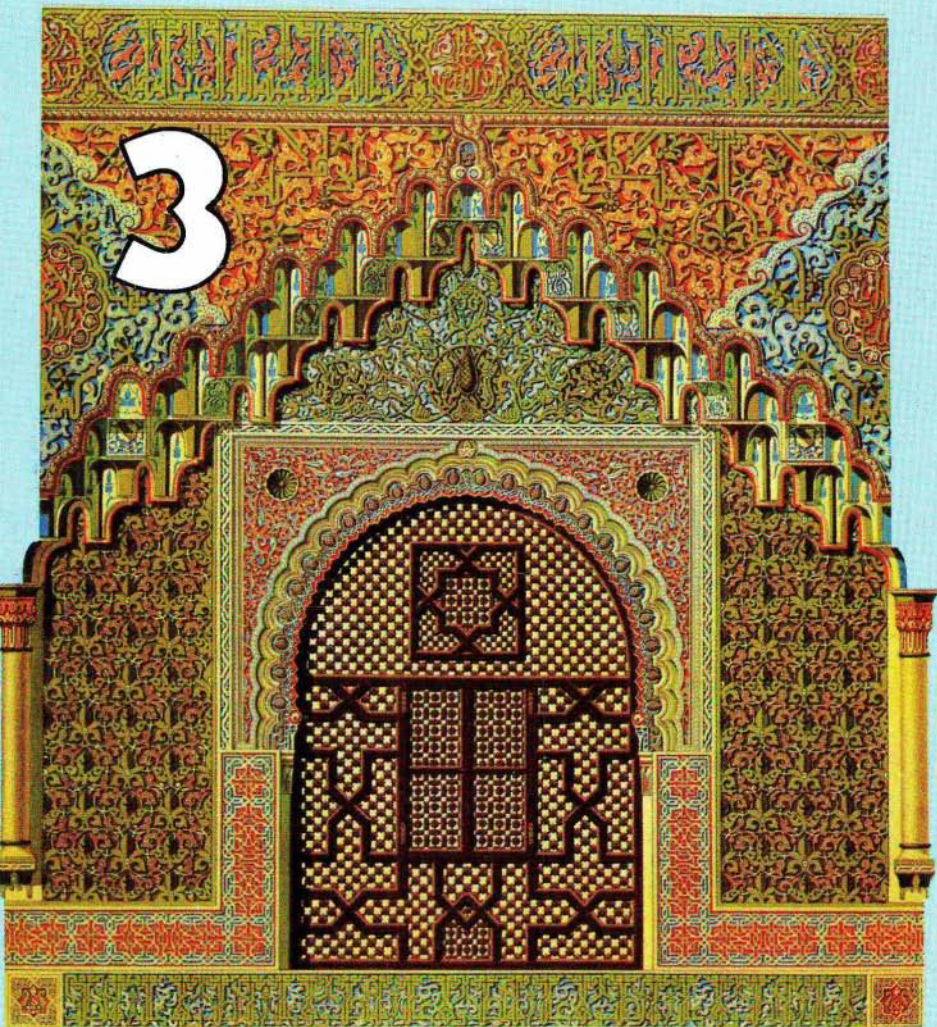


PRESEK

3

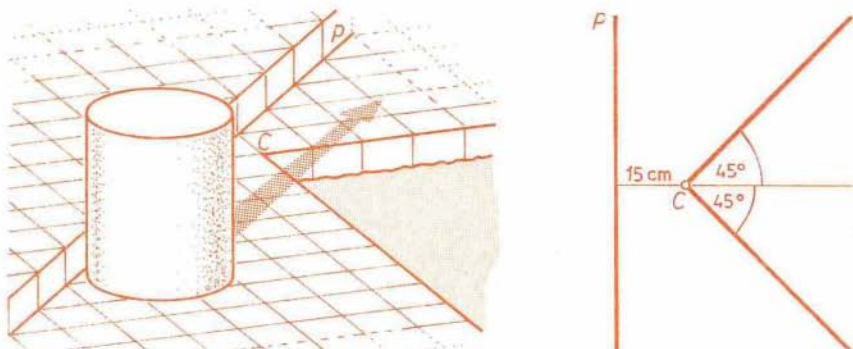


VSEBINA

MATEMATIKA	Ornamenti na traku (Milena Strnad).....	130-136
	Ob stoletnici smrti Sonje Kovalevske (Marija Vencelj) ...	138-142
FIZIKA	Izračun izjemno velikih padavin (Zdravko Petkovšek, Tomaž Vrhovec).....	144-152
RAČUNALNIŠTVO	Razpoznavanje cifer - bralni pomnilnik in nevronska omrežja (Veselko Guštin)	154-158
	Uganki za kratek čas (Marjan Jerman).....	190-192
ASTRONOMIJA	Zanimivosti o Ulugbekovi zvezdarni (Marijan Prosén) ...	178-181
NOVE KNJIGE	Naše nebo in Zemlja 1992	164
	Felda D. in dr., Rešene naloge iz matematike s šolskih in izbirnih tekmovanj 1975-1991 (Gorazd Lešnjak)	168
NALOGE	Sod (Boris Lavrič)	129
	Tehtanje z verigo (Marija Vencelj)	165
	Tetivni osemnajstkotnik (Boris Lavrič)	165
	Sistemi linearnih enačb (Izbral Vilko Domajnko)	166-168
TEKMOVANJA	27. republiško tekmovanje osnovnošolcev iz matematike (Aleksander Potočnik)	169-171
	35. republiško tekmovanje srednješolcev iz matematike (Jaka Erker, Darjo Felda)	172-176
	7. šolsko in 17. izbirno tekmovanje srednješolcev iz matematike (Darjo Felda)	181
RAZVEDRILO	Številska križanka (D.M.Milošević, prev. Damjan Kobal). 188-189	
	Tangramski paradoksi (Vilko Domajnko)	III
REŠITVE NALOG	Kvadratna sestavljanke - s str. 83 (Marija Vencelj)	136-137
	Dva neortodoksna kriptograma - s str. 101 (Mirko Dobovišek)	142
	Jezerce z očiščkom - s str. 65 (Boris Lavrič)	143
	$\lg \alpha / 2 + \lg \beta / 2 + \lg \gamma / 2 = 2$ - s str. 121. Racionalni sinusi kotov v trikotniku - s str. 117 (Ivan Vidav) ..	153, 159
	Turnir - s str. 100 (Marija Vencelj)	159
	Strela - s str. 321, P-XVIII/6 (Boris Lavrič)	160-164
	Dve o igrah - s str. 71 (Karas)	171
	Račun z znaki - s str. 110 (Martin Juvan)	176
	Vriši pravokotnik - s str. 101 (Marija Vencelj)	176-177
	Skozi vse točke - s str. 71 (Bojana Dvoržak)	184
	26. občinsko tekmovanje osnovnošolcev iz matematike - s str. 84 (Aleksander Potočnik)	182-184
	Mojster R.A. skrje šahovsko figuro v žep - s str. 111 (Marko Lovrečič Saražin)	185-187
	Križanka Nobelovi nagajenci iz fizike I. - s str. 96 (Marko Bokalič)	188
	Zloženka - s str. 115 (Stavra V.Radojkovič)	192
NA OVITKU	Slika 1a, b, c in slika 3 k članku na str. 130	I, IV

SOD

Valjasti sod s premerom 1m stoji pokončno na vodoravnih tleh. Podlaga je dovolj gladka, da sod zlahka drsi po njej, sod pa pretežak, da bi ga prevrnili na bok. Radi bi ga spravili z ene strani bazena na drugo, vendar nas ovira stopnica ob vogalu bazena, ki je od njega oddaljena 15cm in postavljena kot kaže slika. Bomo uspeli to storiti le z drsenjem sode po osnovnici in brez podpore s strani?



Boris Lavrič

PRESEK

list za mlade matematike, fizike, astronome in računalnikarje
19. letnik, šolsko leto 1991/92, številka 3, strani 129 – 192

UREDNIŠKI ODBOR: Vladimir Batagelj, Tanja Bečan (jezikovni pregled), Dušica Boben (oblikovanje teksta), Vilko Domajnko, Darjo Felda (tekmovanja), Bojan Golli, Marjan Hribar, Martin Juvan (računalništvo), Sandi Klavžar, Edvard Kramar, Boris Lavrič, Andrej Likar (fizika), Matija Lokar, Franci Oblak, Peter Petek, Marko Petkovšek (glavni urednik), Pavla Ranzinger (astronomija), Marjan Smerke (svetovalec za fotografijo), Miha Štalec (risbe), Ciril Velkoverh (urednik, nove knjige, novice), Marija Vencelj (matematika, odgovorna urednica).

Dopise pošiljajte in list naročajte na naslov: Društvo matematikov, fizikov in astronomov Slovenije - Podružnica Ljubljana - Komisija za tisk, Presek, Jadranska c. 19, 61111 Ljubljana, p.p. 64, tel. (061) 265-061/53, št. žiro računa 50101-678-47233. Naročnina za šolsko leto 1991/92, vplačana do 15.1.1992, je za posamezne naročnike **400 SLT**, za skupinska naročila šol **300 SLT**, posamezna številka **75 SLT (60 SLT)**, za tujino 12000 LIT.

List sofinancirajo MZT, MŠŠ in MK

Ofset tisk DELO - Tiskarna, Ljubljana

Tekst je postavljen z računalnikom SLIM 286, ALTECH, Ljubljana

© 1991 Društvo matematikov, fizikov in astronomov Slovenije – 1091

ORNAMENTI NA TRAKU

Kdo še ni občudoval lepih ornamentov na blagu, preprogah, tapetah, freskah? Kdo ne pozna čudovitih ornamentov starih Egipčanov, Inkov, Grkov, Kitajcev, s katerimi so okrasili razne uporabne in okrasne predmete, grobnice, svetišča (slika 1 na IV. strani ovitka)? Največje mojstrstvo v ustvarjanju ornamentov pa so nedvomno dosegli arabski umetniki. Ker jim vera prepoveduje upodabljati boga in dogodke iz življenja, so "božansko neskončnost" izražali z abstraktnimi ornamentami v obliki prepletajočih se stiliziranih listov trte, ki jim pravimo *arabeske* (slika 2). Čistost linij še poudarijo skopo in skrbno izbrane barve. Največ je modre barve, ki simbolizira neskončnost, in zlate, s katero slavijo Alahovo ime. Človeku zastaja dih, ko občuduje umetniško ubranost mošeje Doma svete skale v Jeruzalemu, Modre mošeje v Carigradu ali dvorca Alhambre v Granadi (slika 3 na naslovni strani).

Pri opazovanju ornamentov le malokdo pomisli, da njihova lepota temelji na preprostih matematičnih zakonih. Ornament pritegne našo pozornost zaradi ponavljanja in notranje urejenosti. Da bomo to "urejenost" pojasnili, se bomo oprli na pojem *izometrije*.¹

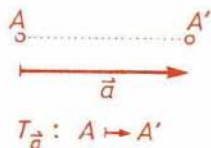
Začnimo z definicijo, da je *izometrija ravnine* taka preslikava v ravnini, ki ohranja medsebojne razdalje: poljuben par točk A in B preslika v taki točki A' in B', da sta daljici AB in A'B' enako dolgi. Bralec lahko sam dokaže, da je izometrija povratno enolična preslikava ter da preslika premico v premico in trikotnik v skladen trikotnik. Primeri se lahko, da se preslikana točka pokrije s prvotno. Tako točko imenujemo *negibno točko*. Če je negibnih točk več, ležijo vse ali na premici ali pa so sploh vse točke negibne. Tudi to trditev naj poskusi dokazati bralec sam, mi pa naštajmo *osnovne tipe izometriji*:

Slika 2. Arabeska

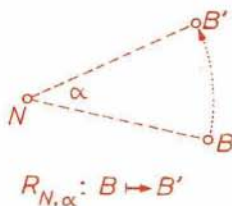


¹ Izometrijam pravimo tudi (*toga*) *gibanja*, a ker se ta izraz uporablja v številnih drugih zvezah, bomo raje ostali pri izometriji.

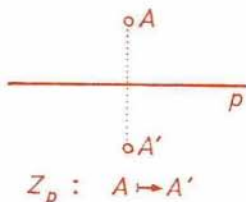
- o *Identiteta* je izometrija, ki ohranja vse točke. Označujemo jo z I .
- o *Vzporedni premik* T_a (*translacija*) premakne točke za dano dolžino v dani smeri, torej nima nobene negibne točke (slika 4).
- o *Vrtež* $R_{N,\alpha}$ (*rotacija*) točke "zavrti" v določeni smeri za kot α okrog izbrane negibne točke N , ki ji rečemo *središče vrteža* (slika 5).
- o *Zrcaljenje* Z_p preko izbrane premice p poljubno točko T preslika v tako točko T' , da je daljica TT' pravokotna na p in da p daljico TT' razpolavlja (slika 6). Včasih govorimo tudi o zrcaljenju preko izbrane točke. Bralec naj sam pove definicijo in se prepriča, da je to kar vrtež za kot 180° .



Slika 4. Vzporedni premik



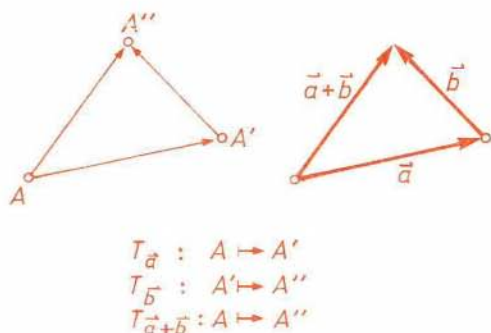
Slika 5. Vrtež



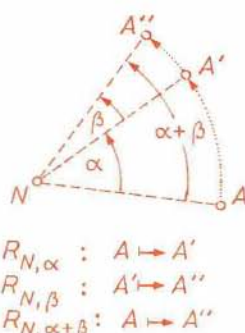
Slika 6. Zrcaljenje

Izometrije *sestavljamo*, kakor smo pač vajeni sestavljati preslikave. Rečemo tudi, da tvorimo njihov *produkt*. Pravzaprav lahko vsako izometrijo zapišemo kot sestavo *osnovnih izometrij* - od tod njihovo ime. Če je produkt dveh izometrij identiteta, pravimo, da sta si izometriji *nasprotni (inverzni)*. Bralec naj se prepriča, da je v produktu dveh nasprotnih izometrij vrstni red sestavljanja nepomemben (zato lahko rečemo, da je nasprotnost vzajemna). Navedimo nekaj zgledov:

- o Dva vzporedna premika T_a in T_b sestavimo v nov vzporedni premik $T_{a+b} = T_b T_a = T_a T_b = T_{b+a}$; pri tem je vrstni red sestavljanja premikov nepomemben (slika 7). Nasprotni vzporedni premik k danemu je kar vzporedni premik za isto dolžino, le da v nasprotni smeri: $T_{-a} T_a = T_a T_{-a} = I$.
- o Dva vrteža $R_{N,\alpha}$ in $R_{N,\beta}$ okrog iste točke sestavimo v nov vrtež $R_{N,\alpha+\beta}$. Tudi vrstni red sestavljanja vrtežev z istim središčem je nepomemben: $R_{N,\alpha+\beta} = R_{N,\beta} R_{N,\alpha} = R_{N,\alpha} R_{N,\beta} = R_{N,\beta+\alpha}$. Nasprotni vrtež dobimo z vrtežem v obratni smeri: $R_{N,-\alpha} R_{N,\alpha} = R_{N,\alpha} R_{N,-\alpha} = I$ (slika 8).

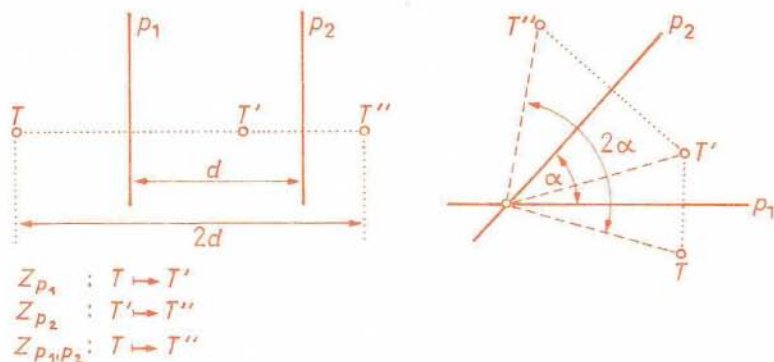


Slika 7. Sestava vzporednih premikov



Slika 8. Sestava vrtežev

- o Pri zrcaljenjih ni vse tako preprosto. Sestava $Z_{p_1}Z_{p_2}$ zrcaljenja Z_{p_1} preko premice p_1 in zrcaljenja Z_{p_2} preko premice p_2 je bodisi vzporedni premik bodisi vrtež. Če sta premici p_1 in p_2 vzporedni, gre za vzporedni premik, če se premici p_1 in p_2 sekata, je sestavljena izometrija vrtež. V prvem primeru je razdalja med prvotno in preslikano točko enaka dvakratni razdalji premic p_1 in p_2 . V drugem primeru je kot sestavljenega vrteža enak dvakratnemu kotu med p_1 in p_2 (slika 9). Obakrat je pomemben vrstni red: nasploh velja $Z_{p_1}Z_{p_2} \neq Z_{p_2}Z_{p_1}$. Zrcaljenje preko iste premice pa je samo sebi nasprotno: $Z_p Z_p = I$.
- o Od preostalih možnosti omenimo le produkt zrcaljenja in vzporednega premika v smeri premice, preko katere zrcalimo. Pri tem je vrstni red sestavljanja nepomemben. Imenujemo ga *zrcalni premik* (slika 10) in ga včasih štejemo kar k osnovnim izometrijam.

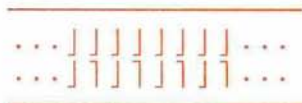


Slika 9. Sestava zrcaljenj

Zdaj lahko povemo, kaj je izometrija kakega omejenega ali neomejenega dela ravnine. Definicija je enaka kot prej, le da mora v tem primeru izometrija preslikati izbrani del ravnine samega nase. To pomeni, da smo tu bolj omejeni kot pri izometrijah vse ravnine. Vzemimo na primer neskončno dolg trak. Od osnovnih tipov izometrij pridejo v poštev (poleg identitete) kvečjemu vzporedni premik vzdolž traku, vrtež za 180° okrog točke na srednjici ter zrcaljenja preko srednjice traku oziroma preko premice, ki je pravokotna na srednjico.

Končno se lotimo *ornamentov*. Zaradi enostavnosti obravnavajmo v tem članku samo ornamente na neskončnem traku. Ornamente na ravnini si bomo ogledali morda kdaj kasneje.

Najprej se dogovorimo, kaj *ornament na traku* sploh je. Občutek nam narekuje, da je to vsaka risba "sestavljena iz končnega vzorca", ki se vzdolž traku "neskončnokrat ponovi", na primer

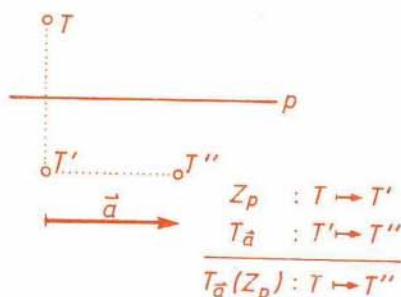


Ta formulacija je nekoliko ohlapna, natančno definicijo naslonimo na znanje o izometrijah.

Ornament na danem traku je vsaka risba na tem traku, za katero obstaja tak $d_0 > 0$, da velja

- o vzporedni premik za dolžino d_0 risbo *ohranja*, to je, pri tem premiku risba preide "sama vase". Še drugače: risba je *neobčutljiva (invariantna)* na ta premik.
- o za noben pozitiven d , $d < d_0$, vzporedni premik za dolžino d risbe ne ohranja.

Definicija terja nekaj razlage. Prva točka zagotavlja, da ornament sestavlja ponavljajoči se končni vzorec. To je kar del risbe na poljubnem "koščku traku" z dolžino d_0 . Pozor: ornamentov je neskončno, ker je neskončno



Slika 10. Zrcalni premik

mного različnih vzorcev; obstaja pa tudi neskončno mnogo vzorcev, ki porodijo enak ornament! Bralec bo sam uvidel, da je ornament neobčutljiv na vsak vzporedni premik za dolžino $d = kd_o$, $k \in \mathcal{N}$, a ni neobčutljiv na noben drug vzporedni premik. Ali drugače: vsak ponavljajoči se vzorec, ki sestavlja ornament, je "večkratnik" kakega vzorca z dolžino d_o . To pa je natanko vsebina druge točke v definiciji ornamenta: zahteva, da je vzorec z dolžino d_o - *osnovni vzorec* - najkrajši vzorec, s katerim še lahko napolnimo trak. Tako na primer risba



ni ornament, ker je neobčutljiva na poljubno majhen vzdolžni premik in ni najmanjšega vzorca; prav zato deluje za oko kar nekam dolgočasno.

Deloma smo tako že odgovorili na začetno vprašanje o urejenosti in zgradbi ornamentov na traku. Njihova temeljna značilnost je, da so neobčutljivi na vzporedni premik (kot tip izometrije). Za popolnejši odgovor pa se moramo ozreti ne le na vzporedni premik, ampak na *vse mogoče tipe izometrije*, na katere je dani ornament neobčutljiv. Na primer: ornament z osnovnim vzorcem $\lfloor$ ohranja edino vzporedni premik. Kaj pa ornament z vzorcem $\lfloor \rfloor$? Tega ohranja tudi zrcalni premik (za polovično osnovno dolžino). Zato bomo rekli, da ima ta drugi ornament bolj zapleteno in bogatejšo simetrijo.

Definirajmo: *Simetrijo ornamenta* predstavljajo vsi različni tipi izometrij, ki ornament ohranjajo. Ne bo odveč, če pripomnimo, da izraz simetrija uporabljamo v bolj splošnem pomenu, kot je navada v vsakdanjem življenju, ko dojemamo simetrijo pač kot neobčutljivost na zrcaljenje preko kake premice. Ali moremo že iz samega vzorca uganiti, da bo ornament imel bogatejšo simetrijo? Lahko, če ima že vzorec sam v sebi simetrijo. To pomeni, da je neobčutljiv na izometrijo, ki ni identiteta (v poštev pridejo edino zrcaljenji ter vrtež). Poglejmo nekaj primerov. Črke **E**, **A**, **N** so trije preprosti simetrični vzorci. Prvo ohranja vodoravno zrcaljenje, drugo navpično zrcaljenje, tretjo vrtež. Črko **H** ohranjajo vse tri izometrije, ki ohranijo črke **E**, **A** in **N** (slika 11). Pripadajoči ornamenti

... E E E E E E ...
 ... A A A A A A ...
 ... N N N N N N ...
 ... H H H H H H ...

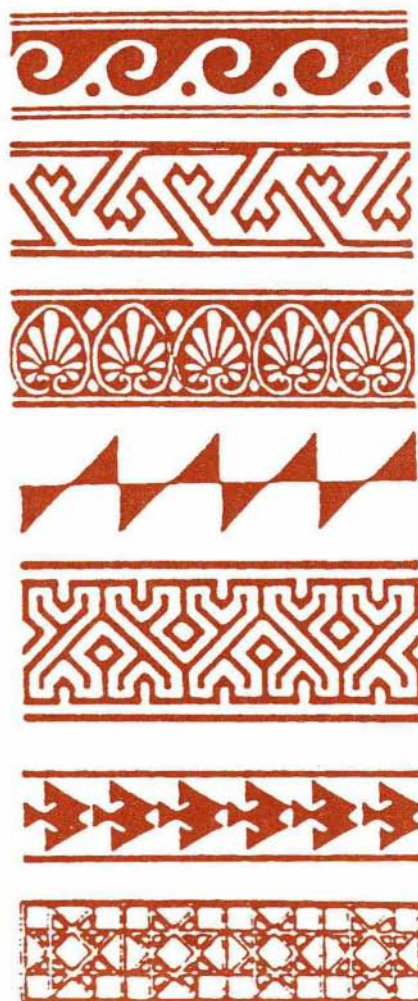


Slika 11. Simetrije vzorcev

imajo zato različne simetrije. Seveda je lahko vzorec povsem nesimetričen (ohranja ga le identiteta), ornament pa je kljub temu neobčutljiv na izometrijo, ki ni vzporedni premik. Primer za to je prav ornament z vzorcem J].

Naredimo tale sklep: po simetriji lahko ornamente razvrstimo v *simetrijske skupine* s pravilom: dva ornamenta sodita v enako skupino, če imata enako simetrijo. Na primer, vzorci, ki so neobčutljivi zgolj na vzporedni premik, tvorijo skupino, ki ima očitno najrevnejšo simetrijo. Skupaj sodijo tudi ornamenti

... A A A A A A ...
 ... V V V V V V ...
 ... bd bd bd bd ...
 ... bddbbd bddbbd ...



Slika 12. Primeri ornamentov na traku z različnimi simetrijami: starogrški (a), srednjeveški (b), starogrški (c), indijanski (pleme Navajo)(d), islamski (e), inkovski (f) in kitajski (g).

Bralec naj ugotovi, katere izometrije jih ohranjajo. Mogoče je pokazati, da je simetrijskih skupin ornamentov na traku natanko 7 (slika 12).

Ornamenti

simetrijske operacije

- | | |
|--|--|
| 1. ...      ... | 1 vzporedni premik |
| 2. ...      ... | 1 vzporedni premik in 1 zrcaljenje |
| 3. ...      ... | 1 vzporedni premik in 1 zrcaljenje |
| 4. ...      ... | 1 vzporedni premik in 1 zasuk za 180° |
| 5. ...      ... | 1 zrcaljenje in 1 zasuk za 180° |
| 6. ...      ... | 1 vzporedni premik in 1 zrcaljenje |
| 7. ...      ... | 3 zrcaljenja |

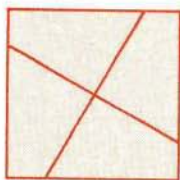
Ali ni prav presenetljivo spoznanje, da se pri ustvarjanju ornamentov povezujeta dve tako različni zahtevi, kot sta neizmerna svoboda pri izbiri vzorca in neizprosna geometrijska omejitev? Ornamenti že tisočletja privlačijo umetnike in obrtnike z vseh celin. Pri risanju ornamentov so se, ne da bi se tega zavedali, opirali na zakone, ki so jih matematiki dokončno utemeljili šele v 19. stoletju.

Milena Strnad

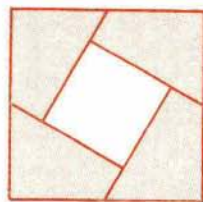
KVADRATNA SESTAVLJANKA - Rešitev s str. 83

Za $n = 1$ nimamo česa dokazovati.

Posebej poglejmo, kako je pri $n = 2$. Če kvadrata nista enaka, označimo stranico večjega z a , stranico manjšega z b . Na straneh večjega odmerimo



Slika 1

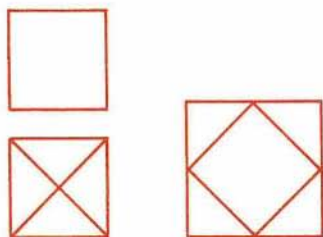


Slika 2

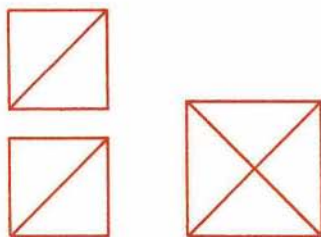
odseke dolžine $x = \frac{a+b}{2}$, ga razrežemo, kot kaže slika 1, in zložimo kose okrog manjšega kvadrata kot na sliki 2.

Sami se lahko prepričate, če primerjate kote, da je dobljeni lik res kvadrat.

Opisani postopek lahko uporabimo tudi, če sta kvadrata enaka (slika 3). Lahko pa ju prerežemo po diagonali in zložimo, kot kaže slika 4.

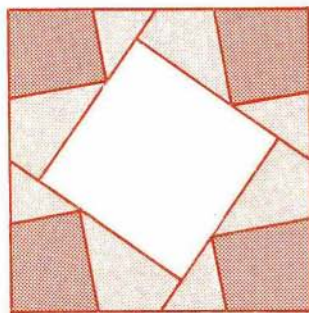
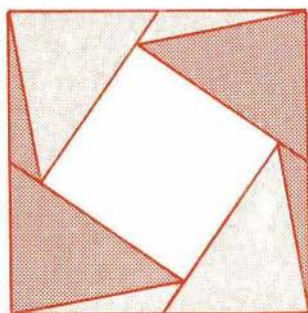


Slika 3



Slika 4

Naj bo sedaj danih $n + 1$ kvadratov $K_1, K_2, \dots, K_{n+1}$ in denimo, da smo že dokazali, da lahko iz n poljubnih kvadratov sestavimo kvadrat. Iz dveh kvadratov, recimo K_n in K_{n+1} , napravimo najprej po zgornjih napotkih nov kvadrat K . Po indukcijski predpostavki lahko nato n kvadratov $K, K_1, K_2, \dots, K_{n-1}$ tako razrežemo, da se da iz kosov sestaviti nov kvadrat.



Slika 5

Na sliki 5 sta dve različni sestavljanke iz treh enakih kvadratov.

Marija Vencelj

OB STOLETNICI SMRTI SONJE KOVALEVSKE

Ko je leta 1891 v Stockholmu za pljučnico umrla profesorica matematike na tamkajšnji univerzi Sofija (Sonja) Kovalevska, je, čeprav ji je bilo komaj 41 let, že uživala velik mednarodni sloves. Delno iz napačnega razloga: manj kot odlična matematičarka, kar je dejansko bila, in bolj kot "ženska matematik" - čuden in presenetljiv pojav.

Njeno življenje je bilo na ta ali oni način povezano s pomembnimi osebnostmi njenega časa: Dostojevskim, Strindbergom, Georgom Eliotom, Helmholtzom, Darwinom, Mendelejevom, z voditelji pariške komune in tudi z največjimi matematiki tistih dni: Weierstrassom, Hermitom, Poincaréjem, Picardom, Čebyševom, Cantorjem, Kroneckerjem, Mittag-Lefflerjem in drugimi.

Ob njeni smrti so prijatelji in sorodniki pohiteli s pisanjem spominov nanjo in celo ljudje, ki so jo komajda poznali, so pisali o njej romantizirane spomine. V petih letih po njeni smrti so v Evropi in Ameriki o njej izšle štiri večje biografije, nekaj zbirk pisem in številne izdaje in prevodi njenih literarnih del. Mitu še danes ni konca. Tako smo pred nekaj leti tudi na naši televiziji lahko gledali romantičen film o zadnjih letih njenega življenja, film, ki se Kovalevske kot matematičarke komaj dotakne, čeprav so bila to njena najbolj plodna znanstvena leta.

Na začetku letošnjega leta pa smo si lahko ogledali zelo dobro nadaljevanko o njenem življenju in delu z naslovom *Sophie*. Poleg tega je v zadnjih dvanajstih letih izšlo v svetu kar pet odličnih monografij, plod resnih raziskav, ki v pravi luči predstavljajo to talentirano matematičarko 19. stoletja.

Sofija Vasiljevna se je rodila 1850 v Moskvi v aristokratski družini generala Vasilija Vasiljeviča Korvin-Krukovskega. Bila naj bi daljna potomka Matije Korvina, ogrskega kralja Matjaža. Vendar priča o tem le rodbinsko drevo, ki krasi družinsko knjižnico Krukovskih v Polibinu, uradnih zapiskov, ki bi dokazovali pristnost te trditve, niso našli. Mati je bila vnukinja nemškega astronoma Schuberta, ki se je naselil v Rusiji za časa Katarine Vélike.

Od devetega leta dalje je Sonja odraščala na družinskem posestvu v Polibinu ob vzgoji domačih učiteljev in guvernant. Angleško in francosko je govorila skorajda tako dobro kot rusko. Že trinajstletna je pokazala veliko zanimanje in nadarjenost za matematiko. Potrebna pa so bila dolga leta prepričevanja, da ji je oče - sicer tudi sam ljubitelj matematike - dovolil in omogočil izredno kvaliteten privatni študij nekaterih matematičnih disciplin med vsakoletnim bivanjem družine v Petrogradu.

Osemnajstletna se je Sonja poročila z Vladimirjem Kovalevskim, ka-



Sonja Kovalevskaya v času študija v Heidelbergu

snejšim svetovno znanim paleontologom. Zgodba tega zakona je dolga in komplicirana, lahko pa rečemo, da zakon ni bil srečen.

Po poroki je Kovalevska 1868 odšla v Petrograd v upanju, da ji bodo dovolili študirati na univerzi. Tedaj so bile v Rusiji, kot v vsej Evropi, visoke šole izključno moške šole. V Petrogradu ni uspela, je pa postala naslednje leto prvi ženski študent na univerzi v nemškem Heidelbergu.

V Heidelbergu je naglo zaslovela kot talentiran matematik in naravoslovec. Njen profesor Königsberger je imel o njej tako visoko mnenje, da ji je leta 1871 omogočil, da je odšla študirat v Berlin h Karlu Weierstrassu, velikemu specialistu za matematično analizo.

Med Kovalevsko in Weierstrassom je vladalo toplo človeško in strokovno razmerje. Štel jo je za svojega najboljšega učenca in skrbno bedel nad njenimi koristmi. Prijateljstvo je trajalo vse življenje.

V treh letih delovanja v Berlinu je Kovalevska izdelala tri doktorske disertacije, katerih vsaka zase je bila po Weierstrassovem mnenju vredna doktorata. Toda nista hotela tvegati. Ker je šlo za prvega ženskega doktoranda, je bilo pričakovati izjemno strogo presojanje.

Tretje teh del je tudi eno od dveh najpomembnejših njenih raziskav sploh. To je Uvod v teorijo parcialnih diferencialnih enačb. Delo vsebuje tudi pomemben izrek, ki ga danes imenujemo izrek Cauchyja in Kovalevske.

Zanj so ji leta 1874 na univerzi v Göttingenu podelili doktorat. Bila je prva ženska na svetu, ki je dosegla doktorat iz matematike v modernem smislu, in ena prvih doktoric znanosti sploh.

Toda po povratku v Rusijo ni dobila službenega mesta na univerzi. Kot ženska sploh ni imela nobene možnosti poučevanja na kolikor toliko visoki stopnji. Nič bolje ni bilo v zahodni Evropi, kjer naj bi kot Weierstrassova učenka imela določeno prednost. Toda celo Weierstrass je bil prepričan, da ima kot ženska sicer pravico do izobrazbe - denimo iz intelektualnega zadovoljstva - ne gre pa, da bi se poročena ženska sama vzdrževala.

Tako je v letih 1874 do 1878 - tedaj je tudi rodila hčerko Fufo - bolj ali manj opustila znanstveno delo.

Toda, ob zakonskih težavah in nerazumevanju moža za njeno delo, je Sonja odkrila, da ne more živeti brez svoje matematike. Povratek ni bil lahak. Spet je vzpostavila stike z ruskimi matematičnimi krogi in si začela dopisovati z Weierstrassom in njegovim švedskim učencem Mittag-Lefflerjem.

Leta 1881 se je od Vladimirja ločila in odšla v Pariz. Tam je delovala s Hermitom, Picardom, Poincaréjem, Bertrandom, bila je aktivna udeleženka matematičnega življenja Pariza in Berlina, vendar ni imela nikakršnega uradnega položaja.

Mittag-Leffler ji je sicer leta 1881 poskušal najti mesto najprej na univerzi v Helsinkih in nato v Stockholmu, vendar je naletel na ostro nasprotovanje v nematematičnih krogih.

Leta 1883 je Vladimir naredil samomor. Medtem, ko so paleontologi žalovali, so matematiki v tem videli rešitev Sonjinega problema. Nič ni bilo zanjo bolje, kot biti vdova. To ji je dajalo pravico do samostojnosti.

V zelo kratkem času po Vladimirjevi smrti ji je bilo ponujeno mesto privatnega docenta na stockholmski univerzi.

V naslednjih sedmih letih do smrti je doživela vrsto pomembnih prvenstev. Leta 1884 je postala urednica skandinavskega matematičnega časopisa *Acta Mathematica* - verjetno prva ženska urednica pomembne znanstvene revije na svetu.

Leta 1884 je bila imenovana za izrednega profesorja za dobo petih let. Verjetno je tudi to bil prvi tovrstni primer in Mittag-Leffler je za njeno nastavitev bil hude bitke.

Leta 1888 je prejela Bordinovo nagrado francoske akademije znanosti za svoje delo o rotaciji togega telesa okrog fiksne točke. To je njeno najbolj znano delo in Bordinova nagrada je bila v nekem smislu zmagoslavje njene kariere. Postala je slavna po vsej Evropi.

Zanimiva je epizoda v zvezi z Bordinovo nagrado. Natečaj je bil anonimen, vendar je očitno, da se je francoska akademija odločila razpisati leta 1888 nagrado za rešitev problema rotacije togega telesa prav zato, ker so vedeli, da se Kovalevska ukvarja s tem problemom. Hermite je celo že mesece pred iztekom natečaja pisal Mittag-Lefflerju, da utegne biti nagrada to leto celo povečana (in je res bila) in tudi rok bi podaljšali, če Kovalevska dela ne bi dokončala pravočasno. Zato nikakor ni moč pritegniti nekaterim domnevam, da Kovalevska nikoli ne bi dobila nagrade, če bi natečaj ne bil anonimen in tako komisija ni vedela, da zmagovito delo pripada ženski. Vidimo, da gre dejansko prav za nasprotno. Imeli so jo za dovolj pomembno, da prejme nagrado, ukrojeno po meri njenih raziskav.

Leta 1889 je Kovalevska dobila katedro za analizo na stockholmski univerzi. Prav gotovo ji je pri tem pomagala tudi Bordinova nagrada. Postala je dosmrtna redna profesorica in bila prva ženska moderne dobe, ki ji je pripadla ta čast.

To je bilo veliko leto za Kovalevsko. Prejela je tudi Oscarjevo nagrado švedske akademije za nadaljevanje dela o rotaciji togega telesa. Postala je prvi ženski dopisni član ruske akademije znanosti, katere pravila so spremenili prav v ta namen. Kaže, da so v času njene prezgodnje smrti tekale že tudi priprave, da postane redna članica akademije.

Omenimo še, da v teh izjemno plodnih sedmih letih njeno delo ni bilo omejeno zgolj na matematiko. Poskusila se je v pisanju in v zadnjih petih letih njenega življenja so nastala literarna dela: Rusko otroštvo, Nihilistka, dve igri, osebni spomini na Georga Eliota, številni eseji o političnih in družbenih vprašanjih in nekaj poezije. Dela so bila zelo dobro sprejeta, posebno v Rusiji in Skandinaviji. Umrla je polna velikih tovrstnih načrtov.

Kovalevska ni bila nikakršen revolucionar v matematiki. Bila pa je eminenten matematik svojega časa in čedalje večja uporaba njene asimptotične metode v matematični fiziki, dandanes, je znak njene ostre matematične intuicije in veščine.

Marija Vencelj

DVA NEORTODOKSNA KRIPTOGRAMA – Rešitev s str. 101

1.

$$\begin{array}{r}
 2 \ 8 \ 5 \cdot 3 \ 9 \\
 \hline
 8 \ 5 \ 5 \\
 2 \ 5 \ 6 \ 5 \\
 \hline
 1 \ 1 \ 1 \ 1 \ 5
 \end{array}$$

2.

$$\begin{array}{r}
 7 \ 7 \ 5 \cdot 3 \ 3 \\
 \hline
 2 \ 3 \ 2 \ 5 \\
 2 \ 3 \ 2 \ 5 \\
 \hline
 2 \ 5 \ 5 \ 7 \ 5
 \end{array}$$

Prvi kriptogram rešimo na običajen način. Z drugim je več težav. Morda je še najboljši način reševanja naslednji: Najprej poiščemo vsa trimestna števila s praštevilskimi ciframi, ki pomnožena z enomestnim praštevilom dajo štirimestno število s praštevilskimi ciframi. Samo štiri je taki primeri so:

$$775 \cdot 3 = 2325$$

$$555 \cdot 5 = 2775$$

$$755 \cdot 5 = 3775$$

$$325 \cdot 7 = 2275$$

Ker so trimestni faktorji na levi med seboj različni, mora biti drugi faktor sestavljen iz dveh enakih cifer. Ostanejo le štiri možnosti. Z direktnim preverjanjem izločimo pravo.

Mirko Dobovišek

REŠITVE NALOG

JEZERCE Z OTOČKOM - Rešitev s str. 65

Denimo, da so Katja, Luka in Matjaž oddaljeni od otoka zaporedoma a , b in c , z r označimo polmer otoka, z R polmer jezera, z d pa razdaljo med njunima središčema. Poglejmo na sliko in sestavimo tri enakosti:

$$R = a + r + d \quad (1)$$

$$2R = a + 2r + c \quad (2)$$

$$d^2 = (r + b)^2 - R^2 \quad (3)$$

Privoščimo si še splošni oznaki za podatka v nalogi

$$p = b - a, \quad q = c - b$$

in postopoma izrazimo R z njima. Najprej iz (1) in (2) brez težav izračunamo

$$d = (c - a)/2, \quad r = R - (a + c)/2$$

in to vstavimo v (3). Tu razčlenimo desno stran in dobimo

$$\left(\frac{c-a}{2}\right)^2 = \left(b - \frac{a+c}{2}\right)(2R + b - \frac{a+c}{2}).$$

Upoštevajmo še enakosti

$$p - q = 2b - (a + c), \quad p + q = c - a \quad (4)$$

in že lahko določimo R . Kratek račun nam da iskano zvezo $R = pq/(p - q)$

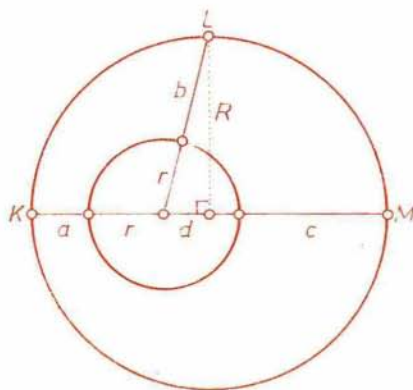
V konkretnem primeru je $p = 60$ m, $q = 40$ m, torej polmer jezera meri $R = 120$ m.

Če poznamo še polmer otoka r , lahko poiščemo razdalje a , b in c . S pomočjo zvez (1), (2) in (4) namreč brž dobimo

$$a = R - r - (p + q)/2, \quad b = R - r + (p - q)/2, \quad c = R - r + (p + q)/2,$$

torej v našem primeru velja $a = 30$ m, $b = 90$ m in $c = 130$ m.

Boris Lavrič



IZRAČUN IZJEMNO VELIKIH PADAVIN

UVOD

Izjemno velike količine padavin, ki v kratkem času padejo na zemeljsko površje, lahko povzročijo najrazličnejše nevšečnosti. Če so tla že povsem namočena, tako da ne morejo več vezati tekoče vode, vsa padavinska voda odteče, se zlije v vodotoke in zaradi velikega dotoka in omejene možnosti odtoka se potoki in reke razlijejo iz korit. Natančen izračun količine padavin, ki pade iz oblakov, je v splošnem zelo zahteven, v nadaljevanju si bomo ogledali, na kakšen način je mogoče iz polj meteoroloških spremenljivk oceniti predvideno količino padavin.

VODA V OZRAČJU

V ozračju se voda pojavlja v treh agregatnih stanjih: kot vodna para, kot kapljice in kot ledeni kristali. Vodna para prihaja v ozračje predvsem z izhlapevanjem z vodnih, vlažnih in poraščenih površin. Če se zrak ohladi pod temperaturo rosišča, se iz vlažnega zraka kondenzira vlaga v obliki kaplic ali kristalov. Nastane oblak ali megla.

Ponavadi so oblaki sestavljeni iz drobnih kapljic. V oblaku so lahko tudi ledeni kristali. Do nastanka kristalov pride, če so temperature zraka v oblaku pod lediščem in so v oblaku prisotna sublimacijska jedra - trdni zametki kristalov, drugače pride do nastanka podhlajenih kapljic. Če so v oblaku sočasno kapljice in ledeni kristali, začno ledeni kristali rasti na škodo kapljic. Kapljice izhlapevajo in para se izloča na kristalih. Večje kapljice in kristali padajo hitreje od drobnejših in pri svojem padanju skozi oblak večji padavinski elementi zbirajo drobnejše. Ledeni kristali in kapljice postajajo vse večji, padajo vse nižje, kjer je zrak vse toplejši, kristali se talijo in iz oblaka se vsuje dež.

V zraku pri dani temperaturi ne more biti poljubno mnogo vodne pare. Gostota vodne pare, ki ji rečemo tudi absolutna vlažnost, ima pri vsaki temperaturi in pritisku določeno zgornjo mejo. Če se temperatura zniža, se zniža tudi zgornja meja absolutne vlage. Če je v zraku več pare, kot je ta znižana zgornja meja, se presežna vodna para izloči v tekočem ali trdnem stanju. Največja absolutna vlaga se s temperaturo v pritiskom eksponentno spreminja. Tako npr. pri 20 stopinjah Celzija lahko zrak vsebuje 17.3 g vodne pare v kubičnem metru, pri ledišču pa le še 4.8 g. Če se torej zrak, ki je pri 20 stopinjah nasičen, ohladi do ledišča, se mora iz vsakega

kubičnega metra zraka kondenzirati 12.5 g vode. Pri temperaturah nad lediščem (pa tudi pri negativnih temperaturah) se ta voda izloči kot vodne kapljice. Ledeni kristalčki nastanejo pri nizkih temperaturah, če so v oblaku prisotna sublimacijska jedra, na katere se vodna para izloči v trdnem stanju. Pri zelo nizkih temperaturah (pod -20 stopinj Celzija) začno posamezne kapljice zmrzovati.

Najpogosteje se zrak v ozračju ohladi zaradi dviganja. Pri dviganju zrak pridobiva potencialno energijo, se razpenja (opravlja delo proti okolici) in tako se mu notranja energija zmanjšuje na račun opravljenega dela. Zaradi zmanjševanja notranje energije se zmanjšuje temperatura zraka.

Dviganje zraka nastopa v atmosferi v ciklonih, ob frontah, včasih ob pobočjih, pogosto zaradi pregretja posameznih zračnih balonov pri tleh (konvekcija). Pri vsakem dviganju zraka, ko se zrak ohladi pod rosišče, se pojavijo oblaki, pogosto pa tudi padavine.

OSNOVNI IZRAČUN KOLIČINE PADAVIN

Kako izračunati količino padavin, ki se izloči iz dvigajočega zraka?

Prvi zakon termodinamike govori o tem, da se masi zraka dovedena toplota ΔQ porabi za spremembe temperature, pritiska in količine vode.

$$\Delta Q = mc_p \Delta T - V \Delta p + L \Delta m_v \quad (1)$$

Za zrak, ki je nasičen z vlago, velja, da se v primerih, ko ne dovajamo toplote, spremembe temperature odražajo v spremembah pritiska in v spremembah mase tekoče vode. Spremembe temperature ΔT so pri tem odvisne od specifične toplote zraka c_p , spremembe pritiska Δp od prostornine zraka V , spremembe mase tekoče vode Δm_v pa od izparilne toplote L .

Z nekaj računanja (z upoštevanjem plinske enačbe, hidrostatične enačbe in nekaterih drugih) sledi enačba za največjo možno jakost padavin (največjo možno gostoto masnega toka izločanja tekoče vode) J .

$$J = \left(1 - \frac{\gamma_w}{\gamma_a}\right) \frac{w}{L} \Delta p \quad (2)$$

kjer γ_w in γ_a merita, za koliko se ohladi ob dviganju nasičen oziroma nenasičen zrak, w je vertikalna hitrost zraka in $\Delta p = -\rho g \Delta z$ je z razliko pritiska izražena debelina zračne plasti, iz katere padajo padavine.

Za tipičen primer vzemimo naslednje vrednosti $\gamma_w = 5 \text{ K/km}$, $\gamma_a = 10 \text{ K/km}$, $w = 0.3 \text{ m/s}$, $\Delta p = 300 \text{ mb}$ (cca 4 km), $L = 2.5 \text{ MJ/kg}$. Po gornji enačbi dobimo jakost padavin $7 \text{ kg/m}^2 \text{ h}$. Ta bi dala v 48 urah 336 mm

(ali litrov oziroma kilogramov na m^2) padavin. Seveda se prav vsa voda ne izloči v obliki padavin, nekaj je ostane v oblakih, ki jih odnese veter. Ocenimo, da v oblakih ostane tri desetine izločene vode, zato zmanjšamo zgornjo količino padavin za faktor 0.7 in dobimo za 48 ur količino 235 mm padavin.

Vrednosti γ_a in L sta le malo odvisni od temperature, različne pa so lahko vlažnost zraka (zajeta v γ_w), vertikalna komponenta hitrosti vetra (w) in debelina plasti izločanja vlage (Δp).

V nadaljevanju si bomo ogledali vpliv posameznih členov enačbe 2 na količino izločenih padavin.



Slika 1 Kumulonimbusni oblak nad hribom z idealiziranimi smermi in hitrostmi vetrov

Vertikalne hitrosti

V drugem razdelku smo omenili, da so gibanja zraka v navpični (vertikalni) smeri najpomembnejši razlog za ohlajanje zraka. Razlogov za vertikalno gibanje zraka je več, hitrost dviganja je posledica intenzivnosti meteoroloških procesov.

Do dviganja zraka prihaja zaradi obsežnih (sinoptičnih) vremenskih procesov (na tipičnih razdaljah 1000 km). V ciklonih se zrak pri tleh steka proti središču ciklona in se počasi dviga. V ciklonih so tudi tople in hladne fronte,

v velikosti nekaj 100 km. Ob frontah se topli zrak dviguje nad hladnega, frontalni pas dvigajočega se zraka pa se počasi tudi horizontalno premika.

Do dviganja zraka pride tudi zaradi lokalnih dejavnikov. Če piha veter proti goram, se mora tok zraka, ko pride do gora, prilagoditi oblikam reliefa. Zrak gore deloma obteče, deloma pa se ob njih dviga. Velikost hitrosti dviganja zraka je odvisna od strmine, oblike in razsežnosti gora oziroma grebenov. Razsežnost teh pojavov je sorazmerna razprostranjenosti reliefnih oblik.

Do dviganja zraka pride tudi zaradi lokalnega pregrevanja. Če se nad delom tal, ki so toplejša od okolice, zrak segreje, se zaradi vzgona začne dvigati in s tem ohlajati in kaj kmalu se iz njega začne izločati oblak. Velikost teh pojavov je nekaj deset kilometrov.

Pri vsakršnem vertikalnem gibanju zraka pa pride zaradi razpenjanja še do dodatne labilizacije zračnih plasti. Dvigajoča se plast zraka se na zgornji meji dvigne višje kot na spodnji meji in zato se zrak na zgornji meji plasti ohladi močneje kakor pa na spodnji. Spodnje plasti stebra postanejo glede na zgornje pregrete, t.j. labilne, in v dvigajoči se plasti pride do dodatnega vertikalnega mešanja zraka.

Ko se iz zraka začno izločati vodne kapljice, te pri svoji kondenzaciji oddajajo toploto in dvigajoči se nasičeni zrak se z dviganjem ohlaja manj, kot če bi bil nenasičen. Ti pojavi imajo razsežnost okoli deset kilometrov in več.

PROCES	vert. hitrost	int. padavin
sinoptično: cikloni	5 cm/s	1 mm/h
sinoptično: fronte	10 cm/s	4 mm/h
mezo: orografsko	30 cm/s	1 mm/h
lokalno: konvekcija	100 cm/s	10 mm/h
lokalno: nevihte	300 cm/s	30 mm/h

Zgornja delitev pojavov je le načelna. Ob prehodu hladne fronte prek razgibanega gorskega reliefa se dviganja seštevajo: ob hladni fronti se topli zrak dviga, zaradi dviganja pride do labilizacije in s tem do nastanka neviht, gorske pregrade pa dviganje povečajo tako v hladnem kot v toplem zraku. V privetrju gorskih pregrad so padavine zato izrazitejše. V zavetrju gorskih pregrad pride do spuščanja zraka, s tem se zrak ogreva in v zavetrju gora je padavin manj.

Če želimo zanesljivo izračunati, kakšna je razporeditev količine padavin

pri tleh, moramo upoštevati, da kapljice, ki nastanejo v oblakih, veter nosi s seboj. Kapljice tako ne padejo na tla tik pod mestom nastanka, pač pa jih veter razseje vzdolž svoje poti. Kapljice pri padanju skozi nenasičen zrak pod oblakom tudi delno izhlapevajo in tako se količina padavin še nekoliko zmanjša.

Debelina dvigajočih se plasti

V enačbi 2 kot pomemben dejavnik nastopa debelina plasti, v kateri se nasičeni zrak dviga. Največje debeline te plasti se pojavijo ob nevihtah, saj takrat steber dvigajočega zraka sega skoraj od tal (okoli 1000 mb) do tropopavze (okoli 200 mb). Ob frontalnih nevihtah se dvigovanje zraka ne začne že pri tleh, pač pa nekoliko višje v ozračju (okoli 900 mb), višina vrha frontalno nevihtnih oblakov je odvisna predvsem od vertikalne razporeditve temperature.

Količina vlage v zraku

Količina vlage v zraku je v enačbi 2 predstavljena prek temperaturnega gradienta γ_w . Če je zrak pred začetkom dviganja topel, je v njem lahko bistveno več vlage, kot pa če je hladen. Intenzivne padavine se zato lahko pojavijo le, če je vreme razmeroma toplo in vlažno, ob hudem mrazu ni intenzivnih padavin. V hladnem zraku namreč ni vlage, ki bi se iz zraka lahko izločila, če bi se ta zrak še naprej ohlajal.

OROGRAFSKO DVIGANJE ZRAKA

Ob razsežnih gorovjih se mora pritekajoči se zrak ob njih dvigniti. Posamezno, četudi visoko goro, bo veter večinoma obtekel in le malo zraka se bo dvignilo prek vrha gore, enako velja, če veter piha vzdolž grebena. Če je greben pravokoten na smer vetra, se bo prek njega dvigovalo največ zraka. Velikost vertikalne hitrosti je tako odvisna od nagiba reliefa v smeri pritekajočega zraka oziroma od nagiba tokovnic. Če torej zaradi splošnega gibanja zraka v pretežno stabilni atmosferi (stabilna atmosfera je takšna, ki se nerada vertikalno meša) vetrovi naletijo na gorske grebene, se pretakajo čeznje; pri tleh bolj zamotano, v višinah pa bolj zglajeno. Slika 2 prikazuje nekaj zglajenih tokovnic nad razgibanim gorskim reliefom.

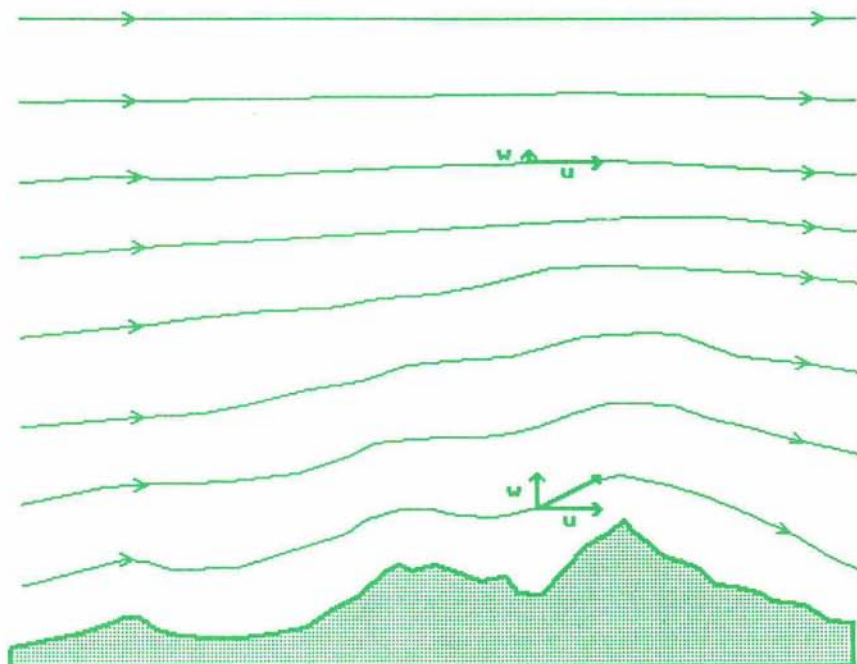
Dejanski relief je v resnici tridimenzionalen in je sestavljen iz množice raznolikih oblik, ki so glede na veter najrazličneje orientirane. Vetrovi se tako

ponekod dvigujejo prek grebenov, drugod pa oblike obtekajo.

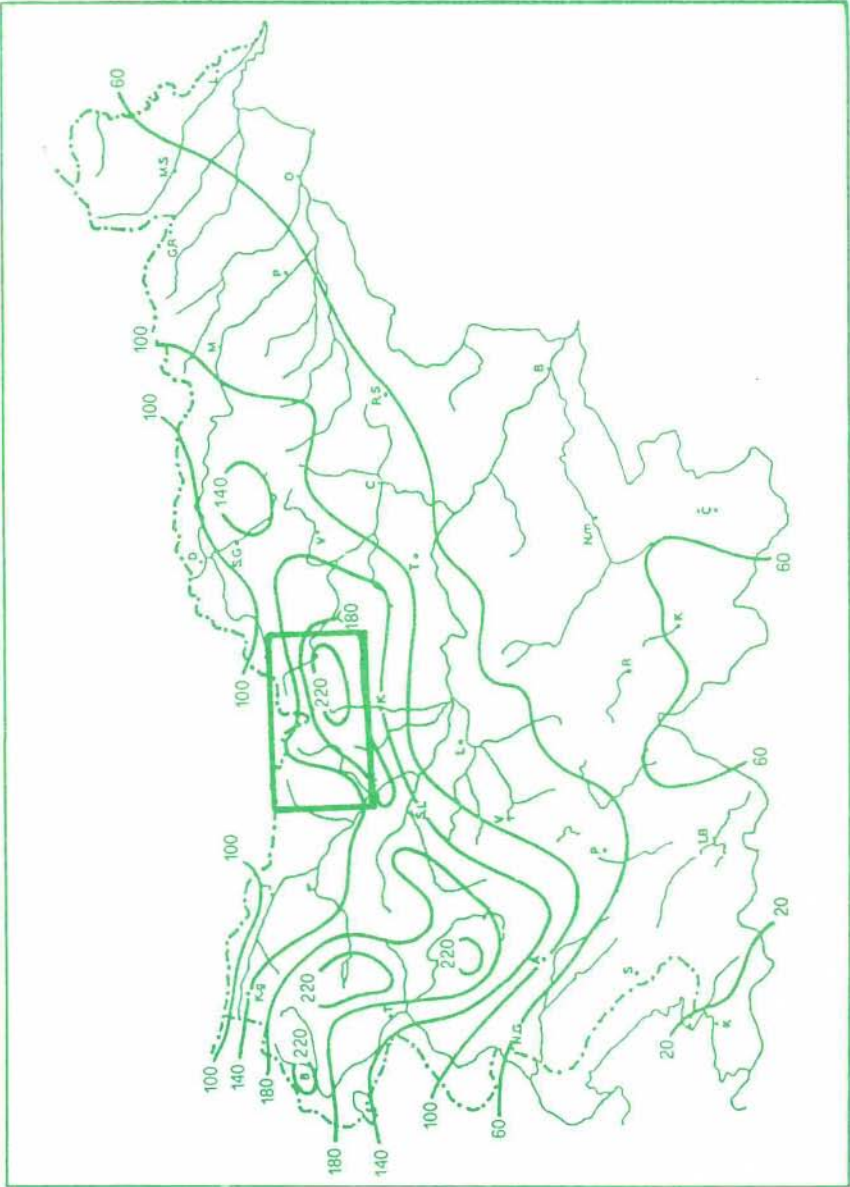
Natančno določanje poti pretakanja zraka prek gorske pregrade, ob kateri pride do frontalnih in konvektivnih padavin, je zelo zamotano. V našem primeru bomo prikazali le tisti del vertikalne hitrosti vetra, ki nastane kot posledica dviganja ob reliefu.

Za primer si oglejmo velike padavine v severni Sloveniji, ki so povzročile poplave v Savinjski dolini 1. in 2. novembra 1990. Na sliki 3 si lahko ogledamo 48-urne količine padavin. Opazimo lahko, da sta nad Slovenijo bili takrat dve maksimalni področji padavin, prvo v Julijskih Alpah (Bohinj 280 mm, Kanin 220 mm, Vojsko 220 mm), drugo pa ob jugovzhodnem delu Kamniških in Savinjskih Alp (med dolino Kamniške Bistrice in Logarsko dolino 230 mm).

Razen omenjenih maksimumov se je pojavil še dodatni maksimum na Pohorju, vendar je tam padlo kar za 100 mm manj dežja kot pa na področjih največjih padavin. Zanimivo je, da je na privetrni strani Kamniško Savinjskih



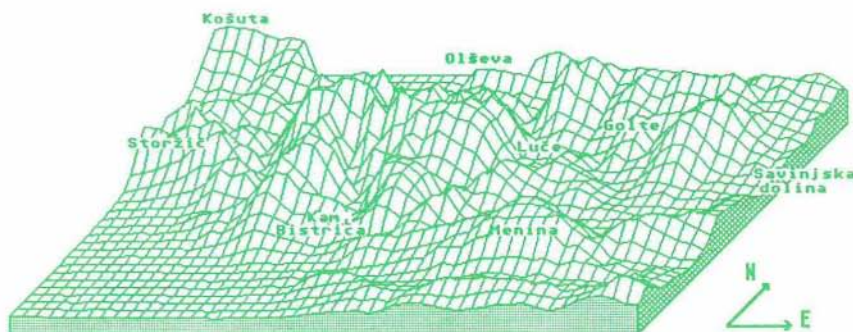
Slika 2. Nekaj idealiziranih tokovnic nad presekom razgibanega terena.



Alp (npr. postaja Kamniška Bistrica) padlo skoraj dvakrat toliko padavin kot pa v zavetrju (v Logarski dolini, postaja Solčava).

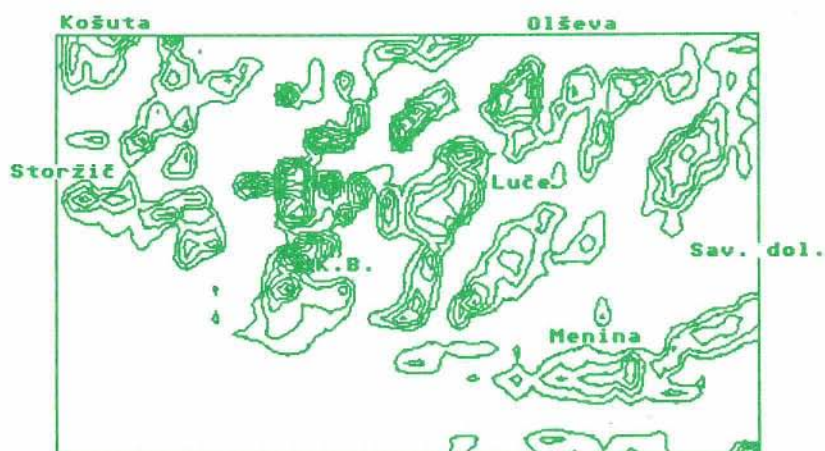
Z meteorološkimi meritvami so takrat ugotovili, da so nad severovzhodno Slovenijo pihali jugovzhodni vetrovi. Na sliki 5 je za območje Kamniško Savinjskih Alp prikazano, koliko padavin bi dobili, če bi bile padavine povzročene le z dviganjem zraka zaradi gorske pregrade. Pri tem smo privzeli, da je debelina dvigajoče se plasti povsod enaka ($\Delta p = 500 \text{ mb}$) in da je tudi vlažnost zraka povsod enaka.

Na sliki 5 prikazana razporeditev padavin pokaže, da lahko s sorazmerno preprostim računom orografskega dviga in z njim povzročene količine padavin, dobimo mnogo natančnejšo sliko razporeditve padavin, kot pa jo dobimo z redkimi terenskimi meritvami (slika 3). Tako izračunane količine padavin pojasnijo v precejšnji meri prostorsko razporeditev izjemnih padavin in poplav, ki so v začetku novembra 1990 povzročile naravno katastrofo v Kamniških in Savinjskih Alpah ter v Savinjski dolini. Velike količine padavin nad pobočji doline Kamniške Bistrice (oznaka K. B. na sliki 5) in zahodno od Luč (Veža, Podvolovjek) so padle na že poprej namočena tla in so zato takoj odtekle v vodotoke, ki so nato poplavalili doline. Padavine so nastale zaradi zelo počasi se premikajoče frontalne cone, ob kateri so se prožile tudi nevihte, ki so se zaradi prisilnega dviga ob gorski pregradi še okrepile.

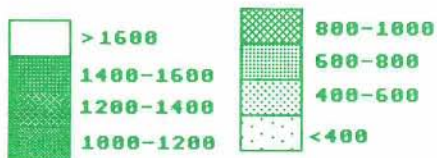


Slika 4. Relief Kamniško Savinjskih Alp, aksonometrična projekcija, pogled z juga. Mrežna razdalja je 1 km.

Slika 3. 48-urne višine padavin; vsota za 1. in 2. november 1990, območje Kamniško Savinjskih Alp je uokvirjeno. (Povzeto po reviji UJMA 5 (1991) str.12) (levo)



Slika 5. Količina padavin v 48 urah nad delom severne Slovenije izračunana le z orografskim dvigom, vsaka izolinija predstavlja $20 \text{ kg m}^{-2} \text{ h}^{-1}$. Spodnja slika je zemljevid obravnavanega področja



Zdravko Petkovšek, Tomaž Vrhovec

REŠITVE NALOG

$$\operatorname{tg} \frac{\alpha}{2} + \operatorname{tg} \frac{\beta}{2} + \operatorname{tg} \frac{\gamma}{2} = 2 - \text{Rešitev s str. 121}$$

Zaznamujmo

$$\operatorname{tg} \frac{\alpha}{2} = p, \quad \operatorname{tg} \frac{\beta}{2} = q, \quad \operatorname{tg} \frac{\gamma}{2} = r.$$

Po adicijskem teoremu imamo

$$\begin{aligned} \operatorname{tg} \frac{\gamma}{2} &= \operatorname{tg}(90^\circ - \frac{\alpha + \beta}{2}) = \operatorname{ctg}(\frac{\alpha}{2} + \frac{\beta}{2}) = \\ &= (1 - \operatorname{tg} \frac{\alpha}{2} \operatorname{tg} \frac{\beta}{2})(\operatorname{tg} \frac{\alpha}{2} + \operatorname{tg} \frac{\beta}{2}). \end{aligned}$$

Torej je med števili p, q, r zveza

$$r = \frac{1 - pq}{p + q},$$

ki jo lahko pišemo v obliki

$$pq + pr + qr = 1. \quad (*)$$

Denimo, da nobeden od kotov α, β, γ ni top. Potem je $0 < \frac{\alpha}{2} \leq 45^\circ$, torej $0 < \operatorname{tg} \frac{\alpha}{2} = p \leq 1$. Podobno $0 < q \leq 1$ in $0 < r \leq 1$. Od tod sledi

$$p \geq p^2, \quad q \geq q^2, \quad r \geq r^2.$$

Enakost nastopi v kakšni izmed teh neenačb natanko tedaj, kadar je ustrezen kot 90° . Ker je v trikotniku kvečjemu en kot 90° , velja enačaja kvečjemu v eni od teh neenačb. Zato je

$$p + q + r > p^2 + q^2 + r^2.$$

Naj velja zveza $p + q + r = 2$. Z upoštevanjem enačbe (*) dobimo

$$2 = p + q + r > p^2 + q^2 + r^2 = (p + q + r)^2 - 2(pq + pr + qr) = 2.$$

Ta neenakost pa je protislovna. Zato je eden od kotov α, β, γ top.

Ivan Vidav

RAČUNALNIŠTVO

RAZPOZNAVANJE CIFER - bralni pomnilnik in nevronska omrežja

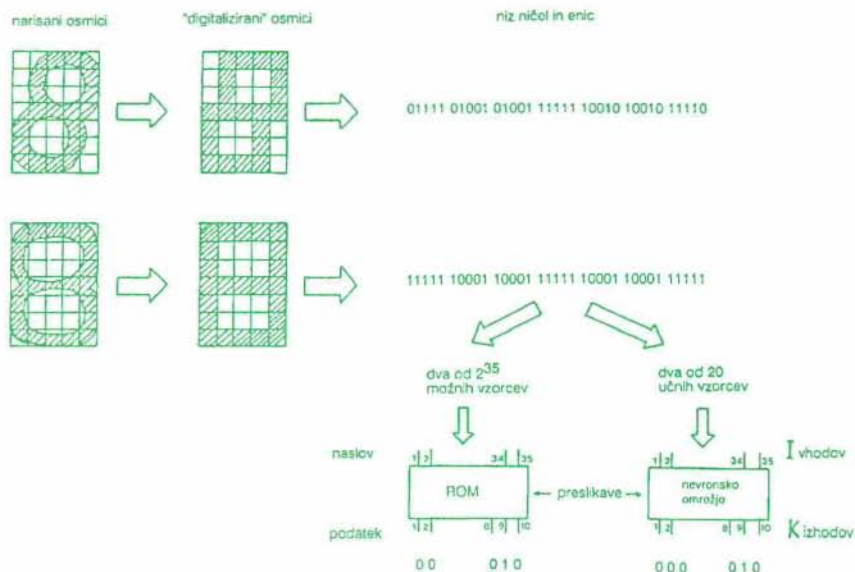
Vsak, ki pozna osnove računalništva, je gotovo že slišal za bralne pomnilnike ROM-e. Zanje lahko rečemo, da so v veliki meri pripomogli k hitremu razvoju centralnih procesnih enot, pa tudi k preprostejšemu hranjenju zagonske programske opreme. Kratica ROM prihaja iz angleščine, pomeni namreč Read Only Memory. Ime samo pove, da so to pomnilniki, ki so namenjeni trajnemu hranjenju informacije in iz katerih lahko med uporabo le beremo. Vsebinsko pa zapisujemo v ROM-e na naslednje načine: v postopku izdelave integriranega vezja (ROM), z enkratnim kasnejšim vpisovanjem (PROM) in z večkratnim vpisovanjem ter brisanjem z ultravijolično svetlobo (EPROM) ali električnim brisanjem (EEPROM). Navedenim načinom zapisovanja v bralni pomnilnik rečemo tudi **programiranje**.

Najbolj znani so ROM-i, ki jih lahko večkrat programiramo in brišemo. Uporabljamo jih predvsem kot stalne pomnilnike. Vhodi, njihovo število bomo označili z I , določajo naslov ene od 2^I možnih lokacij, njeno vrednost pa dobimo na K izhodih. Verjetno niste vedeli, da so ROM-i primerni tudi za realizacijo različnih logičnih funkcij. ROM lahko nadomešča poljuben sklop logičnih vrat AND ter OR. To pa še ni vse! V splošnem je programirani ROM vezje, ki omogoča izračun poljubne preslikave 2^I vhodnih vrednosti v izhodne. To njegovo lastnost lahko s pridom uporabimo pri razpoznavanju cifer.

Posebno zanimive so preslikave črno-belih slik, tiskanih ali pisanih znakov, običajno cifer, lahko pa tudi črk. Predstavljajmo si, da čez povečano tiskano ali pisano cifro postavimo mrežo, sestavljeno na primer iz $5 \times 7 = 35$ polj. Če izberemo vrednost "0" za vsa tista polja, ki so bolj bela kot črna, in "1" za tista, ki so bolj črna kot bela, dobimo niz dolžine 35, sestavljen iz samih "0" in "1". Takemu postopku pravimo **digitalizacija**. Za razpoznavanje takih slik potrebujemo le še ROM, ki ima 35 vhodov oziroma 2^{35} lokacij, kamor shranimo različne digitalizirane slike zapisanih cifer. Tu seveda upoštevamo še vse take slike, ki so delno pokvarjene in ne ustrezajo v celoti nobeni cifri. Na kratko, v takem ROM-u se nahajajo **prav vse** možne digitalizirane slike cifer na mreži velikosti 5×7 najrazličnejših oblik, velikosti in pisav. Če se omejimo samo na ločevanje cifer, tedaj zadošča 10 izhodov, za vsako cifro svoj. Naj prvi izhod predstavlja cifro "0", drugi izhod cifro "1", zadnji izhod pa naj ustreza cifri "9". Na sliki 1 vidimo pričakovani odziv, za cifro "8" vrednost "1" na devetem izhodu. Vse lepo in prav! Toda kaj kmalu ugotovimo, da tako velikega bralnega pomnilnika - nimamo. Za zapis vseh digitaliziranih slik cifer bi namreč potrebovali bralni pomnilnik približne

velikosti

$$2^{35} \times 10 \text{ bitov} = 3.436 \cdot 10^{10} \times 10 \text{ bitov} = 34360 \times 10 \text{ Mbitov!}$$



Slika 1. Kako dobimo niz "0" in "1" iz cifre osem?

To pa je že tolikšen pomnilnik, kakršnega nimajo niti najboljši (osebni) računalniki skupaj z diskovnimi enotami. Vedimo tudi, da smo primer poenostavili, saj smo vzeli dokaj redko mrežo in zaradi tega vzorce tudi precej popačili. Kaj bi šele bilo, če bi na primer potrebovali mrežo velikosti 10 x 20 ali celo večjo. Z njo bi vsekakor dosegli neprimerno boljše pokrivanje napisane cifre z mrežo in s tem tudi natančnejše razpoznavanje. Toda pravkar opisani pristop za ta namen ni primeren, saj zahteva bralne pomnilnike skoraj nepredstavljljive velikosti.

Torej tu smo! To je zadosten razlog, da si z bralnimi pomnilniki nimamo več kaj pomagati. Za razpoznavanje cifre je bilo razvitih veliko algoritmov, ki temeljijo na črno-beli sliki, iskanju posebnosti vsake cifre in ugotavljanju njene pripadnosti. Tovrstna programska oprema je ponavadi obsežna in največkrat neprimerna za uporabo v realnem času. Ker gre pri razpoznavanju vselej za preslikavo iz opazovane cifre v njeno ime in ker tovrstne preslikave z ROM-om

ne moremo narediti, se spomnimo prispevkov o nevronskih omrežjih, ki sta bila objavljena v tretji in četrti številki Preseka 17 (1989/90). Pokazali bomo, da zelene preslikave hitro in enostavno naredimo z nevronskimi omrežji, če jih le omejimo na računanje z dvojiškimi vrednostmi. Le-te smo pri razpoznavanju tudi uporabljali! Zato bodo vhodi in izhodi omrežja imeli vrednosti ali 0 ali 1. Tudi zaviralne in vzbujevalne uteži bodo imele le dvoje različnih vrednosti 0 ali 1, a različnih po predznakih. Nevronsko omrežje z 200 vhodi in 10 izhodi ni nič posebnega. Za učenje omrežja potrebujemo le še spisek učnih vzorcev. Le-teh bo kakih sto, za vsako cifro po deset različnih.

Naše omrežje naj sestavlja J nevronov na prvem nivoju, K nevronov na drugem, vhodov v omrežje naj bo I , medtem ko je število izhodov K . Izhodne funkcije nevronov na drugem nivoju, označimo jih z y^k za $k = 1, 2, \dots, K$, lahko enostavno izrazimo kot vsoto produktov izhodov prvega nivoja x_j in uteži $w_{j,k}$:

$$\text{če je } \sum_{j=1}^J w_{j,k} \cdot x_j \geq 1, \text{ tedaj je } y_k = 1, \text{ sicer pa je } y_k = 0.$$

Podobno izračunamo tudi izhode s prvega nivoja x_j . Med vhodi nevrona je potrebno upoštevati tudi pragovni vhod. Njegova vrednost je sicer 1, vrednost uteži pa izračunamo. S predznakom uteži $w_{j,k}$ povemo značaj povezave med nevronoma. Pozitivne uteži so na vzbujevalnih povezavah, negativne pa na zaviralnih.

Ker v našem primeru obdelujejo nevroni samo dvojiške vrednosti, se pri računanju izhoda nevrona izognemo realni aritmetiki. Če je $x_j \neq 0$, k delni vsoti prištejemo utež $w_{j,k}$, torej prištejemo ali odštejemo 1. Če pa je $x_j = 0$, tedaj j -ti vhod sploh ne vpliva na vrednost y_k , tako da lahko preidemo kar na naslednji vhod nevrona. Tak preprost dvojiški ali Boolov nevron lahko učimo tudi drugače, kot smo to prebrali v omenjenih prispevkih. Posluževali se bomo kar naključnega iskanja primernih uteži. Naključno izberemo utež in na omrežje postavimo učne vzorce, drugega za drugim. Če je rezultat preslikave ugodnejši od prejšnjega, tedaj novo utež zadržimo. Če pa se preverjanje kje zalomi in so rezultati preslikave slabši, tedaj naključno izberemo novo utež. Učenje je uspešno končano, ko najdemo take vrednosti uteži, da so izračunani izhodi enaki pričakovanim za vse učne vzorce. Če učenja ne moremo uspešno dokončati, tedaj ali dodamo nov nevron v prvem nivoju in s tem povečamo J ali pa povečamo število vhodov I in tako dodamo nov pragovni vhod.

Za lažje razumevanje bomo nevronsko omrežje s slike 2 učili z logično funkcijo EX-OR (ekskluzivni ali). Na sliki so uteži določene tako, da omrežje

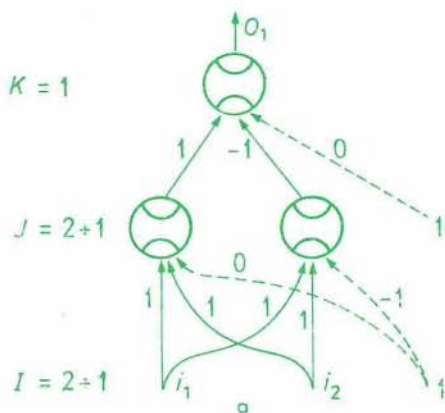
pravilno izračuna to funkcijo.

Učenje začnemo tako, da za vsem utežem damo naključne začetne vrednosti (-1, 0 ali +1) ter za prvega od štirih učnih vzorcev postavimo vhodni vrednosti i_1 in i_2 na omrežje in izračunamo odgovor o_1 . Nato poskusimo še z drugimi učnimi vzorci. Če dobimo pri vseh štirih učnih vzorcih skupno več pravih rešitev, ali pa vsaj toliko kot pri predhodnih utežeh, uteži zadržimo, sicer pa vrnemo stare vrednosti. Če vsi odgovori niso bili pravilni, nato naključno izberemo vrednost nove uteži. Postopek ponavljamo tolikokrat, dokler za vse štiri učne kombinacije ne dobimo pravih izhodov.

Iz izkušenj vemo, da se tako omrežje kaj hitro nauči, recimo v tisoč ali več poizkusih, ki jih osebni računalnik naredi v nekaj sekundah. Preslikavo samo, ko je omrežje enkrat naučeno, pa izračunamo v trenutku.

Vrnimo se še enkrat k našim učnim vzorcem na mreži 5×7 . Če primerjamo ugotovitve o razpoznavanju z vezjem ROM in z nevronskega omrežjem, opazimo naslednje:

- Vezje bralnega pomnilnika (če bi le-tega res imeli) zahteva tabeliranje vseh možnih digitaliziranih slik, ki jih lahko dobimo na mreži 5×7 . Seveda je nekaj smiselnih, veliko pa je takih, ki nimajo pravega pomena, na primer same 0 ali same 1. Ko na vhode postavimo neko vrednost, nam vezje - glede na vsebino lokacije, ki je določena z vhodom - da odgovor. Le-tega spremenimo tako, da zapišemo novo vrednost na ustrezno lokacijo v ROM-u.

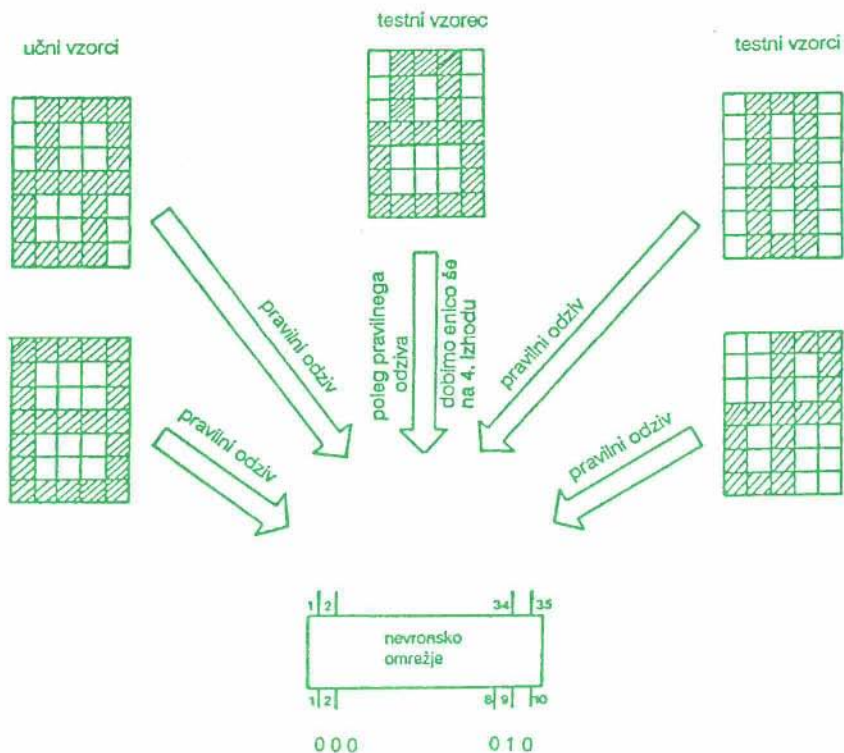


Slika 2a. Nevronske omrežje

i_1	i_2	O_1
0	0	0
0	1	1
1	0	1
1	1	0

b

Slika 2b. Tabela logične funkcije EX-OR



Slika 3. Preslikava vzorcev nevronskega omrežja, učni vzorci in poljubni testni vzorci.

- Nevronske omrežje, kot smo spoznali, pa naučimo le **nekaterih** učnih vzorcev. Ko je vezje naučeno, tedaj nam brez napake odgovarja na učne vzorce. Kaj pa na drugačne vzorce? Ugotovimo, da tudi na nekatere druge, neznane vzorce daje največkrat pravilne, ali pa vsaj smiselne odgovore. Nevronske omrežje zna torej **samo** poiskati odgovor, pravimo, da zna posploševati.

To zanimivost bomo s pridom uporabljali predvsem pri obsežnih zgledih, takih z več sto nevroni v več nivojskem omrežju. Pomembno je tudi, da ni potrebno vezju podati prav vseh možnih vzorcev, pač pa le nekaj značilnih. Kadar so odgovori slabi, lahko omrežje še vedno dodatno poučimo o novih vzorcih.

Veslko Guštin

REŠITVE NALOG

RACIONALNI SINUSI KOTOV V TRIKOTNIKU – Rešitev s str. 117

1. rešitev: Naj bodo a, b, c stranice trikotnika in R polmer očrtanega kroga. Potem je

$$a = 2R \sin \alpha, \quad b = 2R \sin \beta, \quad c = 2R \sin \gamma.$$

Po kosinusnem izreku izračunamo

$$\cos \alpha = \frac{b^2 + c^2 - a^2}{2bc}.$$

Če vstavimo za a, b, c zgornje izraze, dobimo

$$\cos \alpha = \frac{\sin^2 \beta + \sin^2 \gamma - \sin^2 \alpha}{2 \sin \beta \sin \gamma}.$$

Vidimo, da je $\cos \alpha$ racionalno število, če so $\sin \alpha, \sin \beta, \sin \gamma$ racionalni.

2. rešitev: Po adicijskem teoremu imamo

$$\sin \gamma = \sin(\alpha + \beta) = \sin \alpha \cos \beta + \sin \beta \cos \alpha.$$

Od tod sledi

$$\sin \gamma - \sin \beta \cos \alpha = \sin \alpha \cos \beta.$$

S kvadriranjem dobimo

$$\sin^2 \gamma - 2 \sin \beta \sin \gamma \cos \alpha + \sin^2 \beta (1 - \sin^2 \alpha) = \sin^2 \alpha (1 - \sin^2 \beta).$$

Ker je v trikotniku vselej $\sin \beta \neq 0$ in $\sin \gamma \neq 0$, pove ta enačba, da je $\cos \alpha$ racionalno število, če so $\sin \alpha, \sin \beta, \sin \gamma$ racionalni.

Ivan Vidav

TURNIR - Rešitev s str. 100

Za predčasen zaključek turnirja je moral imeti Matevž najmanj tri točke več od Matjaža, torej vsaj osem. Za tolikšno število točk je moral dobiti vsaj štiri igre. Ker sta odigrala kvečjemu devet iger in je imel Matjaž večje število posamičnih zmag, je edina možnost, da sta zaključila po deveti igri. Pet jih je dobil Matjaž, štiri Matevž.

Marija Vencelj

STRELA – Rešitev naloge iz P XVIII/6, str. 321

Na uredništvo Preseka sta prispela dva odgovora na vprašanja iz nagradne naloge Strela. Marko Žnidarič iz Miklavža je s pomočjo tabele za $n \leq 8$ dobil pravilne formule za število presečišč v vseh primerih, Tilen Koklič iz Celja pa je našel pravo število presečišč za nesklenjene lomljenke in za sklenjene lomljenke z lihim številom daljic. Žal nihče dobljenih rezultatov ni dokazal (niti dokazoval). Za sodelovanje in vzpodbudo smo ju nagradili s knjigo Jožeta Grassellija Diofantske enačbe.

Oglejmo si zdaj rešitev naloge. Lotili se bomo splošnega primera in najprej izračunali največje število presečišč *nesklenjene* strele (lomljenke), sestavljene iz n daljic. To število bomo označili z a_n .

Začnimo na začetku strele in nizajmo daljice do njenega konca, pri tem pa sproti štejmo nastajajoča presečišča. Šele ko rišemo tretjo daljico, lahko nastane prvo presečišče, s četrto nastaneta največ dve novi, peta daljica prispeva največ tri ... Če tako nadaljujemo do konca strele, dobimo oceno

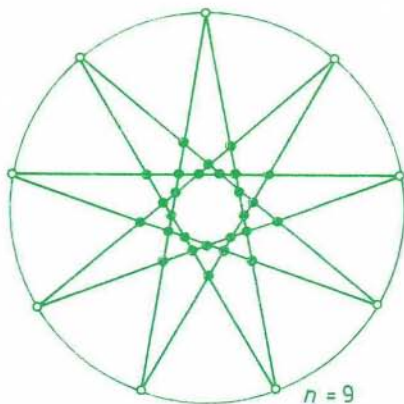
$$a_n \leq 1 + 2 + \dots + (n-2) = (n^2 - 3n + 2)/2.$$

Ker za vsak $n \in \mathbb{N}$ obstaja lomljenka iz n daljic, ki ima $(n^2 - 3n + 2)/2$ sečišč (poišči kakšno!), velja

$$a_n = \frac{1}{2}(n^2 - 3n + 2).$$

S *sklenjeno* lomljenko bo več dela. Označimo z b_n največje število presečišč sklenjene strele (lomljenke), sestavljene iz n daljic. Podobno kot prej postopoma sestavimo celotno lomljenko. Ko narišemo zadnjo daljico, dobimo največ $(n-2) - 1 = n-3$ novih presečišč (ker zadnja daljica ne seče prve), torej velja ocena

$$b_n \leq a_n - 1 = (n^2 - 3n)/2.$$



Slika 1

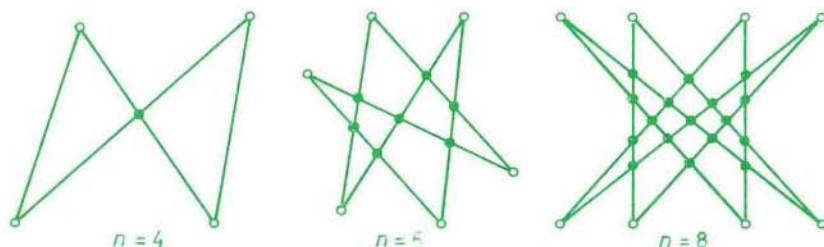
Pri *lih* n obstaja sklenjena lomljenka, ki ima natanko $(n^2 - 3n)/2$ presečišč (glej sliko 1), zato za lihe n velja

$$b_n = \frac{1}{2}(n^2 - 3n).$$

Pri *sodih* n pa je problem bolj zapleten. Privzemimo, da je tudi tu b_n kvadratna funkcija spremenljivke n , kot za lihe n . Zapišimo

$$b_n = An^2 + Bn + C$$

in s pomočjo tabele, ki spremlja sliko 2,



Slika 2

$$b_4 = 1, \quad b_6 = 7, \quad b_8 = 17$$

izračunajmo A , B in C . Tako pridemo do formule

$$b_n = \frac{1}{2}(n^2 - 4n + 2).$$

Dokazali bomo, da je pravilna.

Naj bo n sodo naravno število, $n > 4$, L_n pa sklenjena lomljenka, sestavljena iz n daljic. Na vsaki daljici te lomljenke je očitno največ $n - 3$ sečišč. Če jih je na daljici AB točno $n - 3$, potem ležita njeni sosednji daljici iz L_n na nasprotnih bregovih premice AB (zakaj?). Zato se ne sekata in je na vsaki kvečjemu $n - 4$ sečišč (glej sliko 3).

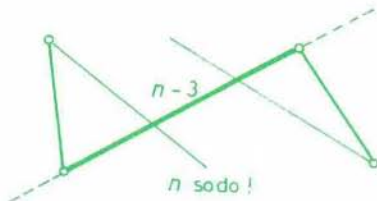
Denimo, da ima L_n več kot $(n^2 - 4n + 2)/2$ presečišč. Pri tej predpostavki bomo konstruirali sklenjeno lomljenko L_{n-2} iz $n - 2$ daljic, ki ima več kot

$$\frac{1}{2}((n-2)^2 - 4(n-2) + 2) = \frac{1}{2}(n^2 - 8n + 14)$$

presečišč. V ta namen najprej dokažimo, da obstajata taki sosednji daljici AB , BC lomljenke L_n , ki vsebujeta zaporedoma $n-3$ in $n-4$ presečišč.

Če to ne drži, vsebuje vsak par sosednjih daljic lomljenke L_n največ

$$(n-3) + (n-4) - 1 = 2n-8$$



Slika 3

presečišč. Vsi pari sosednjih daljic dajo skupaj največ $n(2n-8)$ sečišč, vendar je vsako šteto štirikrat. Zato celotna lomljenka nima več kot

$$\frac{1}{4}n(2n-8) = \frac{1}{2}(n^2 - 4n)$$

presečišč, kar pa nasprotuje naši predpostavki.

Zaznamujmo daljici, ki sta sosednji paru AB , BC iz lomljenke L_n z ZA in CD . Vemo, da ZA in BC ležita na nasprotnih bregovih premice AB . Poleg tega daljico AB sečejo vse daljice lomljenke L_n , razen ZA , AB in BC , daljico BC pa sekajo vse, razen ZA , AB , BC in CD .

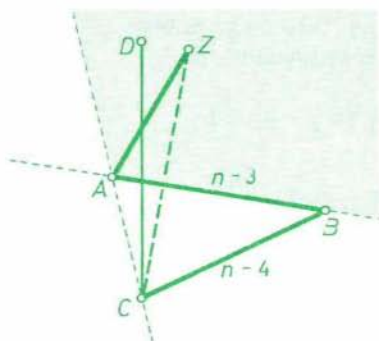
Zdaj ločimo dva primera:

1. Če daljici ZA in BC ležita na istem bregu premice AC , zaporedje daljic ZA , AB , BC v lomljenki L_n nadomestimo z daljico ZC in tako dobimo sklenjeno lomljenko L_{n-2} .

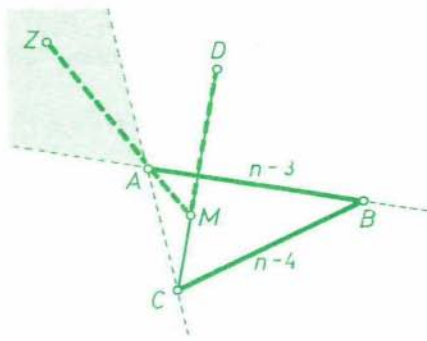
Pri tem smo izgubili $2n-7$ presečišč na AB in BC ter presečišča na ZA , pridobili pa presečišča lomljenke L_{n-2} na ZC . Ker vsaka daljica lomljenke L_n , razen CD , ki seka ZA , seka tudi ZC (zakaj?), ima L_{n-2} več kot

$$\frac{1}{2}(n^2 - 4n + 2) - (2n - 6) = \frac{1}{2}(n^2 - 8n + 14)$$

presečišč.



Slika 4



Slika 5

2. Če daljici ZA in BC ležita na nasprotnih bregovih premice AC , premica ZA seka daljico CD . Njuno sečišče označimo z M , zaporedje daljic ZA, AB, BC, CD lomljenke L_n pa nadomestimo s parom daljic ZM, MD in tako dobimo L_{n-2} .

Ker daljice lomljenke L_n , ki sekajo MC , sovpadajo s tistimi, ki sekajo MA (zakaj?), smo pri prehodu od L_n k L_{n-2} izgubili le $2n-7$ presečišč z daljic AB in BC . Zato ima lomljenka L_{n-2} več kot

$$\frac{1}{2}(n^2 - 4n + 2) - (2n - 7) = \frac{1}{2}(n^2 - 8n + 16)$$

presečišč.

V obeh primerih smo našli sklenjeno lomljenko L_{n-2} , ki ima več kot

$$\frac{1}{2}((n-2)^2 - 4(n-2) + 2)$$

presečišč. Na enak način, kot smo prišli od L_n do L_{n-2} , postopoma pridemo do sklenjene lomljenke L_4 , ki jo sestavljajo štiri daljice in ima več kot $(4^2 - 4 \cdot 4 + 2)/2 = 1$ sečišče. Take lomljenke ni, zato velja ocena

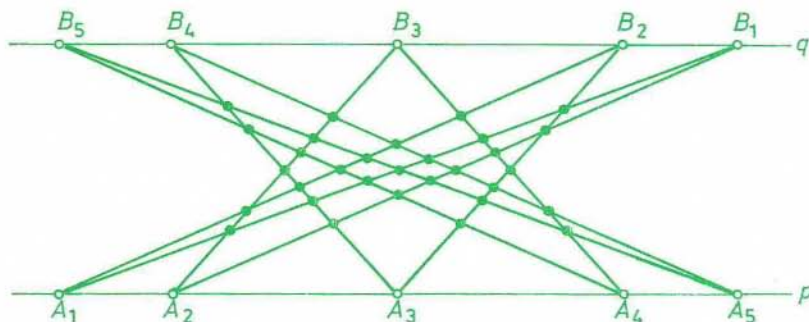
$$b_n \leq \frac{1}{2}(n^2 - 4n + 2).$$

V zgornji oceni velja enačaja, ker za vsak sodi $n \in \mathbb{N}$ obstaja sklenjena lomljenka iz n daljic, ki ima $(n^2 - 4n + 2)/2$ presečišč. Najdemo jo takole:

Točke $A_1, A_2, \dots, A_{n/2}$ nanizamo zapored na premico a , na vzporednico

b pa v obratni smeri točke $B_1, B_2, \dots, B_{n/2}$, tako da se nobene tri daljice $A_i B_j$ ne sežejo v isti točki. Iskano lomljenko sestavimo iz daljic

$$A_1 B_1, A_{n/2} B_{n/2} \text{ in } A_i B_j \text{ za } |i - j| = 1$$



Slika 6

Ker je na daljicah $A_1 B_1$ in $A_{n/2} B_{n/2}$ po $n - 3$ presečišč, na ostalih $n - 2$ daljicah $A_i B_j$ pa jih je po $n - 4$ na vsaki, je na vsej lomljenki

$$\frac{1}{2}(2(n - 3) + (n - 2)(n - 4)) = \frac{1}{2}(n^2 - 4n + 2)$$

presečišč.

Boris Lavrič

NAŠE NEBO IN ZEMLJA

1992

ASTRONOMSKE EFEMERIDE 1992

UMETNI SATELITI

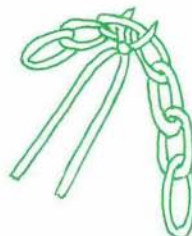
od 1.7.1990 do 30.6.1991.

POTRESI 1990

Maloprodajna cena 200 SLT (160 SLT).

TEHTANJE Z VERIGO

Verigi z dvema koncema, pri kateri se členki vrstijo po eden drug za drugim, bomo rekli nesklenjena veriga. Če taki nesklenjeni verigi preščipnemo tretji člen, razpade na tri dele (2 člena + 1 člen + 4 členi), ki jih lahko uporabimo kot uteži za tehtanje celih količin od 1 do 7 (pri tem je seveda utežna enota teža enega člena).



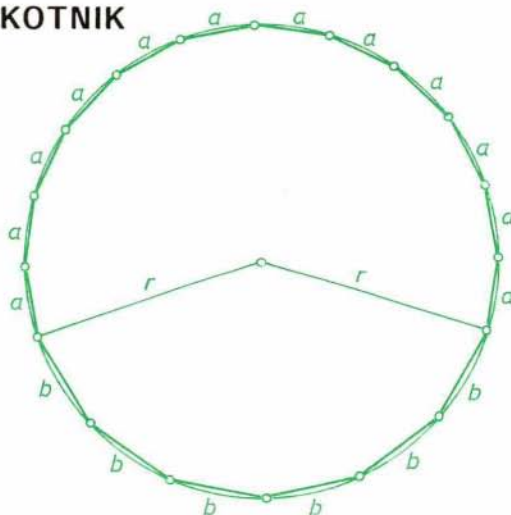
- Največ koliko členov sme biti dolga veriga, da jo bomo lahko z le dvema preščipnjenima členoma spremenili v uteži za tehtanje vseh celih količin od 1 do teže verige?
- Enako vprašanje za tehtanje količin, za katere **vemo**, da so cele.

Marija Vencelj

TETIVNI OSEMNAJSTKOTNIK

Dvanajst zaporednih stranic konveksnega tetivnega 18-kotnika meri a , ostalih šest stranic pa b . Poišči zvezo med a , b in polmerom r očrtane krožnice.

Kolikšen je r , če je $a = 13$, $b = 146$?



Boris Lavrič

SISTEMI LINEARNIH ENAČB

V peti številki lanskega letnika Preseka smo objavili *Malo zbirko nalog Leonarda Fibonaccija*. Ta je naletela pri bralcih na ugoden odmev, saj smo dobili v uredništvo lep kupček vaših pism z izdelanimi rešitvami Fibonaccijevih nalog. Nekaj rešitev pa je verjetno ostalo kar v domačih predalih.

Odločili smo se torej, da nadaljujemo z objavljanjem tovrstnih nalog, te pa bodo v prihodnje urejene tematsko. Tako boste v tej in kasnejših številkah Preseka našli naloge, ki od reševalca zahtevajo predvsem znanje o reševanju sistemov linearnih enačb (ali pa spretnost, s pomočjo katere kar "po domače" zaobidete ustrezne teoretične kalupe).

Seveda pričakujemo še naprej, da nam boste pošiljali izdelane rešitve nalog. Kakor zmeraj, bomo tudi v prihodnje najboljše rešitve nagrajevali s knjigami iz področja matematike. Napišite tudi šolo in razred, ki ju obiskujete.

Vilko Domajnko

1. Dva obroča. Vsota ene sedmine teže prvega in ene enajstine teže drugega obroča je 1. Razlika teže prvega in sedmine njegove teže je enaka razliki teže drugega in enajstine njegove teže. Koliko tehta vsak izmed obročev?

(Babilon, pribl. 1000 pr.n.št.)

2. Neki čarovnik, čigar moč urokov je bila izjemna in čigar znanje o čudodelni medicini je bilo prav tako nepredstavljivo globoko, se je znašel slučajno med gledalci borbe dveh petelinov. A še preden sta se petelina dodobra spoprijela, je pristopil k lastniku prvega petelina in mu rekel: "Poslušaj, če zrnaga tvoj petelin, mi boš dal ves tisti znesek, ki si ga stavil na svojega petelina. Če pa boj izgubi, ti jaz povrnem dve tretjini tega tvojega zastavljenega denarja." Potem je premeteni čarovnik odšel še k lastniku drugega petelina in mu predlagal podobno kakor prvemu, le da bi temu povrnil kar tri četrtnine njegovega zastavljenega denarja. V vsakem primeru bi tako čarovnik dobil od prvega in od drugega lastnika skupaj dvanajst zlatnikov.

Povej mi sedaj, ti, ki gre o tebi naokrog glas prvovrstnega matematika, koliko je vsak izmed obeh lastnikov stavil na svojega petelina.

(Mahāvira, okoli 850)

3. Dve njivi merita skupaj 30 kvadratnih enot. Na obeh njivah skupaj je bilo požetih 18'20 meric žita. Veš, da bi 30 kvadratnih enot prve njive dalo 20'0 meric žita in da bi znova 30 kvadratnih enot druge njive dalo le 15'0 meric žita. Izračunaj površini obeh njiv. (Pojasnilo: v babilonskem šestdesetiškem sistemu pomeni na primer 18'20 število $18 \cdot 60^1 + 20 \cdot 60^0$.)

(Babilon, pribl. 1000 pr.n.št.)

4. Dva možakarja sta dobila v dar nekaj kovancev. Med seboj sta si jih takole razdelila: če k številu kovancev prvega dodaš polovico števila kovancev drugega ali pa, če k številu kovancev drugega dodaš dve tretjini števila kovancev prvega, je to zmeraj eno in isto. V obeh primerih dobiš namreč osemindvajset. Koliko kovancev je dobil vsak izmed teh dveh?

(Sun Tzŭ, 3. stol.)

5. V trgovini imajo na zalogi tri različne vrste blaga: blago iz bombaža, iz kosmičaste svile in iz grobe svile. Nekoč so sklenili opraviti inventuro svojih zalog, kajti dobili so naročilo za izdelavo večjega števila oblek za vojsko. Poglejmo, kaj so pri tem ugotovili.

Če bi se odločili izdelati obleke iz bombažnega blaga in bi pri tem uporabili 8 bal na vsakih šest vojakov, bi jim zmanjkalo 160 bal; vendar pa bi jim ostalo v skladišču kar 560 bal bombaža viška, če bi uporabili po 9 bal za vsakih sedem vojakov.

Če bi se odločili, da obleke izdelajo iz kosmičaste svile, in bi pri tem uporabili po 150 liangov na vsakih osem vojakov, bi jim ostalo 16500 liangov te svile; le 14400 liangov tega istega blaga pa bi jim ostalo v primeru, če bi uporabili 170 liangov blaga na vsakih devet vojakov.

In nazadnje – če bi se odločili, da izdelajo obleke iz grobe svile, in bi je uporabili po 13 činov na vsake štiri vojake, bi jim zmanjkalo te svile za 6804 čine; toda bilo bi je natanko dovolj v njihovi trgovini, če bi je vzeli po 14 činov na vsakih pet vojakov.

Izvedeli bi radi, koliko mož šteje vojska, za katero je treba izdelati obleke, koliko bal bombažnega blaga je v trgovini, koliko liangov je tam kosmičaste svile in koliko činov grobe svile.

(Pojasnilo: čin in liang sta starokitajski utežni meri. 1 čin je 16 liangov, obenem pa približno ustreza vrednosti polovice kilograma.)

(Qin Jiushao, 1202 - 1261)

6. Nekdo je rekel: "Daj mi sto zlatnikov, prijatelj, pa bom postal dvakrat tako bogat kakor ti." Mu odgovori drugi: "A če mi daš ti le deset zlatnikov, postanem kar šestkrat tako bogat kakor ti."
Povej, koliko zlatnikov ima vsak izmed obeh prijateljev pri sebi.

(*Bhaskara II., 1114 - ?*)

7. Dva trgovca z vinom sta prišla prodajat v Pariz. Prvi je imel s seboj štiriinšestdeset, drugi pa dvajset sodov vina. Ker pa nista imela dovolj denarja, da bi lahko poplačala z njim vse potrebne pristojbine, je dal prvi pet sodov vina in plačal povrh še štirideset frankov, drugi pa je dal za pristojbino dva soda vina, vendar pa je dobil še štirideset frankov nazaj. Koliko frankov stane vino in kolikšen je davek nanj?

(*N. Chuquet, okoli 1480*)

**Darjo Felda, Agata Tiegl, Matjaž Željko, REŠENE NALOGE
IZ MATEMATIKE S ŠOLSKIH IN IZBIRNIH TEKMOVANJ,
1975 - 1991, DMFA Slovenije, Ljubljana 1991, 136 str.
(Knjižnica Sigma ; 50) Cena 250.- SLT (200.- SLT)**

Zaradi vse večjega zanimanja za republiška tekmovanja srednješolcev v matematiki je DMFA Slovenije leta 1975 uvedla izbirna tekmovanja ("predtekmovanja") po šolah za uvrstitev na republiško tekmovanje. Kasneje se je na željo učiteljev s šol, ki imajo manj zahtevne programe matematike, ta predhodna faza razcepila na dve: na šolska tekmovanja, ki so bila namenjena predvsem šolam nenaravoslovne usmeritve, in na običajna izbirna tekmovanja. Člani komisije za popularizacijo matematike v srednjih šolah so tako ustvarili zajetno zbirko nalog najrazličnejših težavnostnih stopenj, ki pa so zelo blizu šolskemu programu matematike. V pričujoči knjižici so avtorji zbrali 384 nalog in jih opremili z rešitvami. Rešitve so lepo izdelane, včasih tudi v več različicah, in pomagajo čez čeri reševanja tistim, ki tega sami ne zmorejo. Mislim, da bo knjižica dobrodošel pripomoček tako profesorjem matematike po srednjih šolah, voditeljem krožkov in seveda tudi samim dijakom. Upam si trditi, da bo deležna celo večjega zanimanja kot zbirke nalog z republiških tekmovanj.

Gorazd Lešnjak

27. REPUBLIŠKO TEKMOVANJE OSNOVNOŠOLCEV IZ MATEMATIKE

V soboto, 18. maja 1991, se je 196 sedmošolcev in 374 osmošolcev, ki so se na občinskem tekmovanju najbolje odrezali, zbralo v Ljubljani, Mariboru, Celju, Kopru in Novi Gorici na republiškem tekmovanju.

Petnajstčlanska komisija je pripravila naloge, pregledala rešitve in določila kriterij za podelitev zlatih Vegovih priznanj. Na podlagi mnenja UO DMFA in republiškega sekretariata za notranje zadeve pa je tudi odločila, da se letos zaradi razmer v državi ne bomo udeležili zveznega tekmovanja v Črni gori.

Zlato Vegovo priznanje je prejelo 60 sedmošolcev in 125 osmošolcev, ki so dosegli vsaj 13 od 25 možnih točk.

Nagrajeni so bili:

7.razred

- I. nagrada: Drago BOKAL, OŠ Dolomitskega odreda, Polhov Gradec,
- II. nagrada: Andrej OREŠNIK, OŠ dr. Bogomira Magajne, Divača,
Sašo ŽIVANOVIČ, OŠ Vere Šlandrove, Polzela,
- III. nagrada: Peter JEGLIČ, OŠ dr. Vita Kraigherja, Ljubljana,
Slobodan KOVAČEVIČ, OŠ Franca Leskoškega Luke, Ljubljana,
Bojan PAVŠIČ, OŠ Martina Konška, Maribor.

8.razred

- I. nagrada: Sonja VIRAG, OŠ 17. oktobra, Beltinci,
Nataša HOČEVAR, OŠ Antona Aškercarja, Velenje,
David KONČAN, OŠ Cvetka Golarja, Škofja Loka,
Andrej RUPAR, OŠ Cvetka Golarja, Škofja Loka,
Peter KOCAN, OŠ Edvarda Kardelja, Murska Sobota,
Tadej NOVAK, OŠ Frana Albrehta, Kamnik,
Andrej STUDEN, OŠ Franceta Prešerena, Kranj,
Dejan VELUŠČEK, OŠ Ledina, Ljubljana,
Martin KLANJŠEK, OŠ Ljuba Šerčerja, Ig,
Jernej ULE, OŠ Majde Vrhovnik, Ljubljana,
Blaž MAVČIČ, OŠ Matije Valjavca, Preddvor,
Marko POLIČNIK, OŠ Mihe Pintarja Toleda, Velenje,
- II. nagrada: Karlo TURK, OŠ Dušana Bordona, Koper,
Tomi SMRKOLJ, OŠ Ledina, Ljubljana,
- III. nagrada: Marko ŽNIDARIČ, OŠ Bogdana Tuška, Miklavž,
Helena MOTOH, OŠ Franca Rozmana Staneta, Ljubljana,
Manca CIRK, OŠ Franceta Prešerena, Kranj,
Boštjan ČRNIČ, OŠ Koseze, Ljubljana,
Miha JURAS, OŠ Majde Vrhovnik, Ljubljana,
Maja SOUVAN, OŠ Majde Vrhovnik, Ljubljana.

Naloge

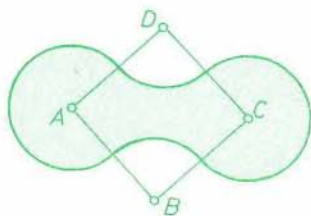
7. razred

1. Izračunaj vrednost izraza

$$(-10)^2 \cdot \frac{(6\frac{4}{25} : 15\frac{2}{5} - 10^2 \cdot (-0,2)^3) \cdot (0,015 : 0,12 + 0,7)}{1,2 : ((-3) \cdot (-\frac{1}{2})^3) - 0,2}$$

2. Človek porabi na leto približno 50 kg krompirja. Kako dolgo stranico bi moralo imeti kvadratno zemljišče, na katerem bi pridelali to količino krompirja, če je hektarski donos 20 t ?
3. Dokaži, da je vsota $2^1 + 2^2 + 2^3 + \dots + 2^{1992}$ deljiva s 30.

4. Ogljišča kvadrata $ABCD$ so središča krožnih izsekov, katerih polmeri so enaki polovici stranice kvadrata. Izračunaj ploščino črtkanega lika, če je njegov obseg 20π dm.



5. V notranjosti paralelograma $ABCD$ s stranicama a, b in ostrim kotom α si izberi poljubno točko T in jo poveži z oglišči A, B, C, D . Dokaži, da je vsota ploščin dveh nasproti ležečih trikotnikov enaka vsoti ploščin drugih dveh trikotnikov.

8. razred

1. Trimestno število ima na mestu enic števko (cifro) 7. Če to števko premaknemo na mesto stotic, drugi dve števki pa za eno mesto na desno, dobimo novo trimestno število. Ko to število delimo s prvotnim številom, dobimo količnik 2 in ostanek 40. Izračunaj prvotno število.
2. Pri kateri vrednosti števila a sta grafa funkcij $2x + 3ay = 0$ in $7x - 5y = 2$ vzporedni premici?

3. V pravokotnem trikotniku s hipotenuzo 4 cm sta ostrata kota v razmerju 3:1. Izračunaj ploščino trikotnika (brez merjenja).
4. Pokončna prizma z višino c ima za osnovno ploskev enakokrak pravokotni trikotnik s hipotenuzo c . Iz prizme izrežemo največji možni valj. S c izrazi prostornino valja.
5. V produktu ab povečamo prvi faktor za 10%. Za koliko % moramo zmanjšati drugi faktor, da se produkt ne spremeni?

Aleksander Potočnik

DVE O IGRAH – Rešitev s str. 71

1. Zadnji štirje igralci so skupaj dosegli vsaj 6 točk, namreč tiste iz medsebojnih partij. Ker je prvouvrščeni dosegel največ 7 točk, jih ima drugi lahko največ 6 (6,5 bi jih dosegel, če bi remiziral s prvim, toda tedaj bi imela enako število točk). To pomeni, da ima drugi 6 točk in toliko tudi zadnji štirje igralci skupaj. Ker so to točke iz medsebojnih partij, so zadnji štirje igralci vse partije s prvimi štirimi izgubili. Zato je tretjevrščeni premagal sedmega, prav tako četrti petega.
2. Ploščina $p(XYZ)$ je lahko največ $\frac{1}{4}$. To si prvi igralec lahko vedno zagotovi, če za X in Z izbere razpolovišči stranic. Drugi igralec pa vedno lahko poskrbi, da $p(XYZ)$ ne bo večja od $\frac{1}{4}$. V ta namen mora izbrati točko Y tako, da je $XY \parallel AC$. Res: Če s H označimo višino na AC v ABC in s h višino na XY v podobnem trikotniku XYZ , imamo

$$\overline{XY} : \overline{AC} = h : H$$

in odtod

$$\frac{p(XYZ)}{p(ABC)} = \frac{\overline{XY} \cdot (H - h)}{\overline{AC} \cdot H} = \frac{h(H - h)}{H^2} = \frac{H^2 - (H - 2h)^2}{4H^2} \leq \frac{1}{4}.$$

Karas

35. REPUBLIŠKO TEKMOVANJE SREDNJEŠOLCEV IZ MATEMATIKE

V soboto, 6. aprila 1991 je minister za šolstvo dr. Peter Vencelj odprl 35. republiško tekmovanje iz matematike na Gimnaziji Šentvid v Ljubljani. Vseh 162 dijakov, ki so se najbolje odrezali na izbirnem tekmovanju, je v času od 9³⁰ do 13⁰⁰ trlo naslednje orehe:

Prvi letnik

1. Zamenjaj črke s števkami (ciframi), da se bo račun izšel. (Različne črke predstavljajo različne števke.)

$$\begin{array}{r}
 F O R T Y \\
 + \quad \quad T E N \\
 + \quad \quad T E N \\
 \hline
 S I X T Y
 \end{array}$$

2. Janez je v banki vnovčil ček. Blagajnik mu je pomotoma namesto zneska dinarjev izplačal znesek par in namesto par dinarje. Ko je v trgovini porabil 3 dinarje in 50 par, je opazil, da ima v denarnici še dvakrat toliko denarja, kot je bil vreden ček. Kolikšna je bila vrednost čeka?

3. Na daljici AB izberemo točko Q . Na isti strani daljice AB narišemo polkroge nad AB , nad AQ in nad QB . P naj bo taka točka na loku $\widehat{AB}$, da je $AB \perp PQ$. C in D pa presečišči daljic AP in BP z lokoma $\widehat{AQ}$ oziroma $\widehat{QB}$. Dokaži, da je premica skozi C in D skupna tangenta manjših polkrogov.

4. V vsaki od 12 hišic v Smrčji vasi živi po en smrkec. Vsaka hišica je ali modre ali bele barve. Vsak smrkec ima liho število prijateljev. Januarja vsako leto prvi smrkec prebarva svojo hišico z barvo, s kakršno ima pobarvano hišico večina njegovih prijateljev, v februarju to naredi drugi smrkec, ..., decembra še dvanajsti. Dokaži, da čez nekaj let smrkcem ne bo več treba spreminjati barve hiš. (Prijatelji ostanejo ves čas isti.)

Drugi letnik

1. Izračunaj vrednost izraza $5a + 7b + 9c$, če so a , b in c od nič različna števila in rešijo sistem $ab = 2(a + b)$, $bc = 3(b + c)$ in $ca = 4(c + a)$.

2. Pokaži, da $n^2 - 19n + 89$ ni kvadrat nobenega naravnega števila, če je naravno število n v čje od 11.

3. Dan je pravokotnik s stranicama $\sqrt{2}$ in $\sqrt{3}$. Ali ga lahko razrežemo na 1991 pravokotnikov, ki so mu podobni? (Pravokotnika sta si podobna, če imata para pravokotnih stranic v enakem razmerju.)

4. V notranjosti kvadrata $ABCD$ izberemo točko P tako, da velja $\overline{AP} : \overline{BP} : \overline{CP} = 1 : 2 : 3$. Izračunaj kot $\angle APB$.

Tretji letnik

1. V enakokrakem trapezu $ABCD$ je osnovnica AB dolga 16 cm, osnovnica CD 8 cm in višina 7 cm. Katero izmed stranic BC in AD seka simetrala kota $\angle DAB$?

2. Naj bodo a, b, c dolžine stranic, $s_\alpha, s_\beta, s_\gamma$ dolžine kotnih simetral in S ploščina ostrokotnega trikotnika. Dokaži, da velja $\frac{1}{s_\alpha} + \frac{1}{s_\beta} + \frac{1}{s_\gamma} < \frac{(a+b+c)\sqrt{2}}{2S}$.

3. (a) Dokaži, da so $\lg^2 20^\circ$, $\lg^2 40^\circ$ in $\lg^2 80^\circ$ koreni enačbe $x^3 - 33x^2 + 27x - 3 = 0$.

(b) Izračunaj vsoto $\frac{1}{\cos^2 20^\circ} + \frac{1}{\cos^2 40^\circ} + \frac{1}{\cos^2 60^\circ} + \frac{1}{\cos^2 80^\circ}$.

4. Nekega lepega pomladanskega dne sta sošolca Mito in Janez špricala uro matematike. Da pa le ne bi imela preveč slabe vesti, sta se odločila za zanimivo matematično igrice. Mito si je zamislil permutacijo števil od 1 do 100. Na vsakem koraku je Janezu povedal število m , katerega lege v permutaciji ta še ni uganil. Ko ga je Janez vprašal: "Ali število m leži na mestu k ?", mu je odgovoril z "da" ali "ne". Po najmanj koliko korakov lahko Janez vedno ugame permutacijo?

Četrty letnik

1. Poišči vse pare (x, y) racionalnih števil, ki rešijo enačbo $\sqrt{2\sqrt{3}-3} = \sqrt{x\sqrt{3}} - \sqrt{y\sqrt{3}}$.

2. Dokaži, da je v aritmetičnem zaporedju 1, 14, 27, 40, ... neskončno mnogo členov, ki se dajo zapisati s samimi dvojkami.

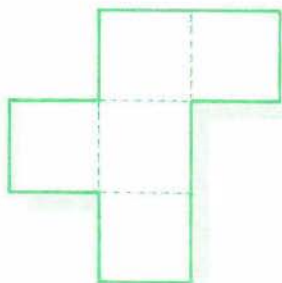
3. Poišči razmerje med polmeroma očrtanega in včrtanega kroga trikotnika, če med njegovimi koti velja zveza $\operatorname{ctg} \frac{\alpha}{2} + \operatorname{ctg} \frac{\beta}{2} + \operatorname{ctg} \frac{\gamma}{2} = 8 \sin \alpha \sin \beta \sin \gamma$.

4. Koliko je urejenih parov (A, B) , za katere velja $A \cup B \subseteq \{1, 2, 3, \dots, n\}$ in $A \cap B = \emptyset$. (Tu štejemo, da je $\emptyset \subset \{1, 2, 3, \dots, n\}$.)

Po kosilu je bilo popoldan predavanje prof. dr. Petra Petka, predsednika DMFA, z naslovom *Fraktali*, ob 18. uri pa so bili objavljeni neuradni rezultati tekmovanja. Dan smo zaključili z družabnim večerom, s kvizom med mentorji in dijaki. Drugi dan so se med seboj pomerili le najboljši v kvalifikacijah za zvezno tekmovanje. Reševali so te naloge:

Prvi letnik

1. Na voljo imamo neskončno mnogo domin, kot je na sliki. Ali lahko z njimi pokrijemo ravnino? (Domine se pri tem ne smejo prekrivati.)



2. Naj bo s pozitivno sodo število, n pa naravno število. Dokaži, da je število $s^n + 1$ pri lihih n deljivo s številom $s + 1$ in da sta si števili pri sodih n tuji.

3. V poljubnem trikotniku izberemo nožišče ene od višin. Pokaži, da ležijo vse štiri pravokotne projekcije tega nožišča na drugi dve višini in drugi dve stranici na isti premici.

Drugi letnik

1. Dokaži, da ima najmanjše izmed vseh naravnih števil, ki imajo natanko 1991 deliteljev, manj kot 66 števk (cifur). (Med delitelje števila prištevamo tudi 1 in število samo.)

2. Pokaži, da za poljubna pozitivna števila a , b in c velja $\sqrt{\frac{a+b}{c}} + \sqrt{\frac{b+c}{a}} + \sqrt{\frac{c+a}{b}} \geq 3\sqrt{2}$.

3. V poljubnem trikotniku izberemo nožišče ene od višin. Pokaži, da ležijo vse štiri pravokotne projekcije tega nožišča na drugi dve višini in drugi dve stranici na isti premici.

Tretji in četrti letnik

1. V končnem zaporedju realnih števil $a_0, a_1, a_2, \dots, a_{1991}$ velja zveza $a_k = \frac{2a_{k-1}}{1-a_{k-1}^2}$, ($k = 1, 2, 3, \dots, 1991$). Določi a_0 tako, da bo $a_{1991} = 1$.

2. Dokaži, da kvadrati stranic trikotnika sestavljajo aritmetično zaporedje natanko tedaj, ko ga sestavljajo tudi kvadrati njegovih težiščnic.

3. Naj bo dana funkcija $g : \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}$ ter kompleksni števili a in w , pri čemer je $w^3 = 1$ in $w \neq 1$. Pokaži, da obstaja natanko ena funkcija $f : \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}$, da velja $f(z) + f(wz + a) = g(z)$ za vsak $z \in \mathbb{C}$. ($\mathbb{C}$ pomeni množico kompleksnih števil.)

Na svečani podelitvi so nagrade prejeli:

učenec (učenka)	letnik	mentor prof.	šola
– prva nagrada:			
Tomaž CEDILNIK	tretji	M. Grum	Gimnazija Bežigrad
Bojan GORNIK	drugi	A. Hržica	Gimnazija Novo mesto
Mitja MASTNAK	drugi	D. Pavšek	STŠ Celje
Andrej SRAKAR	drugi	O. Arnuš	Gimnazija Bežigrad
– druga nagrada:			
Narvika BOVCON	prvi	F. Perne	NSC Nova Gorica
Petra IPAVEC	prvi	B. Dvoržak	Gimnazija Bežigrad
– tretja nagrada:			
Arpad BURMEN	prvi	M. Krauthaker	SCTPU Murska Sobota
Damijan DOLINAR	prvi	M. Mozetič	SENŠ RM Kamnik
Kristijan KOCBEK	tretji	J. Štrubelj	STŠ Celje
Marko KRAJNC	drugi	D. Reisman	SNŠ MZ Maribor
Srečko MAKSIMOVIČ	prvi	B. Ipavec	Gimnazija Poljane Lj.
Domen PRAŠNIKAR	prvi	V. Domanjko	Gimnazija Bežigrad
Vojko REBOLJ	četrti	M. Zabret	SENŠ RM Kamnik
Tomi REJEC	tretji		Gimnazija Tolmin
Marko SLAPAR	tretji	F. Avsec	Gimnazija Kranj
Andrej STROJNIK	tretji	V. Domajnko	Gimnazija Bežigrad

Pohvaljeni so bili:

v prvem letniku: Dejan PARAVAN (NSC Nova Gorica), Maja POHAR (Gimnazija Poljane Lj.), Sonja RATEJ in Iztok KAVKLER (STŠ Celje), Doštjan KUZMAN (CSŠ Velenje), Jure VRHOVNIK in Nika NOVAK (Gimnazija Bežigrad Lj.)

v drugem letniku: Jernej DOLENŠEK (STŠ Celje), Luka ŠTRAVS in Borut KERŠEVAN (Gimnazija Bežigrad Lj.), Samo FIŠINGER in Matej PRAPROTNİK (SNŠ MZ Maribor)

v tretjem letniku: Marko KUKRIKA (Gimnazija Bežigrad Lj.), Marko ŠETINC (Gimnazija Kranj), Martin VUK (NSC Nova Gorica), Smiljan VODOVNIK (SŠTNPU Ravne na Koroškem), Gregor IRT (SSR Ljubljana), Elvis BELAC (Gimnazija Koper), Dean VELDIN (SNMŠ IUJ Piran), Matjaž KOTNIK (SNŠ MZ Maribor)

v četrtem letniku: Mojca JAZBINŠEK in Dušanka KOCIĆ (STŠ Celje), Dominik ROBLEK (Gimnazija Kranj), Urša DEMŠAR in Igor PANIČ (Gimnazija Šentvid Lj.), Leo ZORNADA (Gimnazija Koper), Darko VEBERIČ (SCTPU Murska Sobota), Marko PETRUŠIČ (Gimnazija Bežigrad Lj.), Simon KUMER (CSŠ Velenje)

Nagrajencem, pohvaljenim in njihovim mentorjem iskrene čestitke.

Jaka Erker in Darjo Felda

RAČUN Z ZNAKI – Rešitev s str. 110

Takole premišljamo. Ker je vsota dveh dvomestnih števil manjša od dvesto, dobimo iz druge vrstice $D = 1$. Pogledamo stotice. Prvi stolpec nam pove, da je $A - H = 1$, prva vrstica pa, da je $A - G = 1$ ali 2. Ker pa je $A - H = 1$, mora biti $A - G = 2$. Prav tako iz zadnje vrstice sledi, da je $H - F = 1$ ali 2. Tako imamo $A - F = (A - H) + (H - F) = 2$ ali 3. Ker pa je $A - G = 2$, je tako $A - F = 3$. Sedaj pa nam enice v zadnjem stolpcu povedo, da je $G = 3$. Z vstavljanjem v že izpeljane zveze dobimo še $A = 5$, $H = 4$ in $F = 2$. Nato iz zadnjega stolpca določimo $C = 7$, iz drugega pa $E = 6$. Iz prve in druge vrstice nato izračunamo še $B = 0$, $I = 9$ in $J = 8$. Na koncu preverimo, da so vse enačbe res izpolnjene. Naloga ima torej natanko eno rešitev:

$$507 - 162 = 345$$

$$\quad - \quad + \quad -$$

$$98 + 74 = 172$$

$$409 - 236 = 173$$

Martin Juvan

VRIŠI PRAVOKOTNIK - Rešitev s str. 101

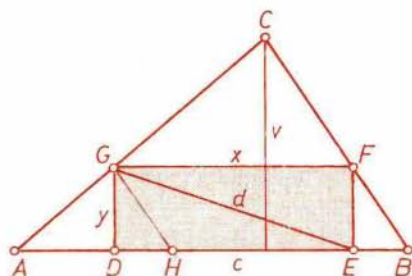
Na skici (slika 1) sta c in v osnovnica in višina danega trikotnika ABC , x in y pa osnovnica in višina vrisanega pravokotnika $DEFG$ z diagonalo d . Daljica GH je vzporedna stranici BC . Naloga bo rešena, če bomo konstruirali višino y , na kateri poteka pravokotnikova stranica GF . Po Pitagorovem izreku je:

$$x^2 + y^2 = d^2. \quad (1)$$

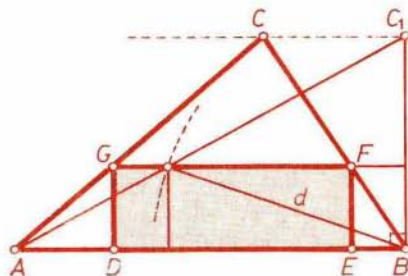
Ker sta trikotnika EBF in DHG skladna, trikotnika ABC in AHG pa podobna, velja še:

$$(c - x) : y = c : v. \quad (2)$$

Ne da bi rešili sistem enačb (1) in (2), vidimo, da sta x in y odvisna le od količin c , v in d . To pa pomeni, da poteka zgornja pravokotnikova osnovnica GF na isti višini za vse trikotnike, ki imajo osnovnico enako c in višino enako v . Izberimo takega med njimi, pri katerem z rešitvijo ne bo težav, npr. pravokotni trikotnik s katetama c in v in s pravim kotom v oglišču B . Pot do končne rešitve je nato preprosta (slika 2).



Slika 1



Slika 2

Ne prezirimo, da smo spotoma pridobili še koristno informacijo o rešljivosti naloge in številu rešitev glede na podatke c , v in d . Ko iz oglišča B odmerimo diagonalo d , seka krožni lok hipotenuzo AC_1 dvakrat, enkrat ali nobenkrat. Število presečišč je tudi število rešitev. Imamo:

- nobene rešitve, če je

$$\left(\frac{1}{d^2} > \frac{1}{v^2} + \frac{1}{c^2}\right) \vee (d \geq \max(c, v));$$

- eno rešitev za

$$\left(\frac{1}{d^2} = \frac{1}{v^2} + \frac{1}{c^2}\right) \vee (\min(c, v) \leq d < \max(c, v));$$

- dve rešitvi za

$$\left(\frac{1}{d^2} < \frac{1}{v^2} + \frac{1}{c^2}\right) \wedge (d < \min(c, v)).$$

Marija Vencelj

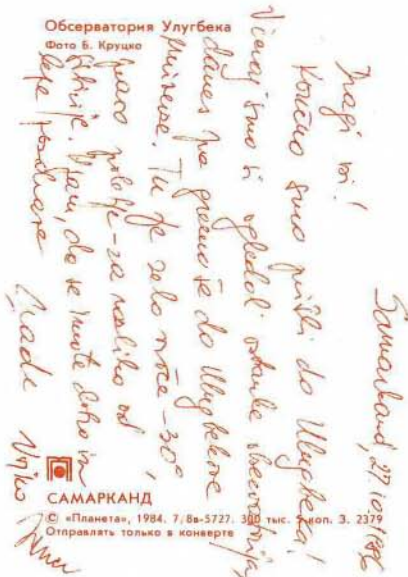
ASTRONOMIA

ZANIMIVOSTI O ULUGBEKOVI ZVEZDARNI

Druko polovico 14. stoletja in začetek 15. stoletja zaznamujejo poleg drugih zgodovinskih dogodkov tudi obsežna vojaška osvajanja legendarnega mongolskega (uzbekistanskega) vladarja Timurja. Ob koncu svojega življenja (1405) je vladal ogromnemu imperiju, katerega prestolnica je bil Samarkand, eno najbolj bogatih in kulturnih mest tedanjega Vzhoda.

Koncem 1393 je Timur začel veliki vojni pohod na Iran. Na eni vojnih postojank se mu je 22.3.1394 rodil vnuk, ki so mu dali ime Muhamed Taragaj. v zgodovini bolj znan pod imenom *Ulugbek* (kar pomeni veliki knez). Po Timurjevi smrti je postal Ulugbek poglavar že razpadajoče države. Za razliko od svojega starega očeta pa se ni odlikoval z vojaškimi veščinami, ampak ga je zanimala znanost. Kot poglavar - sultan - je dal graditi šole (medrese), podpiral je znanstvenike, pesnike, zdravnike, zgodovinarje. Sam je pisal pesmi in sestavljal znanstveno delo o zgodovinsko pomembnih narodih Azije. *Najbolj pa je bil predan astronomiji.*

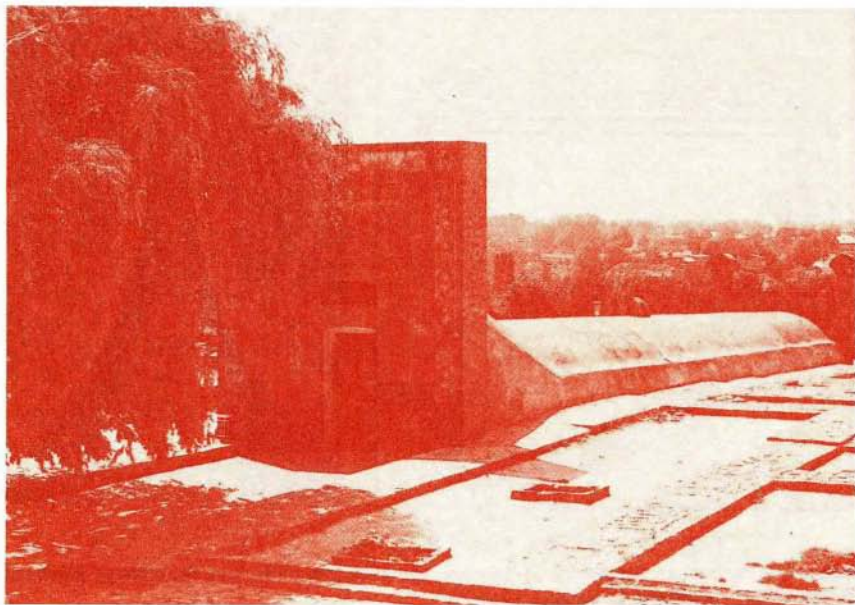
Na hribu blizu Samarkanda so pod njegovim vodstvom zgradili največji astronomski observatorij 15. stoletja (Glej tudi prispevek *Astronom iz Samarkanda*, Presek 3 (1973), 132). Kmalu po Ulugbekovi smrti (1449) je začela



Slika 1. Ulugbek (1394 do 1449) - risba iz 16. stoletja

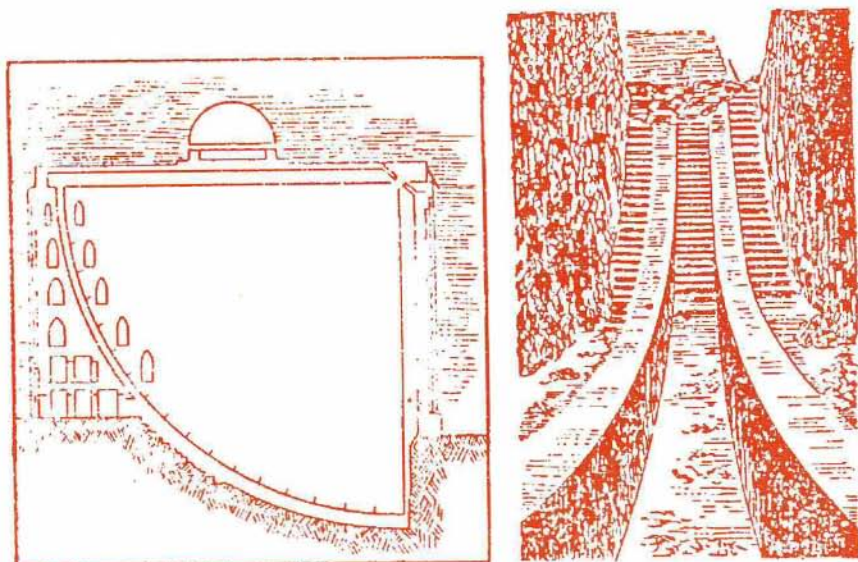


Razglednica, ki sem jo pred leti prejel iz Samarkanda, prikazuje rekonstruirani del znamenite Ulugbekove zvezdarne - enega največjih dosežkov muslimanske astronomije.

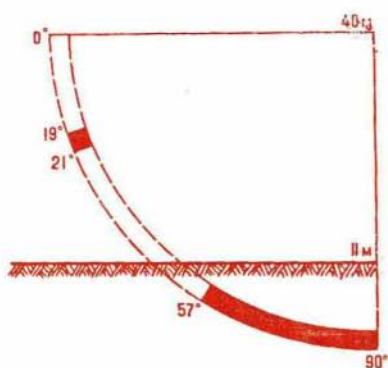


zvezdarna propadati, pozneje so jo razrušili, zravnali z zemljo in nanjo povsem pozabili. Šele 1908 je samarkandski arheolog V.L. Vjatkin po napornih izkopavanjih odkril razvaline Ulugbekove zvezdarne. To je bila tri nadstropna zgradba v obliki valja s premerom osnovne ploskve okoli 50 m. Imela je številne sobe in okna, pa tudi utrjene temelje, obdane z marmorjem (slika 2). Čez sredino stavbe je navpično potekala široka zareza (lina), ki je ležala v ravnini krajevnega poldnevnik. V to zarezo so postavili glavni (kotomerni) instrument zvezdarne, *orjaški kvadrant* (slika 3). Lok kvadranta je pripadal krožnici s polmerom 40,2 m. V središču krožnice v zgornjem delu stavbe je bil osnovni diopter (muha). Po loku kvadrata je na posebnih bronastih tračnicah opazovalec premikal vizirno napravo (merek), s katerim so določali smer proti vesoljskim telesom. Pri opazovanju Sonca so lino kvadrata zatemnili, da so dobili temno sobo (*camero obscura*). Sončev žarek skozi osnovni diopter je vrgel "zajčka" na bel zaslon, ki so ga premikali po loku kvadranta. Po smeri svinčnice glede na zaslon so določevali opoldansko višino Sonca.

Lok kvadranta je bil pravzaprav sestavljen iz dveh vzporednih lokov v medsebojni razdalji okoli pol metra in obložen z žgano opeko ter prekrit z



Slika 2. Ulugbekova zvezdarna - rekonstrukcija (levo) in podzemni del njenega glavnega instrumenta - orjaškega kvadranta (desno).



Slika 3. Shema orjaškega kvadranta. Njegova globina na južnem delu je bila okoli 11 m. Polovica loka (približno do 45°) se je nahajala pod zemljo, ostali del pa nad njo, do višine 29 m na severnem delu. Ohranile so se le marmornate plošče, ki so sestavljale del podzemnega loka kvadranta od 57° do 90° , in plošči, ki ustrezata 19° , 20° in 21° nadzemnega dela loka. Arheološke raziskave so pokazale, da se ostale masivne marmornate plošče (nekateri težke tudi 100 kg) niso izgubile. Raztresene po razdejanju observatorija so pozneje uporabili kot gradbeni material v Samarkandu in bližnjih naseljih.

marmorjem. Vzdolž lokov so bili vrezani žlebovi, v katere so pritrdili tračnice. Razdalje med razdelbami na stopinjski skali na loku kvadranta so bile 70,2 cm. Ob lokih so bile stopnice za opazovalca. Ravnino krajevnega poldnevnik, v katero so postavili kvadrant, so določili skrajno natančno za tisti čas (napaka v azimutu je bila le $10'$). S tem instrumentom so samarkandski astronomi izmerili lege 1018 zvezd, naklonski kot ekliptike k ekvatorju in dolžino trajanja leta.

Marijan Prosén

7. ŠOLSKO IN 17. IZBIRNO TEKMOVANJE SREDNJEŠOLCEV IZ MATEMATIKE

Kot običajno so se tudi v prejšnjem šolskem letu že v decembru pomerili dijaki v reševanju matematičnih nalog na mnogih srednjih šolah. Kar 2000 učencev se je potegovalo za naslov prvaka šole. V marcu je nekoliko večje število učencev poskušalo na izbirnem tekmovanju doseči dovolj točk za uvrstitev na republiško srečanje. Nalog tokrat ne objavljamo, ker bodo kmalu izšle v zbirki *Rešene naloge iz matematike s šolskih in izbirnih tekmovanj*. Zbirka, ki bo izšla v *Knjižnici Sigma*, bo vsebovala okrog 370 nalog z rešitvami.

Zahvaljujemo se vsem, ki so nam pomagali pri izvajanju naše dejavnosti, posebej še Ministrstvu za šolstvo in šport, Ministrstvu za znanost in tehnologijo, Fakulteti za elektrotehniko in računalništvo, Oddelku za matematiko in mehaniko FNT, Zavodu Republike Slovenije za šolstvo, Zavodu Republike Slovenije za mednarodno znanstveno, tehnično, prosvetno in kulturno sodelovanje ter mnogim učiteljem – mentorjem.

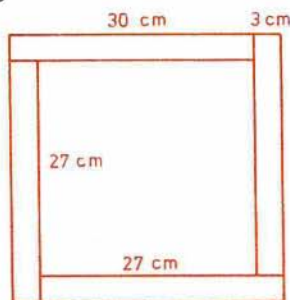
Darjo Felda

REŠITVE NALOG

26. OBČINSKO TEKMOVANJE OSNOVNOŠOLCEV IZ MATEMATIKE – Rešitve nalog s str. 84

6. razred

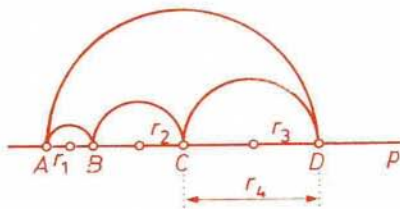
1. Iz $v(n, 75) = 450$ in $450 = 2 \cdot 3 \cdot 3 \cdot 5 \cdot 5$, $75 = 3 \cdot 3 \cdot 5$ dobimo tri možnosti:
 $n = 2 \cdot 3 \cdot 3 = 18$, $n = 2 \cdot 3 \cdot 3 \cdot 5 = 90$ in $n = 2 \cdot 3 \cdot 3 \cdot 5 \cdot 5 = 450$.
2. Najprej je $\frac{a}{b} = \frac{3}{2}$, nato pa $\frac{3}{2} \cdot (3 \cdot \frac{2}{3} - \frac{3}{2}) + \frac{3}{2} = 2\frac{1}{4}$.
3. V prvi zlitini je 76% od 350 dag, torej 266 dag srebra. V novi zlitini je 84% od 1050 dag, torej 882 dag srebra. Prvi zlitini smo dodali 1050 dag - 350 dag = 700 dag zlitine, ki je vsebovala 882 dag - 266 dag = 616 dag srebra. V drugi zlitini je $\frac{616}{700} = \frac{88}{100} = 88\%$ srebra.
4. Stranica notranjega kvadrata meri 27 cm, ploščina pa 729cm^2 .
5. Trikotnik $\triangle CBE$ je enakokrak, zato je $\sphericalangle E = 67^{\circ}24'$ in $\sphericalangle C = 180^{\circ} - 2 \cdot \beta$, $\sphericalangle C = 45^{\circ}12'$. $\sphericalangle ECB$ in $\sphericalangle ACD$ sta sovršna, zato $\alpha = 180^{\circ} - 90^{\circ} - 45^{\circ}12' = 44^{\circ}48'$.



7. razred

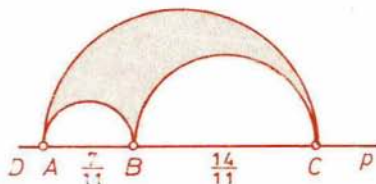
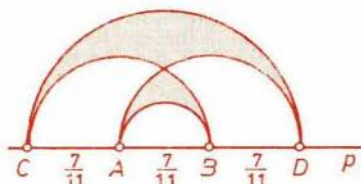
1. Vrednost izraza je 1.
2. Oglejmo si po vrsti tri možnosti:

- a) $r_1 = \frac{7}{22}\text{cm}$,
 $o_{\text{polkroga}} = 1\text{ cm}$;
 $r_2 = \frac{14}{22}\text{cm}$,
 $o_{\text{polkroga}} = 2\text{ cm}$;
 $r_3 = \frac{21}{22}\text{cm}$,
 $o_{\text{polkroga}} = 3\text{ cm}$ in
 $r_4 = \frac{42}{22}\text{cm}$,
 $o_{\text{polkroga}} = 6\text{ cm}$.



Obseg lika je
 $1\text{ cm} + 2\text{ cm} + 3\text{ cm} + 6\text{ cm} = 12\text{ cm}$.

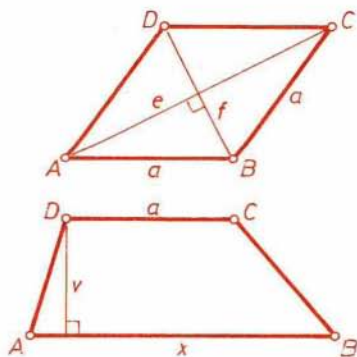
Možni sta še dve sliki (glede na tekst v nalogi).



- b) $ob = 1\text{cm} + 2\text{cm} + 2\text{cm} + 3\text{cm} = 8\text{cm}$
- c) Tu je lok AD kar točka in $ob = 1\text{cm} + 2\text{cm} + 3\text{cm} = 6\text{cm}$
3. Pri danih x in y prvi izraz poenostavimo: $(k+2) \cdot 2 - (2k-1) \cdot 3 = 2k+4-6k+3 = -4k+7$. Ta bo enak drugemu izrazu, če izberemo $k = 5$.
4. Produkt 333333 razcepimo na prafaktorje: $333333 = 3 \cdot 3 \cdot 7 \cdot 11 \cdot 13 \cdot 37$, nato pa sklepamo: Metka lahko hodi v tretji ali sedmi razred, ker so ostali delitelji števila 333333 večji od 8. Če hodi v tretji razred, je stara 9 ali 10 let, zato ta možnost odpade (en faktor 3 je že porabljen za razred, 10 pa ni delitelj števila 333333). Metka torej hodi v sedmi razred in je stara 13 let. Trimestno število je $3 \cdot 37 = 111$, Metkina mama pa je stara $3 \cdot 11 = 33$ let.
5. Označimo Jankov znesek z x . Potem je imel Marko $\frac{2x}{5}$ din, Tone pa $\frac{7 \cdot 2 \cdot x}{9 \cdot 5} = \frac{14x}{45}$ din. Sestavimo enačbo $x + \frac{2x}{5} + \frac{14x}{45} = 7777$, ki ima rešitev $x = 4545$. Janko je dobil 4545 din, Marko 1818 din in Tone 1414 din.

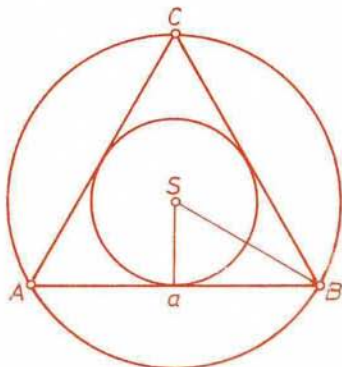
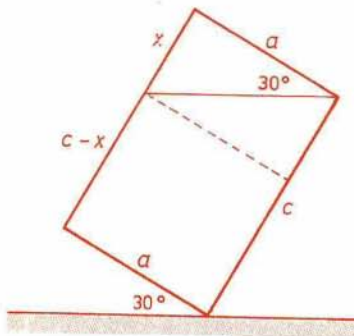
8. razred

1. Naj bo iskani ulomek $\frac{x-3}{x-5}$. Tedaj je novi ulomek $\frac{x-5}{x-2}$. Enačba $\frac{x-2}{x-5} = \frac{1}{2}$ ima rešitev $x = 8$. Iskani ulomek je $\frac{5}{8}$, njegov obratni ulomek pa $\frac{8}{5}$.
2. V rombu je $a^2 = (\frac{e}{2})^2 + (\frac{f}{2})^2$ in $a = 15$ cm, v trapezu pa $v = \frac{e}{2} = 12$ cm in $c = a = 15$ cm. Ker je $p_{romba} = p_{trapeza}$, je $\frac{e \cdot f}{2} = \frac{x+a}{2} \cdot v$ in od tod $x = 21$ cm.



3. Označimo zaporedna naravna števila z $n-2, n-1, n, n+1, n+2$. Tedaj je $(n-2)^2 + (n-1)^2 + n^2 + (n+1)^2 + (n+2)^2 = 5n^2 + 10 = 5(n^2 + 2)$. Ta vsota je očitno deljiva s 5. Ker se n^2 končuje z eno izmed števk 0, 1, 4, 5, 6, 9 se $n^2 + 2$ končuje z eno izmed števk 2, 3, 6, 7, 8, 1, kar pomeni, da $n^2 + 2$ ni deljivo s 5, zato $5(n^2 + 2)$ ni deljivo s 25.

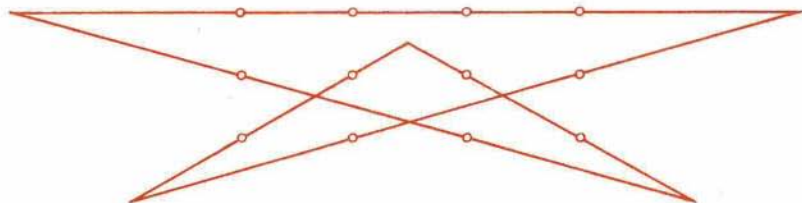
4. Iz $a = \frac{2x\sqrt{3}}{2}$ sledi $x = \frac{a\sqrt{3}}{3} = \frac{8\sqrt{3}}{3}$ cm. Nato $V_k = abc = 432 \text{ cm}^3$ in $V_p = \frac{ax}{2} \cdot b = \frac{8 \cdot 8\sqrt{3}}{2 \cdot 3} \cdot 3 = 32\sqrt{3} \text{ cm}^3$ ter $V = (432 - 32\sqrt{3}) \text{ cm}^3 \doteq 376,64 \text{ cm}^3$. V posodi bo ostalo približno $376,64 \text{ cm}^3$ vode.



5. Zaradi $p_v = \frac{\pi a^2}{12}$, $p_o = \frac{\pi a^2}{3}$ in $p_k = \frac{\pi a^2}{4}$ velja $p_v : p_k : p_o = 1 : 3 : 4$.

Aleksander Potočnik

SKOZI VSE TOČKE – Rešitev s str. 71



Bojana Dvoržak

MOJSTER R.A. SKRIJE ŠAHOVSKO FIGURO V ŽEP – Rešitev s str. 111

R.A.-jeva pomoč je bila pri tej rešitvi spet nenadomestljiva. Začel sem pa takole: beli kmet na g3 je prišel s polja f2 in pri tem vzel natanko eno črno figuro. Torej je kmet na g5 lahko prišel s polja e2 ali d2. Če se je na začetku nahajal na e2, je na poti do g5 vzel dve črni figuri, medtem ko je kmet na e5 prišel s polja d2 ali b2 in vzel vsaj eno figuro. Če pa je kmet na g5 prišel z d2, je sam jemal trikrat. Kakorkoli, beli kmetje na e5, g3 in g5 so skupaj vzeli vsaj štiri črne figure. Očitno na deski manjka pet črnih figur, in sicer dama, trdnjava, lovec, skakač in kmet. Črni kmet na f5 je prišel bodisi z d7 ali h7 in v obeh primerih jemal bele figure natanko dvakrat. Na deski sicer manjkajo tri bele figure, namreč dama, trdnjava in kmet.

Tukaj sem se ustavil in nekaj časa buljil v šahovsko desko brez besed. R.A. je že hotel nekaj pripomniti, ko se mi je posvetilo.

"Beli kmet, ki ga ni več na deski, ni tista figura, ki ste jo skrili. Kaj se je z njim zgodilo?"

"No, kaj le?" je dodal R.A.

Le dve varianti sta mogoči, sem nadaljeval. Ali je bil vzet ali pa je promoviral. Označil ga bom kar z *B*, da ne bi potem preveč dolgovezil. S katerega začetnega položaja pa je lahko prišel? Če je kmet na e5 prišel s polja b2, je vzel tri črne figure, kmeta na g3 in g5 pa sta skupaj jemala vsaj trikrat. To pomeni šest vzetih črnih figur, vsaj ena preveč. Pri tem je namreč treba upoštevati, da je iskana figura bodisi bela ali črna, torej je bilo v partiji skupaj vzetih pet ali pa štiri črne figure. Potemtakem kmet na e5 ni prišel tja s polja b2, marveč z d2 ali e2. Seveda pa je tisti na g5 tudi prišel z d2 ali e2. Preostaneta le dva možna začetna položaja *B*-ja: a2 ali b2. Kaj lahko sklepam, če predpostavim, da je *B* vzela kakšna črna figura?

Spet se mi je ustavilo. Nikakor nisem mogel ugotoviti, na katerem od teh polj je stal *B* na začetku partije. Pogledal sem R.A.-ja, ki je bil kot vedno dobre volje in je rekel:

"Zelo dobro, Lovrečič. Manjkajoči beli kmet, po vašem *B*, je prišel z a2 ali b2. Ni pa nujno, da je bil potem vzet."

Spet sem se poglobil v pozicijo.

"Aha! Če je *B* promoviral, je to lahko naredil edinole tako, da je šel skozi eno od polj a7, d7 ali h7," sem kmalu ugotovil. No, kmetu ni mogoče priti z a2 ali b2 na polje h7. Poleg tega so kmetje na e5, g3 in g5 vzeli vsaj štiri črne figure, zato je *B* lahko jemal največ enkrat. Se pravi, da ni mogel priti na linijo *d*, pač pa je šel skozi polje a7. Pri tem je jemal natanko enkrat,

zato je bil njegov začetni položaj na b2. Tedaj pa je kmet na b3 prišel z a2 in je jemal enkrat, kar je v celotni partiji en vzetek preveč.

"Kako pa to?" sem najprej zamomljal in takoj dodal, da beli kmet *B* sploh ni promoviral. Torej je imel manjkajoči beli kmet *B* začetni položaj na a2 ali b2 in je bil kasneje vzet. Toda katera črna figura ga je vzela?

"Odlično!" je bil zadovoljen R.A. "Kakšne barve pa sploh lahko je iskana figura?"

"Bele ali črne, presneto," sem jezno odvrnil, šele potem sem razumel namig: denimo, da je iskana figura, ki manjka na deski, bela. Potem so črne figure vzele natanko dve beli in obe je vzel kmet na f5, od vzetih pa je eden ravno beli kmet *B*. Toda ta je prišel z a2 ali b2, in sicer vsaj na linijo e, da ga je lahko črni kmet vzel. Ampak to se ne more zgoditi! *B* je namreč lahko jemal največ enkrat.

Ves vesel sem R.A.-ju rekel, da je iskana figura gotovo črne barve, in nadaljeval takole: ker je nekje na deski še ena črna figura, so bile vsega skupaj vzete natanko štiri črne figure in vse so vzeli trije kmetje na e5, g3 in g5. Poleg tega so bile vzete natanko tri bele figure, od tega je dve vzel kmet na f5. Ena od vzetih črnih figur je prav gotovo kmet, ki ga bom označil s Č. R.A. se je namrščil, a sem takoj ugotovil, kaj je narobe. Troje je namreč mogoče: Č je bil vzet, Č je promoviral, ali pa je Č iskana figura, prav tista, ki jo je R.A. tako spretno skril.

Najprej sem predpostavil, da je bil Č vzet. Seveda ga je vzel eden od kmetov na e5, g3 in g5, sam pa je prišel bodisi z d7 ali h7. Če je Č prišel s h7, je moral vsaj enkrat jemati, toda tudi največ enkrat. Se pravi, da je jemal natanko enkrat in prišel na linijo g. Katero figuro pa je vzel? V poštev pridejo dama, trdnjava ali kmet *B*. Ampak *B* se je začel gibati na poljih a2 ali b2 in sploh ni mogel priti na linijo g, da bi ga lahko Č vzel. Potemtakem je Č vzel neko figuro, ki ni kmet.

Po možganih so se mi spreletavale razne misli brez kakršnegakoli rezultata. R.A. je čakal, jaz pa sem obupaval.

"Žal nimam pojma, kako naj nadaljujem."

"Pa saj je zelo preprosto. Ali ste že pozabili, kaj ste do sedaj ugotovili?"

"Najbrž res," sem rekel.

"No, že prej se je izkazalo, da je bil manjkajoči *beli* kmet vzet," je dobrohotno dejal R.A.

"In kaj potem?"

"Ja, kdo ga pa je vzel?"

"Črni kmet Č že ne," sem zabrusil nazaj. Saj res, to je bil lahko le kmet na f5! Ampak že prej sem ugotovil, da bi moral *B* prevečkrat jemati, da bi

prišel vsaj na linijo *e*, kjer bi ga lahko vzel črni kmet, ki se zdaj nahaja na *f5*.

Potemtakem Č sploh ni bil vzet. R.A. se je takoj oglasil:

"Tako hitro pa ne gre! Črni kmet Č je lahko prišel z začetnega položaja *d7* in potem bil vzet."

Ugovarjal sem, da bi tedaj kmet na *f5* prišel s polja *h7* in sploh ne bi mogel jemati kmeta *B*. Torej ga je vzel Č. Ta kmet je namreč moral jemati točno enkrat, kajti na liniji *d* ga ni mogel vzeti noben od kmetov na *e5*, *g3* in *g5*. Sledi, da je Č vzel kmeta *B* na liniji *c* ali *e*, kar pa je v protislovju z dejstvom, da so od belih figur jemali le kmetje na *e5*, *g3* in *g5*. Zato je res, da Č sploh ni bil vzet.

R.A. je bil vidno zadovoljen. Nadaljeval sem s predpostavko, da je Č promoviral. Potem njegov začetni položaj ni mogel biti na polju *h7*, saj bi moral dvakrat jemati, da bi prišel vsaj na linijo *f* okoli kmetov na *g2* in *h2*. Se pravi, da je Č prišel z *d7* in je seveda jemal kvečjemu enkrat. Ker beli lahko rokira, te R.A.-jeve predpostavke sem se namreč še spomnil, je Č promoviral na *c1* ali *d1* in ni šel skozi polje *e2*, saj bi moral sicer dvakrat vzeti. Torej je pred promocijo stal na *d2*. Ampak tedaj je bil beli kralj v šahu, ki se ga ni dalo pokriti, sam kmet Č pa tudi ni bil vzet. Potemtakem pride do nemogoče situacije, kajti kralj se v partiji sploh ni premaknil. Preostane samo še možnost, da je manjkajoči črni kmet Č iskana figura. R.A. pa je v potrditev moje rešitve privlekel črnega kmeta iz žepa.

Naslednji dan sem se doma mučil s tem, kako bi iz začetnega šahovskega položaja na deski priigral obravnavano pozicijo. Partija, ki sem jo tokrat našel sam brez R.A.-ja, poteka takole:

1. b3	d5	9. Dg6	hg6	17. Tf5	Te6
2. e3	Lg4	10. Sh3	Th6	18. Sf3	Sb8
3. Lb2	Sc6	11. a5	Sxa5	19. Ld2	Te5
4. Dd2	Dd6	12. Lc3	Sc6	20. d4	gf5
5. Dg5	Lf3	13. Le2	Td6	21. de5	Sc6
6. ef3	Sf6	14. Tf1	Se5	22. g5	Th8
7. a4	Dg3	15. Sg1	Sfg4	23. Lf1	a6
8. fg3	Td8	16. fg4	Sd7		

Marko Lovrečič Saražin

KRIŽANKA NOBELOVI NAGRAJENCI I. – Rešitev s str. 96

ESTAVIA MARIA BORJAK 1908	AVSTRO- LITOVSKA KRALJICA V EGIPTU	LEVI D. 1870	FRANCO 1868	PANOST MARIČKA 1867	BOŠA POPOVIČ	OSKAR MUNA	VENKA TICA DARVON		FERDO DUPON	MASSIMO VITO MISTO	ANKELEH MATE BONJOUR	MELA BENNA	IRMA NICA			KITLO POMER TILDO	LEONHARD TILER	DEJES DANILKA 1867	ZAVO DOLU DANČAN	RONALD PENLAND 1871	GLADIA NEZMET
LEVI 1870	A	L	V	A	R	E	Z	A	M	B	O	N	P	L	A	N	C	K			
MARCELKO KALJA 1868	M	A	R	C	O	N	I	C	O	O	P	E	R	L	E	P	I	L	O		
DOVA KIRKA KORNA	A	N	T	I	M	O	N	O	N	O	N	A	B	O	Z	I	M				
RONALD SPROČEN	R	D	A	T	A	L	T	L	A	K	A	V	A	R	O	A					
IRMA KALJA	N	A	P	E	R	A	A	A	R	E	L	O	R	E	N	T	Z				
EMILIA KORNE	A	U	E	R	B	U	L	E	K	A	P	I	C	A	E	T	A				
	R	J	A	R	E	B	A	L	A	N	S										
MARCEL 1868	F	R	A	N	C	K	A	L	E	S											
KORNE 1868	P	R	I	V	A	T	I	S	T	E	T	N	A	E	S	K	I	M	O		
IRMA KALJA	J	A	N	E	T	I	R	A	L	I	R	I	K	A	K	S	I				
IRMA KORNE	E	N	C	O	M	P	T	O	N	E	S	A	K	I	E	O	S				
ROBERT KORNE	R	K	M	I	L	O	S	T	R	A	M	A	N								

ŠTEVILSKA KRIŽANKA

$$(\sqrt{2} = 1,41 \text{ in } \pi = 3,14)$$

1	2	3	4	5	6	7	8
9	10	11	12	13	14	15	16
17	18	19	20	21	22	23	24

VODORAVNO: 1. Ploščina pravokotnega trikotnika, če je njegova hipotenuza 40 in oster kot $22^{\circ}30'$; 4. Površina pokončne prizme, ki ima za osnovno ploskev pravokotni trikotnik, eno kateto 39, druga kateta pa je za 9 krajša od hipotenuze. Višina prizme je enaka krajši kateti; 9. Polmer kroga, ki je včrtan v enakokraki trikotnik z osnovnico 24 in krakom 20; 10. Število, ki ga je treba odšteti od števca in prišteti imenovalcu ulomka $537/463$, da dobimo $1/9$; 12. Volumen kvadra, včrtanega v kroglo z volumnom $1372\pi/3$, če so stranice kvadra v razmerju $2 : 3 : 6$; 13. $f(f(101))$, če je $f(x) = (2x + 1)/(x - 2)$; 14. Ploščina romba, ki ima eno diagonalo dvakrat večjo od druge, vsota njunih dolžin pa je 15; 15. Vrednost izraza $\sqrt{(1\frac{1}{5})^2} + \sqrt{1 - \frac{9}{25}}$; 16. Vrednost izraza $(\frac{a+b}{2})^2 - (\frac{a-b}{2})^2$ za $a = 3$ in $b = 311$; 17. Ploščina pravokotnega trikotnika, če poznamo odseka, ki ju na hipotenuzi določa dotikališče vrtane krožnice: 38 in 99; 19. Stranica enakostraničnega trikotnika s ploščino $25\sqrt{3}$; 20. Ploščina trapeza z osnovnicama 20 in 6 ter s krakoma 13 in 15; 21. Vrednost izraza $\frac{2,75:1,1+3\frac{1}{3}}{2,5-0,4\cdot3\frac{1}{3}} : \frac{5}{91}$;

NAVPIČNO: 1. Vrednost izraza $(10,65)^2 - (9,35)^2$; 2. Višina valja s premerom osnovne ploskve 12 in površino 168π ; 3. Kvadrat višine na hipotenuzo v pravokotnem trikotniku, če ta višina določa na hipotenuzi odseka 27 in 89; 4. Kolikšno je najmanjše število kroglic, ki jih moramo na slepo izvleči iz posode, v kateri je 45 belih, 30 črnih in 15 zelenih kroglic, da bo med izvlečenimi vsaj pet kroglic enake barve; 5. Kolikšna naj bo vrednost b , da bo imela funkcija $y = 3x + b$ ničlo pri $-\frac{1}{3}$;

6. Najmanjši skupni večkratnik števil 24, 47 in 48; 7. Koliko trikotnikov je na sliki?; 8. Diagonala kvadrata s stranico 200;



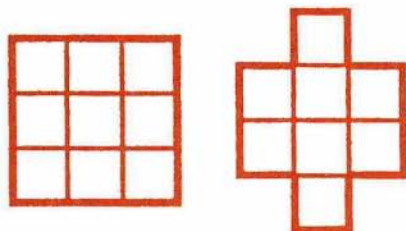
11. Rešitev enačbe $x/8 - (x + 3,5)/12 = 1$; 12. Stranska višina pokončne piramide, ki ima za osnovno ploskev kvadrat z robom 100, njena površina je pa 61200; 14. Volumen kvadra z robovi 3, 4, 23; 16. Število premic, določenih s 14 točkami v ravnini, če nobene tri ne pripadajo isti premici; 17. Število diagonal desetkotnika; 18. Najmanjše praštevilo, ki pri deljenju s 7 da ostanek 1; 20. Pri katerem x doseže funkcija $f(x) = 16 - (x - 1)^2$ maksimum? 22. Premer kroga z obsegom $3,14$;

RACUNALNIŠTVO

UGANKI ZA KRATEK ČAS

Ni še tako dolgo, ko mi je oče iz službe prinesel zanimivi uganki, ki bi ju lahko šteli med uganke razvedrilne matematike.

Prva uganica zahteva, da reševalec v kvadrat 3×3 (prvi lik na sliki) vpiše števila med 1 in 9 tako, da nobeni zaporedni števili ne ležita v kvadratih s kakim skupnim ogliščem. Da je naloga zlobna (če o rešljivosti podvomimo šele po daljšem času), pove kratek premislek: v središčni kvadrček očitno ne moremo vpisati nobenega števila.



Druga uganica zahteva isto za števila od 1 do 8 in drugi lik s slike. Prijatelj, ki ima dobro fizikalno intuicijo, je uganko rešil v petih minutah. (Svojo strategijo mi je opisal takole: *najmanj nevarni sta števili 1 in 8, ki imata samo po enega soseda, zato ju postavimo na najbolj ogroženi mesti - v sredino; ostale lege zadosti hitro ugotovimo s poskušanjem.*) V splošnem rezultati niso bili tako dobri: večino ljudi je naloga tako obsedla, da je niso spustili iz rok, dokler po zajetnem kupu na gosto popisanega papirja niso našli rešitve. Rekordarka (med tistimi, ki vsaj že 20 let niso slišali za matematiko) je pravilen razpored dobila po 25 minutah. Zanimivo je, da je rešitev samo ena (pravzaprav so štiri simetrične). Našel sem jo z računalnikom. Program v turbo pascalu je zgled uporabe metode sestopanja, o kateri je Presek že pisal.

```
program Osem;
uses Crt;
type
  stevilo = 0..9;
  polje = array [1..4,1..3] of stevilo;
  koord = record {koordinati v tabeli tipa polje}
    vrsta: 1..4;
    stolp: 1..3;
  end;
var
  g: polje; {Pravokotna tabela, s katero predstavimo (drugi)}
```

```

    {lik s slike. V tabelo vstavljamo stevila od 1 do 8. Prazen}
    {kvadratega označimo tako, da vanj vpišemo ničlo. Ker lik ni}
    {pravokotne oblike, v "odvecne" kvadratke vpišemo devetko.}
    i,j: integer;           {stevca po vrsticah in stolpcih}
    q: koord;               {mesto prvega vpisa v lik}
procedure Poskusi (n: stevilo; kje: koord);
    {Na tekocem koraku poskusamo v lik postaviti stevilo n.}
    {Spremenljivka kje nam pove, kam smo na prejšnjem koraku}
    {postavili stevilo n-1.}

    var
    i,j: integer;           {stevca po vrsticah in stolpcih}
    p: koord;               {koordinate postavitve stevila n}
begin
    if n > 8 then begin           {Uspeli smo postaviti vsa stevila!}
        for i:=1 to 4 do begin     {Izpišemo dobljeno postavitev.}
            for j:=1 to 3 do
                if g[i,j]=9 then write("):3) else write(g[i,j]:3);
                writeln;           {nova vrsta}
            end; { for }
            writeln;
        end { if }
    else begin                   {Vsa stevila se niso postavljena.}
        for i:=1 to 4 do         {Stevilo n poskusamo postaviti v vse}
                                {kvadratke.}

            for j:=1 to 3 do
                if g[i,j] < > 9 then begin {Ce nismo v "odvecnem"}
                                    {kvadratu}
                    if ((g[i,j]=0) and      {in je predlagani kvadratega se}
                        {prazen, hkrati pa nima skupnega oglisca s predhodno izbranim}
                        {kvadratom,}
                        not((abs(kje.vrsta-i)<=1) and (abs(kje.stolp-j)<=1)))
                then begin
                    g[i,j]:=n;      {V predlagani kvadratega postavimo n.}
                    {Pri naslednjem koraku moramo poznati prejšnjo potezo, da}
                    {lahko preverimo, ce kvadratega, v katera smo vstavili}
                    {zaporedni stevili, nimata skupnih oglisc.}
                    p.vrsta:=i; p.stolp:=j;
                    Poskusi(n+1,p);
                    g[i,j]:=0;      {Po vrnitvi predhodno potezo zbrisemo.}
                end
            end
        end
    end

```

```

        end; { if }
    end; { if }
end; { else }
end; { Poskusi }
begin
    ClrScr;
    for i:=1 to 4 do                {Na zacetku so vsa polja prazna.}
        for j:=1 to 3 do g[i,j]:=0;
        g[1,1]:=9; g[1,3]:=9;      {"Odvecne" kvadratke oznacimo z}
                                   {devetkami.}
        g[4,1]:=9; g[4,3]:=9;
                                   {Da bomo nasli vse resitve, poskusamo postaviti enko na}
                                   {vsa mesta.}

        for i:=1 to 4 do
            for j:=1 to 3 do
                if g[i,j]<>9 then begin {Seveda jo moramo postaviti v lik.}
                    {V izbrani kvadrates postavimo enko in si zapomnimo koordinate.}
                    q.vrsta:=i; q.stolp:=j;
                    g[i,j]:=1;
                    Poskusi(2,q);      {Rekurzivno poskusimo postaviti se ostala}
                                       {stevila.}
                    g[i,j]:=0; {Po poskusu prejsnjo postavitev enke zbrisemo.}
                end;
            end;
        end;
    end.

```

Bralcem, ki imajo radi računalništvo, pa v izziv postavljam še problem, ki se mi je porodil ob prvi uganki: koliko rešitev ima prva uganke, če pogoje omilimo tako, da sosednji števili ne smeta biti v kvadratih s skupno stranico. Ugotovili boste, da presenetljivo veliko.

Marjan Jerman

ZLOŽENKA – Rešitev s str. 115

K	O	C	K	A
M	O	N	O	M
M	I	N	O	R
M	I	N	U	S
S	I	N	U	S

Stavra V. Radojković

RAZVEDRILO

TANGRAMSKI PARADOKSI

Najbrž sta Američan **Sam Loyd** (1841 - 1911) in Anglež **Henry Ernest Dudeney** (1857 - 1930) poznana marsikateremu bralcu Preseka, saj njunega deleža na področju rekreacijske matematike preprosto ni moč spregledati. Oba sta zapustila opazne prispevke tudi v igri tangram. Poleg tega, da je vsak izmed njiju objavil precej originalnih tangramskih likov, sta si privoščila tudi kakšno prav duhovito šalo na račun logike. Seveda s pomočjo tangrama. Tako je Loyd avtor prvih treh tangramskih paradoksov, ki jih vidite na sliki, četrti pa je Dudeneyev.

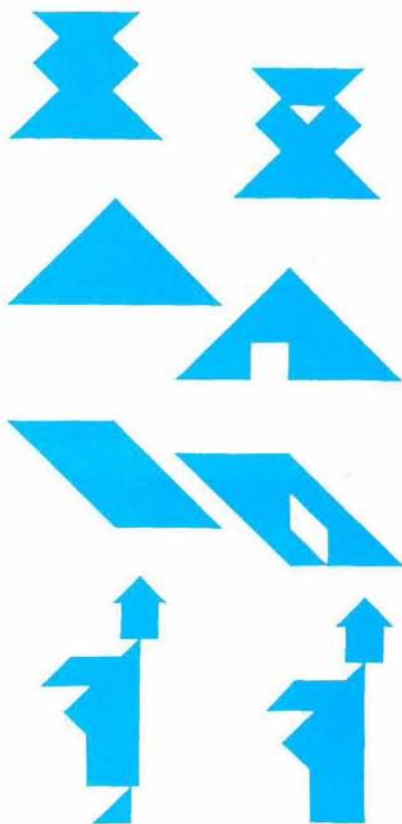
Oglejmo si risbice nekoliko pozorneje in poskušajmo ujeti njihovo sporočilo. Na prvi pogled se zdi, da je pri vsakem izmed štirih primerov vse v kar

najlepšem redu in da ni na njih najti nič nenavadnega. Lepo je namreč videti, da je pri vsakem izmed štirih parov figura na levi sestavljena iz (najbrž) vseh sedmih tangramskih ploščic, pri vsaki desni figuri pa manjka po ena izmed ploščic.

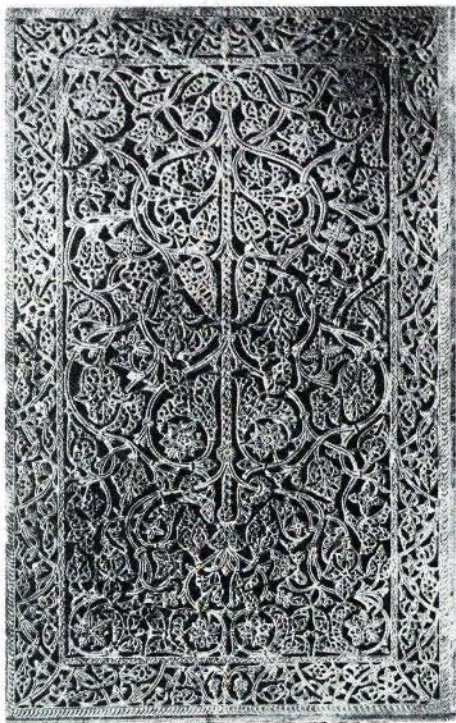
Da, če bi bilo zares tako, ... - saj potem v teh štirih risbica ne bi bilo nobenega paradoksa! Vendar pa Loyd in Dudeney trdita, da je **prav vsak** izmed osmih narisanih likov sestavljen iz vseh sedmih ploščic!

In prav to je tisto, kar napeljuje k paradoksalnosti. Postavlja se namreč vprašanje - le kako lahko manjka nekaj, kar očitno nikakor ne sme manjkati?

Tako, zgolj toliko. Levji delež zabave prepuščam bralcu. Zagatnost teh štirih tangramskih paradoksov naj si razloži, kakor pač ve in zna.



Vilko Domajnko



Slika 1. Ornamenti na marmorni oblogi s stiliziranimi rastlinskimi vzorci iz leta 970 (levo), na kosu egipčanske tkanine iz 12. stoletja (desno), na čaši Karla Velikega iz 13. stoletja (v sredini).