

PRESSEK



PRESEK - list za mlade matematike, fizike, astronome in računalnikarje
19. letnik, leto 1991/92, številka 6, strani 321-384

VSEBINA

ASTRONOMIJA	Delfin (Marijan Prosén)..... I, 322-324
MATEMATIKA	Vsota n -tih potenc prvih m števil (Mitja Mastnak, prir. Darjo Felda)..... 331-333
	Superkrožnice (Darjo Felda)..... 334-338
NOVE KNJIGE	Šolinc H., Skozi fiziko z rešenimi nalogami (Bojan Golli) 343
	Smullyan R., Oponašati oponašalko – Reš. str. 372 (Janez Rakovec)..... 359
FIZIKA	Hitrost smučarskega skakalca (Andrej Likar)..... 324-326
	Radij Zemlje s stoparico (Marjan Hribar)..... 344-345
	Letalski pok (Janez Strnad)..... 346-351
RAZVEDRILLO	Bele luknje ali limite po tangramsko (Vilko Domajnko) .. 352-353
	Računajmo na pamet (Marija Vencelj)..... 358
RAČUNALNIŠTVO	Derive, Inset, Wordstar, ... (Matija Lokar)..... 327-330
	(K)urnik, 2. del (Niko Čížek in Sandi Klavžar)..... IV, 354-358
TEKMOVANJA	Srednješolsko republiško tekmovanje iz fizike (Iztok Kukman)..... 360-363
	22. zvezno tekmovanje osnovnošolcev iz matematike – Rešitve s str. 300 (Aleksander Potočnik)..... 364-366
	32. zvezno tekmovanje srednješolcev iz matematike – Rešitve s str. 302 (Matjaž Željko)..... 368-372
NALOGE	Slučaj ali pravilo? – Reš. str. 351 (Marija Vencelj)..... 321
	Tri funkcijske enačbe – Reš. str. 338-339 (Boris Lavrič)..... 321
	Sestavi nalogo – Reš. str. 340-342 (Marija Vencelj)..... 330
	Sto ničel – Reš. str. 381 (Marija Vencelj)..... 343
	Praštevilci – Reš. str. 377 (Darjo Felda)..... 363
REŠITVE NALOG	Petkotni tangramski liki – s str. 290. Sistemi linearnih enačb - s str. 166 (Vilko Domajnko)..... 366
	Sirij – s str. 276 (Marijan Prosén)..... 367
	Telefonska številka moje mame – s str. 266 (Borut Zalar) ... 367
	Preskusi se in reši A ali B nalogo - s str. 287 (Franc Oblak) . 373
	Srečanje vlakov - s str. 261..... 373
	Fordovi krogi – s str. 268 (Boris Lavrič)..... 374-377
	Fibonaccijevo tehtanje – iz P XVIII/6, str. 331 (Bojan Mohar)..... 378-381
	Križanka Ob 25. obletnici smrti velikega matematika J. Plemlja – s str. 288 (Marko Bokalič)..... III
NA OVITKU	Karta s podobami ozvezdij (med njimi tudi Delfina) iz <i>Atlasa zvezdne neba</i> (1690) poljskega astronoma Jana Hevelija..... I
	Sliki 1 in 2 k članku na strani 354..... IV

SLUČAJ ALI PRAVILO?

Mare je najhitrejši računar v razredu. Kvadrate dvomestnih števil računa kar takole:



Ali: $59^2 = \underline{3481}$, ker je $59 - 25 = \underline{34}$ in $(50 - 59)^2 = \underline{81}$. Sta rezultata slučajno pravilna, ali pravilo res deluje?

Marija Vencelj

TRI FUNKCIJSKE ENAČBE

Zaznamujmo z $\mathbb{R}^+$ množico vseh pozitivnih realnih števil. Poišči funkciji $f, g : \mathbb{R}^+ \rightarrow \mathbb{R}$, če f ustreza pogoju

$$xf(y) + yf(x) = (x + y)f(x)f(y),$$

g pa pogoju

$$g(x + y) = g(x)^2 + g(y)^2$$

za vsak par števil $x > 0, y > 0$.

Naj bo p nekonstanten polinom z realnimi koeficienti. Ali obstaja kakšna neničelna funkcija $h : \mathbb{R}^+ \rightarrow \mathbb{R}$, za katero velja enakost

$$h(x + y) = p(x)h(x) + p(y)h(y)$$

pri poljubnih pozitivnih številih x in y ?

Boris Lavrič

ASTRONOMIJA

DELFIN

Delfin je drobno ozvezdje, ki leži na severni nebesni poluti. Iz naših krajev ga izsledimo brez težav, če vsaj malo poznamo ozvezdja jesenskega večernega neba. Pet najsvetlejših zvezd ozvezdja, od katerih štiri ležijo v ogliščih romba, lahko oblikujemo v podobo, ki spominja na majhnega delfina.

Delfin je junak številnih mitičnih zgodb. Večinoma nastopa kot rešitelj. Zaradi zaslug za njegova dobra dela so ga bogovi ovekovečili v ozvezdju.

Ena od legend pripoveduje, kako je Pozejdon, grški bog morij, na delfinu popotoval po svojem neizmernem morskem kraljestvu in si med nereidami, prijaznimi morskimi nimfami, izbral nevesto. Zelo mu je bila všeč mlada, brhka Tetida. A prerokovali so, da bo Tetidin sin močnejši od svojega očeta*. Zato se je Pozejdon namenil, da se bo raje oženil s čedno Amfitrito. Iz užaljenosti, ker je Pozejdon že preje ni opazil, pa je Amfitrita zbežala in se skrila pri titanu (velikanu) Atlasu.

Dolgo časa je Pozejdon iskal pred poroko bežečo Nerejevo hčer. Ni in ni je mogel najti. Šele delfin je odkril njeno skrivališče. Za to uslugo je Pozejdon odnesel delfina na nebo, ga postavil med zvezde, kjer od tedaj, tako pravijo, sveti ozvezdje Delfina.

Po drugi legendi je v ozvezdju ovekovečen delfin, ki je rešil smrti pesnika in godca Ariona, ko se je ta po uspešni pevski turneji po Italiji z ladjo vračal v rodno Grčijo. Posadki ladje je prišlo na uho, da Arion s sabo pelje ogromno bogastvo. Sklenili so, da ga ubijejo in se polastijo njegovih dragocenosti.

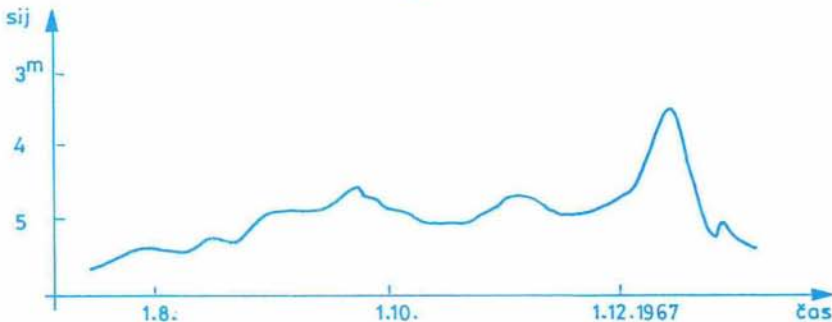
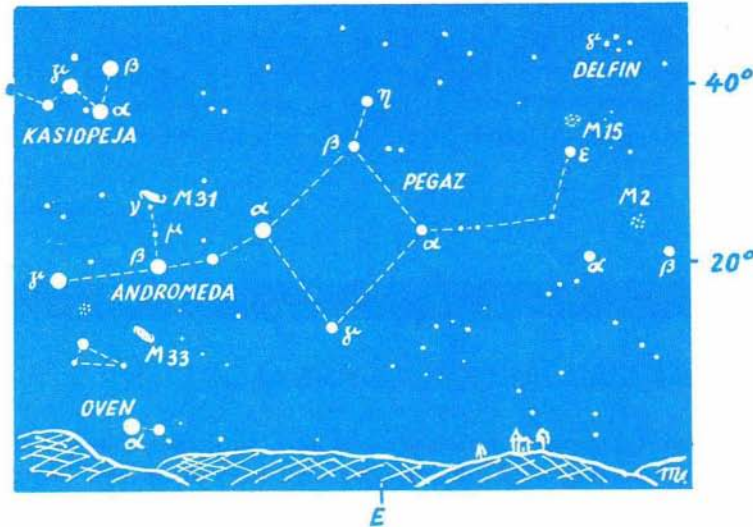
Delphinus. T. XVII.



Slika 1. Takole je ozvezdje Delfina narisano v starem zvezdnem atlasu *Uranometria* iz leta 1645.

* Po grški mitologiji se je Tetida na Zevsovo željo poročila z zemljanom (navadnim smrtnikom) Pelejem, ki mu je rodila junaka Ahila. V trojanski vojni je mati zelo pomagala Ahilu.

Slika 2. Del jesenskega večernega neba z ozvezdjem Delfina. To ozvezdje je vidno od junija do decembra. Gama (γ) Delfina je znano dvoezvedje (dvojna zvezda), primerno za ljubiteljska opazovanja. Navidezni razmik med posameznima zvezdama je $10''$ (deset kotnih sekund). Gama Delfina opazuj z močnejšim lovskim daljnogledom, postavljenim na trdnem stojalu. Opis drugih vesoljskih teles v tem ozvezdju glej v *Karti severnega in južnega neba*, Presekova knjižnica 31, 1989.



Slika 3. Pozno zvečer 8.7.1967 je angleški ljubitelj astronomije A.E.D. Alcock ob enem svojih skoraj vsakonočnih daljnogledskih "sprehodov po nebu" zasledil v ozvezdju Delfina svetlo zvezdo, za katero se mu je zdelo, da je prej še ni opazil. Ni se zmotil. Odkril je novo zvezdo, danes imenovano *Nova Delfina 1967*. Slika prikazuje časovno spreminjanje sija te nove. Pravi maksimum sija je nastopil šele konec leta 1967. Nato je sij te spremenljive zvezde hitro padel.

Pesnik je milo prosil mornarje, naj mu izpolnijo poslednjo željo, da zapoje. Arion se je odel v svoja najboljša in najlepša oblačila, se povzpel na krmo, vzel v roke harfo in presunljivo zapel poslovilno pesem. V njej je slavil Apolona, boga glasbe.

Nad morjem so se razlili zvoki čarobnega napeva. Očarali so samega Apolona, ki je proti ladji poslal delfina in mu naročil, naj reši Ariona. Prav tedaj, ko so ga mornarji hoteli zgrabiti, se je Arion s harfo v roki pognal v morsko globino. V letu ga je ujel delfin in ga odnesel na obalo.

V zahvalo je dal Arion izdelati majhen kip delfina in ga postavil v svetišče. Pozneje je Apolon vzel kip s tega mesta in ga postavil med zvezde na nebo, da bi bil tam večni spomenik pogumnemu in prijaznemu morskemu bitju.

Marijan Prosén

HITROST SMUČARSKEGA SKAKALCA

S prijateljem sva gledala smučarske skoke na 120 metrski skakalnici na olimpijskih igrah v Albertvillu. Razmišljala sva, kako bi se dalo enostavneje meriti dolžino skokov. Sedaj je ob skakalnici razvrščena množica ljudi, ki ocenjujejo doskok skakalca. Pri tem naredijo včasih večjo napako, ponavadi v korist domačega skakalca. Prijatelj je omenil, da bi kazalo meriti čas skoka namesto dolžine. Merili bi kar sodniki s pritiskom na gumbe, ki bi ustavili stoparice, sprožene samodejno na vrhu odskočne mize. Čase in ocene za slog skakalca bi potem obravnavali enotno. Tako bi se izognili tudi nesmiselnemu in nevarnemu lovu za rekordnim 200 metrskim skokom. Ugovaral sem, da bi se s tem skoki močno spremenili in ne bi bili več tako privlačni. Prijatelj se je ob tem spomnil neke anekdote o profesorju Plemlju, ki ni preveč maral za smučarske skoke. Menda je trdil, da tudi deska "skoči", če jo vržeš z odskočne mize. S tem je verjetno mislil, da skakalec prav malo vpliva na hitrost svojega padanja v globino. Če je hitrost res za vse skakalce enaka, sta čas skoka t in njegova dolžina s , ki jo merimo vzdolž tira, sorazmerni:

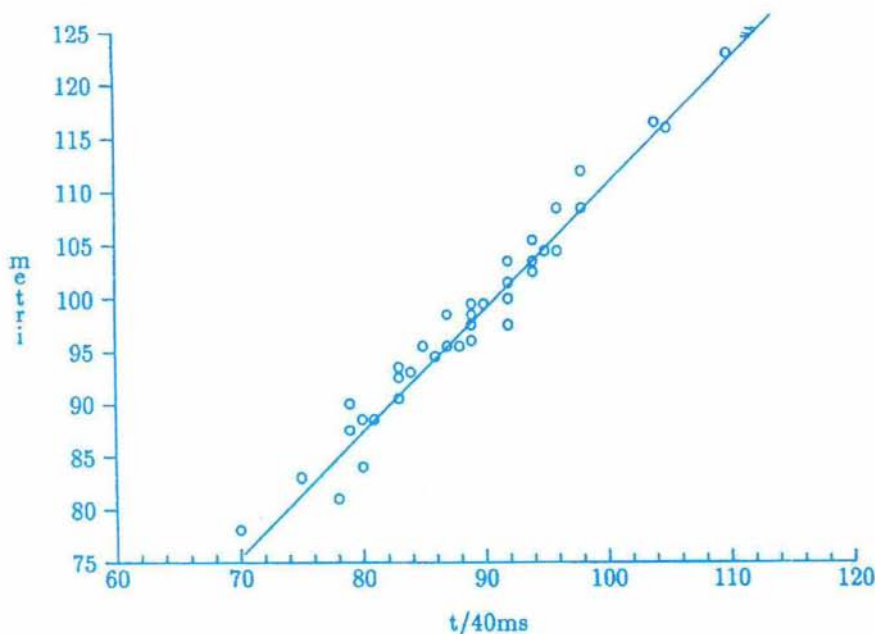
$$s = vt.$$

Hitrost leta sva za nekaj tekmovalcev grobo ocenila. Pri nekem skakalcu sva namerila čas $t = 3,5s$, skok pa je bil dolg $s = 96m$. Hitrost sva izračunala iz

enačbe:

$$v = \frac{s}{t} = \frac{96 \text{ m}}{3,6 \text{ s}} = 27 \frac{\text{m}}{\text{s}},$$

kar je okrog 100 km/h. Tudi pri zelo dolgih in izrazito kratkih skokih je bila hitrost med letom blizu tej vrednosti. Odločila sva se, da bova drugo serijo skokov posnela in potem natančneje merila čase skokov vseh 42 nastopajočih skakalcev. Na počasi predvajanjem posnetku je mogoče meriti čas kar natančno. Na zaslonu vidimo zaporedje mirujočih slik, vsaka slika pa je posneta v natančno 40 ms. Televizijske kamere posnamejo namreč 25 polnih slik v sekundi. To sva tudi preverila tako, da sva posnela uro, ki jo na televiziji pokažejo tik pred poročili, in opazovala gibanje sekundnega kazalca. Med zaporednima sličicama preleti skakalec nekaj več kot en meter. Pri štetju sva se lahko zmotila za dve sličici, saj trenutka odskoka in posebno doskoka



Slika.1 Povprečno hitrost skakalcev razberemo iz naklona premice, ki se najtesneje prilaga točkam. Vsi skakalci so imeli znotraj napak pri merjenju enako hitrost leta, saj nobena točka ni dlje od premice v vodoravni smeri kot za 2 enoti (80 ms) na abscisi. Zanimivo je, da gre premica zelo blizu izhodišča diagrama ($s = 0$, $t = 0$); skakalci imajo torej ves čas leta po zraku približno enako hitrost.

ni mogoče oceniti bolje kot na eno sličico. Privzela sva, da so podatki o dolžinah skokov brez napake.

Izmerke sva vrisala v diagram (s, t) . Na ordinatno os sva nanesele dolžino skoka, na abscisno pa število sličic med odskokom in doskokom. Vsak skok ima v diagramu svojo piko, nekaj pik pa predstavlja po dva skoka različnih tekmovalcev. Narisala sva še premico, ki se na oko pikam najboljše prilega. Njen naklon pove povprečno hitrost $\bar{v}$, s katero so skakalci leteli po zraku:

$$\bar{v} = \frac{126 \text{ m} - 87 \text{ m}}{1,2 \text{ s}} = 32,5 \frac{\text{m}}{\text{s}} = 117 \text{ km/h}.$$

Iz grafa ni videti, da bi skakalci z dolgimi skoki leteli z večjo povprečno hitrostjo kot tisti, ki so skočili manj. Največji vodoravni odmik točk od premice ni večji od 2, kar se sklada z napako pri merjenju časa. Zaviralna sila zraka je torej za vse skakalce približno enaka. Boljši skakalci se znajo z odskokom in držo telesa ter smuči le dlje časa obdržati v zraku kot njihovi tekmeči. Pri tem jim pomaga tudi veter, ki piha navzgor po skakalnici. Ali lahko pri računanju hitrosti skoka primerjamo skakalca z enako težko desko? Na desko, ki se skozi zrak giblje s hitrostjo v , deluje zračni upor, ki ga izračunamo iz enačbe:

$$F_u = \frac{1}{2} c_u \rho v^2 S.$$

Z ρ smo označili gostoto zraka, ki je $1,3 \text{ kg/m}^3$, z S ploščino obrisa deske, pravokotno na hitrost v , koeficient upora c_u pa je za desko 1,1. Upor mora biti med letom enak skakalčevi teži, saj se njegova hitrost ne spreminja prav dosti:

$$F_u = mg,$$

iz česar sledi za hitrost:

$$v = \sqrt{\frac{2mg}{c_u \rho S}}.$$

Skakalci so mladi fantje, zato ocenimo njihovo maso na 50 kg, višino pa na 175 cm. Širina bokov in prsi naj bo 0,45 m, zato ocenimo S na $0,8 \text{ m}^2$. S temi podatki je hitrost:

$$v = 33,4 \text{ ms}^{-1},$$

kar ni prav daleč od izmerjene povprečne hitrosti.

Andrej Likar

RAČUNALNIŠTVO

DERIVE, INSET, WORDSTAR, ...

Najbolj pogosto vprašanje, ki ga slišim, odkar sem program DERIVE predstavil v Preseku, je: "Kako spraviti na papir sliko funkcije, narisano s programom DERIVE?" Poglejmo, kako to gre.

Program DERIVE sam ne omogoča, da bi narisane slike izpisali na tiskalniku. Zato si moramo pomagati s pritajenimi programi, ki služijo za prenos zaslonske slike na datoteko ali na tiskalnik. Teh je na voljo cela vrsta z zelo različnimi zmogljivostmi. V tem prispevku bomo uporabili INSET, program, ki je priložen urejevalniku besedil WordStar 6. Sicer ni med najboljšimi, a zaradi razširjenost programa WordStar bomo opisali ravno tega.

Kaj pa sploh so pritajeni programi? Tema zasluži svoj prispevek. Za zdaj povejmo le, da so to taki programi, ki jih naložimo v pomnilnik, nanje 'pozabimo' in nadaljujemo delo z ostalimi programi (WordStar, Derive, ...). Kadar pa potrebujemo usluge pritajenega programa, ga s posebno kombinacijo tipk priključimo, uporabimo in pošljemo nazaj 'na čakanje'.

INSET

INSET je program, ki služi tako za prenos grafične slike na tiskalnik kot tudi na datoteko. Od tam jo lahko vključimo v besedila, ki jih napišemo z urejevalnikom WordStar. INSET nam tudi omogoča preprosto obdelavo te grafične slike. Uporabljamo ga v pritajenem načinu – torej ga naložimo v pomnilnik in kasneje zaženemo s posebno kombinacijo tipk. Opozoriti velja, da moramo njegovo namestitve posebej zahtevati ob nameščanju WordStara. Seveda pa ga lahko namestimo tudi kasneje.

Postavimo se na področje, kjer imamo shranjen program INSET. Z ukazom INSET ga naložimo v pomnilnik. Na zaslonu zagledamo obvestilo, da je program naložen, njegove nastavitve in že je tu tudi pozornik operacijskega sistema, ki omogoča nadaljevanje dela. Sedaj na INSET lahko pozabimo. Kadar ga bomo potrebovali, bomo uporabili levi tipki **[Shift]** in **[Ctrl]**. Pritisniti ju moramo hkrati. Če pa je naš računalnik opremljen z grafično kartico Hercules, pa namesto te kombinacije uporabimo hkratni pritisk na kar tri tipke. To so **[Alt]**, leva tipka **[Shift]** in tipka **[I]**. Da ne bomo preobremenjevali možganov, opazimo, da ustrezno kombinacijo tipk ob zagonu izpiše tudi program INSET sam.

Delo na računalniku nato nadaljujemo, kot da INSET-a sploh ne bi bilo. Le ko ga potrebujemo, ga pokličemo. Takrat v spodnji vrstici zaslona

zagledamo njegove izbire. Med njimi izbiramo tako, da s smernimi puščicami označimo željeno izbiro in nato pritisnemo na tipko **[Enter]**. Izbrani ukaz lahko preključimo s pritiskom na tipko **[Esc]**. S pritiskom na tipko **[Esc]** tudi zapustimo INSET.

INSET in DERIVE

Poglejmo, kako bi sliko funkcije $1/(9+x^2+y^2)$ izpisali na papir. Najprej jo narišimo s programom DERIVE. Zato zaženimo DERIVE in uporabimo naslednji postopek:

- risanje slike:
 - Author,
 - $1/(9 + x^2 + y^2)$ **[Enter]**,
 - Plot,
 - Plot;
- aktiviranje INSET-a:
 - **[L-Shift L-Ctrl]** oziroma **[Alt L-Shift L]**;
- izpis na tiskalnik:
 - pregledamo, ali je tiskalnik priključen,
 - Print,
 - Go;
- vrnitev v DERIVE:
 - **[Esc]**.

Na papir se izriše celotna grafična slika, skupaj z izbirami programa vred – skratka popolna kopija zaslonske slike. Sicer nam dve ravni črti, ki sta nad izbirami v programu DERIVE, olajšata rokovanje s škarjama, ampak Narišimo sedaj le del slike:

- narišemo sliko;
- aktiviramo INSET;
- določitev dela slike:
 - izberemo Modify,
 - Clip,
 - s smernimi puščicami označimo levi gornji rob slike,
 - **[Enter]**,
 - s smernimi puščicami označimo desni spodnji rob slike,

- Enter,
- Esc;
- izpis na tiskalnik;
- vrnitev v DERIVE.

Sedaj ni nobenih težav z izrisom slik funkcij na papir in tako bodo stene vaših sob namesto posterjev filmskih igralcev in pevcev lahko krasile različne cikloide, lemniskate, racionalne funkcije s petimi poli, ...

INSET in WORDSTAR

Če pa se posterju Kevina Costnerja le še ne mislite odpovedati in boste namesto v srčnico še vedno raje zasanjano strmeli v Axla iz skupine Guns'n'roses, slike funkcij pa potlačili v kakšno seminarsko nalogo, potrebujete še način, kako sliko spraviti v datoteko. INSET nam bo pomagal le, če bomo poročilo pripravili s programom WordStar. Najprej sliko shranimo na datoteko. To storimo podobno kot pri izpisu na tiskalnik:

- narišemo sliko;
- aktiviramo INSET in določimo del slike;
- izpis v datoteko:
 - Save,
 - vnesemo ime datoteke (s podaljškom PIX),
 - Enter;
- vrnitev v DERIVE.

Tako shranjeno sliko lahko kasneje s programom INSET spreminjamo, ali pa vključimo v besedilo, napisano z urejevalnikom WordStar.

V WordStar jo vključimo takole:

- poženemo WordStar in napišemo tekst do mesta, kjer bomo vključili sliko;
- vključitev slike:
 - Ctrl P*,
 - vnesemo ime datoteke s podaljškom PIX. Paziti moramo, da vključimo tudi ustrezno pot do datoteke, če področje ni pravo.

Ko je slika vključena, WordStar ne naredi nič posebnega, le v oglatih

oklepajih označi ime datoteke z grafično sliko. Niti tega ne vidimo, kako velika je slika. Njeno velikost si lahko ogledamo z ukazom *Start Inset* – **[Ctrl P&]**, ki namesto oznake slike označi robove. Pravzaprav smo s tem pognali INSET in bi lahko naredili tudi nekaj sprememb. Zapomnimo si, do kam segajo robovi in s tipko **[Esc]** zapustimo INSET. V območju, ki ga zajema grafična slika, ne sme biti drugega teksta. Če je slika prevelika, jo moramo še prilagoditi. Ne pozabimo pa, da jo moramo prej s **[Ctrl P*]** vključiti v tekst. Spreminjanje slike poteka takole:

- **[Ctrl P&]**;
- Modify;
- ReSize;
- Scale;
- s puščicami ustrezno spremenimo velikost slike;
- **[Enter]**;
- **[Esc]**;
- **[Esc]**.

Če je v tekstu več slik, s tem spremenimo tisto, ki je najbližje trenutnemu položaju v datoteki. Ko smo vključili vse slike, si besedilo lahko ogledamo z ukazom *Page Preview* – **[Ctrl OP]**. V podrobnosti se ne bomo spuščali, saj to spada v poznavanje programa WordStar.

Matija Lokar

SESTAVI NALOGO

V četrti številki Preseka je bila zastavljena naloga Poišči izrek, katere rešitev najdete na strani 305. Črke je bilo treba začeti brati na pravem mestu, iti v pravi smeri in preskakovati pravo število črk, pa se je iz srčka izluščil matematični izrek. Preprosto, posebno potem, ko rešitev najdeš.

Težje pa je vprašanje, kako tako nalogo sestaviti. Zastavimo ga natančneje: Kakšen mora biti odnos med številom črk v besedilu, zapisanem v krogu, in dolžino posameznega koraka pri branju besedila na zgornji način, da bodo prišle na vrsto vse napisane črke, vsaka natanko enkrat do konca besedila. Dolžina koraka je število, ki je za 1 večje od števila na posameznem koraku preskočenih črk.

Marija Vencelj

VSOTA n -TIH POTENC PRVIH m ŠTEVIL

Predpostavimo, da za vsako naravno število n obstaja $n + 1$ funkcij $f_k : \mathcal{R} \rightarrow \mathcal{R}$, $k = 0, 1, \dots, n$, tako da velja

$$1^n + 2^n + 3^n + \dots + m^n = f_0(n)m^{n+1} + f_1(n)m^n + f_2(n)m^{n-1} + \dots + f_n(n)m$$

za vsako naravno število m . Označimo z λ_k vrednosti, ki jih funkcije f_k dosežejo v n in s temi oznakami zapišimo vsoto n -tih potenc prvih m števil in vsoto n -tih potenc prvih $m + 1$ števil:

$$1^n + 2^n + 3^n + \dots + m^n = \lambda_0 m^{n+1} + \lambda_1 m^n + \lambda_2 m^{n-1} + \dots + \lambda_n m$$

$$1^n + 2^n + 3^n + \dots + (m+1)^n = \lambda_0 (m+1)^{n+1} + \lambda_1 (m+1)^n + \dots + \lambda_n (m+1).$$

Odštejmo prvo enakost od druge: $(m+1)^n = \lambda_0((m+1)^{n+1} - m^{n+1}) + \lambda_1((m+1)^n - m^n) + \lambda_2((m+1)^{n-1} - m^{n-1}) + \dots + \lambda_n((m+1) - m)$. Če upoštevamo, da je $(m+1)^k = 1 + \binom{k}{1}m + \binom{k}{2}m^2 + \dots + \binom{k}{k-1}m^{k-1} + m^k$, kjer je $\binom{k}{l} = \frac{k!}{(k-l)!l!}$, lahko dobljeno enakost zapišemo

$$\begin{aligned} & \lambda_0 \left(1 + \binom{n+1}{1}m + \dots + \binom{n+1}{n}m^n \right) + \lambda_1 \left(1 + \binom{n}{1}m + \dots + \right. \\ & \left. + \binom{n}{n-1}m^{n-1} \right) + \dots + \lambda_n \left(1 + \binom{n}{1}m + \dots + \binom{n}{n-1}m^{n-1} + m^n \right) = 0 \end{aligned}$$

ali

$$\begin{aligned} & (\lambda_0 + \lambda_1 + \dots + \lambda_n - 1) + m \left(\binom{n+1}{1}\lambda_0 + \binom{n}{1}\lambda_1 + \dots + \binom{2}{1}\lambda_{n-1} - \binom{n}{1} \right) + \\ & + \dots + m^n \left(\binom{n+1}{n}\lambda_0 - 1 \right) = 0. \end{aligned}$$

Konstante λ_k niso odvisne od m , zato je leva stran te enačbe pri vsakem naravnem n polinom (naravne) spremenljivke m . Ta bo identično enak nič, če bodo vsi koeficienti enaki nič:

$$\begin{aligned}
\binom{n+1}{n} \lambda_0 - 1 &= 0 \\
\binom{n+1}{n-1} \lambda_0 + \binom{n}{n-1} \lambda_1 - \binom{n}{n-1} &= 0 \\
&\vdots \\
\lambda_0 + \lambda_1 + \dots + \lambda_n - 1 &= 0.
\end{aligned}$$

Izrazimo po vrsti iz vsake enačbe λ_k z najvišjim indeksom, ki v njej nastopa, in upoštevajmo, da je λ_k pomnožen z izrazom oblike $\binom{l+1}{l}$, ki je enak $l+1$:

$$\begin{aligned}
\lambda_0 &= \frac{1}{n+1} \\
\lambda_1 &= \frac{\binom{n}{n-1} - \binom{n+1}{n-1} \lambda_0}{n} \\
\lambda_2 &= \frac{\binom{n}{n-2} - ((\binom{n+1}{n-2}) \lambda_0 + \binom{n}{n-2} \lambda_1)}{n-1} \\
&\vdots \\
\lambda_n &= 1 - (\lambda_0 + \lambda_1 + \dots + \lambda_{n-1}).
\end{aligned}$$

Ta sistem lahko podamo tudi takole:

$$\begin{aligned}
\lambda_0 &= \frac{1}{n+1}, \\
\lambda_k &= \frac{\binom{n}{n-k} - ((\binom{n+1}{n-k}) \lambda_0 + \binom{n}{n-k} \lambda_1 + \dots + \binom{n-k+2}{n-k} \lambda_{k-1})}{n-k+1} = \\
&= \frac{\binom{n}{n-k} - \sum_{l=0}^{k-1} \binom{n+1-l}{n-k} \lambda_l}{n-k+1}
\end{aligned}$$

Najprej izračunamo λ_1 , ker poznamo λ_0 , nato izračunamo λ_2 , ..., vsak λ_k lahko izračunamo, ko poznamo vse pred njim. Če izraze oblike $\binom{p}{n-k}$ zamenjamo z $\frac{p!}{(p-n+k)! (n-k)!}$ ter števec in imenoalec pomnožimo z $(n-k)!$, dobimo še drugo obliko

$$\lambda_0 = \frac{1}{n+1}, \quad \lambda_k = \frac{\frac{n!}{k!} - \sum_{l=0}^{k-1} \frac{(n+1-l)!}{(k+1-l)!} \lambda_l}{(n-k+1)!}.$$

Če so vsa sklepanja pravilna, velja torej formula $\sum_{r=1}^m r^n = \sum_{k=0}^n \lambda_k m^{n+1-k}$,
kjer so λ_k zgornje konstante.

O pravilnosti tega rezultata pa se lahko prav hitro prepričamo z indukcijo. Naj bo najprej $m = 1$. Tedaj nam formula pove

$$1 = \lambda_0 + \lambda_1 + \dots + \lambda_n,$$

kar je res pri vsakem n glede na našo izbiro konstant λ_k .

Denimo, da formula velja pri nekem m (za vsak n):

$$1^n + 2^n + 3^n + \dots + m^n = \lambda_0 m^{n+1} + \lambda_1 m^n + \lambda_2 m^{n-1} + \dots + \lambda_{n-1} m^2 + \lambda_n m.$$

Oglejmo si $1^n + 2^n + 3^n + \dots + m^n + (m+1)^n$. Vsoto $1^n + 2^n + 3^n + \dots + m^n$ zamenjajmo z zgornjo desno stranjo, člen $(m+1)^n$ pa z izrazom

$$\lambda_0((m+1)^{n+1} - m^{n+1}) + \lambda_1((m+1)^n - m^n) + \dots + \lambda_n((m+1) - m),$$

ki smo ga že srečali v tem sestavku. Tako imamo

$$1^n + 2^n + 3^n + \dots + m^n + (m+1)^n =$$

$$= \lambda_0(m+1)^{n+1} + \lambda_1(m+1)^n + \dots + \lambda_{n-1}(m+1)^2 + \lambda_n(m+1),$$

kar potrjuje, da res velja zveza

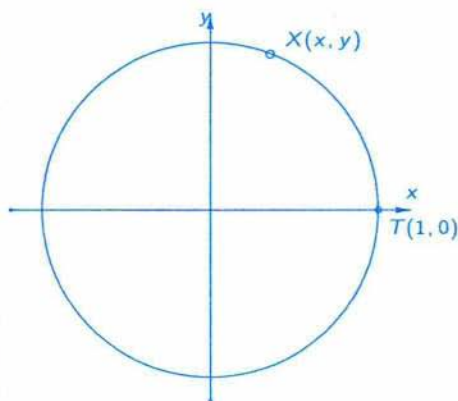
$$\sum_{r=1}^m r^n = \sum_{k=0}^n \lambda_k m^{n+1-k},$$

$$\text{kjer je } \lambda_0 = \frac{1}{n+1} \text{ in } \lambda_k = \frac{\frac{n!}{k!} - \sum_{l=0}^{k-1} \frac{(n+1-l)!}{(k+1-l)!} \lambda_l}{(n-k+1)!}.$$

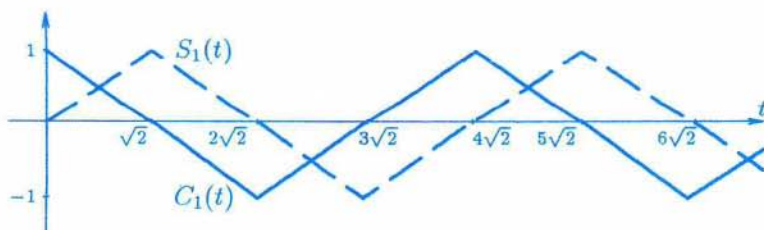
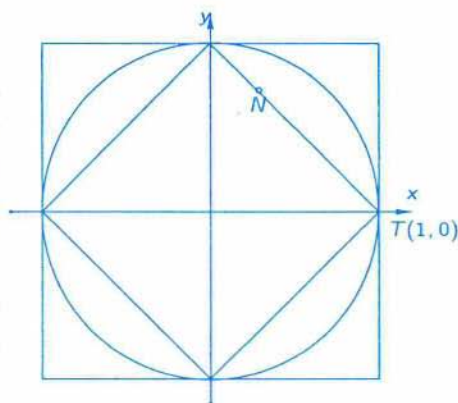
Mitja Mastnak, pril. Darjo Felda

SUPERKROŽNICE

Koordinati poljubne točke na enot-ski krožnici, to je krožnici s polme-rom 1 in središčem v koordinatnem izhodišču, zadoščata enačbi $x^2 + y^2 = 1$. Če je točka $X(x, y)$ presek te krožnice s poltrakom, ki oklepa kot t s pozitivno stranjo abs-cisne osi, velja $x = \cos t$ in $y = \sin t$. Odločimo se, da bomo kote merili vadianih. Potem je t razda-lja, ki jo prehodimo, če gremo po krožnici v pozitivni smeri od točke $T(1, 0)$ do točke X .



Dopolnimo sliko z dvema kvadra-toma in se napotimo iz točke T v pozitivni smeri po robu notranjega kvadrata. Poljubno točko N bomo podali s koordinatama $x = C_1(t)$ in $y = S_1(t)$, kjer t pomeni razdaljo, ki jo prehodimo, če gremo po tem kvadratu od točke T do točke N . Narišimo funkciji $C_1(t)$ in $S_1(t)$:



Poskusimo zapisati $C_1(t)$ v eksplicitni obliki. Najprej se omejimo na interval $[0, 4\sqrt{2}]$. Lomljeno črto dvignimo za 1 (lom bo torej v $(2\sqrt{2}, 0)$) in

del, ki je levo od loma, preslikajmo preko abscisne osi. Dobimo daljico, ki leži na premici $y = \frac{t}{\sqrt{2}} - 2$. Za vsak $t \in [0, 4\sqrt{2}]$ je zato $C_1(t) = |\frac{t}{\sqrt{2}} - 2| - 1$. Očitno to ne velja za take t , ki niso na intervalu $[0, 4\sqrt{2}]$, saj dobimo vrednost 3, če vstavimo v formulo $t = 6\sqrt{2}$, $C_1(t)$ pa zavzame le vrednosti z intervala $[-1, 1]$, pa še periodična je. Če se namreč odločimo, da bomo korakali naokrog po notranjem kvadratu, bomo na vsakih $4\sqrt{2}$ prehojenih enot prišli v isto točko. Zato po majhnem premisleku nekoliko popravimo zgornji zapis za $C_1(t)$. Dobimo novega, ki velja pri vsakem t :

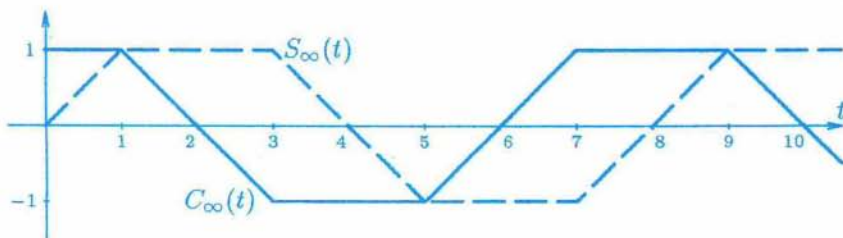
$$C_1(t) = \left| \frac{t}{\sqrt{2}} - 4 \left\lceil \frac{t}{4\sqrt{2}} \right\rceil - 2 \right| - 1$$

($\lceil a \rceil$ pomeni največje celo število, ki ni večje od a). Vsi, ki se radi sami prepričajo v pravilnost zapisa, bodo hitro preverili, ali velja tudi za negativne t . Če bi se namreč odločili za tek po kvadratu od točke T v smeri urinih kazalcev, bi (kot matematiki) razdalji za sabo dodali negativen predznak, graf funkcije $C_1(t)$ pa nadaljevali še na negativno stran.

S funkcijo $S_1(t)$ hitro opravimo. Bežen pogled na graf pove, da je le za $\sqrt{2}$ premaknjena od prejšnje funkcije, zato

$$S_1(t) = \left| \frac{t - \sqrt{2}}{\sqrt{2}} - 4 \left\lceil \frac{t - \sqrt{2}}{4\sqrt{2}} \right\rceil - 2 \right| - 1.$$

Pa se podajmo na pot iz točke $T(1, 0)$ še po zunanem kvadratu. Naj bo tako kot prej t razdalja, ki jo prehodimo, da pridemo do točke s koordinatama x in y , z zapisoma $x = C_\infty(t)$ in $y = S_\infty(t)$ pa poudarimo, da sta koordinati odvisni od prehojene razdalje. Narišimo grafa:

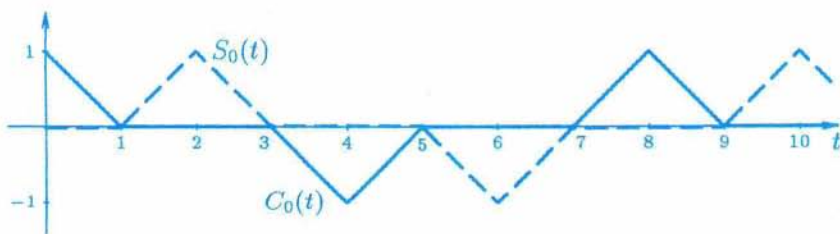
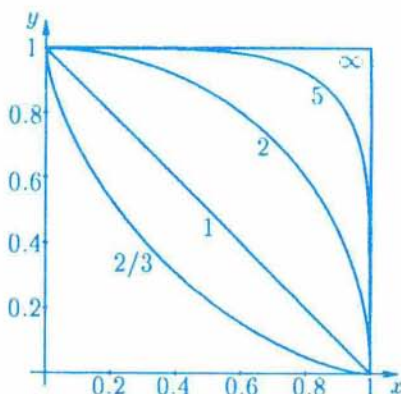


Bralcem pustimo, da poiščejo ekspliciten zapis funkcij C_∞ in S_∞ . Vprašajmo se, zakaj smo uporabili indeks 1 oziroma ∞ . Za začetek se omejimo na prvi kvadrant. To pomeni, da opazujemo par funkcij C_1, S_1 le za $0 \leq t \leq$

$\leq \sqrt{2}$ in par C_∞, S_∞ za $0 \leq t \leq 2$.

Na sliki je narisanih pet krivulj z oznakami $2/3$, 1 , 2 , 5 in ∞ . Daljica, ki veže točki $(1, 0)$ in $(0, 1)$, leži na premici $x + y = 1$. Če to zapišemo v obliki $x^1 + y^1 = 1$, vidimo, da ima indeks 1 svoj pomen pri opisu te poti. Krivulja z oznako 2 je enotska krožnica $x^2 + y^2 = 1$, zato lahko pišemo $C_2(t) = \cos t$ in $S_2(t) = \sin t$. Oznako 5 nosi krivulja $x^5 + y^5 = 1$, ki je le ena od mnogih v družini krivulj $x^n + y^n = 1$. Pri vsakem n lahko krivuljo opišemo s parom funkcij (C_n, S_n) :

vsako točko (x, y) krivulje podamo z $x = C_n(t)$, $y = S_n(t)$. Če n večamo, se krivulja vedno bolj prilega poti, ki smo jo opisali s paroma C_∞, S_∞ , tako da indeks ∞ ni kar iz trte zvit. Odločimo se, da bomo vsem krivuljam, katerih koordinati poljubne točke veže enačba $x^n + y^n = 1$, rekli *superkrožnice*. Pri tem nas ne bo motilo, da superkrožnici, ki ju določata para (C_1, S_1) in (C_∞, S_∞) , nista niti malo okrogli. Še več, n bomo spustili pod 1, prišli do $x^{2/3} + y^{2/3} = 1$, ki ji rečemo *astroida*, in se podali z n prav do 0, ko se krivulja prilepi na koordinatni osi. Narišimo grafa funkcij $x = C_0(t)$ in $y = S_0(t)$:



Ko hočemo zapustiti prvi kvadrant, se pojavijo težave, vendar se jih znebimo, če na pomoč pokličemo *absolutno vrednost*. Tako je na primer absolutna vrednost števila a , kar označimo z $|a|$, razdalja med številom a in številom 0 na številski premici, ta pa je zmeraj pozitivna. Če smo z $x^1 + y^1 = 1$ podali daljico, ki je povezovala točki $(1, 0)$ in $(0, 1)$, potem z

$|x|^1 + |y|^1 = 1$ predstavimo kvadrat z oglišči $(1, 0)$, $(0, 1)$, $(-1, 0)$ in $(0, -1)$. V splošnem bomo torej superkrožnico podali z

$$|x|^n + |y|^n = 1.$$

Pri nekaterih n so sicer oznake za absolutno vrednost odveč (na primer pri $n = 2$), vendar pa ni zmeraj tako. Pomislite, kaj bi se zgodilo, če pri $n = 1$, 3 ali $1/2$ ne bi imeli absolutne vrednosti.

V tem sestavku je problem predstavljen le v grobem. To je bila ena od tem na *Raziskovalnih dnevih iz matematike za srednješolce*, ki jih je *Društvo matematikov, fizikov in astronomov Slovenije* organiziralo septembra 1991. Vsebina je povzeta iz revije *Function*, ki jo za srednješolce iz Avstralije izdajajo na *Monash University* v državi *Victoria*.

Seveda ostajajo odprta še mnoga vprašanja; zapišimo jih le pet:

1. Funkciji C_n , S_n zadoščata nekim lastnostim trigonometričnih funkcij, na primer

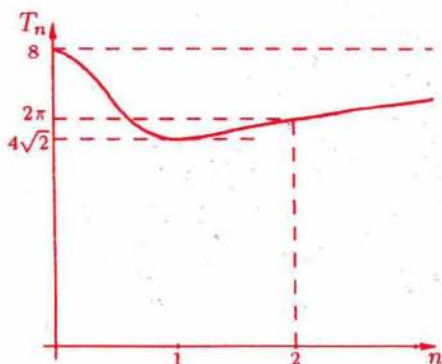
$$\begin{aligned} C_n(0) &= 1, S_n(0) = 0 \\ C_n(-t) &= C_n(t), S_n(-t) = -S_n(t) \\ C_n^n(t) + S_n^n(t) &= 1 \end{aligned}$$

Kaj pa druge lastnosti?

2. Enačbo $|x|^n + |y|^n = 1$ smo obdelali le za $n \geq 0$. Kaj se zgodi, če izberemo $n < 0$?

3. Kako si razlagamo enakosti $|x|^0 + |y|^0 = 1$ in $|x|^\infty + |y|^\infty = 1$, ki ju dobimo kot skrajna primera?

4. Če s T_n označimo periodo funkcij C_n in S_n , je ta seveda enaka obsegu ustrezne superkrožnice. Najmanjši obseg ima $|x|^1 + |y|^1 = 1$, saj je $T_1 = 4\sqrt{2}$, največja obsega pa dobimo pri $n = 0$ in $n = \infty$, ko je $T_0 = T_\infty = 8$. Na sliki imamo T_n kot funkcijo indeksa n . O podrobnostih pa ne vemo še nič določnega.



5. Vemo, da je $T_2 = 2\pi$. Po sliki sodeč obstaja razen $N = 2$ še neki $0 < N < 1$, da je $T_N = 2\pi$. Kolikšen je N ? Kako razložiti to vrednost?

Michael A. B. Deakin
prev. in pril. Darjo Felda

TRI FUNKCIJSKE ENAČBE – Rešitve s str. 321

1. Če v enačbo

$$xf(y) + yf(x) = (x + y)f(x)f(y)$$

vstavimo $y = x$, dobimo $2xf(x) = 2xf(x)^2$, od koder sledi $f(x) = 0$ ali $f(x) = 1$.

Če je $f(x) = 0$ za kakšen $x > 0$, potem je

$$xf(y) = xf(y) + yf(x) = (x + y)f(x)f(y) = 0$$

za vsak $y > 0$. Funkcija f je zato bodisi povsod enaka 0 bodisi povsod enaka 1.

2. Iz zveze

$$g(x + y) = g(x)^2 + g(y)^2$$

pri $y = x$ sledi enakost

$$g(2x) = 2g(x)^2, \quad (1)$$

pri $y = 2x$ z upoštevanjem (1) dobimo

$$g(3x) = g(x)^2 + g(2x)^2 = g(x)^2 + 4g(x)^4,$$

pri $y = 3x$ pa izračunamo še

$$g(4x) = g(x)^2 + g(3x)^2 = g(x)^2 + (g(x)^2 + 4g(x)^4)^2.$$

Ker je poleg tega zaradi (1)

$$g(4x) = g(2(2x)) = 2g(2x)^2 = 8g(x)^4,$$

za vsak $x > 0$ velja

$$g(x)^2 + (g(x)^2 + 4g(x)^4)^2 = 8g(x)^4.$$

Označimo $z = g(x)^2$, poenostavimo zgornjo enakost in jo uredimo

$$16z^4 + 8z^3 - 7z^2 + z = 0$$

ter razčlenimo

$$z(z+1)(4z-1)^2 = 0.$$

Torej je z eno od števil 0, -1 in $1/4$. Ker je funkcija g realna in velja (1), je $g(x) \geq 0$, zato $g(x) = 0$ ali $g(x) = 1/2$.

Če pri kakšnem $x > 0$ velja $g(x) = 0$, potem je

$$g(y)^2 = g(x)^2 + g(y)^2 = g(x+y)$$

za vsak $y > 0$, od koder zaradi $g(y), g(x+y) \in \{0, 1/2\}$ sledi $g(y) = 0$ za vsak $y > 0$.

Torej je funkcija g bodisi povsod enaka 0 bodisi povsod enaka $1/2$.

3. Iz funkcijske enačbe

$$h(x+y) = p(x)h(x) + p(y)h(y) \quad (x, y > 0) \quad (2)$$

prav tako kot v točki 2 na dva načina izračunamo vrednost $h(4x)$ in dobljeni vrednosti izenačimo. Tako za vsak $x > 0$ dobimo

$$p(x)q(x)h(x) = 0, \quad (3)$$

kjer je q polinom

$$q(x) = 2p(3x)p(2x) + p(3x) - 4p(2x) + 1.$$

Ker je p nekonstanten polinom, je tak tudi q , saj ima stopnjo vsaj 2. Če pomnožimo obe strani v (2) s $q(x)q(y)$ in uporabimo (3), dobimo

$$h(x+y)q(x)q(y) = 0. \quad (4)$$

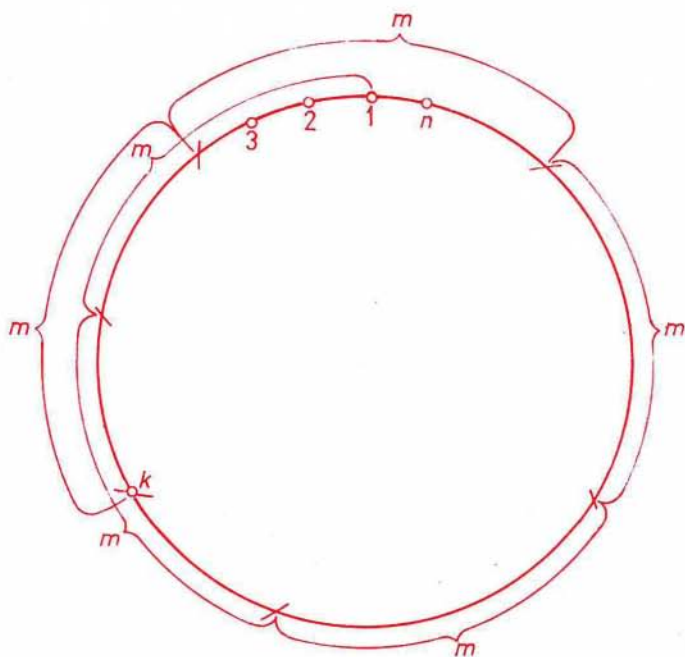
Polinom q ima končno ničel, zato lahko vsak $z > 0$ zapišemo kot vsoto $z = x + y$ s sumandoma $x > 0, y > 0$, za katera velja $q(x)q(y) \neq 0$. Iz (4) tedaj sledi $h(z) = 0$, torej je funkcija h povsod enaka 0.

Boris Lavrič

SESTAVI NALOGO - Rešitev s str. 330

Najprej odpravimo nekaj preprostih pomislekov, ki se utegnejo pojaviti.

- Če bodo pri branju besedila prišle na vrsto vse napisane črke, potem se nobena ne more pojaviti drugič, dokler ostale ne pridejo vsaj po enkrat na vrsto. Ko namreč pridemo na mesto, kjer smo že bili, se ves potek branja začne ponavljati - v neskončnost. Če se neka črka ni pojavila pred ponovitvijo kake druge črke, se ne bo nikoli več.
- Če smo začeli brati na nekem mestu in se je postopek izšel, potem se bo izšel pri poljubno izbranem začetnem mestu. O izidu namreč očitno odločata le dolžina besedila in dolžina koraka.
- Iz istega razloga je za izid postopka vseeno, ali beremo v smeri urinega kazalca ali v obratni smeri.



Slika 1

- Seveda pa je potrebno najti pravi začetek in izbrati pravo smer, če naj bo besedilo smiselno.

Odprto ostaja torej še vprašanje, kakšen je pogoj, da se postopek izide, oziroma da pridejo vse napisane črke na vrsto.

Pri poljubni dolžini besedila se postopek izide, če je dolžina koraka enaka 1. Vendar tak korak za nas ni zanimiv, ker tedaj besedilo sploh ni skrito.

Po drugi strani pa ni vsak korak dober. Če ima na primer besedilo sodo mnogo črk, se bomo s korakom dolžine 2 že po enem obhodu vrnili na začetno črko in tako bo polovica črk ostala neprebranih.

Poglejmo torej splošni primer. Naj bo n črk zapisanih v krogu in naj bo m dolžina koraka pri branju, kar pomeni, da vsakokrat preskočimo $m - 1$ črk. Izberimo poljubno črko, označimo njeno mesto z 1 in nato oštevilčimo v eni od obeh možnih smeri še mesta preostalih črk, tako kot si slede po krožnici. Naša naloga je poiskati pogoj, pri katerem bomo začeniši z mesta 1, lahko dosegli poljubno mesto k , $k \in \{1, 2, 3, \dots, n\}$.

Na mesto k bomo na opisani način lahko prišli, če obstajata taki števili $x, y \in \mathbb{N} \cup \{0\}$, da bomo z x koraki dolžine m opisali najprej y -krat vso krožnico in nato še lok od 1 do k (slika 1).

Ta pogoj zapišemo z enačbo

$$1 + mx = ny + k.$$

Za vsak $k \in \{1, \dots, n\}$ dobimo po eno linearno diofantsko enačbo z dvema neznankama

$$mx - ny = k - 1, \quad (1)$$

kjer sta m in n dani naravni števili. Vsaka teh enačb mora imeti vsaj eno nenegativno celo rešitev (x, y) , če naj se naš postopek izide.

Za $k = 1$ je ena od rešitev $x = 0$, $y = 0$. V točki 1 smo res po nič korakih in nič obhodih.

Če je $k = 2$, imamo enačbo

$$mx - ny = 1. \quad (2)$$

Tu si oglejmo le potrebni pogoj za rešljivost te enačbe v celih številih. Naj imata števili m in n kakšen skupni delitelj d . Potem bi pri celih x in y moral

biti d tudi delitelj števila 1 na desni strani enakosti. Od tod sklepamo, da je enačba (2) rešljiva v celih številih kvečjemu tedaj, ko sta m in n tuji števili.

Torej lahko pridemo na mesto 2 (kar je eden od pogojev, da se postopek izide) kvečjemu tedaj, ko sta dolžina koraka pri branju in število črk v besedilu tuji števili.

Ta pogoj pa je tudi zadosten. Še več. Če je izpolnjen, je rešljiva ne le diofantska enačba (2), ampak vsaka od enačb (1).

To nam zagotavlja teorija linearnih diofantskih enačb. Velja še: če števili $x_0, y_0 \in \mathbb{Z}$ rešita enačbo oblike (1), jo rešita tudi števili

$$x = x_0 + \lambda n$$

$$y = y_0 + \lambda m,$$

kjer je λ poljubno celo število.

Če sta števili m in n tuji, ima torej vsaka od enačb (1) neskončno mnogo nenegativnih celih rešitev (zato lahko branje besedila ponavljamo v nedogled). Za naš problem so posebej zanimive tiste, pri katerih sta x in y najmanjša.

Sedaj pa hitro sestavite uganke. Izberite lepo misel, pregovor, izrek ali prijateljevo ime. Krog preoblikujte v zanimivo figuro s posebej poudarjenim mestom, kamor boste postavili začetek besedila. Nato izberite dolžino koraka, ki mora biti število, tuje številu črk v besedilu. Ostane še, da besedilo zapišete, kar bo lažji posel kot kasnejše reševanje uganke (avtor uganke kot reševalec ne šteje).

Kar je ostalo nerazjasnenega o diofantskih enačbah, pa preberite v knjižici Jožeta Grassellija: Diofantske enačbe, ki jo lahko kupite pri Komisiji za tisk DMFA, Ljubljana, Jadranska 19.

Marija Vencelj

OBVESTILO NAROČNIKOM IN AKTIVOM PROFESORJEV

Za dodatne naročnike nam je zmanjkalo več izvodov 5. številke Preseka. Vse, ki nam lahko odstopijo svoj izvod, prosimo, da nam ga vrnete. Če pa je na šoli več neprodanih izvodov, vam lahko v zameno pošljemo cel paket (100 izvodov) kake starejše številke Preseka (za reklamo ali nagrade).

Ciril Velkovrh

NOVE KNJIGE

Hinko Šolinc, SKOZI FIZIKO Z REŠENIMI NALOGAMI, KINEMATIKA, STATIKA, Zbirka rešenih nalog za srednje šole, DZS, Ljubljana 1991, 251 str.

Zbirke rešenih nalog so med učenci srednjih in osnovnih šol posebej dobrodošle, saj je številnim učencem reševanje matematičnih in fizikalnih problemov nikoli do konca doumljivo iskanje "ta prave formule", drugim, ne tako redkim, pa razburljiv izziv za preizkus znanja in sposobnosti. Obojim je namenjena prva knjiga iz zbirke nalog za srednjo šolo "Skozi fiziko z rešenimi nalogami". V njej je zajeta snov s področja kinematike in statike, kar ustreza snovi prvega letnika novega gimnazijskega programa. Avtor jo namenja tudi učencem drugih srednjih šol in maturantom, ki se pripravljajo za sprejemni izpit na univerzo, najbrž pa bo prišla prav še študentom tehničnih in naravoslovnih fakultet pri obnavljanju srednješolskega znanja, potrebnega za spremljanje fizike na visokošolskem nivoju.

V zbirki najdemo na začetku vsakega poglavja kratko razlago snovi in formul ter več skrbno obdelanih in razloženih zgledov. Pri nalogah so podani kratki, večinoma numerični odgovori, podrobnejša razlaga reševanja nalog pa je zbrana v posebnem poglavju na koncu knjige. Razlage spremljajo pregledne skice, grafi in tabele.

Dijakom, ki bodo reševali naloge samostojno in svoje rešitve primerjali z rešitvami v knjigi šele naknadno, bo zbirka nadvse koristen učni pripomoček. Saj se največ fizike naučimo z aktivnim delom. Dijakom, ki menijo, da se lahko naučijo fizike le s prebiranjem rešitev, pa tudi tako bogata in izčrpna knjiga ne bo pomagala.

Bojan Golli

STO NIČEL

Produkt naravnih števil od 1 do n običajno označimo z $n!$ (beremo: n fakulteta), torej

$$n! = 1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4 \cdot \dots \cdot (n-1) \cdot n.$$

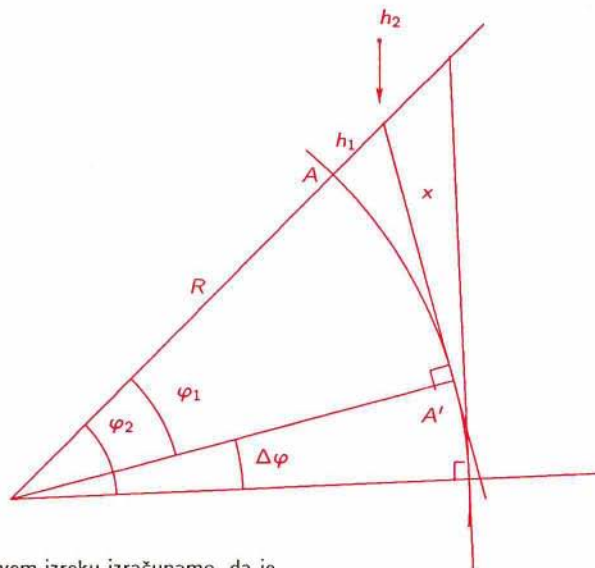
Le prva štiri: $1! = 1$, $2! = 2$, $3! = 6$, $4! = 24$ niso deljiva z 10, že $5! = 120$ in vsa nadaljnja pa se končujejo z ničlo. Ko n narašča, se število ničel na koncu $n!$ kvečjemu veča, saj je $n!$ deljivo z $m!$, če je $m \leq n$.

Poiščite najmanjše naravno število n , katerega fakulteta ima na koncu svojega desetiškega zapisa natanko sto ničel.

Marija Vencelj

RADIJ ZEMLJE S STOPARICO

Na zahodni obali Istre se je obetal lep sončni zahod. Po viharji noči in oblačnem dnevu se je na zahodu zvedrilo. Obzorje je bilo rahlo zamegljeno, meja med morjem in nebom ostra. Sonce se je vse bolj rdeče počasi spuščalo proti gladini. Pa pomislim, da bo za opazovalca ob vodi zašlo prej kot za opazovalca na skalah nad mano. Dogovoriva se s prijateljem, da bova izmerila



Po Pitagorovem izreku izračunamo, da je

$$x^2 = (R + h)^2 - R^2$$

in od tod

$$x = \sqrt{2Rh},$$

ker je h majhen v primeri z R . Iz istega razloga lahko enačimo dolžino x z dolžino loka AA' in izračunamo kot

$$\varphi = x/R = \sqrt{2h/R}.$$

Zasuk tangente pri dvigu od h_1 do h_2 je tedaj

$$\Delta\varphi = \varphi_2 - \varphi_1 = \sqrt{(2/R)(\sqrt{h_2} - \sqrt{h_1})}.$$

razliko. Namestim se ob obali, z očmi kaka dva metra nad gladino, prijatelj pa steče na skale, tako da opazuje z višine kakih pet metrov nad gladino. Imava ročni uri – stoparici. Ko se Sonce s spodnjim robom dotakne gladine, sprožim stoparico. Ko zgornji rob izgine, ustavim uro in zakličem prijatelju, da sproži svojo. On jo ustavi, ko zgornji rob Sonca zaide zanj. S svoje ure preberem, da je Sonce zahajalo 3 min 9 s. Prijatelj ugotovi, da je zašlo zanj 9,4 s kasneje.

Sami poskusite ponoviti merjenje ob kaki podobni priložnosti. Le na oči je treba paziti. Če je Sonce presvetlo, ga je treba opazovati skozi počrnjeno steklo. Včasih zadostujejo že sončna očala.

Merjenje omogoča približno določitev Zemljinega radija. S slike razberemo, da se odmika obzorje, ko se dvigujemo nad morsko gladino. Pri dvigu z višine h_1 na višino h_2 se pravokotnica na tangento in s tem tudi tangenta z opazovališča na morsko gladino zasuče za kot

$$\Delta\varphi = \varphi_2 - \varphi_1 = \sqrt{\frac{2}{R}}(\sqrt{h_2} - \sqrt{h_1}).$$

To je tudi kot, ki ga preide zgornji rob Sončeve ploščice od "spodnjega" do "zgornjega zahoda". Določimo ga iz podatkov o trajanju zahoda in o zornem kotu Sončevega premera, ki je ob času opazovanja meril okoli 31,6'. Izračunamo, da je bila hitrost "potapljanja Sonca" okoli 10'/min. V času od "spodnjega" do "zgornjega" zahoda se je torej zgornji rob Sončeve ploščice potopil za kot $\Delta\varphi = 1,57'$. S tem izračunamo radij Zemlje:

$$R = \frac{2(\sqrt{h_2} - \sqrt{h_1})^2}{(\Delta\varphi)^2} = 6,5 \cdot 10^6 \text{ m}.$$

Dobljena vrednost se kar preveč dobro ujema s tabelirano vrednostjo Zemljinega polmera 6370 km, malo tudi po naključju. O tem se prepričamo, ko ocenimo natančnost meritve.

Podatek, od katerega je izračunani premer najbolj odvisen, je kot $\Delta\varphi$, ki ga prepotuje rob Sončeve ploščice med zahodoma. Vzemimo, da lahko izmerimo s stoparico čas na 0,1 s natančno. Kot $\Delta\varphi$ je tedaj določen na okoli 0,02' natančno in torej meri med 1,55' in 1,59'. S tema podatkom izračunamo za premer Zemlje 6650 km in 6310 km. Srednja vrednost 6500 km je torej določena na okoli 200 km natančno. Če dodamo k oceni za natančnost časa še 0,1 s zaradi drugih negotovosti, pomeni, da moramo biti zadovoljni z natančnostjo okoli 400 km.

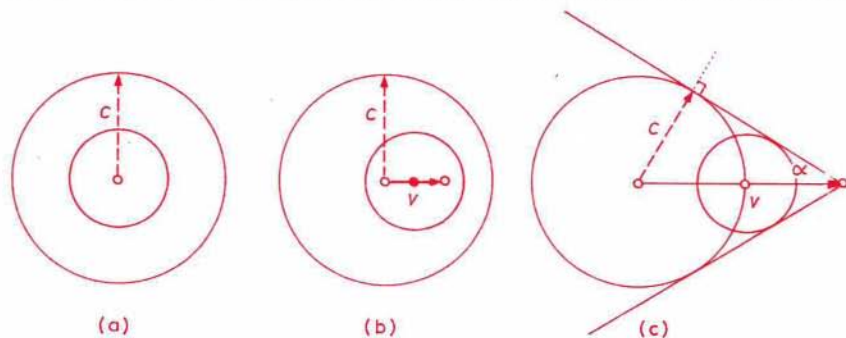
Marjan Hribar

LETALSKI POK

Kako je s *pokom*, ki ga povzroči letalo? Vprašanje se je pojavilo, ko je vojna zajela naše kraje. Poskusimo osvetliti zanimivi pojav, ne da bi se spuščali v podrobnosti.

Po zraku ali drugem plinu potujejo *motnje*. Hitro premaknimo telo. Okolni zrak se odzove tako, da izpolni del prostora, ki ga je zapustilo telo, in se umakne iz dela, kamor se je premaknilo. Na eni strani se pojavi *razredčina*, v kateri je tlak nižji od prejšnjega, in na drugi *zgoščina*, v kateri je višji. Motnja je *vzdolžna* ali *longitudinalna*, ker se deli zraka gibljejo v smeri potovanja motnje in v nasprotni smeri. Najbolj znana motnja je *zvok*, ki nastane, če telo, na primer opna v zvočniku ali glasilki v grlu, sinusno niha. Zvok slišimo, če leži frekvenca med 16 in 16 tisoč do 20 tisoč nihajev na sekundo. V zvoku si sledijo v enakomernih razmikih razredčine in zgoščine, ki potujejo s *hitrostjo zvoka*. Pri navadni temperaturi meri v zraku hitrost okoli 340 metrov na sekundo ali 1200 kilometrov na uro. Na večji višini je zaradi nižje temperature hitrost zvoka manjša. Na višini okoli 11 tisoč metrov doseže nekaj manj kot 300 metrov na sekundo in se nato do višine več kot 20 tisoč metrov znatno ne spremeni.

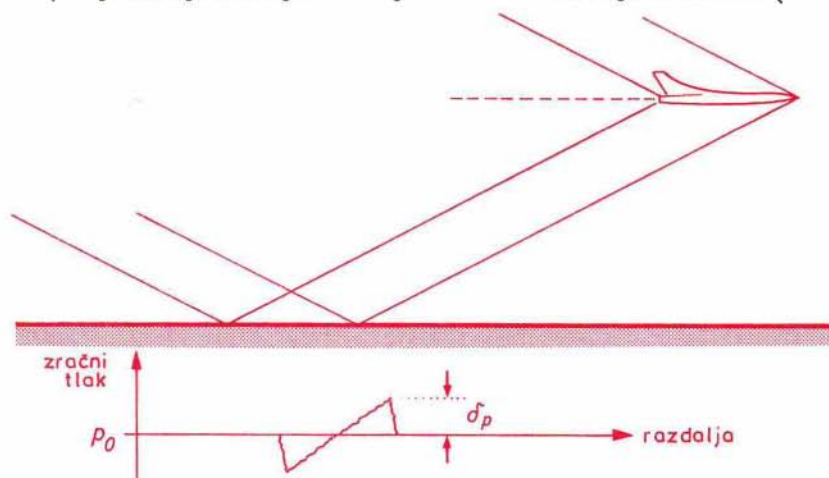
V zvoku je tlak v zgoščini samo malo višji od navadnega zračnega tlaka, v skrajnem primeru za kako desetstisočino navadnega zračnega tlaka, in tlak v razredčini samo malo nižji. Drugače je, če se v delu zraka pojavi tlak, ki je mnogo višji od navadnega zračnega tlaka, na primer pri močni eksploziji ali blisku. V tem primeru potuje po zraku motnja kot *udarni val*. Na eni strani



Slika 1. Potovanje motnje od telesa, ki miruje ($v = 0$) ali se giblje zelo počasi ($v \ll c$) v zraku (a), se giblje s hitrostjo $v = \frac{3}{5}c$ (b) in se giblje s hitrostjo $v = 2c$ (c). Pot telesa je simetrijska os.

meje zrak še miruje pri navadnem tlaku in ima navadno gostoto, na drugi strani pa se giblje pri povišanem tlaku in ima povečano gostoto. Meja med obema območjema je udarni val, ki potuje po zraku z *nadzvočno hitrostjo*, to je s hitrostjo, večjo od 340 metrov na sekundo. V udarnem valu tlak z oddaljenostjo od kraja eksplozije pojema in kmalu toliko pade, da motnja potuje naprej kot zvok in ne več kot udarni val. Do takih pojavov pride tudi pri telesih, ki se gibljejo po zraku z nadzvočno hitrostjo. To velja na primer za krajišče vrvice pri biču, s katerim spretno zamahnemo. Do zelo zanimivih pojavov pride, ko se vesoljska postaja vrača na zemljo in vstopi z zelo veliko hitrostjo v ozračje. Tedaj nastane izrazit udarni val in jo spremlja, dokler se njena hitrost ne zmanjša. Pri tem se zrak na drugi strani meje tudi močno segreje.

Od telesa, ki miruje ali se giblje z zelo majhno hitrostjo, potuje motnja na vse strani z enako hitrostjo. V določenem trenutku doseže kroglo, v središču katere je telo. Pri telesu, ki se giblje z znatno hitrostjo, je treba upoštevati, da se njegova lega spreminja in se s tem premika središče krogle, iz katerega izhaja motnja. Pri telesu, ki se giblje z nadzvočno hitrostjo v , pa daleč od telesa potuje motnja z manjšo hitrostjo zvoka c in zaostaja za telesom (slika



Slika 2. Valovni čeli, ki izvirata iz nosu in repa nadzvočnega letala v vodoravnem letu s konstantno nadzvočno hitrostjo ($v = 2c$). Valovni čeli se s to hitrostjo gibljeta po vodoravnih tleh in se na njih odbijeta. Ker je hitrost v nižjih plasteh ozračja večja, sta valovni čeli ukrivljeni, če leti letalo dovolj visoko. V določenem trenutku je zaradi valovnih čel tlak na tleh odvisen od kraja. p_0 je nemoteni zračni tlak, δp pa največje povečanje tlaka.

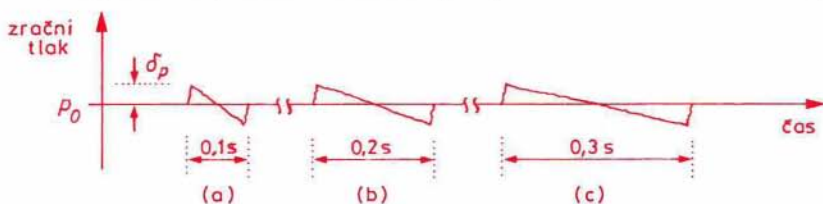
1). Motnja ima obliko plašča stožca, v vrhu katerega je hitro se gibajoče telo. Telo in plašč stožca potujeta v smeri osi stožca z nadzvočno hitrostjo v , plašč pa pravokotno na svojo smer s hitrostjo zvoka c . Polovičnega kota ob vrhu značilnega preseka α , to je kota med hitrostjo telesa in motnjo, ni težko izračunati:

$$\sin \alpha = c/v.$$

Motnja potuje v smeri, ki je pravokotna nanjo. Enačba potrjuje misel, da opazimo pojav le, če je telo hitreje od zvoka, saj sinus kota ne more biti večji od 1. Kot je tem manjši in stožec tem bolj oster, čim večja je hitrost telesa. Motnji, ki daleč od telesa potuje po zraku z zvočno hitrostjo, pravimo *valovno čelo*.

Valovno čelo ste zagotovo videli, le da ne v zraku, ampak na vodni gladini. Ladja, ki pluje po njej hitreje, kot potujejo vodni valovi, "vleče" za seboj trikotno območje z valovi, medtem ko je na drugi strani čela gladina še nemotena. Velja kar prejšnja enačba, misliti si moramo le, da smo plašč stožca presekali z ravnino, ki ustreza gladini vode. Motnja v tem primeru ni longitudinalna, ker se gibljejo deli vode tudi pravokotno na smer potovanja motnje.

Prvi je udarne valove in valovna čela v zraku opazil in raziskal avstrijski fizik Ernst Mach v Pragi v letih od 1875 do 1893. Delal je poskuse z motnjo, ki jo je sprožila v zraku električna iskra, torej droben blisk. Ugotovil je, da hitrost motnje blizu iskrišča preseže hitrost zvoka in da hitrost pojema z oddaljenostjo od iskrišča, dokler ne doseže hitrosti zvoka. Tako se je prvič srečal z udarnim valom, ki ga je napovedal malo pred tem matematik Bernhard Riemann. Po letu 1884 je začel Mach poskuse z izstrelki. Iz Prage v Pulj je na avstro-ogrsko mornariško akademijo pošiljal navodila za poskuse, vračali pa so mu poročila o poskusih. Leta 1886 je zapisal enačbo za kot α . Pozneje

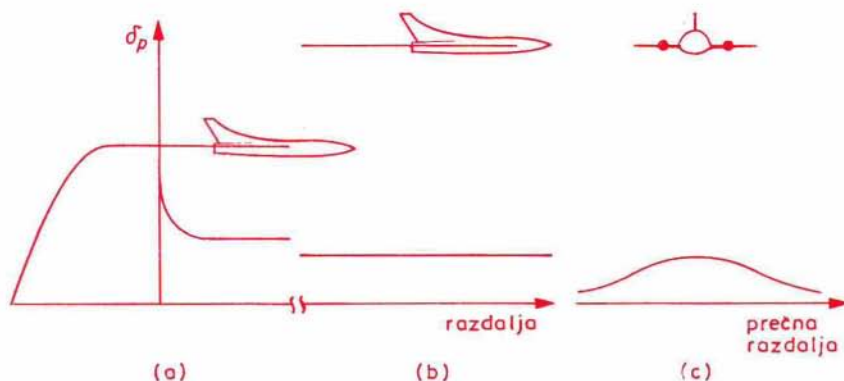


Slika 3. Značilni časovni potek spremembe tlaka, ki jo pri letu s svojo običajno hitrostjo povzročijo tri ameriška vojaška letala: lovec F-104 (a), bombnik B-58 (b) in večji bombnik XB-70 (c). Pojav traja po vrsti 0,1, 0,2 in 0,3 sekunde.

je delal poskuse z ovirami, ki so mirovale v toku zraka z nadzvočno hitrostjo. Dandanes njemu na čast govorimo o *Machovem valovnem čelu* in imenujemo razmerje med hitrostjo telesa in hitrostjo zvoka v plinu *Machovo število*.

E.Mach je opazil, da spremljata izstrelek, ki leti z nadzvočno hitrostjo, dve stožčasti valovni čeli; eno izvira iz prvega in drugo iz drugega krajišča. Podobno tudi letalo, ki leti z nadzvočno hitrostjo, spremljata valovni čeli, eno izvira iz nosu in drugo iz repa (slika 2). Tako je - strogo vzeto - le pri valjastem telesu. Izstrelek in letalski trup pa sta na sredi izbočena, zato nastane še nekaj vmesnih manj izrazitih valovnih čel, ki z naraščajočo razdaljo od telesa izginejo. Pri letalu motijo poleg tega še krila in drugi deli, ki pokvarijo njegovo osno simetrijo. Zaradi tega je slika valovnih čel v podrobnostih dokaj nepregledna.

Omejimo se le na valovni čeli na nosu in repu. Dovolj daleč od letala daje to dovolj dober okviren pregled. Pri vodoravnem letu nadzvočnega letala se valovni čeli gibljeta po tleh s hitrostjo letala in povzročita na določenem kraju značilno tlačno spremembo. Tlak hitro naraste, ko gre mimo prvo valovno čelo, nato tlak počasi pojema in zopet hitro naraste, ko gre mimo drugo valovno čelo. Odvisnost tlaka od časa kaže obliko črke N. Časovni razmik med povečanjema tlaka je odvisen od hitrosti letala in od njegove dolžine (slika 3). Pri kratkih letalih uho sploh ne loči dveh valovnih čel. Razliko med najvišjim in nemotenim tlakom δp ocenimo z nekaj tisočinami navadnega zračnega tlaka. Odvisna je od višine in oddaljenosti letala in je povečana na začetku poleta, ko letalo doseže in preseže zvočno hitrost (slika 4). Slikovito

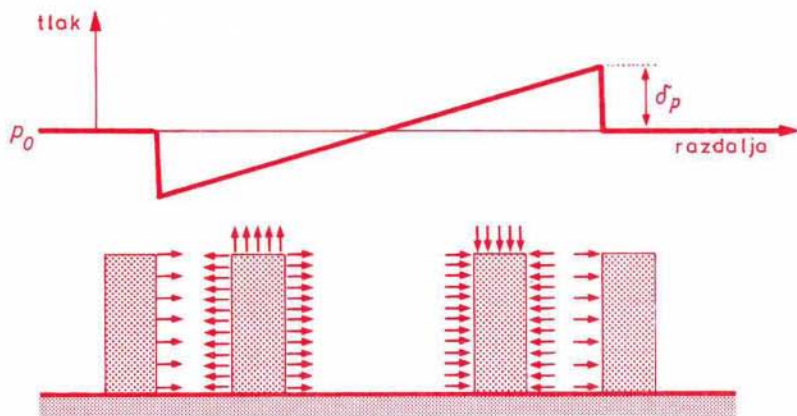


Slika 4. Povečanje tlaka δp je največje, ko letalo prebije zvočni zid (a), je tem manjše, čim više leti letalo (b) in pojema tudi z razdaljo od točke pod letalom (c).

pravimo, da letalo tedaj *prebije zvočni zid*. Ime izvira iz izrazitega povečanja upora, ko se hitrost letala bliža zvočni hitrosti. Zaradi sil, ki jih povzroči povečani ali zmanjšani tlak, lahko popokajo šipe, če leti letalo z nadzvočno hitrostjo dovolj blizu, posebno, ko prebije zvočni zid (slika 5). Ponavljajoči se preleti lahko celo poškodujejo občutljive dele stavb.

Nadzvočno letalo mora zaradi velikega upora imeti močne motorje. Batni motorji, ki poganjajo vijake, niso dovolj močni. Zvočni zid so prvič prebili po drugi svetovni vojni piloti, ki so se dvignili s takim letalom na veliko višino in ga potem usmerili navpično navzdol. V vodoravnem letu je prvič prebilo zvočni zid letalo X-1 iz Bellovih tovarn v ZDA leta 1947. Letalo je nosilo s seboj gorivo in oksidacijsko snov, tako da je raketni motor deloval le kratek čas. Dandanes vojaška letala z reakcijskimi motorji, ki zajemajo zrak iz okolja, dosegajo trojno zvočno hitrost, v posebnih primerih tudi večjo. Rakete za vesoljske polete jih pri tem še prekašajo. Doslej so izdelali tudi potniško nadzvočno letalo - angleško-francosko Concorde. Letala te vrste letijo od leta 1976, druge podobne načrte pa so opustili.

Glavni razlog je v tem, da nadzvočna potniška letala niso gospodarna. Poleg tega smejo leteti z nadzvočno hitrostjo le nad nenaseljenim ozemljem in nad morjem. Vojaška letala, ki vzletajo zaradi vaj, so večinoma tudi pregnali tja. Vpliv pokov so prav zaradi potniških letal podrobneje raziskali. Ta letala bi prebila zvočni zid v višini nad 10 tisoč metrov, tako da bi valovni čeli



Slika 5. Sile zaradi valovnih čel v določenem trenutku v odvisnosti od kraja. Zaradi njih lahko popokajo šipe in so poškodovani občutljivi deli stavb, če leti letalo dovolj nizko, posebno, če prebije pri tem zvočni zid.

dosegli tla več deset kilometrov za letalom. Pas, na katerem bi slišali pok, bi bil širok več kot petdeset kilometrov. Nepričakovani poki, ki spominjajo na običajne eksplozije, so sicer neprijetni, a se večina ljudi nanje navadi. Samo pri posameznikih se razvije preobčutljivost. Jakost zvoka je tem večja, čim večja je razlika tlakov δp . V zvoku so zastopane vse frekvence s širokega frekvenčnega pasu, kot v vsakem šumu. Čim daljše je letalo, tem višje frekvence so zastopane najizdatneje. V poku potniškega letala so najizdatneje zastopane frekvence med deset in sto nihaji na sekundo. Za šipe in stavbe ni v tem primeru nobene nevarnosti, ker povzroči pok tolikšne pospeške kot druge dejavnosti v stanovanju, na primer loputanje z vrati ali poskakovanje.

Zaradi vsega tega in tudi zaradi izpušnih plinov, ki bi onesnažili visoke plasti ozračja, nadzvočna potniška letala nimajo obetavne prihodnosti. Zaradi spremenjenih svetovnih razmer tudi vojaška nadzvočna letala izgubljajo svojo pomembnost. Zato upajmo, da se nam jih nikoli več ne bo treba bati.

Janez Strnad

SLUČAJ ALI PRAVILO? - Rešitev s str. 321

Pravilo deluje! V to nas prepriča kratek algebrski račun:

$$\begin{aligned}(n - 25)100 + (50 - n)^2 &= \\ &= (100n - 2500) + (2500 - 100n + n^2) = n^2\end{aligned}\quad (1)$$

Iz njega vidimo, da je pravilo uporabno, tudi če je kvadrat $(50 - n)^2$ večji od 99. Le uporabiti ga je treba tako, kot sledi iz formule (1). Na primer:

$$\begin{aligned}38 - 25 &= 13 \\ (50 - 38)^2 &= 144 \\ 1300 + 144 &= 1444\end{aligned}$$

Torej je $38^2 = 1444$.

Sami pogledajte, kako je treba pravilo razumeti, če je n manjši od 25.

Marija Vencelj

BELE LUKNJE ALI LIMITE PO TANGRAMSKO

Sestavljanje tangramskih likov z "luknjami" odpira precej zanimivih novih problemov. Ogleдали si bomo zgolj enega izmed njih, najbrž kar najzanimivejšega.

Naloga pravi:

Sestavi tangramski lik z največjo možno luknjo.

Pri tem nas zanimajo samo "prave" luknje, torej takšne, ki se v nobeni svoji točki ne dotikajo zunanjega roba tangramskega lika.

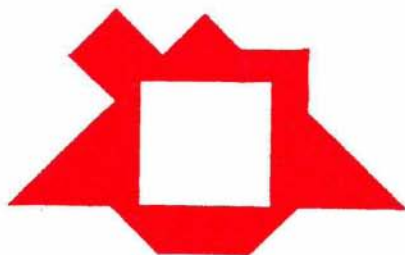
Za pojasnilo si oglejmo sliko 1 s tangramskimi liki na temo "ladja". Prva dva lika v njej imata pravo luknjo, naslednja dva pa ne.



Slika 1.

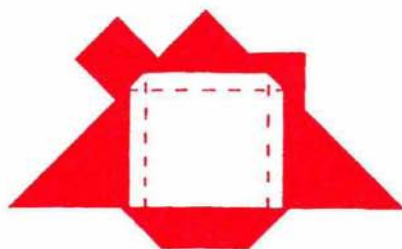
Seveda sta oba "ladijska" predloga precej daleč od rešitve naše naloge, saj sta ploščini njunih lukenj sorazmerno majhni. Pri računanju ploščin lukenj v tangramskih likih je umestno privzeti, da ima tangramska ploščica v obliki kvadrata stranico z dolžino 1. Tedaj je ploščina luknje prvega tangramskega lika na sliki 1 enaka 1, ploščina luknje drugega lika pa celo samo $5 - 3\sqrt{2} = 0,7574\dots$. Vsaj prvega podatka vam zares ne bo težko preveriti, če boste le tudi sami sestavili ladjice s te risbe.

Poskusimo sedaj poiskati kakšno boljše rešitev naloge. Začnimo kar z likom, ki ga vidimo na sliki 2. Luknja v njem se utegne zazdeti bralcu na prvi pogled že kar velika. In res – njena ploščina je 4. Vendar je očitno, da se jo da še razširiti. Poglejmo!



Slika 2.

Pomaknimo vsakega izmed obeh velikih trikotnikov za dolžino d proti levi oziroma desni. Pri tem je treba tudi zgornji trikotnik pomakniti nekoliko navzgor – toliko pač, da oba "zamaška" (kvadrat in mali trikotnik) lepo sedeta na robove trikotnikov. Očitno je pri tem treba zgornji trikotnik pomakniti navzgor za natanko d (slika 3).



Slika 3.

Pomik dolžine d pa seveda ne sme biti prevelik, saj sicer z njim uničimo luknjo v tangramskem liku. Če upoštevamo dogovorjene dimenzije tangramskih ploščic, se lahko prepričamo, da mora veljati

$$0 \leq d < \sqrt{2} - 1.$$

To pomeni, da bi pomik za $d = \sqrt{2} - 1$ že ustvaril nepravo luknjo v liku.

Vemo, da je število $\sqrt{2} - 1$ iracionalno (ni ulomek). Namesto njega lahko sicer uporabimo racionalni desetiški približek (ulomek), ki mu je tako blizu, kakor le želimo, v nobenem primeru pa mu ne bo povsem enak. Recimo: desetiški približek $\frac{41421}{100000}$ se od števila $\sqrt{2} - 1$ ne razlikuje več kakor eno samo stotisočinko.

Iz povedanega sledi, da se lahko maksimalni luknji v tangramskem liku predlagane oblike približamo tako zelo, kakor le želimo, doseči pa je nikdar ni moč.

Ker je ploščina luknje, ki nastane pri odmiku za d , enaka

$$p(d) = 2 \cdot 2 + 3 \cdot 2 \cdot d + 2 \cdot \frac{d^2}{2} = 4 + 6d + d^2,$$

je zgornja meja za ploščino luknje v tem liku število

$$p(\sqrt{2} - 1) = 4\sqrt{2} + 1 = 6,6569....$$

Izdajmo za konec, da ta tangramska luknja nikakor ni največja med doslej znanimi. Vabimo torej Presekove bralce, da poskusijo sami konstruirati tangramski lik, ki bi vseboval luknjo s še večjo ploščino in da nam pošljejo svoje rešitve. Najboljšo bomo nagradili. Sicer pa problem tangramskega lika z največjo luknjo, kolikor je avtorju članka znano, v matematičnih krogih še vedno ni dokončno rešen.

Vilko Domajnko

RAČUNALNIŠTVO

(K)URNIK, 2. DEL

V prejšnji številki Preseka smo opisali algoritem, ki nam sestavi tak urnik, da je šola odprta najkrajši možni čas. Napišimo sedaj v pascalu program, ki bo rešil zastavljeni problem. Določene dele programa bomo opisali v celoti, nekatere pa bomo samo nakazali. Kdor pa zna osnove programiranja, bo preostale dele programa brez težav napisal sam.

Najprej se moramo odločiti, kako bomo predstavili učitelje in razrede ter povezave med njimi. Ker imamo na eni strani n učiteljev, na drugi pa m razredov, je uporaba dvorazsežne tabele velikosti $n \times m$ kar primerna. Za vsak element tabele moramo poznati dvoje: podatek o številu ur, ki jih ima i -ti učitelj v j -tem razredu (z drugimi besedami: število povezav med i -tim učiteljem in j -tim razredom v grafu urnika), in pa množico oznak za te povezave. Ker lahko različne oznake povezav predstavimo z različnimi barvami, bomo tem oznakam rekli kar *barve*. Celotno tabelo povezav pa bomo imenovali GRAF.

Pozneje bomo pri algoritmu potrebovali tudi podatek o vseh barvah (torej oznakah povezav), ki pripadajo določenemu učitelju oziroma razredu. V ta namen vpeljemo polji BARVE_U in BARVE_R, ki bosta vsebovali množice barv za vsakega učitelja in za vsak razred.

Potrebovali bomo še tri globalne spremenljivke. Spremenljivki ST_UCITELJEV in ST_RAZREDOV nam bosta povedali, koliko učiteljev in razredov bomo imeli pri sestavljanju urnika. Spremenljivka STOPNJA pa nam bo povedala maksimalno stopnjo točke v grafu (in s tem maksimalno število barv, ki jih potrebujemo za rešitev naloge).

Tako, sedaj se lahko lotimo opisa tipov in globalnih spremenljivk.

```
const
  MAXUC = 100;           {maksimalno število ucencev}
  MAXRA = 100;           {maksimalno število razredov}
  MAXBARV = 16;          {največja dovoljena stopnja}
type
  mnozica_barv = set of 1..MAXBARV;
  tip_grafa = record
    st_ur:integer;
    barve:mnozica_barv;
  end;
var
  GRAF      : array [1..MAXUC,1..MAXRA] of tip_grafa;
  BARVE_U   : array [1..MAXUC] of mnozica_barv;
  BARVE_R   : array [1..MAXRA] of mnozica_barv;
  ST_UCITELJEV,ST_RAZREDOV,STOPNJA : integer;
```

Glavni program bo izgledal takole:

```
begin {glavni}
  Beri_Podatke;
  Doloci_Stopnjo;
  Pobarvaj_Povezave;
  Izpisi_Rezultate;
end. {glavni}
```

Podprogram BERI_PODATKE si boste napisali sami: potrebno je le vnesti podatke v tabelo GRAF in pred tem seveda določiti vrednosti spremenljivk ST_UCITELJEV in ST_RAZREDOV. Važno je, da ne pozabite inicializirati vseh množic (postavite jih na vrednost prazne množice).

Tudi podprogram DOLOCI_STOPNJO je enostaven: poiskati morate največjo stopnjo točke v grafu in jo prirediti globalni spremenljivki STOPNJA.

Podrobneje si bomo ogledali osrednji podprogram POBARVAJ_POVEZAVE. Algoritem nam je že poznan: za vsakega učitelja in vsak razred poiščemo ustrezne barve za vse njune povezave in povezave pobarvamo. Če ustrezne barve ne najdemo, funkcija POPRAVI "prebarva" dosedanje povezave.

```
procedure Pobarvaj_Povezave;
var
  ucitelj, razred, st_povezav, barva, i : integer;

begin
  for ucitelj:=1 to ST_UCITELJEV do
    for razred:=1 to ST_RAZREDOV do
      begin
        st_povezav:=GRAF[ucitelj,razred].st_ur;
        for i:=1 to st_povezav do
          begin
            barva:=Izberi_Barvo(ucitelj,razred);
            if barva=0 then
              barva:=Popravi(ucitelj,razred);
            GRAF[ucitelj,razred].barve:=GRAF[ucitelj,razred].barve + [barva];
            BARVE_U[ucitelj]:=BARVE_U[ucitelj] + [barva];
            BARVE_R[razred]:=BARVE_R[razred] + [barva];
          end;
        end;
      end;
    end; {Pobarvaj_Povezave }
```

Funkcija IZBERI_BARVO nam vrne številko prve barve, s katero lahko pobarvamo povezavo med *ucitelj* in *razred*. Če take barve ni, funkcija vrne vrednost 0.

```
function Izberi_Barvo(uc,ra:integer):integer;
```

```

var
  i : integer;
  nasei : boolean;
begin
  i:=1;
  nasei:=false;
  while (not nasei) and (i<=STOPNJA) do
    if (i in BARVE_U[uc]) or (i in BARVE_R[ra])
  then
    i:=i+1
  else
    nasei:=true;
  if nasei then
    izberi_barvo:=i
  else
    izberi_barvo:=0;
  end; {Izberi_Barvo }

```

Funkcija POPRAVI je še najbolj zapletena, čeprav je njena naloga preprosta: zamenjati mora barvi b1 in b2 vzdolž nekega zaporedja učiteljev in razredov in kot rezultat vrniti barvo b2.

```

function Popravi(uc,ra:integer):integer;
type
  povezave = record
    u,r:integer;
  end;
var
  b1,b2,u,r,i,k,z : integer;
  {v polje pov shranjujemo povezave vzdolž zaporedja barv b1–b2}
  pov : array [1..MAXUC+MAXRA] of povezave;
begin {določimo barvi b1 in b2}
  b1:=1;
  while (b1 in BARVE_U[uc]) do b1:=b1+1;
  b2:=1;
  while (b2 in BARVE_R[ra]) do b2:=b2+1;
  popravi:=b2;
  k:=0;      {tvorimo zaporedje povezav pov, ki jih bo potrebno 'prebarvati'}
  while (not odd(k)) and (b2 in BARVE_U[uc]) do
    begin
      {poiščemo razred, ki je z učiteljem uc povezan s povezavo barve b2}
      ra:=1;
      while not odd(k) do
        if (b2 in GRAF[uc,ra].barve) then
          begin
            k:=k+1;
            pov[k].u:=uc;
            pov[k].r:=ra;
          end

```

```

else
  ra:=ra+1;
  {poiščemo učitelja, ki je z razredom ra povezan s povezavo barve b1}
  if (b1 in BARVE_R[ra]) then
    begin
      uc:=1;
      while odd(k) do
        if (b1 in GRAF[uc,ra].barve) then
          begin
            k:=k+1;
            pov[k].u:=uc;
            pov[k].r:=ra;
          end
        else
          uc:=uc+1;
        end;
      end;
      {prvi učitelj v zaporedju pov 'izgubi' barvo b2 in 'pridobi' barvo b1}
      BARVE_U[pov[1].u]:=BARVE_U[pov[1].u] - [b2] + [b1];
      {zamenjamo barvi b1 in b2 vzdolž zaporedja pov; ker pridobi (izgubi)}
      {vsaka naslednja povezava ravno nasprotno barvo kot predhodna, vlogi barv}
      {b1 in b2 sproti zamenjujemo; indeks učitelja in razreda dobimo iz polja pov}
      for i:=1 to k do
        begin
          GRAF[pov[i].u,pov[i].r].barve:=GRAF[pov[i].u,pov[i].r].barve-[b2]+[b1];
          z:=b1; b1:=b2; b2:=z;
        end;
      {zadnji v zaporedju pov 'izgubi' barvo b1 in 'pridobi' barvo b2}
      if odd(k) then
        BARVE_R[pov[k].r]:=BARVE_R[pov[k].r] - [b1] + [b2];
      else
        BARVE_U[pov[k].u]:=BARVE_U[pov[k].u] - [b1] + [b2]
      end; {Popravi }
    end;
  end;

```

V glavnem programu nam tako ostane samo še podprogram IZPISIREZULTATE. Tega bomo prepustili vam in vaši domišljiji. Če potrebujete le enostaven izpis, bo podprogram preprost, lahko pa si predstavite rezultate tudi grafično (morda celo v barvah). Tedaj boste dobili rezultate v obliki, ki bo podobna našima primeroma na slikah 1 in 2 na zadnji strani ovitka.

Za konec povejmo še, kakšne podatke smo vstavili v program, da smo dobili prikazane rezultate. V primeru, ki je prikazan na sliki 1, smo imeli naslednjo situacijo: ST_UCITELJEV = 4, ST_RAZREDOV = 4 in

$$\text{GRAF} = \begin{pmatrix} 0 & 3 & 0 & 0 \\ 2 & 0 & 2 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 2 \\ 2 & 1 & 2 & 0 \end{pmatrix}$$

Podprogram DOLOCI_STOPNJO nam je v tem primeru izračunal, da je STOPNJA = 5.

V primeru na sliki 2 smo "delali" malce večji urnik. Podatki so bili naslednji: ST_UCITELJEV = 8, ST_RAZREDOV = 7 in

$$\begin{array}{rcl}
 & & \begin{array}{ccccccc} 2 & 0 & 1 & 0 & 1 & 2 & 0 \\ 0 & 3 & 0 & 3 & 3 & 0 & 1 \\ 2 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 4 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 2 & 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 1 & 2 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 2 & 0 & 2 & 0 & 2 \end{array} \\
 \text{GRAF} = & &
 \end{array}$$

Sami lahko preverite, da ima sedaj STOPNJA vrednost 11, zato graf lahko označimo z 11 barvami.

Niko Čížek in Sandi Klavžar

RAČUNAJMO NA PAMET

Naloga Slučaj ali pravilo (str. 321) vas je verjetno spomnila na podobno pravilo za kvadriranje števil, ki se končujejo s 5: Številu odrežemo enice, pomnožimo dobljeno z za 1 večjim številom in pripišemo 25.

$$85^2 = 7225, \text{ ker je } 8 \cdot (8 + 1) = 8 \cdot 9 = 72.$$

Morda pa ne veste, da je to le poseben primer splošnejšega pravila za množenje: Števili, ki imata vsoto enic enako 10, v ostalih števkih pa se ujemata, zmnožimo tako, da skupni začetek pomnožimo z za 1 večjim številom in dobljenemu rezultatu pripišemo produkt njunih enic.

$$62 \cdot 68 = 4216, \text{ ker je } 6 \cdot 7 = 42 \text{ in } 2 \cdot 8 = 16$$

$$113 \cdot 117 = 13221, \text{ ker je } 11 \cdot 12 = 132 \text{ in } 3 \cdot 7 = 21$$

Da pravilo res splošno velja, se lahko prepričate s podobnim računom kot v rešitvi na strani 351.

Marija Vencelj

NOVE KNJIGE

Smullyan R., OPONAŠATI OPONAŠALKO – Logične ugankе in presenetljiva pustolovščina v globine kombinatorne logike. Logika, Ljubljana 1991, 177 str. (Univerza za 21. stoletje)

Ameriškega logika Raymonda Smullyana smo doslej poznali že po štirih prevodih njegovih del v zbirki Z logiko v leto 2000: *Alica v deželi ugank*, *Šahovske skrivnosti Sherlocka Holmesa*, *Poznate naslov te knjige?* in *Dekle ali tiger*. Prav tako je dobrodošla njegova knjiga *Oponašati oponašalko*, ki hkrati uvaja novo zbirko Univerza za 21. stoletje. To bo zbirka prevodov najboljših in tudi za širši krog bralcev zanimivih del. Pričujoče delo je prevedla študentka Mateja Šajna, z razumevanjem zahtevne miselne zgradbe in s posluhom za vso duhovitost izražanja.

Prva tretjina knjige obsega raznovrstne, nadvse zanimive logične naloge. Nekatere govorijo o brivcih in so sorodne (le da so še bolj poglobljene) paradoksu brivca, ki brije natanko tiste može svojega mesteca, ki se ne brijejo sami. Druge naloge govorijo o resnicoljubnežih in lažnivcih, na primer:

1 • John, James in William

Imamo tri brate, ki jim je ime John, James in William. John in James (oba na J) vedno lažeta, William pa vedno govori resnico. Na pogled jih je nemogoče razlikovati. Nekega dne srečate na ulici enega izmed treh bratov in želite vedeti, ali je John (ker vam je John dolžan nekaj denarja). Zastavite mu lahko le eno vprašanje, na katero lahko odgovori z "da" ali "ne", vendar vprašanje ne sme vsebovati več kot treh besed! Katero vprašanje bi mu zastavili?

V nadaljnjih ugankah se nekateri resnicoljubneži (kot tudi lažnivci) v svojih sodbah vedno motijo; srečujemo tudi dnevne in nočne viteze ... dokler ne pridemo do "naduganke" o Vodnjaku mladosti.

Vsa preostala knjiga je učbenik kombinatorne logike (ki ima pomembno vlogo v računalništvu in umetni inteligenci). Osnovni pojem so kombinatorji, ki vplivajo drug na drugega, sicer pa lahko pomenijo karkoli. Tu so predstavljeni kot oglašajoče se ptice v skrivnostnem gozdu. V tem gozdu seveda čaka bralca veliko miselnih nalog.

Tem in prejšnjim nalogam so dodane podrobno izpeljane rešitve, ki so elegantni zgledi logičnega mišljenja.

Knjiga je zares primerna za vsakogar, ki se zanima za logiko: ne zahteva posebnega predznanja, zato pa kar najbolj aktivno miselno sodelovanje.

Janez Rakovec

SREDNJEŠOLSKO REPUBLIŠKO TEKMOVANJE IZ FIZIKE

Republiškega tekmovanja iz fizike za srednješolce, ki je bilo 11. maja na Gimnaziji in srednji ekonomski šoli v Brežicah, se je udeležilo 177 učencev iz 27 srednjih šol. V skupini A (mekanika) je tekmovalo 64 učencev, v B (energija) 43, v C (elektrika) 53 in v skupini D (delci in valovanja) 17 učencev. Naloge je sestavila komisija za popularizacijo fizike v srednji šoli, za njihovo reševanje so imeli učenci na voljo dve uri in pol. Medtem ko je tekmovalna komisija pregledovala naloge, so si učenci s spremstvom ogledali jedrsko elektrarno Krško. Ob zaključku je komisija razglasila rezultate in podelila nagrade in priznanja naslednjim učencem:

SKUPINA A:

- 2. nagrada: Bojan Gornik (Gimnazija Novo mesto), Gregor Veble (II. Gimnazija Maribor)
- 3. nagrada: Gregor Stražar (Gimnazija Bežigrad), Mitja Kit (II. Gimnazija Maribor)
- pohvale: Borut Kerševan (Gimnazija Bežigrad), Mitja Mastnak (STŠ Celje), Mitja Nasran, Aleša Lotrič (Gimnazija Kranj), Jakob Fric (Gimnazija Brežice), Marko Kranjc (II. Gimnazija Maribor), Damjan Škulj (Gimnazija Brežice), Jure Zupan (Gimnazija Bežigrad), David Gorišek (II. Gimnazija Maribor), Dominik Benkovič (SCTPU Murska Sobota)

SKUPINA B:

- 2. nagrada: Alan Gregorovič (Gimnazija Koper)
- 3. nagrada: Krešimir Macan, Tadej Mali (Gimnazija Bežigrad), Matjaž Kotnik (II. Gimnazija Maribor)
- pohvale: Tomaž Cedilnik, Gregor Šega (Gimnazija Bežigrad), Robi Mohorčič (Gimnazija Novo mesto), Damjan Demšar (CSUI Jesenice), Marko Kukrika, Mojca Vilfan (Gimnazija Bežigrad), Damjan Vodopivec (NSC Nova Gorica)

SKUPINA C:

- 1. nagrada: Roni Leben (Gimnazija Bežigrad)
- 2. nagrada: Gregor Skačej (II. Gimnazija Maribor), Darko Veberič (SCTPU Murska Sobota), Matjaž Kobal (Gimnazija Bežigrad)
- 3. nagrada: Klemen Kočevar (Gimnazija Bežigrad), Sašo Blažič (SŠDTU Črnomelj), Marko Golčnik (STŠ Celje), Tomaž Žagar (Gimnazija Bežigrad)
- pohvale: Drago Rijavec (TŠCB B.Brelj N.Gorica), Peter Žiger (II. Gimnazija Maribor)

SKUPINA D:

- 3. nagrada: Borut Horvat (II. Gimnazija Maribor)
- pohvala: Luka Hribar (SEŠ Ljubljana)
- Komisija je za zvezno tekmovanje v Makedoniji izbrala 5 učencev, ki pa se zaradi negotovega varnostnega položaja v državi tekmovanja niso mogli udeležiti.

Naloge:

SKUPINA A - MEHANIKA

1. Na idealno gladki vodoravni podlagi stojita dve posodi, ki imata obliko pokončnih valjev. Med seboj sta toga povezani s 5 cm dolgo tanko cevjo. Prva posoda je do višine 50 cm napolnjena z vodo, druga pa je prazna. Za koliko se premakneta posodi, ko odpremo ventil? Polmer osnovne ploskve prve posode je 40 cm, druge 25 cm, masa prve posode je 4 kg, druge pa je 10 kg.
2. Spodnje krajišče lahke letve je pritrjeno na tla, zgornje pa je položeno na plašč valja z maso 1 kg, pri čemer je kot med letvijo in tlemi 30° . Dolžina letve od točke, v kateri se dotika valja, do točke, v kateri se dotika tal, je a . Na razdalji $a/2$ od spodnjega krajišča položimo na letev utež z maso 2 kg. Kolikšen mora biti najmanj koeficient trenja med valjem in podlago, da valj ne zdrsne? Koeficient trenja med valjem in letvijo je dovolj velik, da tu valj ne zdrsne.
3. Obroč s polmerom R se vrti okoli navpične osi s kotno hitrostjo ω . Po njem lahko brez trenja drsi majhen prstan z maso m . Določi ravnovesne lege prstana na obroču v odvisnosti od ω ! Katere od teh leg so stabilne, katere labilne?
4. Tovornjak z dvojnimi zadnjimi gumami vozi s hitrostjo 50 kmh^{-1} po ravni cesti. Med zadnji gumi tovornjaka se vtisne kamen, ki v nekem trenutku odleti. Kolikšna naj bo varnostna razdalja avtomobila, ki vozi za tovornjakom, da kamen ne bo zadel avtomobila?

SKUPINA B - ENERGIJA

1. Avtomobilsko dvigalo je sestavljeno iz štirih prečk, ki so povezane v romb, ter vijaka med njimi. Dolžina prečke je l , hod vijaka je d . S kolikšnim navorom moramo vrteti vijak, da počasi dvigujemo avto, če je dvigalo obremenjeno s silo F pri višini dvigala h ?
2. Na sredini 15 cm dolge steklene cevke, ki je na obeh krajiščih zaprta, miruje kapljica živega srebra z maso 0,2 g. Premer cevke je 3 mm, tlak v cevki pa je 10^4 Pa . S kolikšno frekvenco moramo vrteti cevko okoli navpične osi, ki gre skozi krajišče cevke, da se kapljica premakne za 1,5 cm? Proces poteka pri konstantni temperaturi.

3. Soba ima 0,4 m debele stene s površino 50 m^2 in toplotno prevodnostjo $0,1 \text{ Wm}^{-1}\text{K}^{-1}$. V sobi je idealni hladilnik z 2 cm debelimi stenami s površino 5 m^2 in toplotno prevodnostjo $0,4 \text{ Wm}^{-1}\text{K}^{-1}$. Temperatura zunaj sobe je konstantna in je 300 K.
 - a) Kolikšna je temperatura v hladilniku po daljšem času, če je moč hladilnika 200 W?
 - b) Kolikšna je najnižja temperatura, ki jo lahko vzdržujemo v hladilniku, če lahko moč poljubno izbiramo? Namig: zapiši, kako se moč izraža s temperaturo in pogledaj, kaj se dogaja z rešitvami dobljene enačbe!
4. Dve aluminijasti plošči, ki sta postavljeni ena nad drugo, imata enaki masi po 10 kg in enaka vztrajnostna momenta $2,5 \text{ kgm}^2$. Vrtita se okrog geometrijskih osi v nasprotnih smereh, zgornja s frekvenco 50 s^{-1} , spodnja pa s frekvenco 52 s^{-1} . Osi vrtenja obeh plošč sovpadata. Kolikšna je končna frekvenca obeh plošč skupaj, ko zgornjo ploščo spustimo na spodnjo? Ocenite, kolikšno napako naredimo, če ne upoštevamo, da se plošči pri tem segrejeta! Specifična toplota aluminija je $880 \text{ Jkg}^{-1}\text{K}^{-1}$, linearni razteznostni koeficient pa je $25 \cdot 10^{-6} \text{ K}^{-1}$.

SKUPINA C - ELEKTRIKA

1. Med dve kovinski krogli z radijema 1 cm in 2 cm v razdalji 100 cm priključimo baterijo z napetostjo 10 V. Kolikšna je električna sila med kroglicama? Vpliv vodnikov lahko zanemarimo. Kapaciteta krogle z radijem r je $4\pi\epsilon_0 r$.
2. Ploščat kondenzator s kvadratnima ploščama s stranico 25 cm in razmikom med ploščama 3 cm priključimo na generator enosmerne napetosti z gonilno napetostjo 2000 V. Na sredino med plošči postavimo posodo iz izolatorja z zelo tankimi stenami in dimenzijami $1 \text{ cm} \times 25 \text{ cm} \times 25 \text{ cm}$. V posodo začnemo vlivati vodo s stalnim prostorninskim tokom $10 \text{ cm}^3\text{s}^{-1}$. Kolikšen tok teče skozi generator in v katero smer? Dielektrična konstanta vode je 81.
3. Na kvadraten okvir s stranico 10 cm navijemo 100 ovojev žice z uporom 100Ω in med njena konca priključimo idealno diodo. vzporedno z osjo tuljave je magnetno polje z gostoto 1 T in z ravno mejo. Na začetku ena od stranic tuljave leži na meji polja. Kolikšen povprečni tok teče po tuljavi, ko jo vrtimo s frekvenco 100 Hz okrog geometrijske osi, ki je pravokotna na ravnino okvira? Upor diode v prevodni smeri je zanemarljivo majhen.

4. Teflonska cev s tankimi stenami ima premer 4 dm, na njej je enakomerno porazdeljen naboj s površinsko gostoto $5 \cdot 10^{-3} \text{ Asm}^{-2}$. Znotraj cevi je kratko sklenjena tuljava s 1000 ovoji, premerom 2 dm in uporom $0,1 \Omega$ tako, da njena os sovпада z osjo cevi. Kolikšen tok teče po tuljavi, ko se začne cev vrteti okrog svoje osi s kotnim pospeškom 1 s^{-2} ?

SKUPINA D - VALOVANJE IN DELCI

1. V zamišljenem poskusu preko laserskega žarka pravokotno prileti s hitrostjo $0,01 \text{ c}$ 1 cm debela steklena plošča. Za koliko se pri tem premakne žarek, ki izstopa iz plošče? Lomni količnik stekla je $1,5$, c je hitrost svetlobe v vakuumu.
2. Svetlobni lijak ima obliko priskekanega stožca z idealno odbojno notranjo površino. Polmer manjše odprtine je 2 cm, polmer večje pa je 20 cm. Plašč stožca je za 12° nagnjen glede na os. Lijak obrnemo z večjo odprtino proti Soncu tako, da padajo žarki vzporedno z osjo. Kolikšen svetlobni tok teče skozi manjšo odprtino? Gostota svetlobnega toka s Sonca je 1 kWm^{-2} .
3. Sončna svetloba pada pravokotno na deževno čelo. Opazovalec, ki gleda v smeri dežja, je od deževnega čela oddaljen 100 m.
 - a) Kolikšna je zgornja višina primarne mavrice H ?
 - b) Kolikšna je širina vidnega dela svetlobe v primarni mavrici?
 Za primarno mavrico velja, da se svetloba znotraj kapljice odbije enkrat. Vpadni kot svetlobe na kapljico za primarno mavrico je α : $\sin \alpha = \sqrt{(4 - n_\lambda^2)/3}$, kjer je n_λ lomni količnik svetlobe v vodi. Za rdečo svetlobo je $n_{\text{rdeča}} = 1,331$, za vijolično svetlobo pa $n_{\text{vijolična}} = 1,344$.
4. Počrnjen balon kroži po elipsi okrog Sonca. Največja razdalja od Sonca je $150 \cdot 10^6 \text{ km}$, najmanjša pa $75 \cdot 10^6 \text{ km}$. Moč Sonca je $4 \cdot 10^{26} \text{ W}$. Za koliko cm se pri kroženju spreminja radij balona, če je največji radij 1 m? Tlak v balonu je odvisen od radija balona in površinske napetosti γ snovi, iz katere je balon: $p = 4\gamma/r$.

Iztok Kukman

PRAŠTEVILI

Le dve praštevili sta taki, da ima njuna recipročna vrednost, zapisana kot decimalno število, periodo dolžine 7. Poišči ju.

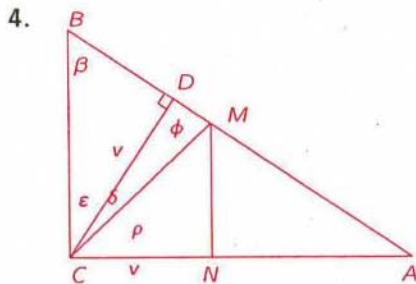
Darjo Felda

REŠITVE NALOG

22. ZVEZNO TEKMOVANJE OSNOVNOŠOLCEV IZ MATEMATIKE – Rešitve s str. 300

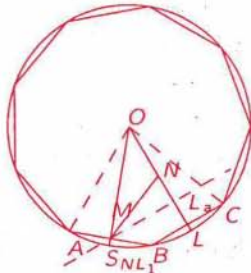
7. razred

- Število 1991 bi lahko ostalo le, če bo zbrisano v zadnjem paru in če je absolutna vrednost razlike predzadnjega para enaka 0. Ker 1990 ni deljivo s 4, se to ne bo zgodilo, zato na tabli ne more ostati 1991.
- Iz pogoja $\frac{1}{3} < \frac{a}{b} < 1$ dobimo $a < b < 3a$. Prva lastnost nam da enačbo $\frac{a+x}{bx} = \frac{a}{b}$, od koder sledi $a+x = ax$. Edina rešitev te enačbe je $a = 2$ in $x = 2$ in zaradi $a < b < 3a$ je $b \in \{3, 4, 5\}$. Ker velja še $D(a, b) = 1$, je $b \in \{3, 5\}$. Tako dobimo ulomka $\frac{2}{3}$ in $\frac{2}{5}$.
- Če je $t \geq 1$, je očitno $P(t) > 0$. Če je $t \leq 0$, sta $-t$ in t^4 nenegativna, zato je spet $P(t) > 0$. Naj bo sedaj $0 < t < 1$. Izberimo $k = \frac{1}{t} > 1$. Tedaj je $(\frac{1}{k})^4 - \frac{1}{k} = \frac{1}{k^4} - \frac{1}{k} = \frac{1-k^3}{k^4}$. Zaradi $k^4 = k \cdot k^3 > 2 \cdot |1-k^3|$ je $\frac{k^4}{|1-k^3|} > 2$ in $\frac{|1-k^3|}{k^4} < \frac{1}{2}$. To pomeni $|t^4 - t| < \frac{1}{2}$ in zato je tudi tedaj $P(t) > 0$. Ker velja $P(t) > 0$, velja tudi $P(t) \neq 0$.



Najprej je $\varepsilon = 90^\circ - \beta$ in zaradi $\overline{CB} = \overline{BM}$ tudi $\varphi = \frac{180^\circ - \beta}{2} = 90^\circ - \frac{\beta}{2}$, nato pa $\delta = 90^\circ - \varphi = \frac{\beta}{2}$. Prav tako je $\rho = 90^\circ - \varepsilon - \delta = \frac{\beta}{2}$. Ker je $\rho = \delta$ in $\overline{CN} = \overline{CD}$ in $\overline{CD} = \overline{CM}$, sta trikotnika $\triangle CNM$ in $\triangle CDM$ skladna, zato je tudi $\sphericalangle CDM = \sphericalangle CNM = 90^\circ$.

5.



Najprej vidimo $\sphericalangle MON = 360^\circ : 9 = 40^\circ$. Ker je $\overline{OM} = \overline{OL_1}$, je $\sphericalangle OL_1M = (180^\circ - 40^\circ) : 2 = 70^\circ = \sphericalangle OML_1$. Konstruirajmo simetralo daljice NL_1 . Vidimo, da je $M \in s_{NL_1}$. Zato je $\overline{ML_1} = \overline{MN}$ in $\sphericalangle ML_1N = \sphericalangle MNL_1 = 70^\circ$. Tako je $\sphericalangle MNO = 110^\circ$ in tedaj $\sphericalangle OMN = 30^\circ$.

8. razred

1. Zaporedna naravna števila so $a_0, a_1 = a_0 + 1, a_2 = a_1 + 1 = a_0 + 2, \dots, a_n = a_{n-1} + 1 = a_0 + n$. Zato je $1991 = a_0 + a_1 + a_2 + \dots + a_n = a_0 + a_0 + 1 + a_0 + 2 + \dots + a_0 + n = (n+1)a_0 + \frac{n(n+1)}{2} = \frac{n+1}{2}(2a_0 + n)$. Od tod dobimo $3982 = (n+1)(2a_0 + n)$ ali $2 \cdot 11 \cdot 181 = (n+1)(2a_0 + n)$. Od tod vidimo, da je lahko $n = 1$ ali $n = 10$. Število 1991 lahko zapišemo kot vsoto dveh ali enajstih zaporednih naravnih števil, torej na dva načina.

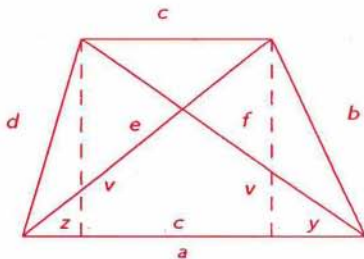
2. Izraz zapišimo malo drugače $a^2 - 1 = 1 \overbrace{0 \dots 0}^{1990} 5 \cdot \overbrace{1 \dots 1}^{1991}$. Tako je $(10^{1991} + 5) \cdot \overbrace{1 \dots 1}^{1991} \cdot 9 : 9 = (10^{1991} + 5) \cdot \overbrace{9 \dots 9}^{1991} : 9 = (10^{1991} + 5) \cdot (10^{1991} - 1) : 9 = \frac{10^{1991} + 5}{3} \cdot \frac{10^{1991} - 1}{3}$. Imamo torej $a + 1 = \frac{10^{1991} + 5}{3}$ in $a - 1 = \frac{10^{1991} - 1}{3}$, zato $3a + 3 = 10^{1991} + 5$ in $3a - 3 = 10^{1991} - 1$ oziroma $6a = 2 \cdot 10^{1991} + 4$, od tod pa $a = \frac{10^{1991} + 2}{3} = \overbrace{3 \dots 3}^{1990} 4$.

3. Sestavimo tabelo:

število dni	količina vse vode	količina popite vode
1	$a + b$	$\frac{a+b}{183}$
5	$a + 5b$	$\frac{a+5b}{37}$
x	$a + xb$	$a + xb$

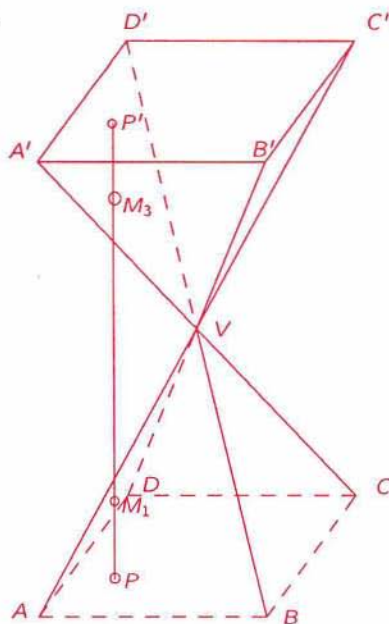
Iz enačbe $\frac{a+b}{183} = \frac{a+5b}{5 \cdot 37}$, sledi $b = \frac{a}{365}$. To vstavimo v enačbo $\frac{a+b}{183} = \frac{a+xb}{x}$, pa imamo rešitev $x = 365$, kar pomeni, da bi en konj popil vso vodo v enem letu.

- 4.



Najprej vidimo $d^2 = v^2 + z^2$ in $b^2 = v^2 + y^2$, nato pa še $e^2 = v^2 + (c+z)^2 = v^2 + c^2 + 2cz + z^2$ in $f^2 = v^2 + (c+y)^2 = v^2 + c^2 + 2cy + y^2$. Ko seštejemo zadnji dve enačbi, dobimo $e^2 + f^2 = b^2 + d^2 + 2c^2 + 2c(y+z) = b^2 + d^2 + 2ac$, kar je bilo treba dokazati.

5.



Naj bosta M_1 in M_2 točki, v katerih dana pravokotnica prebada ravnini skozi sosednji mejni ploskvi piramide. Piramido prezrcalimo preko ravnine, ki gre skozi njen vrh in je vzporedna osnovni ploskvi. Tedaj je $M'_1 = M_3$ in $M'_2 = M_4$. Zato je $\overline{PM_3} + \overline{M_3P'} = \overline{PM_3} + \overline{PM_1} = 2v$ in $\overline{PM_4} + \overline{P'M_4} = \overline{PM_4} + \overline{PM_2} = 2v$, od tod pa takoj sledi $\overline{PM_1} + \overline{PM_2} + \overline{PM_3} + \overline{PM_4} = 4v$.

Aleksander Potočnik

SISTEMI LINEARNIH ENAČB – Rešitve s str. 166

1. $4\frac{3}{8}$, $4\frac{1}{8}$
2. 42, 40
3. 20, 10
4. 36, 24
5. 15120, 20000, 300000, 42336
6. 40, 170
7. 120, 10

V uredništvo revije je prispelo tudi nekaj pisem z odgovori bralcev. Ocenili smo, da je med osnovnošolci naloge najbolje rešil *Bojan Pavšič* iz Maribora, med srednješolci pa *Stojan Rančič* iz Ljubljane. Oba sta zato že prejela knjižni nagradi. Čestitamo.

PETKOTNI TANGRAMSKI LIKI – Rešitev s str. 290

Zaporedje 32322 nam pove, da je iskani petalí hkrati tudi kotalí. Zadošča torej preleteti zbirko vseh kotalíjev v 4. številki preseka. Tam najdemo tale petalí:

Vilko Domajnko



SIRIJ – Rešitve s str. 276

1. Gostota svetlobnega toka v razdalji r od zvezde je $j = P/4\pi r^2$. Izsev Sirija je $P = j \cdot 4\pi r^2 = 10^{-7} \text{ W/m}^2 \cdot 4\pi (9 \cdot 10^{16} \text{ m})^2 = 10^{28} \text{ W}$. Kvocien izsefov Sirija in Sonca je $P/P_0 = 10^{28} \text{ W} / 4 \cdot 10^{26} \text{ W} = 25$. Sirij oddaja v prostor okoli 25 krat več svetlobe kot Sonce.

2. Kvocien sprejetih gostot svetlobnih tokov s Sirija A in Sirija B je enak kvocientu izsefov Sirija A in Sirija B, torej $j_A/j_B = P_A/P_B = 10^4$.

3. Gostoto ρ izračunaš tako, da maso m telesa deliš z njegovo prostornino V . Kvocien povprečnih gostot Sirija B in Sonca je:

$$\begin{aligned} \rho/\rho_0 &= (m/V)/(m_0/V_0) = (m_0/4\pi R^3)/(m_0/4\pi R_0^3) = \\ &= (R_0/0,01R_0)^3 = 10^6 \text{ in } \rho = 10^6 \cdot 1400 \text{ kg/m}^3 = 1400 \text{ kg/cm}^3. \end{aligned}$$

En cm^3 bi tehtal toliko kot osebni avto.

Marijan Prosén

TELEFONSKA ŠTEVILKA MOJE MAME –
Rešitev s str. 266

Skupno imamo 90000 različnih petmestnih števil. Ker dobimo na vprašanje odgovor da ali ne, lahko ločimo ta števila na dve enaki skupini in tako nam ostane še skupina 45000 števil. Z drugim vprašanjem lahko to skupino razpolovimo in dobimo skupino 22500 števil. Ta postopek ponavljamo, dokler ne pridemo do konca. Število potrebnih korakov je najmanjše naravno število n , ki reši neenakost $2^n > 90000$. S pomočjo žepnega računalnika ali z malce vztrajnosti vidimo, da moramo zastaviti 17 vprašanj.

Spraševanje bi bilo lahko na primer takšno:

Vprašanje:

Odgovor:

Ali je številka večja od 50000?	Ne.
Ali je številka večja od 25000?	Da.
Ali je številka večja od 37500?	Da.

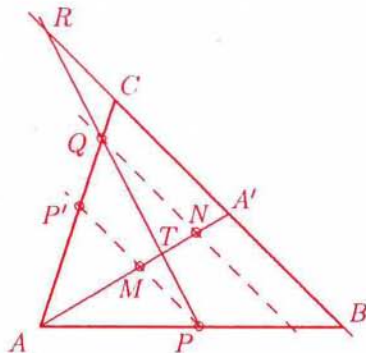
In tako naprej, dokler ne izveste prave številke.

Borut Zalar

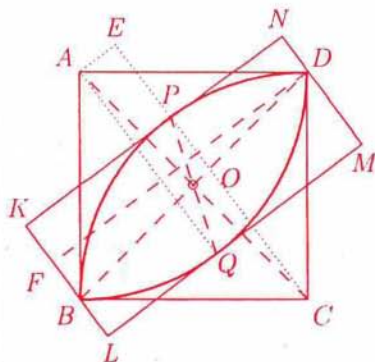
32. ZVEZNO TEKMOVANJE SREDNJEŠOLCEV IZ MATEMATIKE – Rešitve s str. 302

Prvi letnik

1. Naj bo AA' težiščnica trikotnika $\triangle ABC$ in naj premici skozi P in Q , vzporedni z BC , sekata AA' v točkah M in N . Premica skozi P naj seka stranico AC v točki P' . Iz $\frac{TN}{TM} = \frac{QN}{PM} = \frac{QN}{P'M} = \frac{NA}{MA} = \frac{TN+TA}{TA-TM} = \frac{TN+2TA'}{2TA'-TM}$ izpeljemo $\frac{TN}{TM} = 1 + \frac{TN}{TA'}$. Upoštevamo še, da $\frac{TN}{TM} = \frac{TQ}{TP}$ in $\frac{TN}{TA'} = \frac{TQ}{TR}$, pa imamo $\frac{TQ}{TP} = 1 + \frac{TQ}{TR}$. Dobljena enakost je ekvivalentna enakosti, ki jo je treba dokazati.



2. Dokazali bomo, da imajo vsi pravokotniki, očrtani liku $\mathcal{F}$, tak obseg kot kvadrat. Očrtani pravokotnik $KLMN$ naj se dotika lika $\mathcal{F}$ v točkah B , Q , P in D . (Glej skico!) Naj bo AE pravokotnica iz A na CP in DF pravokotnica iz D na KL . Kota $\angle ACE$ in $\angle BDF$ sta enaka, saj imata pravokotna kraka. Hipotenuzi pravokotnih trikotnikov $\triangle ACE$ in $\triangle BDF$ sta diagonali kvadrata, zato sta trikotnika skladna. Torej: $KN = FD = EC$. Od tod pa že lahko izpeljemo $KN + NM = EC + NM = CP + AQ = 2a$, kjer je a stranica kvadrata.



3. Predpostavimo, da se vsako število k , $k \in \{1, 2, \dots, n\}$ v zaporedju dolžine $2n$ pojavi natančno dvakrat: prvič na mestu m_k , drugič pa na mestu $m_k + k$. Iz enakosti $1 + 2 + \dots + 2n = (m_1 + (m_1 + 1)) + (m_2 + (m_2 + 2)) + \dots + (m_n + (m_n + n))$ izpeljemo $m_1 + m_2 + \dots + m_n = \frac{1}{2}(1 + 2 + \dots + 2n) - \frac{1}{2}(1 + 2 + \dots + n) = \frac{1}{2}(\frac{2n(n+1)}{2} - \frac{n(n+1)}{2}) = \frac{n(3n+1)}{4}$. Pri $n \equiv 2 \pmod{4}$ ali $n \equiv 3 \pmod{4}$ število $n(3n+1)$ ni deljivo s 4 in predhodna relacija ni mogoča. Tako zaporedje ne obstaja, ker je $1991 \equiv 3 \pmod{4}$.

4. Vpeljimo oznaki za aritmetično in kvadratno sredino števil a in b :

$A = \frac{a+b}{2}$, $K^2 = \frac{a^2+b^2}{2}$. Računajmo: $ab = 2A^2 - K^2$, $(a^2 - b^2)^2 = (a+b)^2(a^2 + b^2 - 2ab) = 16A^2(K^2 - A^2)$. Neenakost, ki jo je treba dokazati, je torej

$$\frac{3}{4}A^2(K^2 - A^2) + \frac{2A^2 - K^2}{2A} \geq \frac{K}{2},$$

pri pogoju $K \geq A \geq 1$. Ta neenakost je ekvivalentna z neenakostjo $3A^3(K-A)(K+A) \geq 2(K-A)(K+2A)$, ki drži, saj je $A^3 \geq 1$, $K-A \geq 0$ in $3(K+A) \geq 2(K+2A)$.

Drugi letnik

1. Predpostavimo, da se nobeno dotikališče kroga in kvadrata ne ujema s kakšnim dotikališčem kroga in trikotnika. Potem obstaja oglišče kvadrata (označimo ga z B) v notranjosti trikotnika. Dokazali bomo, da je dolžina tistega dela kvadrata, ki se nahaja znotraj trikotnika, večja od 2.2.

Označimo točke tako, kot kaže skica. Potem je treba dokazati $\overline{M_2M_3} + \overline{M_4M_5} + \overline{M_6K_2} + \overline{K_2B} + \overline{BK_1} + \overline{K_1M_1} > 2.2$. Z upoštevanjem enakosti tangentialnih odsekov in zveze $\overline{K_2B} + \overline{BK_1} = 1$ nam torej zadošča dokazati le:

$$\overline{M_1M_2} + \overline{M_3M_4} + \overline{M_5M_6} > 1.2.$$

Dokazali bomo nekaj več: $\overline{M_1M_2} > 0.4$,

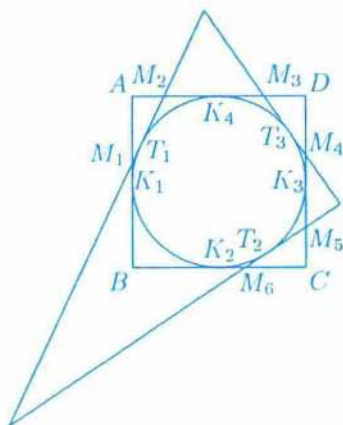
$$\overline{M_3M_4} > 0.4, \quad \overline{M_5M_6} > 0.4.$$

Označimo $\overline{M_1K_1} = x$. Potem je $\overline{M_1M_2} = \frac{4x^2 + 1}{4x + 2}$. Očitno

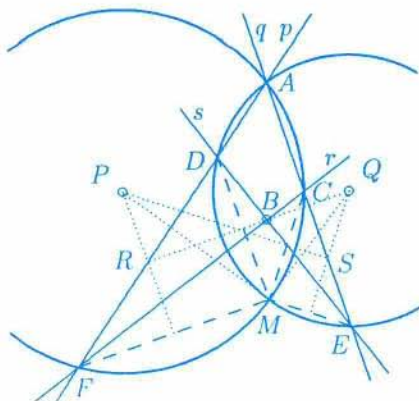
$$\frac{4x^2 + 1}{4x + 2} > 0.4 \iff \left(x - \frac{1}{5}\right)^2 + \frac{1}{100} > 0.$$

Analogno dokažemo še $\overline{M_3M_4} > 0.4$ in $\overline{M_5M_6} > 0.4$.

V primeru $\{K_1, K_2, K_3, K_4\} \cap \{T_1, T_2, T_3, T_4\} \neq \emptyset$, pa je neenakosti tem bolj zadoščeno.



2. a) Naj se dane premice p, q, r, s sekajo v točkah A, B, C, D, E, F in naj bo M drugo presečišče krožnic, očrtanih trikotnikoma $\triangle ACF$ in $\triangle ADE$. (Glej sliko!) Z upoštevanjem enakosti obodnih kotov nad ustreznimi loki lahko zapišemo: $\angle BCM = \angle FCM = \angle FAM = \angle DAM = \angle DEM = \angle BEM$, od koder sledi, da je štirikotnik $ECBM$ tetiven in zato leži točka M na očrtani krožnici trikotnika $\triangle BCE$. Podobno dokažemo še, da točka M leži na očrtani krožnici trikotnika $\triangle BDF$.



b) Središča P, Q, R, S krogov, očrtanih trikotnikom $\triangle ACF, \triangle ADE, \triangle BDF, \triangle BCE$, ležijo zaporedoma na simetralah daljic MC, MD, ME, MF . Zaradi $\angle RPS = \frac{1}{2}\angle FPC = \angle FAC = \angle DAE = \frac{1}{2}\angle DQE = \angle RQS$ ležijo točke P, Q, R, S na isti krožnici $\mathcal{K}$. Zaradi $\angle MPS = \frac{1}{2}\angle MPC = \angle MAC = \angle MAE = \frac{1}{2}\angle MQE = \angle MQS$ pa ležijo točke M, P, Q, S na isti krožnici. Torej $M \in \mathcal{K}$.

3. Za poljubni pozitivni realni števili x in y zapišimo očitno neenakost $(x+y) \cdot (x-y)^2 \geq 0$ in jo preoblikujemo v $x^3 + y^3 + xyz \geq xy(x+y+z)$. Pri pozitivnem realnem z je ta neenakost enaka $\frac{1}{x^3+y^3+xyz} \leq \frac{1}{xy(x+y+z)}$, kjer velja enakost natanko tedaj, ko $x = y$. Sledi $\frac{1}{a^3+b^3+abc} + \frac{1}{b^3+c^3+abc} + \frac{1}{c^3+a^3+abc} \leq \frac{1}{a+b+c} \left(\frac{1}{ab} + \frac{1}{bc} + \frac{1}{ca} \right) = \frac{1}{abc}$. Enakost velja natanko tedaj, ko $a = b = c$.

4. Ker je vseh mogočih spajanj z n daljicami, ki vsaka povezuje eno rdečo in eno modro točko, končno (takšnih spajanj je $n!$), obstaja vsaj eno, pri katerem je vsota dolžin vseh daljic najmanjša. Recimo, da se daljici R_1M_1 in R_2M_2 sekata. Potem je štirikotnik $M_1M_2R_1R_2$ neizrojen in v njem velja $\overline{M_1R_1} + \overline{M_2R_2} > \overline{M_1M_2} + \overline{R_1R_2}$. Protislovje dokazuje, da smo našli tako spajanje, ki zadošča pogoju naloge.

Tretji in četrti letnik

1. Če je a sodo število, ni kaj dokazovati. Zapišimo torej liho število a po dvojiško: $a = \dots 0 \underbrace{1 \dots 1}_k (2) = R_1 2^{k+1} + 2^k - 1$. Na zadnjih k mestih v dvojiškem zapisu se torej pojavijo le enke, pred tem pa stoji 0; R_1 je lahko

tudi 0. Izračunajmo nekaj zaporednih členov:

$$\begin{aligned}x_1 &= 2^{k+1}R_1 + 2^k - 1 \\x_2 &= \frac{3x_1 + 1}{2} = (3R_1 + 1)2^k + 2^k - 1 = 2^k R_2 + 2^{k-1} - 1 \\x_3 &= 2^{k-1}R_3 + 2^{k-2} - 1 \\&\vdots \\x_n &= 2^{k-n+2}R_n + 2^{k-n+1} - 1.\end{aligned}$$

Torej je $x_k = 4R_k + 1$ in je zato število $x_{k+1} = 6R_k + 2$ sodo.

2. Predpostavimo najprej, da leži na zadnjem mestu število k , $k \notin \{1, n\}$. Množico $\{1, 2, \dots, n\} \setminus \{k\}$ razdelimo na disjunktni množici

$\mathcal{A} = \{1, 2, \dots, k-1\}$ in $\mathcal{B} = \{k+1, k+2, \dots, n\}$. Ločimo dve možnosti:

(a) Na prvem mestu je element iz $\mathcal{A}$.

(b) Na prvem mestu je element iz $\mathcal{B}$.

V prvem primeru takoj uvidimo, da se mora $k+2$ nahajati nekje pred $k+1$, saj leži k na zadnjem mestu. Analogno zaključimo, da se mora $k+3$ nahajati nekje pred $k+2$. To pa že pomeni, da se na prvem mestu nahaja n in prva možnost zato odpade. S podobnim razmislekom ovržemo tudi drugo možnost. Predpostavka, da leži na zadnjem mestu število k , $k \notin \{1, n\}$, je torej napačna.

Števila vseh permutacij nam sedaj ni težko izračunati. Za izbor števila na zadnjem mestu imamo dve možnosti (1 ali n). Ko smo izbrali to število, lahko na predzadnje mesto postavimo največje ali najmanjše število izmed preostalih $n-1$ zaporednih števil. To pa pomeni, da imamo za vsako mesto razen prvega dve možnosti. Vseh permutacij z zahtevano lastnostjo je torej

$$\underbrace{2 \cdot 2 \cdot \dots \cdot 2}_{n-1} = 2^{n-1}.$$

3. Označimo $|\alpha| = m > 0$ in si ogledjmo polinom

$$g(x) = f(x)(1-x) = a_n + (a_{n-1} - a_n)x + \dots + (a_0 - a_1)x^n - a_0x^{n+1}$$

Računajmo:

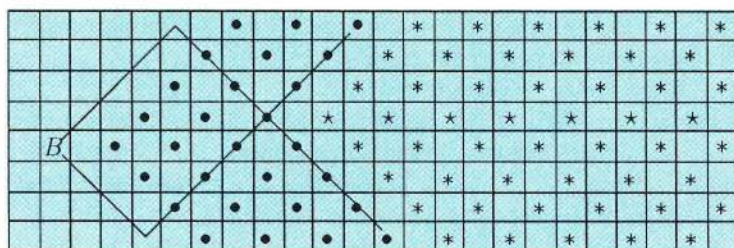
$$\begin{aligned}|g(x)| &= |a_n + (a_{n-1} - a_n)\alpha + \dots + (a_0 - a_1)\alpha^n - a_0\alpha^{n+1}| \\&\geq a_0m^{n+1} - |a_n + (a_{n-1} - a_n)\alpha + \dots + (a_0 - a_1)\alpha^n - a_0\alpha^{n+1}| \\&\geq a_0m^{n+1} - m^n(a_n + a_{n-1} - a_n + \dots + a_0 - a_1) \\&= a_0m^n(m-1) > 0\end{aligned}$$

Iz $|f(\alpha)| \cdot |\alpha - 1| > 0$ zaradi $m > 1$ sledi $f(\alpha) \neq 0$

4. Z B označimo polje, kjer se nahaja beli lovec; z $*$, $*$ in $\bullet$ pa označimo polja, kjer se lahko nahaja črni lovec, kot kaže skica. Če se beli lovec nahaja ob spodnjem ali zgornjem robu table, se "zgornja" in "spodnja" pot belega ne sekata (ena od teh dveh poti namreč ne obstaja) in zato označimo vsa polja desno od omenjenega območja z $*$. Ločimo tri primere:

(a) Če se črni lovec nahaja na polju $\bullet$, beli zmaga v naslednji potezi.

(b) Če se črni lovec nahaja na polju $*$, beli igra tako, da se število polj $*$ zmanjša. Če se pri tem črni znajde na polju $*$, se lahko z naslednjo potezo premakne na $\bullet$ (in beli zmaga v naslednji potezi), ali se pa premakne na $*$ (in beli postopa kot prej). Če pa se črni ne premakne s polj $*$, ga lahko beli privede v položaj, da mora stopiti na polje $*$, pri čemer v tabeli ni nobenega polja označenega z $*$. Tudi v tem primeru beli zmaga.



(c) Če pa se črni lovec nahaja na polju $*$, beli v prvi potezi ne more postaviti svojega lovca pod udar črnega lovca; Po potezi belega pa lahko črni premakne svojega lovca s polja $*$ in uporabi strategijo belega iz točke (b). V tem primeru črni zmaga.

Ker je na potezi beli in se črni nahaja na polju $*$, je začetna pozicija tipa (c). Po opisani strategiji lahko črni zmaga.

Matjaž Željko

JOHN, JAMES IN WILLIAM – Rešitev s str. 359

Edino vprašanje iz treh besed, ki se ga lahko spomnim in ki ustreza, je "Si ti James?". Če nagovarjate Johna, bo pritrdil, saj John laže, medtem ko bosta tako James kot William zanikala - James zato, ker laže, William pa zato, ker govori resnico. Torej odgovor "da" pomeni, da je ogovorjeni John, odgovor "ne" pa, da ni John.

PRESKUSI SE IN REŠI A ALI B NALOGO – Rešitev s strani 287

A

1. -21 2.a) $2a(3-a)$ b) $(5a+3)^2$ 3.a) $\frac{7}{11}$ b) $\frac{3a^2+a}{9a^2+3a+1}$ c) $\frac{a-8}{a+4}$
 4. Disjunkcija je nepravilna, ker sta obe izjavi nepravilni.

B

1. -27 2.a) $(3a+5)^2$ b) $3a(2-a)$ 3.a) $\frac{11}{7}$ b) $\frac{4a^2-2a+1}{2a^2-a}$ c) $\frac{a-8}{a+4}$
 4. Konjunkcija je pravilna, ker sta obe izjavi pravilni.

Franc Oblak

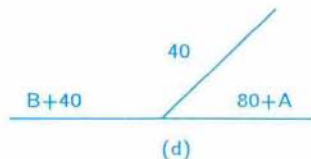
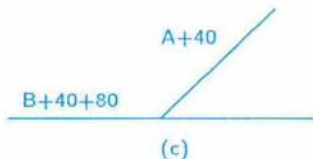
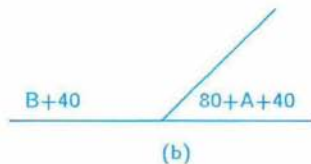
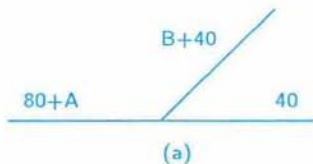
SREČANJE VLAKOV - Rešitev s str. 261

1. Lokomotiva B pelje 40 vagonov na stranski tir; 40 jih ostane na desni (slika a).

2. A pelje svojih 80 vagonov čez križišče in priklopi še 40 vagonov, ki jih je B prej pustil na progi. B zapusti slepi tir (slika b).

3. A zapelje s 120 vagoni čez križišče na levo stran; na levi pusti 80 lastnih vagonov, z ostalimi 40 B-jevimi vagoni pa zapelje na slepi tir (slika c).

4. Lokomotiva A pusti 40 B-jevih vagonov na stranskem tiru, pobere svoje vagone in krene na desno stran. Lokomotiva B s 40 vagoni priklopi še ostalih 40 vagonov in krene na levo (slika d).

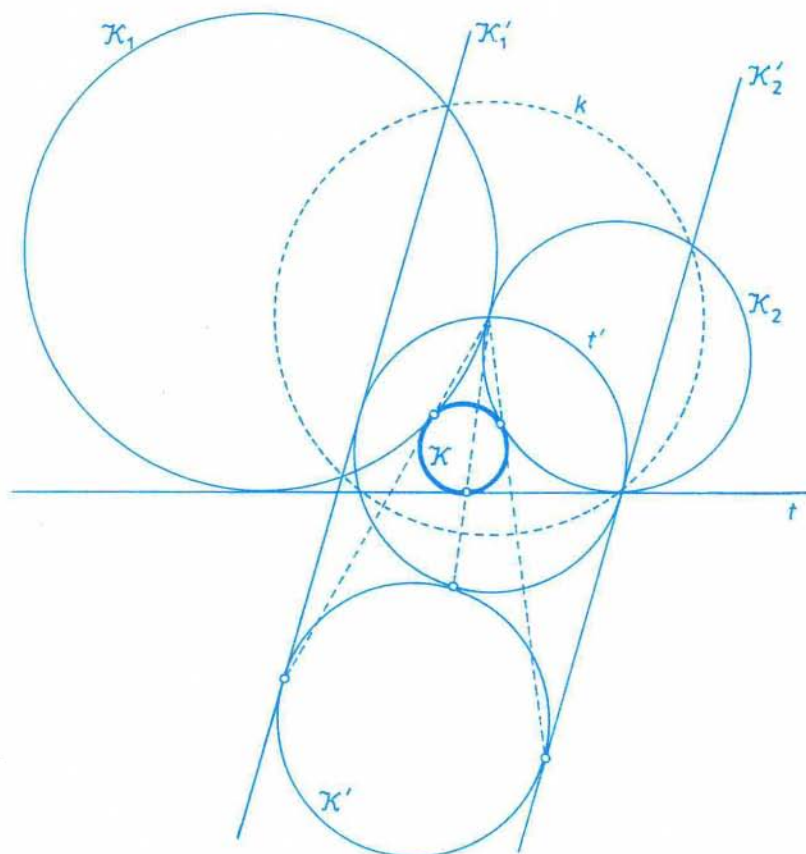


FORDOVI KROGI – Rešitve nalog s str. 268

1. Pri načrtovanju si lahko pomagamo z zrcaljenjem glede na krožnico, torej z inverzijo, o kateri je pisal tudi Presek XIII/1.

Za krožnico inverzije izberemo katerokoli krožnico k s središčem v dotikališču krogov K_1 in K_2 . Ugodno je, če gre k skozi dotikališče manjšega od krogov K_1 in K_2 z njuno tangento t .

Opišimo na kratko konstrukcijo kroga K' , podrobnosti pa prepustimo bralcu.

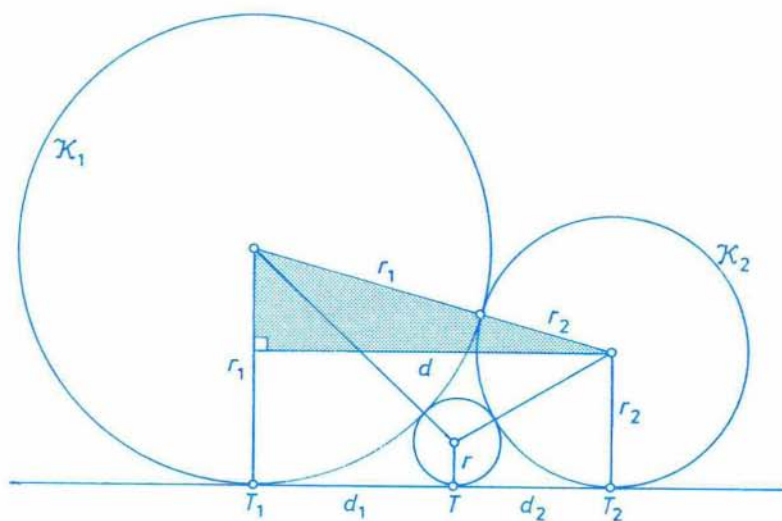


Slika 1.

Krožnici $\mathcal{K}_1$ in $\mathcal{K}_2$ se prezrcalita v vzporedni premici $\mathcal{K}'_1$ in $\mathcal{K}'_2$, tangenta t pa v krožnico t' , ki se dotika $\mathcal{K}'_1$ in $\mathcal{K}'_2$. Zrcalna (inverzna) slika $\mathcal{K}'$ iskane krožnice $\mathcal{K}$ se dotika $\mathcal{K}'_1$, $\mathcal{K}'_2$ in t' , zato je ni težko načrtati.

Z inverzijo $\mathcal{K}'$ prezrcalimo čez k in tako dobimo $\mathcal{K}$.

2. Poglejmo na sliko 2 in izračunajmo razdaljo $d = |T_1 T_2|$.



Slika 2.

Po Pitagorovem izreku iz označenega pravokotnega trikotnika dobimo

$$d^2 = (r_1 + r_2)^2 - (r_1 - r_2)^2 = 4r_1 r_2,$$

torej velja $d = 2\sqrt{r_1 r_2}$. Podobno pridemo tudi do zvez

$$d_1 = 2\sqrt{r_1 r}, \quad d_2 = 2\sqrt{r_2 r}.$$

Ker velja $d = d_1 + d_2$, je

$$(\sqrt{r_1} + \sqrt{r_2})\sqrt{r} = \sqrt{r_1 r} + \sqrt{r_2 r} = \sqrt{r_1 r_2}$$

in tedaj

$$r = \frac{r_1 r_2}{(\sqrt{r_1} + \sqrt{r_2})^2}.$$

Rešitev naloge sklenemo s tem, da izračunani r vstavimo v formuli za d_1 in d_2 .

3. Denimo, da se kroga K_1 in K_2 dotikata med sabo. Njuni dotikališči $\frac{m_1}{n_1}$ in $\frac{m_2}{n_2}$ s premico t sta po formuli iz naloge 2 oddaljeni $d = 2\sqrt{r_1 r_2}$, torej velja

$$\frac{m_2}{n_2} - \frac{m_1}{n_1} = d = 2\sqrt{r_1 r_2} = \frac{1}{n_1 n_2}.$$

Od tod sledi enakost $m_2 n_1 - m_1 n_2 = 1$.

Obratno, če ta enakost velja, potem je

$$d = \frac{m_2}{n_2} - \frac{m_1}{n_1} = \frac{1}{n_1 n_2} = 2\sqrt{r_1 r_2},$$

torej se K_1 in K_2 dotikata med sabo (Zakaj?).

4. Običajno dokazujemo trditev te naloge s pomočjo Evklidovega algoritma, vendar bomo tokrat krenili po drugi poti.

Označimo s p najmanjše naravno število oblike

$$nx - my; \quad x, y \in \mathbb{Z} \quad (1)$$

in dokažimo, da p deli m in n .

Zapišimo

$$n = kp + p_1; \quad n, p_1 \in \mathbb{Z}, \quad 0 \leq p_1 < p,$$

upoštevajmo, da je $p = nx - my$ za ustrezna $x, y \in \mathbb{Z}$ in izrazimo

$$\begin{aligned} p_1 &= n - kp = n - k(nx - my) = \\ &= n(1 - kx) - m(-ky) = nx_1 - my_1, \end{aligned}$$

kjer je $x_1 = 1 - kx$, $y_1 = -ky$. Vidimo, da je p_1 oblike (1) in da velja $0 \leq p_1 < p$, zato mora biti $p_1 = 0$. Od tod sledi, da p deli n , podobno pa dokažemo, da p deli m . Ker sta števili m in n tuji, je $p = 1$, torej velja $nx - my = 1$, $x, y \in \mathbb{Z}$.

5. Po izreku 2 veljata zvezi

$$m_2 n_1 - m_1 n_2 = 1$$

$$m_3 n_2 - m_2 n_3 = 1.$$

Izenačimo njuni levi strani in preuredimo. Dobimo

$$m_2(n_1 + n_3) = n_2(m_1 + m_3),$$

kar takoj da iskano enakost.

6. V družini posplošenih Fordovih krogov obstaja največji krog natanko takrat, kadar je kvocient polmerov začetnih krogov $\mathcal{K}_1$ in $\mathcal{K}_2$ kvadrat racionalnega števila.

Dokaz prepustimo bralcu, naslednji nasvet pa najbrž ne bo odveč:

Če v družini obstaja največji krog, potem je v njej še en krog enake velikosti in se prvega dotika. Fordovi krogi, ki jih dasta ta dva kroga, tvorijo prvotno družino posplošenih Fordovih krogov. Ker sta $\mathcal{K}_1$ in $\mathcal{K}_2$ v tej družini, je kvocient njunih polmerov po izreku 1 kvadrat racionalnega števila.

Za dokaz obratne smeri lahko brez škode za splošnost privzamemo, da sta polmera krogov $\mathcal{K}_1$ in $\mathcal{K}_2$ enaka $\frac{1}{2n_1^2}$ in $\frac{1}{2n_2^2}$, kjer sta n_1 in n_2 tuji naravni števili. Nato poiščemo okrajšana ulomka $\frac{m_1}{n_1}$ in $\frac{m_2}{n_2}$ z intervala $[0,1]$, ki ustrezata pogoju $m_2 n_1 - m_1 n_2 = 1$, koordinatni sestav na skupni tangenti obeh krogov pa pomaknemo tako, da se je prvi dotika v $\frac{m_1}{n_1}$, drugi pa v $\frac{m_2}{n_2}$. Kroga $\mathcal{K}_1$ in $\mathcal{K}_2$ porodita družino Fordovih krogov, ki ima dva največja kroga s polmerom $\frac{1}{2}$.

Boris Lavrič

PRAŠTEVILI – Rešitev s str. 363

Naj ima $\frac{1}{p}$ periodo dolžine 7. Ker ima $\frac{1}{p} \cdot 10^7$ od nekega mesta dalje iste decimalke kot $\frac{1}{p}$, je $10^n \cdot \frac{10^7 - 1}{p} = a$ celo število za neki $n \in \mathbb{N}$. Sledi $a \cdot p = 10^n \cdot 9\,999\,999 = 2^n \cdot 3^2 \cdot 5^n \cdot 239 \cdot 4649$. Ker sta $\frac{1}{2}$ in $\frac{1}{5}$ decimalni števili, so za p le trije kandidati: število $\frac{1}{3}$ ima periodo dolžine 1, drugi dve $\frac{1}{239} = 0.\overline{0041841}$ in $\frac{1}{4649} = 0.\overline{0002151}$ pa periodo dolžine 7.

Darjo Felda

FIBONACCIJEVO TEHTANJE – Rešitev nagradne naloge iz P XVIII/6, str. 331

Bralcem Preseka dolgujemo še rešitev nagradne naloge Fibonaccijevo tehtanje iz zadnje številke lanskega letnika naše revije. Uredništvo je prejelo kar nekaj rešitev. Med osnovnošolci je nalogo najbolje rešil Zemljič Gregor iz Ljubljane, najboljšo rešitev sploh pa nam je poslala Maja Marinček iz Ljubljane. Na vsa vprašanja je pravilno odgovorila, našla in dokazala pa je tudi splošni rezultat – kolikšen je največji razpon, v katerem lahko tehtamo z n utežmi. Obema smo poslali knjižni nagradi, reševalkino rešitev pa tudi objavljamo.

Bojan Mohar

Rešitev Maje Marinček:

Za rešitev naloge je dovolj, če dokažemo, da je največji razpon, v katerem lahko tehtamo z n utežmi, enak

$$m_n = 2^{n+1} - 2, \quad (1)$$

če polagamo uteži le na eno stran tehtnice, in

$$M_n = 3^n - 1, \quad (2)$$

če lahko polagamo uteži na obe strani tehtnice.

Dokažimo najprej enačbo (1). Za $n = 1$ trditev očitno drži: z dvokilsko utežjo lahko določimo težo 1 kg (breme je lažje od uteži) ali 2 kg (breme in utež sta enako težka). Vsa ostala bremena so težja od uteži in jih ne moremo ločiti med seboj.

Naj bodo sedaj $w_1, \dots, w_{n-1}$ tiste uteži, s katerimi lahko dosežemo največji razpon ob uporabi $n - 1$ uteži. Torej velja

$$\sum_{i=1}^{n-1} w_i = m_{n-1}.$$

Želimo seveda dodati kar se da težko utež w_n , tako da bo m_n kar največji. Vzemimo $w_n > m_{n-1} + 2$. V tem primeru ne moremo ločiti med bremenoma teže $m_{n-1} + 1$ in $m_{n-1} + 2$, ker sta obe težji od skupne teže uteži $w_1, \dots, w_{n-1}$, sta pa obe lažji kot katerakoli kombinacija uteži, ki vsebuje utež w_n . Zato je najtežja utež, ki jo smemo dodati, težka le $m_{n-1} + 2$ (kg).

Če vzamemo poljubno drugo kombinacijo $n - 1$ uteži, $w'_1, \dots, w'_{n-1}$, velja

$$\sum_{i=1}^{n-1} w'_i =: m'_{n-1} \leq m_{n-1}.$$

Z enakim razmislekom ugotovimo, da lahko dodamo utež $w'_n \leq m'_{n-1} + 2$. Velja

$$m'_n \leq 2m'_{n-1} + 2 \leq 2m_{n-1} + 2 = m_n$$

torej je poljubna druga kombinacija n uteži kvečjemu slabša.¹

Od tod lahko tudi izračunamo uteži. Videli smo že, da je $w_1 = 2$. Ker je tudi $m_1 = 2$, je $w_2 = 4$ in $m_2 = 6$. Še nekaj korakov in lahko postavimo domnevo, da je

$$w_i = 2^n \quad (3)$$

$$m_i = 2^{n+1} - 2 \quad (4)$$

Res! Za $n = 1$ enačbi očitno držita. Če držita za vsak $n \leq N$, potem:

$$w_{N+1} = m_N + 2 = (2^{N+1} - 2) + 2 = 2^{N+1}$$

in

$$m_{N+1} = m_N + w_{N+1} = 2^{N+1} - 2 + 2^{N+1} = 2(2^{N+1}) - 2 = 2^{N+2} - 2.$$

Označimo uteži, ki jih uporabljamo pri drugem načinu tehtanja, z W_i . Če imamo samo eno utež, nam nič ne pomaga, če jo lahko postavimo na katerokoli stran tehtnice. Torej je $W_1 = 2$ in $M_1 = 2$.

Kako velika sme biti utež W_n ? Naj bo $W_n > 2M_{n-1} + 2$. Poljubna kombinacija uteži brez W_n je težka kvečjemu M_{n-1} (če so vse uteži na eni strani tehtnice) in nobena kombinacija z utežjo W_n ne more biti lažja od W_n —

¹ Na tem mestu je reševalka nekoliko površno sklepala. Poljubna druga kombinacija $n - 1$ uteži, $w'_1, \dots, w'_{n-1}$, ni nujno taka, da lahko z njo tehtamo vse vmesne teže do m'_{n-1} , in zato ne moremo sklepati, da je $m'_{n-1} \leq m_{n-1}$. Velja pa naslednja trditev: Če lahko z n utežmi $w'_1 \leq w'_2 \leq \dots \leq w'_n$ tehtamo vse teže do njihove vsote, potem lahko z $n - 1$ utežmi, kjer smo izločili največjo w'_n , tehtamo vse teže do $\sum_{i=1}^{n-1} w'_i$. Sami poskusite premisliti, zakaj je to res. Je pa ta trditev dovolj za pravilnost nadaljnjega reševalkeinega sklepanja.

$-M_{n-1} > (2M_{n-1} + 2) - M_{n-1} = M_{n-1} + 2$ (ki jo dobimo, če so vse uteži razen W_n pri bremenu). Iz neenačb

$$M_{n-1} < M_{n+1} + 1 < W_n - M_{n-1}$$

$$M_{n-1} < M_{n+1} + 2 < W_n - M_{n-1}$$

je jasno, da ob taki izbiri uteži W_n ne ločimo bremen $M_{n-1} + 1$ in $M_{n-1} + 2$. Torej je $W_n = 2M_{n-1} + 2$.

Če pogledamo poljubno drugo kombinacijo uteži $W'_1, \dots, W'_{n-1}$, velja

$$\sum_{i=1}^{n-1} W'_i =: M'_{n-1} \leq M_{n-1}$$

in, ker še vedno velja, da sme biti utež $W'_n \leq 2M'_{n-1}$, zopet vidimo, da je

$$\sum_{i=1}^n W'_i = M'_n \leq M_n,$$

zato so uteži $W_1, \dots, W_n$ tiste, s katerimi tehtamo največji obseg.

Dokažimo sedaj, da je:

$$W_n = 2 \cdot 3^{n-1} \quad (5)$$

$$M_n = 3^n - 1 \quad (6)$$

Za $n = 1$ to očitno drži. Naj veljata ti dve enačbi za $n \leq N$. Potem je

$$W_{N+1} = 2M_N + 2 = 2(3^N - 1) + 2 = 2 \cdot 3^N$$

in

$$M_{N+1} = M_N + W_{N+1} = 3^N - 1 + 2 \cdot 3^N = 3^{N+1} - 1.$$

Odgovori na zastavljena vprašanja so torej:

1. Bremena s sodo težo lahko stehtamo neposredno. Katere uteži potrebujemo, lahko določimo s pomočjo binarnega zapisa števila. Vsako sodo število lahko zapišemo kot

$$x = \sum_{i=1}^n x_i 2^i,$$

kjer je $n = \lceil \log_2 x \rceil$ in $x_i \in \{0, 1\}$ ($\forall i$). Potrebujemo tiste uteži w_i , za katere je $x_i = 1$.

Bremena z liho težo x stehtamo tako, da ugotovimo, da so težja od $x - 1$, a lažja od $x + 1$. Poseben primer je $x = 1$, kjer moramo ugotoviti le, da je breme lažje od uteži $w_1 = 2$.

2. S petimi utežmi dosežemo največ $m_5 = 62$ (kg).
3. Uteži morajo biti $w_1 = 2$, $w_2 = 6$ in $w_3 = 18$. Bremena s sodo težo zopet izmerimo neposredno, tista z liho težo pa ocenimo z dvema sosednjima sodima težama.

Kako dosežemo sode teže, je razvidno iz tabele (uteži z negativnim predznakom ležijo pri bremenu):

$2 = w_1$	$12 = w_3 - w_2$	$22 = w_2 + w_3 - w_1$
$4 = w_2 - w_1$	$14 = w_3 - w_2 + w_1$	$24 = w_2 + w_3$
$6 = w_2$	$16 = w_3 - w_1$	$26 = w_1 + w_2 + w_3$
$8 = w_1 + w_2$	$18 = w_3$	
$10 = w_3 - w_2 - w_1$	$20 = w_1 + w_3$	

4. Očitno: $M_2 = 8$ in $M_3 = 26$.

STO NIČEL – Rešitev s str. 342

Vsa števila, ki se končujejo z natanko sto ničlami, morajo biti deljiva z 10^{100} , ne pa tudi z 10^{101} . Ker v zaporedju $\{n!, n = 1, 2, 3, \dots\}$ število ničel na koncu narašča, zadošča poiskati najmanjši $n!$, ki je deljiv z $10^{100} = 2^{100} \cdot 5^{100}$. Med zaporednimi naravnimi števili, ki so faktorji v $n!$, je število 2 pogostejši delitelj kot število 5. Zato bo iskano število najmanjše tako število $n!$, ki je deljivo s 5^{100} . To je število 405!. To vidimo takole: Med faktorji $1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4 \cdot \dots \cdot 404 \cdot 405$ jih je enainosemdeset deljivih s 5, od tega šestnajst s $25 = 5^2$, trije celo s $125 = 5^3$, in $81 + 16 + 3 = 100$. Število 404! pa se končuje le z 99 ničlami.

Iz našega računa je razvidno, da pri zaporednih fakultetah število ničel na koncu hitro, a enakomerno narašča. Z dvesto ničlami se prvo končuje število 805!, s tristo število 1210!, itd.

Seveda pa samo zaporedje števil $n!$ narašča neprimerno hitreje kot število ničel na njihovem koncu.

Marija Vencelj

PRESEK - list za mlade matematike, fizike, astronome in računalnikarje 19. letnik, leto 1991/92, številka 1-6, strani 1-384

MATEMATIKA

Eulerjeva poliedrska formula (Marija Vencelj)	2-6
Kombinatorno pravilna telesa (Marija Vencelj)	18-20
Problem treh vrčev in trilinearne koordinate (Marija Vencelj)	32-37
Platonovi poliedri (Vilko Domajnko)	40-44
O kolinearnosti treh točk (D.M.Milošević, prev. in pril. M.Dobovišek)	46-49
Kompleksna cela števila (Borut Zalar)	50-53
Izmerimo svitek (Boris Lavrič)	66-71
Eulerjeva formula za ravninske grafe (Mirko Dobovišek) ..	98-100
100 let Peanovih aksiomov (Marija Vencelj)	108-110
Kje je napaka? (Monique Gradoloto)	116-117
Ornamenti na traku (Milena Strnad)	130-136
Ob stoletnici smrti Sonje Kovalevske (Marija Vencelj) ..	138-142
O vsoti razdalj med točkama (Darjo Felda)	226-227
O diametru množice (Marjan Jerman)	258-260
Ravninske množice, v katerih se izražajo razdalje med točkami s celimi števili (Ivan Vidav)	262-266
Fordovi krogi (Boris Lavrič) – rešitve str. 374-377	268-275
Vsota n –tih potenc prvih m števil (Mitja Mastnak, pril. Darjo Felda)	331-333
Superkrožnice (Darjo Felda)	334-338

REŠITVE NALOG

Mala zbirka nalog Leonarda Fibonaccija - iz P XVIII/5, str. 290 (Vilko Domajnko)	125
Strela - s str. 321, P-XVIII/6 (Boris Lavrič)	160-164
Fibonaccijevo tehtanje - iz P XVIII/6, str. 331 (Bojan Mohar)	378-381

FIZIKA

Superprevodniki in njihova uporaba (Andrej Cvelbar)	8-13
Mehurčki (Janez Strnad)	22-27
Neprožni trki (Janez Strnad)	72-78
Plavajoče kapljice (Andrej Likar)	V, VIII, 102-106
Vrtenje je žudna reč (Anton Cedilnik)	112-114
Izračun izjemno velikih padavin (Zdravko Petkovšek, Tomaž Vrhovec)	144-152
Led in voda (Janez Strnad)	204-208
Newtonovo jabolko in jablana (Janez Strnad)	233
Transurani (Dušan Murovec)	308-309
Vztrajnost in trenje (Janez Strnad)	310-314
Merjenje padavin z radarjem (Marjan Divjak)	XX, 316-319
Še o sukanju teles (Janez Strnad – Foto Marjan Smerke) ..	320-XIX
Hitrost smučarskega skakalca (Andrej Likar)	324-326
Radij Zemlje s stoparico (Marjan Hribar)	344-345
Letalski pok (Janez Strnad)	346-351

ASTRONOMIJA

Kako so prvič ugotovili velikost zvezde (Marian Prosén) ..	14-17
Zvezdni interferometer (Janez Strnad)	28-30
Proksima Kentavra (Marian Prosén)	38-39
Astronom s Ptujja (Marian Prosén)	80-81
Kako velika je Betelgeza (Marian Prosén)	128-VII
Zanimivosti o Ulugbekovi zvezdarni (Marian Prosén) ..	178-181
Slikanje astronomskih objektov s CCD kamero (Tomaž Zwitter in Bojan Dintinjana)	XIII, 194-198
Jakobova palica (Marian Prosén)	200-202
Sirij (Marian Prosén) – rešitve str. 367	276-281
Zvezda z izjemno velikim izsevom (Marian Prosén)	281
Delfin (Marian Prosén)	XXI, 322-324

RAČUNALNIŠTVO

Razpoznavanje cifer - bralni pomnilnik in nevronska omrežja (Veselko Guštin)	154-158
Uganki za kratek čas (Marjan Jerman)	190-192
Derive (Matija Lokar)	210-212
(K)urnik, 1. in 2. del (Niko Žižek, Sandi Klavžar)	282-286, 354-358
Derive, Inset, Wordstar, ... (Matija Lokar)	327-330

NOVE KNJIGE

Felda D. in dr., Rešene naloge iz matematike s šolskih in izbirnih tekmovanj 1975-1991 (Gorazd Lešnjak)	168
Cvahte M. Fizikalne naloge iz vsakdanjega življenja (Marjan Hribar)	78
Klavžar S., Zvezdne besede ali WordStar po domače (Mojca Lokar)	XV
Kordemski B.A., Matematične uganke (Janez Rakovec)	261
Lokar M., Začeti z dBASE IV (Jože Andrej Čibej)	54-55
Lokar M., Derive (Nada Razpet)	239
Milutinović, Žubrinić, Balkanske matematiške olimpijade (Darjo Felda)	235
Prosen M., Veliki in Mali medved (Darja Žužek-Delač)	7
Smullyan R., Oponašati oponašalko (Janez Rakovec)	359
Strnad J., Vozi me, avto, v daljave (Janez Ferbar)	82-83
Šolinc H., Skozi fiziko z rešenimi nalogami (Bojan Golli) ...	343
Virčenko N.A., Matematika v aforizmih, citatih in izrekih (Dušica Boben)	6
Weinberg N., Prve tri minute (Ciril Velkoverh)	53

NOVICE

Presek je polnoleten (Marija Vencelj)	1
Nobelova nagrada za fiziko v letu 1991 (Irena Drevenšek)	XVI, 234-235

Pred petindvajsetimi leti je umrl profesor Josip Plemelj (Marija Vencelj)	294-297
Mednarodni astronomski tabor IAYC Torfhaus 1991 (Mirjana Galičič)	298-299

RAZVEDRILO

Zelo strokovna križanka (Marko Bokalič) – rešitev str. 128 ..	31
Od igre "Križci in krožci" do igre "Rendzju" (Milan Ambrožič)	56-60
Jakobova lestev (Marija Vencelj)	61
Tangram zgolj v obrisih (Vilko Domajnko) – rešitev str. 128	62-63, III
Šah. Zmaga? (Peter Petek)	IV
Križanka Nobelovi nagradenci za fiziko I. (Marko Bokalič) – rešitev str. 188	96-97
Zloženka (Stavra V. Radojković) – rešitev str. 192	115
Igra realgar (Primož Pirnat)	118-121
Tangram (Vilko Domajnko) – rešitev str. 128	122-124
Številska križanka (D.M. Milošević, prev. Damjan Kobal) – rešitev str. 223	188-189
Tangramski paradoksi (Vilko Domajnko) – rešitev str. 247 ...	XI
Brstenje (Mirko Dobovišek)	214-218
Konveksni tangramski liki (Vilko Domajnko) – rešitev str. 267	220-222
Z eno potezo. Poišči izrek (Marija Vencelj) – rešitev str. 305	223
Križanka Profesorju Prijatelju za življenjski jubilej (Marko Bokalič) – rešitev str. 275	224-225
Utrinek (Marija Vencelj)	230
Križanka Ob 25. obletnici smrti velikega matematika – rešitev str. XXIII (Marko Bokalič)	288-289
Petkotni tangramski liki (Vilko Domajnko) – rešitev str. 366	290-292
Bele luknje ali limite po tangramsko (Vilko Domajnko) .	352-353
Računajmo na pamet (Marija Vencelj)	358

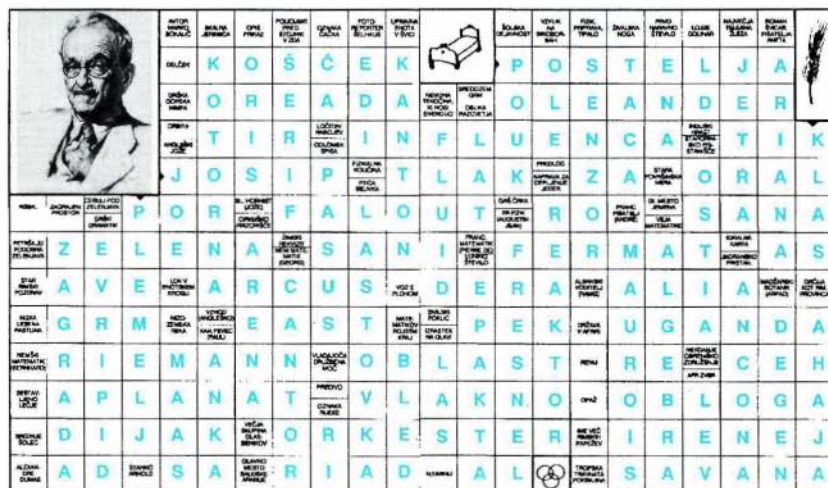
NALOGE

Test za dvojčke (Boris Lavrič) – rešitev str. 127	7
Očrtaj kvadrat. Naokrog po stožcu. Delitev plena ali težave se začno šele po ropu (Marija Vencelj) – rešitev str. 106-107, 198-199	20-21
Kobonovi trikotniki (Ciril Pezdir) – rešitev str. 83	45
Vzporednica (Boris Lavrič) – rešitev str. 115	45
Ročna spretnost in še kaj (Vilko Domajnko) – rešitev str. 128	49
Z geometrijskim zaporedjem od atoma do Galaksije (Ciril Pezdir) – rešitev str. 126-127	60
Jezerce z otočkom (Boris Lavrič) – rešitev str. 143	65
Dve o igrah (Karaš) – rešitev str. 171	71
Skozi vse točke (Bojana Dvoržak) – rešitev str. 184	71
Ulomki za prvošolce – tudi bivše (Franc Oblak) – rešitev str. 136-137, 159	83, 100
Kvadratna sestavljenka. Turnir (Marija Vencelj) – rešitev str. 142	101
Dva neortodoksna kriptograma (Izbral Mirko Dobovišek) – rešitev str. 176-177	101
Vrši pravokotnik (Marija Vencelj) – rešitev str. 176	110
Račun z znaki (Martin Juvan) – rešitev str. 185-187	111
Mojster R.A. skrije šahovsko figuro v žep (Marko Lovrečič Saražin) – rešitev str. 246-247	129
Racionalni sinusi kotov v trikotniku. $\tan \frac{\alpha}{2} + \tan \frac{\beta}{2} + \tan \frac{\gamma}{2} = 2$ (Ivan Vidav) – rešitev str. 153, 159	117, 121
Sod (Boris Lavrič) – rešitev str. 238	165
Tehtanje z verigo (Marija Vencelj) – rešitev str. 218-219	165
Tetivni osemnajstkotnik (Boris Lavrič) – rešitev str. 366	166-168
Sistemi linearnih enačb (Izbral Vilko Domajnko) – rešitev str. 309	193
Ribiška (Marija Vencelj) – rešitev str. 305	202
Še Naokrog po stožcu (Anton Cedilnik) – rešitev str. 299	203
Prepogibanje lista papirja (Anton Cedilnik) – rešitev str. 307	203
Srečka (Marija Vencelj) – rešitev str. 297	212
Švicarski tramvaj (Borut Zalar) – rešitev str. 293	213
Pravilni petkotnik (Marija Vencelj) – rešitev str. 315	213
Koliko pitagorejskih trikotnikov? (Marija Vencelj) – rešitev str. 301	227
Tri naloge z naravnimi števili (Borut Zalar) – rešitev str. 367	266
Telefonska številka moje mame (Borut Zalar) – rešitev str. 373	287
Preskusi se in reši A ali B nalogo (Franc Oblak) – rešitev str. 351 (Marija Vencelj)	321
Slučaj ali pravilo? – rešitev str. 338-339 (Boris Lavrič)	321
Tri funkcijske enačbe – rešitev str. 340-342 (Marija Vencelj)	330
Sestavi nalogo – rešitev str. 381 (Marija Vencelj)	343
Sto ničel – rešitev str. 377 (Darjo Felda)	363
Praštevili – rešitev str. 377 (Darjo Felda)	363

TEKMOVANJA

26. občinsko tekmovanje osnovnošolcev iz matematike (Aleksander Potočnik) – rešitev str. 182-184	84-85
15. republiško tekmovanje iz računalništva. Srečanje mladih raziskovalcev (Primož Gabrijelčič) – rešitev str. 248-III	86-95
27. republiško tekmovanje osnovnošolcev iz matematike (Aleksander Potočnik) – rešitev str. 236-238	169-171
35. republiško tekmovanje srednješolcev iz matematike (Jaka Erker, Darjo Felda) – rešitev str. 240-243	172-176
7. šolsko in 17. izbirno tekmovanje srednješolcev iz matematike (Darjo Felda)	181
Kvalifikacije za zvezno tekmovanje srednješolcev iz matematike – Rešitve naloge s str. 174 (Matjaž Željko)	244-246
22. zvezno tekmovanje osnovnošolcev iz matematike (Aleksander Potočnik) – reš. str. 364-366	300-301
32. zvezno tekmovanje srednješolcev iz matematike (Matjaž Željko) – reš. str. 368-372	XVIII, 302-304
Poročilo o mednarodnem tekmovanju mest (Darjo Felda)	306-307
Srednješolsko republiško tekmovanje iz fizike (Iztok Kukman)	360-363

KRIŽANKA – OB 25. OBLETNICI SMRTI VELIKEGA MATEMATIKA J. PLEMLJA – Rešitev s str. 288 (Marko Bokalič)



PRESEK

list za mlade matematike, fizike, astronome in računalnikarje
19. letnik, šolsko leto 1991/92, številka 6, strani 321 – 384

UREDNIŠKI ODBOR: Vladimir Batagelj, Tanja Bečan (jezikovni pregled), Dušica Boben (oblikovanje teksta), Mirko Dobovišek (glavni urednik), Vilko Domajnko, Darjo Felda (tekmovanja), Bojan Golli, Marjan Hribar, Martin Juvan (računalništvo), Sandi Klavžar, Edvard Kramar, Boris Lavrič, Andrej Likar (fizika), Matija Lokar, Franci Oblak, Peter Petek, Pavla Ranzinger (astronomija), Marjan Smerke (svetovalec za fotografijo), Miha Štalec (risbe), Ciril Velkovič (urednik, nove knjige, novice), Marija Vencelj (matematika, odgovorna urednica).

Dopise pošiljajte in list naročajte na naslov: Društvo matematikov, fizikov in astronomov Slovenije - Podružnica Ljubljana - Komisija za tisk, Presek, Jadranska c. 19, 61111 Ljubljana, p.p. 64, tel. (061) 265-061/53, št. žiro računa 50101-678-47233. Naročnina za šolsko leto 1991/92, vplačana po 15.2.1992, je za posamezne naročnike **500 SLT**, za skupinska naročila **šol 400 SLT**, posamezna številka **100 SLT (80 SLT)**, za tujino 12000 LIT.

List sofinancirajo MZT, MŠŠ in MK
Ofset tisk DELO - Tiskarna, Ljubljana

Tekst je oblikovan z računalnikom SLIM 286, ALTECH, Ljubljana
© 1992 Društvo matematikov, fizikov in astronomov Slovenije – 1101

