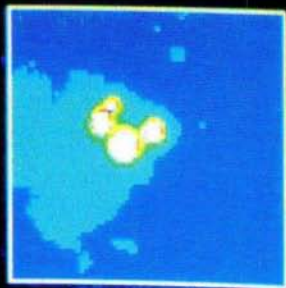


ARWEEK

4

M42, 09.01.1991, 21:34:45 UT, EXP=5s

6000



	VSEBINA	19. letnik, 1991/92, št. 4
ASTRONOMIJA	Slikanje astronomskih objektov s CCD kamero (Tomaž Zwitter in Bojan Dintinjana).....	II, 194-198
	Jakobova palica (Marijan Prosen).....	200-202
FIZIKA	Led in voda (Janez Strnad).....	204-208
RAČUNALNIŠTVO	Derive (Matija Lokar).....	210-212
RAZVEDRILO	Brstenje (Miro Dobovšek).....	214-218
	Konveksni tangramski liki (Vilko Domajnko).....	220-222
	Z eno potezo (Marija Vencelj).....	223
	Poišči izrek (Marija Vencelj).....	223
	Križanka Profesorju za življenski jubilej (Marko Bokalič).....	224-225
	Utrinek (Marija Vencelj).....	230
FIZIKA	Newtonovo jabolko in jablana (Janez Strnad).....	233
MATEMATIKA	O vsoti razdalj med točkama (Darjo Felda).....	226-227
NOVICE	Sejem (Ciril Velkovich).....	209
	Račkova knjižnica. Presekova knjižnica. Knjižnica Sigma.....	228-229
	Urnik tekmovanj v letu 1992 (Darjo Felda).....	230-233
	Nobelova nagrada za fiziko v letu 1991 (Irena Drevenšek).....	IV, 234-235
TEKMOVANJA	27. republiško tekmovanje osnovnošolcev iz matematike - Rešitve nalog s str. 169 (Aleksander Potočnik).....	236-238
	35. republiško tekmovanje srednješolcev iz matematike - Rešitve nalog s str. 172 (Darjo Felda).....	240-243
	Kvalifikacije za zvezno tekmovanje srednješolcev iz matematike - Rešitve naloge s str. 174 (Matjaž Željko).....	244-246
	15. republiško srednješolsko tekmovanje iz računalništva - Rešitve nalog s str. 86 (Primož Gabrijelčič).....	248-III
NALOGE	Ribiška (Marija Vencelj).....	193
	Še Naokrog po stožcu (Anton Cedilnik).....	202
	Prepogibanje lista papirja (Anton Cedilnik).....	203
	Srečka (Marija Vencelj).....	203
	Švicarski tramvaj (Borut Zalar).....	212
	Pravilni petkotnik (Marija Vencelj).....	213
	Koliko pitagorejskih trikotnikov? (Marija Vencelj).....	213
	Tri naloge z naravnimi števili (Borut Zalar).....	227
REŠITVE NALOG	Naokrog po stožcu - s str. 21 (Marija Vencelj).....	198-199
	Tetivni osemnajstkotnik - s str. 165 (Boris Lavrič).....	218-219
	Številna križanka - s str. 188 (D.M.Milošević, prev. D. Kobal).....	223
	Tehtanje z verigo - s str. 165 (Marija Vencelj).....	238
	Sod - s str. 129 (Boris Lavrič).....	246-247
	Tangramski paradoksi - s str. III, P-3 (Vilko Domajnko).....	247
NOVE KNJIGE	Milutinovič, Žubrinič, Balkanske matematičke olimpijade (Darjo Felda).....	235
	M.Lokar, Derive (Nada Razpet).....	239
	S. Klavžar, Zvezdne besede ali WordStar po domače (Mojca Lokar).....	III
NA OVITKU	Posnetek Orionove meglice s CCD kamero, montirano na avtomatskem fotometričnem teleskopu (foto Bojan Dintinjana). Glej tudi članek na strani 194.....	I
	Slika tekočega kristala pod polarizacijskim mikroskopom, posneta v laboratoriju za aplikacijo tekočih kristalov na Institutu Jožef Stefan. Glej članek na strani 234.....	IV

RIBIŠKA

Jože s sinom in Andrej s sinom so šli ribe lovit. Domov grede se je pogovor seveda vrtel le okoli ujetih rib. Med drugim so ugotovili:

Število rib, ki jih je ujel Jože, se končuje s števk 2, število ujetih rib njegovega sina s števk 3. Število Andrejevih rib se končuje prav tako s 3, število rib njegovega sina pa s 4. Izkazalo se je še, da je skupno število ujetih rib kvadrat naravnega števila.

Kako je ime Jožetovemu sinu?



Marija Vencelj

PRESEK

list za mlade matematike, fizike, astronome in računalnikarje
19. letnik, šolsko leto 1991/92, številka 4, strani 193 – 256

UREDNIŠKI ODBOR: Vladimir Batagelj, Tanja Bečan (jezikovni pregled), Dušica Boben (oblikovanje teksta), Mirko Dobovišek (glavni urednik), Vilko Domajnko, Darjo Felda (tekmovanja), Bojan Golli, Marjan Hribar, Martin Juvan (računalništvo), Sandi Klavžar, Edvard Kramar, Boris Lavrič, Andrej Likar (fizika), Matija Lokar, Franci Oblak, Peter Petek, Pavla Ranzinger (astronomija), Marjan Smerke (svetovalec za fotografijo), Miha Štalec (risbe), Ciril Velkovich (urednik, nove knjige, novice), Marija Vencelj (matematika, odgovorna urednica).

Dopise pošiljajte in list naročajte na naslov: Društvo matematikov, fizikov in astronomov Slovenije - Podružnica Ljubljana - Komisija za tisk, Presek, Jadranska c. 19, 61111 Ljubljana, p.p. 64, tel. (061) 265-061/53, št. žiro računa 50101-678-47233. Naročnina za šolsko leto 1991/92, vplačana po 15.2.1992, je za posamezne naročnike **500 SLT**, za skupinska naročila šol **400 SLT**, posamezna številka **100 SLT (80 SLT)**, za tujino **12000 LIT**.

List sofinancirajo MZT, MŠŠ in MK

Ofset tisk DELO - Tiskarna, Ljubljana

Tekst je oblikovan z računalnikom SLIM 286, ALTECH, Ljubljana

© 1992 Društvo matematikov, fizikov in astronomov Slovenije – 1094

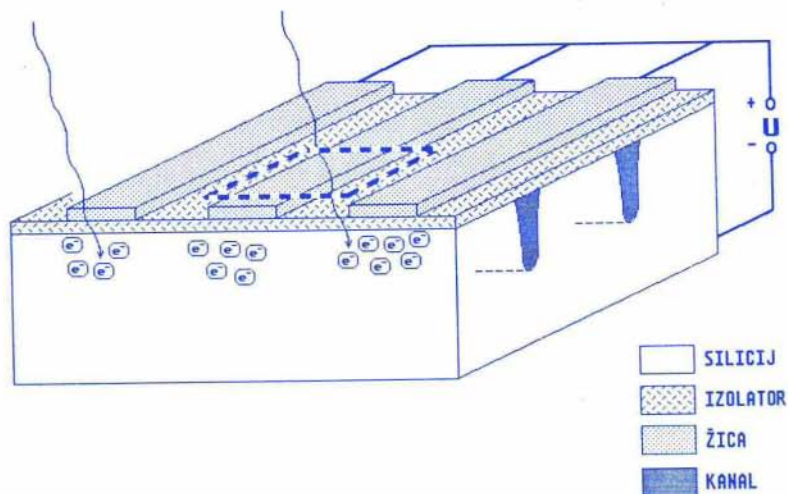
ASTRONOMIJA

SLIKANJE ASTRONOMSKIH OBJEKTOV S CCD KAMERO

Ob vprašanju, kakšen detektor uporabljamo v običajni pa tudi v astronomski fotografiji, bi najbrž takoj pomislili na film. Kot kaže, pa smo pri fotografiranju objektov vseh vrst priča velikim spremembam: tradicionalni kemijski zapis slik na filmu vedno odločneje izpodriva elektronska tehnologija, ki jo srečamo v vsaki sodobnejši video kameri. Detektor je v tem primeru CCD kamera, ki temelji na fotoefektu v trdni snovi. V tem sestavku bomo predstavili uporabo tega detektorja pri slikanju astronomskih objektov. Omenili bomo tudi ostalo opremo, ki jo potrebujemo za učinkovito delo; med to sodi tudi astronomski teleskop s popolnoma avtomatiziranim upravljanjem.

Osnova elektronskega beleženja slik je tako imenovani CCD čip, ki ga namestimo v goriščno ravnino teleskopa. Fotoni z astronomskih objektov skozi prozoren zgornji pokrov čipa vstopajo v silicijevo rezino in tam povzročajo fotoefekt (slika 1). Izkoristek tega procesa je dokaj dober, saj do 80% fotonov z valovnimi dolžinami med 400 in 1100 nm povzroči prehod elektrona v prevodni pas. To je mnogo bolje kot pri filmu, kjer je izkoristek največ nekaj odstotkov. Mesto nastanka elektrona nam pove izvor ustreznega fotona. Število elektronov na določenem mestu je sorazmerno s tokom vpadlih fotonov in tako s sijem ustreznega objekta. Za kvantitativne meritve astronomskih objektov v goriščni ravnini moramo med ekspozicijo preprečiti izgubljanje ali morebitno potovanje elektronov po čipu. Elektronom moramo onemogočiti, da bi se vrnili nazaj v prejšnje vezano stanje. Poleg tega ne smemo dopustiti, da bi se razlezli po čipu in tako zmazali sliko. Za oboje poskrbi napetost, ki jo priključimo med žicami na zgornji strani in med spodnjo stranjo silicijeve rezine. Elektroni se nabirajo v potencialnih jamah pod žicami, mesta, kamor bi se elektroni lahko vezali, pa električno polje potisne v notranjost silicija. Kanali, ki so zapolnjeni s snovjo, po kateri se prosti elektroni ne morejo gibati, so nanizani v pravokotni smeri glede na žice in elektronom preprečujejo tudi potovanje vzdolž žic. Tako dosežemo, da nas elektroni v prevodnem pasu "počakajo" na mestu svojega nastanka vse do trenutka, ko ekspozicijo končamo in preberemo, koliko in kje se jih je nabralo. To je dalo detektorju tudi ime: CCD je kratica za angleško skovanko Charge Coupled Device; v tem primeru je naboj vezan na električno polje žic. Po koncu ekspozicije s preklapljanjem napetosti na žicah elektrone najprej "zapeljemo" na rob silicijeve rezine, tam pa naboj s kondenzatorjem spremenimo v napetost, ga digitaliziramo in po hitri povezavi sporočimo računalniku. Informacija o osvetlitvi posamezne točke, to je pravokotnega območja med sosednjima

kanaloma in pod ustrezno žico, je tako takoj po branju že zapisana v računalnikov spomin. CCD detektor je torej ploskovni detektor z nekaj sto tisoč točkami, ki pokrivajo površino okrog 2 cm^2 .



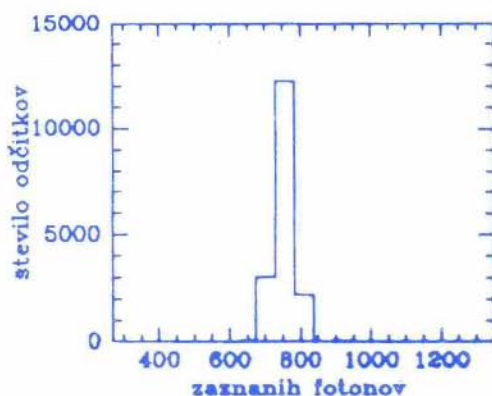
Slika 1. Shematski prerez CCD čipa. Z debelo prekinjeno črto je označena velikost ene za svetlobo občutljive točke.

Prednosti CCD detektorja v primerjavi s filmom je veliko. Računalnik prebere naboj na CCD čipu v nekaj sekundah (v video kameri, kjer je potrebna manjša točnost pri branju, celo v $1/25$ sekunde). Sliko lahko takoj prikažemo na zaslonu in se odločimo, če sta bili dolžina ekspozicije in centriranje objekta pravšnji, ali pa bomo posnetek takoj ponovili. Zamudno razvijanje filma tako odpade. Poleg te možnosti ima CCD še druge prednosti, ki si jih bomo najlažje ogledali na primeru.

Na naslovnici je posnetek meglice M 42 v ozvezdju Oriona. To je emisijska meglica, ki seva zaradi prehajanja atomov vodika iz višjih v nižja vzbujena stanja. Energijo za vzbujanje vodikovih atomov seva četverica svetlih in vročih zvezd v središču meglice, ki so jim nadeli ime Trapez. Vzhod je na posnetku zgoraj in sever desno. Barve na posnetku niso prave, ampak označujejo področja, ki so približno enako svetla. Svetlost raste od črne proti beli barvi. Številke ob barvni skali pomenijo število zaznanih fotonov. Povečan osrednji del meglice je v drugi svetlostni skali narisani v okvirčku v desnem spodnjem kotu.

Število elektronov v prevodnem pasu je sorazmerno številu vpadlih fotonov, zato je za razliko od filma odziv CCD detektorja linearen. Ob tem ima CCD detektor zelo velik dinamični obseg, to je razmerje med najmanjšo in največjo možno zabeleženo intenziteto. Na posnetku Oriona je to razmerje kar 1:15000. Tako lahko na istem posnetku zabeležimo temne robne dele meglice ter zelo svetel osrednji Trapez. Kaj takega na filmu zaradi mnogo manjšega dinamičnega obsega ne bi bilo mogoče; če bi hoteli slikati celo meglico, bi bil Trapez presvetljen, ob dovolj kratki ekspoziciji za slikanje Trapeza pa ne bi videli temnih zunanjih delov meglice.

Slika 2 Število pozameznih odčitkov za kos neba ob desnem robu slike na naslovnici. Majhna razmazanost odčitkov okrog povprečne vrednosti pomeni, da ima CCD detektor zelo nizek šum.



Slika na naslovnici je zelo veran posnetek Orionove meglice. Predel v temnem spodnjem kotu slike meglice nam to nazorno kaže (slika 2). Zabeleženi odčitki kolebajo le zaradi relativno majhnega števila fotonov, ki so med ekspozicijo zadeli detektor. Prihajanje fotonov na detektor je naključen proces. Pri 100 pričakovanih fotonih na določeni točki jih pri posamezni ekspoziciji preštejemo nekaj več ali manj, vendar je razlika do 100 redkokdaj večja od $\sqrt{100} = 10$. Tej vrsti napak, ki jim pravimo fotonski šum, se ne moremo izogniti pri nobenem detektorju. Ostalim vrstam napak, kot je neželeno vzbujanje elektronov v prevodni pas zaradi previsoke temperature detektorja ali napakam zaradi nenatančnega branja zbranega naboja, pa se izognemo tako, da detektor hladimo z več zaporednimi Peltierovimi členi na približno 200° K ter da naboj beremo dovolj počasi.

Do sedaj smo govorili le o prednostih CCD detektorja. Ima pa tudi eno pomanjkljivost: CCD čipi imajo relativno majhno površino, ki je občutljiva za svetlobo, tako da pokrijejo le majhen del goriščne ravnine teleskopa. Zato še vedno uporabljajo fotografske plošče, kadar želijo hkrati posneti velik kos

nebesnega svoda. Ne smemo pa pozabiti, da je slika, dobljena s CCD detektorjem, takoj na voljo v digitalni obliki in jo takoj lahko začnemo obdelovati: sliki lahko povečamo kontrast, zmerimo sij, pozicijo in velikost objektov na sliki, seštejemo in kvantitativno primerjamo posamezne slike istega objekta med seboj. Vse to gre pri filmu veliko težje: po razvijanju moramo z zamudnim postopkom digitalizirati sliko, ki je na filmu zapisana kot počrnitev zrnca. Tudi po digitalizaciji imamo precej težav zaradi majhnega dinamičnega obsega zapisa in zaradi pogostih napak v zrnatosti filma. Tako tudi objekte, ki na nebu zavzemajo relativno velik prostorski kot, raje "pokrijejo" z mozaikom več CCD posnetkov, kot pa da bi uporabili film.

S CCD kamero se tudi manjšim teleskopom odpirajo možnosti slikanja zelo temnih nebesnih objektov, ki so bili prej dostopni le velikim teleskopom. Vendar uspeha ne bo, če tudi teleskop ne bo prilagojen večji natančnosti, ki jo zahteva delo s CCD kamero. Zatakne se lahko že na začetku: ker so objekti opazovanja lahko mnogo temnejši kot pri delu s filmom, imamo le malo možnosti, da jih bomo uspeli opaziti v iskalnem daljnogledu. Z nekaj smole lahko dober del večera napravimo za to, da objekt sploh najdemo. Zato je neizogibno, da ima teleskop avtomatsko upravljanje. V računalnik, ki kontrolira gibanje teleskopa, vtipkamo koordinate objekta na nebesni krogli. Računalnik nato izračuna čas in pospešek vrtenja motorjev na teleskopovih oseh ter obrne teleskop. Avtomatski 25 centimetrski teleskop, ki smo ga razvili na Astronomsko geofizikalnem observatoriju (AGO), se je izkazal kot zanesljiv tovrstni instrument (glej astronomske efemeride Naše nebo 1992). Pri zasukih teleskopa večjih od 90° je napaka okrog $5'$, pri zasukih manjših od 1° pa le do $10''$. Ker je vidno polje CCD detektorja na tem teleskopu precej večje ($10' \times 15'$), je problem iskanja objektov na nebu rešen.

Temni objekti zahtevajo kljub veliki občutljivosti CCD detektorja dolge ekspozicijske čase. Med trajanjem osvetlitve sledi teleskop navideznemu vrtenju neba, tako da se slika astronomskih objektov na CCD detektorju ne razmaže. Pri polurni osvetlitvi se mora teleskop obrniti za 7.5° , to je za $7.5 \times 60 \times 60'' = 27000''$. Slika bo ostra, če teleskop pri tem zasuku ne bo zgrešil za več kot kako ločno sekundo. Take natančnosti ne zmorejo še tako natančno izdelani mehanski deli. Zato je potrebno napake pri sledenju sproti preverjati in odpravljati. Najenostavnejša rešitev je, da pravilnost sledenja spremljamo s pomožnim daljnogledom, ki je pritrjen na glavnega. Kako svetlo zvezdo v bližini opazovanega objekta nastavimo na nitni križ, napake pri sledenju pa sproti popravljamo s komandami motorjema na obeh teleskopovih oseh. Nerodno je le, da moramo ves čas ekspozicije stati ob

okularju, pa še naša sodba o velikosti potrebnega popravka sledenja je precej negotova. Sodobnejši način aktivnega sledenja, ki ga uporabljamo na AGO, je mnogo natančnejši in za opazovalca manj naporen. Namesto opazovalca opravi nalogo manjša CCD kamera, ki jo namestimo v goriščno ravnino pomožnega teleskopa. Med trajanjem osvetlitve na glavnem teleskopu naredimo z manjšim teleskopom dolgo serijo nekajsekundnih CCD posnetkov neba okrog svetle zvezde. Po vsakem posnetku računalnik analizira, ali je slika svetle zvezde še vedno na istem mestu ter po potrebi pošlje ustrezne ukaze motorjem.

Avtomatski teleskop današnjega časa je precej zapleten: dva CCD detektorja, dva računalnika, dva koračna motorja, računanje pozicij objektov v danem trenutku, sprotna analiza in popravljanje napak pri sledenju, ..., pravzaprav je avtomatski teleskop vrsta natančnega robota. *Natančen* v tem primeru pomeni, da bi iz Ljubljane lahko slikali Aljažev stolp na Triglavu (ob dobrem vremenu, seveda).

Tomaž Zwitter, Bojan Dintinjana

NAOKROG PO STOŽCU - Rešitev naloge s str. 21

Uredništvo Preseka je dobilo štiri odgovore na vprašanje iz nagradne naloge Naokrog po stožcu, zastavljene v prvi številki Preseka. Trije reševalci so narobe sklepali že na začetku naloge. Drago Bokal iz Srednje vasi pri Polhovem Gradcu pa je najprej pravilno ugotovil, da se bo vrstica ustalila v položaju, ko bo njen del okrog stožca najkrajši, nato pa narobe nadaljeval. Za vzpodbudo smo ga nagradili s knjižno nagrado.

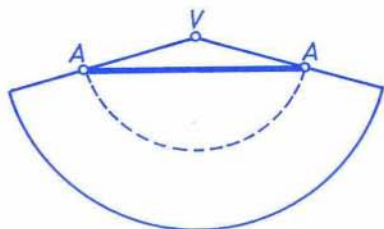
Poglejmo zdaj pravilno rešitev naloge.

Ravnotežni položaj - stanje najmanjše potencialne energije - nastopi, ko doseže utež najnižjo možno točko. Tej legi uteži ustreza tak položaj vrvice, pri katerem je dolžina tistega dela vrvice, ki poteka okrog stožca od vponke do vponke, najkrajša.

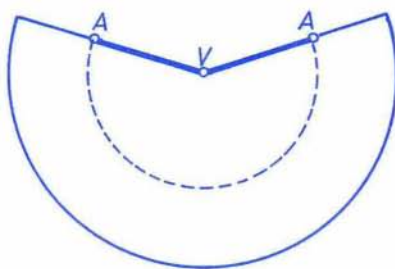
To pa je že čisto matematični problem. Označimo z V vrh stožca in z A položaj vponke na njegovem plašču. Poiskati moramo najkrajšo izmed vseh

poti, ki vodijo po plašču stožca od točke A okrog vrha V nazaj k A . Več o takih problemih lahko preberete v članku *Borisa Lavriča: Bliže k razdalji v 5. številki XVI. letnika Preseka*. Tam tudi zremo, da se da problem enostavno rešiti, če lahko ploskev, po kateri potekajo poti, razvijemo v ravnino.

Taka ploskev je tudi plašč stožca. Prerežimo plašč našega stožca vzdolž poltraka, ki ima izhodišče v V in poteka skozi A , in ga razvijemo v ravninsko ploskev (slika 1). Očitno je najkrajša pot tista, ki ustreza daljici AA - seveda pri pogoju, da ta daljica poteka po mreži plašča kot na sliki 1. Tak primer nastopa, če je mreža plašča krožni izsek s središčnim kotom, manjšim od iztegnjenega kota.

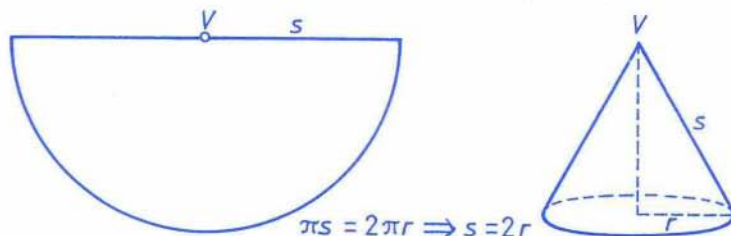


Slika 1



Slika 2

Kadar je ta kot večji (slika 2), je očitno pot AVA po robu prereza krajša od katerekoli poti AA po plašču stožca. V takih primerih se vrv sname čez vrh stožca. Mejni primer je enakostranični stožec (slika 3).



$$\pi s = 2\pi r \Rightarrow s = 2r$$

Slika 3

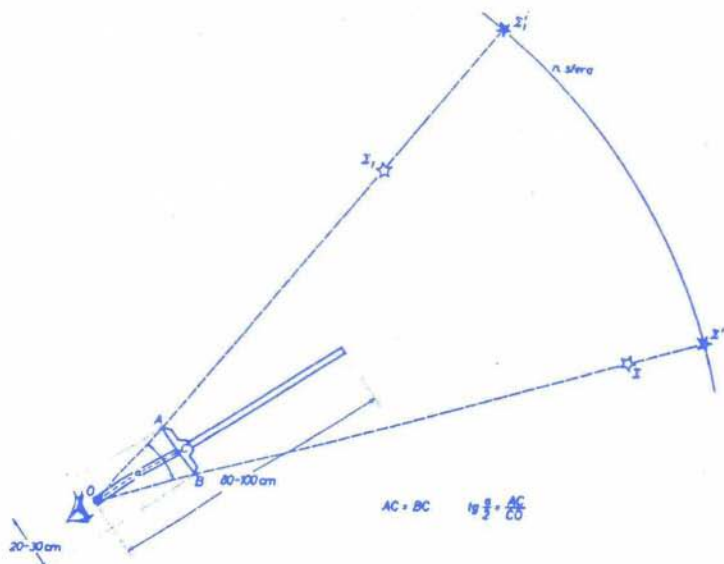
Pri stožcih, ki so ob vrhu "ostrejši" od enakostraničnega, torej vrv obstane na stožcu, in sicer v položaju, ki preide v daljico, če plašč stožca, prerezan od vrha preko položaja vponke, razvijemo v ravnino. Pri bolj "topih" stožcih pa vrv zdrsnje čez vrh.

Marija Vencelj

JAKOBOVA PALICA

V prvi številki letošnjega *Preseka* je zanimiv razvedrilni prispevek *Jakobova lestev*. Spodbudil me je, da tudi sam pristavim svoj "astronomski lonček" in vam napišem nekaj o *Jakobovi palici*. Prav nič skupnega nima ta palica z omenjeno lestvijo. Jakobova palica je namreč preprosta naprava, ki so jo že stari astronomi uporabljali za merjenje kotov na nebu. Druga imena za Jakobovo palico so še križna palica, stopinjska palica, radius astronomicus, baculus (latinsko kol, palica; izg. bakulus).

Jakobova palica sestoji iz dolge ravne (navadno lesene) palice, po kateri lahko drsi kratka pravokotna prečka, ki ima na obeh straneh palice enako dolžino, torej $|CA| = |CB|$ (slika 1). Na palici in prečki označimo dolžinsko skalo. Opazujemo s prostim očesom. Pri merjenju držimo palico v rokah (sliki 2 in 3). Zorni kot (kotno razdaljo) med dvema predmetoma na zemljišču npr. dvema vrhovoma hribov ali pa dvema vesoljskima telesoma Σ in Σ_1 izmerimo tako, da postavimo palico in prečko v ravnino očesa in obeh predmetov oziroma obeh vesoljskih teles (ravnina $O\Sigma\Sigma_1$). Z očesom O



Slika 1. Jakobova palica; Σ in Σ_1 - vesoljski telesi na različnih oddaljenostih od nas, Σ' , in Σ'_1 - projekciji (legi) teh teles na nebu, O - oko opazovalca, α - zorni kot, pod katerim vidimo vesoljski telesi z Zemlje.

viziramo telesi preko krajišč A in B prečke. Zorni kot α izračunamo iz zveze:

$$\tan(\alpha/2) = |AC| / |OC|$$

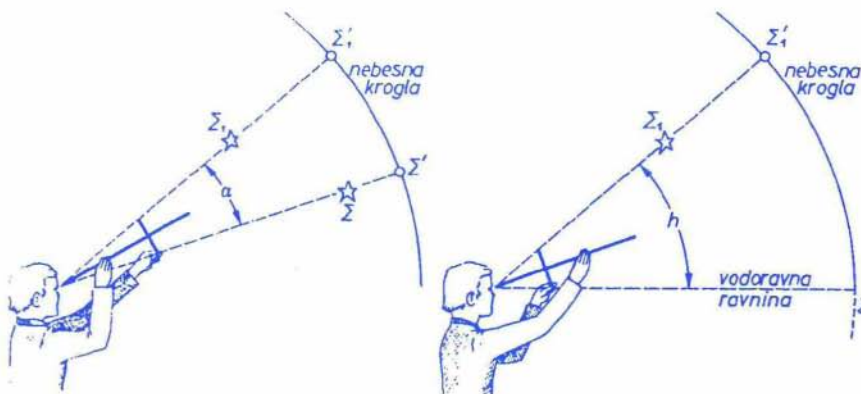
Zorni kot lahko ugotovimo tudi tako, da v zmanjšanem merilu narišemo pravokotni trikotnik s katetama $|AC|$ in $|OC|$, s kotomerom izmerimo $\alpha/2$ in nato izračunamo α .

Pri merjenju lahko uporabljamo različno dolge prečke. Manjše kote merimo z manjšimi prečkami. Pri nočnih meritvah palico osvetljujemo s šibko svetlobo. Če merimo z vedno isto prečko, lahko na palici namesto dolžinskih oznak zarišemo kar ustrezno preračunane kotne oznake.

Natančnost meritve je približno 1° (ena kotna stopinja), torej slaba. Če želimo boljšo natančnost, izvedemo več (najmanj pa deset) meritev z isto prečko ali pa z različno dolgimi prečkami. Za najbolj zanesljivo vrednost merjenega kota vzamemo povprečno vrednost. Natančnost povečamo tudi z bolj fino izdelavo naprave.

Poskusi na svojstven način izdelati Jakobovo palico in jo praktično uporabiti pri merjenju najrazličnejših kotov. Za začetek predlagam:

1. Izmeri zorni kot med dimnikom oddaljene hiše in vrhom cerkvenega stolpa.
2. Izmeri zorni kot med dvema svetlima znanima zvezdama, npr.

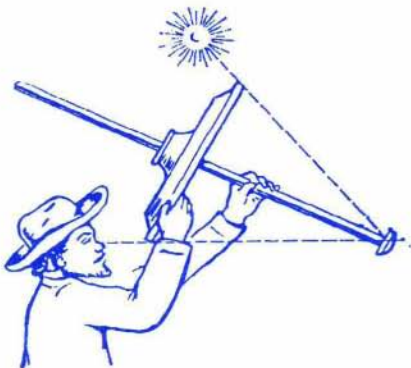


Slika 2. Način merjenja zornega kota z Jakobovo palico. Merimo v poljubnih ravninah (levo). Takole z Jakobovo palico merimo višino h vesoljskega telesa Σ_1 (desno).

med zvezdo Severnico in izbrano zvezdo v Velikem vozu.

3. Na način, ki je prikazan na sliki 3, poskusi izmeriti višino gore, dimnika, cerkvenega stolpa.

4. Poskusi izmeriti višino Severnice, to je kot med vodoravno ravnino in smerjo proti Severnici.



Slika 3. Določanje višine Sonca z Jakobovo palico. Pri merjenju kažemo Soncu hrbet.

Potem se loti zahtevnejših merjenj. Več o njih poglej v knjižici *Astronomska opazovanja*, Preseka va knjižnica 3, 1978.

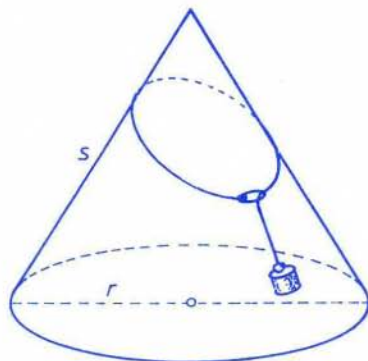
Ne obupaj, če boš dobil slabe rezultate. Vztrajaj, treniraj, bodi uporen, trmast. Samo s trdno voljo boš uspel. Za tolažbo ti povem, da te meritve sploh niso od muh.

Marijan Prosén

ŠE NAOBKROG PO STOŽCU

V prvi številki letošnjega Preseka je bila na strani 21 nagradna naloga Naokrog po stožcu. Tiste, ki ste jo rešili ali pa ste v rešitev le pokukali, vabim, da z nalogo nadaljujemo.

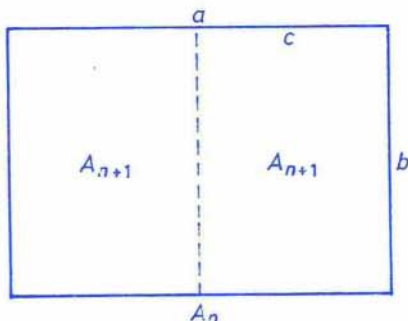
Denimo, da vponka ni pritrjena. Kaj se zgodi, če je stožec zelo strm, recimo $s > 6r$? Kaj pa, če je nasprotno $s < 6r$?



Anton Cedilnik

PREPOGIBANJE LISTA PAPIRJA

Vzemimo list papirja formata A_0 1189 mm x 841 mm. Verjetno že veste, kakšno značilnost ima format A_n . Če ga prepognemo natanko na polovico, ostane razmerje robov enako in dobimo format A_{n+1} .



$$a : b = b : c = \sqrt{2}$$

A_1 : 841 mm x 595 mm,

A_2 : 595 mm x 420 mm,

A_3 : 420 mm x 297 mm itd.

Če je debelina papirja, recimo, desetinka milimetra, je po zgibu A_0 v A_1 debelina dvojnega lista 0.2 mm, A_1 se prepogne v A_2 z debelino 0.4 mm in tako naprej.

Vprašanje: kateri format je dolg le še toliko, kolikor je dolga molekula celuloze, in kakšno debelino ima, če smo ga dobili s prepogibanjem začetnega lista? Pri tem zanemarimo, da postane prav kmalu zavijevanje več listov naenkrat zelo težavna zadeva. Ocena za dolžino molekule celuloze naj bo 10^{-6} m.

Pred računanjem ocenite "na oko" število pregibanj in debelino takšne zvihanke; pozneje boste ugotovili, da je ena od ocen daleč prevelika in druga daleč premajhna. No, ravno v tem je hec te sicer lahke naloge.

Še dve zanimivi informaciji: $1189 \approx 1000 \sqrt[4]{2}$; ploščina formata A_0 je 1 m^2 , ploščina vsakega nadaljnjega pa je pol manjša od prejšnje.

Anton Cedilnik

SREČKA

Tina je iz šole grede kupila srečko. Ker ima navado, da dela razne kombinacije s števili, ki jih sreča, je hitro ugotovila, da je vsota števk petmestnega števila na srečki enaka starosti njene mame. Ko je to povedala mami, je ta takoj vedela za številko Tinine srečke. Jo lahko ugotovite tudi vi?

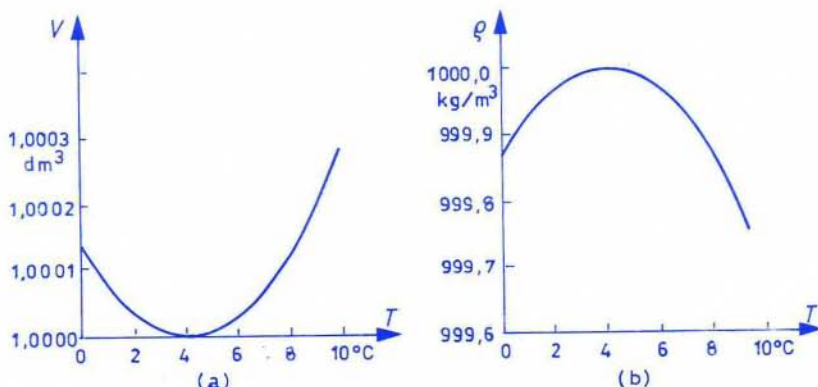
Marija Vencelj

LED IN VODA

Voda je posebna snov. Med njene fizikalne posebnosti sodi temperaturna odvisnost prostornine. Pri navadnem zračnem tlaku 1 bar nad temperaturo 4°C (natančneje $3,98^{\circ}\text{C}$) prostornina vode narašča z naraščajočo temperaturo, kakor je običajno pri drugih snoveh. Pod 4°C pa prostornina vode narašča s *pojema*jočo temperaturo. Prostornina kilograma vode je pri 4°C najmanjša. Tedaj je gostota vode največja (slika 1). Podobno temperaturno odvisnost prostornine opazimo samo pri snoveh, ki so podobne gumiju, in pri nekaterih kristalnih trdninah. To pa še ni vse. Ob tališču - 0°C pri navadnem tlaku 1 bar - ima kilogram ledu precej večjo prostornino kot voda. Led ima tedaj precej manjšo gostoto kot voda. Voda ni edina snov s to lastnostjo, opazimo jo, na primer, pri antimonu, galiju, bizmutu.

Molekula H_2O ima obliko nekakšne črke L z atomoma vodika na krajšičih in atomom kisika v oglišču pri kotu, nekaj večjem od pravega ($104,5^{\circ}$). V kristalu se molekule ne morejo naložiti tesno druga ob drugo, kot če bi bile iztegnjene, ampak se uredijo v šestkotnike. Tako je v njem veliko nezasedenega prostora, zaradi česar ima manjšo gostoto kot kapljevin. Blizu ledišča nastanejo v kapljevini nekakšne zasnove kristalov in je zato njena gostota manjša kot pri 4°C .

V nekaterih učnih knjigah zasledimo trditev, da sta opisani posebnosti vode pomembni za obstanek življenja v mirujoči vodi. Ob ohlajanju vode se



Slika 1. Temperaturna odvisnost prostornine kilograma vode (a) in gostote vode (b). Prostornine ledu pri ledišču pri navadnem zračnem tlaku $1,091\text{ dm}^3$ in gostote ledu 917 kg/m^3 ne moremo narisati; ustrezni točki bi ležali kakih 9 metrov nad vodoravno osjo ali pod njo.

vzpostavi ravnovesni *temperaturni profil*: v vse višjih plasteh ima voda vse manjšo gostoto in vse višjo temperaturo. Z globino temperatura pojema in gostota narašča. Razmere se spremenijo, ko se voda ohladi pod $4\text{ }^{\circ}\text{C}$. Odtlej se na dnu nabira voda s to temperaturo. Pri dovolj nizki temperaturi ozračja ima torej voda ob dnu temperaturo $4\text{ }^{\circ}\text{C}$ in ob gladini $0\text{ }^{\circ}\text{C}$. Poslej na gladini voda zmrzuje in nastali led, tudi če se odlomi, zaradi manjše gostote plava na gladini. Pri tem smo privzeli, da voda miruje in ni zunanjih motenj.

Dalje sklepajo takole: Če ne bi bila najgostejša pri $4\text{ }^{\circ}\text{C}$, ampak pri $0\text{ }^{\circ}\text{C}$, bi imela ohlajajoče se voda temperaturo $0\text{ }^{\circ}\text{C}$ na dnu. V zmernem podnebnem pasu bi led nastajal pozimi na dnu in bi ostal tam, tudi ko bi se odlomil, če ne bi bil redkejši od vode. Plast ledu na dnu bi se debelila in spomladi in poleti bi je v dovolj globoki vodi sonce ne moglo staliti. Iz leta v leto bi postajala plast ledu na dnu debelejša. Vodne živali v morjih, jezerih in ribnikih bi naposled izumrle. Spremenilo bi se podnebje in morda bi nastala ledena doba. Pri tem smo privzeli, da bi se lastnosti vode spremenile, potem ko bi se življenje v vodi že razvilo. Najbrž pa se v navedenih okoliščinah življenje, kakršno je dandanes na Zemlji, sploh ne bi moglo razviti.

Čeprav je bil zadnji del razglabljanja poenostavljen, se je vredno vprašati, ali mu gre zaupati. Že običajna fizikalna vprašanja, ki zadevajo razmere zunaj laboratorija, utegnejo biti zelo zahtevna. Vprašanje vrste "Kaj bi bilo, če bi ...?" pa je še posebej neprijetno, ker vse okoliščine niso dobro določene. Vseeno poskusimo vsaj okvirno odgovoriti nanj. Tega ne delamo zato, da bi pikolovsko preganjali napake v knjigah, ampak zato, da bi bili pri fizikalnih izjavah previdni. Ob tem se lahko naučimo tudi kaj fizike.

Morda se je mogoče dokopati do odgovora s poskusi? Da. Osnovni poskusi niti niso zahtevni. O njih je Klaus Weltner z Inštituta za didaktiko fizike univerze v Frankfurtu poročal leta 1987 na sestanku Nemškega fizikalnega društva v Berlinu. Dve laboratorijski čaši je na straneh in na dnu izoliral z več kot 4 centimetre debelo plastjo penaste plastike in postavil v lesena zabojčka. Pri prvem poskusu je v eni od čaš z magnetnim mešalnikom nenehno mešal vodo in s tem preprečil, da bi se na dnu nabrala voda s temperaturo $4\text{ }^{\circ}\text{C}$. (Magnetni mešalnik sestavlja v čaši podolgovat kos železa ali podobne snovi, ki se vrti v vrtečem se magnetnem polju. Tega ustvarjajo tokovi po tuljavah zunaj zabojčka.) Zabojčka s čašama je postavil v zmrzovalno skrinjo in opazoval debelino nastale ledene plasti po 12, 24 in 48 urah. Vselej je bila plast ledu na gladini vode v obeh čašah skoraj natanko enako debela. Pri drugem poskusu je eno izmed čaš zaprl s celofanom, jo skupaj z zabojčkom obrnil in postavil v zmrzovalno skrinjo. Celofan je preprečil vodi,

da bi iztekla, a poskrbel, da je bila na dnu v toplotnem stiku z zmrzovalnikom, medtem ko je bila voda na gladini izolirana. Plast ledu se je v tem primeru razvila v glavnem na dnu vode.

Prvi poskus kaže, da bi ribe in druga vodna bitja preživelata tudi brez *anomalije vode*, kakor pravimo pojavi, da je voda najgostejša pri 4 °C. Ob dnu bi pač morale plavati v vodi s temperaturo 0 °C, namesto v vodi s temperaturo 4 °C. Vendar niti v primeru, da bi bil led gostejši od vode, ne bi nastajal na dnu. Voda oddaja toploto namreč zraku na gladini in ne tlem na dnu. Na dnu voda ne oddaja toplote, ampak jo prejema od tal, čeprav je toplotni tok zelo majhen. Temperatura zemeljske skorje narašča z globino in se poviša za 3 stopinje na vsakih 100 metrov. Temperaturna razlika poganja toplotni tok navpično navzgor. Na površju oddaja vsak kvadratni meter zemeljske skorje v povprečju toplotni tok 0,06 wattov. To sledi iz *zakona o toplotnem prevajanju* s povprečno toplotno prevodnostjo tal okoli 2 W/m·K. Tudi voda na dnu prejema od tal toplotni tok s približno gostoto 0,06 W/m². Zaradi tega, ker voda oddaja toploto na gladini, nastaja led na gladini. Tam bi ostal tudi, če bi bil gostejši od vode, dokler se ne bi odlomil. Plast ledu na gladini bi se spomladi stalila, kakor se stali zdaj. Le odlomljeni kosi ledu bi padli na dno. Zaradi njih bi voda imela v povprečju nižjo temperaturo, kot jo ima zdaj. Da bi lahko ugotovili, če bi to izrazito vplivalo na življenje v vodi, bi morali vedeti, kolikšen del ledu ostane na gladini in kolikšen del se odlomi. Vsekakor je za razmere na Zemlji to, da je pri tališču voda gostejša od ledu, pomembnejše od anomalije vode.

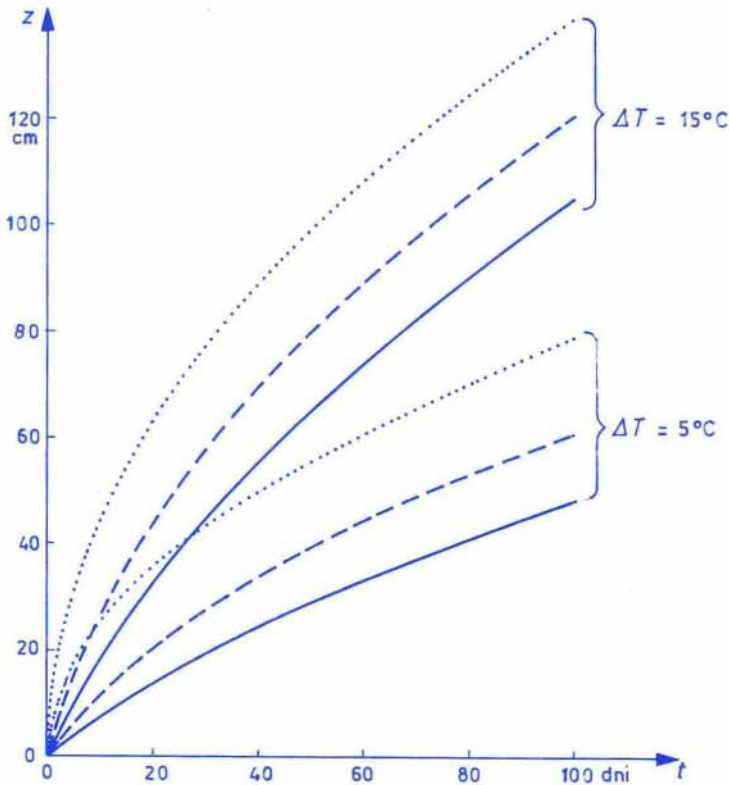
Nazadnje poskusimo odgovoriti še na vprašanje, kako hitro se debeli plast ledu. Za prevajanje toplote skozi plast ledu z debelino z velja zakon o prevajanju toplote v obliki

$$j = \lambda \frac{T_{I1} - T_{I2}}{z}.$$

j je gostota toplotnega toka, $T_{I1} = 0^\circ\text{C}$ temperatura ledu na spodnji meji z vodo, T_{I2} temperatura ledu na zgornji meji plasti in λ toplotna prevodnost ledu, približno enaka 2,3 W/m·K. Plast ledu se zdebela za Δz v času Δt , v katerem odda toploto $jS\Delta t$, če je S osnovna ploskev plasti. Maso m te plasti dobimo, ko pomnožimo gostoto ledu $\rho = 917 \text{ kg/m}^3$ s prostornino $S\Delta z$, oddano toploto pa, ko maso pomnožimo s talilno toploto ledu $q_t = 0,334 \text{ MJ/kg}$. Izenačimo $jS\Delta t$ z $mq_t = \rho S\Delta z q_t$, pa imamo $j = \rho q_t \Delta z / \Delta t$. V približku izenačimo temperaturo na zgornji meji ledu s temperaturo zraka

$T_{I2} = T_z$ in vpeljemo $T_{I1} - T_z = T_0$. Iz enačbe $\rho q_t z \Delta z = \lambda T_0 \Delta t$ dobimo končni čas t , ko seštejemo vse časovne razmike. Na desni strani pa vstavimo za z povprečje med končno in začetno debelino $z = \frac{1}{2}(z_2 + z_1)$ tanke plasti $\Delta z = z_2 - z_1$ in dobimo za $z \Delta z = \frac{1}{2}(z_2^2 - z_1^2)$. Ko seštejemo prispevke med začetno debelino 0 in končno debelino z , preostane le še $\frac{1}{2}z^2$. Debelina ledu

$$z = \sqrt{\frac{2\lambda T_0 t}{\rho q_t}} \quad (1)$$



Slika 2. Časovna odvisnost debeline ledu pri zraku s temperaturo -5°C (tri krivulje spodaj) in s temperaturo -15°C (tri krivulje zgoraj). Za toplotno prevodnost vzamemo v prvem primeru $2,24\text{ W/m}\cdot\text{K}$ pri $-2,5^\circ\text{C}$ in v drugem, $2,34\text{ W/m}\cdot\text{K}$ pri $-7,5^\circ\text{C}$. Pikčasti krivulji ustrežata približku (1), sklenjeni in črtkani pa enačbi (2), prva v brezvetrju z $\alpha = 5,6\text{ W/m}^2\cdot\text{K}$ in druga v vetru s hitrostjo 2 m/s z $\alpha = 11,1\text{ W/m}^2\cdot\text{K}$.

narašča sorazmerno s kvadratnim korenem iz časa.

Pri tem približnem računanju nismo upoštevali, da v zraku ob ledu nastane tanka mejna plast, v kateri se temperatura zraka zniža enakomerno od T_{I2} na T_z . Ta temperaturna razlika poganja toplotni tok skozi mejno plast:

$$j = \alpha(T_{I2} - T_z).$$

α je koeficient prehajanja toplote skozi mejno plast, ki je enak $5,6 \text{ W/m}^2 \cdot \text{K}$ v brezvetrju in, na primer, $11,1 \text{ W/m}^2 \cdot \text{K}$ v vetru s hitrostjo 2 m/s . Zdaj temperature na zgornji meji ledu ne poznamo, a jo lahko izračunamo, ko izenačimo obe gostoti toplotnih tokov:

$$T_{I2} = \frac{\lambda T_{I1} + \alpha z T_z}{\lambda + \alpha z}.$$

To vstavimo v prejšnjo enačbo in dobimo

$$(z + \frac{\lambda}{\alpha}) \rho q_i \Delta z = \lambda T_0 \Delta t.$$

Izid je podoben prejšnjemu, le da ima zdaj člen več, tako da izračunamo debelino iz kvadratne enačbe;

$$z = \sqrt{\frac{\lambda^2}{\alpha^2} + \frac{2\lambda T_0 t}{\rho q_t}} - \frac{\lambda}{\alpha}. \quad (2)$$

Kot je treba, preide enačba (2) v enačbo (1), če α močno naraste, kar ustreza temu, da ne upoštevamo mejne plasti (slika 2).

Z računanjem debeline ledu se je ukvarjal leta 1889 tudi slovenski fizik Jožef Stefan. Sicer ni upošteval mejne plasti, zato pa se je popolnoma splošno lotil naloge, ne da bi privzel linearni potek temperature v ledu. Naloga je po matematični strani zelo zahtevna, ker se plast debeli in se "meja premika". Stefanu jo je uspelo rešiti in odtlej pravijo "nalogi s premično mejo" kar *Stefanova naloga*. Stefan je primerjal tudi izmerjeno debelino ledu v polarnih morjih in ugotovil, da velja linearni približek. Zavedal se je, da "obdelane naloge pomenijo le malo za eksperimentalno preučevanje pojavov pri prevajanju toplote, ker pogojev, pri katerih veljajo najdene rešitve, sploh ne moremo uresničiti ali jih lahko uresničimo le nepopolno". Vendar se je pozneje pokazalo, da je po matematični strani s svojo rešitvijo dosegel več, kot je mislil.

SEJEM

Na letošnjem Slovenskem knjižnem sejmu je prvič na samostojni stojnici razstavljalo svoje knjige tudi Društvo matematikov, fizikov in astronomov Slovenije. Med knjigami, ki jih je Društvo izdalo v zadnjih treh letih, je bilo tudi precej literature, namenjene mladim. Med drugim so obiskovalci lahko videli nekatera dela, ki so izšla v Knjižnici Sigma, Račkovi knjižnici, Presekovi knjižnici, predvsem pa vse pisane številke Preseka (foto Matjaž Škulj).

Ciril Velkovrh



RAČUNALNIŠTVO

DERIVE

Petek, toplo majsko sonce in ura matematike. Konec ure se je hitro približeval.

"Morda pa bo le pozabil na domačo nalogo," smo upali.

Zaman. Tudi zvonec, ki je med tem zazvonil, nas ni rešil. Že med vrati smo bili, ko nas je dosegel njegov glas.

"Do naslednjic pa naredite naloge iz zbirke na strani 78, in sicer 2, 3, 5, 7 in 8. No pa še 9 in 10, ampak le do črke m."

Groza! Vse naše ideje o prijetnem vikendu so se razblinile kot milni mehurček. Pa saj ne da bi mislili, da so naloge nepotrebne. Le toliko jih je in več ali manj so si vse podobne kot jajce jajcu. In ko enkrat odkriješ sistem, gre le še za avtomatizem. Seveda pa moraš način reševanja ugotoviti že pri prvih primerih, saj drugače naloge tako ali tako ne rešiš. In če je kaj zoprno, je to dolgčas pri reševanju domače naloge.

Zato ni čudno, da smo pogosto razmišljali o žepnem računalniku, ki ne bi znal le množiti, deliti, seštevati števila, ampak tudi ulomke, spremenljivke, pa računati odvode, seštevati kotne funkcije in podobno.

Po dvakrat sedmih letih sem tak kalkulator le dobil v roke. Sicer ni ravno to, je pa program, ki ga naložiš v računalnik in uporabljaš. Resnici na ljubo obstajajo tudi že kalkulatorji, ki znajo večino stvari, o katerih smo sanjali kot srednješolci. Vendar o njih kdaj drugič. Danes si pogledajmo nekaj o programih za simbolično računanje in o enem med njimi, programu Derive, tudi nekoliko več.

Kaj programi za simbolično računanje sploh so? Na kratko rečeno, to so programi, ki znajo računati s simboli. Vsak kalkulator zna sešteti 0.5 in 0.6, programi za simbolično računanje pa se ne bodo ustrašili tudi računov kot so $\frac{a}{a^2-b^2} + \frac{c}{a+b}$. Znajo pa tudi mnogo več. Na primer poiskati razcep polinoma ali pa narisati sliko racionalne funkcije. Nobenih težav jim ne povzroča razcep števila 20081991 na prafaktorje ali pa množenje kompleksnih števil. In kar je morda še posebej pomembno - če ne zahtevamo le približnega rezultata, nam bodo vedno postregli s točnim. Tako $\frac{2}{3} + \frac{1}{3}$ ne bo 0.99999999, ampak res 1. Tudi $\sqrt{2}$ ne bo postal 1.41421, ampak bo tudi za nadaljnje račune ostal $\sqrt{2}$. In tudi $\sqrt{x^2}$ ne bo kar x , ampak točneje $|x|$. Programi te vrste se ne ustrašijo niti velikih števil kot je 20! ali pa nam povedo število π na 20 decimalk.

Programov za simbolično računanje je v zadnjih letih na tržišču kar nekaj. Med njimi je gotovo najbolj razvpit program Mathematica, nekaj zaradi kvalitete nekaj pa zaradi uspešnega trženja. Drugi programi te vrste so še Macsyma, Maple, MathCad, MatLab, in ne nazadnje tudi program Derive. Ta ima med vsemi prav posebno vlogo in sicer iz povsem enostavnega

razloga. Večina teh programov zahteva namreč dokaj zmogljivo računalniško opremo. Praktično vsi naštetih programi potrebujejo računalnik, zgrajen okrog procesorja Intel 80386, opremljen še z matematičnim koprocetorjem in vsaj 1 Mb pomnilnika. Verjetno bo starše le težko prepričati, da nujno potrebujete prav tak računalnik, ki stane kar nekaj povprečnih slovenskih plač. Na drugi strani pa program Derive za svoje delovanje potrebuje le s PC XT združljiv računalnik. Do njega bo pa že lažje priti, še posebej, če se zadovoljite z rabljenim. Tudi razlika v ceni programa ni zanemarljiva, saj se se tipična cena programov za simbolično računanje giblje med 700 in 1500 USD, program Derive pa proizvajalec prodaja po 250 USD. Na prvi pogled tudi zadnja vsota ni zanemarljiva, a če jo preračunamo v ure inštrukcij – saj sploh ni toliko!

Na srečo teh prednosti (nezahtevnosti v strojni opremi in relativno nizke cene) ne plačamo prehudu. Program sicer prej 'obupa' nad nekaterimi naloga-mi, vendar je to običajno znak, da je v našem pristopu k reševanju naloge nekaj narobe.

Poleg tega, da zna program računati s celimi in realnimi števili, računa tudi z ulomki in kompleksnimi števili. Če bi le imel kaj takega v rokah, ko sem v potu svojega obraza računal trideseti izraz oblike $(2 + 3i)^{25}$! Saj vem, Moivrov obrazec. Pa vendar! Pretvorba v polarno obliko, množenje, pa zopet nazaj v kartezično obliko! Vaja res dela mojstra, ampak pri tridesetem računu je vse skupaj res že na moč dolgočasno.

Seveda pozna program vse mogoče in nemogoče funkcije. Če pa katere vendarle ne pozna, ga je mogoče o njej poučiti.

Še eno lastnost programa velja omeniti – risanje funkcij. Saj poznate racionalne funkcije s petimi ničlami in šestimi poli ali pa logaritem kakšne čudne vsote sinusov in kosinusov. Vedno se mi je zdelo kot mali čudež, ko je kdo dejal, da se da taka stvar celo narisati. Dobro se še spomnim tiste ure, ko nas je profesor 'prepričeval', kako ima funkcija $\sin \frac{1}{x}$ vedno več ničel, ko gremo z x proti 0. Saj je bil zelo prepričljiv, a dvomi so ostali. S programom Derive pa je risanje prava pesem. Samo vtipkamo funkcijo, pritisnemo pravo tipko in glej sliko. Res! Funkcija $\sin \frac{1}{x}$ kar nekako opleta proti ničli. Povečajmo sliko. Spet le pritisk na tipko. To ponavljamo, dokler nismo tudi vizualno prepričani, da je imel profesor res prav.

Funkcij dveh spremenljivk pa raje sploh ne omenjam. Še danes se mi zdi skoraj nemogoče, da bi 'uganil', kako izgleda funkcija dveh spremenljivk, pa če je še tako enostavna. Na primer znamenito sedlo $z = x^2 - y^2$. Program Derive nam omogoča, da si take slike ogledamo z vseh strani in pri različnih povečavah. Seveda se kvaliteta slik ne more primerjati s tistimi, ki jih narišeta programa Maple in Mathematica, pa vendar – za predstavu o izgledu grafa

je vsekakor dovolj. Seveda čudežev ne gre pričakovati. Prej omenjeni graf funkcije $\sin \frac{1}{x}$ ne bo povsem natančen. Razlog temu ni površnost programa Derive ampak zaslon računalnika, ki je sestavljen iz množice točk. To pa je že druga zgodba.

Seveda program ni idealen in mu lahko precej stvari zamerimo. Tako ima glede na današnji nivo programske opreme dokaj zastarel uporabniški vmesnik, ki pa je enostaven za uporabo. Tudi pri risanju je malce počasen in kar je morda največja škoda – slike ne moremo izrisati na papir. Sicer si lahko pomagamo po ovinku — a sam program nam tega ne nudi.

Še nekje nam program lahko olajša delo. Ker ga lahko naučimo vseh mogočih formul, te potem uporabljamo kot vgrajene funkcije. Povemo mu le vrednosti vseh parametrov, pritisnemo na tipko in že je tu rezultat. Ker pa program lahko naučimo tudi odnosov med merskimi enotami, bo na koncu rezultat izražen npr. v metrih, sekundah ali gramih, pa če tudi bodo naši podatki v morskih miljah, funtih ali dnevih. Derive zna reševati tudi enačbe, zato bo dovolj, da mu povemo le, da velja $pI = \pi r^2$, pa bo že sam poskrbel, da bomo iz dane ploščine dobili polmer kroga.

Je učenje matematike torej odveč? Gotovo ne! Prav nič nam ne bo pomagalo, če bomo enačbe napisali narobe ali pa narisali napačno funkcijo. Programi, kot je Derive, nam pomagajo, ne razmišljajo pa namesto nas.

Matija Lokar

ŠVICARSKI TRAMVAJ

Nekoč, ko sem bil v Švici, sem v nekem malem mestu opazil, da imajo njihovi tramvaji naslednje zanimive lastnosti:

1. Mestece ima več kot eno tramvajsko progo. Vsaka proga ima tri postaje.
2. Poljubni dve progi imata natanko eno skupno postajo.
3. Z ene postaje do druge je mogoče vedno priti brez presedanja in to s samo eno progo.

Da bi imeli od mojega potepanja po Švici korist tudi vi, vam zdaj zastavljam vprašanje, na katero je težje odgovoriti; kot se zdi na prvi pogled: Koliko tramvajskih prog imajo v tem švicarskem mestu?

Borut Zalar

PRAVILNI PETKOTNIK

Večkotnik je pravilen, če je enakostraničen in ima skladne vse notranje kote.

Vemo, da je za pravilnost trikotnika dovolj, če je enakostraničen. Skladnost kotov je posledica skladnosti stranic.

Za štirikotnike to ne velja. Vsak romb je enakostraničen štirikotnik, pravilen je samo kvadrat. Če pa ima enakostranični štirikotnik vsaj en par skladnih sosednjih kotov, potem od tod sledi, da je kvadrat. Ne moremo pa napraviti takega sklepa, če kota, za katera vemo, da sta skladna, nista sosednja.

Kaj pa enakostranični petkotnik?

- Pokaži, da je pravilen, če so trije sosednji koti skladni.
- Kakšen je odgovor, če trije koti, za katere vemo, da so skladni, niso sosednji.

Marija Vencelj

KOLIKO PITAGOREJSKIH TRIKOTNIKOV?

V Preseku smo lahko že večkrat brali to in ono o pitagorejskih trikotnikih. To so pravokotni trikotniki s stranicami, katerih dolžine so naravna števila. Znano je, da dobimo stranice vseh možnih pitagorejskih trikotnikov s formulami:

$$a = k(u^2 - v^2)$$

$$b = 2kuv$$

$$c = k(u^2 + v^2),$$

kjer sta u in v tuji naravni števili, eno sodo in eno liho, $u > v$ in k poljubno naravno število. Pri tem sta a in b kateti, c pa hipotenuza trojici (k, u, v) pripadajočega pravokotnega trikotnika. S kratkim računom se lahko prepričate, da je tudi polmer p pitagorejskemu trikotniku včrtane krožnice vedno naravno število.

In sedaj vprašanje: Koliko neskladnih pitagorejskih trikotnikov lahko očrtamo krožnici s polmerom $p = n$, kjer je n poljubno naravno število?

Marija Vencelj

RAZVEDRILO

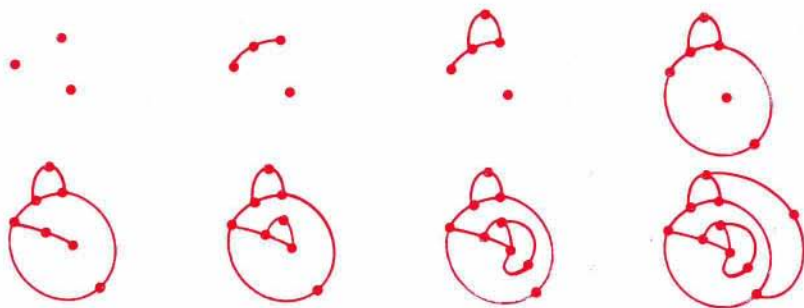
BRSTENJE

V sestavku bomo povedali nekaj o zanimivi igri imenovani "Sprouts", po slovensko "Brstenje". Premišljevali bomo tudi o tem, kako bi igro spremenili in tako "izumili" novo igro.

Igro sta po pripovedovanju odkrila John Horton Conway, profesor matematike na Sidney Sussex College, Cambridge in takratni študent Michael Steward Paterson leta 1967. Igro igramo na papirju z n pikami tako, da vlečemo poteze. Potezo potegnemo tako, da narišemo krivuljo od ene pike do druge ali pa nazaj do iste pike in nato nekje na tej krivulji naredimo novo piko. Pri tem moramo upoštevati naslednji pravili:

- Povezava ima lahko kakršnokoli obliko, ne sme pa sekati same sebe, prej potegnjenih povezav in ne sme iti skozi nobeno prej narisanih pik.
- V nobeni piki se ne smejo začeti in končati več kot tri povezave. Rekli bomo, da ima vsaka pika tri življenja.

Igralca igrata tako, da izmenoma vlečeta poteze. Zmagovalec je tisti, ki lahko zadnji povleče potezo. Na naslednji sliki je prikazana tipična igra s tremi začetnimi pikami.



Slika 1

Igra se vedno konča, kar lahko dokažemo takole: Na začetku imamo n pik. Dogovorili smo se že, da bomo možne začetke potez imenovali življenja. Na začetku je torej $3n$ življenj. Pri vsaki potezi uničimo dve življenji in dodamo eno novo (novi piki na povezavi ostane eno življenje). Na vsakem koraku se torej število življenj zmanjša za 1. Po $3n - 1$ potezah imamo samo še eno življenje in nove poteze ne moremo več potegniti. Ni težko pokazati, da potrebujemo vsaj $2n$ potez, da bi igro končali. Bralec, ki se bo pregrizel

do konca sestavka, bo to gotovo znal sam dokazati.

Igre ne bomo podrobno analizirali. Napišimo le nekaj besed:

Pri igri z eno začetno piko ni težav. Prvi igralec ima na razpolago le eno potezo. Piko poveže samo s seboj. Drugi igralec seveda zmaga. Poveže novo piko z začetno. To lahko naredi na dva načina: znotraj zanke ali zunaj nje. Če malo premislimo, vidimo, da sta ti dve potezi na neki način enakovredni.

Pri igri z dvema pikama lahko drugi igralec igra tako, da zmaga. Potez je tu še tako malo, da lahko vse možne igre narišemo in to preverimo. Dokazali so že tudi, da igre s tremi, štirimi in petimi začetnimi pikami lahko dobi prvi igralec, če seveda pravilno igra. Dokaz, da v igri s šestimi začetnimi pikami lahko vedno zmaga drugi igralec, je dolg kar 49 strani. Za razumevanje dokaza je potrebno že zelo veliko znanja. Sploh so se matematiki dosti ukvarjali s to igro, saj je zanimiva tudi zato, ker povezuje topologijo in kombinatoriko.

Kako pa bi igro lahko spremenili? Lahko jo recimo igramo na sferi. Igra ostane enaka, saj sfero, ki smo ji odvzeli katerokoli točko, lahko tako preslikamo na ravnino, da vsaki točki na sferi brez ene točke pripada točka na ravnini in obratno. Pri tem pa se nobena krivulja ne pretrga ali dodatno zavozla.

Igra na torusu (recimo avtomobilski zračnici) je že malo drugačna. Lahko pa igramo tudi na vazi z več ročaji. Možnosti je veliko. Vsaka pa zahteva svojo "analizo" igre.



Slika 2

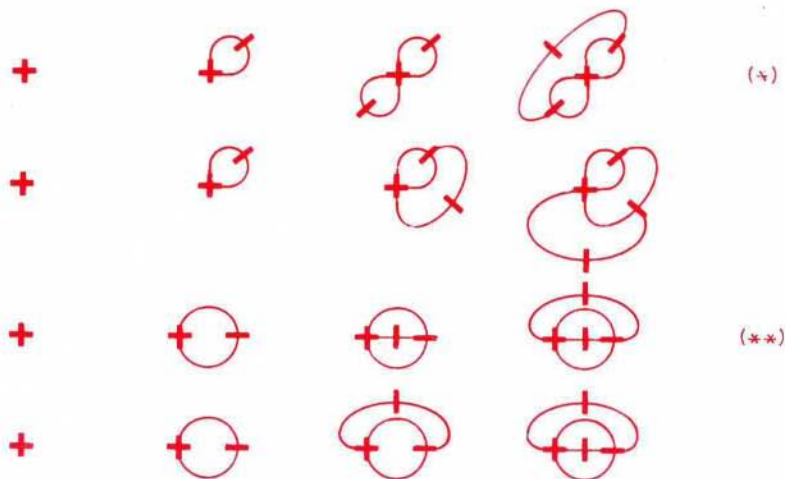
Kaj pa, če ima pika namesto treh življenj štiri življenja? Na zgornjem primeru vidimo, da potem igro lahko igramo tako, da se nikoli ne konča.

Kaj pa, če začnemo s križci namesto s pikami? Tako ima vsaka pika štiri življenja, vendar nam križci določajo smer, v katero smemo začeti vleči naslednje poteze. Nekatera življenja postanejo "ograjena" s prejšnjimi potezami. Ali se igra konča ali ne? Enak razmislek kot prej ne bo dober, kajti z vsako potezo uničimo dve življenji in dodamo novi dve. Število življenj je torej vseh skozi enako. Dokaz, da se igra konča, je daljši: Število križcev označimo s T , del krivulje med dvema križcema imenujmo povezava, število povezav pa označimo s P . Območje naj bo del ravnine, ki je ograjen s povezavami in ne vsebuje nobenega križca. Število območij označimo z O .

Na začetku imamo torej n križcev, nobene povezave in, če je $n >$

> 1 , nobenega območja. Pri $n = 1$ si lahko mislimo, da je ravnina brez križca območje (neomejeno). Z vsako potezo dobimo novo točko (tisto na potegnjeni krivulji) in dve novi povezavi.

Da bomo te pojme lažje razumeli, si oglejmo igro z enim začetnim križcem. Igra se konča v 3 korakih. Narišimo nekaj možnosti:



Slika 3

Drugih različnih načinov igranja ni, če upoštevamo vse simetrije. Kaj se je torej dogajalo v teh primerih? V začetku imamo eno območje (tisto neomejeno) in en križec. V vseh primerih imamo po prvi potezi dva križca, dve povezavi in dve območji (eno omejeno in eno neomejeno). Po drugem koraku imamo tri križce, tri območja in štiri povezave. Po četrtem koraku pa so štirje križci, šest povezav in štiri območja. Ena območje je seveda vedno neomejeno.

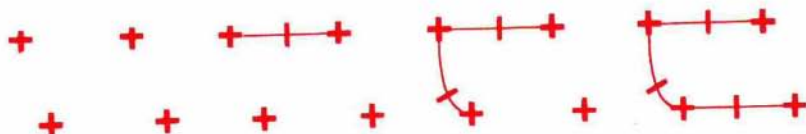
Vsako območje ima nekaj "rok", na katerih lahko začnemo ali končamo potezo. Če je teh prostih rok r , bomo rekli, da ima območje r življenj.

Oglejmo si še enkrat primer (*). V začetku je eno območje (neomejeno) s 4 življenji. Po prvi potezi imamo dve območji. Ena ima eno življenje, drugo pa tri. Po drugi potezi imamo tri območja: dve z enim življenjem in eno z dvema. Ko se igra konča, ima vsako območje le eno življenje. V nekaterih drugih primerih igranja igre z enim začetnim križcem, je število življenj v območjih drugačno kot prej (recimo v **).

Če začnemo z več križci, se število območij ne spreminja tako "pravilno",

vsaj na začetku ne. Lahko se zgodi, da še po nekaj potezah ni nobenega območja.

Oglejmo si, kako lahko začnemo igro s štirimi začetnimi križci:



Slika 4

Igra se konča, ko ima vsako območje le po eno življenje. Pa se igra sploh konča? Ali mogoče lahko igramo tako, da ne bo konca?

To, da se igra vedno konča, bomo dokazali z matematično indukcijo. Videli smo že, da se igra z enim začetnim križcem konča. Predpostavimo torej, da se končajo vse igre z manj kot n križci. S pomočjo te predpostavke bomo dokazali, da se konča tudi igra z n začetnimi križci.

Dokažimo najprej, da bo prej ali slej vseh n začetnih križcev med seboj povezanih. Sploh bodo potem povezani vsi križci, saj nove vedno narišemo na povezavah.

Recimo, da temu ni tako. Potem lahko igramo tako, da do enega križca nikoli ne potegnemo poteze oziroma povezave. To pa je tako, kot da bi igrali igro z enim začetnim križcem manj. Taka igra se po predpostavki konča. Ko se ta igra, z enim križcem manj, konča, lahko potegnemo še potezo od osamljenega križca do življenja v območju, kjer ta križec je. Od te poteze naprej, pa so vsi križci povezani. Tako smo prišli do protislovja s predpostavko, da lahko tako igramo, da ne bodo nikoli vsi križci povezani. Ravnina je razpadla na sama območja. Teh območij je seveda končno. Če nam uspe dokazati, da lahko v vsakem območju potegnemo le še končno potez, bomo dokazali, da se igra konča v končno mnogo korakovih.

Koliko potez lahko potegnemo v območju s s življenji? Razmislimo takole: V območju z enim življenjem ne moremo potegniti nobene poteze. V območju z dvema življenjema, lahko naredimo eno potezo. Dobimo dve območji, vsako z enim življenjem. Zato je konec igre v tem območju. Če ima območje tri življenja, povežemo dve med seboj. Dobimo dve območji, eno z enim življenjem in eno z dvema. V drugem območju je, kot že vemo, možna ena poteza. Skupaj smo potegnili torej dve potezi.

Z indukcijo pokažimo, da lahko v območju s s življenji potegnemo natanko $s - 1$ potez. Za $s = 1$ smo to že videli. S prvo potezo iz ob-

močja s s življenji dobimo dve območji, eno s / življenji in eno z $s - l$ življenji, kjer je $1 \leq l \leq s - 1$. Po indukcijski predpostavki vemo, da je možnih $l - 1$ potez v prvem območju in $s - l - 1$ potez v drugem območju. Skupno število potez je torej $(l - 1) + (s - l - 1) + 1 = s - 1$. To pa smo želeli dokazati.

Igra se torej konča. Najprej po končno potezah vse križce povežemo. S tem dobimo končno območij (kvečjemu eno več kot število potez, ki smo jih naredili). Nato pa moramo igrati v teh območjih. Lahko seveda igramo malo v enem in nato v kakšnem drugem, vendar je število potez do konca igre enako, kot če bi igrali lepo po vrsti; najprej v enem območju do konca, nato v drugem itd. Ker ima vsako območje končno življenj, se igra konča.

Ko se igra po k potezah konča, ugotovimo: Število povezav je $2k$, število križcev je $n + k$. Število območij lahko izračunamo z Eulerjevo formulo za ravninske grafe (glej članek na strani 98 v 2. številki Preseka)

$$O = 2 + P - T,$$

ki nam pove, da je $O = 2 + 2k - (n + k) = 2 + k - n$. Skupno smo imeli na razpolago $4n + 4k$ življenj. Od teh je neuporabljenih natanko toliko, kot je na koncu območij, torej $2 + k - n$. Porabljenih življenj pa je dvakrat toliko, kot je povezav, se pravi $4k$. Ker mora biti

$$4n + 4k = (4k) + (2 + k - n)$$

je

$$k = 5n - 2.$$

Od začetka igre do konca je torej natanko $5n - 2$ potez.

Igra, ki se konča vedno po istem številu potez, in je v njej zmagovalec tisti, ki zadnji povleče potezo, pa ni zanimiva. Pri lihem številu začetnih križcev zmagava vedno igralec, ki je igro začel, pri sodem številu križcev pa tisti, ki vleče poteze kot drugi.

Mirko Dobovišek

TETIVNI OSEMNAJSTKOTNIK – Rešitev s str. 165

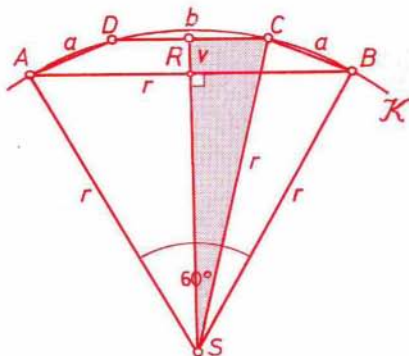
Iz stranic danega tetivnega 18-kotnika sestavimo novi 18-kotnik z istim očrtanim krogom $\mathcal{K}$, tako da nanizamo zaporedje stranic z dolžinami a , b , a šestkrat zapored kot tetive kroga $\mathcal{K}$. Oglejmo si krožni izsek, ki pripada za-

porednim tetivam BC , CD in DA z dolžinami

$$|BC| = |DA| = a, \quad |CD| = b$$

in označimo z S središče kroga $\mathcal{K}$, z R pa razpolovišče daljice CD .

Trikotnik ASB je enakostraničen, zato ima osnovnica AB enakokrakega trapeza $ABCD$ dolžino r . Od tod na običajen način dobimo višino v trapeza $ABCD$, oziroma zvezo



$$v^2 = a^2 - \frac{1}{4}(r - b)^2. \quad (1)$$

Nato upoštevajmo, da velja

$$|RS| = v + r \frac{\sqrt{3}}{2}$$

in zapišimo Pitagorov izrek za trikotnik RSC :

$$\left(v + \frac{\sqrt{3}}{2}r\right)^2 + \frac{1}{4}b^2 = r^2. \quad (2)$$

Odpravimo oklepaj v (2), uporabimo (1) za člen v^2 in dobljeno enakost preuredimo v

$$2\sqrt{3}vr = r^2 - rb - 2a^2.$$

Če to kvadriramo na obeh straneh in spet uporabimo (1) ter uredimo dobljeno po potencah polmera r , dobimo naposled iskano zvezo

$$r^4 - 2br^3 + (b^2 - 4a^2)r^2 + a^2br + a^4 = 0.$$

Pri $a = 13$ in $b = 146$ torej velja

$$r^4 - 292r^3 + 20640r^2 + 24674r + 28561 = 0.$$

Edina rešitev te enačbe, ki ustreza pogojem naloge, je $r = 169$.

Boris Lavrič

KONVEKSNI TANGRAMSKI LIKI

Kombinatorični pristop k igri tangram je lahko za matematika še posebej zanimiv. Poglejmo.

Eno izmed najenostavnejših tovrstnih vprašanj se glasi:

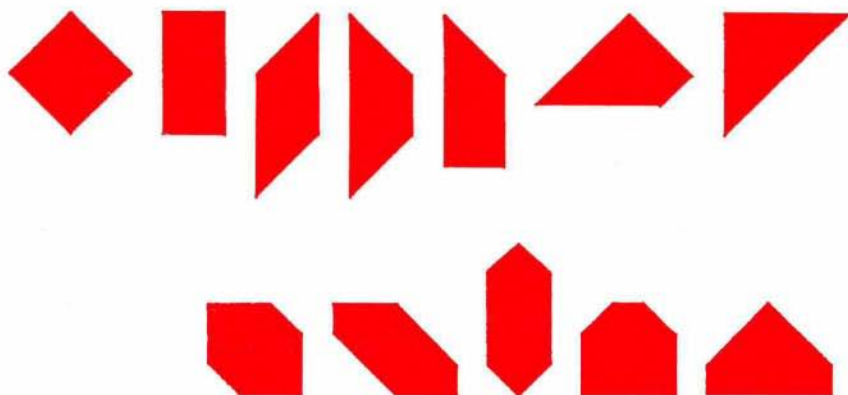
Koliko je vseh konveksnih tangramskih likov?

Konveksen tangramski lik (recimo mu kar *kotali*) je večkotnik, ki ima vse notranje kote manjše od 180° . Med vsemi tangramskimi liki, kar smo jih doslej objavili v Preseku, smo srečali le dva konveksna. To sta bila kvadrat in paralelogram. (Poišči ju!)

Na zgornje vprašanje sta prva odgovorila kitajska matematika **Fu Tsiang Wang** in **Chuan-Chih Hsiung**. Leta 1942 sta objavila dokaz, da obstaja natanko trinajst kotaljev. Dvanajst jih lahko vidite na sliki 1, trinajstega pa poskusite poiskati sami. Kdor bo pazljivo prebral članek, bo najbrž manjka-joči lik hitro našel. Seveda pa poskusite objavljenih dvanajst kotaljev tudi sestaviti.

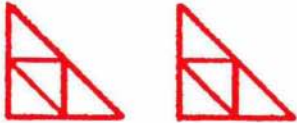
Oglejmo si vsaj košček poti, ki sta jo ubrala kitajska matematika pri iskanju vseh kotaljev.

Slika 2 prikazuje, kako lahko vseh sedem tangramskih ploščic razrežemo tako, da dobimo 16 med seboj skladnih osnovnih trikotnikov. Naj bo dolžina katete vsakega izmed teh trikotnikov 1. Dolžina njegove hipotenuze je potem



Slika 1

$\sqrt{2}$, torej iracionalno število. Če poskusimo sedaj teh 16 osnovnih trikotnikov sestaviti v kotalí, nam brž postane jasno, da hipotenuza kateregakoli izmed osnovnih trikotnikov v nobenem primeru ne more ležati ob kateti nekega drugega osnovnega trikotnika. V nasprotnem bi nastali lik namreč ne bil konveksen, saj bi imel notranji kot velikosti 225° (glej sliko 3).

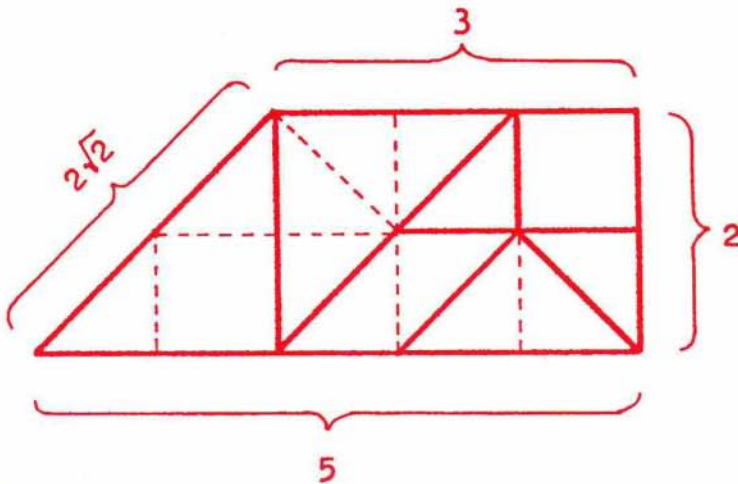


Slika 2



Slika 3

Od tod sklepamo, da so tiste stranice kotalíja, ki imajo racionalno dolžino, sestavljene zgolj iz katet osnovnih trikotnikov, stranice kotalíja, ki imajo iracionalno dolžino, pa le iz hipotenuz osnovnih trikotnikov. Imenujmo prve stranice v kotalíju racionalne stranice, druge pa iracionalne stranice.



Slika 4

Če je kot med sosednjima stranicama kotalíja 90° , sta torej ali obe racionalni ali pa obe iracionalni. Podobno velja, da je ena racionalna, druga pa iracionalna, če je kot med njima 45° ali 135° . Trditev ilustrira kotalí na sliki 4.

Recimo sedaj, da ima neki izbrani kotalí n kotov, pri čemer je med njimi p ostrih, q pravih in r topih. Potem velja

$$p + q + r = n.$$

Za konveksne poligone z n stranicami vemo, da je vsota njihovih notranjih kotov enaka $(n - 2) \cdot 180^\circ$. Torej velja za vsak kotalí enačba

$$p \cdot 45^\circ + q \cdot 90^\circ + r \cdot 135^\circ = (n - 2) \cdot 180^\circ.$$

Če upoštevamo še prejšnjo enačbo, dobimo $2p + q = 8 - n$. Sedaj vemo o lastnostih kotalíjev že dovolj, da lahko sestavimo tabelo vseh možnih primerov za parametre p , q , r in n .

p	q	r	n
0	0	8	8
0	1	6	7
0	2	4	6
1	0	5	6
0	3	2	5
1	1	3	5
0	4	0	4
2	0	2	4
1	2	1	4
2	1	0	3

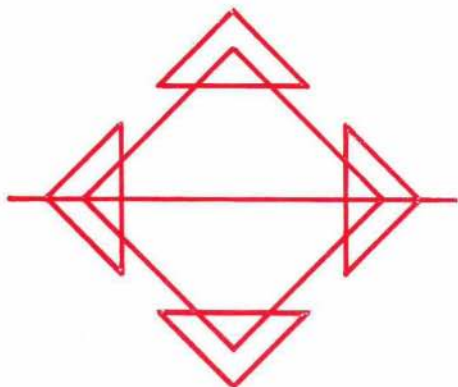
Poskusite poiskati vsakemu izmed dvanajstih objavljenih kotalíjev mesto v tej tabeli. Ugotovili boste, da nekatere izmed četveric p , q , r , n opisujejo več različnih kotalíjev, nekatere pa sploh nobenega.

Mislim, da vam bo ta tabela precej olajšala tudi iskanje neobjavljenega trinajstega kotalíja. V pomoč naj vam povem, da samo prva, druga in četrta vrstica v tabeli ne opisujejo nobenega kotalíja.

Vilko Domajnko

Z ENO POTEZO

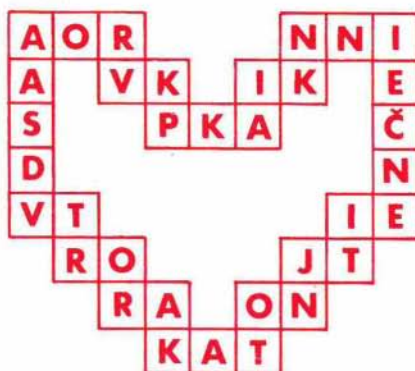
Nariši figuro s slike z eno samo potezo!



Marija Vencelj

POIŠČI IZREK

Besedilo v srčku preberi po nekem pravilu tako, da dobiš matematični izrek.



Marija Vencelj

ŠTEVILSKA KRIŽANKA – Rešitev s str. 188

2	8	2	■	1	1	2	3	2
6	■	4	3	7	■	2	8	8
■	1	0	1	■	2	5	■	2
9	3	3	■	3	7	6	2	■
1	0	■	1	5	6	■	9	1

KRIŽANKA

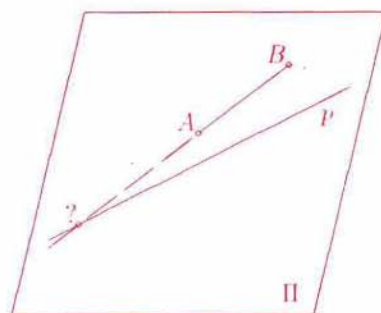
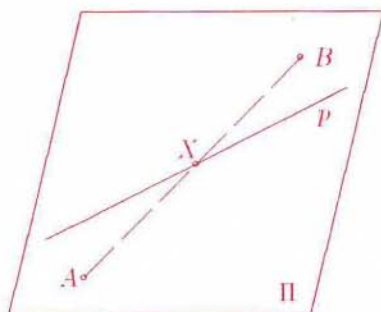
PROFESORJU ZA ŽIVLJENSKI JUBILEJ

				MIRA MIHELIČ	ZGORNJI DEL STOPALA	IME PEVCA PESTNERJA	STISKALNICA	ODPOR-NOST PROTI NALEZLJ. BOLEZNIM	ITALIJAN. SIKARJA (ANTONIO IN BERNARDO)	NALE
BAJESLOVNI LETALEC				LJUDSTVO V JV EVROPI						
VHODNA ENOTA PRI RAČUNALNIKU				PREBIVALKA UKRAJINE						
						JUŽNOM. KACA VELIKANKA				
IME IGRALCA DOUGLASA					IME POLITIKA MORA	FRANCOSKI OTOK V BISKAJSKEM ZALIVU				
						ČEBELJ PODOB. ŽUŽELKA				
IME JAPON-SKEGA REŽISERJA KUROSAWE						KAVKAŠKO LJUDSTVO				
						TIFOLSKA REKA				
PRISTAŠ MONAR-HIE									ANTON KUHELJ	
AVTOR MARKO BOKALIČ	VRH V KARAVAN-KAH	NAJDIŠČE NAD ŽIROVNICO								
		KORAL. OTOK								
ION S POZIT. NABOJEM								KRATEK POŽIREK		
								PEROCI		
NENASIČEN OGLJIKO-VODIK, C_2H_4					AVGUST ŽIGON	VRSTA STREŠNE KRITINE				
HITER ČEŠKI PLES						PREDELNA STENA V CERKVI				
TRIGLAV-SKI ŽUPNIK (JAKOB)						LUKA V IZRAELU				SI LI

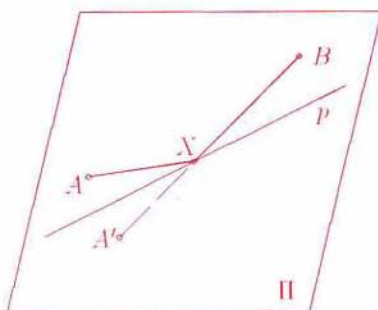
PKA,	ENAKA SAMOGLAS- NIKA	NOGOM. VRATAR IZ KAMERUNA	OZNAKA ŠVEDSKE	LEVI PRITOK DONAVE	RICHARD ZSIG- MONDY	DELO AVTORJA NA SLIKI	IME POLITIKA GLUGOROVA	STEBLO VINSKE TRTE	PONIKAL- NICA NA PLANIN. POLJU	BULDOŽER	MOŠTVO
			ORIGINAL								
			VNETJE JAJČNIKOV								
	NEKO. FR. TEROR. OR- GANIZACIJA ANTILOPA SABLAJKA				RIMSKA PLEMIŠKA RODBINA						
					SOLIMIZAC. ZLOG			GIBLJIV DEL CEPČA			
					NIZKA RASTLINA			DOMAČA ŽIVAL			
				GIUSEPPE VERDI			MAZILO				
				VEČANJE BITU			DEL ŽELEZNICE				
		SEZNAM TISKOVNIH NAPAK							RIMSKE TROJANE	PAPEŽEV POSLANIK	MEDNA- RODNA BEGUNSKA ORGANIZAC.
		PREBIVALCI KAMNIKA									
		BARIERA									
GLAS- IK (ATI)					ZVEZDA V VOLARJU						
ZEMNA IVAL					JUNAŠKA PESNITEV						
	PRIPRAVA ZA DVIGANJE						REKA V PIRENCAH				
	TEMNI DEL DNEVA						DEL STREHE, NAPUSC				
				BARVA KART				AKTINU			KAREL ERBEN
				JANEZ TRDINA				RONALD REAGAN			
					SLOV. BIOLOG (BORIS)						
AVA, GLED					GORNJI DEL TRUPA						

O VSOTI RAZDALJ MED TOČKAMA

Če imamo dani različni točki A in B na ravnini Π in se vprašamo po točki X , za katero je vsota razdalj $\overline{AX} + \overline{XB}$ najmanjša, potem bo vsak prav hitro odgovoril, da je rešitev neskončno mnogo. Vsaka točka, ki leži na daljici AB , ustreza zahtevanemu pogoju. Oglejmo si sedaj primer, ko ležita točki A in B na različnih bregovih premice p (točki in premica ležita na ravnini Π). Kako poiskati točko X na premici p , da bo vsota razdalj $\overline{AX} + \overline{XB}$ najmanjša? Nič lažjega! Rešitev je presečišče daljice AB s premico p , saj leži na daljici AB in zato ustreza pogoju.



Kaj pa če sta A in B na istem bregu premice p ? Da bi kot rešitev vzeli presečišče premic p in (AB) , se nam upira. Že skica nam pove, da nismo na pravi poti. Ker smo že rešili nalogo, ko sta A in B ležali na nasprotnih bregovih, bi radi sedanjo nalogo prevedli v prejšnjo obliko.



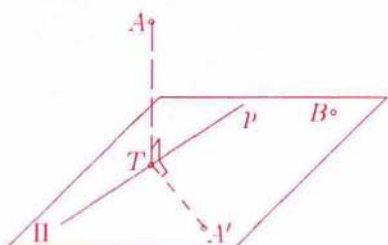
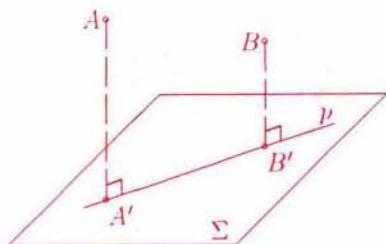
Skušali bomo torej poiskati na nasprotnem bregu premice p tako točko A' , ki je od vsake točke na premici p prav toliko oddaljena kot točka A . S tem nimamo težav, A' je namreč zrcalna slika točke A preko premice p . Povežimo še A' z B , pa imamo tudi X .

Zapustimo sedaj ravnino Π in se preselimo v prostor. Naj bosta A in B dani različni točki in Σ dana ravnina. Išči točko X ravnine Σ , da bo vsota $\overline{AX} + \overline{XB}$ najmanjša. Narišimo najprej pravokotni projekciji A' in B' točk

A in B na ravnino ter potegnimo premico p skozi njiju. Kako naprej, pa sami razmislite.

Tu si raje oglejmo primer točk A in B ter premice p , ki ne ležijo na isti ravnini. Denimo, da premica p s točko B določa ravnino Π .

Ravninski problem znamo rešiti, zato se podobno kot že enkrat prej vprašamo, ali obstaja na ravnini Π taka točka A' , ki je od vsake točke na premici p enako oddaljena kot točka A . Hitro ugotovimo, da lahko izbiramo med dvema možnostma. Na vsakem bregu premice p je po ena točka s tako lastnostjo. Naj bo namreč T pravokotna projekcija točke A na premico p . V ravnini Π postavimo pravokotnico na premico p skozi T in izberemo na njej točko A' tako, da velja $\overline{AT} = \overline{TA'}$.



Darjo Felda

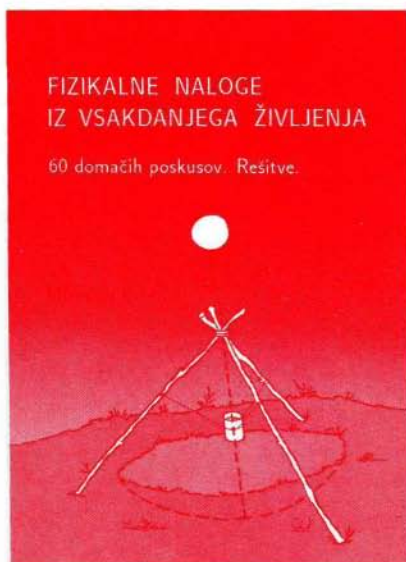
TRI NALOGE Z NARAVNIMI ŠTEVILI

1. naloga. Poiščite vsa naravna števila n , ki so deljiva z 2 in 9 ter imajo skupno 14 deliteljev.

2. naloga. Denimo, da ima neko naravno število v desetiškem zapisu 30 enic, vse ostale številke pa so enake nič. Ne vemo, koliko je ničel in na katerih mestih stojijo enice. Ali je tako število lahko popoln kvadrat?

3. naloga. Zadnja naloga je nekoliko težja. Denimo, da imamo na dvesto listkih napisana števila od 1 do 200, na vsakem listku natanko eno. Listke vržemo v klobuk in na slepo izvlečemo 101 listek. Dokaži, da sta med izvlečenimi listki vsaj dva taka, da število na enem listku deli število na drugem listku.

Borut Zalar



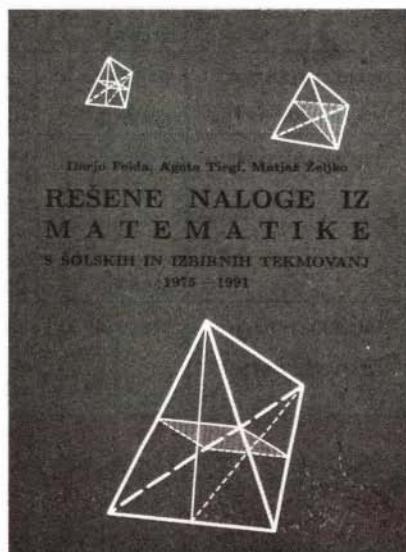
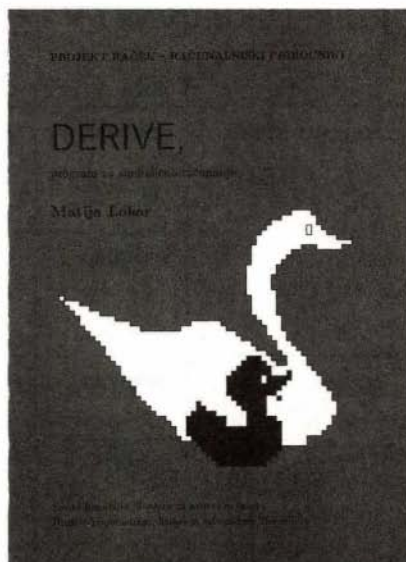
NAŠE NEBO IN ZEMLJA 1992 lahko dobite tudi na disketi (brez slik) po ceni 250.- / 200.- SLT

DERIVE

Programski paket za simbolično računanje in risanje slik

Originalni program na disketi in priročnik v angleščini, 244 str.
400 DEM (320 DEM)

Priročnik v slovenščini, 56 str.
350 SLT(280 SLT)



URNIK TEKMOVANJ V LETU 1992

področje	šola	tekmovanje	datum
matematika	osnovna	šolsko	do 4. aprila
		občinsko	18. april
		republiško	16. maj
	srednja	izbirno republiško olimpiada	14. marec 4. april julij
fizika	osnovna	področno republiško	4. april 9. maj
	srednja	izbirno republiško olimpiada	11. april 9. maj junij
logika	osnovna in srednja	izbirno republiško	18. ali 19. september 24. oktober
matematika za razvedrilo	osnovna in srednja	republiško	12. september
računalništvo	osnovna	šolsko	20. marec
		področno republiško	18. april 9. maj
	srednja	republiško	15. - 16. maj
raziskovanje inovatorstvo	srednja	republiško	junij

UTRINEK

S tujim jezikom je preprosto. Če se ga želiš naučiti, odpotuješ za nekaj časa v deželo, kjer ga govore. Žal ni nikjer na svetu dežele Matematike ...

je vzdihnil študent pred izpitom iz matematike.

1. Matematika – osnovna šola

Vsa tekmovanja bodo potekala v skladu s Pravilnikom o tekmovanju osnovnošolcev iz matematike za Vegova priznanja. Pojasnila lahko dobite pri g. A. POTOČNIKU, OŠ K. D. Kajuh, Vlahovičeva 42, Ljubljana, telefon (061) 445-626.

2. Matematika – srednja šola

Razpis izbirnega tekmovanja (za vse učence, ki želijo sodelovati na republiškem tekmovanju) bomo tako kot doslej skupaj s prijavnici poslali na šole. Vsa pojasnila daje g. D. FELDA, Fakulteta za elektrotehniko in računalništvo, Tržaška 25, Ljubljana, tel. (061) 265-161, int. 233.

3. Fizika – osnovna šola

Tekmovanje je ekipno, ekipo sestavljata dva učenca. Vsaka šola lahko prijavi po eno ekipo za 7. in 8. razred. Vse ekipe, ki želijo sodelovati na republiškem tekmovanju, se morajo udeležiti področnega tekmovanja v ustrezni organizacijski enoti Zavoda za šolstvo SR Slovenije:

- v Celju na Tehniški srednji šoli, Pot na Lavo 22 (J. Dolenšek);
- v Mariboru na Pedagoški fakulteti, Koroška c. 160 (M. Cvahte in Z. Bradač);
- Kopru na Srednji pedagoški in naravoslovnomatematični šoli, Cankarjeva 2 (E. Okretič);
- v Ljubljani na Pedagoški akademiji, Kardeljeva ploščad 16 (F. Prijatelj);
- v Radovljici na OŠ A. T. Linhart, Kranjska 27 (J. Stare);
- v Murski Soboti na Srednješolskem centru tehniško pedagoške usmeritve, V. Vlahovića 12 (E. Dečko);
- v Novi Gorici na OŠ IX. korpusa NOVJ, Kidričeva 36 (A. Fakin);
- v Novem mestu na OŠ 15. divizije, Grm, Trdinova 7 (D. Brezovar);
- v Dravogradu na OŠ Radlje (F. Pogorelnik).

Gradivo za pripravo tekmovalcev je snov iz učbenikov J. Ferbarja in F. Plevnika za 7. in 8. razred, ki ju učenci lahko med tekmovanjem uporabljajo. Predtekmovanje bo sestavljeno iz vprašanj in računskih nalog, na republiškem tekmovanju pa se bodo učenci poleg tega pomerili še v eksperimentalnem delu. Priporočamo, da izvedete šolsko tekmovanje. Prijave za področno tekmovanje pošljite na ustrezno zgoraj navedeno organizacijsko enoto najkasneje do 25. marca. Informacije dobite pri g. J. SAKELŠEK, OŠ Ketteja in Murna, Koširjeva 2, Ljubljana, tel. (061) 444-401 ali (061) 444-181.

4. Fizika – srednja šola

Razpis za tekmovanja bomo skupaj s prijavnici poslali na šole do konca februarja. Informacije dobite pri g. C. DOMINKU, Gimnazija Bežigrad, Peričeva 4, Ljubljana, tel. (061) 311-024 ali (061) 311-024.

5. Logika

Na republiškem tekmovanju tekmujejo učenci, ki bodo v času tekmovanj v 7. in 8. razredu osnovne šole, učenci srednjih šol in študenti. Šole, ki bodo organizirale izbirno tekmovanje, se morajo prijaviti na razpis do **1. junija** na ZOTKS, Komisija za logiko, Lepi pot 6, 61001 Ljubljana. Šolam bomo poslali tudi naloge za 5. in 6. razred. Komisija za logiko bo izbrala do 50 tekmovalcev iz posamezne skupine za nastop na republiškem tekmovanju. Učenci šol, ki ne bodo organizirale izbirnega tekmovanja, se lahko prijavijo do 30. avgusta na najbližji šoli, kjer bodo tekmovanje izvedli. Druge informacije daje g. A. JUS na ZOTKS, tel. (061) 263-676.

6. Matematika za razvedrilo

Vse informacije dobite v časopisih MOJ MIKRO, PIONIR in PROTEUS.

7. Računalništvo – osnovna šola

Razpisi za tekmovanje so že na šolah. Informacije dobite pri g. A. JUSU, ZOTKS – Svet za tehnično vzgojo mladine, Lepi pot 6, Ljubljana, tel. (061) 263-676.

8. Računalništvo – srednja šola

I. Raziskovalne naloge

Strokovna komisija bo pregledala naloge, ki bodo do **1. maja** prispele na naslov Gibanje znanost mladini, Lepi pot 6, Ljubljana. Na osnovi dobljenih ocen bo določila tiste učence, ki bodo svoje naloge ustno zagovarjali.

II. Tekmovanje iz znanja računalništva

Mentorji naj pošljejo prijavo šole s poimenskim seznamom tekmovalcev (največ pet učencev za vsako od treh tekmovalnih skupin) do **10. aprila** na Gibanje znanost mladini. Pri tem naj upoštevajo pravila, ki že vrsto let veljajo za to tekmovanje.

Potrditev prijav in natančni razpored tekmovanja bodo šole dobile teden dni pred tekmovanjem. Šolam priporočamo, da izvedejo predtekmovanja in tako

izberejo najboljše predstavnike. Učenci šol, ki se ne bodo prijavile na tekmovanje kot organizacije, se lahko sami prijavijo na isti naslov, prav tako najkasneje do 10. aprila. Informacije dajeta g. R. DORN in g. M. ZRIMEC, Fakulteta za elektrotehniko in računalništvo, Tržaška 25, Ljubljana, tel. (061) 273-489.

9. Raziskovanje in inovatorstvo

Razpise za 24. srečanje mladih raziskovalcev in inovatorjev Slovenije so srednje šole že dobile, podrobnejše informacije pa dobite pri g. B. SOTOŠKU, ZOTKS – Gibanje znanost mladini, Lepi pot 6, Ljubljana, p.p. 99, tel. (061) 263-676 ali (061) 267-380.

Matjaž Željko

NEWTONOVA JABOLKO IN JABLANA

15. aprila 1726 je Stukeley kosil z Newtonom v Kensingtonu. O dogodku po kosilu je poročal takole: "V toplem vremenu sva šla na vrt in pila čaj v senci jablan, samo on in jaz. Med drugim mi je povedal, da mu je pojem gravitacije prišel na misel pred časom v popolnoma enakih razmerah. Ko je sedel in razmišljal, je z jablane padlo jabolko. Vprašal se je, zakaj pade jabolko vedno navpično na tla. Zakaj se ne giblje vstran ali navzgor, ampak vedno proti središču Zemlje?"

Conduittovo poročilo potrjuje Stukeleya: "In ko je razmišljal na vrtu, mu je prišlo na misel, da gravitacija (zaradi katere je padlo jabolko na tla) ni omejena samo na določeno razdaljo od Zemlje, ampak sega mnogo dlje... Zakaj ne do Lune, se je vprašal."

Usodo prave jablane v Woolsthorpu (Newtonovem rojstnem kraju, kjer naj bi se pripetil prvotni dogodek v letu 1665 ali 1666, ko je bila cambriška univerza zaradi kuge zaprta, op.prev.) dobro poznamo... Brewster je videl drevo leta 1814 in opazil, da je bilo v slabem stanju. Leta 1820 so ga posekali. Pripravili so potaknjence... Enega izmed poznejših cepičev so leta 1944 poslali v Združene države v sadovnjak Pennsbury Manor v Morrisvillu v zvezni državi Pennsilvaniji, rojstnem kraju Williama Penna. Potaknjenec razraščajočega se drevesa so leta 1954 posadili ob dovozni cesti h knjižnici Babsonovega inštituta v Wellesleyu v zvezni državi Massachusetts. Jabolka s tega drevesa so določili kot *Cvetlica Kenta*. Jabolka s hruškasto obliko uporabljajo za kuhanje in trdijo, da so brez okusa.

prev. in pril. Janez Strnad

NOBELOVA NAGRADA ZA FIZIKO V LETU 1991

Lani je švedska akademija z Nobelovo nagrado za fiziko nagradila devetindesetletnega francoskega profesorja Pierra-Gillesa de Gennesa za njegovo delo na področju tekočih kristalov in polimerov. V utemeljitvi svoje odločitve so akademiki zapisali, da je profesor de Gennes našel red v gibanju molekul v različnih fizikalnih sistemih, kjer je na videz vladal nered. Svoja iskanja molekularnega reda je nagrajenec pričel v šestdesetih letih z raziskavami superprevodnikov, ko pa so poskusi z njimi postajali vedno bolj tehnično zapleteni, se je raje preusmeril k tekočim kristalom. Rad ima namreč enostavne in preproste fizikalne poskuse.



V šoli nas učijo, da obstajajo snovi v treh različnih agregatnih stanjih: trdnem, tekočem in plinastem. To pa ni vedno res. Pri nekaterih snoveh obstaja med trdnim in tekočim stanjem še množica vmesnih faz, ki imajo nekatere lastnosti tekočin in nekaj lastnosti značilnih za trdno stanje. Tem fazam rečemo tekoči kristali. Odkrili so jih že v prejšnjem stoletju, vendar so bili dolgo časa za večino raziskovalcev nezanimivi, saj so bili vsi znani tekočokristalni materiali tako neobstojni na toploti in svetlobi, da jih ni bilo mogoče uporabiti za nobeno koristno napravo. Po odkritju kemično obstojnih materialov leta 1960 pa je

zanimanje za njih močno narastlo. Pritegnili so tudi de Gennesa. Iz prašnih polic v knjižnici je izbrskal stare zapise o opazovanjih tekočih kristalov in obenem na univerzi v Orsayu ustanovil skupino raziskovalcev, ki je začela delati nove poskuse. Začele so nastajati osnovne ideje o naravi molekularnega reda v teh na prvi pogled zelo zapletenih snoveh. Pravijo, da se je profesor de Gennes tudi do desetih zvečer zapiral v svojo delovno sobo na univerzi in ga niso smeli motiti. Sodelavci so vztrajno čakali, da so mu pokazali svoje najnovejše eksperimentalne rezultate, de Gennes pa jih je presenetil in v tem času za zaprtimi vrati tudi teoretično prišel do enakih zaključkov.

Poglavitna spoznanja Orsayske skupine je profesor de Gennes objavil v znameniti knjigi Fizika tekočih kristalov, v kateri v uvodu pravi, da se mu zdijo tekoči kristali predvsem lepi in skrivnostni (glej sliko na IV. strani ovitka). Kmalu zatem pa so ugotovili, da so tudi zelo uporabni. Tako nas danes spremljajo skoraj na vsakem koraku na zaslonih digitalnih zapestnih ur in žepnih računalnikov. V bližnji prihodnosti pa bodo iz njih izdelani tudi veliki televizijski zasloni, elementi v optičnih računalnikih in in še marsikatera druga naprava.

Po nekaj letih dela s tekočimi kristali je profesor de Gennes svoje zanimanje preusmeril na novo področje, kjer je še vedno vladal nered. Začel je raziskovati lastnosti polimerov, dolgih nitastih molekul, ki tvorijo plastične mase in gume. Polimerne molekule se v talini plastične mase zvijejo v klobčiče in vozle ter se prepletejo med seboj. Ali si sploh lahko predstavljate večji nered? Kljub temu je de Gennesu uspelo z matematičnim modelom opisati gibanje molekul v tem sistemu in pojasniti značilnosti polimernih materialov.

Danes je profesor de Gennes eden izmed štiridesetih članov Francoske akademije znanosti in direktor raziskovalne ustanove École de physique et chimie v Parizu, pri kateri sta nekoč delala tudi Pierre in Marie Curie. Trenutno se ukvarja z raziskavami medmolekularnih sil pri lepljenju in omakanju različnih snovi. Profesor de Gennes je že večkrat obiskal Slovenijo in sodeluje z našimi raziskovalci z Instituta Jožef Stefan v Ljubljani. Upamo, da se bo tudi kot Nobelovec kmalu spet oglasil pri nas in nas seznanil s svojimi najnovejšimi odkritji.

Irena Drevenšek

Milutinović U., Žubrinić D., BALKANSKE MATEMATIČKE OLIMPIJADE 1984 – 1990, Školska knjiga, Zagreb 1991, 61 str.

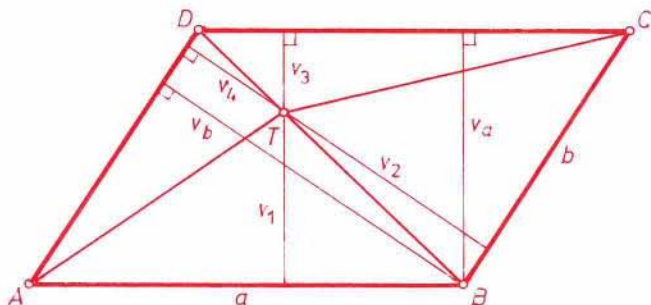
V zbirki je zajetih 28 nalog s sedmih Balkanskih matematičnih olimpiad in 18 nalog, ki so bile predlagane, a ne izbrane med tekmovalne naloge. Učenci, ki se radi pomerijo v reševanju nekoliko težjih matematičnih problemov, bodo lahko svoje rešitve primerjali z objavljenimi. Nekatere naloge sta avtorja rešila na dva načina, ponekod pa zapisala koristne pripombe. Dodala sta rezultate, ki so jih dosegli tekmovalci iz jugoslovanske ekipe.

Darjo Felda

27. REPUBLIŠKO TEKMOVANJE OSNOVNOŠOLCEV IZ MATEMATIKE – Rešitve nalog s str. 169

7. razred

1. Vrednost izraza je 33.
2. Nalogo rešimo s sklepanjem: 20000 kg krompirja pridelajo na 10000 m², 1 kg krompirja na $\frac{1}{2}$ m², 50 kg krompirja pa na $50 \cdot \frac{1}{2}$ m² = 25 m². Stranica kvadratnega zemljišča je dolga 5 m.
3. $2^1 + 2^2 + 2^3 + \dots + 2^{1992} = 2 \cdot (1 + 2 + 2^2 + 2^3) + 2^5 (1 + 2 + 2^2 + 2^3) + 2^9 (1 + 2 + 2^2 + 2^3) + \dots + 2^{1989} (1 + 2 + 2^2 + 2^3) = 2 \cdot 15 + 2^5 \cdot 15 + 2^9 \cdot 15 + \dots + 2^{1989} \cdot 15 = 30 \cdot (1 + 2^4 + 2^8 + \dots + 2^{1988})$. Vsota je večkratnik števila 30, zato je deljiva s 30.
4. Obseg črkanega lika je $4\pi r$, zato $r = 5$ dm. Ploščina črkanega lika je $p = p_{kvadrata} + p_{kroga}$, od tod dobimo $p = 100 + 25\pi$, $p = 25 \cdot (4 + \pi)$ dm² ali $p \doteq 178,50$ dm²
- 5.



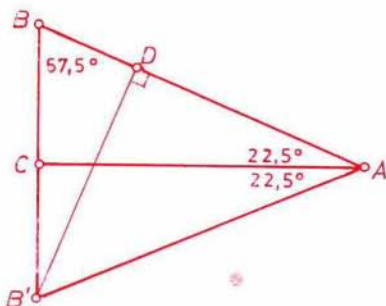
Zaradi $p_{ABT} = \frac{av_1}{2}$, $p_{CDT} = \frac{av_3}{2}$ in $v_1 + v_3 = v_a$ je $p_{ABT} + p_{CDT} = \frac{a}{2} \cdot (v_1 + v_3) = \frac{a}{2} \cdot v_a$. Podobno dobimo $p_{BCT} + p_{ATD} = \frac{b}{2} \cdot (v_2 + v_4) = \frac{b}{2} \cdot v_b$. Ker je $p = av_a = bv_b$, je tudi $\frac{1}{2}av_a = \frac{1}{2}bv_b$.

8. razred

1. Prvo število lahko zapišemo v obliki $100a + 10b + 7 = 10(10a + b) + 7 = 10x + 7$, drugo število pa $7 \cdot 100 + (10a + b) = 7 \cdot 100 + x$. Iz enačbe $700 + x = 2(10(10a + b) + 7) + 40$ dobimo rešitev $x = 34$. Zato je prvotno število 347.

2. Iz $y = -\frac{2}{3a} \cdot x$, $k_1 = -\frac{2}{3a}$ in $y = \frac{7}{5} \cdot x - \frac{2}{5}$, $k_2 = \frac{7}{5}$ ter pogoja $k_1 = k_2$ dobimo $-\frac{2}{3a} = \frac{7}{5}$, od tod pa $a = -\frac{10}{21}$.

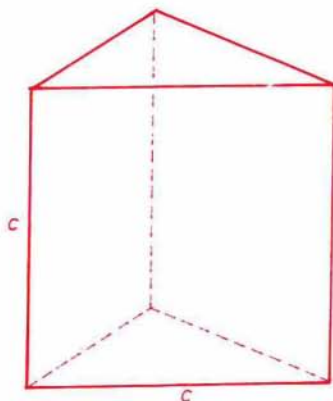
3.



Iz $\beta : \alpha = 3 : 1$ sledi $\beta = 3\alpha$, zaradi $\alpha + \beta = 90^\circ$ pa še $\alpha = 22^\circ 30'$, $\beta = 67^\circ 30'$. Trikotnik $\triangle ABC$ prezrcalimo čez stranico AC . Če z D označimo pravokotno projekcijo točke B' na AB , ugotovimo, da je $\triangle B'AD$ enakokrak pravokotni trikotnik, saj je $\angle B'AD = 2\alpha = 45^\circ$. Ker je $\overline{B'A} = \overline{BA} = 4\text{cm}$, je $\overline{B'D} = \frac{\overline{BA}}{\sqrt{2}} = 2\sqrt{2}\text{cm}$.

Ploščina trikotnika $\triangle B'AB$ je $\frac{1}{2} \cdot 4 \cdot 2\sqrt{2}\text{cm}^2$, ploščina $\triangle ABC$ pa enaka polovici te vrednosti, torej $P_{ABC} = 2\sqrt{2}\text{cm}^2$.

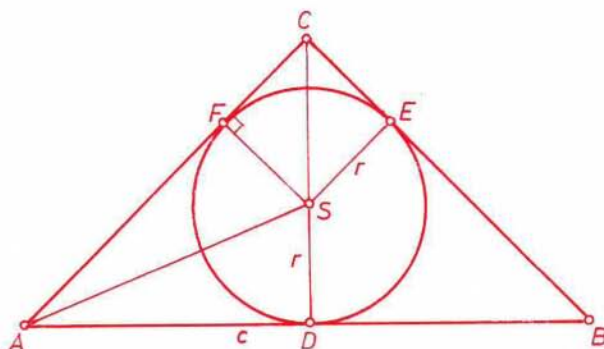
4.



$\overline{CD} = \frac{c}{2}$. Lik $FSEC$ je kvadrat s stranico r in diagonalo $r\sqrt{2}$, zato $\overline{CS} = r\sqrt{2}$, $\overline{CD} = r + r\sqrt{2} = r(1 + \sqrt{2})$ in $r(1 + \sqrt{2}) = \frac{c}{2}$, $r = \frac{c}{2(1 + \sqrt{2})}$. Tako je $V = \pi r^2 \cdot c$.

$$V = \pi \left(\frac{c}{2(1 + \sqrt{2})} \right)^2 \cdot c = \frac{\pi c^3}{4(3 + 2\sqrt{2})}$$

ali $V = \frac{\pi c^3(3 - 2\sqrt{2})}{4}$.



5. Prvi faktor je $a + \frac{10a}{100} = \frac{110a}{100}$, drugi pa $b - \frac{bx}{100}$. Enačba $\frac{110a}{100} \cdot (b - \frac{bx}{100}) = ab$ ima rešitev $x = \frac{100}{11}$, kar pomeni $x = 9,09\%$ ($x = 9\frac{1}{11}\%$).

Aleksander Potočnik

TEHTANJE Z VERIGO - Rešitev s str. 165

- a) Veriga ima lahko največ 67 členov. Preščičnjena sta 6. in 22. člen. - Ne smemo pozabiti, da lahko polagamo uteži na obe strani tehtnice!
- b) Če vemo, da so količine, ki jih tehtamo, cele, je lahko veriga dolga največ 80 členov. Preščičniti moramo 7. in 26. člen. Pri tem za teže 3, 9, 15, 21, 27, 33, 39, 45, 51, 57, 63, 69, 75 nimamo uteži, vendar lahko npr. za breme težko 9 enot s tehtanjem ugotovimo, da je težje od 8 in lažje od 10 enot.

Marija Vencelj

NOVE KNJIGE

Lokar M., DERIVE, program za simbolično računanje, DMFA Slovenije, Zavod RS za šolstvo in šport, Račkova knjižnica; 7, Ljubljana 1991, 56 str.

V zbirki Učbeniki in priročniki je kot sedma številka Račkove knjižnice izšel kratek priročnik za uporabo programskega paketa DERIVE. V njem so razložene le osnovne možnosti uporabe, saj je tak tudi namen knjižic, ki izhajajo v tej zbirki.

Knjiga ima 7 poglavij. V uvodu nam avtor razloži osnovne značilnosti programa in našteje možnosti za uporabo. V drugem poglavju razloži, kako program namestimo v računalnik in kako lahko s programom komuniciramo. Tretje poglavje je posvečeno aritmetiki, to je vnašanje izrazov, poenostavljanju, razcepu na prafaktorje, računanju z racionalnimi in s kompleksnimi števili, na koncu pa še našteje vgrajene funkcije. Četrto poglavje nas uvede v algebro. Začnemo računati s spremenljivkami, izvajamo operacije nad polinomi, rešujemo enačbe in neenačbe. V petem poglavju pogledamo v matematično analizo. Izračunamo nekaj odvodov in integralov, razvijemo funkcijo v Taylorjevo vrsto in določimo nekaj limit. Šesto poglavje govori o risanju. Spoznamo možnosti risanja v dveh in treh dimenzijah, risanje grafov eksplicitno in parametrično podanih funkcij, risanje v pravokotnem in polarnem koordinatnem sistemu. Seznanimo se tudi z možnostmi povečave in pomanjšave izbranih enot na koordinatnih oseh. Sedmo poglavje nas seznani z brisanjem in shranjevanjem izrazov, ki smo jih sami vtipkali v sezname. Na koncu knjižice je dodano še stvarno kazalo.

V priročniku je precej slik, ki pomagajo prebroditi začetne težave in nam povedo, kdaj delamo prav (če se nam na zaslonu prikaže enaka slika).

Po priročniku bodo radi posegli vsi, ki imajo radi matematiko, manj radi pa zamudno računanje in preračunavanje. Prav bo prišel tudi pri uporabi matematike pri drugih predmetih. V šoli namreč opažamo, da imajo pri predmetih, kjer je potrebno znanje matematike, učenci veliko težav z njo samo in se zato ne morejo osredotočiti na razlagano snov. Take primere najdemo v fiziki (nihanje, kroženje, grafi), v gradbeništvu, strojništvu in pri drugih predmetih. V pomoč bo tudi učiteljem pri sestavljanju nalog za pisno preverjanje znanja in drugih, saj je s programom možna hitra in zanesljiva kontrola podatkov in rezultatov.

Nada Razpet

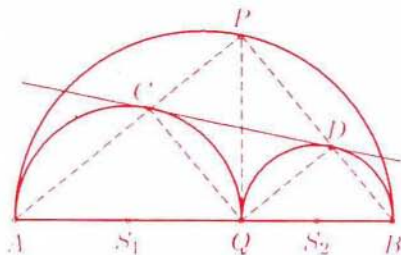
35. REPUBLIŠKO TEKMOVANJE SREDNJEŠOLCEV IZ MATEMATIKE - Rešitve s str. 172

Prvi letnik

1. Očitno je $N = 0$ in $E = 5$. Zaradi $F \neq S$ (oziroma natančneje $F = S - 1$) mora biti $O = 9$ in nato $I = 1$. Ker mora biti prenos s stotíc na tisočice enak 2, sta $R, T \in \{6, 7, 8\}$. S poskušanjem dobimo edino rešitev $R = 7, T = 8, X = 4, F = 2, S = 3$ in $Y = 6$.

2. Označimo dinarje x in pare y , vrednost čeka je torej bila $100x + y$. Iz naloge preberemo $100y + x - 350 = 2(100x + y)$ oziroma $100(-2x + y - 3) = -x + 2y + 50$. Ker sta x in y med 0 in 99, je $-x + 2y + 50 = 100m$ le za $m \in \{0, 1, 2\}$. Za vsak možen m moramo rešiti sistem $-2x + y - 3 = m$, $-x + 2y + 50 = 100m$, ki pa ima celoštevilsko rešitev ($x = 14, y = 32$) le za $m = 1$. Na čeku je bila zapisana vrednost 14 din 32 par.

3. Po Talesovem izreku sta kota $\angle QDB$ in $\angle QCA$ prava, zato je štirikotnik $CQDP$ pravokotnik. Tako je $\angle QDC = \angle PQD = \angle QBD = \angle S_2DB$, od tod pa $\angle S_2DQ = \angle CDP$ in je $\overline{CD}$ tangenta na drugi krog. Podobno razmislimo še za prvega.



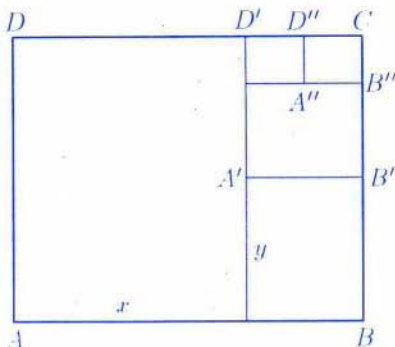
4. Pogledimo si pare prijateljev, ki imajo hišice različne barve. Vsak mesec se to število kvečjemu zmanjša. Število parov je nenegativno, zato se ne more manjšati v nedogled. Ko se ne manjša več, se barva hišic ne spreminja.

Drugi letnik

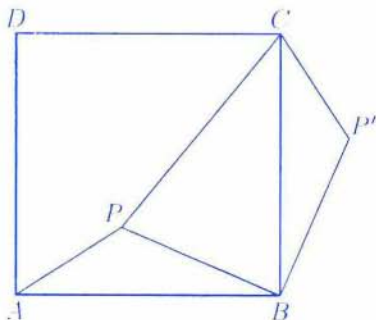
1. Delimo enačbe v sistemu po vrsti z ab, bc in ca , pa imamo $1 = 2(\frac{1}{a} + \frac{1}{b})$, $1 = 3(\frac{1}{b} + \frac{1}{c})$ in $1 = 4(\frac{1}{c} + \frac{1}{a})$. Sedaj ni težko izračunati $\frac{1}{c} = \frac{1}{24}$, $\frac{1}{b} = \frac{7}{24}$ in $\frac{1}{a} = \frac{5}{24}$, tako da je $5a + 7b + 9c = 11 \cdot 24 = 264$.

2. Recimo, da bi bilo $n^2 - 19n + 89 = a^2$. Rešimo enačbo po n : $n_{1,2} = \frac{19 \pm \sqrt{5 + 4a^2}}{2}$. Ker je n cel, mora biti $5 + 4a^2 = b^2$ ali $b^2 - (2a)^2 = 5$. Že razlika med sosednjima kvadratom je $(2a + 1)^2 - (2a)^2 = 4a + 1 \geq 5$, enakost pa nastopi pri $a = 1$, ko je $n = 8$ ali 11 in ne ustreza pogoju $n > 11$.

3. Pokažimo najprej, da lahko dani pravokotnik lahko razrežemo na tri njemu podobne. Vzemimo npr. $y \geq \sqrt{3} - x$ in $\sqrt{2} - y \geq \sqrt{3} - x$. Tedaj je zaradi podobnosti $\frac{\sqrt{3}}{\sqrt{2}} = \frac{y}{\sqrt{3}-x} = \frac{\sqrt{2}-y}{\sqrt{3}-x}$, od tod pa $y = \frac{\sqrt{2}}{2}$ in $x = \frac{2}{\sqrt{3}}$. S tem smo določili, kako pravokotnik razrežemo na 3 dele. Če rezanje ponovimo na $A'B'CD'$, nato na $A''B''CD''$, ..., bomo po 995 korakih dobili $2 \cdot 995 + 1 = 1991$ podobnih pravokotnikov.



4. Zavrtimo trikotnik $\triangle ABP$ okrog B za 90° . Točka A se preslika v C , P pa v P' . Potem je (trikotnik $\triangle P'PB$ je enakokrak pravokotni) $PP'^2 = 2 \cdot PB^2 = 8 \cdot AP^2$ in $PP'^2 + P'C^2 = 9 \cdot AP^2 = CP^2$ in je trikotnik $\triangle PP'C$ pravokotni s pravim kotom pri P' . Sledi $\angle APB = \angle CP'B = \angle CP'P + \angle PP'B = \frac{\pi}{2} + \frac{\pi}{4} = \frac{3\pi}{4}$.



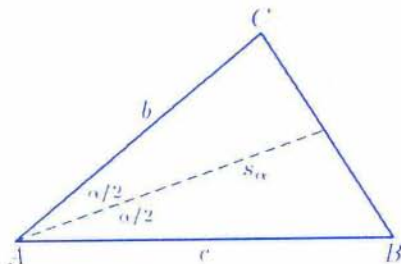
Tretji letnik

1. Če z D' in C' označimo pravokotni projekciji oglišč D in C na AB ter $\alpha = \angle DAB$ in $\beta = \angle CAB$, potem iz pravokotnih trikotnikov $\triangle AD'D$ in $\triangle AC'C$ izračunamo $\tan \alpha = 7/4$ in $\tan \beta = 7/12$. Ker je tangens na intervalu $[0, \frac{\pi}{2})$ naraščajoča funkcija, si bomo pomagali kar z njim. Zaradi $\tan 2\beta = \frac{2 \tan \beta}{1 - \tan^2 \beta} = \frac{168}{95} > \frac{7}{4} = \tan \alpha$ simetrala seka krak.

2. Najprej je $S = \frac{s_\alpha b \sin(\alpha/2)}{2} + \frac{s_\alpha c \sin(\alpha/2)}{2} = \frac{s_\alpha (b+c) \sin(\alpha/2)}{2}$ in $S = \frac{s_\beta (a+c) \sin(\beta/2)}{2}$ ter $S = \frac{s_\gamma (a+b) \sin(\gamma/2)}{2}$. Ker imamo ostrokotni trikotnik,

so sinusi polovičnih kotov manjši od

$$\begin{aligned} \sqrt{2}/2: \frac{1}{s_\alpha} + \frac{1}{s_\beta} + \frac{1}{s_\gamma} &= \\ &= \frac{(b+c)\sin(\alpha/2)}{2S} + \frac{(a+c)\sin(\beta/2)}{2S} + \\ &+ \frac{(a+b)\sin(\gamma/2)}{2S} < \\ \frac{b+c+a+c+a+b}{2S} \cdot \frac{\sqrt{2}}{2} &= \frac{(a+b+c)\sqrt{2}}{2S}. \end{aligned}$$



3.(a) Opazimo, da je $\operatorname{tg}^2 3\alpha = 3$ za $\alpha = 20^\circ, 40^\circ, 80^\circ$. Če formulo $\operatorname{tg} 3\alpha = \frac{3\operatorname{tg} \alpha - \operatorname{tg}^3 \alpha}{1 - 3\operatorname{tg}^2 \alpha} = \frac{\operatorname{tg} \alpha (3 - \operatorname{tg}^2 \alpha)}{1 - 3\operatorname{tg}^2 \alpha}$ kvadriramo, upoštevamo $\operatorname{tg}^2 3\alpha = 3$ in uvedemo substitucijo $u = \operatorname{tg}^2 \alpha$, dobimo $3(1 - 3u)^2 = u(3 - u)^2$ in po ureditvi $u^3 - 33u^2 + 27u - 3 = 0$.

(b) Uporabimo Vietovo pravilo v (a): $\operatorname{tg}^2 20^\circ + \operatorname{tg}^2 40^\circ + \operatorname{tg}^2 80^\circ = 33$, upoštevajmo $\operatorname{tg}^2 60^\circ = 3$ in $\operatorname{tg}^2 \alpha = \frac{1}{\cos^2 \alpha} - 1$, pa imamo $\frac{1}{\cos^2 20^\circ} + \frac{1}{\cos^2 40^\circ} + \frac{1}{\cos^2 60^\circ} = 40$.

4. Na p -tem koraku zapišemo tabelo dimenzije $i_p \times i_p$, če Janez za i_p števil ne ve, kje ležijo, s_{i_m} naj bo število z neznano lego in j_{i_l} mesto v permutaciji, za katerega pripadajoče število še ni odkrito. Na (j_{i_l}, s_{i_m}) —

	s_{i_1}	s_{i_2}	s_{i_3}	$\dots$	s_{i_p}
j_{i_1}	•	•	•		
j_{i_2}	•				
$\vdots$					
j_{i_p}					

to mesto tabele vpišemo znak •, če število s_{i_m} ne more ležati na mestu j_{i_l} , sicer pa to mesto pustimo prazno.

Denimo, da Janez ne ve, kje leži število s_{i_m} in da je v m -tem stolpcu prvo prazno polje v l -ti vrstici. Če bo dobil pozitiven odgovor na vprašanje: ali leži število s_{i_m} v vrstici j_{i_l} , to vrstico in stolpec odstranimo in s tem zbršimo kvečjemu $i_p - 1$ znakov, sicer pa tabelo dopolnemo z znakom •.

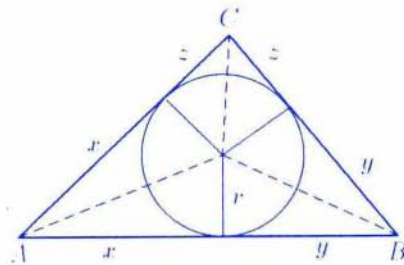
Če smo vpisali znak • in je levo od njega prazno polje, lahko stolpce tako prestavimo, da levo ni praznih polj. Nova tabela dimenzije $i_{p+1} \times i_{p+1}$ ima lahko elemente le v zgornjem levem naddiagonalnem trikotniku, sicer iz preostalih števil ne moremo sestaviti permutacije. Možnih je torej kvečjemu $\frac{n(n-1)}{2}$ vpisov znaka •. Janez bo zagotovo uganil permutacijo po $\frac{n(n+1)}{2}$ korakih.

Četrty letnik

1. Enačbo kvadrirajmo in uredimo v $(x+y-2)\sqrt{3} = 2\sqrt{3xy} - 3$ ter ponovno kvadrirajmo: $3(x+y-2)^2 = 12xy + 9 - 12\sqrt{3xy}$. Od tod sklepamo, da je $\sqrt{3xy} \in \mathbb{Q}$. Če je $x+y-2 \neq 0$, lahko iz prve enačbe izrazimo $\sqrt{3} = \frac{2\sqrt{3xy}-3}{x+y-2} \in \mathbb{Q}$, kar je protislovje. Zato $x+y-2=0$ in $2\sqrt{3xy}-3=0$ oziroma $x=3/2$ in $y=1/2$.

2. Ker je $\frac{221}{13} = 17$ in $\frac{222222}{13} = 17094$, so števila $222222 \cdot (10^3 + 10^9 + \dots + 10^{3+6k}) + 222$ ($k \in \mathbb{N}$) oblike $13 \cdot n + 1$ in jih je neskončno.

3. Po sinusnem izreku je $a = 2R \sin \alpha$ in $b = 2R \sin \beta$. Upoštevajmo to v $S = \frac{1}{2}ab \sin \gamma$, pa imamo $S = 2R^2 \sin \alpha \sin \beta \sin \gamma$. Po drugi strani je $x = r \operatorname{ctg} \frac{\alpha}{2}$, $y = r \operatorname{ctg} \frac{\beta}{2}$, $z = r \operatorname{ctg} \frac{\gamma}{2}$ in $S = rx + ry + rz = r(x+y+z) = r^2(\operatorname{ctg} \frac{\alpha}{2} + \operatorname{ctg} \frac{\beta}{2} + \operatorname{ctg} \frac{\gamma}{2})$. Tako imamo $r^2(\operatorname{ctg} \frac{\alpha}{2} + \operatorname{ctg} \frac{\beta}{2} + \operatorname{ctg} \frac{\gamma}{2}) = 2R^2 \sin \alpha \sin \beta \sin \gamma$, od tod pa $\frac{2R^2}{r^2} = 8$ in $R:r = 2$.



4. Označimo $\mathcal{M} = \{1, 2, 3, \dots, n\}$ in njeno potenčno množico $2^{\mathcal{M}}$, ta ima 2^n elementov. Prazna množica je disjunktna z vsako množico iz $2^{\mathcal{M}}$ (tudi sama s seboj). Izberimo poljuben $i \in \mathcal{M}$. V potenčni množici je natanko $\binom{n}{i}$ množic z i elementi.

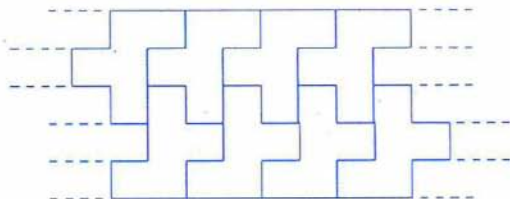
Naj bo $A \in 2^{\mathcal{M}}$ množica z i elementi. Ta je disjunktna s prazno množico, z $n-i$ množicami s po enim elementom, z $\binom{n-1}{2}$ množicami s po dvema elementoma, ..., z $\binom{n-i}{n-i}$ množicami s po $n-i$ elementi, skupaj torej z 2^{n-i} množicami. Urejenih parov (A, B) , kjer je A množica z i elementi, je zato $\binom{n}{i} \cdot 2^{n-i}$, vseh iskanih urejenih parov pa

$$2^n + \sum_{k=1}^n \binom{n}{k} \cdot 2^{n-k} = \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} \cdot 2^{n-k} = (2+1)^n = 3^n.$$

KVALIFIKACIJE ZA ZVEZNO TEKMOVANJE SREDNJE-ŠOLCEV IZ MATEMATIKE – Rešitve s str. 174

Prvi letnik

1. Najprej prekrijemo neskončni trak, kot kaže skica:



Nato pa s temi trakovi prekrijemo celo ravnino.

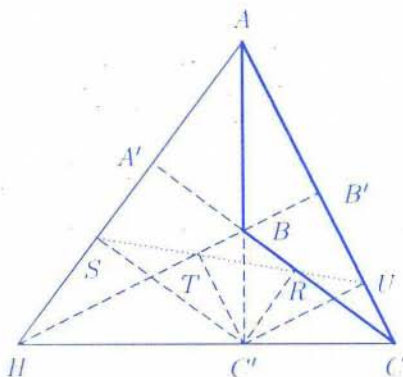
2. Pri lihih n ni kaj dokazovati, saj lahko binom $s^n + 1$ razstavimo kot $s^n + 1 = (s + 1)(s^{n-1} - s^{n-2} + \dots + 1)$. Pri sodih n pa predpostavimo, da števili nista tuji. Skupni delitelj $d > 1$ je seveda liho število, ki deli tudi njuno razliko

$$s^n + 1 - (s + 1) = s(s^{n-1} - 1) = s(s - 1)(s^{n-2} + s^{n-3} + \dots + 1).$$

Ker je d tuj številoma s in $s - 1$, mora deliti zadnji faktor. Ko člene v tem faktorju grupiramo $s^{n-2} + s^{n-3} + \dots + 1 = s^{n-2} + (s^{n-3} + \dots + s^2) + (s + 1)$, opazimo, da smo prišli do protislovja, saj bi moral d deliti s^{n-2} , kar pa ni mogoče, saj sta d in s tuji števili.

3. Označimo oglišča trikotnika z A , B in C , nožišča višin z A' , B' in C' ter višinsko točko s H . Izberimo višino na stranico AB . Projekcije točke C' na stranici BC oziroma AC ter na višini iz oglišča A oziroma B označimo zaporedoma z R , U , S in T . Ločimo nekaj primerov :

- (a) Če je trikotnik $\triangle ABC$ pravo-kotni, je trditev izpolnjena trivialno. Če je kot γ pravi, velja namreč $R = T$ in $S = U$, pri $\alpha = \pi/2$ je



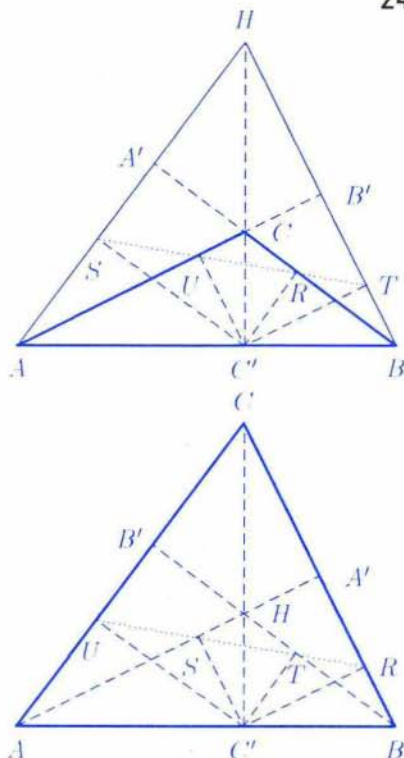
$U = S = T$ in pri $\beta = \pi/2$ je $R = S = T$.

(b) Primer, ko je α top, je analogen primeru (c).

(c) Naj bo β topi kot.

V štirikotniku $A'HC'B$ sta kota pri A' in C' prava, zato sta kota pri B in H suplementarna in je kot $\angle C'HA$ oster. Trikotnik $\triangle AHC$ je ostrokoten, za tak primer bomo kolinearost točk S, T, R, U dokazali v (e).

(d) Naj bo γ topi kot. V štirikotniku $A'HB'C$ sta kota pri A' in B' prava, zato sta kota pri C in H suplementarna in je kot $\angle AHB$ oster. Kolinearnost točk S, U, R in T bomo dokazali v (e), saj je $\triangle ABH$ ostrokoten.



(e) Naj bo trikotnik $\triangle ABC$ ostrokoten. S Talesovim izrekom (obodni kot nad premerom kroga je pravi) ugotovimo, da so štirikotniki $AC'SU$, $BRTC'$ in $C'THS$ tetivni. V štirikotniku $AC'SU$ je kot α enak kotu med nosilkama stranic US in SC' . V $C'THS$ velja: $\angle C'ST = \angle C'HT = \angle BAC = \alpha$. (Prva enakost velja zaradi tetivnosti štirikotnika, druga pa zaradi podobnosti trikotnikov $\triangle ABB'$ in $\triangle HBC'$). To pa že pomeni, da leži točka T na nosilki tetive US . Povsem podobno razmislimo še, da leži točka S na nosilki tetive TR , točke U, S, T in R so kolinearne.

Drugi letnik

1. Iz razcepa $1991 = 11 \cdot 181$ sledi, da je najmanjše tako število $2^{180} \cdot 3^{10}$. Ocenimo $2^{180} \cdot 3^{10} = 8^{60} \cdot 9^5 < 10^{60} \cdot 10^5 = 10^{65}$. Število ima torej manj kot 66 števk.

2. Z upoštevanjem neenakosti $A + B \geq 2\sqrt{AB}$, ki velja za vsa pozitivna

števila A in B , izpeljemo: $\sqrt{\frac{a+b}{c}} + \sqrt{\frac{b+c}{a}} + \sqrt{\frac{c+a}{b}} \geq \sqrt{2}(\sqrt{\frac{ab}{c}} + \sqrt{\frac{bc}{a}} + \sqrt{\frac{ca}{b}})$. Upoštevamo še neenakost med aritmetično in geometrično sredino, pa dobimo $\sqrt{\frac{ab}{c}} + \sqrt{\frac{bc}{a}} + \sqrt{\frac{ca}{b}} \geq 3 \cdot \sqrt[3]{\frac{ab}{c} \cdot \frac{bc}{a} \cdot \frac{ca}{b}} = 3$.

3. Glej nalogo 3 za prvi letnik.

Tretji in četrti letnik

1. Pišimo $a_k = \operatorname{tg} \varphi_k$. Rekurzivno relacijo za a_k zapišemo kot $\operatorname{tg} \varphi_k = \operatorname{tg} 2\varphi_{k-1}$, kar nam da eno rešitev $\varphi_k = 2\varphi_{k-1}$. Zahtevo $a_{1991} = 1$ izpolni že $\varphi_{1991} = \frac{\pi}{4}$, kar pomeni $\varphi_0 = \frac{\pi}{4} \cdot 2^{-1991}$. Začetni člen $a_0 = \operatorname{tg}(\frac{\pi}{4} \cdot 2^{-1991})$ torej reši nalogo.

2. S pomočjo vektorjev enostavno izpeljemo zvezo $4t_c^2 = 2a^2 + 2b^2 - c^2$ in njej podobni zvezi $4t_a^2 = 2b^2 + 2c^2 - a^2$ ter $4t_b^2 = 2c^2 + 2a^2 - b^2$. Če kvadrati težiščnic trikotnika sestavljajo aritmetično zaporedje, velja $2t_b^2 = t_a^2 + t_c^2$. Upoštevajmo izraze za t_a , t_b in t_c , pa dobimo $2b^2 = a^2 + c^2$, ki pove, da kvadrati stranic trikotnika sestavljajo aritmetično zaporedje. Podobno uženemo tudi drugo smer dokaza.

3. V funkcijsko enačbo vstavimo $wz + a$ namesto z in dobimo $f(wz + a) + f(w^2z + wa + a) = g(wz + a)$, v to pa še enkrat vstavimo $wz + a$ namesto z in upoštevajmo $w^2 + w + 1 = 0$, pa dobimo $f(z) + f(w^2z + wa + a) = g(w^2z + wz + a)$. Iz tako dobljenega sistema treh enačb lahko enolično izrazimo $f(z) = \frac{g(z) + g(w^2z + wa + a) - g(wz + a)}{2}$.

Matjaž Željko

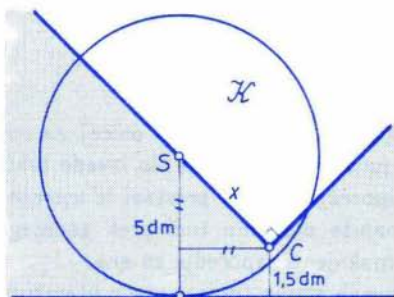
SOD – Rešitev s str. 129

Osnovna ploskev soda je krog $\mathcal{K}$ s polmerom 5dm. Ko sod drsi ob stopnici, se središče S kroga $\mathcal{K}$ giblje vzporedno robu stopnice. Dokler je S na trdnih tleh, se sod prav gotovo ne prevrne v bazen.

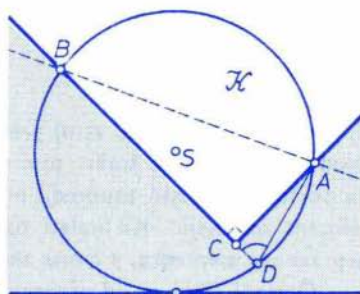
Kaj se zgodi, ko pride S na rob bazena? S slike 1 izračunajmo razdaljo $x = |SC|$ od središča S do vogala C na robu bazena. Po Pitagorovem izreku dobimo

$$x^2 = 2 \cdot (5\text{dm} - 1.5\text{dm})^2 = 24.5\text{dm}^2,$$

torej je $x < 5\text{dm}$. Vogal C torej leži v K in zato s sodom ni težav.



Slika 1



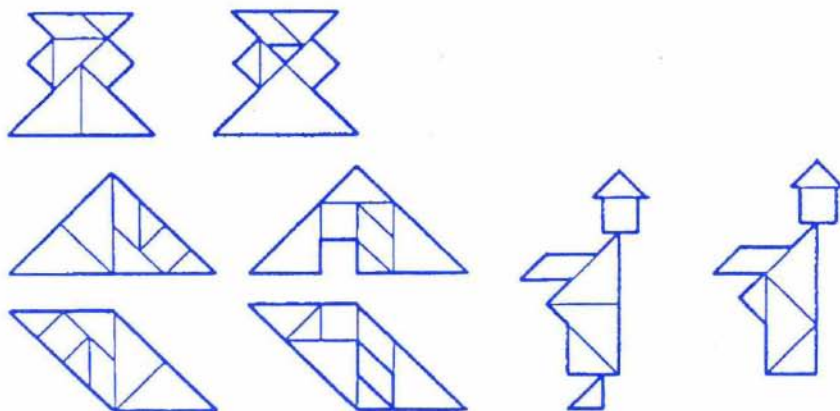
Slika 2

Nadaljujmo z drsenjem soda ob stopnici. Točka S zdaj ni več na trdnih tleh, vogal C pa leži znotraj kroga K . Ta seka rob bazena v dveh točkah, ki ju označimo z A in B . Položaj kaže slika 2, iz katere razberemo, da ležita S in C na istem bregu premice AB v ravnini kroga K (kot ADB je namreč oster). Od tod sledi, da je S znotraj trikotnika ABC , zato se sod tudi v tem primeru ne prevrne v bazen.

Boris Lavrič

TANGRAMSKI PARADOKSI – Rešitev iz P-3, III

Seveda je bila beseda paradoks uporabljena predvsem z namenom, da zavede:



Vilko Domajnko

15. REPUBLIŠKO SREDNJEŠOLSKO TEKMOVANJE IZ RAČUNALNIŠTVA – Rešitve s str. 86

1. skupina

1. Program za opisani stroj prestavi elemente traku (ničle in enice) za eno mesto proti začetku traku, prvi element pa zavrže. To opravilo izvede tako, da poišče meje med zaporedji ničel in zaporedji enic ter prestavi le ustrezen element na meji. Ko naleti na "P", napiše praznino tudi prek zadnjega nepravilnega elementa, s čimer skrajša pomaknjeno zaporedje za ena.

Opisani stroj se od pravega Turingovega stroja (opisanega v literaturi) razlikuje v tem, da ima Turingov stroj neskončen trak v obe smeri. Turingov stroj nima pomnilnika (razen traku), krmili ga avtomat, ki lahko shrani informacijo le kot stanje avtomata. Zato tudi podan program ne uporablja nobene spremenljivke. Bite, ki jih predstavlja, začasno shrani kot stanje programa.

2.

```

program Vracanje(input,output);
type
  ukazT = (Vrni,Ponovi,Vleci,Konec);
  potezaT = record ... end;

procedure BeriUkaz(var ukaz: ukazT; var poteza: potezaT); external;
procedure IgrajPotezo(poteza: potezaT); external;
procedure VrniPotezo(poteza: potezaT); external;

const
  potezaM = 10; { število shranjenih potez }
var
  poteza: array [1..potezaM] of potezaT; { shranjene poteze }
  potezaL: integer; { število shranjenih potez }
  zadnja: integer; { številka zadnje veljavne poteze v shrambi }
  { Pri vlečenju novih potez velja zadnja=potezaL, }
  { sicer pa se lahko spremenljivka 'zadnja' vrača }
  { po shranjenih potezah. }
  ukaz: ukazT; { šahistov ukaz }
  p: potezaT; { Šahistova poteza, če je ukaz=VLECI. }
  ii: integer;

begin
  potezaL:= 0; zadnja:= 0;
  repeat
    BeriUkaz(ukaz,p);
    case ukaz of
      Vrni:
        if zadnja > 0 then
          begin VrniPotezo(poteza[zadnja]); zadnja:= zadnja-1 end;
    
```

```

Ponovi:
  if zadnja < potezaL then
    begin zadnja := zadnja + 1; IgrajPotezo(poteza[zadnja]) end;
Vleci:
  begin
    potezaL := zadnja;
    { Zavržemo morebitne še shranjene mlajše poteze. }
    if potezaL < potezaM then potezaL := potezaL + 1
    { V shrambi je prostor. }
    else begin
      { Ni prostora, zavržemo najstarejšo shranjeno potezo. }
      for ii := 2 to potezaL do poteza[ii-1] := poteza[ii];
    end; {if}
    poteza[potezaL] := p; zadnja := potezaL; IgrajPotezo(p);
  end;
  Konec: {}
end; {case}
until ukaz = Konec;
end.

```

3.

```

program Izpis(input, output);
type
  pisavaT = (NORMALNO, NAGNJENO, KREPKO);
  besedaT = packed array [1..256] of char;
var
  c: char;
  beseda: besedaT;
  besedaL: integer;
  ii: integer;
  niz, komentar, rez: boolean;

procedure PreberiZnak(var c: char); external;
procedure IzpisiZnak(c: char); external;
procedure SpremeniPisavo(pisava: pisavaT); external;
function RezervBeseda(b: besedaT; bL: integer): boolean; external;

begin {Izpis}
  besedaL := 0; niz := false; komentar := false; SpremeniPisavo(NORMALNO);
  while not Eof do begin
    PreberiZnak(c);
    if (besedaL > 0) and not (c in ['A'..'Z', 'a'..'z', '0'..'9']) then begin
      rez := RezervBeseda(beseda, besedaL);
      if rez then SpremeniPisavo(KREPKO);
      for ii := 1 to besedaL do IzpisiZnak(beseda[ii]);
      if rez then SpremeniPisavo(NORMALNO);
      besedaL := 0;
    end; {if}
    if niz then
      begin if c = ' ' then niz := false; IzpisiZnak(c) end
    else if komentar then

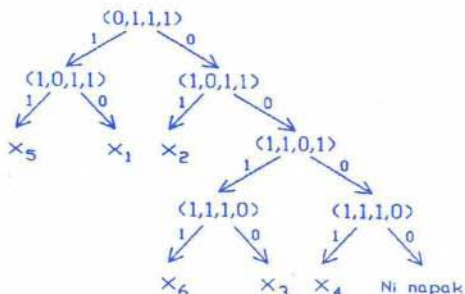
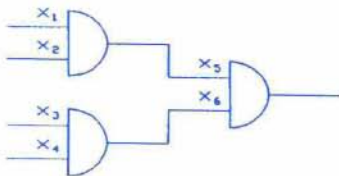
```

```

begin
  if c="" then
    begin komentar:= false; SpremeniPisavo(NORMALNO); end;
    IzpisiZnak(c);
  end
  else if c=" " then
    begin
      IzpisiZnak(c); komentar:= true; SpremeniPisavo(NAGNJENO)
    end
  else if c="." then
    begin IzpisiZnak(c); niz:= true end
  else if c in ['A'..'Z','a'..'z','0'..'9'] then
    begin besedaL:= besedaL+1; beseda[besedaL]:= c end
  else IzpisiZnak(c);
end; {while}
end. {Izpis}

```

4. Minimalno število poskusnih glasovanj je štiri. V nalogi se skriva testiranje logičnega (digitalnega) vezja, sestavljenega iz treh IN vrat (kot kaže slika), kjer se je na enih od vrat en vhodni signal "zataknil" na 1. Eden od postopkov testiranja je prikazan na odločitvenem drevesu, kjer so notranja vozlišča testni vektorji, ob povezavah so vrednosti logične funkcije pri danem testnem vektorju, listi pa predstavljajo pokvarjen vhod. Odločitveno drevo dobimo lahko iz pravilnostnih tabel za vseh šest logičnih funkcij. Ta opisujejo možna vezja z enim vhodom, ki se je "zataknil" na 1.



2. skupina

1. Program izpiše, v koliko istoležnih bitih se razlikujeta dvojiška zapisa prebranih števil.

Najprej izračuna *ekskluzivni ali* (XOR) med številoma a in b (na nekoliko neroden način) in ga shrani v b . S tem v b postavi bite na tistih mestih, kjer se a in b razlikujeta. Z drugo zanko prešteje vse postavljene bite in njihovo število shrani v spremenljivki ham . Temu številu pravimo tudi Hammingova

razdalja dveh števil.

2. Program reši problem tako, da se premika po obeh vrstah hkrati in za vsak rob pravokotnika izračuna razdaljo do pravokotnika v drugi vrsti. Iskana najmanjša razdalja med osnovnicama je enaka največji od teh medsebojnih razdalj.

```

const vrstaM = 999;
type
  skatlaT = record visina, globina, sirina: integer end;
  vrstaT = array [1..vrstaM] of skatlaT;

function NajmanjsaRazdalja
  (var a: vrstaT; aL: integer;
   var b: vrstaT; bL: integer): integer;
  { Funkcija vrne najmanjšo razdaljo med sosednjima vrstama }
  { pravokotnikov, pri kateri se pravokotniki obeh vrstic }
  { še ne prekrivajo med seboj. }
var
  konec: boolean;
  ia, ib: 1..vrstaM;
  { indeksa trenutno pregledovanega pravokotnika v obeh vrsticah }
  sirinaA, sirinaB: integer;      { doslej pregledani dolžini obeh vrstic }
  staraSirinaA: integer;
  razdalja: integer;
  { globina gornjega pravokotnika + višina spodnjega v trenutni točki }
  dosedanjaRazdalja: integer;      { največja razdalja doslej }
begin
  ia := 1; ib := 1; konec := false;
  sirinaA := a[ia].sirina; sirinaB := b[ib].sirina;
  dosedanjaRazdalja := a[ia].globina + b[ib].visina;
  repeat
    staraSirinaA := sirinaA;
    if sirinaA <= sirinaB then begin
      if ia >= aL then konec := true
      else begin ia := ia + 1; sirinaA := sirinaA + a[ia].sirina end;
    end; {if}
    if sirinaB <= staraSirinaA then begin
      if ib >= bL then konec := true
      else begin ib := ib + 1; sirinaB := sirinaB + b[ib].sirina end;
    end; {if}
    if not konec then begin
      razdalja := a[ia].globina + b[ib].visina;
      if razdalja > dosedanjaRazdalja then
        dosedanjaRazdalja := razdalja;
    end; {if}
  until konec;
  NajmanjsaRazdalja := dosedanjaRazdalja;
end; {NajmanjsaRazdalja}

```

Zanimiv problem nastane, če dopustimo še premikanje vrst levo in desno. V nekaterih primerih je potem mogoče vrstici še bolj približati. Rešitev tako razširjenega problema puščamo v razmislek radovednemu bralcu.

3.

```

type znakT = array [1..7] of boolean;
var oblikeZnakov: array ['0'..'9'] of znakT;

function DolociZnak(zn: znakT): char;
    { Vrne najbolj podoben znak podani obliki }
    { ali pa presledek, če najde več enakovrednih kandidatov. }
var
    c,najblizjiZnak: char;
    razl,minRazl: integer;

function Razlika(var zn1,zn2: znakT): integer;
    { Funkcija vrne število segmentov, }
    { v katerih se razlikujeta dva znaka. }
var ii,razl: integer;
begin {Razlika}
    razl:= 0;
    for ii:= 1 to 7 do
        begin if zn1[ii]<>zn2[ii] then razl:= razl+1 end;
    Razlika:= razl;
end; {Razlika}

begin {DolociZnak}
    najblizjiZnak:= ' '; minRazl:= 8;
    for c:= '0' to '9' do begin
        razl:= Razlika(zn,oblikeZnakov[c]);
        if razl<minRazl then
            begin minRazl:= razl; najblizjiZnak:= c end
        else if razl=minRazl then
            najblizjiZnak:= ' ';
    end; {for}
    DolociZnak:= najblizjiZnak;
end; {DolociZnak}

```

4. Naloga ima seveda precej bistveno različnih rešitev. Ena od možnih rešitev, ki je podobna v praksi znanemu protokolu SDLC ali HDLC, je na kratko naslednja:

Za začetni znak si izberemo npr. zaporedje bitov 01111110. Pred vsakim paketom oddamo najprej ta znak, bit 1, ki označuje, da gre za veljaven paket, nato oddajamo zaporedne bite paketa in na koncu spet ta znak. Med paketi oddajamo same ničle. Če se v oddanem zaporedju bitov v paketu pojavi zaporedje bitov 0111111, pred naslednjim bitom oddamo vrinjeni bit 1, nato pa nadaljujemo z oddajanjem podatkovnih bitov.

Ko na sprejemni strani sprejmemo zaporedje 0111111, počakamo še na naslednji bit. Če je ta bit 0, nam naslednji bit pove, ali gre za začetek novega paketa (1) ali pa je to konec prejšnjega paketa (0). Če je bil naslednji (osmi) bit 1, ga zavržemo in sprejemamo nadaljevanje paketa.

Za ta postopek potrebujemo na sprejemni strani samo nekaj bitov pomnilnika (če začnemo sprejemati začetni znak, ga moramo hraniti, dokler ne ugotovimo, ali gre za pravi začetni znak, ali pa bo imel vrinjeno enico). Šele ko sprejmemo vrinjeno enico, smemo zadržane bite zares razglasiti za sprejete podatke.

Učinkovitost tega postopka (razmerje med količino informacijskih bitov in skupno količino prenesenih bitov) pri paketih dolžine n bitov in povsem slučajno porazdeljenih podatkovnih bitih je približno $n/(17 + n + n/256) = 256 * n / (257 * n + 17)$. Pri $n = 1000$ je to 97.95% in pri $n=10000$ že 99.44%.

Če bi si izbrali začetni znak drugačne dolžine, bi lahko učinkovitost pri daljših blokih še poljubno povečali, seveda pa bi zato potrebovali nekaj več bitov pomnilnika na sprejemni strani.

Zahteva o majhni porabi pomnilnika v tej nalogi ni umetna, saj tak prenos delajo običajni sinhroni vmesniki, kjer pomnilnika navadno res nimamo veliko. Zaporedje bitov v našem primeru je navadno kar zaporedje bytov (čeprav ne nujno), zato je izbira osembitnega začetnega znaka zelo naravna. Hkrati nam pakiranje v osembitne byte na sprejemni strani predstavlja natanko tisto zakasnitev pri sprejemu, ki je potrebna, da se lahko odločimo, ali smo sprejeli začetni znak, ali pa smo sprejeli znak z vrinjeno enico. Po vrivanju enic ima tak postopek ime "bit stuffing".

3. skupina

1. Podprogram deli prvi parameter z drugim. V resnici oponaša pisno deljenje. Poglejmo ga še enkrat, tokrat z ustreznimi komentarji.

```
function KajStorim(a,b: byte): byte;
    { Funkcija vrne kvocient a/b dveh nepredznačenih 8-bitnih števil. }
var
    stevec: byte;
    rezultat: byte;
    premik: byte;
begin
    rezultat:= 0; premik:= 0;
    for stevec:= 1 to 8 do begin
        premik:= 2*premik + (a div 128);
        { Zgornji bit iz a dodamo v premik. }
```

```

a:= (a mod 128) * 2;           { Premaknemo bite v levo. }
rezultat:= 2*rezultat;        { V rezultat dodamo v spodnji bit ničlo. }
if premik >= b then begin
    premik:= premik - b;       { Če je dobljeno število že večje od delitelja. }
    rezultat:= rezultat+1;     { potem ga zmanjšamo za delitelj. }
                                { Ničlo v rezultatu spremenimo v ena. }
end; { if }
end; { for }
KajStorim:= rezultat;
end; { KajStorim }

```

Na tak način lahko realiziramo deljenje na procesorjih, ki ne znajo deliti.

2. Pravilna rešitev naloge predstavlja centralni del sintaktičnega analizatorja za prolog. Razlika je le v tem, da prolog dopušča poleg infiksni operatorjev (med argumentoma) tudi prefiksne (pred argumentom) in postfiksne (za argumentom). En operator je lahko hkrati vseh treh tipov in različne prioritete za vsak tip.

```

const
    MxPri = 1200;
type
    SymDef = (sClen,sOp,sKonec);
    PtExpDef = ^ExpDef;
    ExpDef =
        record
            case Sym: SymDef of
                sClen: (Val: char);
                sOp: (Op: char; LExp,RExp: PtExpDef);
            end;
var
    Sym: SymDef;
    Ch: char;
    OpPri: integer;

    procedure Error(n: integer); external;
    procedure GetSym; external;
    procedure Term(MxOpPri: integer; var Root: PtExpDef);
var
    MnOpPri: integer;
    OldRoot: PtExpDef;
begin { Term }
    if Sym <> sClen then Error(2);
    new(Root); Root^.Sym:= Sym; Root^.Val:= Ch;
    MnOpPri:= 0; GetSym;
    while (Sym=sOp) and (OpPri<=MxOpPri) and (OpPri>=MnOpPri) do
        begin
            OldRoot:= Root; new(Root); Root^.Sym:= Sym;
            Root^.Op:= Ch; Root^.LExp:= OldRoot; MnOpPri:= OpPri;
            GetSym; Term(MnOpPri,Root^.RExp);
        end
end

```

```

    end; {while}
end; {Term}

procedure WrtTerm(Root: PtExpDef);
begin
    if Root^.Sym = sClen then write(Root^.Val)
    else begin
        write('('); WrtTerm(Root^.LExp); write(Root^.Op);
        WrtTerm(Root^.RExp); write(')');
    end; {if}
end; {WrtTerm}

procedure Parse;
var Root: PtExpDef;
begin
    GetSym; Term(MxPri,Root);
    if Sym <> sKonec then Error(3);
    WrtTerm(Root);
end; {Parse}

```

3.

```

type Niz = packed array [1..10] of char;

function Ujemanje(N,V: Niz; Nd,Vd: integer): boolean;

function Poskus(Ni,Vi: integer): boolean;
var Uspesno,Konec: boolean;
begin
    Konec:= false;
    repeat
        if Vi>Vd then
            begin Konec:= true; Poskus:= Ni>Nd end
        else if V[Vi] = '*' then
            begin
                Ni:= Ni-1;
                repeat
                    Ni:= Ni+1; Uspesno:= Poskus(Ni,Vi+1);
                until Uspesno or (Ni>Nd);
                Konec:= true; Poskus:= Uspesno;
            end
        else if (Ni<=Nd) and ((V[Vi]='?') or (V[Vi]=N[Ni])) then
            begin Ni:= Ni+1; Vi:= Vi+1 end
        else
            begin Konec:= true; Poskus:= false end;
    until Konec;
end; {Poskus}

begin
    Ujemanje:= Poskus(1,1);
end; {Ujemanje}

```

4. Pri hitrosti 1 Mb/s in 256 znakov dolgih blokih potrebujemo približno 0.002s za sam prenos podatkov enega bloka, poleg tega pa še dvakrat po 1/4 s čakalnega časa, da oddajni računalnik prejme potrditev sprejema bloka od sprejemnika. To pomeni, da je izkoristek komunikacijske linije manj kot pol odstotka, zato opisani preprosti protokol ni primeren za komunikacijo na zelo velike razdalje.

Izkoristek bi lahko povečali z uporabo daljših blokov, vendar dolžine bloka ne smemo poljubno podaljševati zaradi verjetnosti napak (če se pojavi napaka kjerkoli v bloku, je treba ponoviti prenos celotnega bloka).

Boljše je, da ne čakamo potrditve vsakega bloka posebej, ampak nadaljujemo s pošiljanjem zaporednih oštevilčenih blokov, obenem pa si poslane a še ne potrjene bloke shranimo za primer, da bi jih bilo treba zaradi komunikacijske napake ponovno poslati.

Sprejemni računalnik pošlje ob potrditvi uspešnega prejema zaporedno številko bloka, ki ga je uspešno prejel. Tako lahko oddajni računalnik sprosti pomnilnik za že potrjene bloke.

Če sprejemni računalnik naleti na napačen blok ali ugotovi, da številke blokov niso zaporedne (kakšen blok manjka), pošlje zahtevo za ponovitev vseh blokov od prvega napačnega dalje. Nato čaka na ponovitev zahtevanega bloka in njegovih naslednikov — morebitne bloke, ki še prihajajo za napačnim blokom, zavrže. Po ponovnem sprejemu zahtevanega bloka lahko s komunikacijo normalno nadaljuje.

S skrbnejšim protokolom bi lahko zahtevali ponovitev le napačnih blokov in izkoristili morebitne vmesne pravilne bloke, vendar zaporednost številke blokov olajša delo in omogoča odkrivanje manjkajočih blokov brez dodatnega časovnega nadzora.

V praksi moramo dopustiti možnost, da oddajni računalnik pošilja bloke hitreje, kot jih je sprejemni računalnik sposoben obdelovati. Zato je treba skupaj s potrditvami sprejema pošiljati tudi število paketov, ki jih je sprejemnik še sposoben sprejeti (ima zanje dovolj pomnilnika). Temu številu pravimo 'kredit'. Oddajnik mora tedaj skrbeti, da nikoli ne pošlje več paketov, kot ima kredita.

Običajno moramo dopustiti tudi možnost, da se kakšna potrditev izgubi, ali da je zveza začasno prekinjena. Da prebrodimo to vrsto težav, je treba protokol dopolniti z največjimi čakalnimi časi na posamezen dogodek in z akcijami, ki so potrebne ob prekoračitvi teh časovnih omejitev.

Optimalna dolžina blokov je odvisna od zanesljivosti prenosa in dolžine dodatne informacije, ki je pridana vsakemu bloku. Če je verjetnost napake velika, potem moramo uporabljati kratke bloke, da vsaj nekateri ostanejo

nepoškodovani. Pri majhni verjetnosti napake so primernejši daljši bloki, da pošiljanje dodatne informacije ni tako pogosto.

Primož Gabrijelčič

Klavžar S., ZVEZDNE BESEDE ali WordStar PO DOMAČE DMFA Slovenije, Zavod za šolstvo in šport, Ljubljana 1991, 60 str. (Račkova knjižnica; 6)

Veliko pišete? Ste že izurjeni ali potrebujete psa slednika, da vam pomaga pri iskanju črk?

Danes so res tudi pisalni stroji že izpopolnjeni, vendar računalnika z urejevalnikom besedil ne morejo ujeti. Ko pišemo s pisalnim strojem, lahko kaj dodajamo ali popravimo le s ponovnim tipkanjem. Dve skoraj enaki pismi je potrebno napisati dvakrat, če pišemo na pisalni stroj, z uporabo urejevalnika besedil pa le enkrat.

Osnovne možnosti urejevalnika so:

- pisanje in spreminjanje besedila (editiranje),
- oblikovanje besedila za tiskanje,
- tiskanje besedila na papir,
- iskanje in zamenjava znakov,
- priprava serijskih dopisov,
- avtomatska izdelava kazala,
- črkovalec in slovar sinonimov za angleški jezik
- in še bi lahko naštevali.

Med najbolj znane urejevalnike besedil sodijo WORDSTAR, WORD, WORDPERFECT, WORD FOR WINDOWS. Pri nas je najbolj razširjen WORDSTAR.

Lahko rečemo, da je na vseh računalnikih, poleg samega operacijskega sistema DOS, nameščen tudi kak urejevalnik besedil. Zato smo v Račkovi knjižnici težko čakali izid knjižice, ki bi pokrila to področje. Težke naloge se je lotil Sandi Klavžar, ki je knjižici dal prijeten naslov.

Preberite si jo. Pri pisanju pa veliko uspeha!

Mojca Lokar

