juvan)	78-84
FIZIKA	Potapljanje (Mitja Slavinec)	66-70
	Šumenje vode v kotličku (Janez Strnad)	92-95
	Ohlajanje in zmrzovanje vode (Zlatko Bradač, Jure Dobnikar)	98-103
MATEMATIKA	Lemoinovna točka trikotnika (Darjo Felda)	72-77
	Ornamenti in grupe (Milena Strnad)	104-110
	Uporaba kompleksnih števil v ravninski geometriji - drugi del (Matjaž Željko)	116-119
	Uporaba ostankov pri problemih iz teorije števil (Borut Zalar)	120-123
ASTRONOMIJA	Nenavadno Galilejevo opazovanje (Marijan Prosén)	86-88
TEKMOVANJA	8. šolsko tekmovanje iz matematike za srednješolce (Darjo Felda)	111-112
NALOGE	Naloge za ogrevanje (Aleksander Potočnik)	124-126
	Skriti datum (Marija Vencelj)	70
	Sprehajanje po krožnici (Marko Lovrečič Saražin)	71
	Kongres v Pragi (Borut Zalar)	77
	Enostavni plašči (Boris Lavrič)	128
	Naloge za najmlajše bralce (Borut Zalar)	III
RAZVEDRILO	Pisma bralcev (Peter Petek, Darko Dominko)	90-91
	Križanka Nobelovi nagradenci za fiziko II (Marko Bokalič) ..	96-97
REŠITVE NALOG	Pravokotni večkotniki - s str. 51 (Marija Vencelj)	71
	Dve igri s števili - s str. 5 (Dušan Murovec)	84-85
	Dve pisemci - dve uganki - s str. 60 (Miha Mohor)	85
	Popolne potence - s str. 23 (Boris Lavrič)	89-90
	Številska križanka - s str. 52 (Stavra V. Radojković - prev. in pril. Bojan Hvala)	110
	Preničlana števila - s str. 59 (Boris Lavrič)	113-115
	Križanka 190. letnica smrti slavnega matematika - s str. 32 (Marko Bokalič)	115
	Poišči osnovi - s str. 41 (Marija Vencelj)	123
	Trikotnik v kvadratu - s str. 23 (Boris Lavrič)	126-128
NOVE KNJIGE	Prosen M., Orientacija (Bogdan Kilar)	88-89
NA OVITKU	Fotografije slik in skulptur, katerih skupni imenovalec je računalniški trdi disk	I, IV

RAČUNALNIKI IN UMETNOST

Tako kot na ostala področja vplivajo računalniki tudi na umetnost. Tu ne mislimo le na pisatelje in pesnike, katerih ustvarjanje si brez urejevalnikov besedil danes že kar težko predstavljamo. Številni glasbeniki uporabljajo ustrezno opremljene računalnike kot pripomoček pri skladanju, ustvarjanju novih zvokov, ... V slikarstvu se razvija prav posebna smer — slikanje z računalnikom. Kot pripomoček se računalnik pojavlja tudi v video umetnosti, fotografiji, da o vplivu računalnikov na film sploh ne govorimo. Obstajajo že filmi, ki so jih ustvarili povsem s pomočjo računalnikov — od prikaza okolja do gibanja oseb.

Računalniki pa so z umetnostjo povezani tudi drugače. Tako si na ovitku tega Preseka lahko ogledate nekaj slik in skulptur, katerih skupni imenovalec je trdi disk. Ta majhna škatla, v katero lahko spravimo vsebino vseh Presekov od praPreseka pa do danes, pa še bi ostal prostor, je navdihnila več umetnikov. Slike njihovih umetnin uporablja eden največjih proizvajalcev trdih diskov, firma Seagate, za reklamiranje svojih proizvodov.

Matija Lokar

PRESEK

list za mlade matematike, fizike, astronome in računalnikarje
20. letnik, šolsko leto 1992/93, številka 2, strani 65 – 128

UREDNIŠKI ODBOR: Vladimir Batagelj, Tanja Bečan (jezikovni pregled), Dušica Boben (oblikovanje teksta), Mirko Dobovišek (glavni urednik), Vilko Domajnko, Darjo Felda (tekmovanja), Bojan Golli, Marjan Hribar, Martin Juvan (računalništvo), Sandi Klavžar, Edvard Kramar, Boris Lavrič, Andrej Likar (fizika), Matija Lokar, Franci Oblak, Peter Petek, Pavla Ranzinger (astronomija), Marjan Smerke (svetovalec za fotografijo), Miha Štalec (risbe), Ciril Velkovrh (nove knjige, novice), Marija Vencelj (matematika, odgovorna urednica).

Dopise pošiljajte in list naročajte na naslov: Društvo matematikov, fizikov in astronomov Slovenije - Podružnica Ljubljana - Komisija za tisk, Presek, Jadranska c. 19, 61111 Ljubljana, p.p. 64, tel. (061) 265-061/53, št. žiro računa 50101-678-47233. Naročnina za šolsko leto 1992/93, vplačana po 1.11.1992, je za posamezne naročnike **800 SIT**, za skupinska naročila šol **640 SIT**, posamezna številka **160 SIT**, za tujino 12000 LIT.

List sofinancirajo MZT, MŠŠ in MK

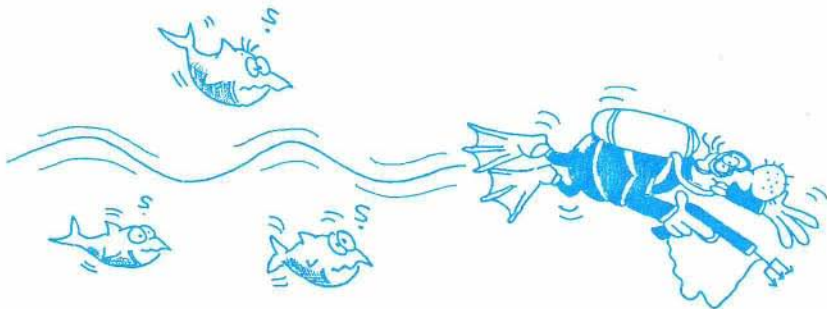
Ofset tisk DELO - Tiskarna, Ljubljana

Tekst je oblikovan z računalnikom SLIM 286, ALTECH, Ljubljana

© 1992 Društvo matematikov, fizikov in astronomov Slovenije – 1127

POTAPLJANJE

Če se nam kaka dragocena stvar potopi v tako globoko vodo, da več ne dosežemo dna, potem priskočijo na pomoč potapljači. Srečamo se s potapljanjem, ki pa ni le dvigovanje predmetov na površino, ampak tudi raziskovalna dejavnost in zanimiv šport. Oglejmo si nekaj fizikalnih zakonitosti, ki spremljajo potapljanje.



Slika 1.

Osnovni problem pri potapljanju je zrak. Potapljač ga lahko stisnjenega po cevi dobiva s površine, ali pa ga v jeklenki nese s sabo.

Na potapljača, ki se je potopil do globine h , deluje tlak:

$$p(h) = p_0 + \rho gh, \quad (1)$$

kjer je p_0 je zračni tlak na gladini, ρ pa gostota tekočine, v kateri se potaplja. V vodi torej na vsakih deset metrov globine tlak naraste za 1 bar. Tlak v potapljačevem telesu mora biti enak tlaku okolice, saj bi ga drugače zmečkalo. Ocenimo, kako globoko bi lahko po cevki dihal površinski zrak. Največjo tlačno razliko, ki jo lahko ustvarijo mišice prsnega koša, ocenimo na 0,2b in iz enačbe (1) izračunamo, da bi se s cevko lahko potapljali le do globine 2 m. Že na tej globini bi zelo težko dihal, globlje pa bi bila sila na potapljača zaradi povečanega tlaka okolice tako velika, da sploh ne bi mogel več vdihniti. Potapljač mora torej dobivati zrak, ki je pod tlakom, enakim tlaku okolice. To dosežemo tako, da mu po cevi s črpalko ali kompresorjem zrak tlačimo v globino, ali pa na jeklenko montiramo hidrostatski regulator, ki poskrbi, da je tlak zraka, ki ga diha, vedno enak tlaku okolice. Dihanje preko cevi se je uveljavilo predvsem pri raznih podvodnih delih, ki se po navadi opravljajo na majhnem prostoru, trajajo pa dolgo časa.

Bolj zanimivo je samostojno potapljanje. Tudi tu bi radi ostali pod vodo čim več časa, to pa je odvisno od velikosti jeklenke in od tlaka zraka v njej. Jeklenka, ki zdrži visok tlak, mora imeti debele stene, zato pa je težka in draga. Uveljavile so se jeklenke, ki zdržijo tlak do 200b in imajo prostornino od 10 do 20 litrov. Z večjimi jeklenkami bi bili potapljači preveč okorni in neokretni.

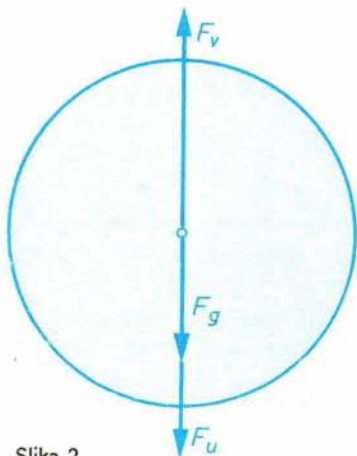
Ocenimo, kako dolgo smo lahko s tako jeklenko pod vodo. Zaradi lažje predstave bomo zrak iz jeklenke v mislih izotermno, to je pri konstantni temperaturi, razpeli toliko, da bo njegov tlak enak tlaku na gladini. Po Boylovem zakonu je

$$p_1 V_1 = p_0 V_0, \quad (2)$$

kjer je p_1 tlak v jeklenki, V_1 prostornina jeklenke, V_0 pa prostornina razpetega zraka. Za dvajset litrsko jeklenko napolnjeno do tlaka 200b dobimo torej 4000 litrov razpetega zraka. Človek porabi v povprečju 20 litrov zraka na minuto ne glede na tlak, torej bi zrak v jeklenki zadoščal za 200 minut dihanja na površini. Potapljač pa v vodi diha zrak pod tlakom okolice, kar je v globini desetih metrov 2b. To pomeni, da bi lahko na tej globini s tem zrakom dihal le 100 minut. Čim globlje se potapljač potopi, tem prej porabi zrak, ki ga ima v jeklenki. Na globini 40m bi torej lahko bil le 40 minut.

Toliko časa se tako globoko ne sme zadrževati, ker bi to bilo nevarno za njegovo zdravje. V krvi imamo raztopljene različne pline, največ dušika. Količina plina, ki se lahko raztopi v tekočini, je odvisna od tlaka tekočine. Potapljač, ki dolgo časa diha zrak pod povečanim tlakom, ima v krvi razto-

pljenega dosti več dušika, kot bi ga imel na površini. Če bi se po daljšem zadrževanju v veliki globini hitro dvignil na površino, se presežek dušika ne bi mogel dovolj hitro izločiti iz krvi v telo. V žilah bi nastali plinski mehurčki, ki bi ustavili krvni obtok, in potapljanje bi se tragično končalo. Po daljšem potapljanju v velikih globinah se mora potapljač počasi dvigniti na površino in se še zadrževati na manjših globinah (izvajati tako imenovano dekompresijo), da se lahko dušik brez plinskih

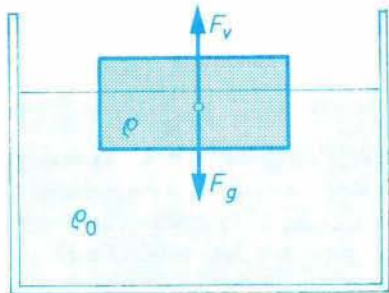


Slika 2.

mehurčkov izloči iz krvi. Velja pravilo, da potapljanje ne bo nevarno, če bo vsota globine, izražene v metrih, in časa, izraženega v minutah, manjša od 50. To pomeni, da se na globini 40 m lahko brez nevarnosti zadržujemo le 10 minut. Če je potapljanje daljše, mora potapljač upoštevati podatke posebnih dekompresijskih tabel o tem, koliko časa se mora pri dvigovanju zadrževati na posamezni globini. Vsako potapljanje mora potapljač vnaprej načrtovati, da mu ne zmanjka zraka za dekompresijske postanke na manjših globinah.

Priporočana hitrost potapljanja ali dviganja je okrog 20m na minuto. Potapljači nimajo merilnikov hitrosti, zato si pomagajo z mehurčki izdihanega zraka. Na zračni mehurček v vodi deluje sila vzgona, ki kaže navzgor, sili teže zraka in vodnega upora pa kažeta navzdol (slika 2). Silo vodnega upora izračunamo iz enačbe:

$$F_u = 6\pi\eta r v, \quad (3)$$



Slika 3.

kjer je η koeficient viskoznosti za vodo, r polmer mehurčka, v pa je hitrost, s katero se dviga. Izenačimo vse tri sile, ki delujejo na mehurček:

$$\frac{\rho_0 g 4\pi r^3}{3} = \frac{\rho g 4\pi r^3}{3} + 6\pi\eta r v. \quad (4)$$

Z ρ_0 smo, kot na začetku, označili gostoto vode, z ρ pa gostoto zraka. Iz enačbe (4) sledi:

$$r = \sqrt{\frac{9\eta v}{2g(\rho_0 - \rho)}}. \quad (5)$$

Mehurčki, ki se dvigajo s hitrostjo 20m/min, imajo polmer okrog milimetra. Potapljači se torej lahko orientirajo tako, da se dvigajo tako hitro, kot se dvigajo najmanjši mehurčki izdihanega zraka.

Od dihanja se preselimo k plavanju. Na potopljeno telo z maso m deluje sila teže $F_g = mg$, ki kaže navzdol, in sila vzgona tekočine F_v , ki kaže navzgor (slika 3). Slednjo izračunamo iz enačbe:

$$F_v = \rho_0 g V, \quad (6)$$

kjer je ρ_0 gostota tekočine, V pa prostornina izpodrinjene tekočine. Telo se bo potopilo, če bo sila vzgona manjša od sile teže telesa:

$$\rho_0 g V < mg = \rho g V. \quad (7)$$

Tu smo z ρ označili povprečno gostoto telesa. Iz gornje enačbe razberemo pogoj za plavanje: $\rho_0 > \rho$. Potapljač se najlažje potaplja ali dviga, če je sila vzgona enaka sili njegove teže. Tedaj pravimo, da ima potapljač nevtralno plovnost. Če potapljač nima nevtralne plovnosti, ga ves čas dviga ali spušča, kar mora preprečevati s plavanjem rahlo navzgor ali navzdol. Tako potapljanje pa je dosti bolj utrudljivo kot sicer.

Plovnost potapljača se spreminja z dihanjem. Ko potapljač vdihne, ima pozitivno plovnost, ko izdihne, pa negativno. Med plavanjem zato niha gor in dol (slika 1). Res pa lahko z zadrževanjem zraka nekoliko pripomore k uravnavanju plovnosti.

Na plovnost vpliva tudi porabljeni zrak. Opazujmo potapljača z jeklenko, ki je na začetku polna. Ko pod vodo diha, se mu jeklenka prazni, ob nespremenjeni prostornini postaja lažja in voda začne potapljača dvigovati. Ko porabi ves zrak, je jeklenka lažja približno za 5kg, tako da se sila vzgona



Slika 4.

poveča za 50N. To je še posebej neprijetno, ker se mora prav na koncu zaradi dekompresije zadrževati pod površino.

Plovnost se potapljaču spreminja tudi z globino. Potapljaška obleka je narejena iz nekaj milimetrov debele mehke snovi. Ko z globino tlak narašča, postaja obleka zmeraj tanjša in potapljač ima čedalje bolj negativno plovnost.

Potapljači rešujejo te težave tako, da poskrbijo na začetku za nekoliko negativno plovnost, med potapljanjem pa pobirajo predmete z dna in tako nadomestijo težo izdihanega zraka. Najboljša rešitev pa je regulator plovnosti. To je tak rešilni jopič, ki ga lahko napihujemo z zrakom iz jeklenke. Na začetku ga ima potapljač napihnjenega, proti koncu pa zrak izpušča.

Z zrakom si potapljači pomagajo tudi pri dvigovanju težkih predmetov. Pod vodo nanje privežejo vreče, ki jim pravijo podvodna padala (slika 4). Podobna so balonom za letenje. Potapljači padala pod vodo polnijo z zrakom, dokler sila vzgona ne dvigne potopljenega predmeta. Najenostavnejše improvizirano padalo je kar narobe obrnjena polivinilna vrečka. Le lukenj ne sme imeti. Pomembno pri padalih je, da morajo biti spodaj odprta, tako da lahko zrak uhaja ven. Ko se padalo dviga, tlak pada in zrak v padalu se zato širi. Če bi ne mogel uhajati, bi padalo raztrgalo.

To morajo upoštevati tudi potapljači, ki se morajo zaradi okvare opreme kar se da hitro dvigniti na površino. Denimo, da se je potapljaču 10m globoko pokvaril ustnik, tako da mora hitro izplavati. V pljučih ima okrog 5 litrov zraka pod tlakom 2b. Na površini je tlak 1b, in če potapljač med dvigovanjem ne bi izdihoval, bi se zrak razpel na 10 litrov, kar bi bilo usodno ne le za pljuča, ampak bi poškodovalo tudi prsni koš. Take nesreče so se tudi res že zgodile. Torej pri tem morajo imeti potapljači odprta usta, da lahko zrak, ki se širi, nemoteno uhaja iz pljuč.

Mitja Slavinec

SKRITI DATUM

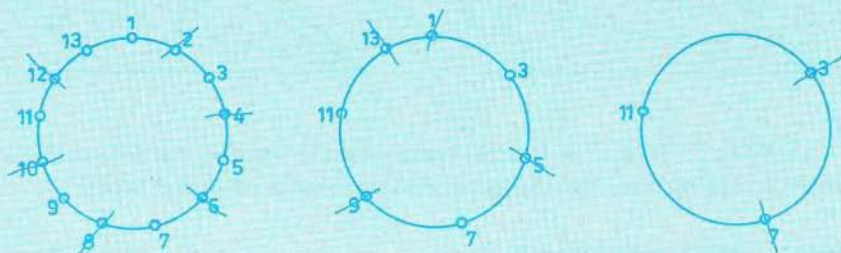
Številski krog na desni skriva rojstni datum (dan, mesec, leto) znanega Slovence, ki je umrl pred 190 leti. Kdaj se je mož rodil? Poznate tudi njegovo ime in veste, kaj je bil?

Marija Vencelj



SPREHAJANJE PO KROŽNICI

Na poljubni krožnici v ravnini si izberimo 13 točk in vsako točko označimo z zaporedno številko od 1 do 13, kot kaže slika. Postavimo se v točko 1 in se nato sprehodimo po krožnici. Pri tem vsako drugo številko zberišemo. Natančneje: enica ostane, dvojko zberišemo, trojko pustimo, ..., 12 zberišemo in 13 ostane. S tem postopkom nadaljujemo v naslednjem krogu, pri čemer upoštevamo le številke, ki še niso zbrisane: 13 ostane, 1 zberišemo, 3 pustimo itn., dokler nam na koncu ne ostane natanko eno število, in sicer 11. Imenujmo ga *krožni ostanek števila 13*.



Tako! Kaj pa, če namesto 13-ih točk oštevilčimo 2001 točko? Koliko je krožni ostanek števila 2001? V tem primeru bi bil zgoraj opisani postopek obupno dolg, toda matematik se ne ustraši in mirne duše nalogo posploši: "Vzemimo poljubno naravno število n in označimo njegov krožni ostanek npr. z a_n . Kaj lahko povemo o a_n ? Ali se ga dá najti kako drugače, enostavneje?" Za majhne n krožnega ostanka ni težko dobiti. Vsak lahko sam preveri, da je $a_1 = 1$, $a_2 = 1$, $a_3 = 3$, itd. Toda prava rešitev naloge bi bila splošna formula za a_n . Bralce vabimo, da jo poskusijo najti sami.

Marko Lovrečič Saražin

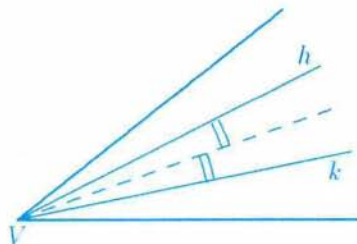
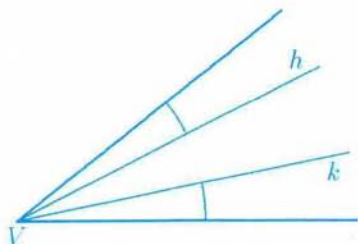
PRAVOKOTNI VEČKOTNIKI - Rešitev s str. 51

Štirikotnik ima lahko 0, 1, 2 ali 4 prave kote. Za $n > 4$ ima konveksni n -kotnik lahko le 0, 1, 2, 3 prave notranje kote. Ne more jih imeti več, ker je vsota zunanjih kotov n -kotnika za vsak n enaka 2π .

Marija Vencelj

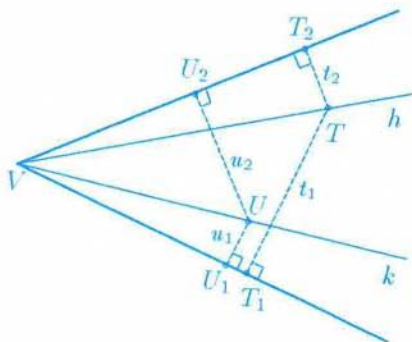
LEMOINOVA TOČKA TRIKOTNIKA

Pravimo, da sta poltraka h in k s skupnim začetkom v vrhu V danega kota *izogonalna*, če je simetrala danega kota tudi simetrala kota $\sphericalangle(h, k)$. Večkrat uporabljamo krajši izraz *izogonalna* namesto *izogonalni poltrak*.



Trditev 1: Točki T in U ležita vsaka na eni izmed izogonal kota natanko takrat, ko sta razmerji njunih razdalj do krakov kota recipročni številci.

Dokaz: Označimo razdalje s t_1, t_2, u_1, u_2 (kot na sliki) in naj velja $\frac{u_1}{u_2} = \frac{t_2}{t_1}$. Štirikotnika VU_1UU_2 in VT_1TT_2 sta tetivna (imata po dva nasproti ležeča prava kota) in $\sphericalangle U_1UU_2 = \sphericalangle T_1TT_2$, saj je kot z vrhom V skupen. Od tod pa zaradi predpostavke sledi, da sta trikotnika $\triangle U_1UU_2$ in $\triangle T_1TT_2$ podobna, zato je $\sphericalangle U_1U_2U = \sphericalangle T_1T_2T$. Uporabimo spet tetivnost: kota $\sphericalangle U_1U_2U$ in $\sphericalangle U_1VU$ sta obodna nad istim lokom, zato sta enaka, analogno velja $\sphericalangle T_1T_2T = \sphericalangle T_1VT$. Enakost $\sphericalangle U_1VU = \sphericalangle T_1VT$ pove, da ležita točki T in U vsaka na eni izmed izogonal.

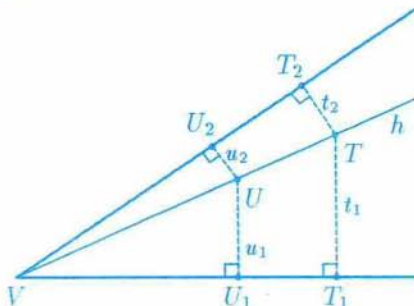


Tudi drugi del dokaza je enostaven. Naj točki T in U ležita vsaka na eni izmed izogonal kota z vrhom V . Tedaj velja $\sphericalangle U_1VU = \sphericalangle T_1VT$. Tako kot prej je zaradi enakosti obodnih kotov nad istim lokom $\sphericalangle U_1VU = \sphericalangle U_1U_2U$ in $\sphericalangle T_1VT = \sphericalangle T_1T_2T$, zaradi skupnega kota z vrhom V v obeh tetivnih štirikotnikih pa še $\sphericalangle U_1UU_2 = \sphericalangle T_1TT_2$. Trikotnika $\triangle U_1UU_2$ in $\triangle T_1TT_2$

sta zato podobna (enaki koti) in velja $\frac{u_1}{u_2} = \frac{t_2}{t_1}$.

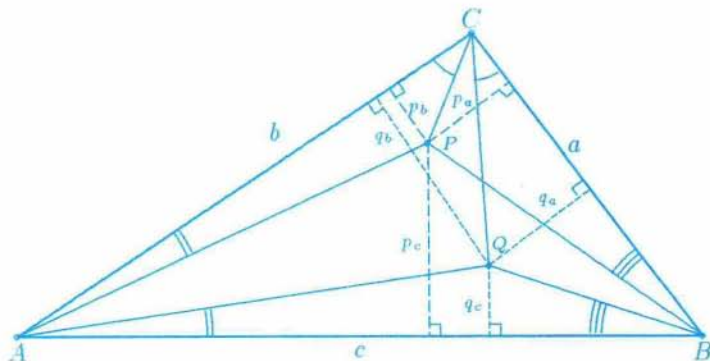
Mimogrede povejmo še, da razmerje razdalj do krakov kota ni odvisno od izbire točke na poltraku. Po Talesovem izreku velja $\frac{u_1}{t_1} = \frac{u_2}{t_2}$

oziroma $\frac{u_1}{u_2} = \frac{t_1}{t_2}$.



Trditve 2: Naj bosta dana trikotnik $\triangle ABC$ in poljubna točka P v njegovi notranjosti. Izogonale k poltrakom $[AP)$, $[BP)$ in $[CP)$ se sekajo v skupni točki Q .

Pravimo, da sta P in Q druga drugi izogonalni točki.

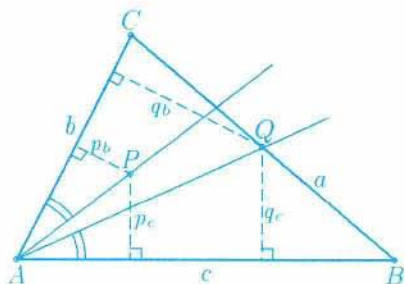


Dokaz: Recimo, da je Q presek izogonal k poltrakoma $[AP)$ in $[BP)$. Potem velja $\frac{p_b}{p_c} = \frac{q_c}{q_b}$, ker je $[AQ)$ izogonalna k poltraku $[AP)$, in $\frac{p_c}{p_a} = \frac{q_a}{q_c}$, ker je $[BQ)$ izogonalna k $[BP)$. Zmnožimo levi in desni strani teh enačb in dobimo $\frac{p_b}{p_a} = \frac{q_a}{q_b}$. Torej je $[CQ)$ izogonalna k $[CP)$, vse tri izogonale se sekajo v Q .

Končno lahko razložimo naslov prispevka:

Definicija: Lemoynova točka je težišču trikotnika izogonalna točka.

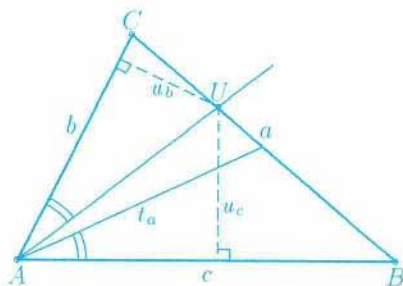
Pokazali smo že, da vsakemu poltraku pripada točno določeno razmerje razdalj njegovih točk od krakov kota (neodvisno od izbire točke na poltraku). Zato se najprej vprašajmo po tem razmerju, ki ga določa poljubna točka P na izogonali težiščnice. Narišimo težiščnico na stranico a in njeno izogonalo. Zaradi lažjega računanja izberimo na težiščnici točko Q , ki je središče stranice a . Trikotnika $\triangle ABQ$ in $\triangle AQC$ sta plosčinsko enaka, zato je $\frac{1}{2}bq_b = \frac{1}{2}cq_c$ oziroma $\frac{b}{c} = \frac{q_c}{q_b}$ in končno $\frac{p_b}{p_c} = \frac{b}{c}$.



Ugotovili smo torej: razmerje razdalj poljubne točke na izogonali težiščnice trikotnika do nosilk priležnih stranic je enako razmerju dolžin teh dveh stranic.

Trditev 3: Izogonala težiščnice deli stranico trikotnika v razmerju kvadratov dolžin drugih dveh stranic.

Dokaz: Ker imata trikotnika $\triangle BUA$ in $\triangle UCA$ enako dolgi višini na stranici BU oziroma UC (ujemata se z višino na stranico BC v trikotniku $\triangle ABC$), je razmerje $\frac{\overline{BU}}{\overline{UC}}$ enako razmerju plosčin teh dveh trikotnikov in lahko zapišemo $\frac{\overline{BU}}{\overline{UC}} = \frac{S_{BUA}}{S_{UCA}} = \frac{\frac{1}{2}cu_c}{\frac{1}{2}bu_b} = \left(\frac{c}{b}\right)\left(\frac{u_c}{u_b}\right)$



Toda $[AU]$ je izogonala težiščnice, zato je $\frac{u_c}{u_b} = \frac{c}{b}$ in $\frac{\overline{BU}}{\overline{UC}} = \frac{c^2}{b^2}$, kar smo želeli pokazati.

Trditev 4: Lemoinova točka leži na poltraku z začetkom v oglišču trikotnika natanko tedaj, ko je razmerje razdalj od poljubne točke na tem poltraku do nosilk stranic, ki se stikata v tem oglišču, enako razmerju dolžin teh dveh stranic.

Dokaz: Eno smer te trditve smo že dokazali pred trditvijo 3, preostane nam še druga. Vzemimo kar točko U , v kateri poltrak seka stranico trikotnika.

Imamo $\frac{u_c}{u_b} = \frac{c}{b}$. Sledi $BU : UC =$

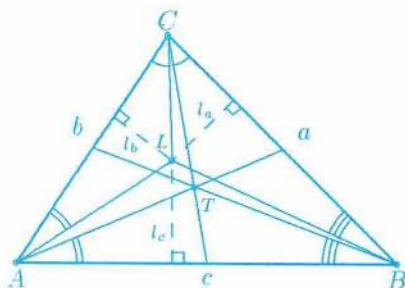
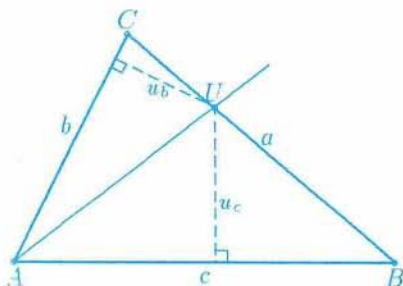
$$= \frac{S_{BUA}}{S_{UCA}} = \frac{\frac{1}{2}cu_c}{\frac{1}{2}bu_b} = \frac{c}{b} \cdot \frac{u_c}{u_b} = \frac{c^2}{b^2}.$$

Seveda samo ena točka na stranici BC deli to stranico v razmerju kvadratov dolžin drugih dveh stranic, zato mora biti po trditvi 3 poltrak $[A, U)$ izogonala težiščnice, na njej pa leži Lemoinova točka.

Ker je Lemoinova točka presečišče vseh treh izogonal težiščnic, so njene razdalje do stranic trikotnika sorazmerne dolžinam stranic:

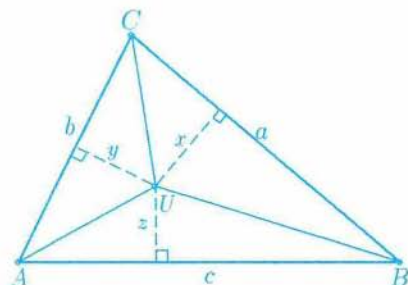
$$l_a : l_b : l_c = a : b : c.$$

Obratno seveda tudi velja: če za neko točko L ugotovimo, da so njene oddaljenosti od stranic trikotnika sorazmerne dolžinam stranic, potem je to Lemoinova točka.



Trditev 5: Lemoinova točka ima med vsemi notranjimi točkami trikotnika najmanjšo vsoto razdalj do trikotnikovih stranic.

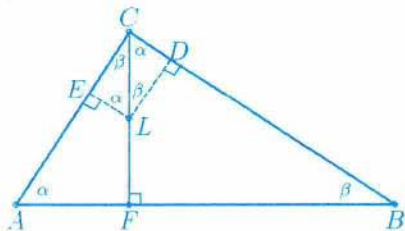
Dokaz: Pomagamo si z identiteto $(x^2 + y^2 + z^2)(a^2 + b^2 + c^2) = (ax + by + cz)^2 + (bx - ay)^2 + (cy - bz)^2 + (cx - az)^2$. Naj bodo a, b, c stranice trikotnika, x, y, z pa razdalje notranje točke do trikotnikovih stranic. Pri danem trikotniku sta $a^2 + b^2 + c^2$ in $ax + by + cz$ konstanti (drugi izraz je enak dvakratni ploščini trikotnika $\triangle ABC$, saj so $\frac{1}{2}ax, \frac{1}{2}by$ in $\frac{1}{2}cz$ ploščine trikotnikov $\triangle BCU, \triangle CAU$ in $\triangle ABU$). Tako je $x^2 + y^2 + z^2$ najmanjši, ko so izrazi $bx - ay, cy - bz$ in $cx - az$ enaki 0.



Od tod pa po vrsti dobimo $\frac{x}{y} = \frac{a}{b}$, $\frac{y}{z} = \frac{b}{c}$ in $\frac{z}{x} = \frac{c}{a}$. Poltraki $[AU)$, $[BU)$ in $[CU)$ so torej izogonale ustreznih težiščnic, U pa Lemoiova točka.

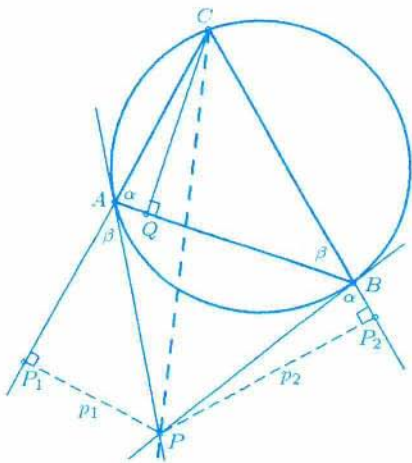
Trditev 6: Lemoiova točka pravokotnega trikotnika razpolavlja višino na hipotenuzo.

Dokaz: V pravokotnem trikotniku $\triangle ABC$ označimo z L razpolovišče višine na hipotenuzo, z F njeno nožišče ter z D in E pravokotni projekciji točke L na stranici BC oziroma AC . Zaradi podobnosti trikotnikov $\triangle LCE$ in $\triangle ABC$ velja $\frac{\overline{LE}}{\overline{LC}} = \frac{\overline{AC}}{\overline{AB}}$ oziroma $\frac{\overline{LE}}{\overline{LF}} = \frac{\overline{AC}}{\overline{AB}}$, kar pomeni, da je $[AL)$ izogonalna težiščnice na BC . Na enak način dobimo, da je $[BL)$ izogonalna težiščnice na AC . Torej je L Lemoiova točka.



Trditev 7: Naj bo P presečišče tangent na očrtano krožnico trikotnika skozi dve oglišči. Poltrak z začetkom v tretjem oglišču skozi P je izogonalna težiščnice iz tega oglišča.

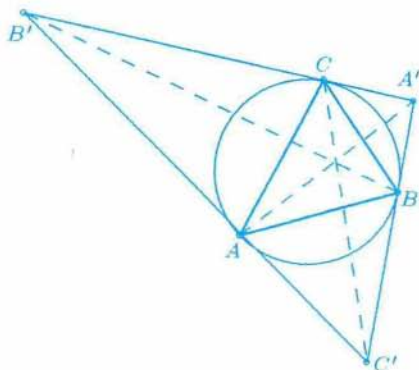
Dokaz: Naj bo Q nožišče višine na stranico AB . Trikotnika $\triangle AP_1P$ in $\triangle BQC$ sta podobna (enaki koti), zato velja $\frac{p_1}{\overline{AP}} = \frac{\overline{QC}}{\overline{BC}}$ ali $p_1 \cdot \overline{BC} = \overline{AP} \cdot \overline{QC}$. Tudi trikotnika $\triangle BP_2P$ in $\triangle AQC$ sta podobna, pa imamo $\frac{p_2}{\overline{BP}} = \frac{\overline{QC}}{\overline{AC}}$ ali $p_2 \cdot \overline{AC} = \overline{BP} \cdot \overline{QC}$. Toda tangentna odseka AP in BP sta enako dolga, zato je $p_1 \cdot \overline{BC} = p_2 \cdot \overline{AC}$ in od tod $\frac{p_1}{p_2} = \frac{\overline{AC}}{\overline{BC}}$. Razmerje razdalj točke P (in zato vsake druge na poltraku



$[CP]$) do nosilk stranic trikotnika je enako razmerju dolžin teh stranic, torej je poltrak $[CP]$ res izogonala ustrezne težiščnice.

Posledica: Danemu trikotniku $\triangle ABC$ očrtajmo krožnico in narišimo tangente v vseh treh ogliščih. Te omejujejo *tangentni trikotnik* $\triangle A'B'C'$. Spomnimo se, da je *Gergonneova točka* trikotnika presečišče zveznic oglišč in dotikališč včrtanega kroga z nasprotnimi stranica-mi. Kot posledico trditve 7 povejmo: Lemoinova točka trikotnika je Gergonneova točka njegovega tangentnega trikotnika.

Za vajo poskusite rešiti naslednji nalogi:



Naloga 1: Iz Lemoinove točke trikotnika $\triangle ABC$ potegnemo pravokotnice na stranice trikotnika in nožišča označimo z A' , B' in C' . Pokaži, da so dolžine stranic trikotnika $\triangle A'B'C'$ v sorazmerju z dolžinami težiščnic trikotnika $\triangle ABC$ in da so koti trikotnika $\triangle A'B'C'$ enaki kotom, pod katerimi se paroma sekajo težiščnice trikotnika $\triangle ABC$.

Naloga 2: Naj bo L Lemoinova točka trikotnika $\triangle ABC$ in naj bodo A' , B' in C' točke, v katerih poltraki $[AL]$, $[BL]$ in $[CL]$ sekajo očrtano krožnico trikotnika. Pokaži, da je L tudi Lemoinova točka trikotnika $\triangle A'B'C'$.

Darjo Felda

KONGRES V PRAGI

V Pragi je bil mednarodni matematični kongres. Pri kosilu je za mizo znane praške gostilne. Pri bobenčku sedelo šest udeležencev kongresa. V vsaki trojici izmed teh šestih matematikov sta bila dva, ki sta se lahko pogovarjala brez tolmača. Dokaži, da so obstajali v tej družbi trije, ki so se lahko pogovorili vsak z vsakim.

Borut Zalar

RAČUNALNIŠTVO

NAJVEČJA LUKNJA

Kontrabantar Prebrisani Pepe je zopet pred velikim poslom. Odločil se je, da bo v temnih nočeh skozi Mračno dolino čez mejo spravljaj dragocen tovor. Toda tudi financarji niso od muh in mu pripravljajo zasede. Ker država ni preveč bogata, plače financarjev pa nizke, se Prebrisani Pepe zlahka dokoplje do razporeda čakajočih financarjev. Takole piše:

Klas Miha 132

Stotin Lojze 62

Tolar Polde 218

:

Na koncu seznama je še pripisano, da financarji čakajo v ravni vrsti, števila pa pomenijo oddaljenost v metrih čakajočih financarjev od desnega roba doline. Financarji tudi vedno postavijo po enega moža na levi in desni rob. Toda Prebrisani Pepe ne bi bil prebrisan, če ne bi poznal še nekaterih drugih podatkov. Tako ve, kako široka je Mračna dolina, pa tudi, da ga v temni noči financarji lahko opazijo le, če se jim približa na manj kot dvajset metrov. Če pa ga opazijo, potem mu ni rešitve, saj jim s tovorom ne more uiti. Ker je Prebrisani Pepe tudi ljubitelj računalnikov, se je odločil, da sestavi program, ki mu bo vsak večer povedal, ali naj se to noč odpravi čez mejo. Sestavil je takle algoritem:

```
program Luknja1;
{ Pove, ali bo imel Pepe delovno noč. }
const
    Max_Fin = 30;                { največje število financarjev }
    Sirina = 666;                { širina Mračne doline }
    Vidljivost = 20;             { Kako daleč vidijo financarji? }
type
    tabela = array [1..Max_Fin] of integer;
    zasedeno = array [1..Sirina] of boolean;
var
    A: tabela;
    Z: zasedeno;
    i,n: integer;
    NajLuknja,TrenLuknja: integer;
begin
    write('Koliko financarjev je to noc na delu : '); readln(n);
    for i:=1 to n do begin                { vnos položajev financarjev }
        write('Položaj ',i,'. financarja : '); readln(A[i]);
    end; {for}
```

```

for i:=1 to Sirina do Z[i]:=false;
for i:=1 to n do
  Z[A[i]]:=true;           { Postavimo financarje na njihova mesta. }
{ Pogledamo, kako veliko luknjo so to noč pustili financarji. }
NajLuknja:=0; TrenLuknja:=1;
for i:=1 to Sirina do
  if not Z[i] then TrenLuknja:=TrenLuknja+1
  else begin
    if TrenLuknja>NajLuknja then NajLuknja:=TrenLuknja;
    TrenLuknja:=1;
  end;
if NajLuknja>2*Vidljivost then           { Ali je luknja dovolj velika? }
  writeln('Nocojsnja noc bo delovna.')
else
  writeln('To noc bos lahko pocival.');
```

readln;

end.

Pa naj bo dovolj zgodbic o kontrabantu in oblasti. Poglejmo raje, s kakšnim problemom smo se pravzaprav srečali. Naj bo dana končna množica števil. Označimo jo z A . Števili iz množice imenujemo *sosednji* (glede na množico A), če med njima po velikosti ni nobenega drugega števila iz množice A . Če pogledamo nekoliko abstraktneje, smo rešili naslednjo nalogo:

Poišči največjo razliko med dvema sosednjima številoma iz množice A .

Množico A predstavimo s tabelo števil, ki pa seveda ni urejena. Ogledali si bomo štiri rešitve gornjega problema:

1. rešitev: Prvo rešitev smo že spoznali. Postopek ni predolg in tudi ne prezapleten, tako da ga zlahka razumemo. Ideja je preprosta. Množico A , ki je najprej predstavljena z neurejeno tabelo števil, predstavimo raje s tabelo logičnih vrednosti, torej tako, kot tudi pascal predstavlja množice. Tak pristop ima tudi veliko pomanjkljivost. Količina dodatnega prostora, ki ga potrebujemo poleg vhodnih podatkov, je odvisna tudi od vrednosti vhodnih podatkov, ne le od njihovega števila. Tako je velikost dodatne logične tabele sorazmerna z razliko med največjim in najmanjšim številom v množici A . Ta razlika pa je lahko zelo velika tudi v primeru, ko je moč množice A majhna. Prav tako je tudi čas, potreben za rešitev problema s tem postopkom, sorazmeren z razliko med največjim in najmanjšim številom v množici. Prva rešitev je tako primerna le za množice, pri katerih je razlika med največjim in

najmanjšim številom majhna. Dodatna pomanjkljivost te rešitve je še, da je ne moremo uporabiti pri množicah realnih števil.

Opisane pomanjkljivosti nas vzpodbudijo, da poskušamo poiskati rešitev, pri kateri bosta količina dodatnega prostora in čas reševanja odvisna le od moči množice A , ne pa tudi od vrednosti samih števil.

Pri programiranju bomo privzeli naslednji deklaraciji:

```
const
  Max_n = 10000;
type
  { Seveda lahko vzamemo tudi celoštevilsko tabelo. }
  tabela = array [1..Max_n] of real;
```

2. rešitev: Ta rešitev se povsem izogne težavam s prostorom, ki smo jih srečali pri prejšnji rešitvi, pa tudi njena časovna zahtevnost je zadovoljiva. Ideja je takale. Za vsak par števil iz množice A pogledamo, če sta števili sosednji, in če sta, je absolutna vrednost njune razlike kandidat za končni rezultat. Trenutno največjo razliko ves čas vodimo v spremenljivki NajLuknja. V njej je na koncu tudi rezultat, ki ga vrne funkcija.

```
function Luknja2(var A: tabela; n: integer): real;
var
  i,j,k: integer;
  NajLuknja: real;
  Sosednji: boolean;
begin { Luknja2 }
  NajLuknja:=0;
  for i:=1 to n-1 do
    for j:=i+1 to n do begin
      { Ali sta števili A[i] in A[j] sosednji? }
      Sosednji:=true;
      k:=1;
      while Sosednji and (k<=n) do begin
        if (A[k]-A[i])*(A[k]-A[j])<0 then Sosednji:=false;
        k:=k+1;
      end; { while }
      if Sosednji and (abs(A[i]-A[j]))>NajLuknja then
        NajLuknja:=abs(A[i]-A[j]);
      end; { for }
    end; { for }
  Luknja2:=NajLuknja;
end; { Luknja2 }
```

Kaj ugotovimo s pogojem

$$(A[k]-A[i])*(A[k]-A[j])<0 ,$$

se sprašujete? Ta pogoj je izpolnjen natanko tedaj, ko število $A[k]$ leži strogo med številoma $A[i]$ in $A[j]$. Ta rešitev je varčna z dodatnim prostorom, saj

smo uporabili le pet dodatnih spremenljivk in nobene nove tabele. Tudi čas iskanja rešitve je odvisen le od števila podatkov. Žal pa je ta odvisnost kubična, kar pomeni, da se čas računanja večja sorazmerno s tretjo potenco števila podatkov. Če dolžino vhodne tabele A podvojimo, se čas reševanja pomnoži z osem. Ko tako funkcijski podprogram *Luknja2* preizkusimo na tabeli z nekaj sto elementi, hitro ugotovimo, da je še vedno zelo počasen. (Če se je bralec morda ustrašil, da bo moral sam odtipkati nekaj sto števil, da bo zadovoljivo preizkusil podprogram, mu svetujem, naj napiše podprogram, ki bo v vhodno tabelo A zapisal želeno število naključnih števil in tako opravil pripravo vhodnih podatkov namesto njega. V Turbo pascal vgrajena podprograma *randomize* in *random* mu bosta pri tem v veliko pomoč.)

3. rešitev: Kaj kompliciram, pravite! Rešitev naloge je na dlani. Tabela števil, ki predstavlja množico A , uredimo, nato pa med pari zaporednih števil poiščemo tisti dve, med katerima je največja razlika. Tule je podprogram:

```
function Luknja3(var A: tabela; n: integer): real;
var
  NajLuknja: real;
  i: integer;
begin {Luknja3}
  Uredi(A,n); { Nepadajoče uredimo tabelo A. }
  NajLuknja:=0; { Poiščemo največjo razliko med pari zaporednih števil. }
  for i:=1 to n-1 do
    if A[i+1]-A[i]>NajLuknja then NajLuknja:=A[i+1]-A[i];
  Luknja3:=NajLuknja;
end; {Luknja3}
```

Kvaliteta zgornje rešitve je seveda odvisna od prave izbire podprograma za urejanje števil. O metodah za urejanje je napisanih kopica knjig. Najlažje dostopna je verjetno znamenita Wirthova knjiga Računalniško programiranje. V njenem drugem delu je narejen pregled standardnih postopkov za urejanje. Solidna metoda je hitro urejanje (quicksort po angleško) z nekaj izboljšavami (nerekurzivna varianta, urejanje kratkih podzaporedij s preprostim vstavljanjem, pazljiva izbira delilnega elementa), v zadnjem času pa se uveljavlja tudi izboljšano urejanje s kopico (več o njem si bralec lahko prebere v Obzorniku za matematiko in fiziko, letnik 38, številka 2, strani 45 do 52). Časovna zahtevnost vseh teh metod pa je reda vsaj $n \cdot \log n$. To pomeni, da se čas, potreben za rešitev problema, povečuje nekoliko hitreje, kot raste velikost vhodnih podatkov.

Toda naš problem se zdi vendarle preprostejši, kot je urejanje celotne

tabele. Sestavljanje postopka, ki reši nalogo v času, sorazmernem z velikostjo vhodne tabele, je tako pravi izziv za vsakega nadebudnega programerja.

4. rešitev: Priznati moram, da sem ves čas mislil na tole rešitev. Morda bo koga presenetilo, da si pri njeni izpeljavi pomagamo z varianto Dirichletovega principa. Ta pravi tole: če n stvari, v našem primeru števil, porazdelimo v $n+1$ predalčkov, v našem primeru intervalov, ostane vsaj eden od predalčkov prazen. Postopek reševanja je naslednji:

1. Poiščemo najmanjše in največje število v tabeli in ju shranimo v spremenljivki *min* in *max*.
2. Interval med številoma *min* in *max* razdelimo na $n+1$ enako dolgih podintervalov. Dolžina posameznega podintervala je torej $\frac{max-min}{n+1} =: d$.
3. Za vsakega od podintervalov ugotovimo, ali je v njem katero od števil iz vhodne tabele. Za vsak neprazen podinterval nato poiščemo najmanjše in največje število v njem.
4. Ker je podintervalov $n+1$, vhodnih števil pa je le n , bo vsaj en podinterval ostal prazen. Ker pa mejna podintervala nista prazna, bo največja razlika med sosednjima številoma večja od dolžine podintervala d . Torej bosta števili, ki določata najbolj oddaljen sosednji par, pripadali različnim podintervaloma. Da dobimo pravi rezultat, tako zadošča za vsak neprazen podinterval pregledati razliko med najmanjšim številom v tem podintervalu in največjim številom v prvem nepraznem podintervalu na levi, torej med podintervali, ki vsebujejo manjša števila.

Vsakega od štirih korakov bomo sprogramirali tako, da bo porabljeni čas sorazmeren z dolžino vhodne tabele. Ker bomo potrebovali dve pomožni tabeli, podprogram pa želimo uporabljati tudi pri velikih vhodnih tabelah, bomo nekaterim pomožnim spremenljivkam prostor dodelili šele med izvajanjem.

```
function Luknja4(var A: tabela; n: integer): real;
type
  intervali = array[0..Max_n] of real;
  prazno = array[0..Max_n] of boolean;
var
  MinI,MaxI: ^intervali;
  P: ^prazno;
  Min,Max,d,NajLuknja: real;
  i,j: integer;
begin { Luknja4 }
  Min:=A[1];
  Max:=A[1];
  for i:=2 to n do begin
```

{ Poiščemo najmanjše in največje število v tabeli A. }

```

    if Min>A[i] then Min:=A[i];
    if Max<A[i] then Max:=A[i];
end; {for}
{ Če so vsa števila v tabeli enaka, potem končamo. }
if Min=Max then begin Luknja4:=0; exit; end;
{ Sicer pa izračunamo dolžino podintervalov in pripravimo pomožni tabeli. }
d:=(Max-Min)/(n+1);
GetMem(MinI,SizeOf(real)*(n+1));
GetMem(MaxI,SizeOf(real)*(n+1));
GetMem(P,SizeOf(boolean)*(n+1));
for i:=0 to n do P[i]:=true; { Na začetku so vsi podintervali prazni. }
{ S sprehodom po tabeli A pregledamo vsa števila in jih porazdelimo po }
{ ustreznih podintervalih. }
for i:=1 to n do begin
{ Izračunamo, v kateri podinterval spada število A[i]. }
{ Če je število na meji dveh podintervalov, je vseeno, kam ga uvrstimo. }
j:=trunc((A[i]-Min)/d); if j=n+1 then j:=n;
if P[j] then
begin P[j]:=false; MinI[j]:=A[i]; MaxI[j]:=A[i] end
else
begin {else}
if A[i]<MinI[j] then MinI[j]:=A[i];
if A[i]>MaxI[j] then MaxI[j]:=A[i];
end; {else}
end; {for}
i:=0; NajLuknja:=0; { Poiščemo največjo luknjo. }
j:=1; { j bo indeks naslednjega nepraznega podintervala. }
while i<n do begin { Poiščemo naslednji neprazni podinterval. }
while P[j] do inc(j); { Novo luknjo primerjamo z dosedaj največjo. }
if MinI[j]-MaxI[j]>NajLuknja then
NajLuknja:=MinI[j]-MaxI[j];
i:=j;
inc(j);
end; {while}
Luknja4:=NajLuknja;
end; {Luknja4}

```

Na koncu si oglejmo še rezultate meritev, ki smo jih dobili s primerjavo opisanih rešitev. Prikazuje jih tabela na naslednji strani. Preizkusi so bili opravljeni na običajnem AT računalniku. Izračunani časi so povprečje nekaj meritev in so podani v stotinkah sekunde.

Kot smo predvidevali, je druga rešitev bistveno slabša od tretje in četrte, čeprav se zdi, da je njena povprečna časovna zahtevnost nekoliko boljše od kubične. Zadnja rešitev je boljše od tretje, njena prednost pa postaja tem bolj očitna, čim večja je tabela, s katero delamo. Seveda pa moramo to večjo hitrost reševanja problema tudi plačati. Tako zadnja rešitev potrebuje

n	Luknja2	Luknja3	Luknja4
100	575	0	0
200	3037	5	5
300	7218	11	11
1000	–	39	39
3000	–	124	110
5000	–	223	181
10000	–	500	357

precej več pomnilnika kot tretja. Na celoštevilskih tabelah smo primerjali tudi prvo in zadnjo rešitev. Izkaže se, da sta približno enako dobri takrat, ko je razmerje med dolžino tabele in intervalom, s katerega so vrednosti, okoli ena proti dvajset (to razmerje je seveda odvisno tudi od tipa računalnika, na katerem opravljamo meritve). Če je razmerje manjše, je primernejša zadnja rešitev, sicer pa prva.

Če imamo opraviti le s celoštevilskimi tabelami, lahko zadnjo rešitev še nekoliko izpilimo, tako da uporablja le celoštevilsko aritmetiko (in morda še nekoliko več dodatnega prostora). Ker pa je prispevek že precej dolg, to izboljšavo prepuščamo zvestim bralcem za (neobvezno) domačo nalogo.

Martin Juvan

DVE IGRI S ŠTEVILI - Rešitev s str. 5

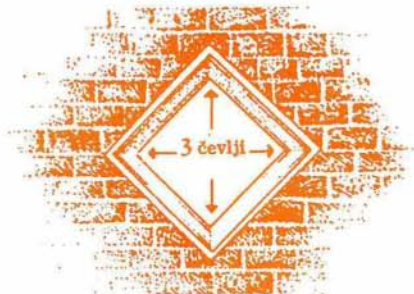
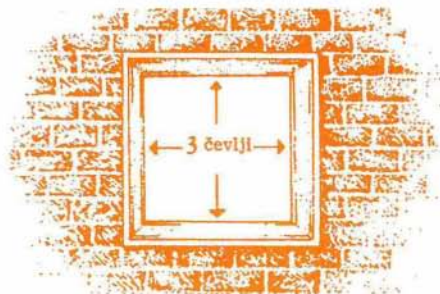
1. Kdor začne, ta lahko zmaga. Na prvem koraku napiše 6. Drugi lahko zapiše eno od števil iz naslednjih parov: (4, 5), (7, 9), (8, 10). Prvi v odgovor na poljubno potezo drugega zapiše drugo število iz para.
2. Vsota je 30.
Prvi igralec drugemu ne more preprečiti, da bi imeli števili 19 in 20 enaka predznaka. Ko prvi igralec izbere predznak pred enim od števil v parih (1, 2), (3, 4), ..., (17, 18), izbere drugi nasprotni predznak pred drugim

REŠITVE NALOG

DVE PISEMCI – DVE UGANKI – Rešitev s str. 60

I.

Upamo, da vas problem z oknom ni spravil s tira, tako kakor je deklico iz Carrollovega pisma. Če sami le še niste našli prave rešitve, si oglejte ti dve risbici:



II.

Možakar mora najprej prepeljati gos, saj se lisica zrnja ne bo lotila. Nato se vrne po lisico in jo spravi na drugi breg, gos pa odpelje nazaj, če hoče, da mu je lisica ne bo požrla. Sedaj prepelje vrečo z zrnjem k lisici in se vrne še po gos. Tako lahko nadaljuje pot, ne da bi imel kaj škode.

Miha Mohor

številom v paru.

Tako drugi doseže, da vsota po absolutni vrednost ni manjša od

$$20 + 19 \underbrace{-1 - 1 - \dots - 1}_{9\text{-krat}} = 30.$$

Prvi igralec pa lahko prepreči drugemu, da bi bila vsota večja od 30, če pred največjim še nepredznačenim številom izbere tak predznak, ki bo dal po absolutni vrednosti manjšo delno vsoto.

Dušan Murovec

ASTRONOMIJA

NENAVADNO GALILEJEVO OPAZOVANJE

Veliki fizik in astronom Galileo Galilei je bil med prvimi, ki je sestavil daljnogled in z njim opazoval nebo (okoli 1610). S svojim šibkim daljnogledom je videl na Luni gore in doline, ob Jupitru njegove velike satelite, pri Veneri je odkril mene, na Soncu zasledil pege itn. Novejše raziskave Galilejevega znanstvenega dela pa kažejo, da je (po vsej verjetnosti) opazoval celo planet Neptun, ki so ga odkrili po dogodrajnih raziskavah šele leta 1846.

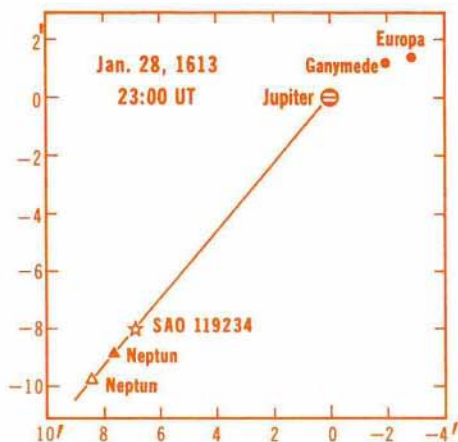
Skice opazovanj, ki jih je izdelal sam Galilei in so se ohranile, kažejo, da je opazoval planet Neptun blizu planeta Jupitra in njegovih štirih velikih lun.

Galilei je zabeležil lego Neptuna in menil, da se tisto šibko nebesno telo, ki ga je opazoval (torej Neptun), najbrž premika glede na oddaljene zvezde. Seveda je Neptun zamenjal za šibko zvezdo, kot se je to zgodilo še mnogim drugim astronomom, ki so pozneje tudi opazovali Neptun, a ga niso prepoznali za planet - vedno so ga imeli za zvezdo.

V ZDA sta si pred nekaj leti dva znanstvenika, astronom in zgodovinar, zadala nalogo, da rekonstruirata Galilejeva opazovanja na podlagi podatkov, ki so jima bili na voljo. Uspela sta



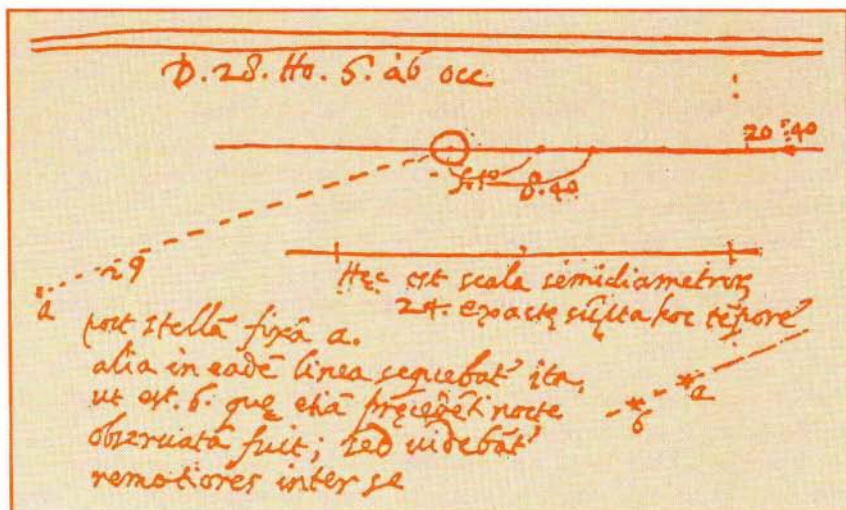
1564-1642



ugotoviti, kaj je pravzaprav Galilei opazoval. Izrisala sta legi Jupitra in Neptuna glede na ozadje šibkih zvezd za dan 28.1.1613. Svojo sliko sta primerjala z Galilejevimi opazovanji. Dognala sta, da je veliki znanstvenik na svoji skici opazovanj označil dve točki (zvezdi). Prva je predstavljala šibko zvezdico SAO 119236, druga pa planet Neptun (slika 1).

Slika 1. Skica Galilejevega opazovanja (rekonstrukcija) z dne 28.1.1613.

Polni trikotnik označuje Neptunovo lego, kot jo je označil Galilei; prazni trikotnik pa Neptunovo lego, kot sta jo izračunala znanstvenika.



Slika 2. Originalna skica Galilejevega opazovanja z dne 28.12.1612. Ko je Galilei skiciral to opazovanje, na listu ni bilo prostora, da bi v ustreznem merilu zarisal legi šibkih zvezd a in b. Zato je s skiciranjem nadaljeval na desni strani lista. V sredini lista je še narisal ravno črto, na njej pa oznaki in zapisal, da razdalja med obema oznakama ustreza 24 Jupitrovim navideznim premerom (zornim kotom).

Smer, v kateri leži Neptun glede na Jupiter (krožec), je Galilei nakazal že v skici opazovanja z dne 28.12.1612 (slika 2). Neptun je narisal ob robu lista na premajhni kotni razdalji od Jupitra. Galilei je nato še večkrat opazoval Neptun. Najnatančnejša je skica opazovanja z dne 28.1.1613. Ob skici pojasnjuje, da je poleg šibke zvezdice še ena zvezda v isti ravni črti..., da je opazovanje ponovil naslednjo noč in da se mu je zdelo, da sta se zvezdi navidezno nekoliko razmaknili. To pomeni, da je Galilei zaznal relativni premik planeta glede na oddaljeno zvezdo. Seveda pa ni mogel pojasniti, katero od obeh šibkih vesoljskih teles se je premaknilo glede na drugo.

Po vseh teh in še drugih podatkih Galilejevih opazovanj je torej mogoče s precejšnjo gotovostjo sklepati, da je Galilei zares opazoval planet Neptun. Opazoval ga je kar 234 let prej, predno so ga odkrili.

Marijan Prosen

Prosen M., ORIENTACIJA, Math, Ljubljana 1991, 20 strani

Pri založbi MATH v Ljubljani je leta 1991 na 20 straneh izšla knjižica o orientaciji. Snov v knjigi je razdeljena v 8 poglavij, in sicer: Uvod, Orientacija s kompasom, Orientacija po Soncu, po Luni in po zvezdah, Orientacija karte, Gibanje po azimutu. Na koncu so navedeni viri in literatura.

Knjižica je namenjena učencem višjih razredov osnovne šole in dijakom prvih razredov srednjih šol, dobrodošla pa bo vsem, ki se želijo poučiti o pomembnejših načinih orientiranja; torej tabornikom, gornikom, turistom in še komu.

V uvodu avtor pove, kaj je orientacija, razloži, zakaj je potrebna, in uvede tri osnovne načine orientacije: s kompasom, astronomske načine in orientacijo po znamenjih v naravi.

V poglavju Orientacija s kompasom je razložen preprost kompas in njegova uporaba. V poglavju Orientacija po Soncu pa so obdelani trije načini, od katerih je vsak nadaljnji natančnejši: orientacija po točki vzhoda (zahoda) Sonca, način z uro in določitev smeri sever-jug z gnomonom. Orientacija po Luni je razložena v 4. poglavju. Avtor tu pravilno poudari, kako približen je ta način.

Astronomska orientacija po zvezdah je najnatančnejša in je na severni

polobli Zemlje možna s pomočjo zvezde Severnice. Avtor navaja dva načina, kako najdeš Severnico in se po njej orientiraš.

V predzadnjem poglavju govori avtor o geografskih kartah, razloži najosnovnejše topografske znake in poudari zlasti tematske karte in njih uporabo. Omenja dva načina za orientacijo karte: s kompasom in brez kompasa.

Uporaba karte in gibanje po azimutu sta žal obravnavana le v nekaj vrsticah. Tu bo mladi tabornik vsekakor potreboval dodatna pojasnila!

Bralcu bo na koncu knjige dobrodošel seznam 17 astronomskih prispevkov in člankov, ki so vsi izšli pri nas v zadnjih desetih letih.

Knjižica je pisana simpatično, kratko in jasno. Slike so primerne. Delo priporočamo vsem, ki jim je namenjena in se zanimajo za orientacijo v naravi.

Bogdan Kilar

POPOLNE POTENCE – Rešitev s str. 23

1. Eno od štirih zaporednih naravnih števil da pri deljenju s 4 ostanek
2. To število je deljivo z 2, s 4 pa ne, torej ne more biti popolna potenca (zakaj?).

Znano je, da celo nobena tri zaporedna naravna števila ne morejo biti vsa popolne potence, vendar je dokaz mnogo bolj zapleten.

2. Za $n \in \{1, 2, 3\}$ trditev 2 očitno velja. Naj bo zato $n > 3$. Ocenimo število vseh popolnih potenc, manjših od 4^n . Med njimi je $2^n - 1$ popolnih kvadratov ($4^n = (2^n)^2$!), pa tudi vseh popolnih potenc z danim eksponentom $p > 1$ ni med njimi več kot $2^n - 1$ (zakaj?). Če popolno potenco 1 štejemo le za popolni kvadrat, je največji eksponent popolne potence, manjše od $4^n = 2^{2n}$, manjši od $2n$. Pri preštevanju popolnih potenc je dovolj upoštevati le tiste s praštevilskimi eksponenti, ki pa jih je največ toliko, kot je praštevil, manjših od $2n$. Teh je največ n (zakaj?), torej vseh popolnih potenc, manjših od 4^n , ni več kot $n(2^n - 1)$. Razdelimo naravna števila, manjša od 4^n , na skupine zaporednih števil, ki se začenjajo s popolno potenco in končajo tik pred naslednjo popolno potenco:

$$\overbrace{1, 2, 3}, \overbrace{4, 5, 6, 7}, \overbrace{8}, \overbrace{9, 10, 11, 12, 13, 14, 15}, \dots, \dots, \overbrace{\dots, 4^n - 1}.$$

Teh skupin je toliko kot popolnih potenc, manjših od 4^n , torej kvečjemu $n(2^n - 1)$.

Če trditev 2 ne drži, ima vsaka skupina največ n števil. Zato je vseh naravnih števil, manjših od 4^n , kvečjemu $n^2(2^n - 1)$, torej je

$$4^n - 1 \leq n^2(2^n - 1).$$

Dokazali bomo, da v resnici za $n > 3$ velja obratna neenakost, zato trditev 2 vendarle drži.

Najprej s pomočjo matematične indukcije dokažimo, da za vsak $n > 3$ velja $n^2 \leq 2^n$.

Pri $n = 4$ ocena očitno velja, indukcijski korak od $n > 3$ do $n + 1$ pa napravimo s pomočjo ocen

$$\begin{aligned}(n + 1)^2 &= n^2 + 2n + 1 \leq 2^n + 2n + 1 < \\ &< 2^n + n^2 \leq 2^n + 2^n = 2^{n+1}.\end{aligned}$$

Od tod takoj sledi iskana ocena

$$n^2(2^n - 1) \leq 2^n(2^n - 1) < 4^n - 1.$$

Bralca vabimo, da izboljša oceno dolžine najdaljšega zaporedja takih zaporednih naravnih števil, manjših od 4^n , med katerimi ni nobeno popolna potenca.

Boris Lavrič

PISMA BRALCEV

Darko iz Hajdoš nam piše:

Prejmite lepe pozdrave od Darka iz Hajdoš. Pišem vam, ker mi je revija Presek zelo všeč. Zelo rad preberem vsebino na vaših matematičnih in šahovskih straneh. Pišem vam pa zaradi šaha. V vaši reviji sem že dvakrat zasledil šahovske probleme z retrogradno analizo. Sestavil sem svoja prva dva problema, ki vam jih tudi pošiljam. Strinjam pa se tudi, če jih želite objaviti.

Dragi Darko,

objavljamo enega od tvojih problemov hkrati s tvojo rešitvijo. Več o retrogradni analizi in kopico lepih šahovskih nalog te vrste najdeš v knjigi Raymond Smullyan: ŠAHOVSKE SKRIVNOSTI SHERLOCKA HOLMESA, ki je leta 1986 izšla v slovenskem prevodu pri Državni založbi Slovenije. Ista založba bo v kratkem izdala še eno knjigo o retrogradni šahovski analizi, Smullyanovo ŠAHIRAZADO.

Peter Petek

DVA ŠAHISTA – retrogradni problem

Dva šahista sta odigrala partijo, ker pa se jima je mudilo, sta morala predčasno končati. Ko sem stopil v šahovsko sobo, sem naletel na naslednjo pozicijo in se takole mimogrede vprašal, ali beli lahko izvede malo rokado.

Beli: Ke1, Dd1, Th1, Lc1, Sc3, Sf3,
a2, a3, c2, d2, e3, f2, h2, h3.

Črni: Ke8, Dd8, Th8, Lc8, Sc6,
Sg8, a6, a7, c7, d7, f6, f7, g7, h7.

Takole sem sklepal:

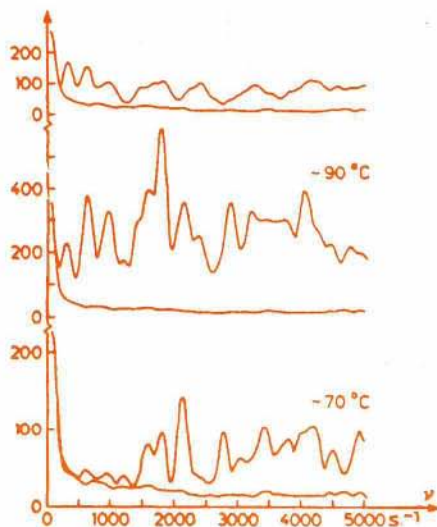
Med igro nikakor ni prišlo do promocije, saj so na šahovnici vsi kmetje belega in črnega. Belemu manjkata belopoljni lovec in trdnjava. Na polju a3 je zagotovo padel črni črnopoljni lovec. Da je padel na a3, je moral najprej jemati kmet iz e7 na f6. Ampak katero figuro je lahko ta kmet vzel? Promocij ni bilo, belopoljni lovec ni padel na črnem polju, torej je na f6 padla trdnjava. Sedaj je treba dokazati, katera trdnjava je padla, damska ali kraljeva. Preden je padla na f6, je moral en kmet jemati, na h3 ali a3. Poglavitno vprašanje pa je, kateri je prej jemal. Očitno tisti na h3, saj še takrat črni črnopoljni lovec ni mogel pasti na a3 zaradi kmetov na g7 in e7. Torej je kmet na h3 jemal črno damsko trdnjavo. Ta trdnjava pa je prišla na plano potem, ko je kmet na a6 vzel belega belopoljnega lovca. Iz vseh teh dejstev sledi, da je na f6 padla bela kraljeva trdnjava in da sedaj na polju h1 stoji damska trdnjava. To pa pomeni, da beli niti sedaj niti v prihodnosti te partije ne more rokirati.

Darko Dominko

ŠUMENJE VODE V KOTLIČKU

Kotliček, v katerem grejemo vodo za čaj ali črno kavo, oddaja značilni šum, ki postaja vse glasnejši, ko se voda greje, in se stiša, ko voda zavre.¹ Med prvimi fiziki, ki so se zanimali za brbranje, je bil Osborne Reynolds. Leta 1901 ga je primerjal s šumenjem vode v odprti cevi z ožino. William Bragg je v nizu predavanj za Kraljevo družbo ugotovil, da povzročajo šumenje vode, preden zavre, mehurčki pare, ki se sesedajo vase. Pri tem stena mehurčka udari ob steno kot "jeklo ob jeklo", kot da bi "udarjala brezštevilna kladivca." Lord Rayleigh je poznal brbranje, a ga v znani knjigi o akustiki ni niti omenil. Tedanji merilniki niso dopuščali, da bi podrobneje raziskali brbranje in šumenje vode. Novejši merilniki to dopuščajo, a zdi se, da se je zanimanje omejilo predvsem na zvok v toku vrele vode z mehurčki v reaktorjih. Šumenja vode, preden zavre, se ni lotil nihče. Pred nedavnim pa sta nadomestila zamujeno S. Aljishi in J. Tatarkiewicz s Planckovega inštituta za fiziko trdnin v Stuttgartu. V reviji *American Journal of Physics* **59** (1991) 628 sta objavila članek z naslovom *Zakaj nastane zvok pri segrevanju vode v kotličku*.

Na kuhalniku sta segrevala vodo v litrskih ali dvolitrskih kotličkih in valjastih steklenih in kovinskih posodah. V posodo sta postavila brezžični mikrofoni, ki je zvok spremenil v radijske valove. Valove je sprejemal sprejemnik v drugem



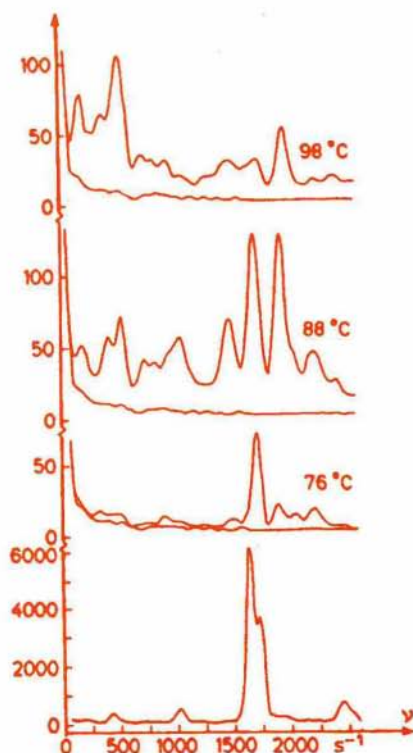
Slika 1. Zvočni spekter 1 litra navadne vode v kotličku. Na vodoravno os je nanesena frekvenca ν , na navpično pa spektralna gostota $dj/d\nu$, ki jo merimo v enotah $W/m^2(s^{-1})^{-1}$. V spektrih na slikah ni znano, kolikšen del tega meri uporabljena enota. Spodnja krivulja v nekaterih spektrih kaže ozadje, to je zvok, ki ga je sprejemal mikrofoni iz okolice, ko vode niso segrevali.

¹ Na Inštitutu za slovenski jezik so ljubeznivo pojasnili, da voda med segrevanjem *šumi*, ko vre, pa *brbra* ali *brbota*. Ker imenujemo v fiziki *šum* vsak zvok z zveznim spektrom, bi bilo pripravno imeti posebno ime za zvok, ki ga oddaja voda med segrevanjem, preden zavre. Takega imena ni. *Mrmranje* uporabljajo le pisatelji.

prostoru, po frekvenci razvrstil spektralni analizator, pisalni instrument pa je spekter narisal. Mikrofon je zaznaval zvok s frekvenco od najnižjih frekvenc do 5000 s^{-1} . Uporabila sta destilirano vodo ali vodovodno vodo, ki sta jo pred poskusom prekuhala in s tem izgnala iz nje večino raztopljenega zraka. Natančno sta merila temperaturo tik pod vodno gladino, nista pa se zanimala za podrobni temperaturni profil.

Preden nadaljujemo, je treba povedati nekaj besed o spektru. (Daljši prispevek *O spektrih* najde bralec v Preseku **13** (1986) 322.) V šumu, ki ga oddaja voda ob segrevanju in vretju, so zastopane sestavine zvoka z določeno frekvenco - toni - s širokega pasu frekvenc - od najnižjih do 5000 s^{-1} . Podatek o zastopanosti tonov v zvoku da spekter, ki je v tem primeru zvezen. Sprejemnik zazna del jakosti zvoka dj , ki odpade na ozek frekvenčni pas med $\nu - \frac{1}{2}d\nu$ in $\nu + \frac{1}{2}d\nu$. Spektralni analizator določi *spektralno gostoto* $dj/d\nu$ v odvisnosti od frekvence ν s sredine ozkega pasu. Pisalni instrument nariše $dj/d\nu$ v odvisnosti od frekvence ν . Krivulja nazorno kaže, kako je jakost zvoka porazdeljena po frekvenci. Ploščina pod krivuljo podaja jakost zvoka j na vsem preiskanem širokem frekvenčnem pasu.

S. Aljishi in J. Tatarkiewicz sta posnela pri različnih temperaturah zvočne spektre 1 litra navadne vode v kotličku (slika 1) ter 1 litra navadne vode (slika 2) in 1 litra destilirane vode v dvolitrski valjasti stekleni posodi (slika 3). V prvem primeru voda ni oddajala skoraj nobenega zvoka pri temperaturi pod 70°C .

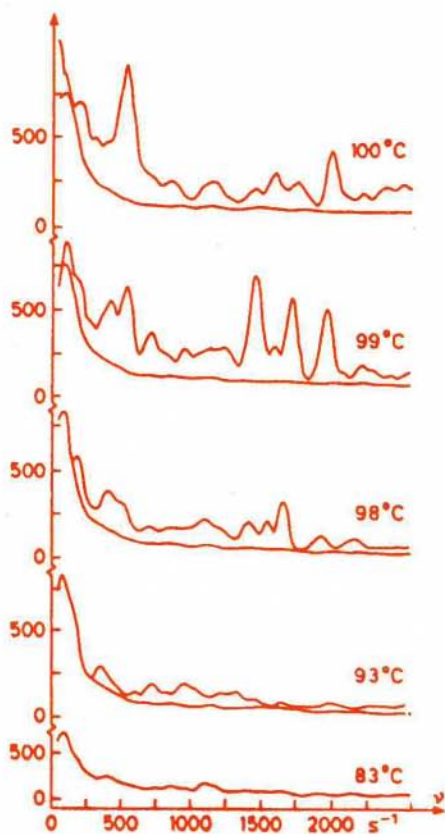


Slika 2. Zvočni spekter 1 litra navadne vode v dvelitrski valjasti stekleni posodi. Na spodnji sliki je spekter lastnega nihanja posode, ko so jo udarili s plastičnim ravnilom.

Pri tej temperaturi se je pojavil zvok, v katerem so bile močnejše zastopani toni z visokimi frekvencami. Pri temperaturi 90 °C je postal zvok močnejši in v njem so se pojavili tudi toni z nižjimi frekvencami. Ob vrelišču je postal zvok nenadoma mnogo šibkejši in v njem so bile domala enakopravno zastopani toni z nižjimi in višjimi frekvencami. Prav po tem prehodu pri kuhanju čaja ali kave sklepamo, da je voda zavrela.

Nekaj podobnega so opazili v drugem primeru, le da so se v spektru pokazali izrazitejši vrhovi. Ti vrhovi so ustrezali lastnemu nihanju zraka nad vodo ali posode ali vode v posodi. Vse troje je imelo v tem primeru preprostejšo obliko kot pri kotličku. Vrhova pri frekvencah 1685 s^{-1} in 1910 s^{-1} nista bila odvisna od višine vode pri dodatnih poskusih in sta ustrezala lastnemu

nihanju posode. Izrazit vrh pri prvi frekvenci se je pojavil, ko so s plastičnim merilom udarili posodo (slika 2). Vrh, ki ga je bilo mogoče opaziti pri dodatnih poskusih med frekvenca-
ma 370 s^{-1} pri 0,2 litra vode in 860 s^{-1} pri 1,6 litra vode, je ustrezal lastnemu nihanju stolpca zraka nad vodo. Lastnemu nihanju vode je ustrezala visoka frekvenca 3850 s^{-1} , ki se je zaradi mehurčkov v vodi znižala na 2000 s^{-1} – 2500 s^{-1} . Pri temperaturah nad 90 °C sta se pojavila vrhova pri frekvencah 130 s^{-1} in 190 s^{-1} , ki ju je bilo mogoče dobro ločiti tudi z ušesom. Nista bila odvisna ne od višine vode v posodi ne od sno-



Slika 3. Zvočni spekter 1 litra destilirane vode v dvelitrski valjasti stekleni posodi.

vi, iz katere je bila posoda, ne od njene oblike. Njihova jakost je bila tem večja, čim več vode je bilo v posodi. Najbrž sta to lastni frekvenci, ki se pojavita pri izginjanju mehurčkov tik ob gladini vode.

V tretjem primeru je destilirana voda oddajala mnogo šibkejši zvok od navadne. Izrazitejši zvok se je pojavil šele pri temperaturi 98 °C. Nad to temperaturo je bilo mogoče opaziti vrhove pri enakih frekvencah kot prej.

Nastanek zvoka so pojasnili s pojavi v vodi, ki se segreva. Pri nižjih temperaturah imajo pri tem odločilno vlogo konvekcijski tokovi, ki ne rodijo zvoka. Pri višjih temperaturah pa je najpomembnejši pojav nastajanje mehurčkov. Nad temperaturo okoli 40 °C nastanejo v neprekuhani vodi na steni posode mehurčki zraka in potujejo navzgor, ne da bi pri tem nastal zvok. Pri temperaturi okoli 70 °C začnejo nastajati na dnu posode mehurčki pare. Najprej nastajajo in sunkovito izginevajo, in to do tridesetkrat in večkrat v sekundi. Sunke prenaša voda do sten, ki zanihajo z lastno frekvenco. Nad temperaturo okoli 90 °C se nastali mehurčki dvigajo in zginejo šele blizu gladine. Pri vretju pa nastajajo mehurčki v vsej prostornini vode. Jakost zvoka se zmanjša tedaj tudi zato, ker postane gladina neravna in zato voda nima več izrazitih lastnih frekvenc. V destilirani vodi nastanejo mehurčki šele tik pod vreliščem. To priča, da se v navadni vodi izločajo na steni posode raztopljene soli. Delci teh soli sestavljajo dodatna jedra, okoli katerih se razvijejo mehurčki. Več mehurčkov pomeni močnejši zvok. Podoben učinek kot z destilirano vodo je mogoče doseči v navadni vodi z močnim mešanjem, ki tudi zavira nastajanje mehurčkov.

Šumenje vode med segrevanjem lahko tedaj zmanjšamo, če uporabimo posodo brez lastnih frekvenc na opazovanem frekvenčnem pasu, če notranjo steno posode prevlečemo z zelo gladko plastjo, če uporabimo destilirano vodo ali če vodo mešamo. Mehurčki na steni namreč nastajajo ob drobnih izboklinah in jih je manj, če izboklin ni. Takšne posode pa zunaj laboratorija najbrž nihče ne bi navdušeno sprejel. Marsikdo bi pogrešal prijetne občutke, ki jih zbuja šumenje vode pri kuhanju čaja ali kave.

Janez Strnad

EUROBIT

KRIŽANKA NOBELOVI NAGRAJENCI ZA FIZIKO II

SESTAVIL MARKO BOKALIČ	ERNEST, IRSKA, 1951	BLAGAJEV VOLČIN	PHILIP, NEMČIJA, 1905	KOSITER	KRAJ, KJER SE KOPLJE RUDA	NORVEŠKO PRI- STANIŠČE		JADRAN- SKA ENCIJAM- BORNIČA	RUTENIJ	INDUS ZVEZI DRŽA
ROBERT IN KENNETH, ZDA, 1978 IN 1982							FERDINAND, NEMČIJA, 1909			
MAŠNA KNJIGA							ERNST, NEMČIJA, 1906			
							ZEMELJSKI PLIN			
STARA KULTURNA RASTLINA				HRANA ZA ŽIVINO					STENSKI LOK NA STEBRIH	
				VULKAN NA NAVAJH (MAJUNA)						
OPEKA ZA PO TLEH									ANGLEŠKI FILOZOF	
									NARAVNA ALK. PUČA	
UTRDITEV, OJACANJE										PREBIV. SLO POKR LETOVI PRI PU
SOPRA- NISTKA VIDMAR- JEVA					ZAJEZITEV NA ZAMBE- ZJU					
	OTO, ZDA, 1943	MARIE IN PIERRE, FRANCIJA, 1903	MESTO V GORNJI SLEZJI	CELOTNI POSNETEK PRI FILMU	THOLLON LOUIS	ZOLAJEV ROMAN				
ŠKOTSKI PISATELJ (WALTER)						CHEN-NING, KIT.-ZDA, 1957	RIMSKI JAVNI NADZOR- NIK	SPECIALIST ZA NOVO- TVORBE		
								KOŽA PREK OCESA		
RUSKI LETALSKI KONSTRUK- TOR									HIDEKI, JAPONSKA, 1949	
									DEL OBRAZA	
EROSOV SPREMLJE- VALEC					ŽLEZNA BULA					
GOROVJE V BOLGARIJI					IZUMITELJ TESLA					
LOUIS, FRANCIJA, 1970					DONALD, ZDA, 1960					

KA NA VA	PRITOK SAVE IZ BOSNE	KRAJ PRI KRANJU		TEMPE- RAMENT	ZNAK ZA ENAKOST	REKA	ADAMOVA ŽENA	SREDNJE- VESKE NOTE	VOLUHAR	TRI ATOMSKI KISIK	POLOPICA Z MADA- GASKARJA
			PAVEL, SZ, 1958								
			VISOKA SOLA								
			NIZEK ŽENSKI GLAS								
						TVOREC					
						JUŽNO- AMERIŠKO GORSTVO					
				ČAČAK			KRATKO KRILO				
				RADIJ			TIBETAN, GOVEDO				
ALEG V. AJ. SCE LJU										ZARE- BRNICA	SAMUEL, KIT. - ZDA, 1978
			JEŠENSKO ŽITO					PODOBA GOLEGA TELESA			
								PIHALO			
SLOV. ZBORO- VOVJA (SREČKO)	VSE V REDU	WILLIS, ZDA, 1955	JAJČECE	KOREOGRAF OTRIN					ANTON INGOLIČ		
				DENIS, MADŽ.-ANGL. 1989					KONIČASTO KLADIVO		
							MAX, NEMČIJA, 1964				
							TUŠ				
						OPERACIJA					
						PIANIST BERTON- CELJ					
		EGIPT. PRESED- NIK (HOSNI)								IGOR OZIM	ENAKI ČRKI
		FELIX, ŠVIČA, 1952						OSNOVNA AZUSKA HRANA			
			ORIGI- NALNI IZRAZ ZA SPEV					BENEŠKI POGLAVAR			

OHLAJANJE IN ZMRZOVANJE VODE

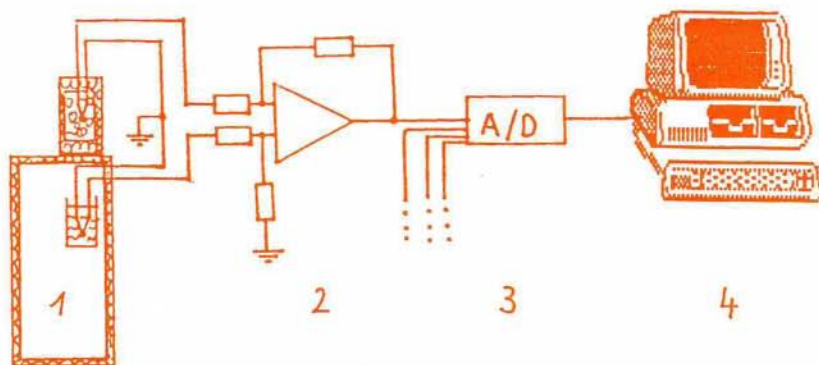
Na tekmovanju mladih fizikov so reševali tudi tole nalogo: Steklenico ore z začetno temperaturo 30°C postavimo v hladilnik. Oцени, čez koliko časa bo temperatura ore 15°C .

Ob ohlajanju se porodi več vprašanj: Kolikšno temperaturo imajo deli tekočine v steklenički? Ali pri odprti steklenički prispeva k ohlajanju tudi izhlapevanje? Kako vpliva oblika stekleničke na hitrost ohlajanja? Kolikšna je temperatura v hladilniku? Da bi odgovorila na nekatera od njih, sva začela zbirati in pripravljati opremo za poskuse.

K eksperimentiranju naju je vzpodbudil tudi članek o *Mpembovem pojavu*, ki obravnava ohlajanje segrete in hladne vode (Presek, VIII/1, str. 24). Ali zares prej zmrzne voda, ki je ob začetku poskusa imela višjo temperaturo?

Oprema za poskuse

Opazovala sva ohlajanje in zamrzovanje vode v zmrzovalniku kuhinjskega hladilnika. Temperaturo sva merila s štirimi termočleni. Termočlen sestavljata žički iz bakra in konstantana, ki sta na krajiščih zavarjeni. Če sta temperaturi obeh spojnih mest različni, nastane med spojnima mestoma napetost, ki je sorazmerna s temperaturno razliko.



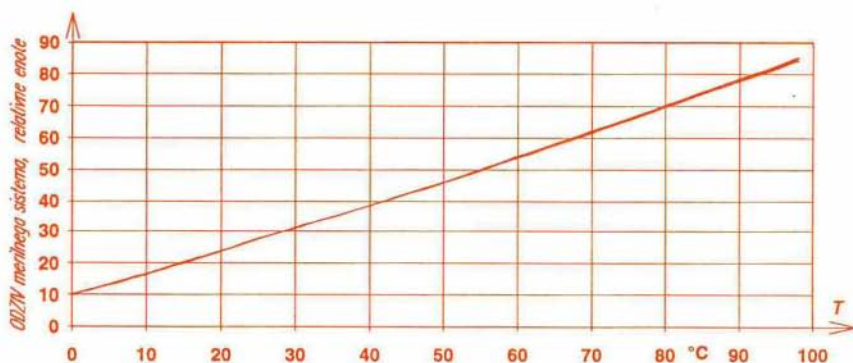
Slika 1. Merilni sistem. 1) hladilnik, 2) ojačevalnik, 3) analogni - digitalni pretvornik, 4) računalnik. V sistemu so še trije termoelementi in trije enaki ojačevalniki, ki so priključeni na pretvornik.

Eno spojno mesto termočlena potisnemo v toplotno izolirano posodo s talečim ledom, drugo pa v posodo z vodo, ki ji merimo temperaturo. Ker je po dogovoru temperatura talečega ledu 0°C , je napetost sorazmerna s Celzijovo temperaturo drugega spojnega mesta. Žičke so tanke in jih zlahka speljemo iz hladilnika. Pri poskusu doseže napetost termoelementa nekaj milivoltov. Z ojačevalnikom jo najprej povečamo na nekaj voltov.

Meritve so dolgotrajne. Najkrajša traja eno uro in najdaljša pet ur, zato sva neprijetno zapisovanje podatkov prepustila računalniku. Napetosti iz štirih termoelementov sva preko ojačevalnikov priključila na analogni-digitalni vmesnik, tega pa na računalnik PC-XT (slika 1). Napisala sva program, ki je vsakih 6 sekund prebral štiri podatke in jih z ustreznim časom meritve shranil v spomin. Po vsaki meritvi sva dobila datoteko s 5-krat 1200 podatki. Podatke sva uredila in narisala diagrame s programskim orodjem Quattro Pro.

Merjenje

Merilnik je treba najprej umeriti. Spojna mesta ene vrste termočlenov potisnemo v taleči led, druga pa skupaj z živosrebrnim termometrom v vodo, ki jo dobro mešamo in počasi segrevamo od 0°C do 100°C . Ničle merilnikov sva na ojačevalnikih nastavila na $+0,50\text{V}$, po odčitavanju je program shranil to vrednost kot 10 relativnih enot. Najin vmesnik namreč ne zna pretvarjati negativnih napetosti (slika 2).



Slika 2. Umeritveni diagram. Krivuljo nadomestimo s premico $T = (8/6)(X - 10)$, z X označimo število, ki ga računalnik prebere z vmesnika.

Umeritvena krivulja je premica:

$$T = (8/6) \cdot (X - 10),$$

če je X vrednost, ki jo računalnik prebere z vmesnika. Umeritev sva preverila s temperaturami talečnega ledu, vode z 20°C in s 50°C . Po takšnem preskusu merilnikov sva ugotovila, da je najino merjenje negotovo za $1/2$ stopinje.

Ohlajanje enakih mas vode z različnimi začetnimi temperaturami

V jogurtove lončke in plastične pladnje sva dala plitvo plast vode. Prvič sva poskuse naredila, ne da bi dno posode toplotno izolirala od zmrzovalnika, pri nadaljnjih poskusih pa sva postavila posode v zmrzovalniku na 2cm debelo plast stiropora. Masa vode v lončkih je bila po 100g, v pladnjih pa po 150g. Časovno odvisnost temperatur kažejo diagrami na sliki 3.

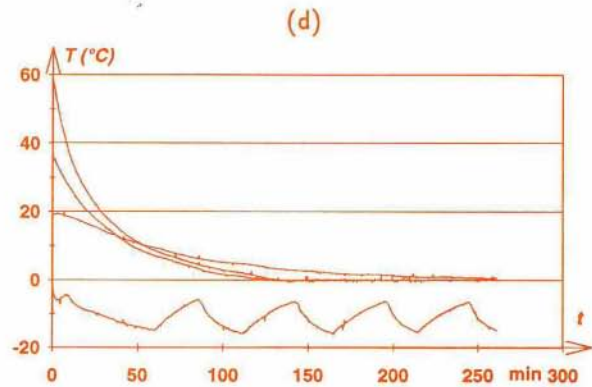
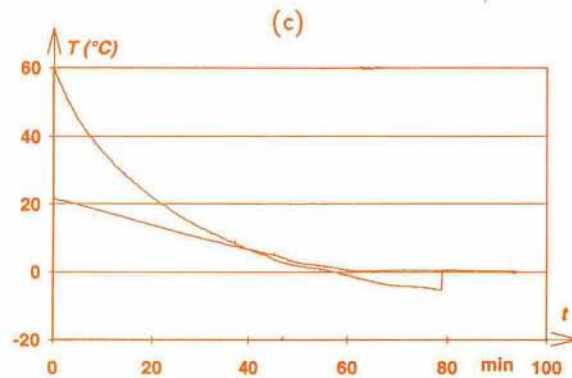
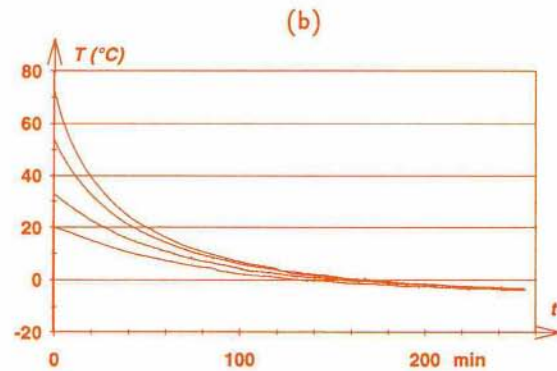
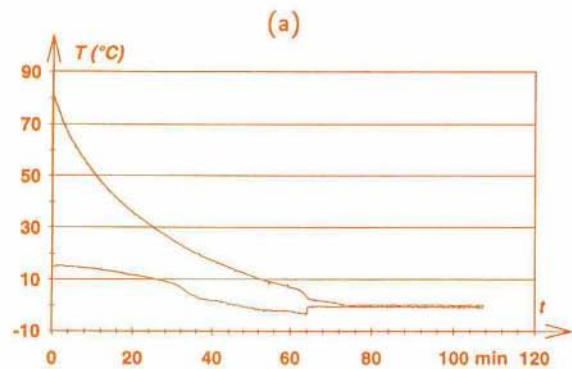
Podstavek iz stiropora približno dvakrat podaljša čas ohlajanja do 0°C . Značilni čas ohlajanja pri izbrani obliki posode, masi vode in izolaciji je presenetljivo malo odvisen od začetne temperature vode (sliki 3a, 3b). Ko postavimo 100ml vode v jogurtovem lončku v zmrzovalnik, voda zmrzne po približno 1 uri, če pa je dno izolirano, pa po 2 urah. Čeprav do Mpembovega pojava ni prišlo vedno, je pomembna ugotovitev, da sta časa ohlajanja do 0°C za vročo in hladno vodo približno enaka.

Voda se je večkrat podhladila. Pri majhni motnji iz okolice, recimo tresljaju hladilnika ob izklopu motorja, del vode zmrzne in temperatura hitro naraste na 0°C (slika 3c). Do podhladitve je prišlo tudi pri meritvi na sliki 3b, vendar tu še ni prišlo do preskoka temperature na 0°C . Mpembov pojav je viden pri ohlajanju vode v plitkih pladnjih (sliki 3c, 3d).

Voda v posodi z izoliranim dnom oddaja toploto zraku s prevajanjem in z izhlapevanjem.

Izračunajmo, kolikšen del toplote odda voda zaradi izhlapevanja. V pladnju je na začetku 150ml vode s temperaturo 85°C , končna temperatura

Slika 3. Temperature v odvisnosti od časa pri ohlajanju vode v zmrzovalniku hladilnika za: (a) dva lončka po 100ml vode, brez izoliranega dna; (b) štiri lončke po 100ml vode, z izoliranim dnom; (c) dva pladnja po 200ml vode, brez izoliranega dna in (d) tri pladnje po 150ml vode, z izoliranim dnom. Spodnja krivulja na sliki 3d kaže temperaturo zraka v zmrzovalniku.



je 0°C. Med ohlajanjem izhlapi 10%, to je 15g vode. Skupna oddana toplota je

$$Q = mc(T_2 - T_1) = 150 \text{ g} \cdot 4200 \text{ J/kgK} \cdot (-85 \text{ K}) = -54 \text{ kJ}.$$

Izhlepevanje prispeva

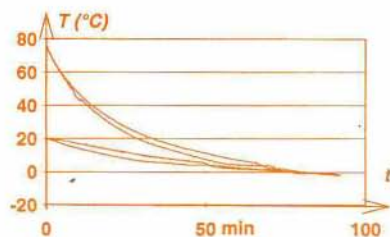
$$Q_i = -m_i q_i = -15 \text{ g} \cdot 2,3 \text{ MJ/kg} = -34 \text{ kJ}$$

toplote; v odstotkih je to $34 \text{ kJ} / 54 \text{ kJ} = 63\%$. Pri ohlajanju vode v jogurtovem lončku je ta delež približno dvakrat manjši. Ker je Mpembov pojav izrazitejši pri ohlajanju vode v pladnju, ko je masa izhlapele vode večja, je izhlapevanje pomembno pri razlagi pojava.

Temperaturne razlike v vodi, ki se ohlaja

Da bi dobila odgovor na vprašanje, kaj se dogaja med ohlajanjem v izbrani posodi, sva pri naslednjem poskusu merila temperaturo približno 1cm pod gladino in 1cm nad dnom v lončku (slika 4) ter na sredini in 1cm od roba v pladnju.

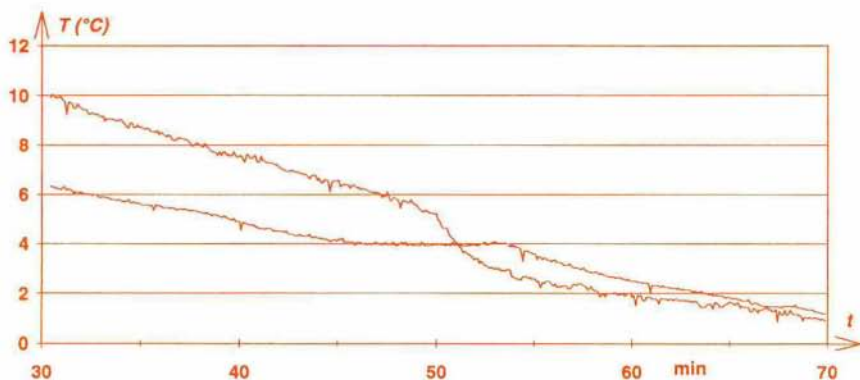
Temperaturne razlike v lončku dosežejo nekaj stopinj in povzročijo spremembo gostote delov vode. Zato pride do konvekcijskih tokov, ki mešajo vodo. Ta se zato hitreje ohlaja. V vodi z višjo začetno temperaturo so ti tokovi izdatnejši.



Slika 4. Potek temperature pri ohlajanju vode v dveh lončkih v zmrzovalniku. V vsakem lončku sta bila dva merilnika, eden 1cm pod gladino in drugi 1cm nad dnom. V neizoliranih lončkih je bilo po 100ml vode.

Opazovala sva tudi ohlajanje vode pod 4°C v lončku (slika 5). Pri temperaturi nad 4°C je toplejša voda v zgornjem delu lončka, pod to temperaturo pa v spodnjem. Takšen prehod povzroči anomalija vode. Gostota vode je pri 4°C največja in zato ostane voda s to temperaturo pri dnu posode. Tem-

peratura vode pri dnu se v okolici te točke ne spreminja, ohlaja se le zgornji del vode. Ohlajala sva še destilirano in mineralno vodo, da bi opazila vpliv primesi na hitrost ohlajanja. Nisva opazila kakšnih posebnosti.



Slika 5. Časovni potek temperatur zgornjega in spodnjega dela vode v lončku pri prehodu preko 4°C. Sprva ima zgornji del višjo temperaturo, po prehodu preko 4° pa je temperatura zgornjega dela vode nižja.

Mpembovega pojava ni lahko opaziti. Pri 21 poskusih sva ga opazila le trikrat. Kljub temu je bilo zanimivo opazovati podhlajevanje vode, temperaturne razlike znotraj posode in anomalijo vode.

* * *

Če imaš dva termometra, lahko opazuješ ohlajanje vode tudi doma. Pri temperaturi zunanjega zraka nižji od -5°C postavi na zunanjo okensko polico dve posodi, v katerih sta enaki masi vode, začetni temperaturi pa naj bosta različni. V posodi postavi še termometra tako, da boš lahko skozi okensko šipo videl nanju. Poskusi pokazati, da se sprva vroča voda prej ohladi do 0°C kot hladna.

* * *

Prispevek je del raziskovalne naloge v okviru srednješolskega natečaja znanost mladini.

Zlatko Bradač in Jure Dobnikar

ORNAMENTI IN GRUPE

Ornamentov, te neizčrpne zakladnice umetnosti, smo se lotili že v eni prejšnjih številčk Preseka. Spoznali smo, kako z ornamentom napolnimo neskončno dolg trak, definicijo ornamenta in njegove lastnosti pa smo oprli na študij izometriji. Tudi z ravninskimi ornamentami ni dosti drugače. Vendar za njihov natančnejši študij potrebujemo še en matematični pojem: *grupo*.

Grupo so uvedli v matematiko okoli leta 1830. Raziskovanja *Lagrangea*, *Chauchyja*, *Galoisa*, *Cayleya* in drugih matematikov so se vlekle skoraj stoletje, preden je definicija dobila obliko:

Grupa je množica $\mathcal{G}$ skupaj z dvomestno operacijo $\circ$, ki zadošča pogojem:

- Operacija je *zaprtá*. To pomeni, da operacija $\circ$ vsakemu paru elementov iz $\mathcal{G}$ priredi neki element samo te množice:

$$\forall a, b \in \mathcal{G} : (a, b) \mapsto a \circ b \in \mathcal{G}.$$

- Operacija je *asociativna*. To pomeni, da so oklepaji pri združevanju poljubnih treh elementov prestavljivi:

$$\forall a, b, c \in \mathcal{G} : (a \circ b) \circ c = a \circ (b \circ c).$$

- V množici $\mathcal{G}$ obstaja *enota*, označimo jo z e , za katero velja

$$\forall a \in \mathcal{G} : a \circ e = e \circ a = a.$$

- Vsak element iz množice $\mathcal{G}$ ima *inverzni element*, ki ga simbolično označimo z eksponentom -1 :

$$\forall a \in \mathcal{G}, \exists a^{-1} \in \mathcal{G} : a^{-1} \circ a = a \circ a^{-1} = e.$$

Včasih uporabimo za operacijo ($\circ$) znak plus (+). Takrat inverzni element označimo s predznakom minus (-).

Inverzni element k a^{-1} je kar a , to je $(a^{-1})^{-1} = a$. Potenca a^n je krajši zapis za $\underbrace{a \circ a \circ a \dots \circ a}_n$. Potenca a^{-n} je seveda $(a^{-1})^n$.

Če je operacija $\circ$ še *komutativna*, to je, če za vsaka dva elementa a in b iz $\mathcal{G}$ velja: $a \circ b = b \circ a$, govorimo o *komutativni grupi*.

Grupa je lahko *končna* ali *neskončna*, pač glede na to, ali je osnovna množica $\mathcal{G}$ končna ali neskončna.

Npravimo nekaj zgledov:

1. *Aditivna grupa celih števil.*

To je množica celih števil $\mathbb{Z} = \{0, \mp 1, \mp 2, \mp 3, \dots\}$ skupaj z operacijo običajnega seštevanja. Cela števila so za seštevanje zaprta, saj je vsota poljubnih dveh celih števil vedno celo število. Grupni aksiomi so kar računski zakoni za vsoto:

$$(a + b) + c = a + (b + c)$$

$$a + 0 = 0 + a = a$$

$$a + (-a) = (-a) + a = 0.$$

Ta grupa je komutativna ($a + b = b + a$) in neskončna, ker je pač celih števil neskončno mnogo. Enota je število 0, inverzni element k n pa $-n$.

2. *Aditivna grupa vektorjev ravnine* je množica vseh vektorjev ravnine, to je usmerjenih daljic z začetkom v izbrani točki, skupaj z operacijo *seštevanja vektorjev* po paralelogramskem pravilu. Operacija je zaprta. Je asociativna. Enota za seštevanje je vektor 0, inverz k vsakemu vektorju pa je njegov nasprotni vektor (slika 1). Tudi ta grupa je komutativna in neskončna. Podobno obstaja *aditivna grupa vektorjev v prostoru*.



Slika 1. Vektorju $\vec{a}$ nasprotni vektor $-\vec{a}$.

3. Kot primer za *transformacijsko grupo* vzemimo množico vseh vrtežev enakostraničnega trikotnika okrog njegovega središča, pri katerih se zavrti trikotnik popolnoma prekrije s prvotnim. Pravimo, da taki vrteži trikotnik *ohranjajo* ali, da je trikotnik na take vrteže *neobčutljiv*. Imamo le tri take vrteže: trikotnik lahko zavrtimo za poljuben cel večkratnik kotov 120° , 240° in 0° (identiteta). Označimo prvi vrtež z a , drugega z b in tretjega z e . Vrteži a , b , e tvorijo grupo z operacijo sestavljanja

teh vrtežev.

Operacijo v končni grupi lahko podamo s *tabelo*, ki ji rečemo tudi *grupna poštevanka*. Za zgled sestavimo tabelo za grupo iz primera 3:

o	e	a	b
e	e	a	b
a	a	b	e
b	b	e	a

Zapis je uporaben za končne grupe, katerih množice vsebujejo le malo elementov. Sicer pa se nepreglednosti izognemo tako, da poiščemo kar se da malo elementov, s katerimi lahko "izrazimo" vse elemente grupe.¹ Množici takih elementov rečemo *reduciran sistem generatorjev grupe*. Če tak nabor sestoji iz enega samega elementa, rečemo grupi *grupa z enim generatorjem*; če obstaja nabor z dvema elementoma, gre za *grupo z dvema generatorjema* itd.

Grupo z enim generatorjem smo srečali v zadnjem primeru. Že samo z elementom a lahko izrazimo vse elemente grupe: $b = a \circ a = a^2$, enota pa je $e = b \circ a = a \circ b = a^3$. Iz te zveze tudi sledi, da sta elementa a in b drug drugemu inverzna. Za dano grupo reducirani sistem generatorjev ni enolično določen. Grupo iz našega primera lahko generiramo na primer tudi z elementom b .

Primer neskončne grupe z enim generatorjem je na primer grupa celih števil. Generator je število 1.

Poglejmo še grupo iz štirih elementov e, a, b, c in z grupno poštevanko

o	e	a	b	c
e	e	a	b	c
a	a	e	c	b
b	b	c	e	a
c	c	b	a	e

Iz tablice preberemo, da lahko vse elemente grupe izrazimo že z a in b :

¹ Pokazati se da, da za vsako grupo tak minimalen nabor elementov obstaja in ni nujno en sam.

$$e = a^2 (= b^2) \text{ in } c = a \circ b (= b \circ a).$$

Z enim samim generatorjem te grupe ne moremo opisati. Za vajo se o tem prepričajte sami.

Grupam z enim generatorjem rečemo tudi *ciklične grupe*. Če je ciklična grupa končna, obstaja med elementi $e, a, a^2, \dots$ tudi taka potenca a^r , da je $a^r = e$. Grupo $\{e, a, a^2, \dots, a^{r-1}; a^r = e\}$ označujemo s $C_r(a)$. Če je ciklična grupa neskončna, so vse potence med seboj različne; tako grupo označimo s $C_\infty(a)$.

Vzemimo zdaj za množico $\mathcal{G}$ množico *transformacij* (to je povratno enoličnih preslikav) neke množice X , za operacijo pa sestavo preslikav. Take grupe imenujemo *transformacijske grupe*. Primer take grupe je *grupa vseh izometrij ravnine* (Evklidova grupa ravnine), pa *grupa translacij* (vzporednih premikov) ali *grupa vrtežev* (rotacijska grupa ravnine). Podobno lahko govorimo tudi o izometrijah trirazsežnega prostora ter o Evklidovi grupi trirazsežnega prostora.

Preslikavo dveh grup, pri kateri se elementi ene preslikajo povratno enolično na elemente druge in preide operacija prve v operacijo druge, imenujemo *izomorfizem*.

Poglejmo si najprej primer: logaritemska funkcija je izomorfizem $\ln : (\mathcal{R}^+, \circ) \mapsto (\mathcal{R}, +)$. Enakost $\ln(x \circ y) = \ln x + \ln y$, ki jo lahko zapišemo tudi v obliki $xy = \ln^{-1}(\ln x + \ln y)$, pove kako računamo produkt: logaritmiramo, seštejemo, antilogaritmiramo.

Prav lahko se je prepričati, da je grupa vseh premikov v ravnini izomorfnna grupi vektorjev ravnine. Grupa vrtežev okrog dane točke pa je izomorfna aditivni grupi kotov. Tudi ciklični grupi $C_r(a)$ in $C_r(b)$ sta izomorfni. Zaradi izomorfizma ju včasih sploh ne razlikujemo. Tedaj označimo ciklično grupo kar s C_r , neskončno ciklično grupo pa s C_∞ .

Definirajmo še *podgrupo*. Če je množica $\mathcal{H}$ podmnožica $\mathcal{G}$, $\mathcal{H} \subset \mathcal{G}$ in je $\mathcal{H}$ grupa za isto operacijo kot $\mathcal{G}$, rečemo, da je grupa $\mathcal{H}$ *podgrupa* grupe $\mathcal{G}$.

Grupa $C_2 = \{e, a^2\}$ je na primer podgrupa grupe $C_4 = \{e, a, a^2, a^4\}$.

Zdaj smo dovolj pripravljeni, da si pobliže ogledamo *Evklidovo grupo ravnine*. Posebej nas bodo zanimala njene podgrupe.

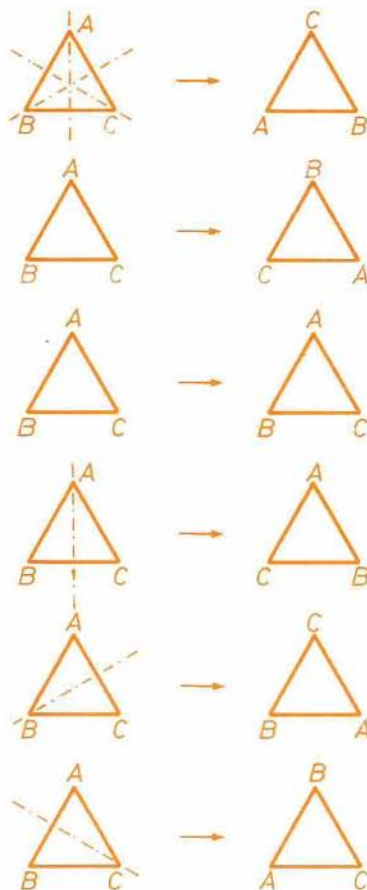
Vzporedni premiki v ravnini sestavljajo podgrupo Evklidove grupe, prav tako tudi vsi vrteži okoli izbrane točke. Ker za vzporedne premike lahko

izberemo različne smeri, za središče vrteža pa vsako točko ravnine, je takih podgrup Evklidove grupe neskončno. Vse translacijske grupe kot tudi grupe vrtežev so seveda med seboj izomorfne.

Kako pa je z zrcaljenji? Zrcaljenje Z_P čez dano premico in identiteta I tvorita grupo. Ker ima samo dva elementa ($Z_P \circ Z_P = I$), je izomorfna C_2 . Takih podgrup je v Evklidovi grupi spet toliko, kot je različnih premic v ravnini, torej neskončno. Sestava zrcaljenj preko dveh premic je vzporedni premik, če sta premici vzporedni, in vrtež, če se premici sekata. Ker torej množica vseh zrcaljenj ni zaprta za sestavo, ni podgrupa Evklidove grupe.

Za nas bodo posebno zanimive podgrupe Evklidove grupe z lastnostjo, da vsi njihovi elementi ohranjajo kakšen izbrani lik. Bralec se lahko sam prepriča, da množica vseh izometrij ravnine, s katerimi se izbrani lik preslika nase, zares tvorijo podgrupo. Imenujmo jo *simetrijska grupa lika*. Simetrijske grupe likov so odvisne od oblike lika. Tako imajo podobni liki iste simetrijske grupe.

Če je lik popolnoma nesimetričen, vsebuje njegova simetrijska grupa le identiteto. Simetrijska grupa črk E in A je izomorfna C_2 ; generator je zrcaljenje čez simetralo



Slika 2. Simetrijska grupa enakostraničnega trikotnika

² Več o tem lahko bralec izve iz knjige I. Grossman, W. Magnus, *Grupe i njihovi grafovi*, Školska knjiga, Zagreb 1975.

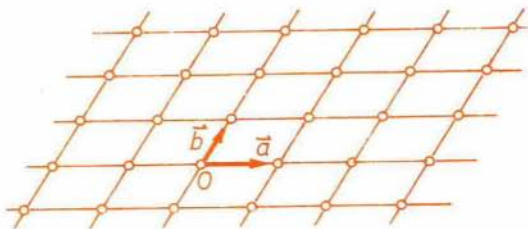
črke. Simetrijska grupa črke N je tudi izomorfná C_2 ; generator je vrtež za 180° okrog njene srednje točke.

V abstraktnem smislu gre torej za isto grupo, čeprav imata različno geometrijsko vsebino. Simetrijska grupa enakostraničnega trikotnika ima 6 elementov, generatorja sta zrcaljenje čez eno simetralo in vrtež za kot 120° okrog središča lika (slika 2).

Simetrijske grupe pravilnih večkotnikov imenujemo *diedrske grupe*. Znamujemo jih z D_n , kjer je n število oglišč pravilnega večkotnika. Generatorja sta zrcaljenje preko ene od simetral in vrtež za kot $2\pi/n$ okrog središča trikotnika.²

Končno omenimo še *simetrijsko grupo ravninske mreže*. Ravninsko mrežo dobimo tako, da si najprej izberemo par nevzporednih vektorjev $\vec{a}$ in $\vec{b}$ z izhodiščem O , nato pa nosilke vektorjev premaknemo s translacijsko grupo, ki jo *generirata* translaciji T_a in T_b (slika 3). S tem povemo, da lahko vse elemente te grupe izrazimo samo z njima. *Vozlišča* mreže, to so preseki teh premic, so določena z vektorji

$$n\vec{a} + m\vec{b} \quad n, m \in \mathbb{Z}.$$



Slika 3. Ravninska mreža

Rečemo tudi: vozlišča dobimo tako, da delujemo s translacijsko grupo na izhodišče O . Simetrijska grupa ravninske mreže vsebuje kot podgrupo vsaj simetrijsko grupo, ki jo generirata T_a in T_b , pa tudi rotacijsko grupo, ki jo generira vrtež za 180° . Le redke so mreže, ki jih ohranijo tudi druge rotacijske grupe; a še te so kvečjemu take, ki jih generirajo vrteži za kote $360^\circ/n$, kjer je n 1, 2, 3, 4 ali 6.

S to ugotovitvijo smo se že dotaknili *kristalografskih grup*, ki ohranjajo mrežo. Omenimo le, da so na neskončnem traku našeli 7, na ravnini 17 in v prostoru 230 takih grup. Ime so dobile po tem, ker ohranjajo prostorsko razporeditev atomov v kristalih. Zakaj jih obstaja prav toliko, je mogoče

ugotoviti z zahtevnejšim in globljim pogledom v teorijo grup.

Spomnimo se, da smo stalno ponavljajoč se vzorec na neskončnem traku v eni prejšnjih številki Preseka imenovali *ornament na traku*. Analogno lahko imenujemo *ornament na ravnini* vsak, na poseben način ponavljajoč se vzorec, ki izpolnjuje ravnino.

Tako kot smo natančnejšo definicijo ornamenta na traku oprli na izometrije, poskusimo njegovo definicijo na ravnini opreti na teorijo grup, saj smo spoznali, da simetrijska grupa začetni vzorec ohranja. Torej lahko rečemo: *Simetrijska grupa ornamenta v ravnini je grupa vseh izometrij ravnine, ki ornament ohranjajo.*

Ko zaslutimo, da je to v tesni zvezi s simetrijsko grupo mrež, smo dovolj pripravljeni, da se v naslednji številki Preseka lahko lotimo ornamentov na ravnini.

Milena Strnad

ŠTEVILSKA KRIŽANKA – Rešitev s str. 52

¹ 1	² 4		³ 8	⁴ 7	⁵ 2	⁵ 5
	⁶ 6	⁷ 1	4	5		7
⁸ 3	4	3		⁹ 3	¹⁰ 8	4
0		¹¹ 3	¹² 1	1	2	
¹³ 2	¹⁴ 3	1	1		¹⁵ 3	¹⁶ 6
¹⁷ 5	1		¹⁸ 5	¹⁹ 5	2	2
	²⁰ 4	7	2	5		5

TEKMOVANJA

8. ŠOLSKO TEKMOVANJE IZ MATEMATIKE ZA SREDNJEŠOLCE

V decembru 1991 smo za prvi preizkus znanja iz matematike poslali na šole spodnje naloge. V četrto nalogo za četrti letnik se je prikradla neljuba napaka, za kar se tekmovalcem opravičujemo. Tu objavljamo popravljeno inačico.

Prvi letnik

1. Kolikšna je vrednost izraza

$$ab + ac + ad + bc + bd + cd,$$

če je

$$a + b + c + d = 0 \quad \text{in} \quad a^2 + b^2 + c^2 + d^2 = 2?$$

2. V enakosti $MUHA + MUHA = SLON$ zamenjaj črke s števki (ciframi). Različne črke pomenijo različne števke. Soglasniki predstavljajo števke ene parnosti, samoglasniki pa števke druge parnosti.

3. Janezek je med počitnicami zaslužil 84 bankovcev, od tega jih je bilo nekaj po 5 tolarjev in nekaj po 50 tolarjev. Sošolec Miha mu je ponudil zamenjavo: za vsak bankovec po 5 tolarjev mu da bankovec za 10 tolarjev in za vsak bankovec po 50 tolarjev dva bankovca za 10 tolarjev. Janezek je hitro izračunal, da pri tej menjavi ničesar ne pridobi in ničesar ne izgubi. Koliko bankovcev po 5 tolarjev je imel?

4. Utemelji odgovor na vprašanje, ali obstaja pravokotnik, ki ima obseg enak vsoti dolžin diagonal.

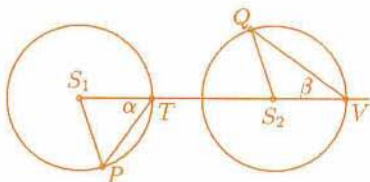
Drugi letnik

1. Pokaži, da za poljubno realno število $5 \leq a \leq 10$ velja enakost

$$\sqrt{a + 3 - 4\sqrt{a - 1}} + \sqrt{a + 8 - 6\sqrt{a - 1}} = 1.$$

2. Naj bosta $\vec{a}$ in $\vec{b}$ enotska vektorja. Vektor $\vec{c} = \vec{a} + 2\vec{b}$ je pravokoten na vektor $\vec{d} = 5\vec{a} - 4\vec{b}$. Kolikšen je kot med vektorjema $\vec{a}$ in $\vec{b}$?
3. Konstruiraj krožnico, ki se dotika koordinatnih osi in gre skozi dano točko na simetrali lihih kvadrantov, če ima ta točka pozitivni koordinati.

4. Naj bosta S_1 in S_2 središči krožnic z enakima polmeroma in naj bo polmer S_1P prve krožnice vzporeden s polmerom S_2Q druge krožnice. Točke S_1 , T , S_2 in V ležijo na isti premici. Poišči zvezo med kotoma α in β .



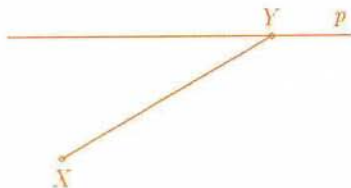
Tretji letnik

1. Poišči vsa realna števila a , ki zadoščajo enačbi $a(a-1)(a-3)(a-4) = (a-2)^4$.

2. Reši enačbo $4^x + 9^x + 25^x = 6^x + 10^x + 15^x$.

3. Pokaži, da izraz $\frac{(1 - \sin \alpha - \cos \alpha)(1 - \sin \alpha + \cos \alpha)}{\sin \alpha(1 - \sin \alpha)}$ ni odvisen od α .

4. Dani sta premica p in daljica XY , ki imata edino skupno točko Y . Daljica ni pravokotna na premico p (slika). Če izberemo na premici točko Z tako, da je vrednost ulomka $\frac{\overline{ZY}}{\overline{ZX}}$ največja mogoča, velja:



(a) $\angle XYZ = 90^\circ$ (b) $\angle ZXY = 90^\circ$ (c) $ZX = ZY$ (d) $ZY = 2 \cdot ZX$

Utemelji svojo izbiro.

Četrty letnik

1. Vsota 101 zaporednih lihih števil je 12827. Katero je najmanjše liho število, upoštevano v vsoti?

2. Za funkcijo $f: \mathbb{Q} \rightarrow \mathbb{Q}$ velja $f(x) + 3f\left(\frac{1}{x}\right) = x^2$, če je $x \neq 0$. Določi $f(2)$.

3. Enačba $(x+1)y^2 - 2xy + x - 1 = 0$ določa dve krivulji. Nariši njuna grafa.

4. Poišči vse realne rešitve enačbe $x + \operatorname{tg} \frac{\pi x}{8} + 2^x = 7$, ki ležijo na intervalu $(-4, 4)$.

Darjo Felda

REŠITVE NALOG

PRENIČLANA ŠTEVILA – Rešitev s str. 59

1. Poiščimo najprej vsa trimestna števila v $\mathcal{M}$. Če kakšno obstaja, ga lahko zapišemo v obliki $\overline{x_2 0 x_1}$, kjer sta x_1 in x_2 neničelni števk (cifri). Poleg tega obstajajo take neničelne števk y_1 , y_2 in y_3 , da velja

$$\overline{x_2 0 x_1}^2 = \overline{y_3 0 y_2 0 y_1},$$

torej

$$(x_1 + x_2 10^2)^2 = y_1 + y_2 10^2 + y_3 10^4$$

in tedaj

$$x_1^2 + 2x_1x_210^2 + x_2^210^4 = y_1 + y_210^2 + y_310^4. \quad (1)$$

Od tod sledi, da dasta števili x_1^2 in y_1 pri deljenju s 100 enak ostanek. Ker sta obe manjši od 100, velja enakost $y_1 = x_1^2$, ki pove tudi, da je $x_1 \leq 3$. Upoštevajmo to v (1) in na obeh straneh delimo s 100. Že vidimo, da sta tudi števili y_2 in $2x_1x_2$ manjši od 100 in dasta pri deljenju s 100 enak ostanek, torej sta enaki: $y_2 = 2x_1x_2$. Spet se vrnemo do (1) in najdemo še zvezo $y_3 = x_2^2$. Ponovimo dobljene enakosti:

$$y_1 = x_1^2, \quad y_2 = 2x_1x_2, \quad y_3 = x_2^2,$$

iz katerih povzamemo ocene

$$x_1 \leq 3, \quad x_2 \leq 3, \quad x_1x_2 \leq 4,$$

ki vodijo do iskanih trimestnih števil

$$101, 102, 103, 201, 202, 301.$$

V $\mathcal{M}$ ni štirimestnih števil, petmestna pa dobimo podobno kot trimestna. Naštejmo jih:

$$10101, 10102, 10103, 10201, 10202, 20101, 20102, 20201, 30101,$$

podrobnosti pa prepustimo bralcu.

2. Poiščimo najprej vsa 11-mestna števila iz $\mathcal{M}$, torej vse šesterice neničelnih števk $x_1, x_2, \dots, x_6$, za katere obstajajo take neničelne števk $y_1, y_2, \dots, y_{11}$,

da velja

$$\overline{x_6 0 x_5 0 x_4 0 x_3 0 x_2 0 x_1}^2 = \overline{y_{11} 0 y_{10} 0 y_9 0 \cdots y_3 0 y_2 0 y_1}.$$

Uredimo gornjo enakost po potencah števila 10

$$\begin{aligned} & x_1^2 + 2x_1x_210^2 + (2x_1x_3 + x_2^2)10^4 + (2x_1x_4 + 2x_2x_3)10^6 + \\ & + (2x_1x_5 + 2x_2x_4 + x_3^2)10^8 + (2x_1x_6 + 2x_2x_5 + 2x_3x_4)10^{10} + \\ & + (2x_2x_6 + 2x_3x_5 + x_4^2)10^{12} + (2x_3x_6 + 2x_4x_5)10^{14} + \\ & + (2x_4x_6 + x_5^2)10^{16} + 2x_5x_610^{18} + x_6^210^{20} = \\ & = y_1 + y_210^2 + y_310^4 + y_410^6 + y_510^8 + \cdots + y_{11}10^{20} \end{aligned} \quad (2)$$

in sklepajmo tako kot pri trimestnih številih. Najprej vidimo, da velja $y_1 = x_1^2$ in $y_2 = 2x_1x_2$. Od tod iz (2) sledi, da števili y_3 in $2x_1x_3 + x_2^2$ pri deljenju s 100 dasta enaka ostanka. Ker sta obe manjši od 100 (zakaj?), sta enaki. Tako postopoma ugotovimo, da sta poljubna faktorja ob enakih potencah števila 10 v (2) enaka. Pridelamo torej 11 enakosti. Oglejmo si šesto:

$$y_6 = 2(x_1x_6 + x_2x_5 + x_3x_4).$$

Ker so vsa števila v njej naravna in manjša od 10, je kvečjemu en x_i večji od 1, pa še ta je lahko največ 2. Te možnosti dajo vsa 11-mestna števila iz $\mathcal{M}$:

$$\begin{aligned} & 10101010101, \\ & 10101010102, 10101010201, 10101020101, \\ & 10102010101, 10201010101, 20101010101. \end{aligned}$$

Podobno obdelamo 13-mestna števila iz $\mathcal{M}$. Prvih šest enakosti je prav takih kot za 11-mestna števila, sedma pa je

$$y_7 = 2(x_1x_7 + x_2x_6 + x_3x_5) + x_4^2.$$

Ta skupaj s šesto enakostjo da vsa iskana 13-mestna števila:

$$\begin{aligned} & 1010101010101, \\ & 1010101010102, 1010101010201, 1010101020101, \\ & 1010201010101, 1020101010101, 2010101010101. \end{aligned}$$

UPORABA KOMPLEKSNIH ŠTEVIL V RAVNINSKI GEOMETRIJI – drugi del

V prvi številki Preseka smo definirali kompleksni nagib premice skozi točki α in β kot $\chi = \frac{\beta - \alpha}{\bar{\beta} - \bar{\alpha}}$. Dokazali smo tudi naslednji trditvi:

Premici sta vzporedni natanko tedaj, ko sta kompleksna nagiba enaka.

Premici sta pravokotni natanko tedaj, ko sta kompleksna nagiba nasprotna.

Tako smo se pripravili na obravnavo trikotnika v kompleksni ravnini. Naj bodo tri različna kompleksna števila α , β in γ oglišča trikotnika. Predpostavimo lahko, da leži središče trikotniku očrtane krožnice (označimo ga z o) v koordinatnem izhodišču (torej $o = 0$) in da je polmer tega kroga enak 1. Tedaj je $\alpha\bar{\alpha} = \beta\bar{\beta} = \gamma\bar{\gamma} = 1$. Če pri teh pogojih izračunamo kompleksni nagib premice, na kateri ležita točki α in β , dobimo

$$\frac{\beta - \alpha}{\bar{\beta} - \bar{\alpha}} = \frac{\beta\alpha\bar{\alpha} - \alpha\beta\bar{\beta}}{\bar{\beta} - \bar{\alpha}} = -\alpha\beta.$$

Podobno dobimo za nosilke drugih dveh trikotnikovih stranic.

Oglejmo si sedaj nekaj zanimivih rezultatov:

- Recimo, da je trikotnik enakokrak z vrhom pri γ . V tem primeru je premica skozi γ in $-\gamma$ simetrala daljice med α in β in je zato pravokotna na premico skozi α in β . S kompleksnimi nagibi to zapišemo

$$\frac{\gamma - (-\gamma)}{\bar{\gamma} - (-\bar{\gamma})} = \gamma^2 = \alpha\beta.$$

Dokaz lahko preberemo nazaj tudi v obratni smeri.

Torej: trikotnik je enakokrak (z vrhom pri γ) natanko tedaj, ko velja za oglišča zveza $\alpha\beta = \gamma^2$.

- Kako bi izračunali nožišče višine iz γ v poljubnem trikotniku?

Nožišče označimo z γ_1 in zapišimo zvezi: $\frac{\gamma_1 - \gamma}{\bar{\gamma}_1 - \bar{\gamma}} = -\frac{\beta - \alpha}{\bar{\beta} - \bar{\alpha}} = \alpha\beta$ in

$\frac{\beta - \alpha}{\bar{\beta} - \bar{\alpha}} = \frac{\gamma_1 - \alpha}{\bar{\gamma}_1 - \bar{\alpha}}$. S prvo zvezo smo zahtevali, da je premica skozi γ in γ_1 pravokotna na premico skozi α in β , z drugo pa, da leži γ_1 na premici skozi

α in β . Sistem (z neznankama γ_1 in $\overline{\gamma_1}$) rešimo in dobimo

$$\gamma_1 = \frac{\alpha + \beta + \gamma - \alpha\beta\overline{\gamma}}{2}.$$

Podobno določimo še ostali dve nožišči.

- Tudi višinska točka κ trikotnika ne dela težav:

Zapišimo pogoja pravokotnosti višin na dve stranici: $\frac{\kappa - \gamma}{\kappa - \overline{\gamma}} = -\frac{\beta - \alpha}{\overline{\beta} - \overline{\alpha}} =$
 $= \alpha\beta$ in $\frac{\kappa - \beta}{\kappa - \overline{\beta}} = -\frac{\gamma - \alpha}{\overline{\gamma} - \overline{\alpha}} = \alpha\gamma$. Sistem rešimo in dobimo $\kappa = \alpha + \beta + \gamma$.
 Enostavno preverimo, da smo zadostili tudi pogoju pravokotnosti višine na tretjo stranico: $\frac{\kappa - \alpha}{\kappa - \overline{\alpha}} = -\frac{\gamma - \beta}{\overline{\gamma} - \overline{\beta}} = \beta\gamma$.

- Težišče trikotnika lahko zapišemo takoj: $\tau = \frac{\alpha + \beta + \gamma}{3}$.

Vidimo, da ležijo točke σ , τ in κ na isti premici. To premico imenujemo *Eulerjeva premica*.

- Oglejmo si še neko karakteristično lastnost enakokrakih trikotnikov:

Naj bo trikotnik enakokrak z vrhom γ . Potem je Eulerjeva premica pravokotna na osnovnico in lahko zapišemo $\chi_E = \alpha\beta$. Tudi tu velja obrat:

Iz $\chi_E = \frac{\alpha + \beta + \gamma}{\overline{\alpha} + \overline{\beta} + \overline{\gamma}} = \alpha\beta$ z nekaj računanja izpeljemo $\alpha\beta = \gamma^2$.

Trikotnik je torej enakokrak (z vrhom γ) natanko tedaj, ko za nagib Eulerjeve premice velja $\chi_E = \alpha\beta$.

- Na tej premici leži tudi središče *krožnice devetih točk*; tega si bomo sedaj ogledali.

Naj bo γ_2 razpolovišče daljice od α do β . Torej $\gamma_2 = \frac{\alpha + \beta}{2}$. Podobno označimo še α_2 in β_2 .

Naj bo γ_3 razpolovišče daljice od γ do κ . Torej $\gamma_3 = \frac{\gamma + \kappa}{2} = \gamma + \frac{\alpha + \beta}{2}$. Podobno označimo še α_3 in β_3 .

Hkrati z že izračunanimi nožišči višin (točke $\alpha_1, \beta_1, \gamma_1$) smo tako definirali devet točk: $\alpha_i, \beta_i, \gamma_i$ ($i=1,2,3$).

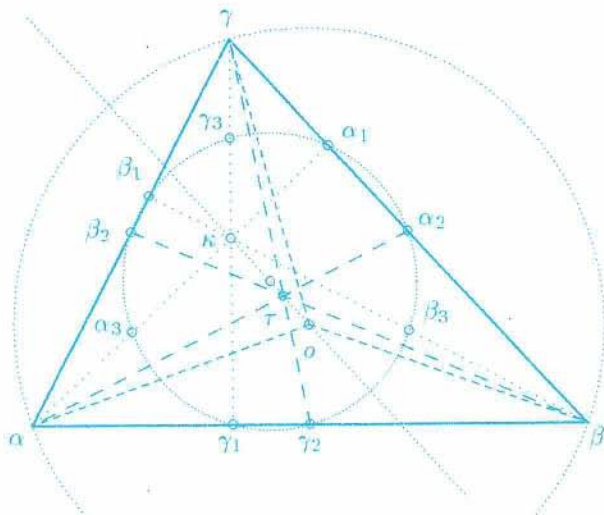
Vse te točke ležijo na isti krožnici, kar ni težko videti, saj so vse enako od-

daljene od točke $\delta = \frac{\alpha + \beta + \gamma}{2}$.

Izračunajmo najprej tri razdalje: $|\gamma_1 - \delta| = |-\alpha\beta\gamma/2| = 1/2$

$|\gamma_2 - \delta| = |-\gamma/2| = 1/2$ in $|\gamma_3 - \delta| = |\gamma/2| = 1/2$. Ostalih šest razdalj pa nam pravzaprav ni treba računati, saj lahko v gornjih treh enačbah dvakrat ciklično zamenjamo števila α, β in γ .

Središče δ tega kroga s polmerom $1/2$ pa seveda leži na Eulerjevi premici.

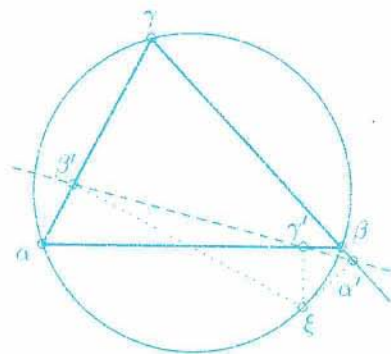


Krožnica devetih točk

- Oglejmo si še en primer uporabe kompleksnega nagiba:

Trikotniku z oglišči α, β in γ očrtamo krožnico. Spet lahko predpostavimo, da leži središče trikotniku očrtane krožnice v koordinatnem izhodišču in da je njen polmer enak 1.

Na krožnici izberemo točko ξ . Pravokotne projekcije te točke na prenice nosilke posameznih stranic označimo z α', β' in γ' . Dokazali bomo, da ležijo te točke na isti premici;



imenujemo jo *Simsonova premica*.

Izračunali smo že

$$\gamma' = \frac{\alpha + \beta + \xi - \alpha\beta\bar{\xi}}{2} \quad \text{in} \quad \beta' = \frac{\alpha + \gamma + \xi - \alpha\gamma\bar{\xi}}{2}.$$

Z nekaj računske spretnosti hitro vidimo, da je $\frac{\gamma' - \beta'}{\gamma' - \alpha'} = \alpha\beta\gamma\bar{\xi}$. Zaradi simetrije velja tudi $\frac{\gamma' - \alpha'}{\gamma' - \beta'} = \alpha\beta\gamma\bar{\xi}$, kar pa že pomeni, da so točke α' , β' in γ' kolinearne.

• Več truda in računske spretnosti pa zahteva izračun središča trikotniku vrtane krožnice, ki ga označimo s σ .

Navedimo samo rezultat: $\sigma = \sqrt{\alpha\beta} + \sqrt{\beta\gamma} + \sqrt{\gamma\alpha}$. Pri izračunu kvadratnega korena $\sqrt{\mu\nu}$ izberemo vedno tisto število, ki leži na sredini pozitivno orientiranega loka od μ do ν .

• Za zaključek pa izpeljimo še eno karakteristično lastnost enakokrakih trikotnikov:

Trikotnik je enakokrak natanko tedaj, ko leži središče vrtane krožnice na Eulerjevi premici.

Poiščimo najprej enačbo za nagib premice skozi o in σ :

$$\begin{aligned} \chi_{\sigma} &= \frac{\sqrt{\alpha\beta} + \sqrt{\beta\gamma} + \sqrt{\gamma\alpha}}{\frac{1}{\sqrt{\alpha\beta}} + \frac{1}{\sqrt{\beta\gamma}} + \frac{1}{\sqrt{\gamma\alpha}}} \\ &= \frac{\alpha\beta\sqrt{\gamma} + \beta\gamma\sqrt{\alpha} + \gamma\alpha\sqrt{\beta}}{\sqrt{\alpha} + \sqrt{\beta} + \sqrt{\gamma}} \end{aligned}$$

Trikotnik je torej enakokrak natanko tedaj, ko je $\chi_{\sigma} = \chi_E$.

V ta namen si oglejmo izraz $\chi_{\sigma} - \chi_E$. Z veliko mero potrpežljivosti izračunamo razliko teh dveh ulomkov in števec tako dobljenega ulomka razstavimo. Izraz v števcu je $(\sqrt{\beta\gamma} - \alpha)(\sqrt{\gamma\alpha} - \beta)(\sqrt{\alpha\beta} - \gamma)\sqrt{\alpha\beta\gamma}$. Odtod lahko preberemo dokaz v obe smeri.

Uporaba kompleksnih števil v geometriji ni težka – zahteva nekaj miselnega napora in precej računske spretnosti.

Matjaž Željko

UPORABA OSTANKOV PRI PROBLEMIH IZ TEORIJE ŠTEVIL

Ogledali si bomo uporabo ostankov pri nekaterih problemih iz teorije naravnih števil, ki navidez nimajo z ostanki nobene direktne zveze. Včasih se namreč izkaže, da različni algebrski izrazi ne morejo biti povsem poljubni, ampak imajo pri deljenju z nekaterimi števili povsem določene ostanke. Oglejmo si najprej preprost zgled.

Zgled 1. *Dokaži, da enačba $x^2 - 3y = 14$ nima rešitve v naravnih številih.*

Pri deljenju s 3 ima število x lahko tri različne ostanke:

1. možnost. Število x je oblike $3k$.

Tedaj je število $x^2 - 3y$ deljivo s 3 (z drugimi besedami $x^2 - 3y$ ima pri deljenju s 3 ostanek 0) in zato ne more biti enako 14, ki ima pri deljenju s 3 ostanek 2.

2. možnost. Število x je oblike $3k + 1$.

Tedaj je

$$x^2 - 3y = 9k^2 + 6k + 1 - 3y = 3(3k^2 + 2k - y) + 1,$$

torej ima število $x^2 - 3y$ pri deljenju s 3 ostanek 1 in zato ne more biti enako 14.

3. možnost. Število x je oblike $3k + 2$.

Tedaj je

$$x^2 - 3y = 9k^2 + 12k + 4 - 3y = 3(3k^2 + 4k + 1 - y) + 1,$$

torej število $x^2 - 3y$ ne more biti enako 14.

Ker smo upoštevali vse možnosti in rešitve nismo dobili, enačba pač ni rešljiva v naravnih številih.

S podobnim prijemom bomo ugnali malce drugačen problem.

Zgled 2. *Poišči vsa tista naravna števila n , za katera je število $2^n - 1$ popolni kvadrat.*

Napišimo nekaj prvih členov zaporedja:

$$2^1 - 1 = 1$$

$$2^2 - 1 = 3$$

$$2^3 - 1 = 7$$

$$2^4 - 1 = 15$$

$$2^5 - 1 = 31.$$

Vidimo, da dajo vsi členi, razen prvega, pri deljenju s 4 ostanek 3. Tudi v splošnem to z lahkoto dokažemo, saj je za vsak $n \geq 2$ število 2^n deljivo s 4. Od tod sledi:

Če bi veljalo $2^n - 1 = m^2$, potem bi moralo biti število m liho.

1. možnost. Število m je oblike $4k + 1$.

Tedaj je

$$m^2 = 16k^2 + 8k + 1 = 4(4k^2 + 2k) + 1$$

in da pri deljenju s 4 ostanek 1, zato ne more biti enako številu $2^n - 1$ za $n \geq 2$.

2. možnost. Število m je oblike $4k + 3$.

Tedaj je

$$m^2 = 16k^2 + 24k + 9 = 4(4k^2 + 6k + 2) + 1$$

in podobno kot prej ne more biti enako številu $2^n - 1$ za $n \geq 2$. Ostane nam še možnost $n = 1$, ki nam da edino rešitev $2^1 - 1 = 1^2$.

Zgled 3. *Dokaži, da obstaja neskončno mnogo naravnih števil, ki jih ni mogoče zapisati kot vsoto treh kubov naravnih števil.*

Če vzamemo naravno število n , moramo rešiti enačbo $n = x^3 + y^3 + z^3$ v naravnih številih ali pa pokazati, da rešitev te enačbe ne obstaja. Takoj se vidi, da za števila 2, 4, 5, 6, 7, 9, 11 enačba ni rešljiva. Na prvi pogled pa ni jasno, kaj je z rešljivostjo te enačbe za velike n . Na pomoč bomo tokrat poklicali ostanke pri deljenju z 9. Vzemimo poljubno naravno število x .

1. možnost. Število x je oblike $3k$.

Tedaj je x^3 očitno deljiv z 9.

2. možnost. Število x je oblike $3k + 1$.

Tedaj

$$x^3 = 27k^3 + 27k^2 + 9k + 1 = 9(3k^3 + 3k^2 + k) + 1$$

da pri deljenju z 9 ostane 1.

3. možnost. Število x je oblike $3k + 2$.

Tedaj

$$x^3 = 27k^3 + 54k^2 + 36k + 8 = 9(3k^3 + 6k^2 + 4k) + 8$$

da pri deljenju z 9 ostane 8.

To pomeni, da lahko dajo števila x^3 , y^3 in z^3 pri deljenju z 9 ostanke 0, 1 ali 8. Zdaj imamo 27 možnih kombinacij glede na ostanke posameznih števil x^3 , y^3 in z^3 . Če preverimo vse, dobimo, da ima število $x^3 + y^3 + z^3$ lahko pri deljenju z 9 ostanek 0, 1, 2, 3, 6, 7 ali 8. To pomeni, da tistih števil, ki dajo pri deljenju z 9 ostanek 4 ali 5, ni mogoče izraziti kot vsoto treh kubov. Seveda je takih števil neskončno.

Še več informacij o ostankih dobimo takrat, ko imamo opravka s praštevilci. Pri deljenju s 6 lahko liho število daje ostanek 1, 3 ali 5. Če pa imamo praštevilo različno od 3, potem pri deljenju s 6 tudi ostanek 3 ni možen. Če bi namreč imeli $p = 6k + 3 = 3(2k + 1)$, bi število p ne bilo praštevilo. Ta razmislek nam bo prišel prav v naslednjem zgledu.

Zgled 4. Dokaži, da je število $p^2 - 1$ deljivo s 24 za vsako praštevilo p , ki je večje od 4:

1. možnost Število p je oblike $6k + 1$. Tedaj je

$$p^2 - 1 = 36k^2 + 12k = 12k(3k + 1).$$

Torej je število $p^2 - 1$ deljivo z 12. Hitro se lahko prepričate, da je eno od števil k in $3k + 1$ sodo, drugo pa liho, kar pomeni, da je število $k(3k + 1)$ deljivo z 2, število $p^2 - 1$ pa s 24.

2. možnost. Število p je oblike $6k + 5$.

Tedaj je

$$p^2 - 1 = 36k^2 + 60k + 24 = 12(3k^2 + 5k + 2).$$

Hitro se lahko prepričate, da je število $3k^2 + 5k + 2$ vedno sodo, zato je število $p^2 - 1$ deljivo s 24.

Za konec pa še en zgled s praštevilci.

Zgled 5. Poišči vsa taka praštevila p , da je $14p^2 + 1$ praštevilo.

Naj bo $p \neq 3$. Ker je p praštevilo, ni deljivo s 3, zato daje pri deljenju s 3 ostanek bodisi 1 bodisi 2.

1. možnost. Število p je oblike $3k + 1$.

Tedaj je število

$$14p^2 + 1 = 9 \cdot 14k^2 + 6 \cdot 14k + 15 = 3(42k^2 + 28k + 5)$$

in zato ni praštevilo.

2. možnost. Število p je oblike $3k + 2$.

Tedaj je število

$$14p^2 + 1 = 9 \cdot 14k^2 + 12 \cdot 14k + 57 = 3(42k^2 + 56k + 19)$$

in zato ni praštevilo. Če je $p = 3$, je $14p^2 + 1 = 127$. Z malce vztrajnosti se lahko sami prepričate, da je 127 praštevilo.

Borut Zalar

POIŠČI OSNOVI - Rešitev s str. 41

1. Iz števk v računu razberemo, da mora biti osnova a številskega sistema tako naravno število, večje od 7, ki izpolnjuje pogoj

$$(7a + 3)(2a + 5) = a^3 + 5a^2 + 6a + 3,$$

oziroma je rešitev enačbe

$$a^3 - 9a^2 - 35a - 12 = 0.$$

Ker so cele rešitve te enačbe lahko kvečjemu delitelji njenega prostega koeficienta 12, pride v poštev le $a = 12$. To je res rešitev, saj je

$$a^3 - 9a^2 - 35a - 12 = (a - 12)(a^2 + 3a + 1).$$

2. Ker je

$$(2a + 1)(a^2 + 2a + 2) = 2a^3 + 5a^2 + 6a + 2$$

identiteta, je račun pravilen v vsakem številskega sistemu z osnovo $a \geq 7$.

Marija Vencelj

TEKMOVANJA

NALOGE ZA OGREVANJE

Naloge so v letu 1992 reševali učenci osnovnih šol v občini Ljubljana Moste Polje na šolskem tekmovanju za bronasto Vegovo priznanje. Izbrali, priredili oziroma sestavili smo jih učitelji na sestanku občinskega aktiva matematikov.

5. razred

1. Izračunaj vrednost izraza $15 - 3 \cdot 2 + 2 \cdot (10^3 - 10) + (3^2 - 4)^2$.
2. V hotel je prišlo 100 turistov. 10 jih ni znalo ne nemško in ne francosko, 75 turistov je govorilo nemško, 83 pa francosko. Koliko turistov je govorilo oba jezika?
3. Krogu s premerom 6 cm očrtaj kvadrat.
4. Dana je premica p . Nariši krožnico k s polmerom 3 cm tako, da bo premica p njena tangenta.
5. Avto prevozi vsako uro 60 km. Za koliko mora povečati hitrost, da bo na vsakem kilometru pridobil pol minute?

6. razred

1. Izračunaj vrednost izraza $\left(15\frac{3}{8} - 3\frac{3}{4} \cdot 1\frac{3}{5}\right) \cdot 2\frac{2}{15} - 0,6 \cdot 33\frac{1}{3}$.
2. Učenec je prvi dan prebral $\frac{3}{5}$ knjige, drugi dan $\frac{5}{9}$ ostanka, tretji dan $\frac{3}{8}$ novega ostanka, za četrti dan pa mu je ostalo 80 strani. Koliko strani ima knjiga in po koliko strani je prebral prve tri dni?
3. Nariši trikotnik $\triangle ABC$, ki je dan s podatki: $a = 4$ cm, $v_a = 5$ cm, $t_a = 6$ cm.
4. Nariši enakokraki trapez, če je: $c = 4$ cm, $r_o = 4$ cm, $\delta = 120^\circ$.
5. Vnuka obiskujeta babico. Prvi jo obišče vsak šesti dan, drugi pa vsak osmi dan. V ponedeljek sta bila skupaj pri babici. Čez koliko dni in na kateri dan v tednu se bosta spet srečala pri njej?

7. razred

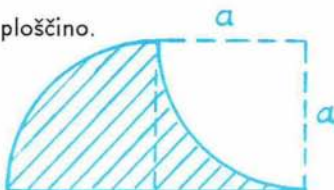
1. Izračunaj vrednost izraza:

$$\sqrt{\left(30 - \left(\frac{1}{2}\right)^2 + \frac{\frac{12}{4}}{0,02}\right) \cdot \left(\frac{0,04}{-1\frac{1}{2}}\right)^2 + \frac{62}{3 \cdot (-5)^2}}.$$

2. Zbiralec mleka je pripeljal na kmetijo prazno posodo. Kmet je najprej napolnil 60% posode. Ko je prilil še 3l, je ostalo še vedno 25% posode prazne. Koliko litrov drži posoda?
3. 25 delavcev bi izkopal jarek v 11 urah. Dve uri po začetku dela jim pride na pomoč še 20 delavcev. V koliko urah bo izkopan jarek?
4. V pravokotnem koordinatnem sistemu nariši točki $A(-2, -1)$ in $B(1, -3)$. Obe točki prezrcali čez abscisno os.

- a) Zapiši koordinate točk A' in B' .
- b) Nariši lik $ABB'A'$ in izračunaj njegovo ploščino.

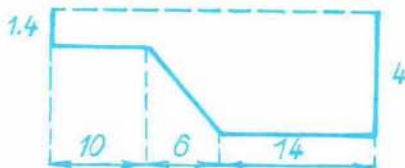
5. Ploščina črtkanega lika meri 25 cm^2 . Koliko meri njegov obseg?



8. razred

1. Reši enačbo $\frac{5(x-3)}{2} - \frac{7(x+1)}{6} - \frac{x-2}{3} = \frac{3(3x+1)}{4} - \frac{3(6x-5)}{5}$.
2. V ulomku je števec za 3 manjši od imenovalca. Če od števca in imenovalca odšteješ 2, dobiš ulomek $\frac{1}{2}$. Izračunaj obratno vrednost prvotnega ulomka.
3. Na sliki je vzdolžni prerez bazena. Njegova širina je 12 m.

- a) Koliko vode je v bazenu, če je njena gladina 2 dm pod robom?
- b) Za koliko se dvigne gladina vode v bazenu, če dotočimo 30 hl vode?



4. Nariši premici $y = -\frac{5}{12}x + 5$ in $y = -\frac{5}{12}x + 10$. Izračunaj ploščino lika, ki ga omeujeta dani premici in odseka na koordinatnih oseh.

5. Poenostavi izraz in izračunaj njegovo vrednost za $a = -\frac{1}{3}$:

$$\frac{2a^2 - 2}{3a^2 - 12} \cdot \frac{3a^2 - 12a + 12}{a^2 + 2a + 1} : \frac{8a - 16}{4a + 8}.$$

Aleksander Potočnik

TRIKOTNIK V KVADRATU – Rešitev s str. 23

Oglišča danega kvadrata označimo s K , L , M in N , oglišča vanj včrtanega enakostraničnega trikotnika pa z A , B in C . Očitno nobeni dve oglišči trikotnika ABC ne ležita na isti stranici kvadrata. Zato dve ležita na nasprotnih stranicah kvadrata: A , denimo, na KL ; B pa na MN . Označimo z D razpolovišče daljice AB in predpostavimo, da C leži na KN . Daljica BC je tedaj hipotenuza pravokotnih trikotnikov BNC in BDC , torej je štirikotnik $CDBN$ tetiven (središče njemu očrtane krožnice je razpolovišče hipotenuze BC) in velja

$$\angle CND = \angle CBD = 60^\circ.$$

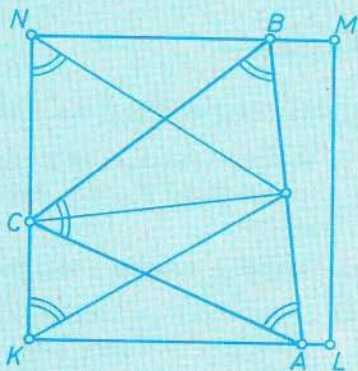
Podobno vidimo, da je

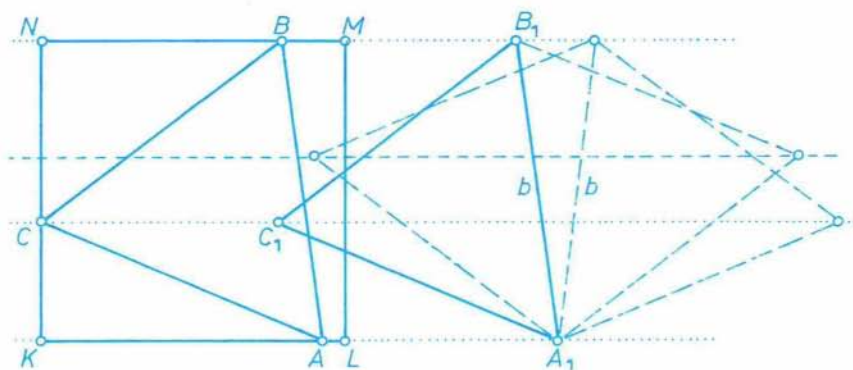
$$\angle CKD = \angle CAD = 60^\circ,$$

torej je trikotnik DNK enakostraničen. Kadar točka C leži na stranici LM , je iz enakih razlogov trikotnik DLM enakostraničen.

Tako, pripravljeni smo, da odgovorimo na postavljena vprašanja.

1. Izberimo na premici KL poljubno točko A_1 in z vzporednim premikom vzdolž KL preslikajmo včrtani enakostranični trikotnik ABC v $A_1B_1C_1$. Ker poznamo dolžino $|A_1B_1| = b$, lahko načrtamo trikotnik $A_1B_1C_1$ (takšnih trikotnikov je več), zaradi vzporednosti CC_1 in KL pa potem z vzporednim premikom še iskani trikotnik ABC .





Opisana konstrukcija nam pomaga poiskati število vseh vrtanih enakostraničnih trikotnikov z dano dolžino stranice. Najmanjši ima stranico dolgo a , tedaj $b = a$, pri največjem pa dolžino stranice izračunajmo s pomočjo slike:

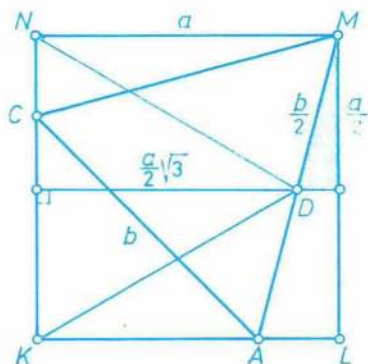
Pitagorov izrek nam da enakost

$$\left(\frac{b}{2}\right)^2 = \left(\frac{a}{2}\right)^2 + \left(a - \frac{a}{2}\sqrt{3}\right)^2 =$$

$$= (2 - \sqrt{3})a^2,$$

iz katere dobimo

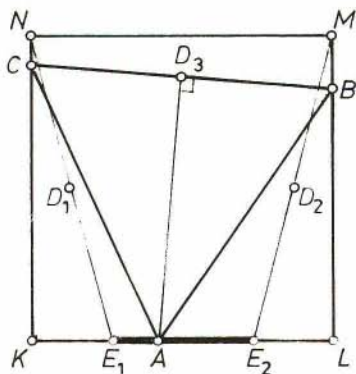
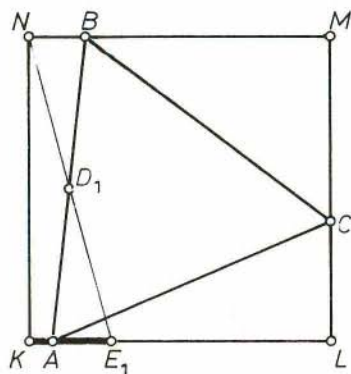
$$b = 2\sqrt{2 - \sqrt{3}}a = (\sqrt{6} - \sqrt{2})a.$$



Torej pri $b < a$ in pri $b > (\sqrt{6} - \sqrt{2})a$ vrtani trikotnik ne obstaja. Pri $b = a$ in pri $b = (\sqrt{6} - \sqrt{2})a$ obstajajo štirje vrtani enakostranični trikotniki, pri $a < b < (\sqrt{6} - \sqrt{2})a$ pa jih je osem.

2. Zaznamujmo z D_1 , D_2 in D_3 oglišča enakostraničnih trikotnikov LMD_1 , NKD_2 in KLD_3 , ki ležijo v kvadratu, nato pa na stranici KL določimo točki E_1 in E_2 , tako da je D_1 na daljci NE_1 in D_2 na daljci ME_2 .

S pomočjo dokazanih lastnosti lahko za vsako točko A osnovnice KL najdemo vrtani enakostranični trikotnik ABC in ugotovimo, da je en sam.

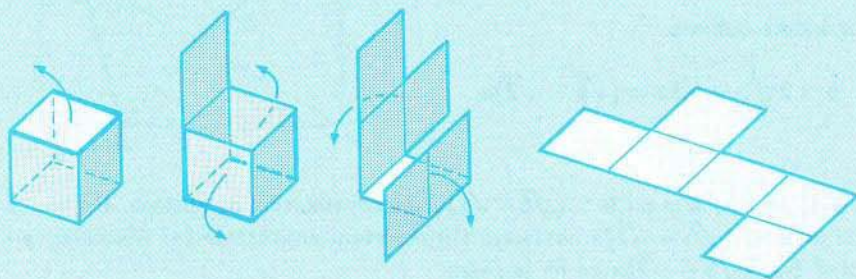


Kadar A leži na KE_1 , je eno od oglišč B, C zrcalna slika točke A glede na D_1 , kadar je A na E_2L , je eno od oglišč B, C zrcalna slika točke A glede na središče D_2 , če pa A leži na daljici E_1E_2 , sta B in C presečišči pravokotnice na AD_3 skozi D_3 s stranicama LM in KN . Podrobnosti prepustimo bralcu.

Boris Lavrič

ENOSTAVNI PLAŠČI

Plašč kocke razrežimo po nekaterih robovih kocke. Kadar je tako razrezani plašč iz enega kosa in ga lahko brez prekrivanja razgrnemo v ravnino, ga imenujmo *enostaven ravninski plašč* kocke.

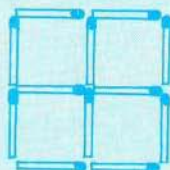


1. Koliko robov kocke je treba prerezati, da dobimo enostaven ravninski plašč?
2. Poiščite vse razgrnjene paroma neskladne enostavne ravninske plašče dane kocke.

Boris Lavrič

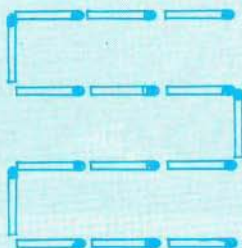
NALOGE ZA NAJMLAJŠE BRALCE

1. Postavi dvanajst vžigalic tako, kot vidiš na sliki.



Sedaj pa premakni natančno tri vžigalice tako, da bodo nastali trije kvadrati.

2. Postavi petnajst vžigalic tako, kot kaže slika.



Premakni natančno štiri vžigalice tako, da bosta nastala dva kvadrata.

3. Vzemi v roke škarje in kvadraten list papirja.

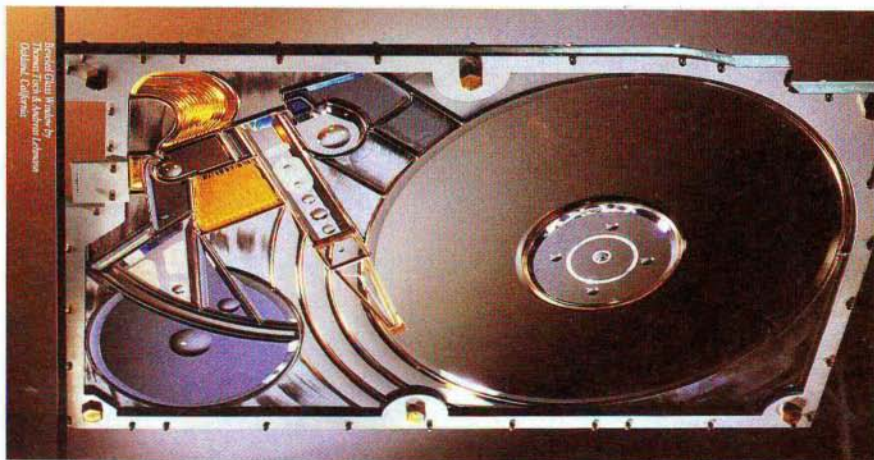
(a) S štirimi rezi razdeli kvadrat na 16 enakih delov.

(b) Z dvema rezoma razdeli kvadrat tako, da boš iz dobljenih delov lahko sestavil dva enako velika kvadrata.

Borut Zalar



Now replacing by
LaserDisc
Las Vegas, California



Hard Disk Drives
by
Thomson, Inc. & American
California, California



Head Assembly by
IBM Corp.
by the California