

5



JOSIP PLEMELJ

1873-1967

DJMA IZ KMETIŠKE RISE NA BLENŠKI
JESTVARJATEL IN UČITELI MATEMATIKE
JE BILA DOLGA VEČ MATEMATIKA

$$\frac{1}{2n} \left(\frac{10n-10}{2} - \frac{1}{2} \right) = \frac{1}{2n} \left(\frac{10n-10}{2} - \frac{1}{2} \right)$$

MATEMATIKA NI JE BILA ZVEJENJE
POREBA HUMANISTIČNE UČITELJE

PRESEK

DRUŠTVO MATEMATIKOV, FIZIKOV IN ASTRONOMOV SLOVENIJE, 19-(1991-92)

Slovenska ekipa na lanskem zveznem tekmovanju iz matematike v Valjevu



PRESEK

list za mlade matematike, fizike, astronome in računalnikarje
19. letnik, šolsko leto 1991/92, številka 5, strani 257 – 320

UREDNIŠKI ODBOR: Vladimir Batagelj, Tanja Bečan (jezikovni pregled), Dušica Boben (oblikovanje teksta), Mirko Dobovišek (glavni urednik), Vilko Domajnko, Darjo Felda (tekmovanja), Bojan Golli, Marjan Hribar, Martin Juvan (računalništvo), Sandi Klavžar, Edvard Kramar, Boris Lavrič, Andrej Likar (fizika), Matija Lokar, Franci Oblak, Peter Petek, Pavla Ranzinger (astronomija), Marjan Smerke (svetovalec za fotografijo), Miha Štalec (risbe), Ciril Velkovich (urednik, nove knjige, novice), Marija Vencelj (matematika, odgovorna urednica).

Dopise pošiljajte in list naročajte na naslov: Društvo matematikov, fizikov in astronomov Slovenije - Podružnica Ljubljana - Komisija za tisk, Presek, Jadranska c. 19, 61111 Ljubljana, p.p. 64, tel. (061) 265-061/53, št. žiro računa 50101-678-47233. Naročnina za šolsko leto 1991/92, vplačana po 15.2.1992, je za posamezne naročnike 500 SLT, za skupinska naročila šol 400 SLT, posamezna številka 100 SLT (80 SLT), za tujino 12000 LIT.

List sofinancirajo MZT, MŠŠ in MK
Ofset tisk DELO - Tiskarna, Ljubljana

Tekst je oblikovan z računalnikom SLIM 286, ALTECH, Ljubljana
© 1992 Društvo matematikov, fizikov in astronomov Slovenije – 1097

PRESEK - list za mlade matematike, fizike, astronome in računalnikarje
19. letnik, leto 1991/92, številka 5, strani 257-320

VSEBINA

MATEMATIKA	O diametru množice (Marjan Jerman)	258-260
	Ravninske množice, v katerih se izražajo razdalje med točkami s celimi števili (Ivan Vidav)	262-266
	Fordovi krogi (Boris Lavrič)	268-275
NOVE KNJIGE	Kordemski B.A., Matematične uganke (Janez Rakovec)	261
NALOGE	Telefonska številka moje mame (Borut Zalar)	266
	Preskusi se in reši A ali B nalogo (Franc Oblak)	287
NOVICE	Kako sem prišla med matematike (Marija Munda)	267
	Pred petindvajsetimi leti je umrl profesor Josip Plemelj (Marija Vencelj)	294-297
	Mednarodni astronomski tabor IAYC Torfhaus 1991 (Mirjana Galičič)	298-299
	Proslave v Plemljevem letu 1992 (Ciril Velkovrh)	319
ASTRONOMIJA	Sirij (Marian Prosén)	276-281
	Zvezda z izjemno velikim izsevom (Marian Prosén)	281
RAČUNALNIŠTVO	(K)urnik (Niko Žižek, Sandi Klavžar)	282-286
RAZVEDRILO	Križanka Ob 25. obletnici smrti velikega matematika (Marko Bokalič)	288-289
	Petkotni tangramski liki (Vilko Domajnko)	290-292
	Potrebuješ - rabiš, Učitelj bi moral znati vse. Biti moraš previden (Marija Munda)	301, 304
TEKMOVANJA	22. zvezno tekmovanje osnovnošolcev iz matematike (Aleksander Potočnik)	300-301
	32. zvezno tekmovanje srednješolcev iz matematike (glej sliko na str. II) (Matjaž Željko)	302-304
	Poročilo o mednarodnem tekmovanju mest (Darjo Felda)	306-307
FIZIKA	Transurani (Dušan Murovec)	308-309
	Vztrajnost in trenje (Janez Strnad)	310-314
	Merjenje padavin z radarjem (Marjan Divjak) (Glej sliko na IV. strani ovitka)	316-319
	Še o sukanju teles (Janez Strnad - Foto Marjan Smerke)	320-III
REŠITVE NALOG	Konveksni tangramski liki - s str. 220 (Vilko Domajnko)	267
	Križanka Profesorju za življenjski jubilej - s str. 224 (Marko Bokalič)	275
	Pravilni petkotnik - s str. 213 (Marija Vencelj)	293
	Švicarski tramvaj - s str. 212 (Borut Zalar)	297
	Prepogibanje lista papirja - s str. 203 (Anton Cedilnik)	299
	Tri naloge z naravnimi števili - s str. 227 (Borut Zalar)	301
	Še Naokrog po stožcu - s str. 202 (Anton Cedilnik). Poišči izrek - s str. 223. Z eno potezo - s str. 223 (Marija Vencelj)	305
	Srečka - s str. 203. Ribiška - s str. 193. Koliko pitagorejskih trikotnikov - s str. 213 (Marija Vencelj)	307, 309, 315
NA OVITKU	Spomenik prof. dr. Josipu Plemlju na Bledu (Foto Ciril Velkovrh)	I

MATEMATIKA

O DIAMETRU MNOŽICE

Kako bi povedali, kako velika je neka množica M v 3-razsežnem (evklidskem) prostoru (torej v prostoru, kjer živimo; ima dolžino, širino in višino)? Ena od možnosti je, da povemo največjo mogočo razdaljo med dvema točkama te množice (dolžino najdaljše daljice, katere krajišči ležita v M). Taka razdalja ne obstaja vedno. Če obstaja, ji pravimo *diameter* ali *premer* množice M in jo označimo z $\text{diam } M$ (včasih pa bomo tudi najdaljšo daljico samo imenovali diameter množice M). Da dvom o obstoju ni odveč, nam pokažeta naslednja zgleda:

1. Naj bo M premica v prostoru. Za poljubni $d \geq 0$ lahko najdemo na M daljico z dolžino d . (Eno krajišče naj bo poljubna točka na premici, po premici odmerimo d in končna točka je drugo krajišče daljice z dolžino d .) Lahko bi rekli, da je diameter premice enak neskončno.
2. Naj bo M odprti krog (to je krog brez oboda, brez mejne krožnice) s polmerom r . Za poljubni $d < 2r$ lahko najdemo v M točki, ki sta oddaljeni za d (v kako točko, ki je zadosti blizu obodu, zapičimo šestilo in narišimo krožnico s polmerom d ; dobre so vse točke na tej krožnici, ki ležijo v M), za $d = 2r$ pa nam to ne uspe, kajti vzeti bi morali točki z oboda.

Če je diameter dosežen na neki daljici, pa taka daljica ni nujno ena sama. Za zaprti krog (to je krog skupaj z obodom) je diameter dosežen na vsakem premeru (od tod tudi ime). Dobra je vsaka daljica skozi središče kroga, ki ima krajišči na obodu.

Bralec, ki bo šel študirat matematiko, bo izvedel, da diameter zagotovo obstaja za množice, ki so omejene (to je take, ki jih lahko vklenemo v kak krog - za premico ni dovolj velik noben krog) in zaprte (približno si lahko mislimo, da morajo imeti rob - odprti krog ga nima).

Da bomo bolje začutili, kaj je diameter, poiščimo diameter trikotnika in tetraedra (četverca). Najbolj vztrajni bralci pa lahko po napornem branju, ki zahteva nekaj osnovnega znanja ravninske geometrije, rešijo še nekaj nalog, ki so jih reševali srednješolci na republiških in zveznih tekmovanjih v (bivši) Jugoslaviji, Nemčiji in Avstriji.

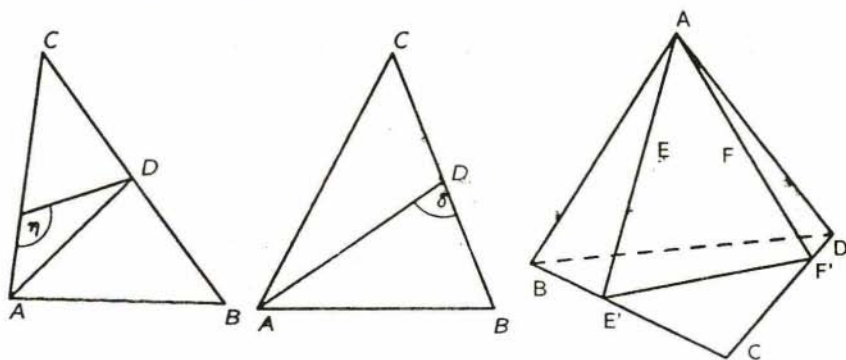
Trditev 1. *Diameter trikotnika je dosežen na eni od njegovih stranic.*

Dokaz: Trikotnik je zaprt in omejen, zato diameter obstaja. Vzemimo

trikotnik $\triangle ABC$ in diameter DE . Da morata krajišči diametra ležati na straneh trikotnika, ugotovimo takole: če bi kako krajišče ležalo v notranjosti $\triangle ABC$, bi lahko narisali premico skozi D in E , ki bi sekala obod $\triangle ABC$ v točkah D' in E' . Daljica $D'E' \subset \triangle ABC$ bi bila daljša od daljice DE , to pa je v protislovju s predpostavko, da je DE diameter. Zato obravnavajmo le primer, ko krajišči diametra ležita na straneh trikotnika.

Najprej pokažimo, da se vsaj eno krajišče (to je vsaj ena od točk D in E) ujema s kakim od oglišč $\triangle ABC$. Predpostavimo nasprotno. Privzemimo oznake na sliki. Zaradi simetričnosti lahko obravnavamo le primer $E \in AC$, $D \in BC$ (za druge lege zamenjamo vloge črk, dokaz je isti). Naj bo $\varepsilon := \angle AED$. Narišimo daljico AD in si oglejmo trikotnika $\triangle AED$ in $\triangle EDC$.

Če je kot ε topi ali pravi, je največji kot v $\triangle AED$ (za ostala kota skupaj ostane le $180^\circ - \varepsilon \leq 90^\circ \leq \varepsilon$, torej za vsakega posebej manj kot ε). Za trikotnik velja, da nasproti največjemu kotu leži največja stranica. (Radoveden bralec lahko to prebere v Pucljevem učbeniku *Geometrija za 1. razred gimnazije*, III.B/§6-izrek 26.) Tedaj bi torej veljalo $AD > ED$, to pa je v protislovju s predpostavko, da je DE diameter.



Slika 1. K dokazu 1. in 2. trditve

Če je kot ε ostri, je $\angle DEC = 180^\circ - \varepsilon$ top in tako največji v $\triangle EDC$ in je podobno kot prej $DC > ED$, kar je protislovje.

Dokažimo, da se tudi drugo krajišče pokriva z ogliščem trikotnika: Recimo, da to ni res. Zaradi simetričnosti lahko obravnavamo le primer $E = A$, $D \in BC$. Označimo $\delta := \angle ADB$. Oglejmo si trikotnika $\triangle ABD$ in $\triangle ADC$.

Sklepajmo podobno kot prej: Če je kot δ topi, je $AB > AD = ED$, če pa je ostri, je $\angle ADC = 180^\circ - \delta$ top in $AC > AD$. Trditev je tako dokazana.

Dokažimo še podobno trditev za tetraedre:

Trditev 2. *Diameter tetraedra je dosežen na enem od njegovih robov.*

Dokaz: Tudi tetraeder (imenujmo ga $ABCD$) je zaprt in omejen, zato diameter obstaja. Naj bo dosežen na daljici EF . Podobno kot pri trikotniku ležita krajišči E in F na ploskvah tetraedra. (Sicer bi potegnili premico skozi E in F , ta bi sekala površino tetraedra v točkah E' in F' in veljalo bi $E'F' > EF$.)

Tetraeder ima štiri oglišča, zato lahko izmed njih izberemo eno, ki se ne ujema z nobenim od krajišč diametra, recimo oglišče A . Točke A , E in F niso kolinearne, ker bi sicer veljalo ali $AF > EF$ ali $AE > EF$, kar je v nasprotju s predpostavko, da je EF diameter. Potegnimo poltraka z izhodiščem v A skozi E in F , naj prebodeta ploskev $\triangle BCD$ v točkah E' in F' . Ker točke A , E in F niso kolinearne, je $E' \neq F'$.

EF je po predpostavki diameter tetraedra, velja pa $EF \subset \triangle E'AF' \subset ABCD$, zato je EF tudi diameter trikotnika $\triangle E'AF'$. Po trditvi 1 se mora EF ujemati z eno od stranic trikotnika $\triangle E'AF'$. Ker $A \notin \{E, F\}$, mora biti $EF = E'F'$. Daljica $E'F'$ pa leži v $\triangle BCD$. Tako lahko ponovno uporabimo trditev 1, ki nam pove, da je $EF = E'F'$ ena od stranic trikotnika $\triangle BCD$. Trditev je dokazana.

Naloge:

1. (Jugoslavija, 1972) Predpostavimo, da je v neki konveksni množici diameter dosežen na več (≥ 2) daljicah. Dokaži, da imata poljubni dve od teh daljic vsaj eno skupno točko. (*Nasvet:* Dokazuj s protislovjem, loči primera: (1) noben od diametrov ne seka nosilke drugega, (2) en diameter seka nosilko drugega diametra.)
2. (Nemčija, 1982) Dokaži, da lahko vsak konveksni štirikotnik razrežemo z lomljeno črto tako, da sta diametra tako dobljenih delov manjša od diametra štirikotnika.
3. (Nemčija, 1962) Dokaži, da je v konveksnem štirikotniku razmerje med najdaljšo in najkrajšo razdaljo med poljubnima ogliščema večje ali enako $\sqrt{2}$. (*Nasvet:* uporabi kosinusni izrek.)
4. (Avstrija, 1975) Na ravnini je poljubno izbranih šest točk. Dokaži, da je razmerje med najdaljšo in najkrajšo razdaljo med točkama večje ali enako $\sqrt{3}$. (*Nasvet:* uporabi kosinusni izrek.)

Marjan Jerman

NOVE KNJIGE

Kordemski B.A., MATEMATIČNE UGANKE. Državna založba Slovenije, Ljubljana 1991, 238 str. (Z logiko v leto 2000)

Nekdo je narisal krog, ni pa označil njegovega središča. Bi znali poiskati središče kroga samo z uporabo svinčnika in pravokotnega trikotnika? Če odgovor na taka in podobna (tudi težja) vprašanja ni kar na dlani, si je vredno ogledati Matematične uganke (omenjena naloga je na str. 93, njena rešitev na str. 208). Ta zbirka razvedrilnih nalog ruskega matematika Borisa A. Kordemskega je bila prevedena že v enajst jezikov. Pred nami je sedaj prvi del zbirke, ki ga je v slovenščino mojstrsko prevedla Breda Cestnik.

V knjigi je 257 miselnih nalog iz elementarne matematike: o naravnih številih in ulomkih, o delitvah, tehtanjih, razvrstitvah, urah, gibanju ljudi in vozil, geometriji, o raznih igrah, igralni kocki, dominah, križnih vsotah ... Naloge so zelo različne tudi po težavnosti; izbrane so premišljeno in nas navajajo k logičnemu sklepanju ter obvladanju aritmetike, algebre, geometrije. Številne uganke nastopajo v zgodbah ali zgledih iz vsakdanjega življenja. Na primer:

171. Srečanje vlakov

Dva vlaka (vsak ima lokomotivo in 80 vagonov) morata drug mimo drugega na enotirni železnici s slepim stranskim tirom. Kako naj se to izvede, če je na stranskem tiru prostora le za lokomotivo in 40 vagonov?



Za vse naloge so skrbno izdelane rešitve, ki pomagajo k oblikovanju pravilnega mišljenja.

Knjiga je napisana duhovito in prijetno, opremljena je z zares lepimi ilustracijami. Všeč bo vsem bralcem Preseka; pokazala jim bo tudi, kje vse v življenju naletimo na logične in matematične probleme.

Janez Rakovec

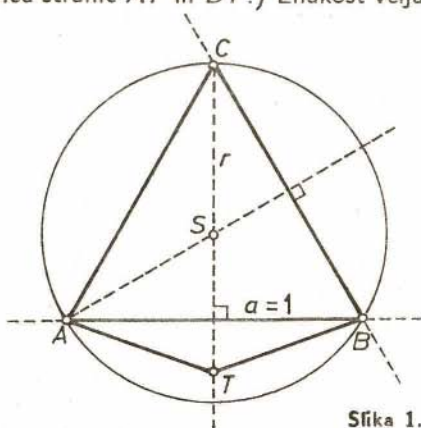
RAVNINSKE MNOŽICE, V KATERIH SE IZRAŽAJO RAZDALJE MED TOČKAMI S CELIMI ŠTEVILI

Naj bodo A, B, C oglišča enakostraničnega trikotnika s stranico $a = 1$. Zastavimo si tole vprašanje: Ali obstaja v ravnini tega trikotnika taka točka T , da se izražajo vse tri razdalje od oglišč $\overline{AT}$, $\overline{BT}$ in $\overline{CT}$ s celimi števili? Očitno ustrezajo temu pogoju oglišča, saj je npr. razdalja točke C od C enaka nič, od oglišč A in B pa 1. Je morda še kakšna druga taka točka?

Denimo, da so razdalje $\overline{AT}$, $\overline{BT}$ in $\overline{CT}$ cela števila. Oglejmo si trikotnik ABT . Po trikotniški neenačbi je razlika stranic $\overline{AT}$ in $\overline{BT}$ manjša ali enaka tretji stranici $\overline{AB}$, torej

$$|\overline{AT} - \overline{BT}| \leq \overline{AB}.$$

(Na levi strani smo zapisali absolutno vrednost $|\overline{AT} - \overline{BT}|$ zato, ker le-ta pomeni razliko med večjo in manjšo izmed stranic $\overline{AT}$ in $\overline{BT}$.) Enakost velja tu le tedaj, kadar je trikotnik ABT izrojen, se pravi, kadar leže točke A, B in T na isti premici. Ker je razlika $\overline{AT} - \overline{BT}$ v našem primeru celo število in $\overline{AB} = a = 1$, imamo samo dve možnosti: ali je $|\overline{AT} - \overline{BT}| = 0$ ali pa $|\overline{AT} - \overline{BT}| = 1$. V prvem primeru velja $\overline{AT} = \overline{BT}$ in je trikotnik ABT enakokrak z vrhom T . Točka T leži na simetrali stranice AB (slika 1). V drugem primeru so točke A, B in T kolinearne, torej je T na premici, ki veže A in B .



Slika 1.

To zveznico bomo na kratko zaznamovali z AB .

Ker sta tudi razdalji $\overline{BT}$ in $\overline{CT}$ celi števili, ugotovimo kakor prej, da leži točka T bodisi na simetrali stranice BC bodisi na premici, ki veže B in C .

Točko T moramo potemtakem iskati med presečišči naslednjih štirih parov premic:

- simetral stranic AB in BC ,
- simetrale stranice AB in premice BC ,
- premice AB in simetrale stranice BC ,
- premic AB in BC .

Presečišče simetral je središče očrtanega kroga (slika 1). V enakostraničnem

trikotniku je polmer tega kroga $r = \frac{a}{3}\sqrt{3}$, v našem primeru torej $r = \frac{1}{3}\sqrt{3}$. Oddaljenost središča od oglišč A, B, C je enaka r . Ker r ni celo število, središče očrtanega kroga ne zadošča našemu pogoju. Presečišča nadaljnjih treh parov premic so po vrsti oglišča C, A in B . Te točke pa izpolnjujejo naš pogoj.

Tako smo ugotovili, da v ravnini enakostraničnega trikotnika s stranico 1 razen oglišč ni nobene druge točke T , za katero bi bile vse tri razdalje od oglišč cela števila.

Kaj pa, če vzamemo namesto enakostraničnega trikotnika s stranico $a = 1$ trikotnik s poljubnimi stranicami in postavimo isto vprašanje? Odgovor na to vprašanje daje

IZREK 1. Naj bo ABC poljuben trikotnik. Množica $\mathcal{M}$ tistih točk T , ki leže v ravnini tega trikotnika, razdalje od oglišč $\overline{AT}$, $\overline{BT}$ in $\overline{CT}$ pa so cela števila, je končna ali celo prazna.

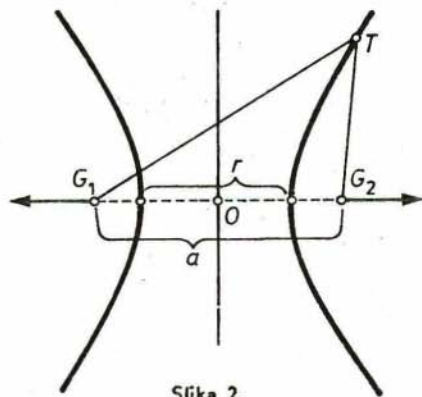
Pripomba. Tukaj je mišljeno, da je ABC pravi trikotnik, to je, točke A, B in C niso na isti premici. Za izrojeni trikotnik izrek ne velja. Denimo namreč, da so A, B, C na isti premici, da leži točka B med A in C , razdalji $\overline{AB}$ in $\overline{BC}$ pa sta enaki 1. Če je T taka točka na tej premici, da je njena razdalja od A celo število, sta tudi razdalji $\overline{BT}$ in $\overline{CT}$ celi števili. Takih točk pa je na premici AB očitno nešteto.

Pri dokazovanju izreka bomo uporabili tale dejstva o hiperbolah:

1. Naj bosta G_1 in G_2 točki v ravnini, $\overline{G_1G_2} = a$, nadalje naj bo r dano število, pri čemer je $0 \leq r \leq a$. Oglejmo si množico točk T v ravnini, za katere velja

$$|\overline{G_1T} - \overline{G_2T}| = r. \quad (1)$$

Če je $0 < r < a$, je ta množica hiperbola, G_1 in G_2 pa sta njeni gorišči (slika 2). Ena izmed definicij hiperbole je namreč tale: hiperbola sestoji iz vseh točk T v ravnini, za katere je razlika razdalj od gorišč G_1 in G_2 konstanta. (Podobno je elipsa množica točk T v ravnini, za katere je vsota razdalj od gorišč konstanta.



Slika 2.

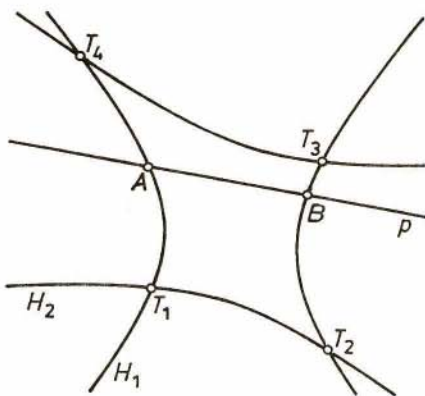
Od tod vrtnarska konstrukcija elipse.) Hiperbola ima dve veji. Za točke T na eni veji je $\overline{G_1T} - \overline{G_2T} = r$, na drugi $\overline{G_2T} - \overline{G_1T} = r$.

Če je $r = 0$, dobimo iz (1), da je $\overline{G_1T} = \overline{G_2T}$. V tem primeru leži T na simetrali daljice G_1G_2 in vsaka točka na simetrali zadošča temu pogoju. Zato je naša množica simetrala daljice G_1G_2 . Kadar je $r = a$, so točke G_1, G_2, T na isti premici, ker velja $|\overline{G_1T} - \overline{G_2T}| = a = \overline{G_1G_2}$. Zdaj sestoji množica iz točk na premici G_1G_2 . (Natančneje povedano: te točke sestavljajo dva poltraka premice G_1G_2 : poltrak z vrhom G_1 , na katerem ne leži G_2 , in poltrak z vrhom G_2 , na katerem ne leži G_1 (slika 2).) Simetrala daljice G_1G_2 in omenjena poltraka se včasih imenujeta **izrojeni hiperboli** z goriščema G_1 in G_2 .

2. Premica seče hiperbolo največ v dveh točkah. Dve različni hiperboli pa imata kvečjemu štiri skupne točke (slika 3). Dokažimo zdaj izrek. Zaradi enostavnosti privzemimo, da so stranice našega trikotnika $\overline{AB} = c, \overline{BC} = a, \overline{AC} = b$ cela števila.

Naj bo T taka točka v ravnini trikotnika, da so razdalje $\overline{AT}, \overline{BT}, \overline{CT}$ cela števila. Po trikotniški neenačbi je

$$|\overline{AT} - \overline{BT}| \leq \overline{AB} = c. \quad (2)$$



Slika 3.

Ker je tudi razlika $\overline{AT} - \overline{BT}$ celo število, ta neenačba pove, da je $|\overline{AT} - \overline{BT}|$ eno izmed števil $0, 1, \dots, c$. Množica točk T v ravnini, ki zadoščajo pogoju $|\overline{AT} - \overline{BT}| = r, r = 0, 1, \dots, c$, pa je hiperbola z goriščema v točkah A in B . Imenujmo to hiperbolo H_r . Torej naša točka T leži na eni izmed hiperbol

$$H_0, H_1, \dots, H_{c-1}, H_c \quad (3)$$

(H_0 in H_c sta izrojeni hiperboli: H_0 je simetrala daljice AB , H_c pa sestoji iz dveh poltrakov na premici AB .)

Ker sta prav tako razdalji $\overline{BT}$ in $\overline{CT}$ celi števili, ugotovimo kakor zgoraj, da mora ležati točka T tudi na eni izmed hiperbol

$$H'_0, H'_1, \dots, H'_{a-1}, H'_a. \quad (3^*)$$

Hiperbola H'_s je množica točk T v ravnini, ki zadoščajo pogoju $|\overline{BT} - \overline{CT}| = s$. Vse hiperbole (3^*) imajo gorišča v točkah B in C . Posebej je H'_0 simetrala stranice BC , H'_a pa sestoji iz dveh poltrakov na premici BC .

Hiperbole (3) so različne od hiperbol (3^*) . Prve imajo namreč gorišči A in B , druge pa B in C .

Vsaka točka T naše množice $\mathcal{M}$ leži torej na eni izmed hiperbol sistema (3) in hkrati na eni izmed hiperbol sistema (3^*) . Zato je $\mathcal{M}$ vsebovana v množici presečišč hiperbol (3) s hiperbolami (3^*) . Zgoraj smo povedali, da se dve hiperboli sečeta kvečjemu v štirih točkah, premica in hiperbola pa največ v dveh točkah. Torej je množica presečišč hiperbol (3) s hiperbolami (3^*) končna. Enako velja potem za množico $\mathcal{M}$. S tem je izrek dokazan.

Ni rečeno, da je vsako presečišče hiperbol v množici $\mathcal{M}$. Na primer H_0 in H'_0 sta simetrali stranic AB in BC . Presečišče je središče trikotniku ABC očrtanega kroga. Središče očrtanega kroga pripada množici $\mathcal{M}$ samo tedaj, kadar je polmer tega kroga celo število.

Na premici obstaja neskončna množica točk s to lastnostjo, da je razdalja dveh poljubnih njenih točk celo število. Naj bo npr. T_n točka na številski premici, ki je slika celega števila n . Množica $\{T_n, n \in \mathbb{Z}\}$ je neskončna, razdalja med poljubnima njenima točkama T_m in T_n pa je celo število $|m - n|$. Na ravnini bi zamažali iskali nekolinearno neskončno množico s to lastnostjo. Velja namreč

IZREK 2 (Anning - Erdős). Naj bo $\mathcal{M}$ ravninska množica točk, v kateri je razdalja dveh poljubnih točk celo število. Če ne leže vse točke iz $\mathcal{M}$ na isti premici, je $\mathcal{M}$ končna množica.

Izrek 2 je preprosta posledica izreka 1. Naj bo $\mathcal{M}$ taka ravninska množica, da ne leže vse njene točke na isti premici. Potem lahko najdemo v $\mathcal{M}$ tri točke A, B, C , ki so oglišča pravega trikotnika. Če je razdalja poljubnih dveh točk iz $\mathcal{M}$ celo število, so tudi razdalje $\overline{AT}, \overline{BT}, \overline{CT}$ cela števila za vsako točko $T \in \mathcal{M}$. Po izreku 1 pa je v ravnini samo končno mnogo takih točk T , da so razdalje $\overline{AT}, \overline{BT}, \overline{CT}$ cela števila. Torej je tudi množica $\mathcal{M}$ končna in izrek je dokazan.

Naj bo n poljubno dano naravno število. Oglejmo si v ravnini, ki je opremljena s pravokotnim koordinatnim sistemom, te točke

$$A = (0, 2^{n+1}), B = (0, -2^{n+1}), C_j = (2^j - 2^{2n-j}, 0), j = 0, 1, \dots, 2n.$$

Točke C_j leže na abscisni osi, njihove abscise so cela števila. Zato je razdalja

poljubnih dveh točk C_j in C_k celo število. Isto velja za razdaljo med točkama A in B , ki sta na ordinatni osi. Razdalja $\overline{AC_j} = d_j$ pa je enaka

$$d_j = \sqrt{(2j - 2^{2n-j})^2 + (2^{n+1})^2} = \sqrt{(2j + 2^{2n-j})^2} = 2^j + 2^{2n-j}.$$

Torej je d_j celo število za vsak indeks j . Prav tako je $\overline{BC_j} = d_j$. Vse razdalje so potemtakem cela števila. Naša množica sestoji iz $2n + 3$ točk, ki niso kolinearne. Ker je n lahko katerokoli naravno število, vidimo, da obstaja v ravnini množica $\mathcal{M}$ s poljubno velikim številom točk, ki ne leže na isti premici, razdalja poljubnih dveh točk iz $\mathcal{M}$ pa je celo število.

Naloge.

1. Kolikšno je največje možno število presečišč hiperbol sistema (3) s hiperbolami sistema (3*)?

2. Dokaži, da obstaja v prostoru neskončno takih točk T , za katere so razdalje $\overline{AT}$, $\overline{BT}$, $\overline{CT}$ od oglišč danega trikotnika ABC cela števila.

3. Poišči kak štirikotnik, ki ni pravokotnik, njegove stranice in diagonali pa so cela števila.

Ivan Vidav

TELEFONSKA ŠTEVILKA MOJE MAME

Večina med vami je že prisluhnila na televiziji ali na radiu oddajam, kjer gledalci ali poslušalci postavljajo vprašanja, na katera voditelj oddaje odgovarja le z da ali z ne.

Predstavljajte si, da bi vi na ta način poskušali ugotoviti telefonsko številko moje mame. Pri nas na podeželju imamo še petmestne številke, kar pomeni, da morate uganiti prvo številko med števili 1, 2, ..., 9 in nato še štiri številke med števili 0, 1, ..., 9.

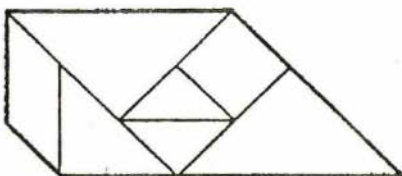
Najbrž bi spraševali takole: Ali je prva številka 1? Ali je prva številka 2? In tako dalje, odvisno od odgovorov. V najslabšem primeru bi morali zastaviti $9 + 10 + 10 + 10 + 10 = 49$ vprašanj. Veliko, posebno, ker pri takih oddajah radi omejijo tudi čas za ugibanje.

Zato poiščite boljšo strategijo spraševanja. Drugače povedano: potrebno je določiti najmanjše število vprašanj, s katerimi lahko zanesljivo izveste telefonsko številko moje mame.

Borut Zalar

KONVEKSNI TANGRAMSKI LIKI – Rešitev s str. 220

Če dvanajstim objavljenim kotalijem poiščemo njihovo mesto v razpredelnici, ugotovimo, da vrstica s parametri $p = 1$, $q = 1$, $r = 3$ in $n = 5$ ne opisuje nobenega od njih. Torej opisuje ta vrstica prav tistega, ki na sliki 1 manjka. To je kotali:



Vilko Domajnko

KAKO SEM PRIŠLA MED MATEMATIKE

Leta 1952 sem delala maturo na ptujski gimnaziji. Republiški opazovalec mature je bil profesor Ivan Lovše. Pri matematiki sem morala izpeljati obrazec za prostornino piramide z limito vsote prostornin prizem. Naloga je precej zahtevna. Imenitno se mi je posrečila. Lovše me je vprašal:

"Dekle, kaj boš študirala?"

"Medicino."

"Ne, medicina ni zate. Ti si rojena, da boš poučevala matematiko. Tako dobre razlage doslej še nisem slišal."

Pozneje, na valeti, me je prepričal, da sem vpisala matematiko. Študij ni bil lahek. Poklic tudi ne. Vendar sem bila s svojim delom zelo zadovoljna. Če bi danes lahko izbirala, bi hotela še enkrat biti profesorica matematike na gimnaziji.

Komentar mojih domačih:

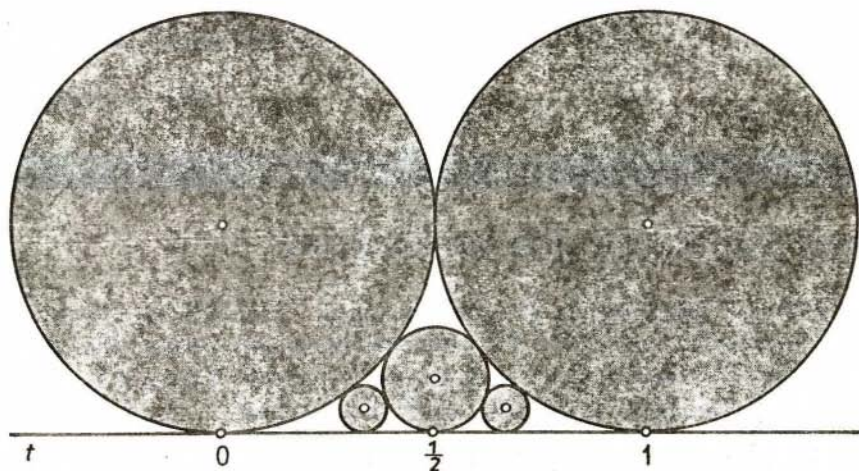
"Mislili smo, da bomo dobili zdravnico. Sedaj pa imamo samo učiteljico."

*Marija Munda**

* Profesorici Mariji Mundi so na zadnjem občnem zboru Društva matematikov, fizikov in astronomov Slovenije podelili naziv častne članice društva. V tem Preseku objavljamo še nekaj njenih utrinkov z njenega dolgoletnega poučevanja v srednji šoli.

FORDOVI KROGI

Na ravnini ležita dva enako velika kroga in se dotikata. To naj bosta prva dva iz družine *Fordovih krogov*, ki jo bomo zdaj zgradili. Skupno tangento t obeh krogov opremimo s koordinatnim sestavom tako, da se je eden od krogov dotika v točki 0, drugi pa v 1 (točke na t istovetimo z realnimi števili). Tretji član družine je krog, ki se dotika prvih dveh in tangente t , seveda v točki $\frac{1}{2}$. Nadaljujmo podobno. Vsakemu paru pridelanih Fordovih krogov K_1 in K_2 , ki se dotikata, dodajmo nov krog K , ki se dotika obeh in še premice t . Tako dobimo družino vseh Fordovih krogov.



Slika 1. Največjih pet Fordovih krogov

Naloga 1. *Kako načrtamo krog K , če imamo dana kroga K_1 , K_2 in tangento t ?*

Na opisani način postopoma pridemo do vsakega Fordovega kroga, vendar moramo pri tem poznati njegove predhodnike. Seveda je to precejšnja ovira, zato bi se ji radi ognili in neposredno spoznali vse kroge. Pa se lotimo te naloge:

Dva podatka bosta dovolj za Fordov krog: njegov polmer in dotikališče s premico t . Določili ju bomo v nekaj korakih.

Najprej si oglejmo naslednji splošnejši položaj in ga v obliki naloge postavimo bralcu.

Naloga 2. Kroga K_1 in K_2 s polmeroma r_1 oziroma r_2 se dotikata skupne tangente t zaporedoma v točkah T_1 in T_2 . Obeh se dotika tretji krog K s polmerom r , ki ima dotikališče T s tangento t med točkama T_1 in T_2 . Izrazi z r_1 in r_2 polmer r in razdalje $d = |T_1 T_2|$, $d_1 = |T_1 T|$ in $d_2 = |T_2 T|$.

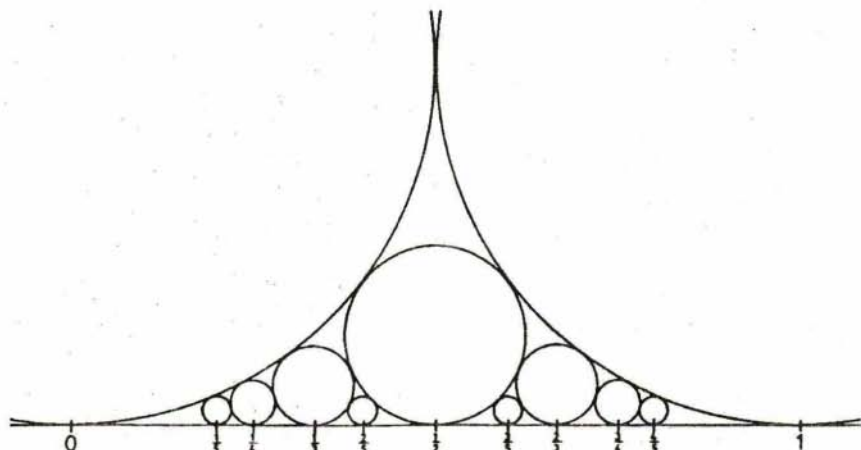
Rešitev naloge najdete v naslednji številki, rezultate pa (skoraj v celoti) razgrnimo kar tu, saj jih bomo takoj potrebovali. Dobimo

$$d = 2\sqrt{r_1 r_2}, \quad d_1 = 2\sqrt{r_1 r}, \quad d_2 = 2\sqrt{r_2 r} \quad (1)$$

in od tod še

$$r = \frac{r_1 r_2}{(\sqrt{r_1} + \sqrt{r_2})^2}. \quad (2)$$

Uporabimo zdaj te formule za izračun polmerov in dotikališč (s tangento t) nekaterih največjih Fordovih krogov. Prva dva imata polmera $\frac{1}{2}$, dotikališči pa v točkah 0 in 1. Tretji se dotika t v točki $\frac{1}{2}$, njegov polmer pa je po formuli (2) enak $\frac{1}{8}$. Naslednja dva sta očitno enako velika. Z uporabo (2) dobimo njuna polmera $\frac{1}{18}$, s pomočjo (1) pa dotikališči $\frac{1}{3}$ in $\frac{2}{3}$. Zabeležimo še podatke nadaljnjih šestih Fordovih krogov. Dva imata polmer $\frac{1}{32}$, štirje pa $\frac{1}{50}$. Njihova dotikališča so v točkah $\frac{1}{4}$, $\frac{3}{4}$ ter $\frac{1}{5}$, $\frac{2}{5}$, $\frac{3}{5}$ in $\frac{4}{5}$. Kaj opazimo?



Slika 2.

Polmeri vseh naštetih krogov so oblike $\frac{1}{2n^2}$, $n \in \mathbb{N}$, ustrezna dotikališča s t pa so okrajšani ulomki oblike $\frac{m}{n}$ z intervala $[0,1]$. Navedeni primeri to potrjujejo za največje Fordove kroge, zato brž zaslutimo, da je podobno z vsemi Fordovimi krogi. To obetavno slutnjo oblikujmo v

Izrek 1. *Za vsak Fordov krog obstaja tak $n \in \mathbb{N}$, da je polmer kroga enak $\frac{1}{2n^2}$, njegovo dotikališče s t pa je okrajšani ulomek oblike $\frac{m}{n}$ z intervala $[0,1]$.*

Bralca vabimo, da se prepriča o pravilnosti naslednjega kriterija, ki ga bomo uporabili pri dokazu izreka 1.

Naloga 3. *Naj se Fordova kroga $\mathcal{K}_1$ in $\mathcal{K}_2$ s polmeroma*

$$r_1 = \frac{1}{2n_1^2} \text{ in } r_2 = \frac{1}{2n_2^2}, (n_1, n_2 \in \mathbb{N})$$

dotikata premice t zaporedoma v točkah-ulomkih

$$\frac{m_1}{n_1} \text{ in } \frac{m_2}{n_2}, \left(\frac{m_1}{n_1} < \frac{m_2}{n_2} \right).$$

Dokaži, da se $\mathcal{K}_1$ in $\mathcal{K}_2$ dotikata med sabo natanko takrat, kadar velja

$$m_2 n_1 - m_1 n_2 = 1. \quad (3)$$

Rešitev naloge preberite v naslednji številki, mi pa začnimo z dokazom izreka:

Krogoma $\mathcal{K}_1$ in $\mathcal{K}_2$ iz gornje naloge pridružimo krog $\mathcal{K}$ tako kot v drugi nalogi in izračunajmo njegov polmer r ter dotikališče x s premico t .

Formula (2) nam da polmer

$$r = \frac{r_1 r_2}{(\sqrt{r_1} + \sqrt{r_2})^2} = \frac{\frac{1}{2n_1^2} \frac{1}{2n_2^2}}{\left(\frac{1}{n_1 \sqrt{2}} + \frac{1}{n_2 \sqrt{2}} \right)^2} = \frac{1}{2(n_1 + n_2)^2}.$$

Od tod s pomočjo formule (1) po kratkem računu dobimo dotikališče

$$x = \frac{m_1}{n_1} + 2\sqrt{r_1 r} = \frac{m_1 n_1 + m_1 n_2 + 1}{n_1(n_1 + n_2)}.$$

Zveza (3) nam x še poenostavi:

$$x = \frac{m_1 n_1 + m_1 n_2 + (m_2 n_1 - m_1 n_2)}{n_1(n_1 + n_2)} = \frac{m_1 + m_2}{n_1 + n_2}.$$

Postavimo

$$m = m_1 + m_2, \quad n = n_1 + n_2$$

in se prepričajmo, da so dotikališča $\frac{m_1}{n_1}$, $\frac{m_2}{n_2}$ in $\frac{m}{n}$ vseh treh krogov okrajšani ulomki. Res, za prva dva to sledi iz zveze (3) (Zakaj?). Ta nam da še enakost

$$m n_1 - m_1 n = m_2 n_1 - m_1 n_2 = 1,$$

ki pove, da je tudi tretji ulomek okrajšan. Krog K ima potemtakem polmer $\frac{1}{2n^2}$ in se dotika premice t v okrajšanem ulomku $\frac{m}{n}$.

Spomnimo se le še na postopek, s katerim pridobivamo Fordove kroge, in dokaz izreka je sklenjen.

Ponovno si oglejmo največje Fordove kroge in razvrstimo po vrsti dotikališča s premico t za vse tiste, katerih polmeri ne presegajo $\frac{1}{50}$:

$$\frac{0}{1}, \frac{1}{5}, \frac{1}{4}, \frac{1}{3}, \frac{2}{5}, \frac{1}{2}, \frac{3}{5}, \frac{2}{3}, \frac{3}{4}, \frac{4}{5}, \frac{1}{1}.$$

Dobili smo naraščajoče zaporedje vseh okrajšanih ulomkov z intervala $[0,1]$, katerih imenovalci ne presegajo 5. Ker sta sosednja ulomka $\frac{m_1}{n_1}$ in $\frac{m_2}{n_2}$ v tem zaporedju dotikališči takih Fordovih krogov, ki se dotikata tudi med sabo, velja zveza (3). Spet se ne moremo upreti skušnjavi posploševanja.

Najprej se ozrimo na splošna zaporedja ulomkov zgornjega tipa. Imenujemo jih Fareyeva¹ zaporedja. Natančneje:

Fareyev zaporedje $\mathcal{F}_k$ reda k je naraščajoče zaporedje vseh okrajšanih ulomkov z intervala $[0,1]$, katerih imenovalci niso večji od k .

Ulomek $\frac{m}{n}$ je torej v $\mathcal{F}_k$ natanko takrat, kadar velja $0 \leq m \leq n \leq k$ in sta števili m , n tuji (pri tem pa je število 0 tuje le številu 1). Prej smo torej zapisali Fareyev zaporedje $\mathcal{F}_5$, ki nas je pripeljalo k naslednji domnevi. Ker

¹ Ime ni upravičeno: Farey je namreč leta 1816 le omenil ta zaporedja in brez dokaza zapisal njihovo lastnost iz naloge 4, Haros pa je zaporedja obravnaval že leta 1802 in tudi dokazal lastnosti iz izreka 2 in naloge 4.

bomo videli, da je pravilna, jo strnimo v

Izrek 2. Zaporedna člena $\frac{m_1}{n_1}$ in $\frac{m_2}{n_2}$, ($\frac{m_1}{n_1} < \frac{m_2}{n_2}$) Fareyvega zaporedja F_k ustrezata pogoju $m_2 n_1 - m_1 n_2 = 1$.

Dokaz bomo oprli na dobro znani rezultat, ki pa ga kljub temu kot nalogo postavimo bralcu.

Naloga 4. Dokaži, da za vsak par tujih celih števil m, n obstajata celi števili x, y , ki rešita enačbo $nx - my = 1$.

Zdaj pa k dokazu izreka 2. Ulomek $\frac{m_1}{n_1}$ je okrajšan, zato sta števili m_1 in n_1 tuji. Izberimo celi števili x_1 in y_1 tako, da velja

$$n_1 x_1 - m_1 y_1 = 1.$$

Postavimo

$$x = x_1 + p m_1, \quad y = y_1 + p n_1,$$

kjer smo $p \in \mathbb{Z}$ izbrali tako, da velja ocena

$$k - n_1 < y \leq k. \quad (4)$$

(Zakaj je to možno?) Potem je

$$n_1 x - m_1 y = 1,$$

števili x in y sta tuji, zaradi $n_1 \leq k$ in ocene (4) pa velja $0 \leq k - n_1 < y \leq k$. Od tod sledi, da je

$$\frac{x}{y} \in \mathcal{F}_k \text{ in } \frac{x}{y} - \frac{m_1}{n_1} = \frac{1}{n_1 y} > 0. \quad (5)$$

Pokažimo, da velja

$$x = m_2, \quad y = n_2.$$

Če to ni res, je

$$\frac{m_1}{n_1} < \frac{m_2}{n_2} < \frac{x}{y}$$

in zato

$$\frac{x}{y} - \frac{m_2}{n_2} \geq \frac{1}{n_2 y}, \quad \frac{m_2}{n_2} - \frac{m_1}{n_1} \geq \frac{1}{n_1 n_2}.$$

Seštejmo obe neenakosti in upoštevajmo oceno (4), pa dobimo

$$\begin{aligned} \frac{x}{y} - \frac{m_1}{n_1} &\geq \frac{1}{n_2 y} + \frac{1}{n_1 n_2} = \\ &= \frac{n_1 + y}{n_1 n_2 y} > \frac{k}{n_1 n_2 y} \geq \frac{1}{n_1 y}. \end{aligned}$$

Prišli smo v protislovje s (5), torej res velja $x = m_2$ in $y = n_2$. Dokaz izreka je s tem sklenjen, saj je

$$m_2 n_1 - m_1 n_2 = n_1 x - m_1 y = 1.$$

Posledica. Sosednja člena Fareyevga zaporedja $\mathcal{F}_k$ z indeksom $k > 1$ imata različna imenovalca.

Dokaz. Enakost, ki ji zadoščata sosednja člena Fareyevga zaporedja $\mathcal{F}_k$, pove, da sta njuna imenovalca tuja in zato pri $k > 1$ različna.

Eno od zanimivih lastnosti Fareyevih zaporedij razkriva naslednja naloga, ki jo bo s pomočjo izreka 1 lahko ugnati:

Naloga 5. Naj bodo $\frac{m_1}{n_1}$, $\frac{m_2}{n_2}$ in $\frac{m_3}{n_3}$ zaporedni členi nekega Fareyevga zaporedja. Potem velja

$$\frac{m_2}{n_2} = \frac{m_1 + m_3}{n_1 + n_3}.$$

Vrnimo se zdaj k Fordovim krogom. Vemo, da se vsak dotakne premice t v racionalni točki (ulomku) z intervala $[0,1]$. Ali velja tudi obratno: Vsaka racionalna točka z intervala $[0,1]$ na premici t je dotikališče Fordovega kroga? Odgovor je pritrjen in ga vključimo v

Izrek 3. Dotikališča Fordovih krogov so natanko vse racionalne točke intervala $[0,1]$ na premici t .

Zaradi izreka 1 zadošča dokazati, da je vsak okrajšani ulomek $\frac{m}{n}$ z intervala $[0,1]$ dotikališče enega od Fordovih krogov. Dokazovali bomo s

pomočjo matematične indukcije po n :

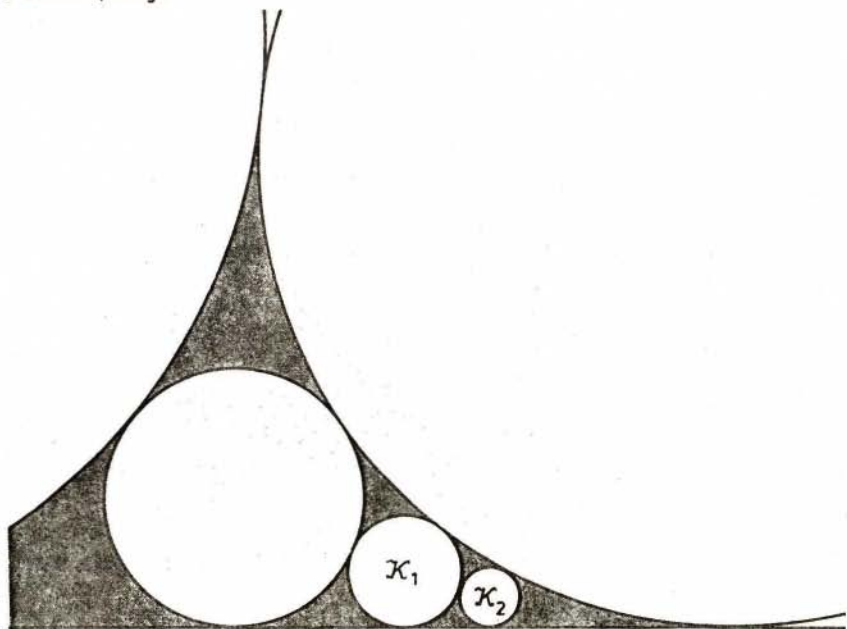
Ulomkov $\frac{0}{1}$ in $\frac{1}{1}$ se dotikata največja Fordova kroga, torej pri $n = 1$ trditev drži.

Naj bo zdaj k poljubno naravno število, večje od 1. Predpostavimo, da trditev velja za $n = k - 1$, in dokažimo, da potem velja tudi za $n = k$.

Naj bo $\frac{j}{k}$ poljuben okrajšani ulomek z intervala $[0, 1]$. Seveda je $\frac{j}{k}$ člen Fareyvega zaporedja $\mathcal{F}_k$, različen od 0 in 1. Njegova soseda

$$\frac{m_1}{n_1}, \frac{m_2}{n_2} \left(\frac{m_1}{n_1} < \frac{m_2}{n_2} \right)$$

v $\mathcal{F}_k$ imata po posledici izreka 2 imenovalca manjša od k , zato sta sosednja člena Fareyvega zaporedja $\mathcal{F}_{k-1}$. Po izreku 2 je tedaj $m_2 n_1 - m_1 n_2 = 1$, zaradi naše predpostavke pa obstajata Fordova kroga $\mathcal{K}_1$ in $\mathcal{K}_2$, ki se zaporedoma dotikata t v točkah $\frac{m_1}{n_1}$ in $\frac{m_2}{n_2}$. Naloga 3 pove, da se $\mathcal{K}_1$ in $\mathcal{K}_2$ dotikata med sabo. Iz dokaza izreka 1 zvmemo, da se potem Fordov krog $\mathcal{K}$, ki se dotika $\mathcal{K}_1$ in $\mathcal{K}_2$, dotakne premice t v točki $\frac{m_1 + m_2}{n_1 + n_2}$. Z uporabo naloge 5 vidimo, da je



Slika 3.

$$\frac{j}{k} = \frac{m_1 + m_2}{n_1 + n_2},$$

zato je $\frac{j}{k}$ dotikališče Fordovega kroga $\mathcal{K}$ s t .

Indukcijski korak je s tem sklenjen, dokaz izreka pa končan.

Družino Fordovih krogov smo zgradili iz dveh *enako velikih* dotikajočih se krogov, ki sta hkrati njena največja člana. Zdaj pa predpostavimo, da 'začetna' kroga $\mathcal{K}_1$ in $\mathcal{K}_2$, ki se dotikata med sabo, nista enako velika. Prav tako kot Fordove kroge zgradimo iz $\mathcal{K}_1$ in $\mathcal{K}_2$ družino krogov, ki jih imenujmo *posplošeni Fordovi krogi*.

V družini vseh posplošenih Fordovih krogov ni nujno največjega kroga. Seveda nas zanima, kdaj pa tak krog vendarle obstaja. Torej ne bo odveč

Naloga 6. Poišči potreben in zadosten pogoj za polmera začetnih krogov $\mathcal{K}_1$ in $\mathcal{K}_2$ družine vseh posplošenih Fordovih krogov, da bo v tej družini vsaj en največji krog.

Članek s tem sklenimo, bralca pa vabimo, da razkrije še kakšno lastnost posplošenih Fordovih krogov.

Boris Lavrič

KRIŽANKA PROFESORJU ZA ŽIVLJENJSKI JUBILEJ – Rešitev s str. 224



ASTRONOMIJA

SIRIJ

*Na robu neba - zvezda omega,
ves v iskrah se Sirij lesketa.
Nad glavo - nema Vega
v carstvu mraka in snega
ledena nad zemljo trepeta.*

A.A.Blok (prev.M.Prosén)

Seveda si se že kdaj pa kdaj zazrl v zvezdano nebo. V jasnih zimskih večerih je res čudovito. Zvečer in ponoči pa na zimskem nebu lahko opazuješ poleg lepega Oriona in drugih značilnih ozvezdij tega časa še najsvetlejšo zvezdo vsega neba - svetlobleščeči Sirij, ki sveti v ozvezdju *Velikega psa* (slika 1).

Veliki pes - Canis Maior je bil večji in bolj divji od dveh lovskih psov, ki sta bila neprekosljivemu mitičnemu lovcu Orionu zvesta spremljevalca na Zemlji. Ovekovčena sta ob njegovih nogah na nebu tako, da bi ta največji lovec starih časov z njuno pomočjo lahko nadaljeval lov na Bika - Taurusa po širnih nebesnih poljanah.

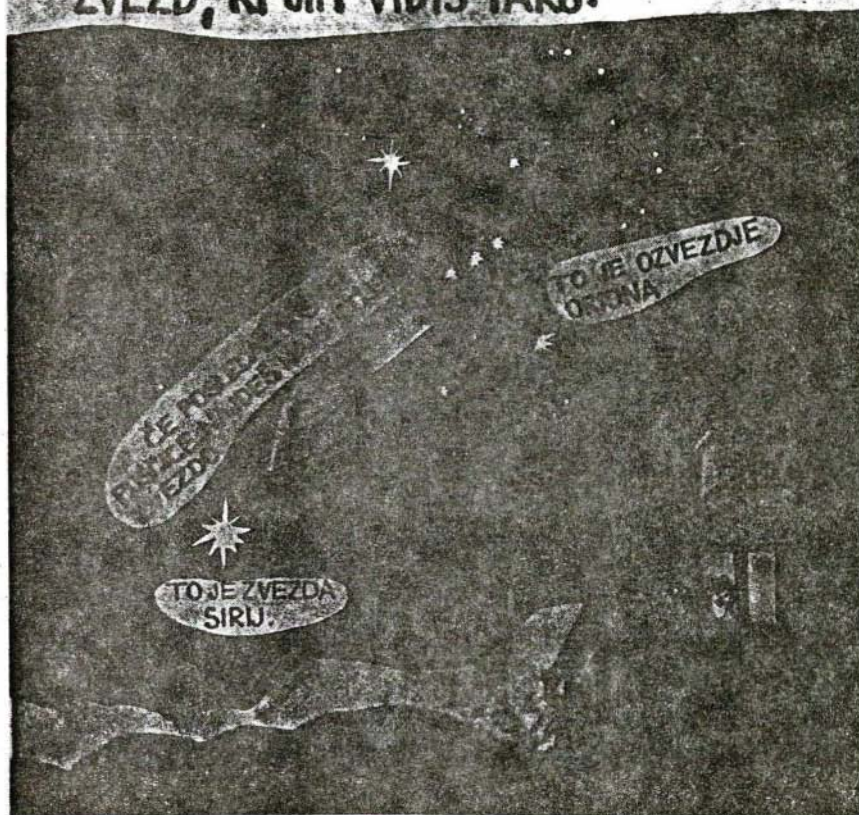
Le malo domišljije je treba, da v številnih zvezdah tega ozvezdja izslediš obrise psa, ki stoji pod Orionom, z obrnjeno glavo navzgor in repom navzdol ter s svojim svetlim očesom (tudi srcem) - zvezdo Sirij - zvesto gleda gospodarja in budno čaka na njegov ukaz (slika 2).

Velikega psa prikazujejo tudi kot slavnega lovskega psa z imenom Laelaps. Če je zasledil vonj kake živali, ni odnehal, dokler ni ujel svojega plena. Pes je bil pravzaprav eden od dveh nenavadnih daril, ki jih je dobil Kefal (vnuk Eola, boga vetrov), ko je poročil lepo dekle Prokris. Drugo darilo je bilo kopje, dolga sulica, ki nikdar ne zgreši.

Kefal je pregovoril svojo ženo, da mu je pustila vzeti na lov psa in kopje. Ko je odšel za nekaj dni, je bilo Prokris zelo dolgčas in odločila se je, da ga preseneti z obiskom v njegovem taboru. Ko se je tiho približevala taboru, jo je Laelaps zaslišal in zarenčal v svarilo Kefalu. Ta je prisluhnil šumom. Mislił je, da jih povzroča divja žival. V temi je zalučal sulico v smer šuma in kopje, ki nikoli ne zgreši, je ubilo Prokris.

Čeprav Laelaps ni naredil nič drugega, kot da je opozoril gospodarja - kar bi naredil vsak zvest pes - je bil zelo nepravilno kaznovan. Postavili so ga med zvezde blizu Oriona in ga obsodili, da lovi Zajca za vse večne čase po nebu.

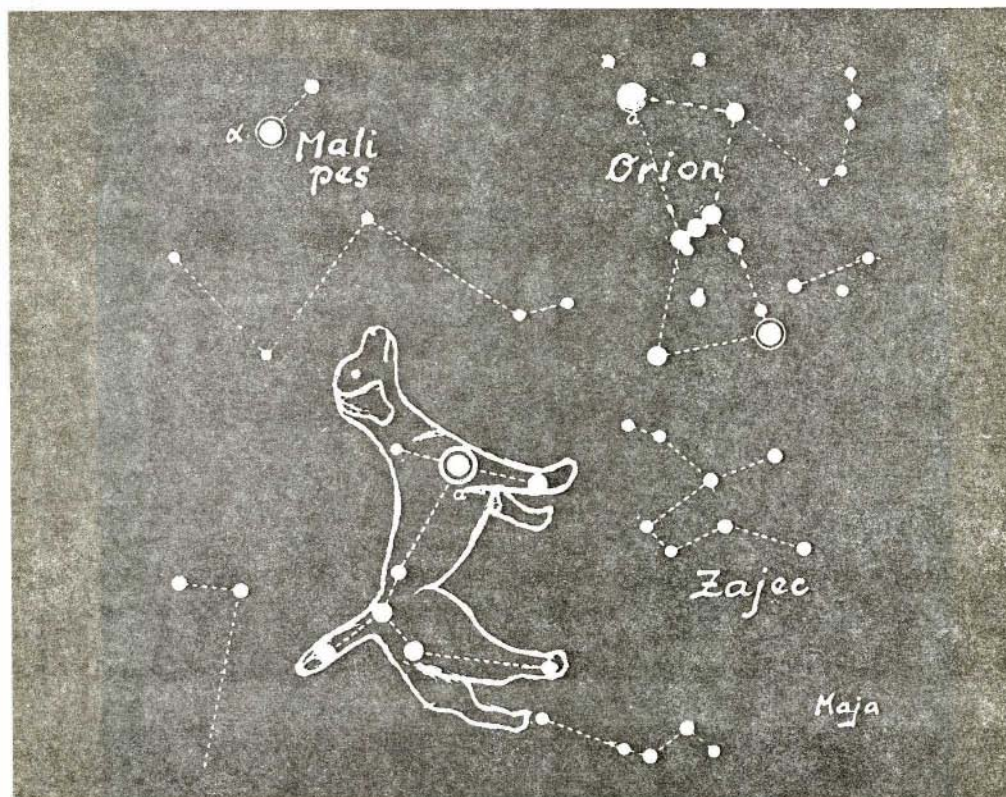
**POZIMI LAHKO OPAZUJEŠ
MNOGO SVETLIH ZVEZD.
ZVEČER POGLEJ NA JUŽNO
STRAN NEBA IN POIŠČI PET SVETLIH
ZVEZD, KI JIH VIDIŠ TAKO:**



Slika 1. Takole izslediš najsvetlejšo zvezdo neba Sirij, ki leži v ozvezdju Velikega psa. Uradni naziv zvezde Sirij je α Canis Majoris (Alfa Velikega psa). Sliko je narisal Matjaž Schmidt.

Kot najsvetlejša zvezda, stoletja in stoletja vidna iz skoraj vsakega kraja na Zemlji, je bil Sirij pogosto predmet velikega občudovanja in oboževanja.

Pesniki so opevali njegovo slikovito mežikanje. Primerjali so njegovo svetelnost z najlepšim diamantom, ki spreminja barve kot kalejdoskop od rubinove do safirne in ametistove barve. Vse zvezde bolj ali manj migotajo (scintilirajo). Svetloba z zvezd gre namreč na svoji poti do Zemljinega površja skozi vrtnčaste (turbulentne) zračne plasti in zato spremeni smer. Čim nižje je zvezda nad obzorjem, tem bolj migota, saj mora njena svetloba narediti daljšo



Slika 2. Ozvezdje Velikega psa z glavno zvezdo Sirij. Stari Egipčani so Sirij tako oboževali, da so mu postavljali templje, kjer so sredi julija tik pred Soncem opazovali njegov vzhod, ki je naznanjal začetek poplav. Prav nasprotno pa so ga Rimljani sovražili in se ga bali. Istega jutra sredi julija so gledali vzhod Sirija vse prej kot s prijetnimi občutki. Takrat se je namreč začela vse hujša vročina (pasji dnevi), ki je prinesla veliko neugodje ljudem, povzročila, da so od vročine psi ponoreli, pridelek pa je bil požgan. Zanje ni bil kot za Egipčane prijazen bog, ampak so ga imeli za jezno in nepristopno božanstvo, ki mu je treba dajati daritve v upanju, da bodo z njimi osvojili njegovo naklonjenost in odvrnili njegovo sovraštvo. Zanje je bila Sirij zvezda, katere goreča sapa okuži zemeljski zrak z vročino, kugo in smrtjo.

pot skozi najgostejše in najbolj razburkane spodnje plasti našega ozračja in zato najbolj spremeni smer.

Zaradi svojega močnega sija in zaradi tega, ker je pri nas nikdar ne vidimo visoko nad obzorjem, je Sirij prvovrstna migotajoča zvezda. Opazuj jo za trenutek. Videl boš, kako blešči in se iskri, se prižiga in ugaša in tako spreminja vse mavrične barve. Njeno migotanje opaziš že s prostim očesom, bolje pa ga zaznaš z lovskim daljnogledom.

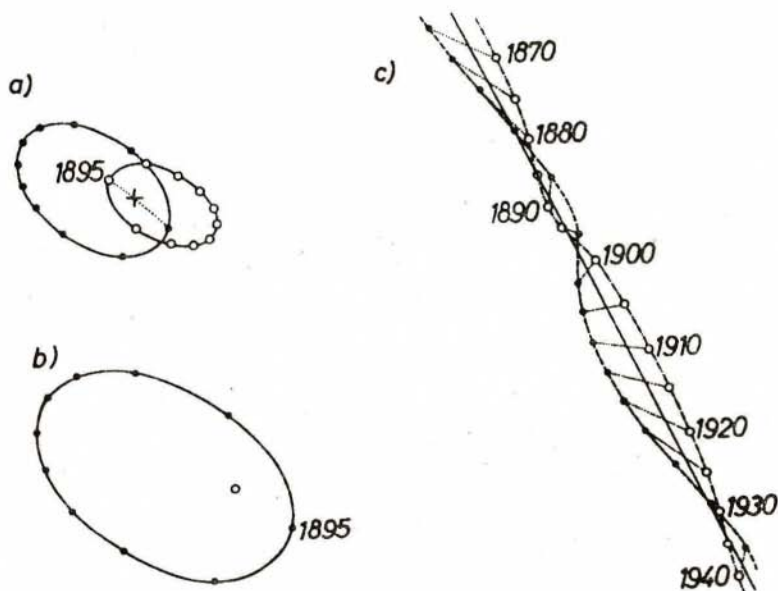
Zaradi svojega izjemnega mesta med zvezdami je zvezda Sirij v zgodovini človeštva odigrala pomembno vlogo v znanosti in religiji, prav posebno pa v običajih narodov antičnega sveta.

Pri starih Egipčanih je tisočletja prvi opaženi vzhod Sirija (v letu) v jutranji zarji, skoraj v žarkih vzhajajočega Sonca, naznanjal začetek poplav reke Nila. Poplave so prinesle novo rodovitno zemljo, ki je obetala dobre pridelke, ko bo voda odtekla. Sirij so zato naravnost oboževali. Imeli so ga za *Sotis*, solzo boginje rodovitnosti Izide. Nilove vode naj bi narasle zaradi Izidinih solza, ki jih pretaka za svojim umrlim možem bogom Ozirisom. Sicer pa je ime te zvezde grškega izvora in pomeni žgoč, vroč, soparen. To zato, ker se je Sirij začel pojavljati na jutranjem nebu pred vzhodom Sonca v času največje vročine v juliju in avgustu, pa so mislili, da toplota ne prihaja od Sonca, ampak z najsvetlejše zvezde. Stari Grki so Siriju rekli kar *Pes*, *Psica*. Ime se je ustalilo in od Grkov so ime prevzeli Rimljani in Arabci. Rimljani so to zvezdo laskavo imenovali *Psička* (latinsko *canicula*; izgovori kanikula), Arabci pa *Psica Velikanka*. Angleži Siriju rečejo *Dog-Star* (Pasja zvezda). Pri nas (predvsem na Štajerskem) se je udomačilo zanjo ime *Kuzlak*.

Egipčani so torej Sirij povezovali z obdobjem nastopov poplav, pri Grkih in Rimljanih pa je pojavljanje Sirija na nebu označevalo začetek uničujoče poletne vročine, ko so bili ljudje prisiljeni zaradi pripeke prekiniti poljedelska in druga dela. To prekinitvev - odmor (počitnice) so imenovali *caniculares dies* - *pasji dnevi*; v letu 1992 so pasji dnevi od 22.7. do 22.8.).

Pa pogledjmo, kaj še vemo o Siriju. Navedimo najprej nekaj osnovnih podatkov. Sirij je ena nam najbližjih zvezd. Od nas je oddaljena 8,8 svetlobnih let, kar je približno dvakrat toliko, kot je oddaljena najbližja zvezda (glej *Presek* 19, 38). Sirij je - grobo gledano - povsem normalna zvezda s površinsko temperaturo okoli 10000 K. Njen polmer je 1,8 krat večji od polmera Sonca, njen izsev (svetlobna moč) pa okoli 25 krat večji od izseva Sonca. Sirij sveti torej kot 25 Sonc, a ker je tako daleč, pride do nas tako malo njegove svetlobe (glej zglede na koncu tega prispevka).

O Siriju pa vemo še dosti več, kot smo pravkar povedali. Če bi se mu lahko zelo približali in bi ga torej opazovali dovolj od blizu, bi ugotovili, da je pravzaprav dvojna zvezda (dvozvezdje), to je par zvezd, ki krožita druga okrog druge (slika 3). To so odkrili že v sredini preteklega stoletja. Zvezdi sta druga od druge oddaljeni približno 15 astronomskih enot (ta razdalja pa se spreminja; pomisli, zakaj) in se obkrožita v 50 letih. Obe zvezdi se med seboj zelo razlikujeta. Sirijeva spremljevalka - Sirij B oddaja okoli 10^{-4} krat manj svetlobe v prostor kot glavna zvezda - Sirij A. Po zadnjih meritvah je površinska temperatura Sirija B blizu 25000 K, to pa je mogoče le, če je zvezda zelo majhna. Računi res kažejo, da je polmer te zvezde približno 10^{-2} polmera Sonca, torej je zvezda približno tako velika kot Zemlja. Pri dvojnih zvezdah lahko določimo tudi maso posameznih zvezd. Izračunali so, da ima Sirij A maso 2,3 mase Sonca, Sirij B pa maso 0,98 mase Sonca. Torej mora biti povprečna gostota Sirija B ogromna. Po vseh teh značilnostih Sirij B



Slika 3. Gibanje zvezd v dvojni zvezdi Sirij. Glavna zvezda - Sirij A je označena s svetlim krožcem, njegova spremljevalka - Sirij B pa s temnim. a) Tira gibanja zvezd glede na skupno težišče, ki je označeno s križcem; b) Tir gibanja spremljevalke glede na glavno zvezdo; c) Tira gibanja glavne zvezde in spremljevalke glede na ozadje zvezdnega neba; težišče se giblje po premici, zvezdi pa po vijugastih poteh.

uvrščamo med posebne zvezde - *bele pritlikavke*. Belih pritlikavk ni mogoče šteti za normalne zvezde, vendar niso tako maloštevilne v vesolju.

Za bolj zahtevne Presekovne bralce pa ob koncu posredujemo še tri naloge o zvezdi Sirij:

1. Gostota svetlobnega toka, ki s Sirija v oddaljenosti $r = 9$ svetlobnih let pade na Zemljino površje, je $j = 10^{-7} \text{ W/m}^2$. Izračunaj izsev P Sirija in ga primerjaj z izsevom Sonca $P_0 = 4 \cdot 10^{26} \text{ W}$. Eno svetlobno leto je 10^{16} m .

2. S Sirija B prihaja na Zemljo deset tisočkrat manj svetlobnega toka kot s Sirija A. Izračunaj kvocient izsevov. Upoštevaj, da je razdalja med zvezdama zanemarljivo majhna v primerjavi z razdaljo med Zemljo in Sirijem.

3. Polmer Sirija B je $R = 0,01 R_0$ (R_0 je polmer Sonca), njegova masa pa je približno enaka masi Sonca m_0 . Izračunaj povprečno gostoto zvezde Sirij B, če je povprečna gostota Sonca $\rho_0 = 1400 \text{ kg/m}^3$.

Marijan Prosén

ZVEZDA Z IZJEMNO VELIKIM IZSEVOM

Na južni nebesni polkrogli v ozvezdju Zlate ribe (Dorado) leži nenavadna zvezda. Njena uradna oznaka je *S Dorado* (najbrž nekaj v zvezi z besedo "super"). Te zvezde s prostim očesom ni mogoče videti. Zasledili pa bi jo z daljnogledom, ki ima odprtino 8 do 10 cm. Ta navidez šibka zvezda leži približno 15000 - krat dalj, kot je od nas oddaljena zvezda Sirij (glej članek o njej v tem *Preseku*). Če bi jo bilo mogoče primakniti na oddaljenost Sirija, bi svetila tako močno kot Luna ob prvem krajcu. Med zvezdami na nočnem nebu torej ne bi svetila kot običajna zvezda, ampak kot pravcata supernova.

Iz navedenih podatkov izračunamo, da ima zvezda *S Zlate ribe* strašansko velik izsev, kar milijonkrat večji od izseva Sonca. To pomeni, da ta zvezda oddaja milijonkrat več svetlobe v prostor kot Sonce.

Zaenkrat še niso odkrili zvezde, ki bi imela večji izsev. Pomisli, kaj bi bilo z Zemljo in z nami, ko bi bila ta zvezda naše Sonce.

Marijan Prosén

RACUNALNIŠTVO

(K)URNIK, 1. del

1. Problem

Napisati program, ki sestavi šolski urnik, je težak problem. Sestaviti program, ki bi avtomatsko sestavil optimalen urnik, pa je pravzaprav brezupna naloga. Vsak tak program bi namreč imel preveliko časovno zahtevnost, torej na nobenem, še tako hitrem računalniku, ne bi rešil naloge v sprejemljivem času. Zato mora biti vsak program, ki sestavlja urnik, bolj ali manj "približen", dopuščati pa mora tudi ročno popravljanje in usmerjanje poteka sestavljanja.

V tem prispevku si bomo ogledali algoritem, ki nam bo rešil vsaj eno izmed zahtev, ki jih lahko naložimo urniku. Za cilj si zastavimo urnik, ki bo materialne stroške (ogrevanje, razsvetljavo, ...) čim bolj zmanjšal. Očitno bomo to dosegli, če bo šola odprta najkrajši možni čas. Ker od urnika zahtevamo optimizacijo le enega pogoja, bo naš urnik seveda še daleč od zares dobrega. Tako na primer ne bomo skrbeli za luknje v pouku (tako za učence kot za učitelje). Vseeno pa je problem dovolj zanimiv, da je vreden natančnejše obravnave. Problem torej je:

Sestavi tak urnik, da bo šola odprta najkrajši možni čas.

Natančneje, koliko ur na teden mora biti šola odprta?

Šola mora biti seveda odprta, če ima pouk vsaj en razred. Zato mora biti odprta vsaj toliko ur na teden, kolikor ur ima razred z največ urami. In tudi, šola mora biti odprta vsaj toliko ur, kolikor ur tedensko ima učitelj z največ obveznostmi. Tisto presenetljivo dejstvo, ki ga bomo spoznali, pa je, da v nobenem primeru ni potrebno imeti šole odprte dlje. Odprta mora biti natanko toliko ur, kot traja pouk razreda z največ urami, oziroma kolikršna je obremenitev učitelja z največ urami.

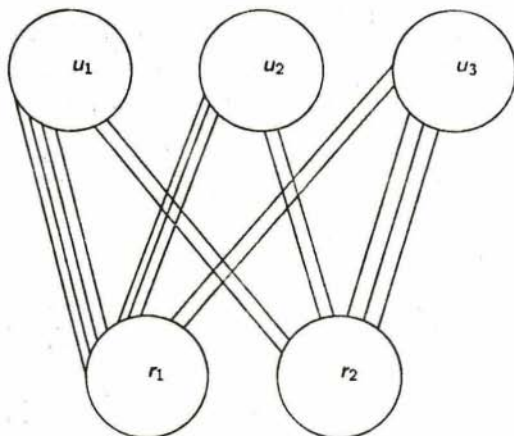
2. Matematični opis problema

Naš problem bomo matematično opisali s pomočjo teorije grafov. O njej je Presek v taki ali drugačni obliki pisal že večkrat, med drugim tudi v Presekovi knjižnici (Bajc, Pisanski: Najnужnejše o grafih). Vseeno pa bomo vse pojme iz teorije grafov vpeljali tako, da bo članek razumljiv tudi brez tega predznanja.

Na šoli imamo n učiteljev in m razredov. Seveda poznamo tudi vse druge potrebne podatke: za vsakega učitelja vemo, katere razrede bo učil, in za

vsak razred poznamo predmete in tedenske ure. Stanje opišimo z naslednjim grafom.

Graf naj ima n točk, ki ustrezajo učiteljem, in m točk, ki ustrezajo razredom. Označimo točke, ki ustrezajo učiteljem, z $u_1, u_2, \dots, u_n$, in točke, ki ustrezajo razredom, z $r_1, r_2, \dots, r_m$. Nato med točko u_i in točko r_j potegnemo toliko povezav, kolikor ur na teden ima učitelj u_i v razredu r_j . Dobljeni graf imenujmo *graf urnika*.



Slika 1. Graf urnika za šolo s tremi učitelji in dvema razredoma

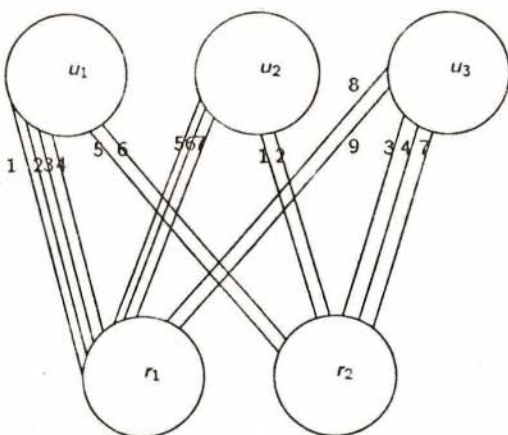
Primer grafa urnika je prikazan na sliki 1. Da bi bila slika pregledna, smo narisali graf, ki gotovo ne ustreza nobeni pravi šoli. S slike razberemo, da imamo tri učitelje u_1, u_2 in u_3 ter dva razreda r_1 in r_2 . Učitelj u_1 ima 6, učitelja u_2 in u_3 pa po 5 ur na teden. Tako ima na primer učitelj u_1 4 ure pouka tedensko v razredu r_1 in 2 uri pouka v razredu r_2 . Razred r_1 ima 9, razred r_2 pa 7 ur na teden.

Tedenska obveznost učitelja u_i je torej toliko ur, kolikor povezav gre iz točke u_i , število ur razreda r_j na teden pa je enako številu povezav, ki gredo iz točke r_j . Število povezav, ki gredo iz točke u , imenujemo *stopnja točke u* . Če je G poljuben graf, z $\Delta(G)$ označimo največjo stopnjo posamezne točke med vsemi točkami grafa G . Za graf G s slike 1 velja $\Delta(G) = 9$.

S pomočjo grafa urnika se lotimo določanja urnika. Vsaki povezavi bomo priredili neko naravno število, ki nam bo povedalo, katero uro bo učitelj (ki ga določa eno krajišče te povezave) v razredu (ki ga določa drugo krajišče povezave). Pri tem moramo števila povezavam prirediti tako, da

imata povezavi, ki se začeta (ali končata) v isti točki, različno vrednost. Povezavam, ki imajo skupno krajišče, rečemo *sosednji* povezavi. Številom, ki jih pišemo na povezave, pa rečemo *oznake*.

Z oštevilčenjem povezav, pri katerem imata soslednji povezavi različni oznaki, dosežemo, da ni isti učitelj hkrati v dveh razredih in da nista dva učitelja hkrati v istem razredu. Na sliki 2 imamo primer rešitve našega problema za graf urnika s slike 1. Vidimo, da rešitev zadošča kriteriju, da mora biti šola odprta najkrajši možni čas, saj ima razred r_1 po 9 ur na teden. Rešitev ni ravno lepa, vendar bi jo lahko izboljšali na roko. Vrstni red ur in njihovo razporeditev po dnevih moramo namreč šele določiti.



Slika 2. Rešitev za graf urnika s slike 1

S slike 2 preberimo še urnik za oba razreda:

r_1	u_1	u_1	u_1	u_1	u_2	u_2	u_2	u_3	u_3
r_2	u_2	u_2	u_3	u_3	u_1	u_1	u_3		

Povzemimo: problem, formuliran v matematičnem jeziku, se glasi:

Povezavam grafa urnika priredi take oznake, da soslednji povezavi dobijo različni vrednosti. Pri tem mora imeti množica oznak najmanjše možno število elementov.

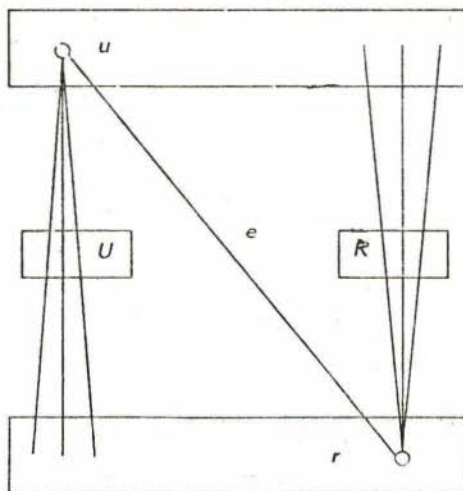
3. Algoritem

Kot že vemo, potrebujemo za rešitev našega problema vsaj $\Delta(G)$ oznak, kjer je G graf urnika. V tem razdelku bomo spoznali algoritem, ki za vsak graf urnika G poišče rešitev z natanko $\Delta(G)$ oznakami.

Osnovna ideja algoritma je naslednja. Povezave po vrsti označujemo z eno izmed $\Delta(G)$ oznak, vse dokler to gre. Ko nam pri neki povezavi prostih oznak zmanjka, nekoliko popravimo oznake tistih povezav, ki smo jih že označili, tako da lahko tudi zadnjo povezavo označimo z eno izmed $\Delta(G)$ oznak. Na kratko:

Za vsako povezavo e naredi
če e lahko označiš potem jo označi
sicer POPRAVI(e)

Pogoj če e lahko označiš torej samo pogleda, če imamo na razpolago še kakšno oznako, bistvo algoritma pa se očitno skriva v podprogramu POPRAVI. Ta podprogram pokličemo, ko neke povezave e ne moremo več označiti. Naj bosta u in r krajišči povezave e . Naj bo U množica povezav, ki so že označene in potekajo iz točke u . Ker ima vsaka točka stopnjo največ $\Delta(G)$, povezava e , ki tudi poteka iz točke u , pa še ni označena, je v množici U kvečjemu $\Delta(G) - 1$ povezav. Podobno naj bo R množica tistih povezav, ki so že označene in potekajo iz točke r (glej sliko 3). Tudi v R je kvečjemu $\Delta(G) - 1$ povezav.



Slika 3. Množici U in R

V množicah U in R torej manjkata vsaj po ena oznaka izmed $\Delta(G)$ oznak. Če bi bili manjkajoči oznaki enaki, bi lahko povezavo e označili s to manjkajočo oznako. Torej sta manjkajoči oznaki različni. Za lažje razumevanje naj v množici U manjka oznaka 1 in v množici R oznaka 2. Nato definiramo zaporedje točk $r_1, u_1, r_2, u_2, \dots$ z naslednjim postopkom:

Naj bo r_1 taka točka, da je povezava med u in r_1 označena z 2,
 naj bo u_1 taka točka, da je povezava med r_1 in u_1 označena z 1,
 naj bo r_2 taka točka, da je povezava med u_1 in r_2 označena z 2,
 :

Postopek nadaljujemo, dokler gre. Nato vsem povezavam, ki se pojavijo v zaporedju, zamenjamo oznako: če je bila prej 1, postane 2, in obratno. Sedaj moramo ugotoviti (pa to ne bomo, oz. bo vsak sam), da s tem postopkom nismo pokvarili oštevilčenja, tj. da imajo sosednje povezave še vedno različne oznake. Velja pa tudi, da s postopkom nikakor ne moremo priti v točko r . Če bi namreč prišli vanjo, bi prišli po povezavi, ki je označena z 2, take povezave pa po predpostavki ni v množici R . Ko smo torej naredili zamenjave, v U nimamo več oznake 2. Ker te oznake že prej nismo imeli v R in je tudi pri zamenjavi nismo dobili, lahko povezavo e označimo z oznako 2. S tem je podprogram POPRAVI razložen in algoritem je sestavljen. Povzemimo POPRAVI:

POPRAVI (e)

1. Določi U in R .
2. Naj bo i oznaka, ki je ni v U , in j oznaka, ki je ni v R .
3. Določi zaporedje $u - r_1 - u_1 - r_2 - \dots$.
4. Vzdolž zaporedja iz 3. točke zamenjaj oznaki i in j .
5. Označi e z oznako j .

Tako, algoritem je razvit in s tem je problem rešen. Vendar le v teoriji! Lahko bi rekli, da je problem rešen v smislu teoretičnega računalništva. V praksi pa je seveda algoritem potrebno sprogramirati, saj nam veliko število razredov in učiteljev preprečuje "ročno" iskanje rešitve. Kako smo ga sprogramirali mi, si preberite v prihodnji številki Preseka. Do tedaj pa naj bo izziv za vsakega programerja: Ali znam sprogramirati opisani algoritem? Pišite nam o svojih izkušnjah!

Niko Čížek in Sandi Klavžar

PRESKUSI SE IN REŠI A ALI B NALOGO

1. PISNA NALOGA A

1. Vemo, da je $a = -2$, $b = -3$, $c = -4$, $d = -5$.

Izračunaj $a - (b - c(d - c))b - a$.

2. Poenostavi in potem izraz zapiši kot produkt:

a) $(3a - 1)(2a + 5) - (a + 3)^3 + 12(a + 1) - (a + 2)(a^2 - a + 10)$

b) $(6a + 5)(6a - 5) - (5a - 3)^2 - 14(2 - a)(2 + a) + 99$.

3. Okrajšaj ulomke:

a) $\frac{5691}{8943}$

b) $\frac{9a^3 - a}{27a^3 - 1}$

c) $\frac{a^2 - 14a + 48}{a^2 - 2a - 24}$

4. Ali je izjava pravilna? Odgovor utemelji.

$$\left[\left(\frac{660}{1170} = \frac{22}{41} \right) \vee ((a - b)^3 = a^3 - b^3 - 3ab(a + b)) \right]$$

1. PISNA NALOGA B

1. Vemo, da je $a = -2$, $b = -3$, $c = -4$, $d = -5$.

Izračunaj $a - b(c - d(c - b)) - a$.

2. Poenostavi in potem izraz zapiši kot produkt:

a) $(5a - 7)(5a + 7) - (3a - 5)^2 - 7(a + 4)(a - 4) - 13$

b) $(2a - 1)(3a + 5) - (a + 2)^3 + 11(a + 1) + (a - 1)(a^2 - 2a - 2)$.

3. Okrajšaj ulomke:

a) $\frac{8789}{5593}$

b) $\frac{8a^3 + 1}{4a^3 - a}$

c) $\frac{a^2 - 2a - 48}{a^2 + 10a + 24}$

4. Ali je izjava pravilna? Odgovor utemelji.

$$\left[\left(\frac{420}{1386} = \frac{10}{33} \right) \wedge ((a + b)^3 = a^3 + b^3 + 3ab(a + b)) \right]$$

OB 25. OBLETNICI SMRTI

				AVTOR MARKO BOKALIČ	SKALNA JEREČICA	OPIS PRIKAZ	POLICIJSKI PRED- STOJNIK V ZDA	OZNAKA ČAČKA	FOTO- REPORTER SELHAUS	UPRA- VNA ENOT V SV
				DELČEK						
				GRŠKA GORSKA NIMFA						
				ORBITA				LOČITEV NABOJEV		
				ANGLEŠKI JOŽE				ODLOMEK SPISA		
									FIZIKALNA KOLIČINA	
									PTICA SELVKA	
RISBA:	ZAGRAJEN PROSTOR	CEBULI POD ZELENJAVO				SL. HORNIŠT (JOŽE)				
		GRŠKI DRAMATIK				CIRKUŠKO PRIZORIŠČE				
PETRŠILJU PODOBNA ZELENJAVO							ZIMSKI REKVIZIT NEM. MATE- MATIK (GEORG)			
STAR RIMSKI POZDRAV				LOK V ENOTSKEM KROGU						VOJ- PLOT
NIZKA LESENA PASTLINA				NIZO- ZEMSKA REKA	VZHOD (ANGLEŠKO)					MAT- MATI- ROJ KR
					KAN. PEVEC (PAUL)					
NEMŠKI MATEMATIK (BERNHARD)								VLADAJOČA DRUŽBENA MOČ		
SESTAV- LJENO LEČJE								PREDIVO		
								OZNAKA RJEKE		
SPREDNJE SOLEČ						VEČJA SKUPINA GLAS- BENIKOV				
ALEXAN- DRE DUMAS			STANKO ARNOLD			GLAVNO MESTO SAUDSKE ARABUJE				

VELIKEGA MATEMATIKA

AVNA OTA VICI		ŠOLSKA DEJAVNOST	VZKLIK NA BIKOBOR- BAH	FIZIK. PRIPRAVA TIPALO	ŽIVALSKA NOGA	PRVO NARAVNO ŠTEVIL	LOUZE DOLINAR	NALVEČJA TELESNA ZLEZA	ROMAN ŠVICAR. PISATELJA ANETA	
NEVIDNA TEKOČINA, KI NOSI ENERGIJO	SREDOZEM. GRM OBLIKA RAZCVETJA									
							INOUSKI HRAST STAROPIM- SKO POK- STANISCE			
			PREDLOG NAPRAVA ZA CEPLJENJE JEDER			STARA POVRŠINSKA MERA				
		GRŠ.ČRKA FR.FIZIK (AUGUSTIN- JEAN)			FRANC PISATELJ (ANDRÉ)	GL.MESTO JEMENA VEJA MATEMATIKE				
	FRANC. MATEMATIK (PIERRE DE) LUNINO ŠTEVIL						KRALJNA KARTA JADRANSKO PRISTAN.			
Z.S IOM				ALBANSKI VOOTELJ (RAMIZ)					MAČJARSKI BOTANIK (ARPAD)	GRČIJA KOT RIM. PROVINCA
FE- KOV ŠTNI AJ	ZVILSKI POKLIC IZRASTEK NA GLAVI			DRŽAVA V AFRICI						
				RENJ			NEKDANJE OBRTNIŠKO ZDRUŽENJE AFRIZVER			
				OPAŽ						
				IME VEČ RIMSkih PAPEŽEV						
ALUMINIJ				TROPSKA TRAVNATA POKRAJINA						

PETKOTNI TANGRAMSKI LIKI



tem, kako močna je vez med tangramom in kombinatoriko, smo se seznanili že v prejšnji številki revije. Tokrat bomo poskusili tovrstno znanje še razširiti. Spet se bomo spoprijeli z enim izmed lažjih kombinatoričnih problemov v tangramu in sicer z vprašanjem:

Koliko je vseh petkotnih tangramskih likov?

Nanj je prvi odgovoril ameriški matematik **Ronald C. Read**, njegov odgovor pa je objavil znani **Martin Gardner** leta 1974 v reviji *Scientific American*. Oglejmo si Readovo idejo preštevanja vseh petkotnih tangramskih likov. Te bomo poslej zaradi krajšega imenovali kar petalí-ji.

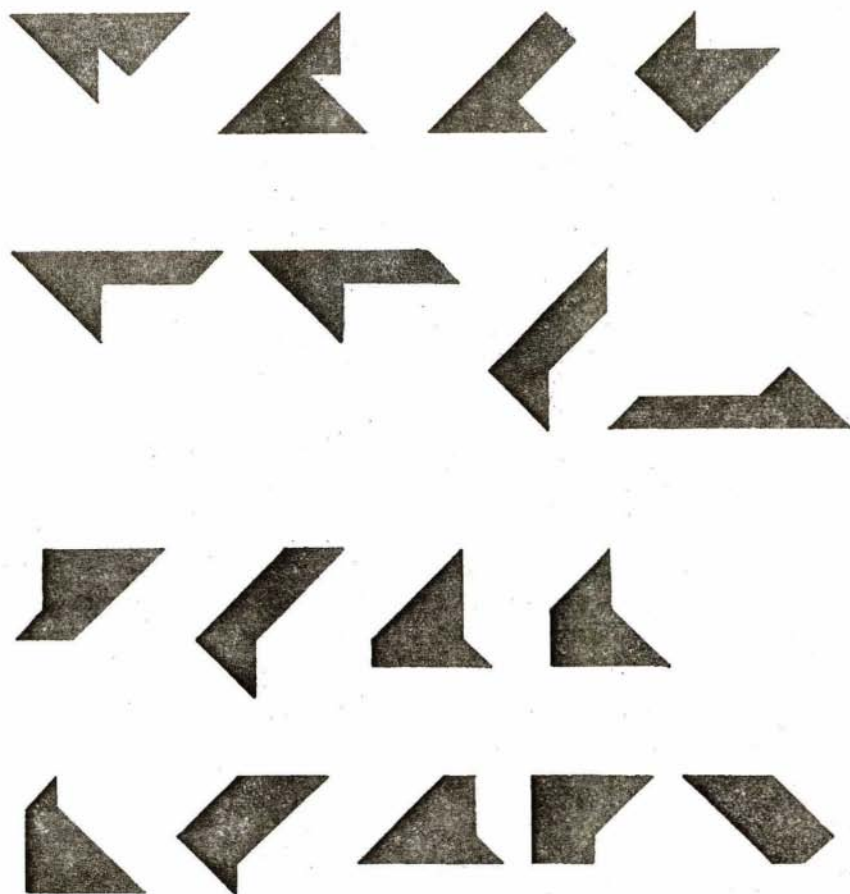
Recimo, da imamo pred seboj neki petalí. Opazujmo njegove notranje kote. Vsak izmed njih je večkratnik kota 45° . Obiščimo v katerikoli smeri urinega kazalca zapovrstjo vse kote petalíja in sproti zapisujemo te večkratnike. Na tak način bomo dobili zaporedje petih naravnih števil, s katerimi je pomnožen kot 45° .

Vzemimo za primer petalí, ki ga vidimo na sliki 1 prvega v prvi vrsti - torej povsem zgoraj levo. Temu liku pripada zaporedje 72111. Seveda mu pripada tudi katerakoli izmed cikličnih permutacij tega zaporedja (21117, 11172, 11721, 17211). Z zapisovanjem večkratnikov lahko začnemo namreč v poljubno izbranem oglišču tega petalíja. Prav tako je zaporedje 72111 enakovredno zaporedju v obrnjeni smeri 11127 in še vsem njegovim cikličnim permutacijam 11271, 12711, 27111 in 71112. Vsa ta zaporedja namreč ustrezajo istemu petalíju, od prvotnih se ločijo le po smeri štetja oglišč.

Zlahka se da videti, da se bodo v prirejenih zaporedjih kateregakoli petalíja pojavljala kvečjemu števila 1, 2, 3, 5, 6 ali pa 7. Število 4 pri tem izpade, ker pač $180^\circ (=4 \cdot 45^\circ)$ ni koto v petalíju.

Vemo že, da je vsota vseh notranjih kotov poljubno izbranega petkotnika enaka 540° . In ker je $540 = 12 \cdot 45$, mora biti vsota vseh petih števil petalíju pripadajočega zaporedja enaka 12.

Sedaj lahko že zapišemo vsa možna zaporedja, ki so določena s petalíji.



Slika 1.

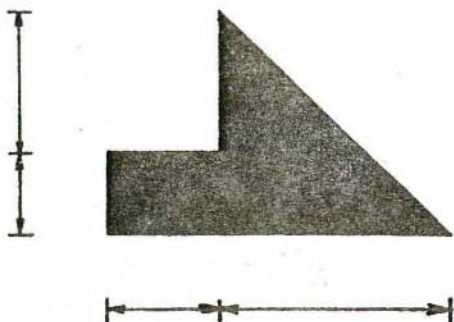
"Samo" dvajset jih je:

72111	62211	53112	52122
71211	63111	51312	33213
62112	61311	51321	33231
62121	53211	52311	33222
61221	53121	51222	32322

Iskanje vseh petalijev je s to tabelo že precej olajšano. Vendar pa - bodimo pozorni! Še zmeraj namreč ne vemo ničesar o tem, koliko različnih

petalíjev določa posamezno zaporedje iz te tabele.

Poskusimo zatorej razrešiti ta problem za zaporedje 62211. Slika 2 nam prikazuje zelo približno skico morebitnega petalíja, ki bi ga to zaporedje lahko določalo.



Slika 2.

Števila x , y in z naj predstavljajo dolžine stranic petalíja, kot na sliki 2. Ker je ta petalí sestavljen iz šestnajstih bazičnih trikotnikov (glej članek v prejšnji številki revije), je njegova ploščina seveda enaka 8. Ploščina skiciranega petalíja s slike 2 pa je $\frac{x^2}{2} + yz$. Če sestavimo obe trditvi v enačbo in jo uredimo, dobimo

$$x^2 + 2yz = 16.$$

Iz članka v prejšnji številki Preseka že vemo, da so stranice skiciranega petalíja ali vse cela števila ali pa vse celi večkratniki števila $\sqrt{2}$.

Edina cela rešitev, ki bi utegnila predstavljati 61122-petalí, je trojka $x = 2$, $y = 6$ in $z = 1$. Toda že kratek preizkus s sestavljanjem ploščic bi pokazal, da se po njenem receptu ne da sestaviti petalíja.

Rešitvi $x = 2$, $y = 2$, $z = 3$ in $x = 2$, $y = 3$, $z = 2$ ne prideta v poštev, ker je $x - z \leq 0$. Edina racionalna rešitev zgornje enačbe, ki da petalí, je: $x = 2\sqrt{2}$, $y = 2\sqrt{2}$, $z = \sqrt{2}$. Petalí, ki ustreza tej rešitvi, najdemo na sliki 1 v prvi vrsti na tretjem mestu.

Podobno bi poiskali tudi preostale petalíje z obravnavanjem preostalih devetnajstih enačb, ki jih določajo petalíjevska zaporedja.

Po taki poti je Read ugotovil, da je vseh petalíjev osemnajst. Objavljeni so na sliki 1 - s tem da je eden izmed njih izpuščen. Zato, da bi ga bralec sam poiskal. V pomoč mu prišepnimo, da ga lahko najde s pomočjo zadnjega izmed dvajsetih objavljenih zaporedij.

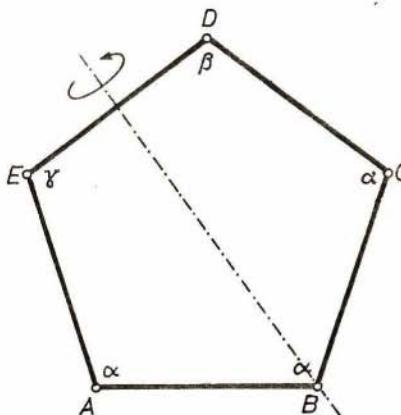
Vilko Domajnko

REŠITVE NALOG

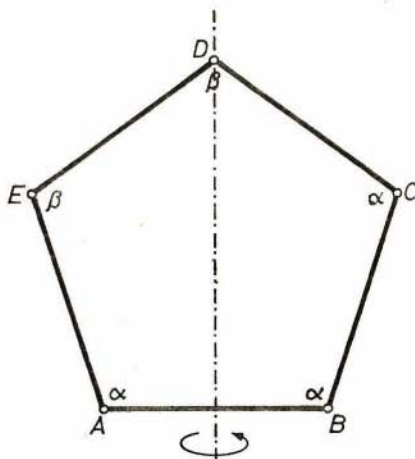
PRAVILNI PETKOTNIK - Rešitev s str. 213

Nalogo lahko rešimo na več načinov. Najbrž bo najmlajšim bralcem najbližja naslednja rešitev, saj se učenci že v šestem razredu srečajo z zrcaljenji čez premnico.

- a) Označimo enakostranični petkotnik kot na sliki 1, tako da so skladni koti pri ogliščih A , B in C .



Slika 1



Slika 2

Petkotnik prezrcalimo čez simetralo kota pri B . Zaradi skladnosti stranic AB in BC se točki A in C preslikata druga v drugo, zaradi skladnosti kotov pri A in C in skladnosti stranic AE in CD pa se medsebojno preslikata tudi oglišči D in E . Petkotnik je torej osno someren glede na simetralo kota pri B , kar pomeni, da je $\beta = \gamma$, kot pri D je skladen kotu pri E (slika 1). Nato prezrcalimo petkotnik še čez simetralo stranice AB (slika 2). Podobno kot prej ugotovimo, da se medsebojno preslikata točki A in B ter točki C in E . Točka D leži na simetrali, ker je vrh enakokrakega trikotnika CDE in mora ležati na simetrali osnovnice CE . Petkotnik je torej osno someren tudi glede na simetralo stranice AB . Sledi: kot pri C je skladen kotu pri E , $\alpha = \beta$.

Torej ima petkotnik vse kote skladne in je pravilen.

- b) Tudi v tem primeru je petkotnik pravilen. To ugotovimo na podoben način kot zgoraj, le da ga prezrcalimo čez simetrali tistih dveh kotov, za katera nimamo podatkov o skladnosti.

Marija Vencelj

PRED PETINDVAJSETIMI LETI JE UMRL PROFESOR JOSIP PLEMELJ

Letos maja mineva četrto stoletje od smrti človeka, ki ga nedvomno smemo imenovati očeta slovenske matematike

Profesorja Plemlja osebno nisem poznala, njegovi nekdanji učenci pa ga omenjajo pogosto in z velikim spoštovanjem. V spominu so ga ohranili kot velikega matematika, odličnega profesorja in dobrega človeka, kakor je ob dvajsetletnici Plemljeve smrti zapisal njegov najboljši učenec profesor Ivan Vidav.¹

Profesor Josip Plemelj se je rodil 11. decembra 1873 na Bledu. Zaradi očetove zgodnje smrti je v družini vladala revščina in mati je bistrega fanta le stežka poslala v ljubljanske šole. K sreči mu je matematični talent omogočil, da se je že v višji gimnaziji lahko sam vzdrževal z inštruiranjem matematike. O njegovem zgodnjem velikem talentu za matematiko govori tudi zgodba, da je komaj četrtošolec (današnji osmi razred) že pomagal gimnazijskim maturantom pri nalogah.

Že v gimnaziji (in nato vse življenje) je imel veliko veselja s težkimi konstrukcijskimi nalogami v geometriji. Iz te dobe izhaja tudi njegova izvirna konstrukcija pravilnega sedemkotnika, ki jo je sicer objavil šele 20 let kasneje. Znano je, da pravilnega sedemkotnika ni moč natančno konstruirati le z uporabo šestila in ravnila. Plemelj je z algebraično analizo našel približno konstrukcijo, ki je na moč preprosta - vse risanje je reducirano pravzaprav na devetinjenje polovice polmera sedemkotniku očrtane krožnice - pri tem pa je kar na 0.004% natančna.

Zgodaj se je začel ukvarjati tudi z višjo matematiko. Sprva brez ustrezne literature; tako je kot četrtošolec samostojno odkril vrsti za $\sin x$ in $\cos x$. Prepričan, da gre za nov dosežek, je bil močno razočaran, ko je nanju naletel v literaturi, ki mu je naslednje leto prišla v roke.

Zelo ga je zanimala tudi astronomija in naravoslovje nasploh. Tako se je po maturi 1894 odločil za študij matematike, fizike in astronomije na dunajski univerzi. Tedanji predstojnik matematične katedre prof. G. von Escherich je že prvi mesec odkril njegov izredni talent za matematiko in ga predvidel za univerzitetno kariero. Ker mu je priskrbel še Knaflevo štipendijo, je bil

¹ Profesor Ivan Vidav je ob stoletnici rojstva Josipa Plemlja napisal monografijo o njegovem življenju in delu, ob dvajsetletnici smrti pa prikupno knjižico, ki je izšla kot 5. številka XIV. letnika Preseka z željo, da predstavi tega velikega moža slovenskim osnovnošolcem in srednješolcem. Na njeni osnovi je nastal tudi tale zapis. Tako monografijo kot knjižico je še vedno moč kupiti pri Komisiji za tisk DMFA Slovenije, Ljubljana, Jadranska 19.



B. Jakac, Prof. dr. Josip Plemelj – risba 1952

razrešen tudi Plemeljev gmotni problem.

V štirih letih je Plemelj ne le diplomiral, ampak tudi z odliko doktoriral z disertacijo s področja linearnih homogenih diferencialnih enačb. Nato je leto dni prebil v Berlinu kot slušatelj profesorjev Fuchsa in Frobeniusa, eno leto pa v Göttingenu pri Kleinu in Hilbertu. Po vrnitvi na Dunaj je leta 1902 postal privatni docent za matematiko na dunajski univerzi. Štiri leta kasneje je bil imenovan za asistenta na Tehniški visoki šoli na Dunaju, leta 1907 pa je postal izredni in naslednje leto redni profesor za matematiko na univerzi v Černovicah.

Leta od 1900 do 1912 so bila Plemljeva najbolj plodna znanstvena leta. Njegova glavna matematična področja so bila diferencialne in integralne enačbe, teorija potenciala in funkcijska teorija, ukvarjal pa se je tudi z algebro in teorijo števil. Za svoje delo iz teorije potencialov je v Leipzigu leta 1911 prejel nagrado znanstvenega društva kneza Jablonowskega in na Dunaju nagrado R. Liebna dunajske akademije znanosti.

Leta pred prvo svetovno vojno in med njo so bila v stari Avstriji polna napetosti med nemškim in drugimi narodi. Plemelja so dogajanja pritegnila in hkrati čustveno prizadela ter ga tako odvrčala od znanstvenega dela. Ker je bil izrazito protiavtstrijsko usmerjen, je bil leta 1917 konfiniran najprej na Moravsko in nato na Dunaj, ki ga vse do konca vojne ni smel zapustiti.

Po vojni, ki je prinesla razpad avstroogrske monarhije, je profesor Plemelj videl svoje mesto v delu za svoj narod. Bil je eden od ustanoviteljev slovenske univerze leta 1919 v Ljubljani, postal njen prvi rektor in bil imenovan za rednega profesorja za matematiko. Na tedanji filozofski in kasneje na naravoslovni fakulteti je vzgajal slovenske matematike in fizike (pa tudi študente tehnike) še dobrih 40 let.

Njegovi nekdanji učenci vedo povedati, da je bil odličen predavatelj. Imel je tisti posebn dar, ki ni prav pogost, da je znal tudi najtežje pojme razložiti tako, da so se poslušalcem zdeli preprosti in lahki. Bilo je, kot da matematika med njegovimi predavanji na novo nastaja.

Profesor Plemelj je bil dopisni član treh akademij: Jugoslovanske akademije znanosti in umetnosti, Srbske akademije znanosti in Bavarske akademije. Redni član Slovenske akademije znanosti in umetnosti je bil od njene ustanovitve dalje.

Plemljeva odločitev leta 1919 za tedaj provincialno Ljubljano, v kateri je bil kot znanstvenik osamljen, je vsekakor pomenila žrtev za njegovo znanstveno kariero. Kljub temu se je ponovno enako odločil leta 1928, ko je odklonil vabilo graške univerze, da bi tam prevzel katedro za matematiko. Bila pa je ta odločitev velikega pomena za novo ljubljansko univerzo in neprecenljive

vrednosti za slovensko matematiko. Skromno zahvalo velikemu učitelju izpričujejo Prešernova nagrada leta 1954, častni doktorat Univerze v Ljubljani in dva spomenika, postavljena ob stoletnici njegovega rojstva: eden na njegovem rodnem Bledu in drugi pred glavno stavbo ljubljanske univerze. Država Slovenija pa letošnje leto proglašja za *Plemljevo leto*.

Marija Vencelj

ŠVICARSKI TRAMVAJ - Rešitev s str. 212

Vzemimo poljubni postaji A in B in progo t_1 , ki je med njima (zaradi pogoja 3). Ker obstaja več kot ena proga, obstaja proga t_2 , ki gre skozi postaje B, C, D .

Zaradi pogoja 2) so postaje A, C in D različne. Zaradi pogoja 3 morata obstajati progi t_3 in t_4 , ki gresta iz A v C in iz A v D . Zaradi pogojev 2) in 3) so proge t_1, t_2, t_3 in t_4 različne. Zaradi pogoja 1) obstajajo tudi postaje E, F in G .

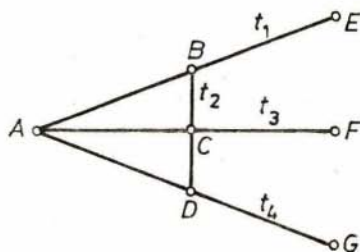
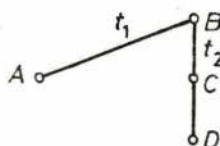
Zaradi pogojev 2) in 3) so postaje E, F in G medsebojno različne. Ravno tako ne more biti nobena izmed njih enaka kateri od postaj A, B, C, D .

Če gre skozi A še kakšna proga t mora imeti le-ta vsaj eno skupno postajo s progo BCD (zaradi pogoja 2). Prav tako zaradi pogoja 2) je T enaka eni izmed prog t_1, t_3 ali t_4 . To pomeni, da razen teh sedmih postaj, ki jih že imamo, ni nobene druge postaje, saj bi zaradi pogoja 3) morala le-ta biti povezana s postajo A , kar pa ne gre, kot smo pravkar ugotovili.

S pomočjo pogojev 2) in 3) lahko brez težav dopolnimo zemljevid prog do končne rešitve:

Torej ima mesto 7 prog in sedem postaj.

Borut Zalar



MEDNARODNI ASTRONOMSKI TABOR IAYC TORFHAUS 1991

Pred sedemindvajsetimi leti je skupina mladih astro-zanesenjakov, pretežno študentov fizike in astronomije, osnovala neprofitno organizacijo International Workshop Astronomy (IWA), katere edini cilj je pripraviti vsako leto tri tedne dolg tabor, kjer se zberejo mladi vseh dežel, da bi skupaj razkrivali skrivnosti nočnega neba, opazovali objekte na njem, merili, računali in iskali razlage. Poleg astronomije, ki je osrednji motiv, udeležence vabita tudi jezikovni izziv, saj je uradni jezik angleščina, in možnost navezovanja stikov z mladimi različnih narodnosti. V teh dvajsetih dneh jezikovne, kulturne in vsakršne razlike zbledijo v prijazno združbo tolerantnih, veselih in vedoželjnih mladih ljudi.

Astronomske dejavnosti potekajo v okviru delovnih skupin. Vodijo jih mentorji, najpogostejše so to študentje fizike. Zasnovo in vsebino skupine izberejo sami, različna področja teoretične in praktične astronomije razporedijo glede na svoja zanimanja in znanje. Delovni dnevi imajo stalen urnik, so ravno prav natrpani, tako da čas mineva nedojemljivo hitro. Resno delo, predavanja, branje, računanje, opazovanje, dopolnjujejo igre in pogovori.

Lani je bil IAYC od 4. do 25. avgusta v Nemčiji, v hribovju Harz, na nadmorski višini okrog osemsto metrov. V navadi je, da je kraj dogajanja čim dlje od večjih mest, ki povzročajo svetlobno onesnaženje, in sredi kar se da čiste narave. Na taboru je bilo skupaj z mentorji 65 mladih. Prišli so iz vseh zahodnoevropskih držav, Skandinavije, Slovenije in prvič tudi iz Češkoslovaške. Delovnih skupin je bilo sedem: Astrofizika, Praktična astronomija, Meteorji, Deep-sky objekti, Ozvezdja, Starodavna astronomija in Sončni sistem. Vreme nam ni bilo preveč naklonjeno, jasnih noči je bilo le šest. Seveda smo jih izkoristili za opazovanja. Po uvodnih spoznavanjih z ozvezdji in Messierovimi objekti smo se lotili številnih nalog: izdelave zvezdnih kart, dela s teleskopi, opazovanja spremenljivk, astrofotografije, spremljanja meteorske aktivnosti. Med dnevnimi eksperimenti pa velja omeniti opazovanje Sonca in delo s spektrometrom, Foucaltovo nihalo, merjenje karakteristik teleskopov, celodnevno radijsko opazovanje meteorjev. Vzporedno s praktičnim delom smo spoznavali tudi teorijo; računalniki so bili noč in dan zasedeni, saj so mnogi od udeležencev za svoj projekt izbrali numerične simulacije, npr. klasični model zvezde, lastno gibanje zvezd itd.

Udeleženci na koncu napišejo poročila o svojem delu, ki so v obliki knjižice z naslovom IAYC REPORT izdana nekaj tednov po koncu tabora.

Ker ste med bralci Preseka verjetno tudi ljubitelji astronomije in vsega

ostalega, kar sem poskušala opisati zgoraj, navajam še naslov, kjer lahko dobite informacije o prihodnjem taboru, ki bo najverjetneje avgusta 1992 na Nizozemskem: Dinand Alkema, Ahornstraat 26 II, NL - 3552 KW Utrecht, tel. 030-420188. Podatke o IAYC - ju lahko dobite tudi pri Astronomskem društvu Javornik, ki ima sobo na Tavčarjevi 2 v Ljubljani.

Mirjana Galičič

PREPOGIBANJE LISTA PAPIRJA – Rešitev s str. 203

$$A_n : 1000 \cdot 2^{-\frac{n}{2} + \frac{1}{4}} \text{ mm} \times 1000 \cdot 2^{-\frac{n}{2} - \frac{1}{4}} \text{ mm} \times \frac{2^n}{10} \text{ mm}$$

Izenačimo dolžino lista z dolžino molekule:

$$10^3 \cdot 2^{\frac{1}{4} - \frac{n}{2}} \text{ mm} = 10^{-3} \text{ mm},$$

$$2^n = 10^{12} \sqrt{2} = (10^3)^4 \sqrt{2} \approx (2^{10})^4 \sqrt{2} = 2^{40.5},$$

$$n \approx 40.5 \quad (\text{natančno: } n = \frac{12}{\log 2} + 0.5 \approx 40.4).$$

Ker je n nujno celo število, je končni rezultat: $n = 40$. Najmanjši možni A-format je torej A_{40} . Če list formata A_0 40-krat prepognemo, je končna debelina:

$$\frac{2^{40}}{10} \text{ mm} \approx \frac{10^{12}}{10} \text{ mm} = 10^5 \text{ km}.$$

Anton Cedilnik

EUROBIT

Proizvodno trgovsko podjetje Eurobit d.o.o.

Računalniška oprema · Razvoj · Svetovanje

65270 AJDOVŠČINA, Goriška cesta 25c · Tel.: (065) 62-455, 62-477 · Fax: (065) 62-733

22. ZVEZNO TEKMOVANJE OSNOVNOŠOLCEV IZ MATEMATIKE

Zvezno tekmovanje je bilo v Titogradu, vendar se ga naši učenci zaradi varnostnih razlogov niso udeležili. Naloge, ki so jih tekmovalci reševali vseeno objavljamo kot izziv tistim, ki so se sicer uvrstili v ekipo, pa se tekmovanja niso udeležili, in za vajo naslednjim generacijam.

7. razred

1. Na tabli so napisana vsa naravna števila od 1 do 1991. Nekdo je naključno zbrisal dve števili in namesto njiju napisal absolutno vrednost njune razlike. Ta postopek je ponavljal toliko časa, da je na tabli ostalo le eno število. Ali je to število lahko 1991? Odgovor utemelji.
2. Poišči vse ulomke, ki so večji od $\frac{1}{3}$ in manjši od 1, za katere velja:
 - a. obstaja tako celo število x , da ulomek ne spremeni svoje vrednosti, če števec povečamo za x , imenovalec pa pomnožimo z x ;
 - b. števec in imenovalec sta si tuji števili.
3. Dan je polinom $P(t) = t^4 - t + \frac{1}{2}$. Dokaži, da je za poljubno število t :
 - a. $P(t) \neq 0$,
 - b. $P(t) > 0$.
4. Dan je pravokotni trikotnik $\triangle ABC$. Na hipotenuzi AB je dana taka točka M , da je $\overline{BM} = \overline{BC}$, in taka točka N na kateti CA , da je dolžina daljice CN enaka višini na hipotenuzo. Dokaži, da je kot $\sphericalangle CNM = 90^\circ$.
5. Naj bosta AB in BC dve stranici pravičnega devetkotnika, točka L središče manjšega loka BC , točka M središče daljice AB in točka N središče daljice OL , kjer je O središče devetkotniku očrtanega kroga. Dokaži, da je kot $\sphericalangle OMN = 30^\circ$.

8. razred

1. Na koliko načinov lahko število 1991 zapišemo v obliki vsote zaporednih naravnih števil?
2. Določi število a , če je $a^2 = 1 \underbrace{0 \dots 0}_{1990} 5 \cdot \underbrace{1 \dots 1}_{1991} + 1$.
3. V jezero se izliva potok, ki vsak dan izlije enako množino vode. 183 konjev bi v enem dnevu lahko popilo vso vodo (tj. v 24 urah bi izpraznili jezero), 37 konjev pa bi jezero izpraznilo v 5 dneh. V koliko dneh bi en

konj popil vso vodo?

4. Dokaži, da je vsota kvadratov dolžin diagonal poljubnega trapeza enaka vsoti kvadratov dolžin krakov, povečani za dvojni produkt dolžin osnovnic.
5. Naj bo P točka osnovne ploskve pravilne štiristrane piramide. Pravokotnica skozi točko P na ravnino osnovne ploskve prebada ravnine stranskih ploskev v točkah M_1, M_2, M_3 in M_4 . Dokaži, da je vsota $\overline{PM_1} + \overline{PM_2} + \overline{PM_3} + \overline{PM_4}$ enaka štirikratni dolžini višine piramide za vsako točko P osnovne ploskve.

Aleksander Potočnik

TRI NALOGE Z NARAVNIMI ŠTEVILI - Rešitev s str. 227

1. naloga. Naravno število n , deljivo z 2 in 9, lahko pišemo

$n = 2^{k_1} 3^{k_2} p_3^{k_3} \dots p_i^{k_i}$, to je kot produkt potenc praštevil, kjer je $k_1 \geq 1$ in $k_2 \geq 2$. Tedaj ima n skupno $(k_1 + 1)(k_2 + 1) \dots (k_i + 1)$ deliteljev. Torej mora biti ta produkt enak $2 \cdot 7$. To je možno le, če je $k_1 = 1$ in $k_2 = 6$. Edina rešitev je $n = 2 \cdot 3^6 = 1458$.

2. naloga. Če ima število n 30 enic in ostale številke enake 0, potem je vsota števk enaka 30. Torej je število n deljivo s 3, ni pa deljivo z 9. Če bi bilo $n = m^2$, bi bil tudi m deljiv s 3 in zato n deljiv z 9, kar pa ni. Torej n ni popoln kvadrat.

3. naloga. Vsako naravno število n lahko zapišemo v obliki $n = 2^k l$, kjer je število l liho. Na izvlečenih 101 listkih so različna števila $n_1 = 2^{k_1} l_1, n_2 = 2^{k_2} l_2, \dots, n_{101} = 2^{k_{101}} l_{101}$. Faktorje $l_1, l_2, \dots, l_{101}$ izbiramo med sto lihih števili 1, 3, ..., 199. Torej sta vsaj dva enaka. Denimo, da je kar $l_1 = l_2$. Tedaj imamo $n_1 = 2^{k_1} l_1$ in $n_2 = 2^{k_2} l_2$. Če je $k_1 > k_2$, potem n_2 deli n_1 , če pa je $k_2 > k_1$, potem je n_2 deljiv z n_1 .

Borut Zalar

POTREBUJEŠ - RABIŠ

Bila sem bruculja. Pri profesorju Ivanu Vidavu sem napačno uporabila glagol rabiti. Profesor me je ljubeznivo poučil:

"Rabimo lahko le to, kar že imamo. To, kar iščemo, pa potrebujemo."

Nikoli več se nisem zmotila. Pri poučevanju matematike sem skrbno pazila na pravilno rabo jezika.

Marija Munda

32. ZVEZNO TEKMOVANJE SREDNJEŠOLCEV IZ MATEMATIKE

32. zvezno tekmovanje srednješolcev iz matematike je letos organiziralo Društvo matematikov, fizikov in astronomov Srbije. Tekmovanje je bilo v Valjevu v soboto 20. in nedeljo 21. aprila 1991.

Zaradi manjšega skupnega števila tekmovalcev kot lani (lani 121, letos 112), predvsem pa zaradi na novo odmerjenega števila tekmovalcev iz posameznih republik, se je 19. aprila podalo na pot 10 učencev iz naše republike: iz prvega letnika Narvika BOVCON in Domen PRAŠNIKAR, iz drugega Bojan GORNIK, Marko KRAJNC, Mitja MASTNAK in Andrej SRAKAR, iz tretjega Tomaž CEDILNIK, Gregor IRT in Marko SLAPAR, ter Dušanka KOCIĆ iz četrtega letnika.

Vodila sta jih študenta matematike Peter ANASTASOV in Matjaž ŽELJKO, zastopnik Slovenije v zvezni tekmovalni komisiji pa je bil asistent Darjo FELDA. Pozen prihod slovenske ekipe v Valjevo ni delal nobenih težav, saj je Grand Hotel Valjevo, v katerem je prebivala slovenska ekipa, zelo blizu gimnazije Valjevo in so si tekmovalci lahko privoščili malo daljši počitek.

V soboto dopoldne so tekmovalci štiri ure reševali naslednje naloge:

Prvi letnik

1. Premica, na kateri leži težišče T trikotnika ABC , seka stranici AB in AC ter nosilko stranice BC zaporedoma v točkah P , Q in R , pri čemer leži točka C med B in R . Dokaži, da velja

$$\frac{1}{TP} = \frac{1}{TQ} + \frac{1}{TR}.$$

2. Lik $\mathcal{F}$ je sestavljen iz točk B in D ter lokov BD in DB , načrtanih v notranjosti kvadrata $ABCD$ s središčima v A in C in s polmeroma enakima stranici kvadrata. Dokaži, da imajo vsi pravokotniki, očrtani liku $\mathcal{F}$, katerih vsaka stranica ima z likom $\mathcal{F}$ natanko eno skupno točko, enak obseg.
3. Ali obstaja zaporedje s 3982 členi z naslednjima lastnostima:
 - (a) Vsako število $k \in \{1, 2, \dots, 1991\}$ se v zaporedju pojavi natanko dvakrat.
 - (b) Vsako število k se drugič pojavi natanko k mest od mesta, kjer se je prvič pojavilo.

4. Dokaži, da velja neenakost

$$3 \left(\frac{a^2 - b^2}{8} \right)^2 + \frac{ab}{a+b} \geq \sqrt{\frac{a^2 + b^2}{8}},$$

če sta $a \geq 1$ in $b \geq 1$.

Drugi letnik

1. Krogu s premerom 1 sta očrtana trikotnik in kvadrat. Dokaži, da je del obsega kvadrata, ki leži zunaj trikotnika, krajši od 1,8.
2. Dane so štiri take premice, da se poljubni dve sekata in da se nobene tri ne sekajo v eni točki. Te premice določajo štiri trikotnike.
 - (a) Dokaži, da imajo očrtane krožnice teh trikotnikov skupno točko X .
 - (b) Dokaži, da ležijo središča teh krožnic na krožnici, ki vsebuje točko X .
3. Dokaži, da za pozitivna števila a, b in c velja neenakost:

$$\frac{1}{a^3 + b^3 + abc} + \frac{1}{b^3 + c^3 + abc} + \frac{1}{c^3 + a^3 + abc} \leq \frac{1}{abc}.$$

Kdaj velja enakost?

4. V ravnini se nahaja takšnih $2n$ točk (n modrih in n rdečih), da nobene tri ne ležijo na isti premici. Dokaži, da obstaja n daljic z različno obarvanima krajiščima, ki se paroma ne sekajo.

Tretji in četrti letnik

1. Naj bo a naravno število. Zaporedje $\{x_n\}$ definiramo s predpisom:

$$x_1 = a, \quad x_{n+1} = \begin{cases} \frac{x_n}{2} & , \text{ če je } x_n \text{ sodo število} \\ \frac{3x_n+1}{2} & , \text{ če je } x_n \text{ liho število} \end{cases}$$

Dokaži, da je vsaj en člen zaporedja $\{x_n\}$ sodo število.

2. Koliko je permutacij $(a_1, a_2, \dots, a_n)$ števil $1, 2, \dots, n$, da za vsak $k \in \{2, 3, \dots, n\}$ velja: med števili $a_2, a_3, \dots, a_{k-1}$ obstaja vsaj eno, ki se od števila a_k razlikuje za 1?
3. Naj bo $a_0 \geq a_1 \geq a_2 \geq \dots \geq a_n > 0$ in naj bo α ničla polinoma $p(x) = a_0 x^n + a_1 x^{n-1} + \dots + a_n$. Dokaži, da je $|\alpha| \leq 1$.

4. Dana je pravokotna tabela, ki ima m stolpcev in n vrstic, kjer sta m in n iste parnosti in je $m > n$. V spodnjem levem vogalu se nahaja beli lovec, v zgornjem desnem pa črni lovec. Igralca B in $\check{C}$ izmenično premikata lovca po pravilih šahovske igre. Igralec B , ki začne igro, vedno igra z belim lovцем, igralec $\check{C}$ pa s črnim. Zmaga tisti igralec, ki postavi svojega lovca pod udar nasprotnikovega lovca.

Določi, kateri igralec zmaga, in opiši zmagovalno strategijo.

Popoldne so si tekmovalci ogledali nekaj lokalnih znamenitosti, spremljevalci pa raziskovalno postajo Petnica, zvečer pa je bilo družabno srečanje v valjevski gimnaziji.

Kljub zelo težkim nalogam (npr. prva in četrta v prvem letniku ter tretja v tretjem in četrtem letniku) se je slovenska ekipa vrnila domov z enim olimpijcem. Dijak Gimnazije Bežigrad Tomaž CEDILNIK se je v maju udeležil balkaniade v Constanzi (Romunija) in v juliju še mednarodne matematične olimpiade v Sigutni na Švedskem.

Matjaž Željko

UČITELJ BI MORAL ZNATI VSE

Na krožku mladih matematikov smo se ubadali z nalogo, ki ni in ni hotela iz lupine. Tedaj se je eden od učencev nagnil k meni in mi tiho zaupal: "Kajne, tovarišica, vi se samo delate, da ne znate."

BITI MORAŠ PREVIDEN

Obiskat me je prišla bivša učenka, študentka na Visoki tehniški šoli v Mariboru. Nagajivo mi je pripovedovala, kako spravlja ob živce svojega profesorja matematike.

"Deklič, s te plati te jaz ne poznam. Nikoli se nisi vmešavala v moje razlage."

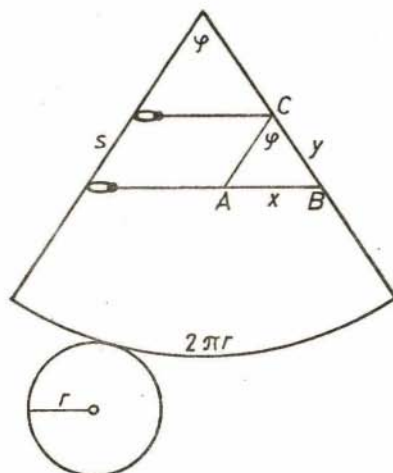
"Ja, tovarišica, vi ste bili pametnejši. Rekli ste: Jaz vidim to rešitev, če vidi kdo boljšo, naj pove."

Marija Munda

ŠE NAOKROG PO STOŽCU – Rešitev s str. 202

Pri strmem stožcu bo zanka lezla navzdol, pri širokem stožcu pa navzgor. Zanka je v ravnotežju takrat, ko je njeno skrajšanje x (= spust uteži) enako njenemu dvigu y , torej ko je $\varphi = \pi/3$ (trikotnik ABC je tedaj enakostranični). Ker je $\varphi = 2\pi r/s$, dobimo za mejno obliko stožca $s = 6r$.

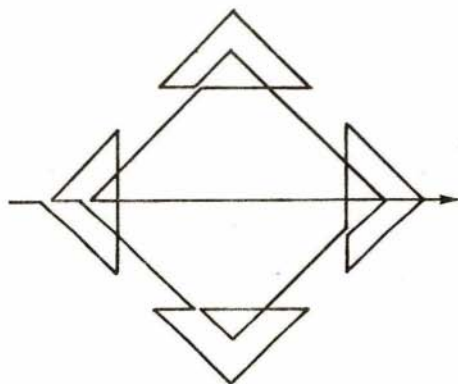
Anton. Cedilnik



POIŠČI IZREK – Rešitev s str. 223

Če začnemo brati pri K v sredini in beremo v pozitivni smeri (nasprotni gibanju urinega kazalca), tako da izpuščamo po dve črki, dobimo izrek: KVADRAT JE ENAKOSTRANIČNI PRAVOKOTNIK.

Z ENO POTEZO – Rešitev s str. 223



Marija Vencelj

POROČILO O MEDNARODNEM TEKMOVANJU MEST

S šolskim letom 1990/91 se je Slovenija vključila v *Mednarodno tekmovanje mest iz matematike*. Pri Komisiji za popularizacijo matematike v srednji šoli smo se odločili, da prevzamemo lokalno organizacijo tega tekmovanja za področje Slovenije, in to sporočili glavnim organizatorjem v Moskvo.

Učenci tekmujejo v dveh skupinah: prvi in drugi letnik v eni ter tretji in četrti v drugi skupini. Tekmovanje je razdeljeno na jesenski in spomladanski krog s po desetimi nalogami, vsak od njiju pa na dva dela (4 + 6 nalog), ki ju je treba izvesti v roku enega tedna. Naloge, ki smo jih sicer dobili v angleškem jeziku preko Avstralije, smo prevedli v slovenščino, nato pa izdelke spet v angleščino ter skupaj z originali poslali v Moskvo, kjer se ocenijo.

Tekmovalne naloge so precej zahtevne, zato se je *Komisija za popularizacijo matematike v srednji šoli* odločila, da povabi na *Mednarodno tekmovalanje mest* le tiste učence, ki so se udeležili zveznega tekmovanja. Naj predstavimo samo po tri naloge iz obeh skupin:

Jesen 90, 1. del, 1. in 2. letnik

Dokaži: če je produkt dveh pozitivnih števil večji od njune vsote, potem je ta vsota večja od 4.

Jesen 90, 1. del, 3. in 4. letnik

Napravimo "opeke" takole: vzamemo enotsko kocko in na tri njene mejne ploskve, ki imajo skupno oglišče, prilepimo po eno enotsko kocko tako, da se zlepljene ploskve ujemajo. Ali lahko s takimi opekami sestavimo kvader dimenzije $11 \times 12 \times 13$?

Jesen 90. 2. del, 1. in 2. letnik

Dani sta

$$a = \frac{1}{2 + \frac{1}{3 + \frac{1}{\ddots + \frac{1}{98 + \frac{1}{99}}}}}$$

$$b = \frac{1}{2 + \frac{1}{3 + \frac{1}{\ddots + \frac{1}{99 + \frac{1}{100}}}}}$$

Dokaži, da velja $|a - b| < \frac{1}{99! \cdot 100!}$.

Pomlad 91, 1. del, 3. in 4. letnik

- (a) Ali lahko postavimo v prostoru 5 kock tako, da se vsaka izmed njih z delom svoje mejne ploskve dotika vseh drugih ?
 (b) Kaj pa, če imamo 6 kock ?

Pomlad 91, 2. del, 1. in 2. letnik

Iščemo taka naravna števila, ki se končujejo na 5, da števke (cifre) v desetiškem zapisu takega števila ne padajo (od vključno druge števke dalje ni nobena manjša od tiste, ki je pred njo) in da v desetiškem zapisu kvadrata takega števila števke prav tako ne padajo.

- (a) Poišči 4 taka števila.
 (b) Dokaži, da je takih števil neskončno mnogo.

Pomlad 91, 2. del, 3. in 4. letnik

Dana je krožnica in izbrana tetiva MN . Za vsak premer AB te krožnice potegnemo pravokotnico l na AB , ki gre skozi presečišče premic (A, M) in (B, N) . Dokaži, da gredo vse te pravokotnice skozi neko skupno točko.

Učenci, ki so pri reševanju nalog zelo uspešni, dobijo posebno priznanje, čeprav že ime tekmovanja pove, da tekmujejo mesta, ki jih predstavlja največ po pet tekmovalcev (glede na število prebivalcev). Vrstni red mest se sestavi po posebnih pravilih. Do sedaj še nismo prejeli obvestila, kako so se slovenska mesta uvrstila med drugimi sodelujočimi, smo pa bili zelo veseli, ko so nam iz Moskve sporočili, da podeljujejo posebno priznanje kar petim učencem slovenskih srednjih šol. Priznanje so osvojili: **Andrej Srakar** in **Tomaž Cedilnik** iz Ljubljane, **Marko Krajnc** iz Maribora, **Mitja Mastnak** iz Celja ter **Bojan Gornik** iz Novega mesta.

Vsem iskreno čestitamo.

Darjo Felda

SREČKA — Rešitev s str. 203

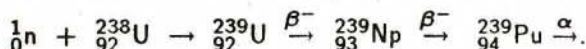
Ker je Tinina mama poznala samo številsko vsoto številke Tinine srečke, je lahko takoj našla pravilen odgovor le, če je bila številka srečke enaka 99999 in je mama stara 45 let. Enakost števk je očitno nujna in edino v primeru, ko so enake 9, ne moremo njihove vsote predstaviti kot vsoto petih drugih enomestnih števil.

Marija Vencelj

TRANSURANI

V naravi ni najti elementov, ki bi bili v periodnem sistemu razvrščeni za uranin. Vsi ti elementi so bili narejeni umetno. Ker sledijo za uranom, jim pravimo transuranski elementi ali kratko transurani.

Ko so obsevali izotop urana $^{238}_{92}\text{U}$ z nevtroni, so dobili prva dva transurana neptunij Np z atomskim številom $Z = 93$, iz tega pa plutonij Pu z $Z = 94$:



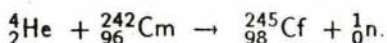
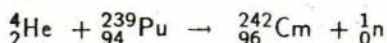
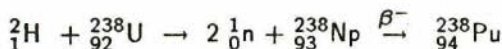
To je vedel že Fermi leta 1934. Danes poznajo najmanj 12 izotopov neptunija z masnimi števili od 230 do 241 in več kot 15 izotopov plutonija.

Pri obsevanju plutonija z nevtroni so dobili americij Am z $Z = 95$. Americij $^{241}_{95}\text{Am}$ je srebrnkasta kovina. Ko so Am obsevali z nevtroni, so dobili kirij $^{242}_{96}\text{Cm}$. S podobnim dolgotrajnim postopkom obsevanja $^{239}_{94}\text{Pu}$ so pridobili berkelij Bk in kalifornij Cf. Vendar po tej poti niso dobili novih transuranov.

Leta 1952 so na Bikiniju naredili poskus z vodikovo bombo. Pri tem se je v kratkem času sprostito ogromno število nevtronov. Iz ene tone obsevanih koral so po dolgem postopku izločili majhne količine novih transuranov einsteinija in fermija.

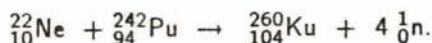
Ker obsevanje z nevtroni ni dalo novih transuranov, so jedra elementov bombardirali z jedri drugih elementov.

V letih 1940 in 1950 so z alfa delci (helijevimi jedri ^4_2He) in devtroni obstreljevali jedra do tedaj znanih transuranov. Dobili so izotope elementov 94, 96, 97 in 98. Primeri takih reakcij so:

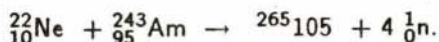


Poslednji transuran, ki so ga dobili na ta način, je bil 101 element mendelevij. To je bilo v Berkelyju v ZDA leta 1955.

Kasneje so začeli bombardirati tarče z vse bolj masivnimi ioni. Element 102 so odkrili najprej v Stockholmu, pozneje še v ZDA. Vendar to ni povsem zanesljivo. Rusi trdijo, da so element 102 prvi odkrili v Dubni v SZ leta 1963, leta 1965 pa element 103. Leta 1964 so v Dubni na ciklotronu U-300 sintetizirali element $^{260}_{104}$, ki so ga imenovali kurčatovij Ku. Reakcija je bila



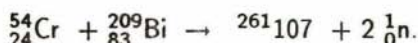
Zadnji element, ki so ga dobili po tej poti, je bil narejen v Dubni leta 1970:



Element 105 so imenovali nilsborij. Leta 1973 so kot tarčo začeli uporabljati navadni svinec. Na ta način so v Dubni leta 1974 odkrili 106. element



leta 1976 pa še 107. element:



Prva dva izotopa 108. elementa so pridobili v Dubni leta 1984, skoraj istočasno pa tudi v Darmstadtu. Sredi leta 1987 so sintetizirali v Dubni približno 40 jeder elementa 110, ki pa so razpadla že po nekaj stotinkah sekunde.

Transurane oziroma morebitne sledi njihovih razpadov so iskali tudi v meteoritih vendar brez posebnega uspeha. Sinteza transuranov še ni končana. Kdo ve, kaj bodo prinesli novi eksperimenti.

Dušan Murovec

RIBIŠKA – Rešitev s str. 193

Ker je $2 + 3 + 3 + 4 = 12$, bi bila zadnja številka skupnega števila ujetih rib enaka 2. Tako pa se ne končuje noben kvadrat naravnega števila. Edina možnost je, da ribiči niso štirje, ampak le trije, da je torej eden od očetov oče drugega očeta. Če primerjamo zadnje številke ujetih rib posameznikov, je možno le, da je Andrej Jožetov sin.

Marija Vencelj

VZTRAJNOST IN TRENJE

Pogovor o vztrajnosti, preden vpeljemo maso, pogosto spremljamo s preprostimi poskusi. Pri enem od njih izpod telesa hitro potegnemo prt, ne da bi telo padlo z mize. Poskus radi pokažejo tudi rokohitrci. V ameriški srednješolski fizikalni reviji *The Physics Teacher* je H.T.Hudson pred časom opozoril na to, da ima pri pojavu pomembno vlogo trenje (*There's more to it than inertia*, 23 (1985) 163). Izid poskusa je odvisen od koeficienta trenja med telesom in prtom in ni odvisen od mase. V isti reviji sta ga pred kratkim dopolnila U.Haber-Schaim in J.H.Dodge (*There's more to it than friction*, 29 (1991) 56). Ni pomemben samo koeficient trenja med telesom in prtom, ampak tudi koeficient trenja med telesom in mizo. Misel sta podprla s poskusom in ob tem zapisala nekaj enačb. Njun poskus, pri katerem sta uporabila neposredno priključeni računalnik, je mogoče narediti na moč preprosto.

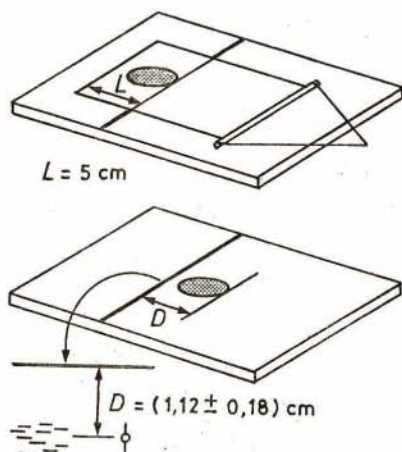
Namesto prta uporabimo pisarniški papir, ki se ne guba kot prt. Papirji ene vrste se med seboj razlikujejo precej manj kot prti. Poleg tega lahko mizo obložimo z drugim papirjem enake vrste, tako da je pomemben samo koeficient trenja med telesom in papirjem. Misel, da bi poskus naredili s kovanci, se ni obnesla. Koeficient trenja med kovancem in papirjem je za obe strani kovanca skoraj enak in z njim ni mogoče izvesti dveh vrst merjenj. V delavnici Oddelka za fiziko so izdelali za poskus štiri enake ploske medeninaste valje z maso 15 gramov in premerom 2,7 centimetra, ki so bili na eni strani zglajeni, na drugi pa hrapavi. Tudi poskusi z njimi niso zadovoljili. Zglajena in hrapava stran sta se glede na koeficient trenja na papirju še premalo razlikovali. Zato je imel pri končnih merjenjih valj na hrapavi strani nalepljeno platno. Smirkov papir se ni obnesel, ker se je prehitro zrabil, guma pa je imela prevelik koeficient trenja. Poleg tega se je pokazalo, da so odstopanja med izidi večja pri poskusih z vsemi valji kot pri ponavljajočih se poskusih z enim samim valjem.

Zato sem delal poskuse z enim samim valjem. Postavil sem ga na papir v razdaljo L od krajišča papirja (slika 1). Na drugo krajišče papirja sem z lepilnim trakom prilepil aluminijsko letev in na njeni krajišči pritrdil vrvico. Z roko sem prijel sredino vrvice in jo napel. Nato sem jo na vso moč sunkovito potegnil v vodoravni smeri. Ni bilo lahko vleči ves čas s kolikor mogoče enakomernim pospeškom v vodoravni smeri. Toda po vrsti poskusov sem si pridobil dovolj vaje. Nisem popustil želji, da bi upošteval samo "dobra merjenja", ampak sem upošteval vsa. Ne morem jamčiti, da nisem podzavestno kako vplival na izid merjenj. Pri resnejših poskusih bi bilo treba bolje poskrbeti, da bi se gibal papir vselej z enakim in enakomernim

pospeškom. Vendar bi bilo treba v to vložiti precej dela. Preprost mehanizem, pri katerem naj bi padajoča utež zagotovila enak in enakomerni pospešek, se ni obnesel.

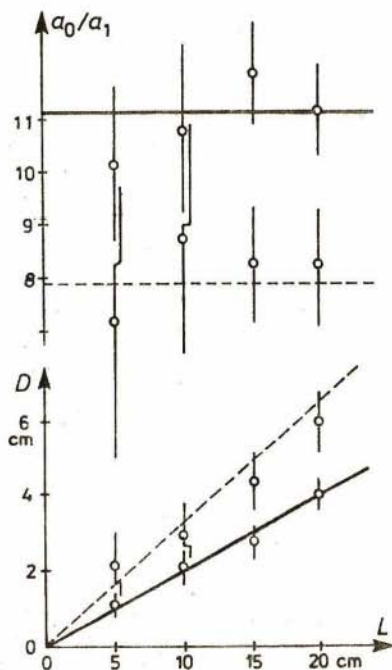
Potem, ko se je valj na spodnjem papirju ustavil, sem zaznamoval lego in izmeril odmik. V nizu merenj sem po desetkrat potegnil papir pri vsaki izmed štirih začetnih leg valja, izmeril odmik, izračunal povprečno vrednost in efektivni odmik. Najprej sem naredil niz merenj z valjem z gladko stranjo na papirju in ga potem ponovil s platneno stranjo na papirju. Izide kaže graf (slika 2).

Poskusimo pojasniti izid z nekaj preprostimi računi. Papir začnemo vleči ob času $t = 0$ s konstantnim pospeškom $a_0 > k_l g$, če je k_l koeficient lenjenja valja na papirju in g težni pospešek. Če za izhodišče vzamemo začetno lego tistega roba kovanca, ki leži v smeri vleke, opiše gibanje krajišča papirja enačba $x_0 = a_0 t^2 - L$. Dokler se giblje valj po zgornjem papirju, deluje nanj samo vodoravna komponenta sile $F = k g m_t$, če je m_t težna masa valja in k



Slika 1 Valj na zgornjem papirju pred poskusom in na spodnjem po njem z izmerki odmika D pri $L = 5$ cm.

Slika 2 Odvisnost D in a_0/a_1 od L za gladko (neprekinjeno) in s platno prevlečeno ploskev valja (črtkano). Napake, to so izračunani efektivni odmiki, ki jih kažejo navpične črtice, so večje v drugem primeru kot v prvem.



Iz niza izmerkov določene količine $x_1, x_2, \dots, x_n$ dobimo izid, ki je najbližji neznanemu pravemu izidu, s *povprečno vrednostjo*

$$\bar{x} = \frac{1}{n}(x_1 + x_2 + \dots + x_n).$$

Z *efektivnim odklikom povprečja*

$$\delta x = \frac{1}{n} \sqrt{(\bar{x} - x_1)^2 + (\bar{x} - x_2)^2 + \dots + (\bar{x} - x_n)^2}$$

povemo, kako natančen je izid

$$x = \bar{x} \pm \delta x.$$

Dostikrat imenujemo δx kar *absolutno napako*. *Relativno napako* $\delta x / \bar{x}$ izražamo v odstotkih. Žepni računalnik ima poseben *statistični program*, ki hitro izračuna povprečje in efektivni odklik. Pogosto efektivnega odklika ne izračunamo, ampak ga ocenimo z absolutno vrednostjo razlike tipičnega izmerka od povprečja.

koeficient trenja med valjem in papirjem. Po Newtonovem zakonu $m_v a_1 = k g m_t$, v katerem je m_v *vztrajna masa* valja, se giblje valj s pospeškom

$$a_1 = k g \frac{m_t}{m_v}. \quad (1)$$

Hitrost valja glede na mizo je $v = a_1 t$ in premik $x = a_1 t^2$. Valj pade z zgornjega papirja ob času t_1 in poslej drsi po spodnjem papirju. Enačba $x(t_1) = x_0(t_1)$ pripelje do zveze

$$t_1 = \sqrt{\frac{2L}{a_0 - a_1}}.$$

V tem trenutku se giblje valj s hitrostjo $v_1 = a_1 t_1$ in je premaknjen za $s_1 = a_1 t_1^2$. Tu smo spregledali postopno spremembo sile od $k g m_t$ na 0, ko se rob papirja premika prek valja. Če bi hoteli to spremembo dosledno upoštevati, bi računanje močno zapletli. Pri premikih, ki so veliki v primeri s premerom valja, s tem nismo zagrešili velike napake.

Med gibanjem valja po padcu deluje spodnji papir nanj z vodoravno komponento sile $F = -k g m_t$ in po Newtonovem zakonu je njegov pospešek

$$a_2 = -k g m_t / m_v = -a_1. \quad (2)$$

Hitrost valja je $v = a_2(t - t_1) + v_1$ in njegov skupni premik od začetka poskusa $s = a_2(t - t_1)^2 + v_1(t - t_1) + s_1$, $t > t_1$. Valj se zaustavi v trenutku t_2 , ko je $v(t_2) = 0$, torej $t_2 = t_1 - v_1/a_2$. S tem dobimo odmik

$$D = a_1 t_1^2 \left(1 - \frac{a_1}{a_2}\right) = \frac{2a_1 L}{a_0 - a_1}. \quad (3)$$

Razmerje D/L določa razmerje pospeškov a_0 in a_1 :

$$\frac{a_0}{a_1} = \frac{2L}{D} + 1.$$

Pikolovsko smo razločevali vztrajno in težno maso samo zato, da smo izrecno pokazali vlogo vztrajnosti. Zaradi ekvivalentnosti obeh mas moramo postaviti $m_t/m_v = 1$. Od mase neodvisni izid ne pomeni, da vztrajnost ni pomembna, ampak da sta vztrajna in težna masa enaki. Podobno ravnamo na primer pri izvajanju enačbe za nihanje nitnega nihala. S telesom z vztrajno maso 0 poskusa ne bi mogli narediti ($m_v \rightarrow 0$ pripelje do $a_1 \rightarrow \infty$), kakor ga ne bi mogli narediti, če ne bi bilo trenja ($k \rightarrow 0$ pripelje do $a_1 \rightarrow 0$).

Izmerjeni premik $D(L)$ pri začetni razdalji $L = 5$ cm, 10 cm, 15 cm, in 20 cm za dano spodnjo ploskev valja kaže, do kolikšne mere je razmerje D/L konstantno. To velja v okviru napak pri merjenju (slika 1) in se sklada s privzetkom, da je razmerje a_0/a_1 konstantno. Iz merjenj sledi za to razmerje $11,1 \pm 0,6$ za gladko ploskev valja in $7,9 \pm 0,6$ in za ploskev, prevlečeno s platnom.

Da bi izboljšali natančnost, poskusimo meriti drugače. Valj spustimo po klanecu z dolžino L_0 pri danem nagibu $\varphi > \varphi_0$. Klanec se konča v vodoravnem izteku, v katerem doseže valj razdaljo L_1 , preden se zaustavi. Po izreku o kinetični in potencialni energiji se začetna potencialna energija $mgL_0 \sin \varphi$ porabi za delo sile trenja $L_0 k mg \cos \varphi + L_1 k gm$. Izračunamo *efektivni* koeficient trenja

$$k = \frac{L_0 \sin \varphi}{L_0 \cos \varphi + L_1}.$$

Pri našem poskusu meri dolžina klanca $L_0 = 15$ cm. Pri desetih ponovitvah izmerimo doseg L_1 bolje kot na 6 % natančno in koeficient trenja še natančneje. Toda ugotovimo, da je koeficient trenja odvisen od nagiba. Pri gladki ploskvi z nagibom narašča: 0,26 (nagib 20°), 0,28 (25°), 0,33 (30°), pri platneni pa pojema: 0,51 (30°), 0,47 (35°), 0,43 (40°). Pričakovali bi, da bi efektivni koeficient pojema z naraščajočim nagibom, saj z nagibom narašča hitrost valja na dnu, s tem pa koeficient trenja pojema. Vse kaže, da moti trk valja z vodoravnim iztekom na koncu klanca, in to tem bolj, čim večja je hitrost valja. To pride do izraza pri gladki strani valja, ne pa pri platneni strani, pri kateri platno trk ublaži.

Pospešek a_0 lahko določimo, če poznamo koeficient trenja. Na klancu v mejnem nagibu φ_0 , ko valj ravno drsi s konstantno hitrostjo, velja $k = \operatorname{tg}\varphi_0$. Za gladko ploskev valja dobimo $\operatorname{tg}14^\circ = 0,25$, za ploskev, prevlečeno s platnom pa $\operatorname{tg}24^\circ = 0,45$. Koeficienta lepenja k_l sta za nekaj desetink večja. Merjenja so dokaj nenatančna, mejni nagib je nenatančen do stopinje, koeficient trenja pa do 0,02, tako da doseže relativna napaka skoraj 10 %.

Zato se je najbolje zadovoljiti z nenatančnima koeficientoma trenja, ki smo ju dobili z mejnim nagibom 0,25 in 0,45. Z njima izračunamo z enačbo (1) pospešek valja za gladko stran $a_1 = 0,25 \cdot 9,8 \text{ m/s}^2 = 2,5 \text{ m/s}^2$ in $a_1 = 0,45 \cdot 9,8 \text{ m/s}^2 = 4,4 \text{ m/s}^2$ za platneno stran. Z izmerjenim razmerjem a_0/a_1 lahko nato ocenimo pospešek papirja a_0 : $a_0 = 11,1 \cdot 2,5 \text{ m/s}^2 = 28 \text{ m/s}^2$ za gladko stran in $a_0 = 7,9 \cdot 4,4 \text{ m/s}^2 = 35 \text{ m/s}^2$ za platneno. Ocenimo se razlikujeta za $\Delta a_0 = 7 \text{ m/s}^2$. Delno to pojasnimo z nenatančnim merjenjem, delno pa z Newtonovim zakonom, ki ga to pot uporabimo za papir:

$$F_r - F_p - km_t g = m^* a_0.$$

F_r je sila roke, F_p sila spodnjega papirja in m^* masa papirja, aluminijeve letve in vrvice. Če je sila roke pri vseh poskusih enaka, velja zveza $m^* \Delta a_0 = -m_t g \Delta k$. Z njo dobimo za razliko pospeškov papirja

$$m_t g (-\Delta k) / m^* = 15 \text{ g} \cdot 9,8 \text{ ms}^{-2} \cdot 0,2 / 11 \text{ g} = 3 \text{ m/s}^2,$$

medtem ko smo prej dobili več kot dvakrat več.

Pri računanju napake razlike se absolutni napaki seštejeta in relativna napaka lahko močno naraste. Na eni strani poznamo koeficienta trenja z relativno napako 10 %, tako da je razlika $-\Delta k = (0,45 \pm 0,05) - (0,25 \pm 0,03) = 0,2 \pm 0,1$ in naraste relativna napaka na 50 %. Na drugi strani poznamo pospeška papirja približno z relativno napako 10 %, tako da je razlika $\Delta a_0 = (35 \pm 4) \text{ m/s}^2 - (28 \pm 3) \text{ m/s}^2 = (7 \pm 7) \text{ m/s}^2$ in naraste relativna napaka celo na 100 %.

Najbrž pa razkrije ta razlika tudi slabost privzetkov, na primer tistega, da je sila roke pri vseh poskusih enaka, ali tistega, da je pospešek papirja konstanten. S to ugotovitvijo se moramo zadovoljiti. Merjenja pri pojavih s trenjem so pogosto nenatančna. Uvideli pa smo, da je mogoče tudi z nenatančnimi podatki marsikaj koristnega ugotoviti. Ne smemo pozabiti, da so v fiziki vsi podatki bolj ali manj nenatančni in da so zaradi tega bolj ali manj nenatančni tudi vsi izidi.

Janez Strnad

KOLIKO PITAGOREJSKIH TRIKOTNIKOV? – Rešitev s str. 213

Na dva načina izražena ploščina pravokotnega trikotnika nam da zvezo

$$2ps = ab \quad (2s = \text{obseg trikotnika}).$$

Od tod sledi

$$p = \frac{ab}{a+b+c} = kv(u-v),$$

kjer sta u in v tuji naravni števili, eno sodo in eno liho, $u > v$ in k poljubno naravno število.

Za vsak $n \in \mathbb{N}$ zagotovo obstaja vsaj en tak pitagorejski trikotnik, da je polmer njegove včrtane krožnice enak n . Dobimo ga npr. za $k = n$, $u = 2$ in $v = 1$. In koliko jih je za posamezen n ? Naj bo

$$n = 2^\alpha p_1^{\alpha_1} p_2^{\alpha_2} \dots p_m^{\alpha_m}$$

praštevilska razcepitev števila n . Pri tem je eksponent pri kakšnem od praštevil lahko enak nič. To samo pomeni, da tisto praštevilo v razcepitvi dejansko ne nastopa (npr. 2, če je n lih). Zanima nas število trojic (k, u, v) , za katere je

$$kv(u-v) = 2^\alpha p_1^{\alpha_1} p_2^{\alpha_2} \dots p_m^{\alpha_m}.$$

Praštevila z desne moramo porazdeliti med števila na levi tako, da bosta v in $u-v$ tuji števili in število $u-v$ liho. Za k ni omejitev, vsebuje vse faktorje, ki niso v $v(u-v)$.

Faktorje 2 lahko na $\alpha + 1$ način porazdelimo med v in k . Za ostala praštevila je potrebno upoštevati le tujost med v in $u-v$. Praštevilo p_i lahko nastopa ali v v z α_i različnimi eksponenti ali v $u-v$ z α_i različnimi eksponenti ali pa v produktu $v(u-v)$ ne nastopa. Imamo torej $2\alpha_i + 1$ možnosti. Od tod sledi

$$N(n) = (\alpha + 1)(2\alpha_1 + 1)(2\alpha_2 + 1) \dots (2\alpha_m + 1),$$

kjer smo z $N(n)$ označili število iskanih pitagorejskih trikotnikov.

Tako ima le trikotnik s stranicami 3,4,5 polmer včrtane krožnice enak 1. Včrtana krožnica ima polmer 2 pri dveh trikotnikih: s stranicami 6,8,10 in 5,12,13. Če je n liho praštevilo, je $N(n) = 3$, za $n \leq 100$ pa se da največ pitagorejskih trikotnikov očrtati krožnici s polmerom 90. Takih trikotnikov je kar 30.

Marija Vencelj

MERJENJE PADAVIN Z RADARJEM

Opazovanje oblakov z radarjem in obdelava radarskih meritev z računalnikom sta precej mladi področji v meteorologiji. Razumljivo je torej, da še nista splošno poznani. Ker smo začeli v letu 1991 v Sloveniji s poskusnim radarskim merjenjem padavin, se zdi primerno, da vsaj na kratko povemo nekaj o meteoroloških radarjih in njihovi uporabi.

Meteorološki radar

Osnovni deli radarja so oddajnik, antena in sprejemnik. Oddajnik tvori zaporedje paketov elektromagnetnih valov, antena pa jih usmerja v ozek prostorski kot. Izsevani paket potuje skozi atmosfero in, če na svoji poti naleti na oviro (hrib, letalo, množico kapljic v oblaku), se na njej siplje. Del elektromagnetnih valov se siplje nazaj, kjer jih s pomočjo iste antene zazna sprejemnik. Z usmeritvijo antene je določena smer, v kateri je ovira, z zakasnitvijo odmeva za časom izsevanja je določena oddaljenost ovire, z jakostjo odmeva pa njene odbojne lastnosti.

Usmerjanje in sevanje antene ter sprejem, shranjevanje in prikaz radarskih odmevov izvaja računalnik, ki je preko ustreznega vmesnika povezan z radarjem. Računalnik izvaja omenjene naloge, kot mu velewa vanj vstavljeni program. Antena je lahko stalno usmerjena v katerokoli smer ali pa se obrača. Radarski odmevi iz vseh oddaljenosti iz trenutne smeri se sproti shranjujejo v računalnikov spomin, kjer se uvrščajo v trodimenzionalno polje odmevov - radarsko sliko atmosfere, hkrati pa se tudi posredujejo oddaljenim uporabnikom preko telefonskih zvez.

Meteoroloških radarjev je dandanes v svetu že več sto. Tudi v Sloveniji imamo enega; postavljen je na Lisci pri Sevnici. Radar je ameriške izdelave in ima anteno v obliki rotacijskega paraboloidea s premerom 4 metre. Antena seva valovanje z valovno dolžino 5 centimetrov v kot 1 stopinje. V vsaki sekundi izseva 250 paketov, ki so dolgi po 600 metrov. Povprečna moč sevanja znaša 250 wattov. Sprejemnik meri odmeve do razdalje 200 kilometrov. Računalnik vsakih 15 minut vključi sevanje in zavrti anteno nekajkrat okrog navpične osi; obrati potekajo pri različnih naklonih antene glede na vodoravno ravnino. Celotna meritev traja približno 5 minut, nato pa računalnik sevanje izključi in pošlje izmerke po telefonski zvezi osrednjemu računalniku na Hidrometeorološkem zavodu v Ljubljani. Tu se zaporedne radarske slike shranjujejo in prikazujejo na prikazovalnem zaslonu za uporabo pri kratkoročni

napovedi vremena.

Merjenje odbojnosti

Poskusimo iz jakosti odmeva ugotoviti odbojne lastnosti meteorološke ovire - množice dežnih kapelj. Antena naj seva moč P v kot 2θ . Na razdalji R od antene ima potem radarski snop polmer $r = R \sin \theta \approx R\theta$, gostota energijskega toka v snopu pa znaša $j \approx P/\pi r^2 \approx P/\pi \theta^2 R^2$.

Dežna kaplja v radarskem snopu na razdalji R siplje elektromagnetno valovanje na vse strani. Gostota energijskega toka j_r , ki se siplje nazaj, je sorazmerna gostoti vpadajočega toka j in pada s kvadratom razdalje od kaplje; pri radarski anteni znaša torej $j_r = \sigma j/4\pi R^2 = \sigma P/4\pi^2 \theta^2 R^4$. Sorazmernostni koeficient σ imenujemo odbojni presek kaplje. Odvisen je od velikosti in oblike kaplje, pa še od valovne dolžine vpadnega valovanja.

Vendar se k anteni naenkrat ne vrne le odmev ene kaplje na razdalji R , pač pa odmevi celotne množice kapelj pri tej razdalji. Če s h označimo dolžino paketa valovanja, pokaže kratek razmislek, da se istočasno vrnejo k anteni vsi odmevi iz prostornine $\pi r^2 h/2$. Če z n označimo še število kapelj na prostorninsko enoto, je število vseh kapelj, katerih odmevi se istočasno vrnejo do antene, enako $N = n\pi r^2 h/2 = n\pi \theta^2 R^2 h/2$. Pri anteni povzročijo gostoto energijskega toka Nj_r . Radarska antena plosčine S torej sprejme moč $P_r = Nj_r S$ oziroma po vstavitvi izrazov za N in j_r :

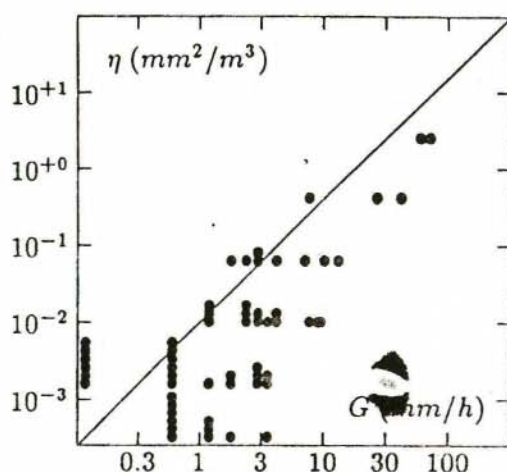
$$P_r = \left(\frac{hSP}{8\pi} \right) \left(\frac{n\sigma}{R^2} \right).$$

Vidimo, da je moč odmeva sorazmerna vsoti odbojnih presekov kapelj na prostorninsko enoto $n\sigma$. To vsoto imenujemo odbojnost. Velikost sorazmernostne konstante $hSP/8\pi$ je odvisna le od lastnosti radarja. Pri radarju na Lisci znaša po zgornjih ocenah $75 \times 10^3 \text{ Wm}^3$. Če konstanto poznamo, lahko iz izmerjene moči odmeva P_r in razdalje R določimo odbojnost kapelj pri tej razdalji. Slika na zadnji strani ovitka prikazuje radarski posnetek atmosfere nad Slovenijo; področja različnih odbojnosti so označena z različnimi barvami.

Merjenje padavin

Odbojnost ni ravno količina, ki bi jo v vsakdanjem življenju morali poznati. Bolj zadovoljni bi bili, če bi namesto odbojnosti poznali na primer jakost padavin, to je prostornino oziroma maso dežja, ki v časovni enoti pade na

ploskovno enoto. Natančne povezave med odbojnostjo in jakostjo padavin ni pričakovati, ker lahko različne kombinacije števila kapelj n in njihovih presekov σ (na primer veliko drobnih ali malo velikih kapelj) v splošnem povzročijo enake odbojnosti $n\sigma$ in različne jakosti padavin. Poleg tega radar zaradi hribov in ukrivljenosti zemeljske površine ne more meriti odmevov tik nad tlemi, ampak le na večjih višinah. Pričakujemo lahko torej kvečjemu bolj ali manj dobro statistično povezavo. Primerjave med radarskimi meritvami odbojnosti in talnimi meritvami jakosti padavin res pokažejo, da obstaja med obema količinama povezava. Na sliki je prikazana taka povezava za meteorološko postajo Celje. Na vodoravni osi so prikazane talne meritve jakosti padavin G v enotah mm/h, na navpični pa odbojnosti $\eta = n\sigma$ v enotah mm^2/m^3 . Vidimo, da je povezava dokaj šibka, saj se lahko pri isti izmerjeni odbojnosti razlikujejo trenutne jakosti padavin tudi za faktor 3. Ujemanje je boljše, če namesto trenutne jakosti padavin merimo celotno količino padavin, ki pade v daljšem časovnem intervalu na večjo površino. V povprečju se tedaj razlike zmanjšajo na nekaj deset odstotkov.



Povezava med radarskimi in talnimi meritvami padavin.

Radarske meritve padavin imajo v primerjavi s talnimi nekatere prednosti, pa tudi pomanjkljivosti. Glavna prednost radarskih meritev je njihova velika hitrost in prostorska ločljivost: z enim radarjem lahko v nekaj minutah pregledamo stanje atmosfere v vsaki točki do sto in več kilometrov daleč. Za to bi potrebovali več tisoč avtomatiziranih talnih dežemerov! Glavna po-

manjkljivost radarskih meritev padavin pa je majhna natančnost, predvsem pri večjih razdaljah. Zato je radar kot merilnik padavin uporaben zlasti na področjih, kjer je potrebno sproti spremljati lego, zgradbo in gibanje padavinskih sistemov, ni pa tako pomembno poznati njihovo natančno jakost. Ta področja so: letalski, cestni in morski promet (usmerjanje vozil), kmetijstvo (škropljenje proti rastlinskim škodljivcem) in civilna zaščita (napoved neurij in poplav). Kombinirane radarske meritve padavin in talne meritve pretokov rek pa so uporabne v vodnem gospodarstvu za učinkovito uporabo zajezenih voda.

Kaj lahko rečemo za konec? Radarsko opazovanje oblačnosti in padavin je gotovo zelo zanimivo in tudi koristno. Žal dandanes uporabniki pri nas še nimajo pravih možnosti za sprejem radarskih slik. Upajmo pa, da ni več daleč čas, ko bo lahko vsak, ki ga zanima trenutno vreme nad Slovenijo, preko telefonske zveze dobil na svoj osebni računalnik svežo, pravkar posneto radarsko sliko padavin, ali pa si jo bo preprosto ogledal kar na televizijskem teletekstu.

Marjan Divjak

PROSLAVE V PLEMLJEVEM LETU 1992

Društvo matematikov, fizikov in astronomov Slovenije bo v letošnjem letu posvetilo vsa svoja srečanja in prireditve spominu na svojega prvega častnega člana prof. dr. Josipa Plemlja. Na naš predlog je vlada Republike Slovenije letošnje leto proglasila za Plemljevo leto. Častnemu odboru, katerega predsednik je prof. dr. Peter Vencelj, minister za šolstvo in šport, bomo program letošnjih prireditev predstavili na prvi seji dne 22. maja 1992, na dan 25. obletnice smrti največjega slovenskega matematika. Učitelje matematike v srednjih in osnovnih šolah prosimo, da posvetijo temu dogodku nekaj minut tudi v razredih in učencem predstavijo življenje in delo profesorja Plemlja. Tekste s primerno vsebino lahko dobite v letošnjih in starejših številkah Preseka ter Obzornika za matematiko in fiziko. Na razpolago je tudi brošura, ki jo je napisal prof. dr. Ivan Vidav.

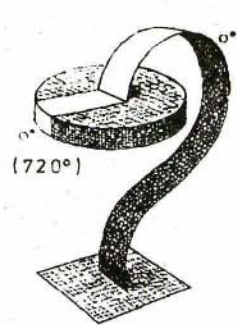
Ciril Velkóvrh

Dobite pa lahko še stenske slike za kabinete, razglednice in značke s portretom prof. Plemlja, namenjene vsem udeležencem tekmovanj iz matematike v srednji šoli. Izjemoma vam priporočamo, da v letošnjem letu tudi v osnovni šoli podelite bronaste, srebrne in zlate (šolsko, občinsko ter republiško tekmovanje iz matematike) Plemljeve značke, ki so pri Komisiji za tisk še na zalogi.

ŠE O SUKANJU TELES

Zanimivi članek Antona Cedilnika o vrtenju v 2. številki Preseka je vredno nekoliko dopolniti. Ker je zadeva v osnovi zapletena, si je najbolje pomagati s slikami. Zaporedje petih fotografij, ki jih je naredil Marjan Smerke, prepriča, da je treba Presek zasukati za 720° , preden ga spravimo v začetno lego (fotografije na III. strani ovitka). Poskus je kazal P.A.M. Dirac s škarkjami, podobne fotografije pa najdemo v številnih revijah s krožniki, polnimi skodelicami kave - kar je veliko bolj napeto - in drugim.

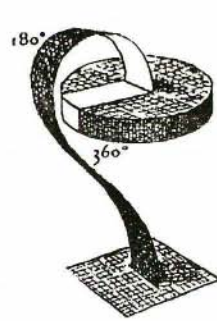
Štiri risbe kažejo ustrezne lege ploščice, ki je z gibkim trakom povezana z okolico. Tudi ploščico moramo zasukati za 720° , preden jo spravimo v začetno lego (slika 1).



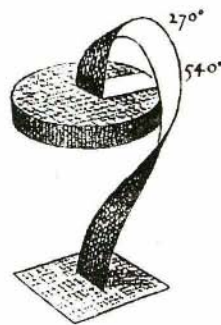
Slika 1a



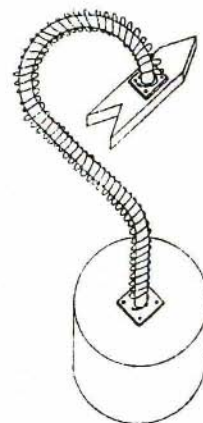
Slika 1b



Slika 1c



Slika 1d



Slika 2

Sukanje ploščice je bilo D.A.Adamsu osnova pri načrtovanju naprave, ki jo je patentiral leta 1971 v ZDA. Želel se je izogniti drsnim obročem v nekaterih električnih napravah. Če je tok majhen, moti pri zelo natančnem merjenju upor, ki se med drsenjem nekoliko spreminja. Celotna naprava je dokaj zapletena. Njeno risbo je mogoče videti v prispevku C.L.Stonga *Diverse topics, starting with how to supply electric power to something that is turning* v reviji *Scientific American* **233** (1975) 120 (6). Na opisani način ni mogoče dovajati in odvajati iz mirujočega dela naprave v vrteči se del samo električnega toka, ampak tudi svetlobni tok in tekočino.

Precej preprostejšo napravo, ki posnema Adamsov patent, si je zamislil E.Rieflin in o njej poročal v članku *Some mechanisms related to Dirac's strings* v *American Journal of Physics* **47** (1979) 379. V vprašaj zvita debelejša žica je vrtljivo pritrjena na podstavku in ima na drugem krajišču vrtljivo puščico (slika 2). Vijačna vzmet, ki obdaja žico, povezuje puščico s podstavkom. Puščica se zasučje za 720° , ko zasučemo vprašaj za 360° .

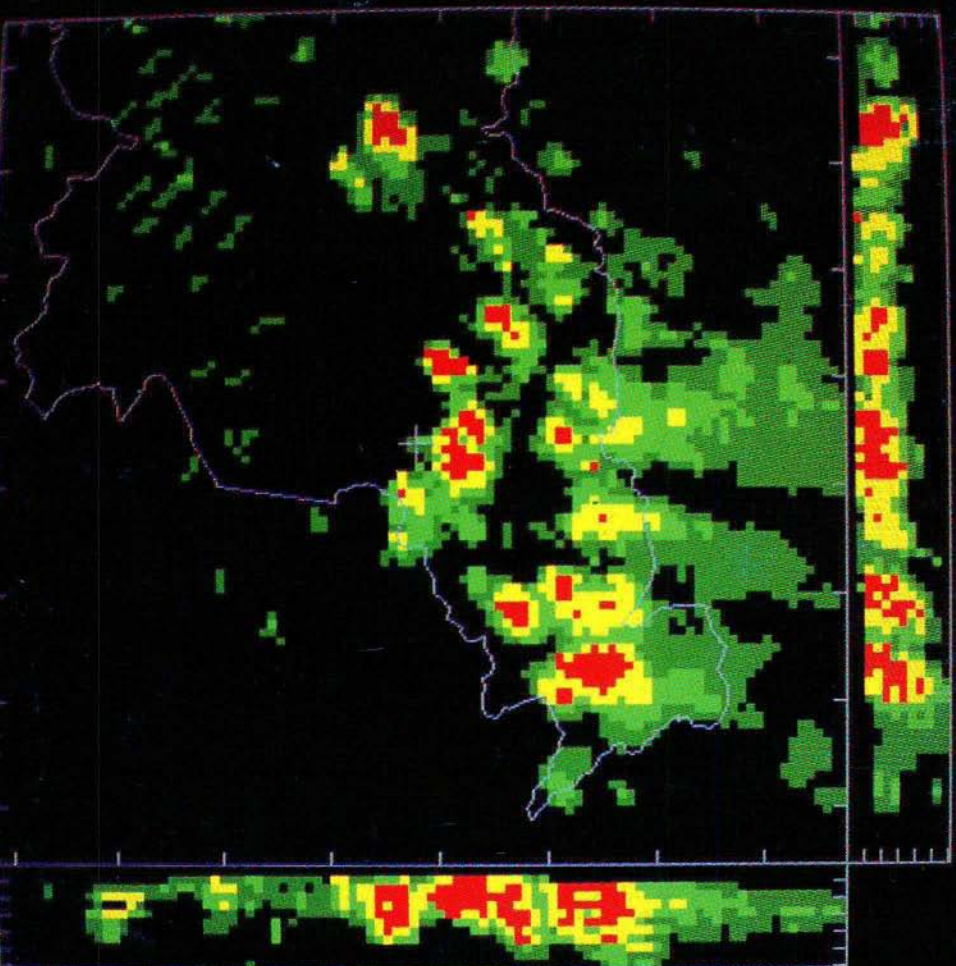
Več o zanimivi zadevi lahko bralec izve tudi iz članka E.D.Bolkerja *The spinor spanner* v *American Mathematical Monthly* **80** (1973) 997.

Janez Strnad

484-433



R R C Lincea
21.8.1990
16:36



Levels [dBZ]



Arch RDI
Auto OFF
Line OFF

COMMANDS

DISPLAY

↑ ↓ ← →

move
Magnify
Diminish
Overlay
Clutter
Colors
<Esc>