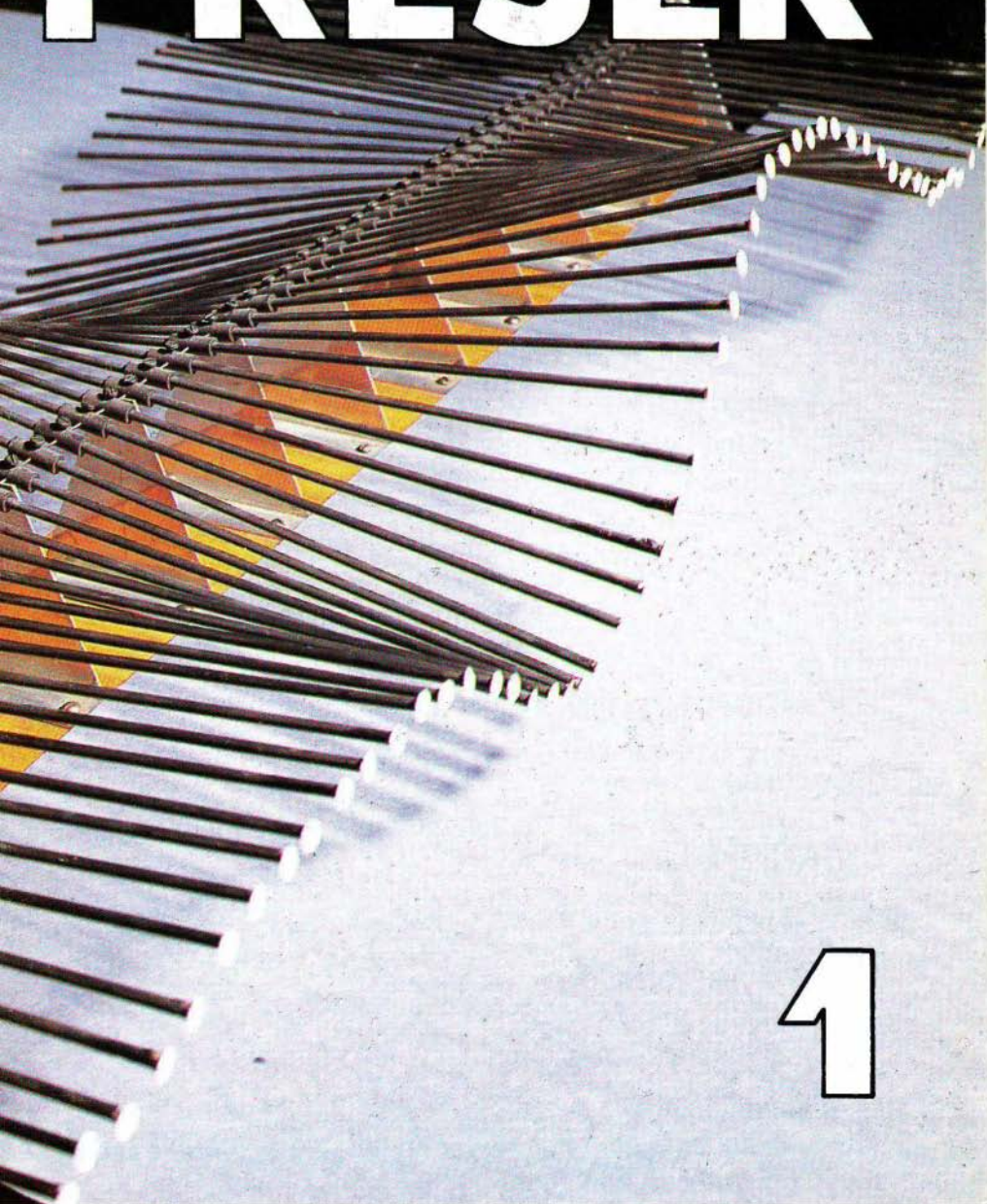


ISSN 0351-6652

DRUŠTVO MATEMATIKOV, FIZIKOV IN ASTRONOMOV SLOVENIJE, 20(1992-93)

PRESEK



1

VSEBINA

UVODNIK	Kaj prinaša prva številka Preseka (Marija Vencelj).....	1
FIZIKA	Valovni stroj (Andrej Likar) - (slike I. in IV. stran)	2-4
	Fizika v delih Julesa Verna (Lidija Babič)	12-19
	Ob letalskem poku so se zatresla tla (Janez Strnad)	30-31
NALOGE	Dve igri s števili (Dušan Murovec)	5
	Trikotnik v kvadratu (Boris Lavrič)	23
	Popolne potence (Boris Lavrič)	23
	Nagradni sistemi linearnih enačb, 2. del (Vilko Domajnko) .	34-36
	Poišči osnovi (Marija Vencelj)	41
	Pravokotni večkotniki (Marija Vencelj)	51
	Preničlana števila (Boris Lavrič)	59
NOVE KNJIGE	Šfiligoj B., Željko M., PiTeX CAD (Ciril Velkovich)	5
	Gardner M., Aha! Pa te imam, paradoksi za napenjanje možganov in razvedrilo (Milena Strnad)	41
	Cash T., Taylor B., Walpole B., Ferbar J., Zvok. Gibanje (Joži Hribar)	46-47
	Priručniki in učbeniki KT DMFA Slovenije	50
MATEMATIKA	Cevov izrek (Marija Vencelj)	6-11
	Uporaba kompleksnih števil v ravninski geometriji, 1. del (Matjaž Željko)	20-22
	Princip najmanjšega in največjega elementa v podmnožicah naravnih števil (Borut Zalar)	38-40
	Potenčna števila (Jože Grasselli)	54-59
ASTRONOMIJA	Astronomsko gledališče (Danica Mati in Janez Ferbar)	24-29
	Pisma bralcev (Dušica Boben)	51
	Kako ugotovimo povečavo daljnogleda (Marijan Prosen) ...	64-III
RAZVEDRILLO	Križanka 190. obletnica smrti slovenskega matematika (Marko Bokalič)	32-33
	Številska križanka (S.V. Radojkovič - prev. in pril. Bojan Hvala)	52-53
	Dve pisemci - dve uganki (Miha Mohor)	60-62
	Krokodil ali tranzitivnost v praksi (Matjaž Željko)	63
RAČUNALNIŠTVO	Zakaj žepni računalnik računa narobe? (Olga Arnuš)	37
TEKMOVANJA	Naloge s fizikalne olimpiade 1991 v Havani (Marjan Hribar)	42-46
NOVICE	Rudjer Bošković na hrvaškem bankovcu (Janez Strnad)	48-50
	Največje praštevilo (Milena Strnad)	62
NA OVITKU	Valovni stroj (foto Marjan Smerke)	I
	Poskusi z valovnim strojem (foto Andrej Likar). Glej tudi članek na strani 2	IV

KAJ PRINAŠA PRVA ŠTEVILKA PRESEKA

Pred nami je novo šolsko leto in z njim prva številka novega - že dvajsetega letnika Preseka. Tudi letos vam pripravljamo obilo zanimivega branja iz matematike, fizike, astronomije in računalništva; v Preseku boste našli poročila in naloge s tekmovanj, manjkalo pa tudi ne bo zanimivih in razvedrilnih nalog, ki jih imate, kot kaže, še posebej radi.

In, kaj prinaša prva številka?

Videli boste, kako lahko z domačimi pripomočki napravite pravi pravcati valovni stroj, ki ga prikazujejo tudi fotografije na ovitku, in kako ugotovite povečavo starega daljnogleda, ki ste ga našli v dedovi omari. Najmlajši boste morda kar v šoli pripravili astronomsko gledališče, tistim z nekaj fizikalne žilice pa bo gotovo všeč, kako se je naša sodelavka prav po fizikalno lotila branja knjige Julesa Verna. Jo boste posnemali?

Se vam je že kdaj pripetilo, da sta s sošolcem dobila povsem različna rezultata z žepnima računalnikoma, čeprav sta računala oba enako in brez napake? Preberite, zakaj lahko pride do česa takega!

Pri Preseku brez matematike seveda ne gre. Tokrat najdete v njem štiri matematične članke. Dva sta algebraična: v enem boste spoznali zanimive lastnosti števil, ki v svojem praštevilskem razcepu nimajo praštevil z eksponentom 1, v drugem pa videli, kako lahko s povsem navadnimi matematičnimi izreki dokazujemo tudi pojave iz vsakdanjega življenja. Od geometrijskih je eden priprava na članek, ki bo izšel v naslednji številki, drugi članek pa obravnava manj znan, a preprost in zelo uporaben izrek v trikotniku. Znete razpoloviti dano daljico le z uporabo ravnila - takega brez merila?

Predstavljamo nekaj na novo izdanih knjig; med novicami boste našli podatek o najnovejšem največjem znanem praštevilu, kakor tudi dokaz o tem, da je lanski preboj zvočnega zidu nad Ljubljano povzročil celo pravi majhen potres. Nekaj prispevkov skrbi za razvedrilo, med drugim dve križanki - slikovna in številka.

Poleg nalog z lanske fizikalne olimpiade, ki jim boste le nekateri kos, prinaša Presek kot običajno tudi nekaj matematičnih orehov. Tu so nagradni sistemi linearnih enačb, katerih rešitve bomo objavili v tretji številki, in nekaj posamičnih nalog. Če kakšne ne boste znali rešiti, boste odgovor nanjo našli v drugi številki Preseka.

Morda je med njimi tudi kakšna za matematične sladokusce. Tisti, ki to šele postavljate, ne boste zato prav nič prikrajšani. Saj Preseke shranjujete, kajne?

Marija Vencelj

VALOVNI STROJ

Ste že opazovali valove na vrvi? Dolgo gibko vrv vpneemo na enem krajišču, drugega pa niamo. Bolj zanimivo je opazovati valovanje na *valovnem stroju*. V zahtevni izvedbi ga sestavlja napeta jeklena žica, na katero so v enakih razmikih prečno nanizane enako dolge jeklene palice (slika na naslovni strani). Žico na nekaj mestih podpremo, da je kolikor mogoče vodoravna, lahko pa jo obesimo navpično. Palice nizamo na žico kot bisere na ogrlico, nato pa jih poravnamo in trdno spojimo z žico. Razdalja med palicami meri med 2 cm in 4 cm, žica pa je na krajiščih pritrjena na toga nosilca. Končno palico počasi zanihamo pravokotno na žico. Po nizu potuje valovanje z veliko amplitudo in dovolj počasi, da ga je mogoče podrobno opazovati.

Hitrost valovanja je odvisna od debeline žice, njenega strižnega modula, vztrajnostnega momenta palic in njihove medsebojne razdalje. Nam bo bolj prav prišla zveza:

$$c = 2\pi\nu l / \sqrt{2},$$

pri čemer je c hitrost valovanja, l razmik med sosednjima palicama, ν pa frekvenca nihanja ene palice, ko sta njeni sosedi pritrjeni v mirovni legi. Zveza pomaga izbrati primerno debelo jekleno žico in dolžino ter presek palic, ne da bi bilo treba izdelati cel valovni stroj. Zadošča, da poskusimo z eno palico, ki jo pritrdimo na košček žice z dolžino $2l$. Prikladno je, da je hitrost valovanja c okrog $0,5 \text{ ms}^{-1}$ ali manj.

Takega valovnega stroja v amaterski delavnici ni lahko narediti. Hitro pa izdelamo preprostejšo inačico, ki je prav tako uporabna. Namesto jeklene žice bomo med vodoravna nosilca vzporedno napeli gumijasti vrvici, ki ju naredimo s povezovanjem gumijastih obročkov. Nanju bomo prečno nizali lesene paličice (uporabili smo 40 cm dolge paličice iz svežnja za igro mikado). Vpeljemo jih skozi razpotegnjene obročke, ki paličice trdno vpnejo. Koristno je, da si že prej označimo sredino vsake paličice. Da sta vrvici čim bolj vzporedni, pritrdimo na sredino že vpeljanih paličic ščipalke za sušenje perila, ki poskrbijo, da je razmik med vrsticama enakomeren. Ko smo vpeljali vse paličice, jih poravnavamo, da se v mirovni legi postavijo vodoravno. Najhitreje to storimo, če premaknemo paličico, ki je najbolj oddaljena od vodoravne lege, nato pa ves niz umirimo in nadaljujemo tako do konca. Vmes jih tudi razmikamo, da so čim bolj enakomerno nanizane (slika 1 a in b na IV. strani ovitka zgoraj). Ni

nujno, da so vse paličice natančno v vodoravni mirovni legi, poskusi se nam bodo vseeno posrečili.

Najprej izmerimo *hitrost valovanja*. Paličico na robu na hitro zasučemo v skoraj navpično lego in merimo čas, v katerem motnja doseže paličico na nasprotnem robu (slika 2 a in b na IV. strani ovitka spodaj). Če izmerimo še dolžino L valovnega stroja od enega roba do drugega, lahko določimo hitrost valovanja:

$$c = \frac{L}{t}.$$

Pri našem stroju je bila dolžina $L = 0,94$ m, čas potovanja motnje pa $t = 2,2$ s, iz česar izračunamo:

$$c = 0,43 \text{ ms}^{-1}.$$

Dolžino L smo izmerili na 0,5 cm natančno, čas pa na 0,1 s. Hitrost c je zato negotova za $0,02 \text{ ms}^{-1}$.

V naslednjem poskusu preverimo zvezo $c = 2\pi\nu l / \sqrt{2}$. Izmeriti moramo povprečno dolžino l med sosednjimi paličicami, saj se je pri merjenju hitrosti valovanja le-to gibal vzdolž celega stroja. Dolžina l je povezana z dolžino L takole:

$$l = \frac{L}{n-1}.$$

Z n smo označili število paličic v valovnem stroju (Zakaj je v imenovalcu na desni strani enačbe $n-1$?), ki je pri nas $n = 24$, torej:

$$l = \frac{0,94 \text{ m}}{23} = 0,041 \text{ m}.$$

Izmeriti moramo še frekvenco ν , s katero niha paličica med pritrjenima sosedoma. Izmerimo čas desetih nihajev (pri čemer štejemo 0, 1, 2, ... 9, 10, da ne izpustimo enega nihaja). Namerili smo $t_{10} = 4,3$ s, zato je frekvenca

$$\nu = \frac{10}{t_{10}} = \frac{10}{4,3} \text{ s}^{-1} = 2,33 \text{ s}^{-1}.$$

Hitrost valovanja c izračunamo:

$$c = 2\pi\nu l / \sqrt{2} = \frac{6,283 \cdot 2,33 \text{ s}^{-1} \cdot 0,041 \text{ m}}{1,414} = 0,42 \text{ ms}^{-1}.$$

To se prav dobro ujema z izmerjeno hitrostjo $0,43 \text{ ms}^{-1}$, saj smo že ugotovili, da je ta izmerek negotov za $0,02 \text{ ms}^{-1}$. Tudi izračunana hitrost ni čisto

natančna, saj smo jo izračunali iz izmerkov ν in l , ki sta tudi nenatančna.

Valovanje se na krajšičih stroja *odbije*. Opazujemo odboj kratkega *valovnega sunka*. Ustvarimo ga tako, da robno paličico le dvignemo in spustimo v prvotno vodoravno lego. Če je paličica na nasprotnem robu pritrjena, da ostane ves čas v mirovni legi, se sunek odbije z *nasprotno fazo*, torej se hrib odbije in potuje v nasprotno smer kot dolina. Pri prosti robni paličici pa se sunek odbije z *isto fazo*, torej se hrib odbije in potuje nazaj kot hrib. Robna paličica bo skoraj prosta, če bo razdalja med njo in pritrdiščem gumijastih vrvic dovolj velika, denimo štiri razdalje l .

Vzbudimo na valovnem stroju *stoječe valove*. To terja nekaj spretnosti. Paličico na robu moramo nihati s prav posebno izbrano frekvenco, sicer je na stroju zmešnjava. Stoječi valovi nastanejo, ko se potujoči valovi na robu odbijejo in na poti nazaj *sestavijo* ali *interferirajo* z vpadajočimi valovi. Nekatere paličice mirujejo, druge pa nihajo z dvojno amplitudo potujočih valov. Pri izbrani frekvenci, ki ji rečemo *lastna frekvenca* stroja, se stoječi valovi ne sprevržejo v zmešnjavo. Takih frekvenc je na valovnem stroju več in so v preprosti medsebojni zvezi.

Ali lahko dosežemo, da se valovanje na robu ne bi odbilo in potovalo nazaj? Tedaj bi po stroju potovali le *potujoči valovi*. To res lahko storimo tako, da pritrdimo na robno paličico ravno prav veliko pahljačo iz papirja, ali še bolje iz ptičjih peres. Velikost pahljače določimo s poskušanjem. Ko se valovni sunek od roba le neznatno odbije, pahljače ustrezajo. S potujočimi valovi teče tudi energija od roba, kjer valovanje vzbujamo, na drugi rob, kjer se porabi za mešanje in potem segrevanje okolišnega zraka. S tako prirejenim strojem lahko preverimo osnovno valovno zvezo:

$$c = \lambda \nu,$$

pri čemer hitrost valovanja c poznamo, *valovno dolžino* λ in *frekvenco* *vzbujanja* ν pa izmerimo.

Morda najdete še sami kakšno zamisel za nov poskus ali izboljšavo valovnega stroja. Oglasite se s predlogi našemu uredništvu.

Andrej Likar

Sliki sta na IV. strani ovitka.

Slika 1. Sestava valovnega stroja z jekleno žico in prečnimi palicami (a) in ameterskega valovnega stroja z gumijastima vrvicama in lesenimi paličicami s kljukicami za sušenje perila (b). Pri obeh strojih je hitrost valovanja okoli $0,5 \text{ ms}^{-1}$.

Slika 2. Valovno čelo potuje od leve proti desni (a). Na kovinskem valovnem stroju potuje razpotegnjeni valovni sunek (b).

NOVE KNJIGE

Šfiligoj B., Željko M., PiCTeX CAD verzija 2.0. DMFA Slovenije, Ljubljana 1992. Disketa in navodila za uporabo programa, 28 str. (Priročniki in učbeniki)

PiCTeX CAD je program, namenjen risanju in konstrukciji poljubnih skic, še posebej tistih, ki jih je mogoče narisati s pomočjo ravnila in šestila. Omogoča natančno konstrukcijo geometrijskih likov in poljubnih skic, kadar je pomembno v kakšnem razmerju so med seboj podani osnovni geometrijski objekti (daljice, krožnice, krožni loki, vektorji). Seveda program omogoča tudi prosto risanje, vendar je njegova glavna moč (za razliko od nekaterih drugih programov, kot npr. TeX CAD ali AUTOSKETCH) v natančnem pozicioniranju glede na izrisane objekte. Tako program PiCTeX CAD omogoča uporabo tipkovnice ali miške. Program shrani skico v formatu PiCTeX, kar pomeni, da skico, ki smo jo shranili na neko datoteko, kasneje z lahkoto vključimo v besedilo, ki je napisano v TeX formatu. V tem primeru moramo seveda navesti, naj TeX uporabi tudi PiCTeX, ki je standardni del paketa emTeX. Shranimo in preberemo pa lahko skico tudi v formatu METAFONT. V tem primeru se skica obnaša kot znak, ki ga uporabimo za pisavo. Program PiCTeX CAD je napisan za osebne računalnike tipa IBM PC in z njim združljivimi drugimi osebnimi računalniki. Program priporočamo vsem uporabnikom programskega paketa emTeX, ki poleg stavljenja besedil v svoje članke vključujejo tudi skice (posebej matematične). Poleg tega menimo, da bi bilo program mogoče koristno uporabiti kot didaktični pripomoček pri učenju ravninske geometrije in ravninskih transformacij.

Ciril Velkovrh

DVE IGRI S ŠTEVILI

1. Dva igralca izmenoma zapisujeta na list ali tablo naravna števila, ki niso večja od vnaprej določenega naravnega števila n . Prepovedano je pisati delitelje že napisanih števil. Izgubi igralec, ki ne more več napisati števila. Kdo od igralcev ima možnost za zmago pri $n = 10$? Opišite strategijo!
2. Na listu je napisanih prvih dvajset naravnih števil: $1, 2, 3, \dots, 20$. Dva igralca izmenoma pišeta znak $+$ ali $-$ pred temi števili. Prvi poskuša doseči, da bo imela končna vsota čim manjšo absolutno vrednost, drugi želi doseči čim večjo. Kolikšna bo absolutna vrednost končne vsote pri optimalnih strategijah obeh igralcev?

Dušan Murovec

MATEMATIKA

CEVOV IZREK

Med vsemi ravninskimi liki so se matematiki največ ukvarjali s trikotnikom. Že stari Grki so vedeli, kako trikotniku očrtati krožnico, to da gredo vse tri težiščnice skozi isto točko, da velja isto za višine in za kotne simetrale, pa še marsikaj drugega.

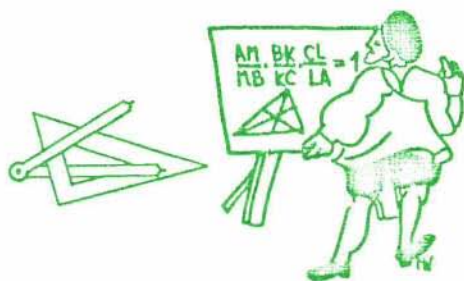
Cevov izrek je zelo uporaben izrek, ki govori o tem, kdaj imajo tri premice, ki potekajo skozi različna trikotnikova oglišča, skupno točko. Je torej nekakšna posplošitev izrekov o težišču, višinski točki in središču vrtane krožnice. Odkril in dokazal ga je v drugi polovici 17. stoletja italijanski matematik Giovanni Ceva (beremo Čeva).

Preden izrek navedemo, se bomo nanj nekoliko pripravili.

- Najprej se domenimo za nekaj oznak:

$\overleftrightarrow{AB}$	premica skozi točki A in B
(A, B)	daljica s krajiščema A in B
$\overrightarrow{AB}$	usmerjena daljica z začetno točko A in končno točko B
$\overline{AB}$	dolžina daljice (A, B)

- **Delilno razmerje.** Naj bo dana daljica AB in točka $C \in (A, B)$. Pravimo, da točka C deli daljico AB v razmerju $\overline{AC} : \overline{CB}$. Ta kvocient je neko pozitivno realno število λ , zato lahko tudi rečemo, da točka C deli daljico AB v razmerju λ . Očitno deli točka C usmerjeno daljico BA v razmerju $\frac{1}{\lambda}$.



Če je $C = A$, je $\lambda = 0$; ko gre C proti B , pa narašča delilno razmerje čez vse meje.

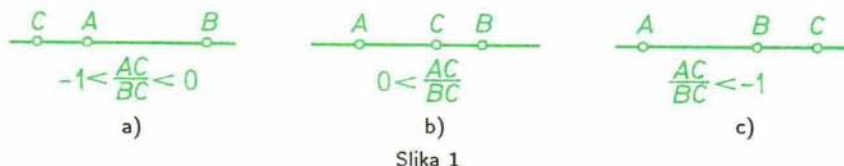
Pojem delilnega razmerja lahko posplošimo na vse točke premice $\overleftrightarrow{AB}$. Za $C \in \overleftrightarrow{AB}$, toda $C \notin (A, B)$, je delilno razmerje λ , v katerem C deli usmerjeno daljico AB , definirano takole:

$$\lambda = -\overline{AC} : \overline{CB}$$

in je torej za točke C zunaj daljice (A, B) negativno. V obeh primerih uporabljamo za delilno razmerje oznako $\frac{AC}{CB}$. Torej je za $C \in \overleftrightarrow{AB}$:

$$\frac{AC}{CB} = \begin{cases} \overline{AC} : \overline{CB} & \text{za } C \in (A, B) \\ -\overline{AC} : \overline{CB} & \text{za } C \notin (A, B) \end{cases}$$

Velja še: Dve različni točki delita daljico AB v različnih delilnih razmerjih. O tem se lahko s kratkim računom sami prepričate za vsak primer s slike 1 posebej.



- **Cevova premica.** Premica, ki poteka skozi natanko eno oglišče trikotnika, se imenuje Cevova premica tega trikotnika.

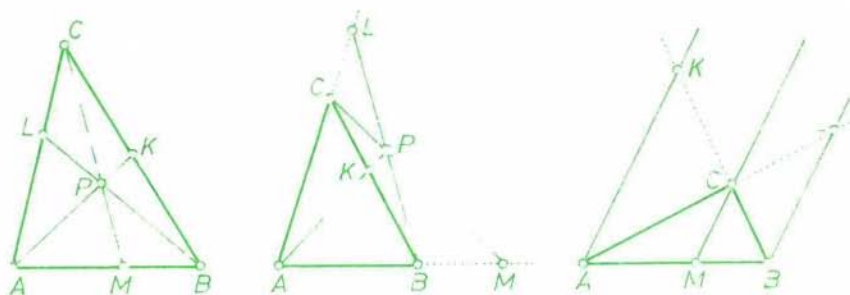
Oglejmo si sedaj

Cevov izrek. Naj bo $\triangle ABC$ trikotnik in K, L, M točke na premicah $\overleftrightarrow{BC}, \overleftrightarrow{AC}$ in $\overleftrightarrow{AB}$, različne od oglišč trikotnika. Potem so Cevove premice $\overleftrightarrow{AK}, \overleftrightarrow{BL}, \overleftrightarrow{CM}$ ali vzporedne ali gredo skozi skupno točko natanko takrat, ko je

$$\frac{AM}{MB} \cdot \frac{BK}{KC} \cdot \frac{CL}{LA} = 1. \quad (1)$$

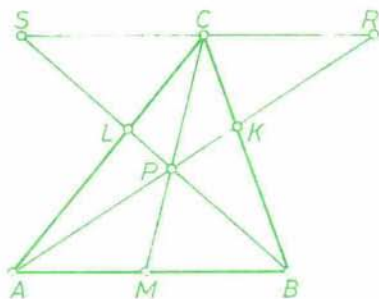
(Torej tedaj, ko je produkt razmerij, v katerih točke K, L, M delijo usmerjene trikotnikove stranice BC, CA, AB , enak 1.)

Dokaz: Pogoj je potreben. Naj gredo $\overleftrightarrow{AK}$, $\overleftrightarrow{BL}$, $\overleftrightarrow{CM}$ skozi isto točko P . Skupaj bomo dokazali trditev za primer, ko je P notranja točka trikotnika $\triangle ABC$. Sami poskusite na sličen način ugnati primer, ko leži P zunaj trikotnika ali ko so Cevove premice vzporedne (slika 2).

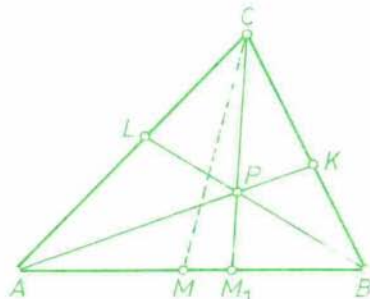


Slika 2

Naj bosta R in S presečišči premic $\overleftrightarrow{AK}$ in $\overleftrightarrow{BL}$ s premico skozi C , vzporedno $\overleftrightarrow{AB}$ (slika 3).



Slika 3



Slika 4

Opazimo lahko štiri pare podobnih trikotnikov:

$$\triangle CLS \sim \triangle ALB, \quad \triangle CPS \sim \triangle MPB,$$

$$\triangle CPR \sim \triangle MPA, \quad \triangle AKB \sim \triangle RKC.$$

Iz njih razberemo:

$$\frac{CL}{LA} = \frac{\overline{SC}}{\overline{AB}}, \quad (2)$$

$$\frac{\overline{AM}}{\overline{CR}} = \frac{\overline{MP}}{\overline{PC}} = \frac{\overline{MB}}{\overline{CS}}$$

in od tod, ker je $M \in (A, B)$,

$$\frac{AM}{MB} = \frac{\overline{AM}}{\overline{MB}} = \frac{\overline{CR}}{\overline{CS}}. \quad (3)$$

Nadalje je še:

$$\frac{BK}{KC} = \frac{\overline{BK}}{\overline{KC}} = \frac{\overline{AB}}{\overline{CR}}. \quad (4)$$

Z množenjem enačb (2), (3), (4) dobimo pogoj (1).

Pogoj je zadosten. Naj velja enačba (1). Potem so Cevove premice ali vzporedne ali pa obstaja točka P , ki je dvema premicama skupna. Naj bosta to AK in BL . Položimo skozi P novo Cevovo premico $\overline{CM}_1$ (slika 4). Iz potrebnosti pogoja Cevovega izreka sledi:

$$\frac{AM_1}{M_1B} \cdot \frac{BK}{KC} \cdot \frac{CL}{LA} = 1. \quad (5)$$

Od tod in iz (1) dobimo

$$\frac{AM_1}{M_1B} = \frac{AM}{MB}.$$

Točki M in M_1 torej delita usmerjeno daljico AB v istem razmerju. Ker pa delilno razmerje točko natanko določa, je $M = M_1$ in torej $P \in \overline{CM}$, kar smo želeli dokazati.

Uporaba.

Težišče. Težiščnice trikotnika nasprotno stranico razpolavljajo, torej jo dele v razmerju 1. Ker je $1 \cdot 1 \cdot 1 = 1$, gredo težiščnice skozi isto točko - težišče trikotnika.

Središče vrtane krožnice. Kotne simetrale dele trikotnikove stranice

v razmerju priležnih stranic. Če so a, b, c dolžine trikotnikovih stranic, je

$$\frac{AM}{MB} \cdot \frac{BK}{KC} \cdot \frac{CL}{LA} = \frac{b}{a} \cdot \frac{c}{b} \cdot \frac{a}{c} = 1.$$

Kotne simetrale gredo torej skozi isto točko - središče vrtane krožnice.

Višinska točka. Za pravokoten trikotnik nimamo kaj dokazovati. Če je trikotnik ostrokoten, so podnožišča višin notranje točke nasprotnih stranic. Pri topokotnem trikotniku sta podnožišči višin, ki izhajata iz ostrih kotov, zunanji točki nasprotnih stranic, podnožišče tretje višine pa notranja točka. Vedno je torej produkt delilnih razmerij z leve strani formule (1) pozitivno število. Poglejmo še njegovo absolutno vrednost. Če so v_a, v_b, v_c trikotnikove višine, je

$$\frac{\overline{AM}}{\overline{LA}} = \frac{v_c}{v_b}, \quad \frac{\overline{BK}}{\overline{MC}} = \frac{v_a}{v_c}, \quad \frac{\overline{CL}}{\overline{KB}} = \frac{v_b}{v_a}.$$

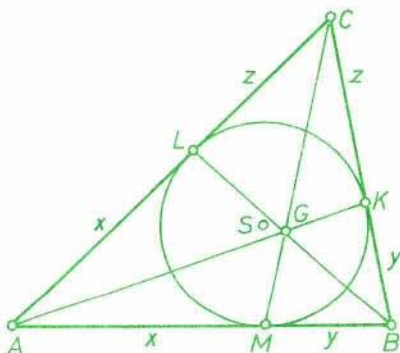
Produkt levih strani teh enačb je absolutna vrednost leve strani enačbe (1), produkt desnih pa je enak 1. Višinska točka torej obstaja.

Gergonova točka. Spojimo oglišča trikotnika z dotikališči vrtane krožnice na nasprotnih stranicah. Ker sta tangenti iz dane točke na dano krožnico enako dolgi, imamo situacijo kot na sliki 5.

Velja $\frac{AM}{MB} \cdot \frac{BK}{KC} \cdot \frac{CL}{LA} = \frac{x}{y} \cdot \frac{y}{z} \cdot \frac{z}{x} = 1$.

Torej gredo konstruirane Čevove premice skozi skupno točko G . Imenujemo jo Gergonova točka trikotnika.

Omeniti velja še nekaj. Že o krog leta 100 je grški matematik Menelaj iz Aleksandrije dokazal naslednji izrek: Naj bo $\triangle ABC$ trikotnik in K, L, M točke na premicah $\overleftrightarrow{BC}, \overleftrightarrow{AC}$ in $\overleftrightarrow{AB}$, različne od oglišč trikotnika. Če so točke K, L, M kolinearne, je



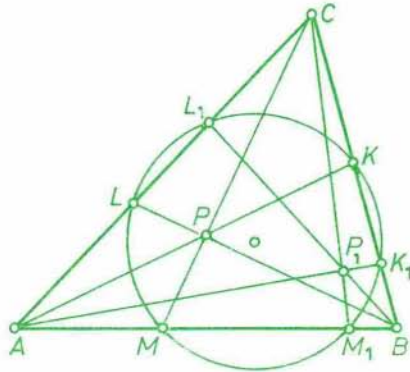
Slika 5

$$\frac{AM}{MB} \cdot \frac{BK}{KC} \cdot \frac{CL}{LA} = -1. \quad (6)$$

Kasneje je bila dokazana tudi zadostnost pogoja (6) za kolinearost točk K, L, M . Ta - Menelajev - izrek je nekakšen izrek dvojček Cevovega izreka. Zato se zdi kar neverjetno, da je med njunima odkritjema minilo poldrugo tisočletje. Pove pa ta podatek veliko o počasnem razvoju matematike v tem obdobju.

Za konec z uporabo Cevovega izreka rešite naslednji nalogi:

1. naloga: Naj bodo $\overleftrightarrow{AK}, \overleftrightarrow{BL}, \overleftrightarrow{CM}$ tri take Cevove premice trikotnika $\triangle ABC$, ki gredo skozi skupno točko. Krožnica skozi točke K, L, M seka nosilke trikotnikovih stranic BC, CA in AB zapored še v točkah K_1, L_1, M_1 (slika 6), ki niso nujno različne od K, L, M . Dokaži, da gredo tudi Cevove premice $\overleftrightarrow{AK_1}, \overleftrightarrow{BL_1}, \overleftrightarrow{CM_1}$ skozi isto točko! (Nasvet: Uporabi potenco točke glede na krožnico!)

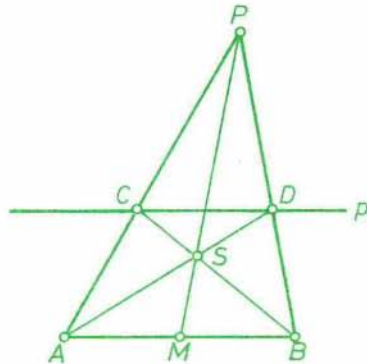


Slika 6

2. naloga: V ravnini naj bosta dani daljica (A, B) in njej vzporedna premica p . Izven premic p in $\overleftrightarrow{AB}$ izberimo poljubno točko P in narišimo geometrijsko figuro kot na sliki 7.

Dokaži, da točka M razpolavlja daljico (A, B) !

(Opomba: Kot veste, običajno razpolavljamo daljico tako, da s šestilom in ravnilom narišemo njeno simetralo. Tu smo uporabili le ravnilo! Res pa smo pri tem potrebovali "oporo" - podana je morala biti tudi vzporednica daljici (A, B) .)



Slika 7

FIZIKA V DELIH JULESA VERNA

Francoskega pisatelja Julesa Verna mladi bralci prav gotovo dobro poznajo. Napisal je šestinpetdeset romanov, ki sestavljajo ciklus "Nenavadna potovanja". V teh romanih so predstavljene zgodbe, ki si jih je pisatelj izmislil, ko je zasledoval nova znanstvena odkritja in tehnične iznajdbe.

S tem sestavkom se bomo pomudili pri manj znanem, a zato nič manj zanimivem romanu Hector Servadac, njegova popotovanja in prigode skozi osončje.

Naj vam najprej na kratko predstavim vsebino dela: V noči med 31. decembrom in 1. januarjem je neznani komet zadel ob Zemljo in odtrgal od nje nekaj delov. V vesolje je ponesel tudi šestintrideset ljudi, med njimi stotnika francoske vojske Hectorja Servadaca in njegovega ordonanca Ben Zufa, rusko posadko na ladji Dobrina, ki sta ji poveljevala grof Tomašev in poročnik Prokop, zagrizenega astronoma profesorja Palmyrina Rosetta in goljufivega trgovca Isaca Hakhabuta. Profesor je izračunal, da se bo komet, ki ga je poimenoval Galija, ponovno srečal z Zemljo po natanko dveh zemeljskih letih. Vesoljski popotniki so iz delov ladje zgradili balon, se pol ure pred izračunanim časom trka dvignili v zrak in ...

Tedaj sta se obe atmosferi pomešali med seboj. Pojavila se je velikanska gmota oblakov, pare in hlapovi so se nakopičili okoli njih. Popotniki v gondoli niso videli ničesar več, ne pod seboj ne nad seboj. Zazdelo se jim je, da jih obdaja velikanski plamen, da jim je zmanjkalo pod nogami vsake opore, in ne da bi vedeli kako, ne da bi si mogli to razložiti, so se znašli na zemeljskih tleh. V omedlevici so zapustili zemeljsko oblo in onesveščeni so se spet vrnili nanjo!

O balonu ni bilo več sledu!

Galija pa je hkrati bežala pošev, v tangenti od njih proč, in je proti vsakemu pričakovanju zemeljsko oblo samo oplazila, nato pa izginila proti vzhodu v vesolje.

Poglejmo si najprej, kako se je profesor lotil računanja mase in velikosti "svojega" kometa. Poročnik Prokop mu je posredoval podatke o obsegu kometa, ki jih je dobil na raziskovalni vožnji (takrat so še mislili, da so na Zemlji).

"Iz tega, da se je *Dobrina*," je dejal stotnik Servadac, "vrnila na izhodišče, ne da bi bila spremenila smer, moramo torej sklepati, da znaša obod zemeljskega sferoida samo še dva tisoč tristo dvajset kilometrov!"

Od tod ni bilo težko izračunati polmera, ki je znašal 370 km. A prepustimo besedo zopet Julesu Vernu.

"Gospodje," je Palmyrin Rosette povzel besedo, "najprej moram ugotoviti, koliko tehta na Galiji zemeljski kilogram. Ker ima Galija manjšo maso od Zemlje, je manjša tudi njena privlačnost in zavoljo tega vsak predmet na njeni površini tehta manj, kot bi tehtal na površini Zemlje. Dognati pa moramo, kakšna je razlika med tema težama."

"Ali imate kakšno brzotehniko in utež za en kilogram?" je vprašal. "To je vse, kar potrebujemo. Pri brzotehnikci označuje težo jeklen jeziček ali pa vzmet, ki delujeta po načelu prožnosti ali napetosti. Sila privlačnosti torej nikakor ne vpliva nanju. Če namreč obesim težo zemeljskega kilograma na mojo brzotehniko, bo igla natanko označila, koliko tehta ta kilogram na površini Galije. Tako bom torej spoznal razliko med privlačnostjo Galije in privlačnostjo Zemlje. Zato ponavljam svoje vprašanje: ali imate brzotehniko?"

Poslušalci Palmyrina Rosetta so se povprašali z očmi. Nato se je Hector Servadac obrnil k Ben-Zufu, saj je znal naštet na pamet ves material, ki ga je premogla kolonija.

"Niti brzotehnice nimamo niti uteži za en kilogram," je rekel.

Profesor je pokazal svojo nejevoljo s tem, da je močno udaril z ного ob tla.

"Ampak zdi se mi," je odgovoril Ben-Zuf, "da vem, kje bi se dobila brzotehnica, če že ne utež."

"Kje pa?"

"V Hakhabutovi tartani."

V ladjici stiskaškega trgovca Hakhabuta so dobili na posodo tehniko, namesto kilografske uteži pa je služilo štirideset kovancev po pet frankov.

"No, gospodje, tehle štirideset kovancev bom zdaj obesil na kavelj tehnice – in ker ta poskus opravljam tu na Galiji, bomo videli, koliko tehta na Galiji."

Nato je skupino kovancev obesil na kavelj, igla tehnice je zanihala, se ustavila in pokazala na oštevilčenem krogu 133 gramov.

Kaj lahko izračunamo iz teh podatkov?

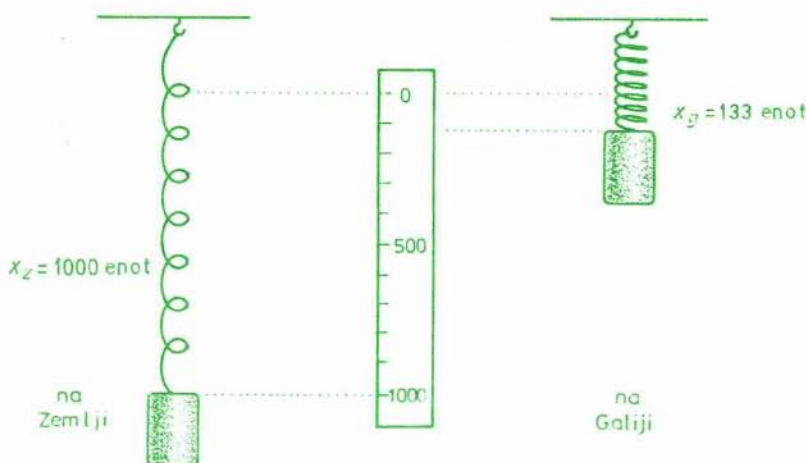
Zaradi enostavnosti predpostavimo, da bi se vzmet na Zemlji raztegnila za 1000 enot, na Galiji se je pa le za 133 enot.

Po Hookovem zakonu je obakrat raztek vzmeti sorazmeren s težo:

$$kx_z = mg_z, \quad kx_g = mg_g.$$

Razmerje raztezkov je torej po Hookovem zakonu enako razmerju gravitacijskih pospeškov:

$$\frac{x_z}{x_g} = \frac{g_z}{g_g}. \quad (1)$$



Torej je gravitacijski pospešek na Galiji $1,3 \text{ m/s}^2$ oziroma kar 7,5 krat manjši kot na Zemlji.

Gravitacijski pospešek pa obenem opisuje tudi jakost gravitacijskega polja

$$g_g = \frac{GM}{R^2},$$

kjer je g_g gravitacijski pospešek na površini kometa Galija, G gravitacijska konstanta, M masa kometa in R polmer. S pomočjo gornje zveze lahko izračunamo maso kometa Galija

$$M = \frac{g_g R^2}{G} = \frac{1,3 \text{ ms}^{-1} \cdot (370 \text{ km})^2}{6,67 \cdot 10^{-11} \text{ m}^3 \text{ kg}^{-1} \text{ s}^{-2}} = 2,7 \cdot 10^{21} \text{ kg}. \quad (2)$$

Jules Verne je maso kometa izračunal po drugi poti, preko znane prostornine in gostote. Prostornine ni težko izračunati, če predpostavimo, da je komet krogla

$$V_g = \frac{4\pi R^3}{3} = 2,1 \cdot 10^{17} \text{ m}^3.$$

"Saj je res," je dejal poročnik Prokop. "Ker že poznamo prostornino Galije, bomo brez težav ugotovili tudi maso, samo da nam bo znana še gostota."

To poročnikovo sklepanje je bilo pravilno in je bilo treba zares izračunati samo še gostoto Galije.

In to je profesor tudi storil. Vzel je v roko kos skale, izrezan iz gmote vulkana, kos, ki je imel natančno kubični decimeter prostornine.

"Torej stehtajmo ta kos," je dejal profesor. "To je prav tako, kakor če bi obesil komet na kavelj svoje tehtnice."

Kos skale so torej obesili na tehtnico in igla je pokazala na oštevilčenem krogu kilogram in štiristo trideset gramov.

Podatka 1430 gramov ne gre jemati dobesedno. Tehtnica je bila namreč umerjena na Zemlji, tako da je trgovec Hakhabut takoj sklepal na maso blaga. Tehtanje pa je bilo izvedeno na Galiji, ki privlači telesa z manjšo silo kot Zemlja. Izračunajmo torej, za koliko bi se raztegnila vzmet na Zemlji. Uporabimo še enkrat zvezo (1), le da tokrat računamo x_z :

$$x_z = \frac{g_z}{g_g} \cdot x_g = \frac{9,8 \text{ ms}^{-2}}{1,3 \text{ ms}^{-2}} \cdot 1430 = 11 \cdot 10^3.$$

Raztezek 11 tisoč enot bi na Zemlji pomenil maso 11 kg.

Če ima torej 1 dm³ snovi maso 11 kg, je gostota snovi 11 kg/dm³. Komet Galija je torej dvakrat gostejši od Zemlje, katere povprečna gostota je 5,5 kg/dm³.

Pisatelj pa je v tem delu zagrešil tudi hudo napako. Najprej pa zopet iz besedila izluščimo podatke, ki jih bomo potrebovali.

"Gospod profesor, ali se bomo še vrnili na Zemljo in kdaj se bo to zgodilo?"

"Vam se torej zelo mudi?" je odgovoril Palmyrin Rosette.

"To, kar vas je vprašal Isac, gospod," se je tedaj oglasil poročnik Prokop, "bi rad povedal nekoliko bolj znanstveno."

"Kar dajte."

"Rekli ste, da se je nekdanji tir Galije spremenil?"

"O tem ni dvoma."

"Ali je novi tir, nova krivulja, po kateri se giblje komet, hiperbolična, zaradi česar bo komet zašel neskončno daleč v zvezdni svet in ni upanja na vrnitev?"

"Ne!" je odgovoril Palmyrin Rosette.

"Ta tir naj bi bil torej eliptičen!"

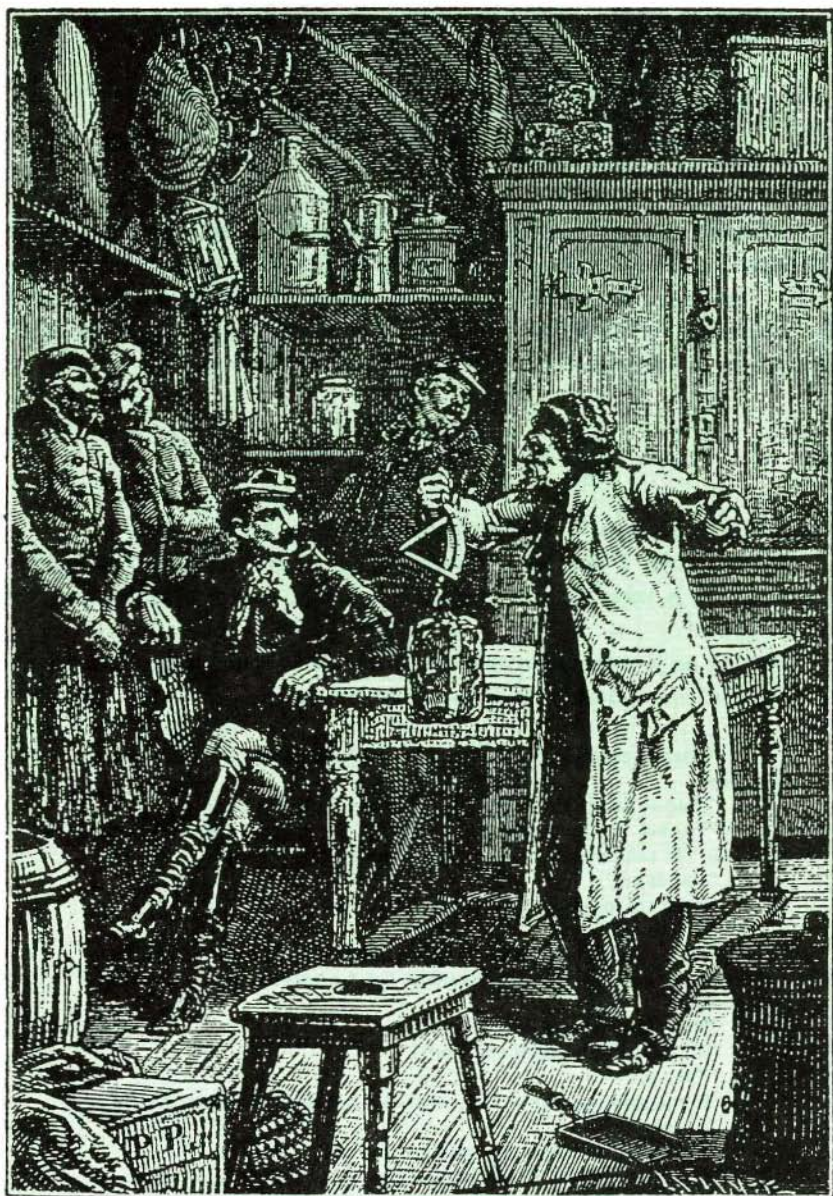
"Tako je."

"In njegova raven bi vedno sovpadala z ravniyo zemeljske orbite?"

"Absolutno."

"Galija naj bi bila torej periodičen komet?"

"Da, in to komet kratkega obdobja, s kratko obhodno dobo, ker opravi svojo krožno pot okoli Sonca, če upoštevamo motnje, katere povzročajo Jupiter, Saturn in Mars, natančno v dveh letih."



Izvedeli smo, da je obhodni čas Galije natanko dve zemeljski leti. In še:

Pet dni zatem, 15. januarja, je Galija dospela do afelija na koncu velike osi svojega tira in tedaj je bila oddaljena od Sonca sto dvajset milijonov milj.

ŠTIRINAJSTO POGLAVJE

NAM DOKAZUJE, DA LJUDJE NISO USTVARJENI ZA TO, DA BI LAHKO KROŽILI DVESTO MILIJONOV MILJ DALEČ OD SONCA

Galija se je torej od tega dne naprej začela spet počasi vračati na svoji eliptični krivulji proti Soncu in to z rastočo hitrostjo.

Pozornega bralca bosta zbodla v oči nasprotujoča si podatka za oddaljenost Galije od Sonca. V afeliju (to je točka, ko je telo najdlje od Sonca) naj bi bila oddaljena 120 milijonov milj, naslov štirinajstega poglavja pa navaja 200 milijonov milj. Se je zmotil pisatelj ali prevajalec? Najbolje bo, če si pogledamo taisti odlomek nepreveden:

Cinq jours plus tard, le 15 janvier, Gallia passait à son aphélie, à l'extrémité du grand axe de son orbite, et elle gravitait alors à deux cent vingt millions de lieues du soleil.

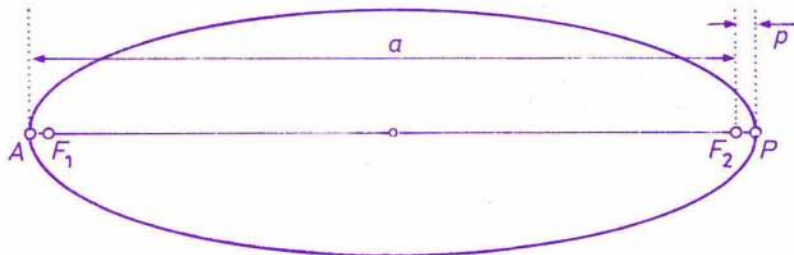
XIV

QUI PROUVE QUE LES HUMAINS NE SONT PAS FAITS POUR GRAVITER À DEUX CENT VINGT MILLIONS DE LIEUES DU SOLEIL

GALLIA allait donc, à partir de ce jour, remonter peu à peu sur sa courbe elliptique et avec une vitesse croissante.

Očitno gre za napako prevajalca. Pa še prevod za tiste, ki ne znate francosko: "deux cent vingt millions de lieues" je 220 milijonov milj.

Za lažje razumevanje si narišimo sliko, ki kaže tirnico kometa okoli Sonca. F_1 in F_2 sta gorišči elipse. V gorišču F_2 je Sonce. Točka P predstavlja



perihelij (takrat je telo Soncu najbliže), točka A pa afelij, ko je telo najdlje od Sonca. Razdalja AF_2 je 220 milijonov milj.

Po enem izmed Keplerjevih zakonov velja za vsa telesa v našem sončnem sistemu, da je kvadrat obhodnega časa sorazmeren tretji potenci razdalje. Kvocient t_0^2/r^3 mora potemtakem za vsa telesa imeti enako vrednost. Pod "razdaljo" je mišljena velika polos elipse: $\overline{AP}/2$.

Lotimo se računanja perihelija za komet Galijo. Primerjali bomo čas obhoda in razdaljo za Zemljo in Galijo

$$\frac{t_{0g}^2}{r_g^3} = \frac{t_{0z}^2}{r_z^3}.$$

Obhodna časa poznamo. Spomnimo se, da Galija pride okoli Sonca v dveh zemeljskih letih. Velika polos Zemljine tirnice okoli Sonca je 150 milijonov kilometrov. Za Galijo pa poznamo le razdaljo od afelija do Sonca (a), iščemo pa razdaljo od perihelija do Sonca (p). Veliko polos bomo zapisali takole

$$r_g = \frac{1}{2}(a + p).$$

Zdaj moramo le še milje spremeniti v kilometre. Milj je več "vrst". Pisatelj je uporabljal staro francosko miljo. Preberimo zopet odlomek iz knjige:

Prodreti tudi niso mogli v še bolj oddaljen Uranov svet, vendar je bilo videti glavni planet tega sveta, dvaindevetdesetkrat večji od Zemlje, s katere je viden, kadar ji je najbližji, samo kot zvezda šeste velikosti, tedaj zelo razločno s prostim očesom. Ni pa bilo videti nobenega izmed njegovih šestih satelitov, ki ga spremljajo na njegovem eliptičnem tiru, na poti okoli Sonca, ki jo opravi v 84 letih in na kateri je povprečno 729 milijonov milj oddaljen od Sonca.

Podatek 84 let za obhodni čas Urana okoli Sonca še vedno drži, pa zaupajmo podatku za povprečno razdaljo. Ta je danes ocenjena na $28,7 \cdot 10^8$ km. Sklenemo lahko:

$$729 \text{ milijonov milj} \dots\dots\dots 28,7 \cdot 10^8 \text{ km}$$

Od tod ni težko izračunati, da je ena francoska milja 3,94 km. 220 milijonov milj je torej 867 milijonov kilometrov.

Zdaj pa nastavimo enačbo z neznanko p :

$$\frac{t_{0g}^2}{\left(\frac{a+p}{2}\right)^3} = \frac{t_{0z}^2}{r_z^3},$$

kjer je $t_0g = 2$ leti, $t_{0z} = 1$ leto, $r_z = 150$ milijonov km in $a = 867$ milijonov km.

Od tod sledi

$$p = 2r_z \sqrt[3]{\left(\frac{t_0g}{t_{0z}}\right)^2} - a = -4 \cdot 10^8 \text{ km}.$$

Negativen rezultat pomeni, da komet s takimi podatki, kot si jih je zamislil Jules Verne, v našem sončnem sistemu ni mogoč. Ali povedano drugače, komet s tako kratkim obhodnim časom (2 zemeljski leti) ne bi mogel oditi tako daleč. Pisateljeva napaka je res huda.

Preden pa zaključimo tale sestavek, si preberite še naslednje vrstice:

"Zato ker ... zato ker ..." je zamrmral Isac Hakhabut, "ker moja tehtnica morda ne ... kaže čisto prav!"

Komaj je Žid izustil te besede, ga je Palmyrin Rosette že zgrabil za grlo. Stresel ga je in davil.

"Lopov!" je zakričal.

"Na pomoč!" je zastokal Isac.

Toda astronom ni odnehal. Res je, da Ben-Zuf ni hotel poseči vmes. Nasprotno – še spodbujal ju je in se krohotal pri tem. V njegovih očeh sta bila drug drugega vredna.

Stotnik Servadac, grof Timašev in poročnik Prokop, ki so zaslišali hrup, so prihiteli pogledat, kaj se godi.

Ložili so Isaca od profesorja.

"Za kaj gre?" je vprašal Hector Servadac.

"Veste," je odgovoril Palmyrin Rosette, "ta cigan nas je hotel oslepariti z napačno tehtnico, s tehtnico, ki kaže več, kot je prava teža!"

"Ali je to res, Isac?"

"Je ... ni ... gospod guverner!" se je glasil odgovor "on ... da!"

"Ta slepar je prodajal blago po napačni teži," je čedalje srditeje nadaljeval profesor, "in ko sem stehal svoj komet z njegovo tehtnico, sem zato dobil večjo težo, kot je v resnici."

Ko je na Zemlji ta tehtnica kazala težo enega kilograma, je v resnici tehtal tisti predmet samo sedemsto petdeset gramov. Zato je bilo treba od teže, izračunane na tej osnovi za Galijo, odšteti kar četrtno.

Palmyrin Rosette, zadovoljen, da je premikastil Isaca Hakhabuta, kot se je spodobilo, se je takoj lotil dela, da bi popravil račune.

Če ste še pri volji za računanje, se lotite tega tudi vi. Če pa ne, si ob priliki sposodite knjigo, saj boste našli v njej še obilo zanimivih odlomkov za fizikalno razmišljanje.

Lidija Babič

MATEMATIKA

UPORABA KOMPLEKSNIH ŠTEVIL V RAVNINSKI GEOMETRIJI – prvi del

Na ravnino postavimo kartezični koordinatni sistem, osi označimo z Re in Im ter ju poimenujmo realna in imaginarna os. Točka (a, b) nam tedaj predstavlja kompleksno število $\alpha = a + bi$. Kompleksna števila si lahko predstavljamo kot vektorje v ravnini, saj jih seštevamo po komponentah.

Od nič različno kompleksno število $\alpha = a + bi$ lahko zapišemo enolično v *polarni obliki*: $\alpha = r(\cos \vartheta + i \sin \vartheta)$, kjer je $r = \sqrt{a^2 + b^2}$, $\cos \vartheta = \frac{a}{r}$ in $\sin \vartheta = \frac{b}{r}$. Število r imenujemo modul, število ϑ pa argument kompleksnega števila α .

Enostavno lahko preverimo

$$r(\cos \vartheta + i \sin \vartheta) \cdot s(\cos \varphi + i \sin \varphi) = rs(\cos(\vartheta + \varphi) + i \sin(\vartheta + \varphi)).$$

To pomeni, da lahko množenje s kompleksnim številom modula r in argumenta ϑ obravnavamo kot kompozicijo zasuka okrog izhodišča za kot ϑ in raztega z negibno točko v koordinatnem izhodišču in s koeficientom r .

S pomočjo podobnih trikotnikov uvidimo, da ležijo tri različne točke α_1 , α_2 in α_3 na isti premici natanko tedaj, ko velja:

$$\begin{aligned} \frac{\operatorname{Re}(\alpha_3 - \alpha_1)}{\operatorname{Re}(\alpha_2 - \alpha_1)} &= \\ = \frac{\operatorname{Im}(\alpha_3 - \alpha_1)}{\operatorname{Im}(\alpha_2 - \alpha_1)} &= \lambda. \end{aligned}$$

Pri tem je λ seveda realno število. Sistem preoblikujemo

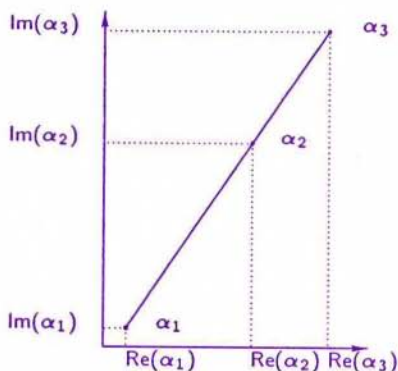
$$\operatorname{Re}(\alpha_3 - \alpha_1) = \lambda \operatorname{Re}(\alpha_2 - \alpha_1), \quad \operatorname{Im}(\alpha_3 - \alpha_1) = \lambda \operatorname{Im}(\alpha_2 - \alpha_1)$$

nato pa drugo enačbo pomnožimo z i in prištejemo prvi. Dobljeno enačbo

$$\operatorname{Re}(\alpha_3 - \alpha_1) + i \operatorname{Im}(\alpha_3 - \alpha_1) = \lambda \operatorname{Re}(\alpha_2 - \alpha_1) + i \operatorname{Im}(\alpha_2 - \alpha_1)$$

še poenostavimo: $\alpha_3 - \alpha_1 = \lambda(\alpha_2 - \alpha_1)$.

To pa pomeni, da leži točka α_3 na premici skozi različni točki α_1 in α_2



natanko tedaj, ko velja $\alpha_3 - \alpha_1 = \lambda(\alpha_2 - \alpha_1)$.

Število $\alpha_2 - \alpha_1$ imenujemo *nenormirani smerni koeficient* premice. (Nenormirani zato, ker $|\alpha_2 - \alpha_1|$ ni nujno enako 1.) Število $\frac{\alpha_2 - \alpha_1}{|\alpha_2 - \alpha_1|}$ pa je potem *normirani smerni koeficient* premice.

Kompleksno število $\beta = \operatorname{Re}(\beta) + i \operatorname{Im}(\beta)$ nam v ravnini določa vektor s komponentama $\operatorname{Re}(\beta)$ in $\operatorname{Im}(\beta)$.

Premaknimo premico vzporedno za ta vektor. Potem preideta točki α_1 in α_2 s te premice v α'_1 in α'_2 , da velja $\alpha'_1 = \alpha_1 + \beta$ in $\alpha'_2 = \alpha_2 + \beta$. Iz zveze $\alpha'_1 - \alpha_1 = \alpha'_2 - \alpha_2$ pa sledi, da se smerni koeficient premice pri vzporednem premiku ohranja.

Normirani smerni koeficient je vedno neko kompleksno število na enotski krožnici.

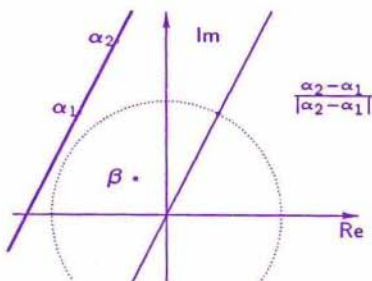
Zamenjajmo med sabo točki α_1 in α_2 . Smerni koeficient premice se s tem spremeni (kako?). To pa ni preveč lepo, saj želimo poiskati količino, ki opisuje smer premice in ne bo odvisna od izbire točk na premici.

Vzemimo enačbo premice: $\alpha_3 - \alpha_1 = \lambda(\alpha_2 - \alpha_1)$. Pri konjugiranju te enačbe se enakost ohranja in dobimo $\overline{\alpha_3 - \alpha_1} = \lambda(\overline{\alpha_2 - \alpha_1})$. (Upoštevali smo $\overline{\lambda} = \lambda$, saj je λ realno število.)

Ko iz teh dveh enačb eliminiram λ , dobimo zvezo $\frac{\alpha_3 - \alpha_1}{\alpha_3 - \alpha_1} = \frac{\alpha_2 - \alpha_1}{\alpha_2 - \alpha_1}$.

Količino $\chi = \frac{\alpha_2 - \alpha_1}{\alpha_2 - \alpha_1}$ imenujemo *kompleksni nagib premice*.

Tudi kompleksni nagib premice se ohranja pri vzporednem premiku. Za razliko od smernega koeficienta pa se kompleksni nagib premice ne spremeni, če zamenjamo točki med sabo. Preverimo lahko, da ima realna os kompleksni nagib 1, imaginarna os -1, simetrala lihih kvadrantov pa i . Slednjega ni težko videti, saj ležita na tej premici npr. točki 0 in $1 + i$ in je zato kompleksni nagib enak $\frac{1 + i - 0}{1 + i - 0} = \frac{(1 + i)^2}{2} = i$.



S pomočjo kompleksnega nagiba lahko izrazimo potrebne in zadostne pogoje za vzporednost in pravokotnost premic, saj veljata naslednji trditvi: Premici sta vzporedni natanko tedaj, ko sta kompleksna nagiba enaka. Premici sta pravokotni natanko tedaj, ko sta kompleksna nagiba nasprotna.

Za dokaz prve trditve vzemimo različne točke α_1, α_2 in ζ . Premici skozi α_1 in ζ ter α_2 in ζ imata kompleksna nagiba $\frac{\zeta - \alpha_1}{\bar{\zeta} - \bar{\alpha}_1} = \chi_1$ oziroma $\frac{\zeta - \alpha_2}{\bar{\zeta} - \bar{\alpha}_2} = \chi_2$. V enačbah za kompleksna nagiba premic odpravimo ulomke. Točko ζ , ki je presečišče premic, dobimo torej kot rešitev sistema

$$\zeta - \chi_1 \bar{\zeta} = \alpha_1 - \bar{\alpha}_1 \chi_1$$

$$\zeta - \chi_2 \bar{\zeta} = \alpha_2 - \bar{\alpha}_2 \chi_2,$$

v katerem sta ζ in $\bar{\zeta}$ neznanki. Za sistem dveh linearnih enačb z dvema neznankama vemo, da je rešljiv natanko tedaj, ko je determinanta sistema neničelna. Ker je determinanta tega sistema enaka $\chi_1 - \chi_2$, smo tako dokazali prvo trditev, saj v primeru $\chi_1 = \chi_2$ točka ζ (ki je presečišče premic) ne obstaja in sta zato premici vzporedni.

Za dokaz druge trditve pa najprej predpostavimo, da sta premici pravokotni in zapišimo oba normirana smerna koeficienta premic. Ker se smerna koeficienta in kompleksna nagiba ohranjata pri vzporednem premiku, lahko predpostavimo, da potekata obe premici skozi koordinatno izhodišče. Množenje z i predstavlja vrtenje za kot $\pi/2$ okrog koordinatnega izhodišča. Torej velja enakost

$$\frac{\alpha_2 - \alpha_1}{|\alpha_2 - \alpha_1|} = \pm i \frac{\beta_2 - \beta_1}{|\beta_2 - \beta_1|},$$

saj lahko normirani smerni koeficient prve premice preide v normirani smerni koeficient druge premice z rotacijo za kot $\pi/2$ ali $-\pi/2$. Enakost kvadriramo, upoštevamo $|z|^2 = z\bar{z}$ in dobimo

$$\frac{\alpha_2 - \alpha_1}{\bar{\alpha}_2 - \bar{\alpha}_1} = -\frac{\beta_2 - \beta_1}{\bar{\beta}_2 - \bar{\beta}_1}.$$

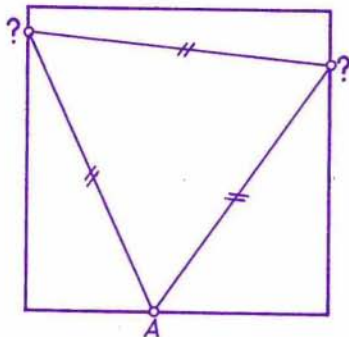
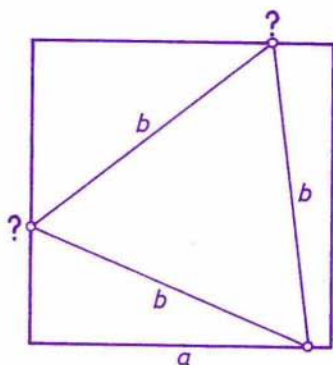
Za pravokotni premici torej velja $\chi_2 = -\chi_1$. Trditev velja tudi v obratno smer, saj lahko preberemo dokaz tudi nazaj.

Toliko za tokrat. V naslednji številki Preseka pa si bomo ogledali, kako z uporabo kompleksnih nagibov zlahka dokažemo nekatere izreke ravninske geometrije.

Matjaž Željko

TRIKOTNIK V KVADRATU

Trikotnik je včrtan v kvadrat, kadar njegova oglišča ležijo na robu kvadrata.



1. V dani kvadrat s stranico dolžine a včrtaj enakostranični trikotnik s stranico dolžine b . Kdaj obstaja tak trikotnik in koliko jih je?
2. V dani kvadrat včrtaj enakostranični trikotnik z danim ogliščem. Ali za vsako točko na robu kvadrata obstaja včrtani enakostranični trikotnik z ogliščem v njej? Koliko je takšnih trikotnikov?

Boris Lavrič

POPOLNE POTENCE

Naravno število oblike m^k , kjer je $m, k \in \mathbb{N}$ in $k > 1$, imenujemo popolna potenca. Dokaži naslednji trditvi:

1. Nobena štiri zaporedna naravna števila ne morejo biti vsa popolne potence.
2. Za vsak $n \in \mathbb{N}$ obstaja n zaporednih naravnih števil, ki so manjša od 4^n in nobeno ni popolna potenca.

Boris Lavrič

ASTRONOMIJA

ASTRONOMSKO GLEDALIŠČE

V Nušičevi Avtobiografiji* lahko preberemo zelo zanimiv odlomek:

"Ko nam je tako nekoč razlagal mrk, je pred tablo poklical tri dijake. Najprej Živka, najdaljšega med nami, ki so mu poganjali že brki in so mu vsi profesorji svetovali, naj se oženi. Poklical ga je in ga postavil tako, da smo ga lahko vsi videli:

- Čeprav si ti, Živko, sicer pravi osel, boš tokrat predstavljal Sonce! Nato se je obrnil proti razredu:

- Dobro pazite! Živkova glava je Sonce in obseva Zemljo in Mesec**. Zemlja bo kot običajno Sretenova glava, za Mesec pa bomo vzeli tale drobižek iz druge klopi.

Tisti drobižek iz druge klopi sem bil jaz.

- Takole, vidite, otroci: če Sonce stoji tukajle, kjer je zdaj Živko, Zemlja pa tam, kjer je Sreten, in Mesec, kjer je tale drobižek, tedaj pošilja Sonce svoje žarke in obseva Zemljo in Mesec. Je tako?

Vsi smo molčali, ker si nismo mogli predstavljati, kako vse to Živko obseva in s čim.

- Toda, je nadaljeval profesor, Zemlja se na poti okoli Sonca v določenem trenutku znajde med Soncem in Mesecem... Poglejte, takole! In že je postavil Živka, Sretena in mene v eno črto. Kot vidite, je glavati Sreten zasenčil tegale drobižka in Živkova svetloba ga ne more obsevati, Mesec pa zato mrkne. Ali razumete?"

Učenci mrka niso razumeli, kot nam pove pisatelj v nadaljevanju. Mi pa se potrudimo, zaigrajmo astronomsko gledališče in razmislimo o mrkih in luninih menah.

MRKI

Igralci: Sonce (S), Zemlja (Z), Luna (L)

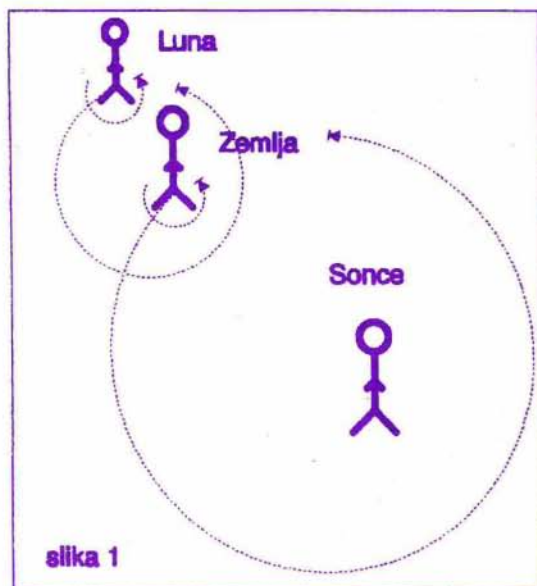
Sonce ima lastno svetlobo, Luna in Zemlja pa sta temni telesi, ki svetita z odbito Sončevo svetlobo.

Luna se vrti okrog svoje osi in obenem kroži okrog Zemlje. Zemlja se vrti okrog svoje osi in skupaj z Luno kroži okrog Sonca. Smeri gibanja za

* Nušič, B., *Avtobiografija*, MK, Ljubljana 1975, str. 98-99

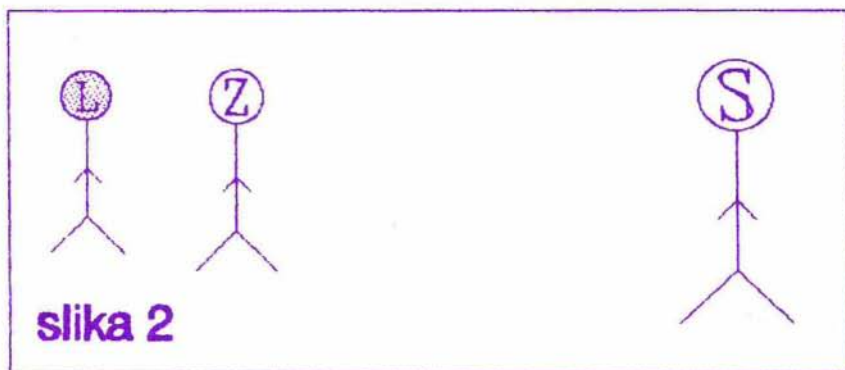
**V slovenščini, pri natančnem strokovnem izražanju, je Luna nebesno telo, mesec pa časovno razdobje. V prevodu Nušičevega teksta je za nebesno telo uporabljena beseda Mesec.

Slika 1. Lega igralcev in smeri vrtenja Zemlje, Lune ter kroženja Zemlje in Lune za opazovalca severne zemeljske poloble.



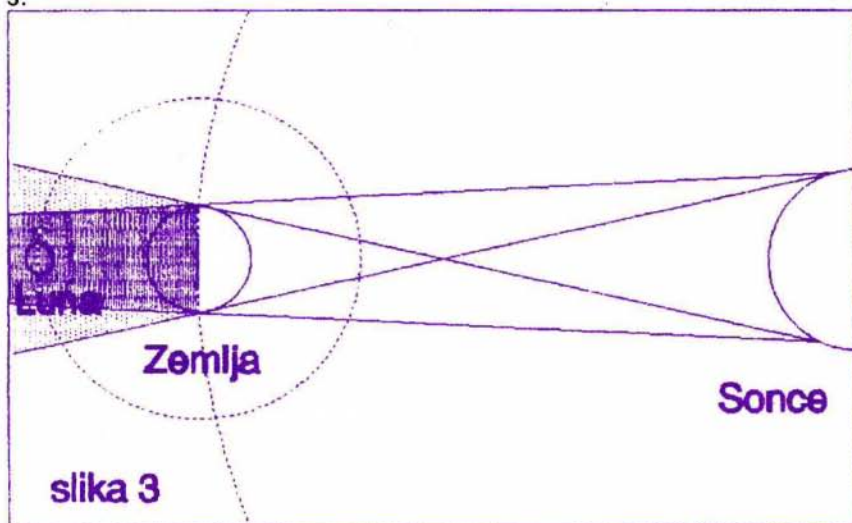
opazovalca na severni zemeljski polobli so označene na sliki 1.

LUNIN MRK: Na prizorišče postavimo igralca Zemljo. Zemljan severne poloble naj bo njegov nos. Predenj postavimo igralca Sonce, zanj pa igralca Luno - slika 2.

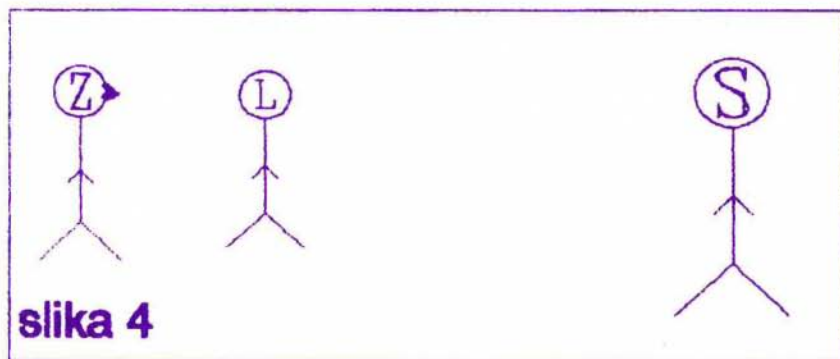


Slika 2. Lega igralcev v prizoru Lunin mrk.

Lunin mrk nastane, kadar Luna pri gibanju okrog Zemlje pride v Zemljino senco. Sonce sveti na vse strani. Sveti tudi proti Luni, Zemlja, ki stoji vmes, meče senco. V to senco pride Luna - slika 2. Premer Zemljine sence je na oddaljenosti, na kateri se giblje Luna, približno dvainpolkrat večji od premera Lune, zato mrk vidijo vsi Zemljani, ki imajo tedaj Luno nad obzorjem - slika 3.



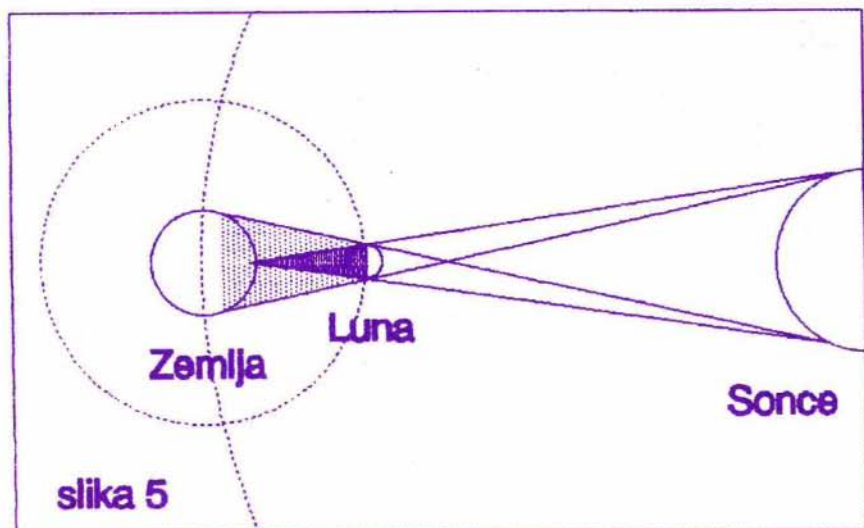
Slika 3. Lunin mrk vidijo vsi Zemljani, ki imajo tedaj Luno nad obzorjem. (Razmerja na sliki niso prava: Sonce bi moralo biti mnogo večje in mnogo dlje od Zemlje.)



Slika 4. Lega igralcev v prizoru Sončev mrk.

SONČEV MRK: Luno postavimo med Sonce in Zemljo - slika 4.

Sončev mrk nastane, kadar pride Luna med Sonce in Zemljo. Luna prestreže del sončne svetlobe, zastre Sonce. Lunina senca pade na majhen del zemeljskega površja, zato je Sončev mrk viden le z majhnega dela zemeljskega površja - slika 5.



Slika 5. Sončev mrk je viden le z majhnega dela zemeljskega površja. (Razmerja na sliki niso prava: Sonce bi moralo biti mnogo večje in mnogo dlje od Zemlje.)

Mrkov je razmeroma malo. Ravnini kroženja Zemlje okoli Sonca in Lune okoli Zemlje sta druga glede na drugo nagnjeni za 5° . Do mrka pride le, ko je Luna v omenjenih legah in blizu ravnini kroženja Zemlje.

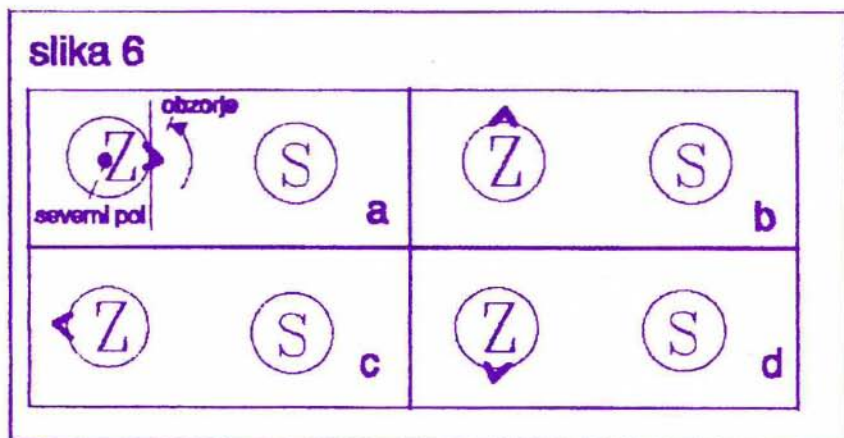
LUNINE MENE

Koliko je ura?

Igralca: Zemlja, Sonce

Na prizorišče postavimo oba igralca. Zemljan je obrnjen ves čas proti jugu, za hrbtom ima sever, na desni zahod, na levi vzhod. Na začetku naj

gleda Sonce: Sonce je na jugu opoldne in je tedaj tisti dan najvišje nad obzorjem. Zemljo zasukajmo okrog njene osi v levo. Čez šest ur, ob 18h, je Zemlja zasukana za 90° , Sonce je na Zemljanovi desni, na zahodu. Ob 24h je Zemlja zasukana še za 90° , Sonce je za Zemljanom, na severu, najnižje pod obzorjem in ni vidno. Ob 6h je Sonce na njegovi levi, na vzhodu - slika 6.



Slika 6. Lege igralcev v prizoru Koliko je ura (pogled od zgoraj).

Lunine mene

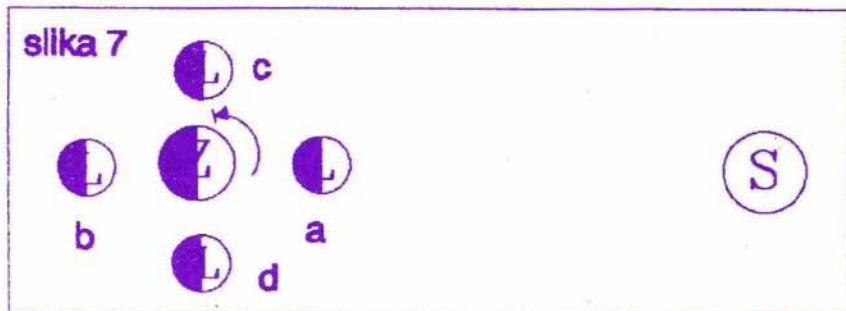
Igralci: Zemlja, Luna, Sonce

Luna je temno telo in sveti z odbito Sončevo svetlobo. Ko se Luna giblje okoli Zemlje, Zemlja okoli Sonca, se spreminja medsebojna lega Zemlje, Sonca in Lune. Zato vidimo enkrat manjši, drugič pa večji del od Sonca osvetljene Lune.

Zaigrajmo ta prizor za mlaj.

MLAJ: Zemljo in Sonce postavimo tako, kot bi bilo poldne. Mednju postavimo Luno - slika 7 lega a. Zemljan ne vidi Lune, ker je osvetljeni del Lune obrnjen stran od njega. Zemljo obrnimo okrog njene osi. Ne pozabimo: Zemljin nos, ki predstavlja Zemljana, je ves čas obrnjen proti jugu. Luna je za Zemljana v isti smeri kot Sonce, zato je na jugu opoldne, na zahodu ob 18h, ko se Zemlja zasučje za 90° , na severu opolnoči in na vzhodu ob 6h jutraj.

ŠČIP: Igralce postavimo na ravno črto, Zemlja naj bo med Luno in Soncem - slika 7 lega b. Osvetljeni del Lune je cel obrnjen proti Zemljanu. Zemljan vidi Luno kot svetel krog. Luna je ob 24h na jugu, na zahodu ob 6h, na severu ob 12h in ob 18h na vzhodu.



Slika 7. Lega igralcev v prizoru Lunine mene (pogled od zgoraj).

PRVI KRAJEC: Igralce postavimo v oglišča pravokotnega trikotnika. V vrhu pravega kota naj bo Zemlja; gleda naj Luno, na njeno desno postavimo Sonce - slika 7 lega c.

Zemljan vidi le proti njemu obrnjeni osvetljeni del Lune, svetel polkrog v obliki črke D. Sonce je na zahodu, Luna je na jugu ob 18h. Ko se Zemlja zavrti za 90° , je ura polnoč. Prvi krajec zahaja približno med 22. in 2. uro. Luna je na severu pod obzorjem ob 6h, vzhaja pa med 10. in 14. uro.

ZADNJI KRAJEC: Igralce postavimo podobno kot prej, le Sonce naj bo na Zemljini levi - slika 7 lega d.

Osvetljeni del Lune, ki ga vidi Zemljan, je polkrog v obliki črke C. Luna je najvišje na nebu ob 6h, zahaja nekako med 10. in 14. uro, na severu je ob 18h in vzhaja med 22. in 2. uro.

Za Zemljana je osvetljeni del Lune od mlaja do ščipa vedno večji - se debeli (oblika črke D); od ščipa do mlaja ga je vedno manj - crkava (oblika črke C).

Po Luni se lahko tudi orientiramo: polna luna (ščip) je najvišje na nebu opolnoči in je na jugu, izboklina mlade lune (ozek srp po mlaju) pa gleda proti zahodu.

Danica Mati in Janez Ferbar

OB LETALSKEM POKU SO SE ZATRESLA TLA

Presek s člankom o letalskem poku je bil že v tisku, ko mi je Matjaž Gostinčar s Seizmološkega zavoda Slovenije na Golovcu Ljubelnivo poslal seizmogram, ki so ga posneli 2. julija 1991 ob 14 uri 1 minuti in 54 sekundah po lokalnem času. Seizmogram je zapis, ki ga da seizmograf o premikih dela zemeljskih tal. S seizmografom ugotavljajo potrese. Seizmogram širokopasovnega seizmografa SSR1 družbe Kinometrics kaže premike dela tal v navpični smeri (zgoraj), v smeri sever-jug (na sredi) in v smeri vzhod-zahod (spodaj) (slika 1). Na navpično os nanese premike dela tal, na vodoravno pa čas; znamenja si sledijo v časovnih razmikih po 1 sekundo. Letalo je ob tistem času "prebilo zvočni zid", se pravi, da je povečalo hitrost čez hitrost zvoka in sprožilo nastanek udarnega vala. Udarni val je bil tako močan, da je zatresel tla, in to je zapisal seizmograf. Tresenje tal je v kratkem času, po kaki sekundi zamrlo.

Presenetljivo je, da kaže seizmogram dva sunka, ki si sledita v časovnem razmiku nekaj daljšem kot 1,1 sekunde. Pri letu s hitrostjo, večjo od 340 metrov na sekundo bi ustrezal dolžini letala okoli 5 metrov časovni razmik manj kot $5 \text{ m} / 340 \text{ ms}^{-1} = 0,015 \text{ sekunde}$. Tako kratkih časovnih razmikov na seizmogramu sploh ni mogoče jasno razložiti. Zato sunkov nista izzvala udarni val, ki izhaja iz kljuna letala, in udarni val, ki izhaja iz repa. Enega izmed sunkov, morda drugega, gre najbrž pripisati kakemu drugemu vzroku. Pomislimo na dve možnosti: na pok protiletalskega izstrelka ali na pok izstrelka, s katerim naj bi letalo poskušalo zadeti oddajnik na Gradu. Seizmogram letalskega poka nad Domžalami 3. januarja 1992, ki so ga tudi posneli, kaže en sam - šibkejši - dobro sekundo širok vrh, ker tedaj pač ni bilo nobenega izstrelka.

O seizmogramih, ki ju je ob teh pokih posnel drug seizmograf Seizmološkega zavoda Slovenije, poročata sodelavca tega zavoda Renato Vidrih in Peter Sinčič v članku *Zapis prebojev zvočnega zidu nad Ljubljano na seizmogramih* v reviji Ujma.

Janez Strnad

Slika 1. Seizmogram letalskega poka so posneli 2. julija 1991 s širokopasovnim seizmografom SSR1 družbe Kinometrics na Seizmološkem zavodu Slovenije na Golovcu. Diagram kaže gibanje dela tal v navpični smeri (zgoraj), v smeri sever-jug (na sredi) in v smeri vzhod-zahod (spodaj). Električne napetosti, ki ustrezajo odmikom, niso nanese v enakem merilu: premik od enega vrha do drugega meri zgoraj 28,2, na sredini 41,8 in spodaj 20,9 enot. Po tem je mogoče grobo oceniti, da je prišel letalski pok iz smeri pod kotom 27° proti smeri sever-jug in pod kotom 31° proti vodoravnici. Drugi pok pa izvira, če cenimo na oko, približno z istega kraja nekaj več kot 1,1 sekunde pozneje ali iz bližjega kraja na približno isti smeri z manjšo zakasnitvijo ali iz bolj oddaljenega kraja z večjo zakasnitvijo.

000:00:01

000:00:02

000:00:03

000:00:04

000:00:05

000:00:06

000:00:07

000:00:08

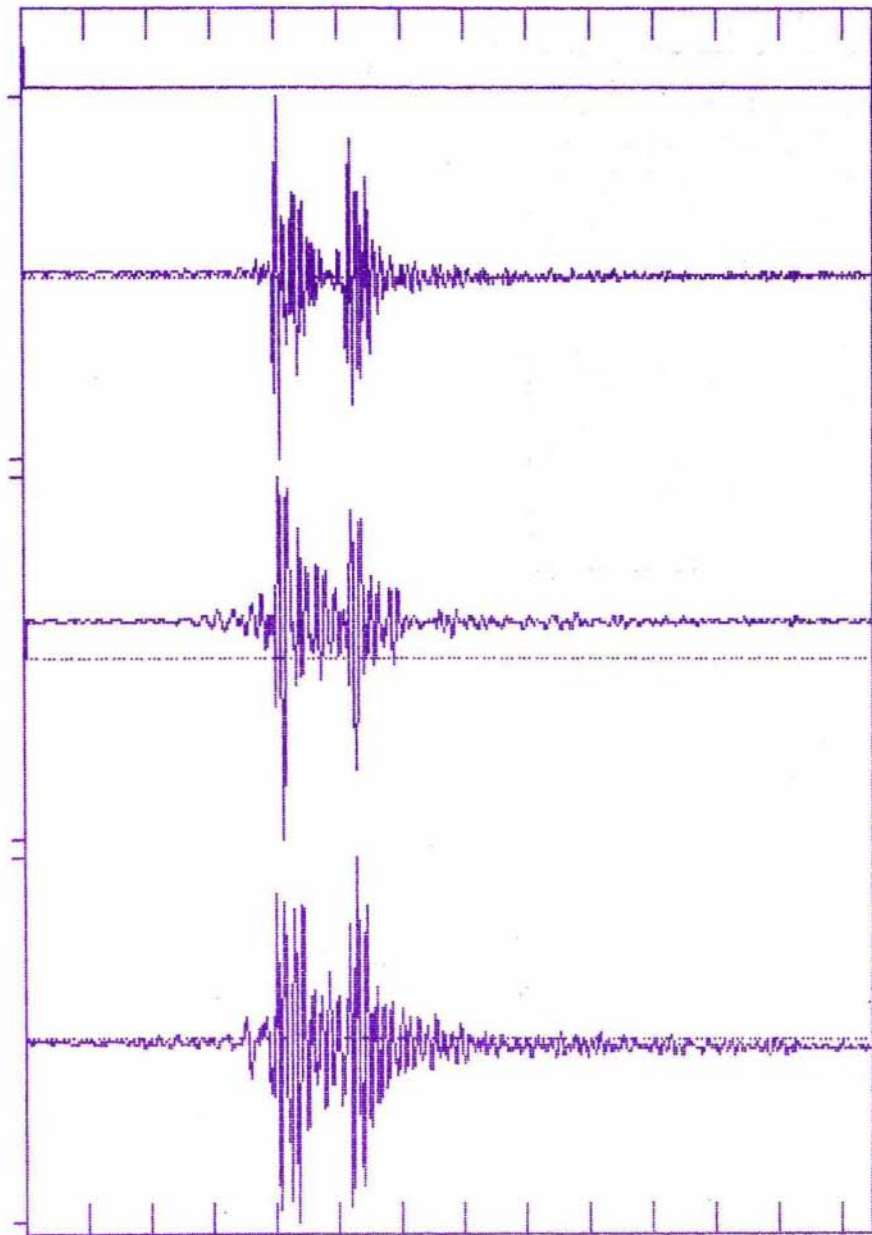
000:00:09

000:00:10

000:00:11

000:00:12

000:00:13



190. OBLETNICA SMRTI

 Natus Sagorizae rantschenus Die 27. Parochiae Me in Carmela Mart. 1754.				SESTAVIL MARKO BOKALIČ	NARAVNA SUROVINA ZA GUMO	NAJSVETLEJŠA ZVEZDA V ORLU	KORENASTA POLJŠČINA, PASTINAK	LJUBKOVALNO ŽENSKO IME	OD VSEH STRANI OMEJEN DEL PROSTORA	
				ENOTA ZA ČISTOST ZLATA						PRS
				GRŠKA PRESTOLNICA						PLEMI NASU MATEM ENOLC NIC
				POVABILO						
				ULKUS SL. SLIKAR (FRANCI)				VLJUDNOST MESTO V NEMČIJI (STEKLO)		
				DOLGA DOBA ŠVIC. MATEMATIK (JOHANN)		DRŽAVA V ZDA MORSKI ROPAR				ANDREJ LIKAR BROOK TAYLOR
NORVEŠKI MATEMATIK (NIELS HENRIK)						PETERO-BOJ MAJHEN SESALEC				
MATEMATIKOVA ROJSTNA VAS										
NAD 1 M DOLG KUSČAR BREZ NOG								STIK DVEH PLOSKEV NEM. KIPAR IN PESNIK (HANS)		
ERNA MUSER				SLOV. SKLADATELJ (DANILO) LOJZE SLAK						
TRENER, KI IZBERE REPREZENTANCO										
MER						BORUT PETRIČ				

Matulji o? RE
Opatija
Reski zaliv
OT PESTI

Tablica 12 --

N	0	1	2
10	0000	0013	0066
11	0014	0053	0092
12	0092	0028	0064
13	1139	1173	1296
14	1461	1492	1523
15	1761	1790	1818
16	2041	2068	2095
17	2304	2330	2355
18	2553	2577	2601
19	2788	2810	2833
20	3010	3032	3054
21	3222	3243	3263
22	3424	3444	3464
23	3617	3636	3655
24	3802	3820	3838
25	3979	3997	4014

SLAVNEGA MATEMATIKA

	GOLJI BOJAN	AM.FIZIK (SIDOR ISAAČ)	POPRAV- LJALEC UR	RUSKI VELETOK	ZNAMENJE KAZNIVEGA DEJANJA						
ŠKI OV. AT. NČ A											
	PLESNI RKESTER										
	AVTOR FIZ. NALOG (BRADAC)										
				IVAN VIDAV		ČEBULA (HRV.)	JUŽ AMERSKO POSESTVO	SLOV. ZGODO- VINAR (JOSIP)	DENARNI DELEŽ OD IZVAJANJA DEL	PROSTOR ZA ČRTO IGRIŠČA	
	PADAJOČA VODA	ČRN PTIČ PEVEC	HARMONIJU POD.TOLKALO								
			SIVA KRIHKA KOVINA		EDEN OD SKLADA- TELJEV IPAVCEV						
					OSMINA KROGA						
					FR.FIZIK IN ASPRONOM						
KA P						UMETNOST				NESTRO- KOVNJAK	
O NER			KOZJE USNJE			VESOLJEC ARMSTRONG					
						ERBU					
Desetih ali Trigajneri Ingerital			POMLADNI MESEC					EMIL ADAMIČ			
5 4 3 2 1 0 9			LUGI GALVANI					ENAKI CRKI			
128 0379 0212 0255 0294 0334 0374											
131 0649 0607 0645 0682 0719 0755											
199 0934 0909 1004 1028 1072 1104											
230 1271 1303 1335 1367 1399 1430											
253 1248 1434 1444 1473 1703 1732											
247 1475 1503 1531 1559 1587 2014											
125 3148 3175 3201 3227 3253 3279											
180 2405 2439 2455 2480 2504 2529											
325 2648 2672 2695 2718 2742 2765											
356 2878 2900 2923 2945 2967 2989											
375 3096 3118 3139 3160 3181 3201											
284 3304 3324 3345 3365 3385 3404											
483 3502 3522 3541 3560 3579 3598											
574 3692 3713 3729 3747 3764 3784											
356 3874 3892 3909 3927 3945 3962											
331 4048 4065 4082 4100 4116 4133											
ŠKRAT						OČKA					

NAGRADNI SISTEMI LINEARNIH ENAČB – 2.del*

1. Trije snopi debeložrnatega žita, dva snopa srednježrnatega žita in en snop drobnožrnatega žita dajo skupaj devetintrideset dujev zrnja. Dva snopa debeložrnatega žita, trije snopi srednježrnatega žita in en snop drobnožrnatega žita dajo skupaj štiriintrideset dujev. En snop debeložrnatega žita, dva snopa srednježrnatega žita in trije snopi drobnožrnatega žita dajo skupaj šestindvajset dujev.

Koliko dujev zrnja da po en snop vsake izmed teh treh vrst žita?

(Pojasnilo: 1 du je približno 10 litrov.)

(Kitajska, iz knjige Devet poglavij matematične umetnosti, okoli 1. st.n.št.)

2. Vsak izmed petih mož ima pri sebi v svoji možnji po nekaj kovancev. Tako jih imata prva dva skupaj šestnajst, drugi in tretji jih imata sedemnajst, tretji in četrti osemnajst, četrti in peti devetnajst, peti in spet prvi pa imata skupaj dvajset kovancev.

Povej, koliko kovancev ima v svojem možnjičku vsak izmed teh petih mož.

(Indija, rokopis Bakhshâlî, okoli 200 n.št.)

3. Trije trgovci so medsebojno zadolženi in sedaj terjajo drug od drugega svoj denar. Če bi prvi izterjal štiri zlatnike od drugega in pet zlatnikov od tretjega, bi postal dvakrat tako bogat kakor druga dva skupaj. A če bi drugi izterjal štiri zlatnike od prvega in šest zlatnikov od tretjega, bi postal kar trikrat tako bogat kakor druga dva skupaj. Tretji pa bi postal celo petkrat bogatejši od onih dveh skupaj, če bi mu le uspelo izterjati pet zlatnikov od prvega in šest zlatnikov od drugega.

O, matematik, povej mi brž, če le poznaš pot k rešitvi, koliko zlatnikov ima tedaj ta trenutek pri sebi vsak izmed teh treh.

(Mahâvira, okoli 850)

4. Za zmeraj enako sem ceno kupil zate teh osem rubinov, zatem smaragdov deset še in nazadnje še biserov sto, ki nosiš jih zdaj na uhanih. Če skupaj zberem po enega iz vrste vsake žlahtnih teh kamnov, bo njih cena za kovance le tri manjša kot pol je od stoterih kovancev.

O, srečno dekle, če si v računanju spretna dovolj,
brž povej mi,
koliko je tedaj kovancev stal vsak od teh kamnov.

(*Bhâskara II., rojen 1114*)

5. Pri treh kupčijah, ki smo jih v zadnjem času sklenili, smo plačali vsakič po milijon štiristo sedemdeset tisoč kuanov. Prvikrat smo kupili tri tisoč petsto butar garu paličic, dva tisoč dvesto činov želvovine in tristo petinsedemdeset zavitkov kadila. Naslednjič smo kupili dva tisoč devetsto sedemdeset butar garu paličic, dva tisoč sto trideset činov želvovine in tri tisoč šestinpetdeset in še četrť zavitkov kadila. V tretje pa smo nakupili tri tisoč dvesto butar garu paličic, tisoč petsto činov želvovine in tri tisoč sedemsto petdeset zavitkov kadila. Koliko stane tedaj butara garu paličic, koliko en čin želvovine in koliko zavitek kadila?

(Pojasnila: kuan je denarna enota, garu paličice so posebne paličice iz aloinega lesa, čin pa je mera za težo; vreden je približno pol kilograma.)

(*Qin Jiushao, 1202 - 1261*)

6. Na desni sliki vidimo gospo O'Toole pri tehtanju. Tehta se seveda s svojim otročičem v naročju in s svojim psom ob nogah. Žal nam gospa kasneje ni hotela povsem naravnost povedati, koliko tehta vsak izmed njih treh. Namesto tega nam je svoj odgovor raje zavila v takšno uganko: "Tehtam sto funtov več kakor otrok in pes skupaj, pes pa je za šestdeset odstotkov lažji od otroka."

Ali lahko poveste, koliko tehta otrok v naročju gospe O'Toole?

(Pojasnilo: 1 funt je približno 0,45 kilograma.)

(*Sam Loyd, 1841 - 1911*)



7. Zadnjikrat se je pri Smileyevih spet oglasil na obisku njihov znameniti stric. Poleg staršev je bilo nad njegovim prihodom navdušenih tudi vseh pet

otrok v družini.

Najprej sta ga pozdravila Billie in mala Gertrude. Stric je od njiju izvedel med drugim tudi to, da je Billie natanko dvakrat starejši od svoje sestre. Henrietta pa je povedala stricu, da imata skupaj s sestro Gertrude natanko dvakrat toliko let kakor Billie. Zatem je stricu stisnil roko še Charlie. Nekdo izmed prisotnih je ob tem pripomnil, da sta oba dečka skupaj stara natanko dvakrat toliko, kolikor sta stari obe dekleti.

Stric kar ni mogel verjeti, da je prišel k Smileyevim na obisk prav v trenutku, ko starosti otrok v družini tako posrečeno sovpadajo. Tedaj je vstopila v sobo še Janet in vzkliknila: "Oh, stric, kako lepo! Prišel si natanko na moj enaindvajseti rojstni dan."

Zadnjo besedo pa je imel seveda oče: "Hm, zares krasno. Toda poleg vsega tega, pogledjte, je polovica vsote starosti vseh treh mojih hčera natanko enaka vsoti starosti obeh mojih sinov."

Ali znate povedati, koliko je star vsak izmed petih Smileyevih otrok?

(Henry E. Dudeney, 1847 - 1930)

8. Trije kmetje se srečajo na živinskem sejmu.

"Poglej," pravi Hodge Jakesu, "dam ti šest svojih prašičev za enega tvojih konj, pa boš imel dvakrat toliko živali kakor jaz."

"No, če imata vidva navado sklepati kupčije kar takole," se tedaj oglasi Durrant in predlaga takoj za tem Hodgeju, "potem ti dam jaz štirinajst svojih ovac za enega tvojih konj. Tako boš imel ti kar trikrat več živali od mene."

"Poslušaj, Durrant, jaz imam zate še boljšo ponudbo," predlaga naposled Jakes. "Dam ti štiri svoje krave za enega tvojih konj. Tako boš imel potem kar šestkrat več živali kakor jaz tukaj na sejmu."

Ni kaj, redkokdaj je človek priča tako nenavadnim kupčijam. Vendar pa se nam prav zaradi njih ponuja nadvse zanimiva uganka. Razvozlati je namreč treba, koliko živali so pripeljali s seboj na sejem vsi trije kmetje skupaj.

(Henry E. Dudeney, 1847 - 1930)

Izbral in prevedel *Vilko Domajnko*

* V tretji številki lanskega letnika Preseka smo vam zastavili prvo skupino zanimivih nalog, ki jih lahko rešimo s pomočjo linearnih sistemov. Očitno so vam bile všeč, saj je v uredništvo prišlo kar veliko rešitev. Tokrat so pred vami nove naloge te vrste, tudi to pot nagradne. Poskusite – lahko dobite zanimivo knjigo! Rešitve pošljite najkasneje en mesec po izidu te številke Preseka. Poleg imena napišite tudi kakšno šolo obiskujete.

Uredništvo

RAČUNALNIŠTVO

ZAKAJ ŽEPNI RAČUNALNIK RAČUNA NAROBE?

Miha je postavil Maticu naslednjo nalogo: Izračunaj osmo število v zaporedju, ki je določeno takole: prvo število je enako $\frac{1}{3}$, vsako naslednje pa dobiš tako, da prejšnje pomnožiš s 100 in odšteješ 33. To zapišemo s formulo: $x_{k+1} = 100x_k - 33$.

Pa si je Matic rekel: "Kaj bi se mučil, če pa imamo žepne računalnike!" Računal je in dobil rezultat -3333. Da bi napravil preizkus, si je izposodil še Rokov računalnik in – glej ga zlomka – dobil rezultat -3333333. V zadregi se je lotil še računanja z lastno pametjo. Ta mu je povedala, da so vsa števila v tem zaporedju enaka $\frac{1}{3}$. Od kod tolikšne razlike?

Matic se je lotil računanja tako, da je za prvo število v zaporedju vnesel vrednost 1 : 3 (1 deljeno s 3). Ker žepni računalnik ne zmore zapisati neskončno decimalk, je pokazal 0,3333333. Navadno si zapomni celo nekaj več decimalk, kot jih pokaže, na primer deset. Matičev računalnik je računal takole:

$$x_1 = 0,3333333333$$

$$x_2 = 100x_1 - 33 = 33,33333333 - 33 = 0,33333333$$

$$x_3 = 100x_2 - 33 = 0,3333333$$

$$x_4 = 0,3333$$

$$x_5 = 0,33$$

$$x_6 = 0$$

$$x_7 = -33$$

$$x_8 = -3333$$

Kako je računal Rokov računalnik, premislite sami!

Rezultat je torej odvisen od tega, koliko decimalnih mest zmore žepni računalnik. Običajno pri računanju zaokroževanje ne vpliva bistveno na rezultat, pri nalogi, ki se je lotil Matic, pa je bilo katastrofalno, da smo $\frac{1}{3}$ zaokrožili na "samo" deset decimalk. Zaradi tega so nekateri žepni računalniki narejeni tako, da je mogoče računati z ulomki in se s tem izognemo zaokroževanju.

Bralec lahko z reševanjem omenjene naloge ugotovi, koliko "skritih" decimalk ima njegov računalnik. Pa še nekaj: žepni računalnik je zelo koristna stvar, vendar ga je treba znati uporabljati.

Olga Arnuš

PRINCIP NAJMANJŠEGA IN NAJVEČJEGA ELEMENTA V PODMNOŽICAH NARAVNIH ŠTEVIL

1. Uvod

Ogledali si bomo dve lastnosti, ki ju imajo naravna števila, ostala števila pa največkrat ne.

Lastnost minimuma. *V vsaki podmnožici naravnih števil obstaja najmanjši element.*

Že racionalna števila te lastnosti nimajo več. Celo če je neka podmnožica racionalnih števil omejena navzdol, ni nujno, da ima najmanjši element. Če vzamemo množico vseh pozitivnih racionalnih števil, potem ta množica nima najmanjšega elementa, ker je ulomek $\frac{n}{2m}$ vedno manjši od ulomka $\frac{n}{m}$. Podobno ne obstaja najmanjše pozitivno realno število. Poleg tega imajo naravna števila še naslednjo lastnost:

Lastnost maksimuma. *V vsaki podmnožici naravnih števil, ki je omejena navzgor, obstaja največji element.*

Racionalna števila tudi te lastnosti nimajo. Podmnožica tistih racionalnih števil, ki so manjša od 1, je namreč navzgor omejena (kar s številom 1), nima pa največjega elementa. O tem se lahko prepričamo na naslednji način:

Naj bo $0 < \frac{n}{m} < 1$ poljuben ulomek. Tedaj je seveda $n < m$. Če primerjamo ulomka $\frac{n}{m}$ in $\frac{n+1}{m+1}$, vidimo, da je $\frac{n}{m} < \frac{n+1}{m+1} < 1$, torej vedno obstaja ulomek, ki je večji od ulomka $\frac{n}{m}$ in še vedno manjši od 1.

Obe omenjeni lastnosti je mogoče koristno uporabiti pri reševanju problemov iz teorije števil in kombinatorike. Pokažimo dva osnovna primera.

2. Primer uporabe lastnosti minimuma

Naj bo n neko naravno število in naj bo

$$\mathcal{V}_n = \{ n, 2n, 3n, \dots \}$$

množica njegovih večkratnikov. Ta podmnožica naravnih števil ima naslednji lastnosti:

Lastnost A. Če je m poljubno naravno število in p poljubno število iz množice $\mathcal{V}_n$, potem je število $p \cdot m$ tudi v množici $\mathcal{V}_n$.

Lastnost B. Če sta p_1 in p_2 dve števili iz množice $\mathcal{V}_n$ in je $p_1 > p_2$, potem je tudi število $p_1 - p_2$ v množici $\mathcal{V}_n$.

Teh lastnosti ni težko preveriti. Naj bo torej p iz množice $\mathcal{V}_n$. Tedaj je p večkratnik števila n . To pomeni, da obstaja tako naravno število r , da je $p = r \cdot n$. Če je m poljubno nadaljnje naravno število, je $m \cdot p = (m \cdot r) \cdot n$ tudi večkratnik števila n in zato $m \cdot p$ spada v množico $\mathcal{V}_n$ večkratnikov števila n . Povsem podobno preverimo tudi lastnost B.

Zdaj se nam zastavi vprašanje, ali obstajajo še kakšne druge podmnožice naravnih števil z lastnostma A in B:

Problem. Naj bo $\mathcal{V}$ neka podmnožica naravnih števil, ki ima lastnosti A in B. Ali obstaja tako naravno število n , da je množica $\mathcal{V}$ kar enaka množici večkratnikov tega števila (oziroma ali je $\mathcal{V} = \mathcal{V}_n$ za neki n)?

Problem bomo rešili z uporabo lastnosti minimuma in pokazali, da je odgovor na zastavljeno vprašanje pritrdilen.

Ker je $\mathcal{V}$ podmnožica naravnih števil, ima po lastnosti minimuma najmanjši element. Označimo ga s črko n . Naj bo p poljubno število iz množice $\mathcal{V}$, različno od n . Ker je n najmanjši element množice $\mathcal{V}$, je očitno $p > n$. Število p razcepimo na vsoto $p = q \cdot n + o$, kjer je $q \geq 1$ kvocient, o pa ostanek pri deljenju števila p s številom n . Gotovo vam je dobro znano, da je ostanek vedno večji ali enak 0 in manjši ali enak $n - 1$, zato je $o < n$.

Zaradi lastnosti A je najprej število $q \cdot n$ v množici $\mathcal{V}$, saj je po predpostavki število n v množici $\mathcal{V}$. Denimo, da je ostanek o različen od nič. Tedaj je $p > q \cdot n$, zato je po lastnosti B tudi število $o = p - q \cdot n$ v množici $\mathcal{V}$. To pa ni mogoče, ker je število n **najmanjše** v množici $\mathcal{V}$.

To pomeni, da je $p = q \cdot n$, oziroma število p je večkratnik števila n . Dokazali smo, da je vsako število iz množice $\mathcal{V}$ večkratnik števila n , kar pomeni, da je množica $\mathcal{V}$ podmnožica množice $\mathcal{V}_n$. Zaradi lastnosti A sta ti množici kar enaki, ker z množenjem števila n z vsemi možnimi naravnimi števili dobimo vse večkratnike.

3. Uporaba principa maksimuma

Rešili bomo naslednji

Problem. *Na matematičnem kongresu sta dva prijatelja, ki sta šla po predavanjih skupaj na kosilo, ugotovila naslednjo zanimivost:*

Če sta imela dva matematika na kongresu enako število znancev, potem nista imela skupnih znancev.

Dokaži, da je obstajal na kongresu tudi tak matematik, ki je imel samo enega znanca.

Ta problem bomo rešili z uporabo principa maksimuma. Označimo udeležence kongresa s številkami $1, 2, \dots, n$. Pri vsakem matematiku označimo še število njegovih znancev (brez njega samega) s števili $Z(1), Z(2), \dots, Z(n)$.

Očitno je nemogoče, da bi veljalo $Z(1) = Z(2) = \dots = Z(n) = 0$. To bi namreč pomenilo, da nihče na pozna nikogar, zato se pri kosilu ne bi mogla srečati dva prijatelja.

Ker nihče ne more poznati več oseb, kot je prisotnih, je vedno $0 \leq Z(i) \leq n - 1$, kjer je i eno izmed števil $1, 2, \dots, n$. To pomeni, da je množica $\{Z(1), Z(2), \dots, Z(n)\}$ navzgor omejena in ima po lastnosti maksimuma največji element. Naj bo p ta največji element, ki je zaradi razmisleka v prejšnjem odstavku vsaj enak 1. Brez škode za splošnost lahko privzamemo, da je kar $Z(1) = p$. To pomeni, da ima matematik 1 natanko p znancev $i_1, i_2, \dots, i_p$. Seveda ni nujno, da je matematik 1 edini udeleženec kongresa s p znanci.

Zdaj si oglejmo števila $Z(i_1), Z(i_2), \dots, Z(i_p)$. Očitno je, da velja $Z(i_1), \dots, Z(i_p) \leq p$. Ker vsi ti poznajo matematika 1, je tudi $1 \leq Z(i_1), \dots, Z(i_p)$. Torej imamo med 1 in p natanko p naravnih števil.

Ali sta lahko dve med njimi enaki? Če bi veljalo $Z(i_1) = Z(i_2)$, bi imela ta matematika enako število znancev, zato po predpostavki ne bi smela imeti skupnih znancev. Toda matematik 1 je njun skupni znanec, zato je $Z(i_1) \neq Z(i_2)$. Na podoben način vidimo, da so vsa števila $Z(i_1), Z(i_2), \dots, Z(i_p)$ med seboj različna. Če imamo p različnih naravnih števil, ki so vsa med 1 in p , pa ne gre drugače, kot da je eno med njimi enako 1, eno med njimi enako 2 in tako naprej do p . To pomeni, da mora biti nekdo, ki ima na kongresu samo enega znanca.

Borut Zalar

NOVE KNJIGE

Gardner, M., AHA! PA TE IMAM, PARADOKSI ZA NAPE-
NJANJE MOŽGANOV IN RAZVEDRILO, 2.natis, DZS 1992,
228 str. (Z logiko v leto 2000)

Knjiga Martina Gardnerja *Aha! Pa te imam* iz zbirke *Z logiko v leto 2000* sodi na področje rekreacijske matematike. Knjiga je med mladimi bralci naletela na zelo ugoden odziv in je bila že nekaj časa razprodana. Na tekmovanjih iz zabavne matematike in logike so večkrat izrekli misel, naj bi knjigo vendarle ponatisnili.

Zaradi tega smo se pri Državni založbi odločili, da to storimo, saj smo prepričani, da delo ne nudi le obilo zabave, ampak prispeva k razvoju bralčevega logičnega sklepanja in ostri njegove sposobnosti za reševanje problemov.

Matematik Martin Gardner je trideset let urejeval rubriko Matematične igre v znani reviji *Scientific American* in izdal več knjig. V tej knjigi je zbral veliko raznih ugank in nalog - paradoksov. Tako imenujemo naloge, ki so na prvi pogled sprte z zdravo pametjo in nas zato navadno presenetijo in s tem pritegnejo našo pozornost. Paradoksi namreč zajemajo trditve, ki so videti napačne, a so pravilne, pa take, ki so videti resnične, a so napačne. Poti pri dokazovanju se zde brezhibne, a vodijo v logično protislovje. Zato so paradoksi za bralca še poseben izziv in mu zbujajo še dodatno zadovoljstvo, ko jih reši.

Uganke in naloge so razvrščene v šest poglavij. Prvo zajema logiko, drugo aritmetiko, tretje geometrijo, četrto verjetnost in peto statistiko. Zadnje poglavje se ukvarja s paradoksi gibanja in naloge v njem imenuje pisec "supernaloge o potovanjih skozi čas in o obrnjenem času".

Ni razloga, da sedanji rod osnovnošolcev in srednješolcev ne bi enako dobro sprejel knjige, kot jo je prejšnji.

Milena Strnad

POIŠČI OSNOVI

1. Poišči osnovo številskega sistema, v katerem je naslednji račun pravilen:
 $73 \cdot 25 = 1563$.
2. Ista naloga za račun: $21 \cdot 122 = 2562$.

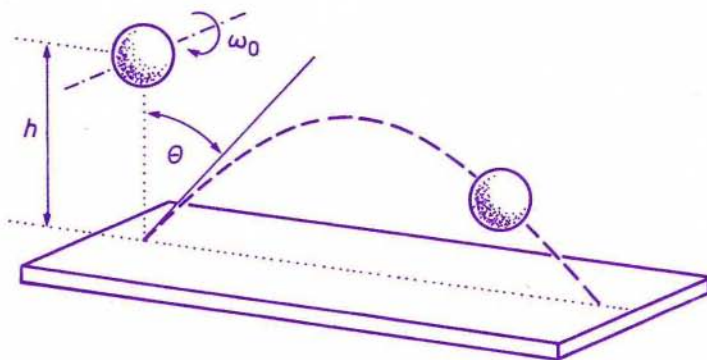
Marija Vencelj

NALOGE S FIZIKALNE OLIMPIADE 1991 V HAVANI

Fizikalna olimpiada 1991 je bila v Havani na Kubi. Objavljamo naloge, ki so jih tam reševali najboljši mladi fiziki. Upamo, da bodo vzpodbudile slovenske srednješolce k dodatnemu delu, kar jim bo omogočilo enakovredno kosanje z vrstniki na kaki od naslednjih olimpiad. V naslednjih letih bodo le-te v ZDA (1993), na Kitajskem (1994), v Avstraliji (1995) in na Norveškem (1996).

1. naloga

Homogena toga krogla z radijem R in z maso m je v višini h nad togimi vodoravnimi tlemi in se vrti s kotno hitrostjo ω okoli vodoravne osi skozi težišče (sl. 1). Krogla pade na tla in se odbije v poševni smeri. Višino,



Slika 1

ki jo doseže, izrazimo kot α -ti del prvotne višine. Koeficient trenja med kroglo in tlemi je k . Zračni upor je zanemarljiv, pri trku se niti krogla niti tla ne deformirajo, med trkom se krogla ne premakne zaznavno. Vztrajnostni moment krogle pri vrtenju okoli težiščne osi je $2mR^2/5$.

Za primer, da se krogla med trkom ves čas vrti in drsi ob tleh, izračunaj:

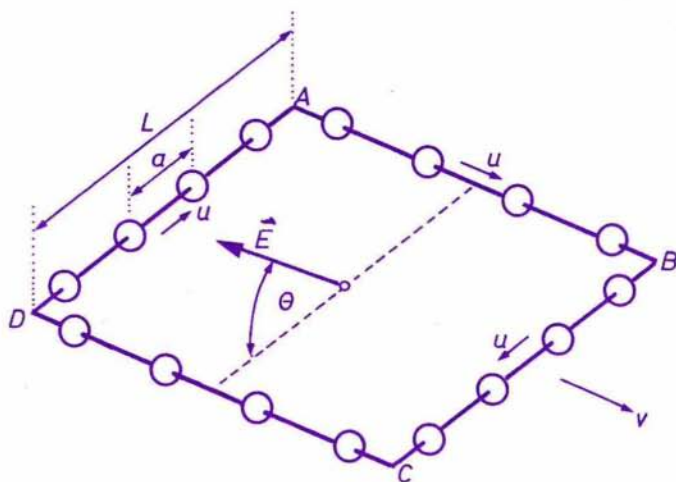
- odbojni kot Θ ;
- vodoravno razdaljo, ki jo preide težišče krogle, preden krogla spet zadene ob tla;
- najmanjšo začetno kotno hitrost, ki jo mora imeti krogla v tem primeru.

Iste količine izračunaj tudi za primer, da vrtenje krogle zaradi trenja ob tleh preneha, preden se krogla odbije.

Skiciraj odvisnost odbojnega kota od začetne kotne hitrosti krogle.

2. naloga

Kvadratna zanka s stranico L , merjeno v opazovalnem sistemu, ki je vezan na zanko, se giblje enakomerno s hitrostjo v po homogenem električnem polju, ki je v ravnini, pravokotni na hitrost, hkrati pa tvori kot Θ z ravnino zanke (sl. 2). Opazovalec, ki je vezan na zanko, vidi, da se gibljejo po obodu



Slika 2

zanke s hitrostjo u v medsebojnem razmiku a enakomerno nanizane drobne nabite kroglice, od katerih vsaka nosi naboj e . Žica, po kateri drsijo kroglice, je enakomerno nabita z nasprotnim nabojem, ki natanko izravna naboj kroglic.

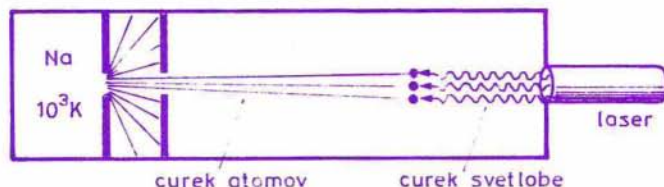
Določi s stališča opazovalca, ki miruje v laboratorijskem sistemu, naslednje količine:

- razdaljo med kroglicami na posameznih stranicah;
- skupni naboj na posameznih stranicah;
- velikost električnega navora, ki skuša zasukati zanko v smeri gibanja kroglic;
- električno energijo zanke v zunanjem električnem polju;
- absolutno vrednost električnih tokov v stranicah zanke.

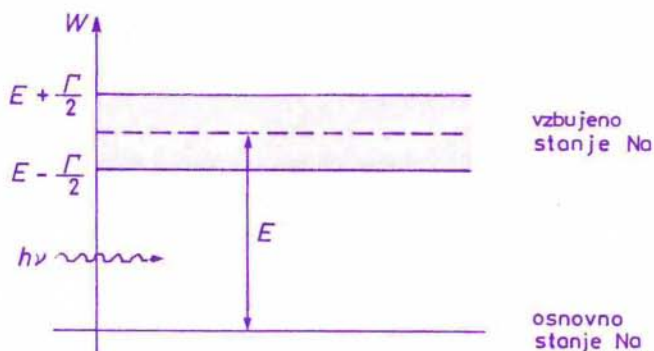
Pri reševanju pomaga dejstvo, da električni naboj telesa ni odvisen od sistema, v katerem ga opazujemo.

3. naloga

Curke atomov hladijo s tako imenovanim laserskim hlajenjem. Pri takem eksperimentu vstopa v vakuumsko posodo curek atomov ^{23}Na , ki jih dobimo iz pečice, kjer izpareva natrij pri temperaturi 1000 K. Curek osvetljuje iz nasprotne smeri močan curek laserske svetlobe (sl. 3) s frekvenco, ki ustreza resonančnemu prehodu v vzbujeno stanje pri tistih atomih natrija, ki se gibljejo z izbrano hitrostjo v_0 (sl.4). Ob absorpciji fotona laserske svetlobe se atomom spremeni hitrost za $\Delta v_1 = v_1 - v_0$. Atom svetlobo nato spet odda in se povrne v osnovno stanje. Pri tem se mu spremeni hitrost za $\Delta v' = v'_1 - v_1$, smer gibanja pa za kot φ (sl.5). Absorpcija in emisija svetlobe se ponavljata, dokler se atomom ne spremeni hitrost za toliko, da resonančna absorpcija ni

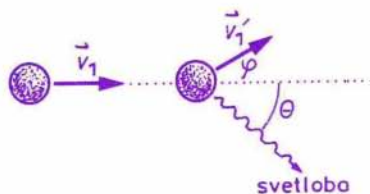


Slika 3



Slika 4

več mogoča. Tedaj spremenijo frekvenco laserske svetlobe za toliko, da spet pride do resonančne absorpcije. Postopek nadaljujejo, dokler se delu atomov hitrost ne zmanjša na nič.



Slika 5

V prvem približku lahko pri obravnavanju pojava zanemarimo vse razen absorpcije in emisije svetlobe. Računamo tudi, kot da sta absorpcija in emisija trenutna pojava.

Za primer, da je energija vzbujenega stanja atoma $E = 3,36 \cdot 10^{-19} \text{ J}$ in energijska širina vzbujenega stanja $\Gamma = 7,0 \cdot 10^{-20} \text{ J}$, poišči odgovor na naslednja vprašanja:

a. Kolikšna mora biti frekvenca laserske svetlobe, da jo bodo resonančno absorbirali atomi s povprečno kinetično energijo pri temperaturi pečice? Za koliko se atomom spremeni hitrost pri absorpciji svetlobe?

b. Kolikšna je širina hitrostnega intervala atomov, pri katerih je mogoča resonančna absorpcija?

c. Za kolikšen največji kot se lahko pri prvi emisiji svetlobe spremeni smer gibanja atomov?

d. Za koliko se lahko pri nespremenjeni frekvenci laserske svetlobe zmanjša hitrost atomov?

e. Kolikšno približno število absorpcij in emisij je potrebno, da se zmanjša hitrost atomov s povprečno kinetično energijo (gl. vprašanje a) na nič? Upoštevaj le atome, ki se gibljejo ves čas v prvotni smeri.

f. Koliko časa traja ustavljanje? Kolikšno pot preidejo atomi v tem času?

Računaj z naslednjimi vrednostmi konstant: svetlobna hitrost $c = 3,0 \cdot 10^8 \text{ m/s}$, atomska enota mase $u = 1,67 \cdot 10^{-27} \text{ kg}$, Planckova konstanta $h = 6,62 \cdot 10^{-34} \text{ Js}$, Boltzmannova konstanta $k = 1,38 \cdot 10^{-23} \text{ J/K}$.

Eksperimentalna naloga

V črni škatli s tremi priključki A, B , in C so tri različne električne komponente. Izbrane so izmed baterij, upornikov z uporom, večjim kot 100 ohmov, kondenzatorjev s kapaciteto večjo kot $1 \mu\text{F}$ in polprevodniških diod.

a. Določi, katere so komponente v škatli in kako so vezane glede na priključke A, B in C . Nariši shemo vezave, s katero si odkril vezje v škatli, tudi tiste, s katerimi si razločil med vezji s podobnimi lastnostmi.

b. Če je v škatli baterija, določi njeno gonilno napetost. Nariši shemo meritve!

c. Če je v škatli upornik, določi njegov upor. Nariši shemo meritve!

d. Če je v škatli kondenzator, določi njegovo kapaciteto. Nariši shemo meritve!

e. Če je v škatli dioda, določi napetost praga in prebojno napetost.

f. Ocení napako izmerjenih količin!

Pri merjenjih imaš na razpolago:

- izvir spremenljive enosmerne napetosti;
- 2 univerzalna merilna instrumenta;
- 10 veznih žic;
- 2 stikalni plošči;
- upornik, 100 k Ω , 5%;
- upornik, 10 k Ω , 5%;
- upornik, 1 k Ω , 5%;
- kondenzator, 100 μ F, 20%;
- stoparico;
- prekinjalo;
- papir, risalni trikotnik.

Podani so še notranji upori merilnih instrumentov na tokovnih in napetostnih področjih.

Pišite nam o svojih rešitvah !

Marjan Hribar

ZVOK. GIBANJE, Pomurska založba, Murska Sobota 1991

Ste že pregledali zbirko Veselje z znanostjo s podnaslovom Naredi sam, poskusi, triki? Ne!? Potem pohitite! Lani so v okviru te zbirke že izšle tri knjige (Voda, Svetloba, Zrak), zdaj pa imamo na voljo še dve: Zvok (avtorici Terry Cash, Barbara Taylor) in Gibanje (Brenda Walpole). Obe knjigi je za slovenske bralce prevedel in priredil Janez Ferbar, izdala pa jih je Pomurska založba iz Murske Sobote. Vseh pet knjig je vredno vsaj pogledati. So lepe, živahnih barv, polne risb in fotografij, torej prijetne za oko. Vsebujejo navodila, kako narediti poskuse, razlage le-teh, ob vsakem poskusu pa tudi strokovno, preprosto razlago pojavov, ki spremljajo poskuse. Ko delaš te poskuse, se čudiš, kako so čisto življenjske situacije povezane s fiziko. Pa še zabavaš se, ko se učiš.

Vsebinsko knjige Zvok lahko razdelimo na šest področij: kaj je zvok; kako slišimo zvok (odmevi, akustika, hrup); hitrost zvoka; zvoki strun in piščali; ropotulje in zvočni zapis ter živalski zvoki. Knjiga Gibanje pa ima sedem poglobitvenih področij: teža; ravnovesje; vztrajnost; trenje; klanci, kolesa, škripci in vzvodi; vrste gibanja ter stroji in gibanje.

Zbirka je plod mednarodnega raziskovalnega projekta Spoznajmo naravo z rokami in glavo, ki je vključen v mladinsko raziskovalno dejavnost.

Knjige bi priporočila učiteljem in učencem za delo pri dodatnem pouku, še posebno pa mladim vedoželjnežem za poučno zabavo doma ali v naravi.

Če že imate doma prve tri knjige, boste gotovo hoteli imeti tudi ti dve. Če jih pa še nimate, vam zbirko prav toplo priporočam.

Joži Hribar



Naredi telefon z jogurtovima lončkoma

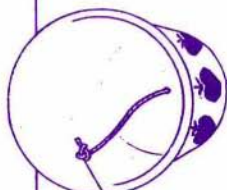
Telefon iz lončkov deluje drugače kot cevni telefon, vendar tudi ta izrablja zvočno valovanje v zraku.

Pripomočki: dva jogurtova lončka, vrvica, škarje.

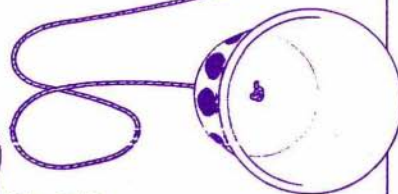
1. S škarjami naredi luknjico v dno vsakega lončka.
2. Krajišči vrvice potisni skozi luknjici, nato naredi na obeh koncih vozla, da se napeta vrvica ne izmuzne skozi luknjico.
3. Postavi se prijatelju nasproti, nategni vrvico in preskusi telefon.
4. Podrži lonček ob ušesu, prijatelj pa naj počasi in jasno govori v drugi lonček.



— Vrvica naj bo napeta.



Vozel na vrvici



Kako deluje

Prijateljčev glas zatrese dno lončka. Nihajoče dno vzbudi valove v napeti vrvici, ta pa strese dno lončka na drugi strani. Dno sproži valovanje zraka, in tako zaslišiš prijateljčev glas. Zakaj telefon iz jogurtovih lončkov deluje le, če je vrvica napeta?

RUDJER BOŠKOVIĆ NA HRVAŠKEM BANKOVCU

Presek je že poročal o izraelskem bankovcu s podobo Alberta Einsteina in avstrijskem s podobo Erwina Schrödingerja. Na novih hrvaških bankovcih pa je odtisnjena podoba znanega hrvaškega fizika Rudjera Josipa Boškovića (slika 1). Škoda, da na novih slovenskih bankovcih ne bo podobe Jožefa Stefana! Kot se po Stefanu imenuje velik raziskovalni inštitut v Ljubljani, se tak inštitut v Zagrebu imenuje po Boškoviću.

Rudjer Bošković je bil rojen v Dubrovniku 18. maja 1711. Odlikoval se je v dubrovniški jezuitski šoli, tako da so ga poslali na Collegium romanum, glavno jezuitsko šolo v Rimu, ki jo je obiskoval že njegov brat. Po končanem študiju je z dvaindvajsetimi leti začel poučevati. Postal je redovnik in nato profesor za logiko in pozneje za matematiko.

Veliko je objavljaj in zaslovel po vsem svetu. Mnogo je tudi potoval. Skoraj za leto dni se je ustavil v Dubrovniku in se prek Ljubljane odpravil najprej na Dunaj in nato v Pariz - že prej je postal član francoske akademije znanosti. Pred preganjanjem jezuitov se je umaknil najprej v Benetke in pozneje v London. Tu je njegov ugled dosegel višek in mu odprla vrata v Kraljevo družbo, angleško akademijo znanosti. Vrnil se je prek Nizozemske in Nemčije, obiskal še Carigrad in se odpravil na Poljsko. Profesorsko mesto v Rimu je izgubil, ker je zbolel njegov brat, ki ga je med potovanjem nadomeščal. Prešel je na univerzo v Milanu in nato na univerzo v Padovi. Za jezuite so tudi v Italiji napočili slabi časi, zato je sprejel mesto ravnatelja optike v francoski



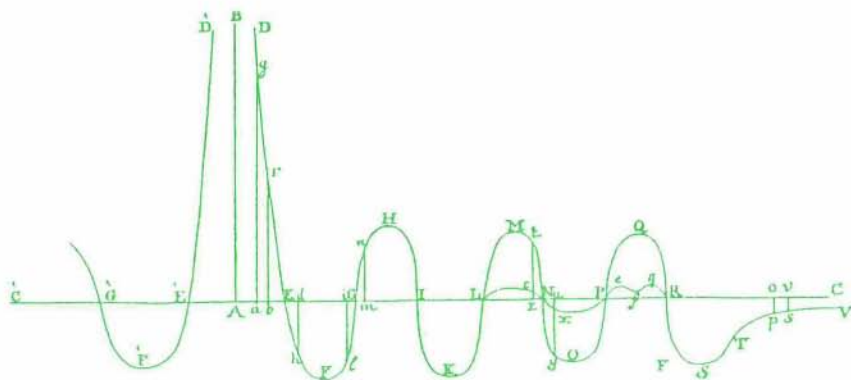
Slika 1. Boškovićeva podoba na bankovcu hrvaških dinarjev.

mornarici. V Parizu se je spočetka družil z znamenitimi Francozi, pozneje pa se je zapletel v spore z d'Alambertom, Laplaceom in drugimi - z Lagrangeom se je sprl že prej. Postajal je vse bolj samotarski. Pregarjala ga je misel, da je v njegovih delih veliko napak. Umrl je 13. februarja 1787 v Milanu.

Rudjer Bošković je bil vsestranski astronom in fizik. Objavil je 75 knjig in razprav. Izhajal je iz Newtonove mehanike, ki je imela tedaj veljavo osrednje fizikalne teorije. Obravnaval je sončne pege, severni sij, komete, mrke, prehod Merkurja prek sončne ploščice, uporabo daljnogleda, sferno trigonometrijo, spreminjanje teže po površju Zemlje, obliko Zemlje in razloge zanjo, živo silo (po naše kinetično energijo), zgradbo snovi, zakon sile. Izpopolnil je več optičnih merilnih naprav in razmišljal o najboljšem izidu pri merjenjih, obremenjenih z napakami. Sodeloval je pri načrtih za izsuševanje močvirij, gradnjo pristanišč, regulacijo rek in popravilo znanih stavb in si pridobil ugled kot geodet, gradbenik in hidromehanik.

Kot nekateri drugi veliki možje tistega časa je Bošković tudi pesnil. Napisal je latinsko pesnitev o mrkih Lune in Sonca, ki jo je še dopolnil in ki je izšla tudi v francoskem prevodu. Pozneje pa mu je za pesmi zmanjkalo časa.

Svoje zamisli, predvsem zamisli o zgradbi snovi, je povzel v knjigi *Theoria philosophiae naturalis redacta ad unam legem virium in natura existentium* (Teorija naravoslovja, prirejena enemu zakonu sil, ki obstajajo v naravi). Prvič



Slika 2. Boškovićeva sila med delcema v odvisnosti od razdalje iz knjige *Theoria philosophiae*. Na vodoravno os je nanesena razdalja, na navpično pa sila; pozitivna sila je odbojna, negativna pa privlačna. Na bankovcu ni te slike, ki so jo od vseh Boškovićevih slik najpogostejše ponatisnili, ampak so tri druge iz iste knjige. S tremi elipsami si je Bošković pomagal pri razglabljanju o gibanju delca, na katerega deluje sila z risbe, druga slika zadeva težišče trikotnika in tretja težišče dveh krogel.

je izšla leta 1758 na Dunaju, razširjena in popravljena druga izdaja pa je izšla v Benetkah leta 1763. Bošković je zastopal stališče, da snov sestavljajo nedeljivi delci brez razsežnosti. Vsak delec je vztrajen in izvaja na druge delce silo, ki je odvisna od razdalje. Pri zelo veliki razdalji je sila privlačna, to je gravitacija, pri manjši odbojna, pri še manjši zopet privlačna ... (slika 2). Zgradbo snovi in njihove lastnosti je mogoče pojasniti s to silo.

V zamisli je mogoče zaslugi zasnovi enotne teorije polja, ki jo iščejo današnji fiziki in ki naj bi opisala vse sile od gravitacije do sile med kvarki. Nekatere druge Boškovićeve izjave o prostoru in času in o relativnosti vztrajnosti podobno zbuja misli na teorijo relativnosti. Vseeno ne gre pozabiti, da so v Boškovićevem času šele nastajali temelji sodobne fizike.

Tedaj je Dubrovaška republika živela razmeroma mirno in z razvojem obrti, trgovine in pomorstva dosegla razcvet. Sam Rudjer Bošković pa je živel razgibano, v naravoslovju opravil pomembno delo, dosegel velike uspehe in požel priznanje vsega sveta. Zares si je zaslužil počastitev s podobo na bankovcu.

Janez Strnad

PRIROČNIKI IN UČBENIKI, izdani pri Komisiji za tisk DMFA Slovenije

Uršič S., Matematične tabele

Vadnal A., Matematika - leksikon CZ

Strnad J., Fizika - leksikon CZ

Štalec I. in dr., Zbirka vaj iz aritmetike, algebre in analize
za 1., 2., 3., in 4. razred srednjih šol

Mohar B., dBase III plus

Šfiligoj B., Željko M., PiCTeX CAD, program na disketi z navodili

Račkova knjižnica

1. Klavžar S., Mali priročnik operacijskega sistema MS DOS
3. Razpet M., Sedi in piši z LaTeX-om!
4. Lokar M., Začeti z dBase IV
5. Lokar M., dBase IV. Ukazi in funkcije
6. Klavžar S., WordStar 6.0
7. Lokar M., Derive, program za simbolično računanje
8. Lokar M., Turbopascal 6.0

ASTRONOMIJA

PISMA BRALCEV

Uroš Čotar iz Martinučev pri Renčah je zvest privrženec astronomije. Prebere vse astronomske članke, tudi tiste v drugih revijah.

Želi si še več astronomskih prispevkov, predvsem takih s fotografijami. Dve nam je kar sam poslal: Luno v meni prvega krajca in Jupiter s štirimi velikimi sateliti. Za spremljavo si je pomagal z elektromotorčkom. Lepi sta, ali ne?



Slika 1. Luna v meni prvega krajca, Martinuči, 20.05.1991 ob 22.00 poletnega sr.evr. časa, film AGFA XRG 100 (barvni) eksp. 1/60 s, zrcalni daljnogled 20/203 cm.



Slika 2. Jupiter s štirimi velikimi sateliti (zahod je na levi), Martinuči, 30.01.1991 ob 05.30 sr.evr. časa, film AGFAPAN 400 eksp. 6 s, isti daljnogled.

Verjetno je med vami še več amaterjev astronomov, ki se poskušate v fotografiranju. Ojunačite se in nam pošljite svoje uspele posnetke. Radi jih bomo objavili.

Jasno nočno nebo in lep pozdrav!

Dušica Boben

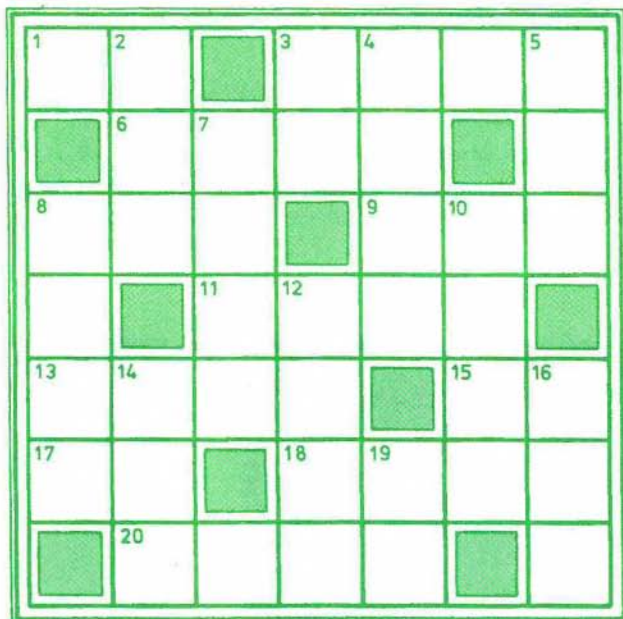
PRAVOKOTNI VEČKOTNIKI

Vemo, da ima lahko trikotnik največ en pravi kot. Koliko pravih (notranjih) kotov ima lahko konveksni n -kotnik, $n > 3$?

Marija Vencelj

RAZVEDRILO

ŠTEVILSKA KRIŽANKA



Vodoravno:

1. Najmanjše naravno število, katerega produkt s številom 126 je popolni kvadrat.

3. Vrednost izraza $P - 3$, kjer je P površina pravilne štiristrane prizme z osnovnico 50 in višino 18,64.

6. Vrednost izraza $115x + 50$, kjer število x zadošča naslednjemu pogoju: če mu dodamo 7, dobimo tolikokrat pa 10, kolikorkrat dobimo po 20, če to število odštejemo od 173.

8. Vrednost x^3 , kjer je x rešitev enačbe $3(2x - 9) - 5(3x - 18) = 0$.

9. Vrednost izraza $3 \cdot 2^m$ za naravno število m , ki je enaka vrednosti $(m + 1)^2 \cdot (m - 1)$.

11. Vrednost izraza $\frac{3}{\pi} V + 40$, kjer je V volumen telesa, ki ga dobimo, če enakokraki trapez z osnovnicama $a = 20$, $c = 8$ in krakom $b = 10$ zavrtimo okrog manjše osnovnice.

13. Najprej večje, potem pa še manjše od števil, ki rešita sistem enačb

$$2x - y = 35 \quad x + y = 34.$$

15. Vrednost izraza $(12x)^2$, kjer je x rešitev sorazmerja

$$(5x - 1) : (5 - 2x) = 3 : 8.$$

17. Vrednost izraza $\sqrt{121 \cdot 25} - \sqrt{\sqrt{81} + 7}$.

18. Število, katerega vsota števk je enaka 14.

20. Cena petroleja, če vemo naslednje: teža petroleja skupaj s sodom je 69 kg, teža soda je 21,75 kg, liter petroleja stane 84 din, specifična teža petroleja pa je $0,84 \text{ gr/cm}^3$.

Navpično:

2. Vrednost izraza $4x^2 + y^2$, kjer je vsota števil x in y enaka 18, njuna razlika pa enaka 2.

3. Rešitev enačbe $80 + 5x = 500$.

4. Štiri zaporedna liha števila.

5. Produkt dvomestnega števila $10+k$ z dvomestnim številom $10k+1$.

7. Tretja vrstica Pascalovega trikotnika.

8. Kvadrat dvomestnega števila, katerega vsota cifer je enaka 10.

10. Volumen kvadra z robovi $a = 14$, $b = a + 7$ in $c = b + 7$.

12. Vrednost $2P$, kjer je P ploščina enakokrakega trikotnika z osnovnico 32 in težiščnico na krak enako 30.

14. Približna vrednost 100π .

16. Vrednost izraza:

$$\frac{3,13^2 - 3,12^2}{3,13^2 - 2 \cdot 3,13 \cdot 3,12 + 3,12^2}.$$

19. Število, za katerega velja: njegov koren je med 7 in 8, njegov kvadrat pa med 3000 in 3100.

Stavra V. Radojković
Prev. in pril. *Bojan Hvala*

POTENČNA ŠTEVILA

Osnovni izrek aritmetike pravi: vsako od ena večje naravno število je produkt enolično določenih prašteviskih potenc. Za naravno število $n > 1$ obstajajo torej enolično določena praštevila $p_1 < \dots < p_j$ in naravna števila $e_1, \dots, e_j$ tako, da je

$$n = p_1^{e_1} \dots p_j^{e_j}. \quad (1)$$

Zgledi za osnovni izrek: $100 = 2^2 \cdot 5^2$, $162 = 2 \cdot 3^4$, $620 = 2^2 \cdot 5 \cdot 31$, $289 = 17^2$, $107 = 107$ (število 107 je praštevilo).

Če je v izrazitvi (1) vsak eksponent $e_1, \dots, e_j$ dve ali več, imenujemo naravno število n **potenčno**. Zgledi potenčnih števil: $200 = 2^3 \cdot 5^2$, $10800 = 2^4 \cdot 3^3 \cdot 5^2$, $15125 = 5^3 \cdot 11^2$, kvadrati, kubi, bikvadrati (četrte potence) od ena večjih naravnih števil.

Ko v zaporedju naravnih števil

$$1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10, 11, 12, \dots \quad (2)$$

izpustimo člene, ki niso potenčna števila, ostane zaporedje potenčnih števil

$$4, 8, 9, 16, 25, 27, 32, 36, 49, 64, 72, 81, 100, 108, 121, 125, 128, 144, \dots \quad (3)$$

Zaporedje (3) se nikdar ne neha. Potenčnih števil je namreč neskončno; saj je že kvadratov $2^2, 3^2, 4^2, \dots$, ki so vsi v (3), neskončno.

Sosednji potenčni števili v (3) sta bolj ali manj oddaljeni. Zanimiv je primer potenčnih števil 8, 9, ki sta obenem zaporedni naravni števili. Ali se v zaporedju (3) še kdaj zgodi, da sta sosednja člena obenem zaporedni naravni števili? Ali se to zgodi velikokrat?

Ker so kvadrati $2^2, 3^2, \dots$ potenčna števila, pogledjmo najprej, ali je med njimi kaj parov zaporednih naravnih števil. Če sta kvadrata $y^2 < x^2$ zaporedni naravni števili, je $x^2 = y^2 + 1$. Od tod sledi $(x - y)(x + y) = 1$. Ker sta faktorja na levi naravni števili in njun produkt 1, je mogoče le $x - y = 1$, $x + y = 1$ in tako $x = 1$, $y = 0$. Število $y = 0$ ni naravno, kvadrata $0^0 = 0$, $1^2 = 1$ tudi nista potenčni števili. Med kvadrati $2^2, 3^2, \dots$ torej ni parov, ki jih iščemo. Tako vemo: **če sta sosednji potenčni števili v (3) zaporedni naravni števili, vsaj eno ni kvadrat.**

Če potenčno število ni kvadrat, mora vsebovati v zapisu (1) vsaj en prafaktor v lihi stopnji, večji ali enaki 3. Najbolj preprosto število take oblike je $2^3 \cdot y^2 = 8y^2$, kjer je y naravno število. Ali je lahko naslednik števila $8y^2$,

tj. $8y^2 + 1$, kvadrat naravnega števila x ? Kadar to drži, je

$$x^2 - 8y^2 = 1. \quad (4)$$

Če dajeta naravni števili x, y rešitev enačbe (4), sta $8y^2, x^2$ potenčni in obenem zaporedni naravni števili. Za $x_0 = 3, y_0 = 1$, ki izpolnjujeta enačbo (4), dobimo ravno par potenčnih števil 8, 9. Iz rešitve $x_0 = 3, y_0 = 1$ pa hitro pridemo do drugih rešitev enačbe (4) v naravnih številih.

Izhajajmo iz obrazcev

$$\begin{aligned} x_n &= 3x_{n-1} + 8y_{n-1} \\ y_n &= x_{n-1} + 3y_{n-1} \end{aligned} \quad ; x_0 = 3, y_0 = 1 \quad (5)$$

Ker poznamo x_0, y_0 , iz (5) izračunamo

$$\begin{aligned} x_1 &= 3x_0 + 8y_0 = 3 \cdot 3 + 8 \cdot 1 = 17 \\ y_1 &= x_0 + 3y_0 = 3 + 3 \cdot 1 = 6 \end{aligned}$$

Iz znanih $x_1 = 17, y_1 = 6$ po (5) najdemo

$$\begin{aligned} x_2 &= 3x_1 + 8y_1 = 3 \cdot 17 + 8 \cdot 6 = 99 \\ y_2 &= x_1 + 3y_1 = 17 + 3 \cdot 6 = 35 \end{aligned}$$

Podobno dobimo po obrazcih (5) naprej

$$\begin{array}{lll} x_3 = 577 & x_4 = 3363 & x_5 = 19601 \\ y_3 = 203 & y_4 = 1189 & y_5 = 6930 \end{array}$$

Tako lahko nadaljujemo brez kraja. Po obrazcih (5) je

$$x_n^2 - 8y_n^2 = (3x_{n-1} + 8y_{n-1})^2 - 8(x_{n-1} + 3y_{n-1})^2 = x_{n-1}^2 - 8y_{n-1}^2$$

in ta povezava velja za vsak indeks $n = 1, 2, \dots$. Torej je

$$x_n^2 - 8y_n^2 = x_{n-1}^2 - 8y_{n-1}^2 = \dots = x_1^2 - 8y_1^2 = x_0^2 - 8y_0^2 = 3^2 - 8 \cdot 1^2 = 1.$$

Vidimo, da vsaki števili x_n, y_n , določeni po obrazcih (5), izpolnjujeta enačbo (4). Zato sta vsaki potenčni števili $8y_n^2, x_n^2$ za $n = 0, 1, 2, \dots$ zaporedni naravni števili. **Obstaja torej neskončno parov takih potenčnih števil, da sta števili para zaporedni naravni števili.** Ali drugače povedano: število 1

se da na neskončno načinov izraziti kot razlika dveh potenčnih števil.

Po zgornjem so zgledi za take pare:

$$\begin{array}{ll} 3^2 - 2^3 \cdot 1^2 = 1 & 577^2 - 2^3 \cdot 204^2 = 1 \\ 17^2 - 2^3 \cdot 6^2 = 1 & 3363^2 - 2^3 \cdot 1189^2 = 1 \\ 99^2 - 2^3 \cdot 35^2 = 1 & 19601^2 - 2^3 \cdot 6930^2 = 1 \end{array}$$

Za vsak naraven y je število $3^3 \cdot y^2 = 27y^2$ potenčno in ne kvadrat. Če je njegov naslednik kvadrat, je $27y^2 + 1 = x^2$ ali

$$x^2 - 27y^2 = 1. \quad (6)$$

Kakor zgoraj se prepričamo, da je z obrazcema

$$\begin{aligned} x_n &= 26x_{n-1} + 135y_{n-1} \\ y_n &= 5x_{n-1} + 26y_{n-1} \end{aligned} \quad ; x_0 = 26, y_0 = 5 \quad (7)$$

za $n = 1, 2, \dots$ določenih neskončno naravnih rešitev enačbe (6) in potenčni števili $27y_n^2, x_n^2$ sta spet zaporedni naravni števili. Ker enačbi (4) in (6) nimata nobene skupne rešitve v naravnih številih, so vsi sedaj dobljeni pari potenčnih števil različni od parov zgoraj. Za $n = 0, 1, 2, 3$ dobimo iz (7) pare potenčnih števil

$$\begin{aligned} 26^2 - 3^3 \cdot 5^2 &= 1 & 70226^2 - 3^3 \cdot 13515^2 &= 1 \\ 1351^2 - 3^3 \cdot 260^2 &= 1 & 3650401^2 - 3^3 \cdot 702520^2 &= 1 \end{aligned} \quad (*)$$

Ugotovili smo, da se v zaporedju (3) potenčnih števil neskončnokrat zgodi, da sta sosednji potenčni števili zaporedni naravni števili. (Z rešitvami (5) in (7) še zdaleč nismo izčrpali vseh takih parov.) Zastavlja se sedaj vprašanje: Ali so v (3) kdaj trije ali morda celo štirje sosednji členi zaporedna naravna števila?

Med štirimi zaporednimi naravnimi števili sta dve števili sodi, dve lihi. Manjše sodo število se zapiše $2^e \cdot l$; tu je e naravno število, l liho število. Sodi števili med zaporednimi štirimi naravnimi števili sta tako

$$2^e l \text{ in } 2^e l + 2. \quad (8)$$

Če je $e = 1$, število 2^e ni potenčno; v njem je namreč 2 le v prvi stopnji, ker je 1 liho število. Če je $e \geq 2$, je

$$2^e + 2 = 2(2^{e-1} + 1).$$

Število $2^{e-1} + 1$ je zaradi $e \geq 2$ sodo, zato $2^{e-1} + 1$ liho; torej nastopa 2 v $2^e + 2$ samo v prvi stopnji in tako $2^e + 2$ ni potenčno število. Med števili



(8) je torej zmeraj vsaj eno, ki ni potenčno. To pa pomeni, da štiri zaporedna naravna števila nikoli niso vsa potenčna. Tem bolj seveda velja, da pri petih ali več zaporednih naravnih številih nikdar niso vsa potenčna. V zaporedju (3) se tako nikoli ne zgodi, da bi štirje ali več sosednjih členov bili zaporedna naravna števila.

Kako je s tremi zaporednimi naravnimi števili? Med tremi zaporednimi naravnimi števili sta dve sodi in eno liho ali pa eno sodo in dve lihi števili. V prvem primeru sta med tremi števili sodi števili oblike (8). Zanju pa že vemo, da nista nikdar obe po-

tenčni. Če so torej tri zaporedna naravna števila vsa potenčna, morata biti med njima dve lihi in eno sodo število. Piscu teh vrstic ni znano, ali je v zadnjem času kdo našel tri zaporedna naravna števila, ki so vsa potenčna. Do nedavnega niso poznali nobene take trojice. Da takih treh števil ni, tudi ni dokazano. Tako ne vemo, ali v zaporedju (3) nastopajo kdaj trije sodenji členi, ki so obenem zaporedna naravna števila.

Videli smo, da je od dveh zaporednih sodih števil (8) kvečjemu eno potenčno. Zaporedni lihi števili pa sta lahko obe potenčni. Zgled: $5^2 = 25$, $3^3 = 27$. Ali je še več primerov, ko sta zaporedni lihi števili obe potenčni?

Pokazali smo že, da ima enačba

$$x^2 - 27y^2 = 1 \quad (6)$$

neskončno rešitev v naravnih številih. Naj bo npr. x', y' taka rešitev, torej

$$x'^2 - 27y'^2 = 1.$$

Napravimo števili

$$X = 5x' + 27y' \quad (9)$$

$$Y = x' + 5y'$$

in izračunajmo

$$27Y^2 - X^2 = 27(x' + 5y')^2 - (5x' + 27y')^2 = 2(x'^2 - 27y'^2) = 2 \cdot 1 = 2.$$

Vsaki rešitvi x', y' enačbe (6) v naravnih številih pripadata torej po (9) določeni naravni števili X, Y , ki ustrezata enačbi

$$27Y^2 - X^2 = 2. \quad (10)$$

Ker ima enačba (6) neskončno naravnih rešitev, ima tudi enačba (10) neskončno naravnih rešitev in potenčni števili $X^2, 27Y^2$ sta zaporedni lihi števili. Torej **obstaja neskončno parov zaporednih lihih števil, ko sta obe števili para potenčni**. Ali drugače povedano: **število 2 se da na neskončno načinov zapisati kot razlika dveh potenčnih števil**.

Napravimo nekaj zgledov. Iz (*) preberemo štiri rešitve za enačbo (6). Pri rešitvi $x' = 26, y' = 5$ dobimo po obrazcih (9)

$$X = 5 \cdot 26 + 27 \cdot 5 = 265$$

$$Y = 26 + 5 \cdot 5 = 51$$

in torej

$$3^3 \cdot 51^2 - 265^2 = 2.$$

Rešitev $x' = 1351, y' = 260$ iz (*) daje po obrazcih (9)

$$X = 5 \cdot 1351 + 27 \cdot 260 = 13775$$

$$Y = 1351 + 5 \cdot 260 = 2651$$

in od tod zaradi (10)

$$3^3 \cdot 2651^2 - 13775^2 = 2.$$

Na enak način pridemo iz zadnjih dveh rešitev v (*) do izrazitev

$$\begin{aligned} 3^3 \cdot 137801^2 - 716035^2 &= 2 \\ 3^3 \cdot 7163001^2 - 37220045^2 &= 2 \end{aligned}$$

Da je vsako potenčno število izrazljivo z razliko dveh potenčnih števil na neskončno načinov, hitro vidimo. Upoštevajmo, da je na neskončno načinov mogoče pisati

$$1 = r_1 - r_2, \quad (11)$$

kjer sta r_1, r_2 potenčni števili. Naj bo r potenčno število. Iz izrazitve (11) sledi

$$r = r r_1 - r r_2$$

in r je izražen kot razlika dveh potenčnih števil. Po opredelitvi potenčnega števila je namreč jasno, da je produkt potenčnih števil potenčno število.

Podobno kot zgoraj za število 2 se da tudi za števila 3, 5, 6, 7, 10 in mnoga druga, ki niso potenčna, pokazati, da jih je mogoče na neskončno načinov pisati kot razliko dveh potenčnih števil. Dognali so, da velja to sploh za vsako celo število.

Jože Grasselli

PRENIČLANA ŠTEVILA

Naj bo $\mathcal{K}$ množica vseh naravnih števil, ki imajo v desetiškem zapisu liho število števk in natanko na vseh sodih mestih ničle, $\mathcal{M}$ pa množica vseh števil iz $\mathcal{K}$, ki imajo tudi svoje kvadrate v $\mathcal{K}$, torej

$$\mathcal{M} = \{n : n \in \mathcal{K} \text{ in } n^2 \in \mathcal{K}\}.$$

1. Poišči vsa števila $n < 10^6$ iz množice $\mathcal{M}$.
2. Ali je $\mathcal{M}$ končna? Katera števila iz $\mathcal{M}$ so večja od 10^{10} ?

Boris Lavrič

DVE PISEMCI – DVE UGANKI

Oxfordski profesor Charles Lutwidge Dodgson (1832 - 1898) je napisal vrsto del s področja matematike in logike. Kritiki njegovih del: Evklida in njegovih sodobnih tekmecev, Simbolne logike, Temeljnih razprav o determinantah, Primerljivih magnitud, Curiose matematice in drugih ga ne cenijo kot znanstvenika, saj mu zamerijo, da je proučil le malo drugih matematikov in logikov, ki so se pred njim ukvarjali z isto problematiko. Vso stvar je raje razvijal po svoje, češ da bi ga pri raziskovanju vse to bogato izročilo znanosti le speljevalo v zmote. Tako je mnogokrat, ne da bi se zavedal, iskal poti, ki so bile prehojene že davno pred njim.

Toda C.L. Dodgson je imel mnogo konjičkov in eden ga je napravil slavnega po vsem svetu: njegovi moderni pravljici Alica v čudežni deželi in Alica v ogledalu, ki ju je sramežljivo podpisal s psevdonimom Lewis Carroll, sta mu priskrbeli nesmrtnost. Težnja po skrajni izvirnosti mišljenja ga je pri znanstvenem delu vodila v slepo ulico, pri pisanju leposlovja pa se je izkazala za kvaliteto. Pri branju obeh knjig o Alici nam je kmalu jasno, da umetnik Carroll ne bi dosegel takega uspeha, če v njem ne bi bilo logika Dodgsona. Protislovje med človekom, ki je napisal dve očarljivo fantastični zgodbi nesmisla, in med pustim profesorjem matematike je le navidezno. Samski profesor ni pretirano ljubil družbe odraslih, rad pa je bil z otroki svojih kolegov in znancev, najraje z deklicami. "Ta dan zaznamujem s kredo," je po šegi starih Rimljanov zapisal v dnevnik, kadar je hotel poudariti, da je preživel posebno srečen dan. In domala vsi s kredo zaznamovani dnevi so bili tisti, ko je spoznal kako novo malo prijateljico. V njihovi družbi se je sicer zadržani



Carrollov avtoportret iz pisma deklici Maggie.

Dodgson razživel: prikazoval jim je čarovniške trike, jih učil pregibati papir v čolničke in pokalice, jim zastavljal logične uganke in pripovedoval pravljice. Če pa je usoda ločila njihove poti, je izkoristil vsako priložnost, da jim je pisal duhovita pisma.

Iz kupa le-teh objavljamo pismi Helen in Jessie. V obeh sta uganki; prva je izvirna, drugo pa v knjigah ugank srečamo v drugačni verziji. Ali je dekletoma uspelo razrešiti oba vozla, ki jima ju je poslal stari prijatelj, ni znano. Pa ju poizkusite vi!

Christ Church,
Oxford,
15. marca 1873

Draga moja Helen,
ne vem, ali so Ti uganke vseč ali ne. Če so Ti, poizkusi tole. Če Ti niso, nič ne de. Neki gospod (reciva plemenitaš, da bo bolj zanimivo) je imel dnevno sobo z enim samim oknom - kvadratnim, 3 čevlje* visokim in 3 čevlje širokim. Imel pa je tudi slab vid in to okno je prepuščalo preveč svetlobe, zato (kaj ti v zgodbah ni vseč beseda 'zato'?) je poslal po stavbenika in mu naročil, naj okno tako preuredi, da bo prepuščalo le polovico dotedanje svetlobe. Toda ohraniti mu mora kvadratno obliko, višino 3 čevljev in širino 3 čevljev. Kako je to naredil? Vedi, da ni smel uporabiti ne zaves ne oknic ne barvastega stekla ne česarkoli podobnega.

Moram Ti povedati grozno zgodbo, kako sem ondan neki deklici zastavil uganko. Bilo je pri kosilu, ob poobedku. Še nikoli prej je nisem srečal, toda ker je sedela poleg mene, sem ji nepremišljeno predlagal, naj se loti uganke (upam trditi, da Ti je znana) o lisici, goski in vreči zrnja. Vzel sem nekaj keksov, da bi ponazoril lisico in ostale reči. Njena mati je sedela na drugi strani in je rekla: "Le glej, da se boš potrudila, ljubica, in jo prav rešila!" Posledice so bile grozne! Zavreščala je: "Ne znam je! Ne znam je! Oh, mama! Mama!" Vrgla se je v materino naročje in se spustila v krčevito ihtenje, ki je trajalo nekaj minut! To mi je bilo v poduk, kar se tiče preizkušanja otrok z ugankami. Prav zarès upam, da kvadratno okno **nate** ne bo učinkovalo tako grozno!

Sem Tvoj vdani prijatelj

CL Dodgson

* čevlj - angleška in ameriška dolžinska mera (30,48 cm)

Christ Church,
Oxford,
22. januarja 1878

Draga moja Jessie!

Povej Sally, da je vse to zelo lepo, ko pravi, da zna razrešiti Dva tatova in pet jabolk; toda ali zna uganko o lisici in goski in vreči zrnja? O tistih, ki jih je možakar peljal s trga in jih je moral spraviti preko reke – in je bil čoln tako majcen, da je lahko v njem prepeljal le po eno; in nikakor ni mogel pustiti skupaj lisice in gosi, ker bi sicer lisica požrla gos; in če bi pustil skupaj gos in zrnje, bi gos pozobala zrnje. Tako je lahko brez nevarnosti pustil skupaj samo lisico in zrnje, saj nikoli ne vidiš, da bi lisica jedla zrnje, in skoraj nikoli ne vidiš, da bi zrnje jedlo lisico. Povprašaj jo, če zna rešiti to uganko...

Tvoj vdani prijatelj

Miha Mohor



NAJVEČJE PRAŠTEVILO

24.marca 1992 je londonska revija *Nature* prinesla vest o novem največjem praštevilu (glej prispevek *Praštevila nekoč in danes* v 6. številki Preseka 17 (1990)). V raziskovalni ustanovi v Harwellu so se z računalnikom Cray 2 s štirimi centralnimi procesorji po devetnajstih urah računanja prepričali, da je

$$2^{756839} - 1$$

praštevilo. To pomeni, da je število deljivo samo z 1 in s samim seboj.

Števila z obliko $2^q - 1$ imenujemo *Mersennova števila* po Marinu Mersennu. Mersenne je trdil, da so taka števila praštevila le, če je q praštevilo. Navedel je, da so števila $2^q - 1$ praštevila za $q = 2, 3, 5, 7, 13, 17, 31, 67, 127, 257$. Toda pozneje so spoznali, da $2^{67} - 1$ in $2^{257} - 1$ nista praštevili, da pa praštevila $2^{61} - 1$, $2^{89} - 1$ in $2^{107} - 1$ v Mersennovem seznamu manjkajo.

Novo število ima v desetiškem zapisu 227 832 števk in ga najbrž nikoli ne bodo izpisali. Za to bi potrebovali okoli osemdeset gosto tiskanih strani Preseka.

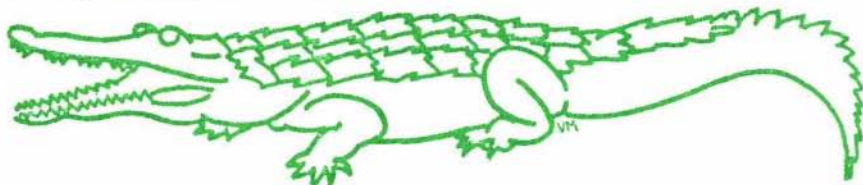
Milena Strnad

KROKODIL ALI TRANZITIVNOST V PRAKSI

Pozoren obiskovalec živalskega vrta bi nedvomno lahko ugotovil:

"Krokodil je bolj dolg kot širok."

Z nekaj matematične žilice pa lahko to izjavo podkrepi tudi z dokazom.



Zaradi zahtevnosti trditve strnimo dokaz v dve lemi:

Lema 1. Krokodil je bolj dolg kot zelen.

Dokaz. Če krokodila pogledamo od zgoraj, vidimo, da je dolg in zelen. Nato krokodila prevrnemo na hrbet in vidimo, da je dolg – zelen pa ne. Torej je krokodil bolj dolg kot zelen, saj je dolg na obeh straneh, zelen pa samo zgoraj.

Lema 2. Krokodil je bolj zelen kot širok.

Dokaz. Dokaz te leme je enostavnejši od prejšnjega, saj nam krokodila ni treba obračati. Sklepamo: krokodil je zelen po dolžini in po širini, širok pa je samo po širini. Torej je krokodil bolj zelen kot širok.

Kako s pomočjo lem 1 in 2 dokažemo trditev, pa piše že v naslovu tele iskrice.

Matjaž Željko

Ob 190. obletnici smrti velikega slovenskega matematika

JURIJA VEGE

vas vabimo na kulturno prireditev, ki bo v soboto, 26. 9. 1992 ob 11. uri v njegovi rojstni vasi ZAGORICI nad Dolskim. Slavnostni govornik bo prof. dr. Tomaž Pisanski.

Društvo matematikov, fizikov in astronomov Slovenije
Skupščina Občine Ljubljana Moste-Polje

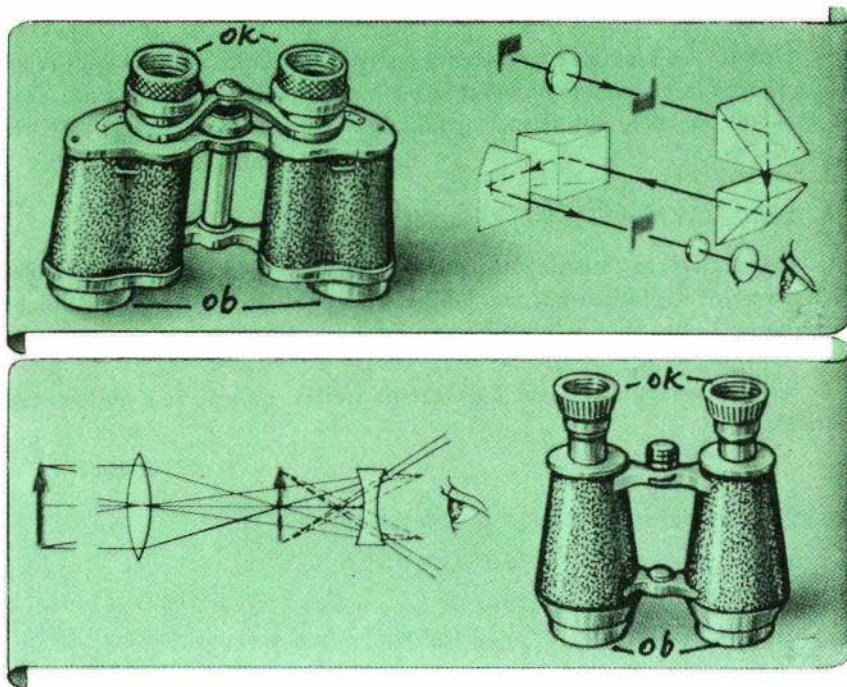
ASTRONOMIJA

KAKO UGOTOVIMO POVEČAVO DALJNOGLEDA

Moj sosed je lovec. Ima lovski daljnogled, na katerem piše 15 x 50. To pomeni, da ima ta daljnogled 15-kratno povečavo, premer vstopne zenice (objektiva) pa 50 mm. Pred kratkim sem prijatelja lovca spet srečal. Pravi mi: "Veš, nisem povsem prepričan, da je povečava mojega daljnogleda res taka, kot piše". "Pa jo izmeri", mu predlagam, a v isti sapi vem, da tega ne zna, čeprav zna povedati marsikatero lovsko. Takoj me je poprosil za pomoč.

Takole gre:

Povečava daljnogleda je podana s kvociantom goriščne razdalje objektiva f_{ob} in goriščne razdalje okularja f_{ok} . Ta kvociient pa je enak kvocientu premera vstopne zenice (objektiva) D in premera izstopne zenice d , torej $f_{ob}/f_{ok} = D/d$. Ker goriščnih razdalj ponavadi ne poznamo, povečavo raje določimo s kvociantom premerov obeh zenic. V kvocientu D/d namreč D že poznamo ali pa ga izmerimo. D je kar premer objektiva. Ugotoviti je treba



Slika 1. Lovski (prizmatični) daljnogled (zgoraj) in operno kukalo (spodaj) ter potek svetlobnih žarkov v njih; ob - objektiv, ok - okular.

samo še d . Na trdno stojalo pritrjen daljnogled usmerimo proti dnevnemu nebu. Za okularjem pomikamo sem in tja bel list papirja pravokotno na optično os daljnogleda toliko časa, dokler na papirju ne dobimo jasno vidnega ostrega svetlega krožca. To je izstopna zenica. Izmerimo njen premer d in nato izračunamo povečavo D/d .

S sosedom sva se tudi lotila ustreznih meritev. Izmerila sva: $D = 50\text{mm}$ in $d = 3,5\text{mm}$. Rezultat računa $50\text{mm}/3,5\text{mm}$ je 14,3-kratna povečava, kar je zelo blizu na daljnogledu označene povečave.

Sosed je bil presenečen nad tem, kako preprosto je mogoče preveriti povečavo daljnogleda. Poskusi tudi ti na opisan način ugotoviti povečavo svojega daljnogleda.

Marijan Prosén



PRESEK

list za mlade matematike, fizike, astronome in računalnikarje
20. letnik, šolsko leto 1992/93, številka 1, strani 1 – 64

UREDNIŠKI ODBOR: Vladimir Batagelj, Tanja Bečan (jezikovni pregled), Dušica Boben (oblikovanje teksta), Mirko Dobovišek (glavni urednik), Vilko Domajnko, Darjo Felda (tekmovanja), Bojan Golli, Marjan Hribar, Martin Juvan (računalništvo), Sandi Klavžar, Edvard Kramar, Boris Lavrič, Andrej Likar (fizika), Matija Lokar, Franci Oblak, Peter Petek, Pavla Ranzinger (astronomija), Marjan Smerke (svetovalec za fotografijo), Miha Štalec (risbe), Ciril Velkovrh (nove knjige, novice), Marija Vencelj (matematika, odgovorna urednica).

Dopise pošiljajte in list naročajte na naslov: Društvo matematikov, fizikov in astronomov Slovenije - Podružnica Ljubljana - Komisija za tisk, Presek, Jadranska c. 19, 61111 Ljubljana, p.p. 64, tel. (061) 265-061/53, št. žiro računa 50101-678-47233. Naročnina za šolsko leto 1992/93, vplačana do 1.11.1992, je za posamezne naročnike **625 SLT**, za skupinska naročila šol **500 SLT**, posamezna številka **125 SLT (- SLT)**, za tujino 12000 LIT.

List sofinancirajo MZT, MŠŠ in MK
Ofset tisk DELO - Tiskarna, Ljubljana

Tekst je oblikovan z računalnikom SLIM 286, ALTECH, Ljubljana
© 1992 Društvo matematikov, fizikov in astronomov Slovenije – 1115

