



1

PRESEK

DRUŠTVO MATEMATIKOV, FIZIKOV IN ASTRONOMOV SLOVENIJE, 19 (1991-92)

YU ISSN 0351-6652

VSEBINA

UVODNIK	Presek je polnoleten (Marija Vencelj).....	1
MATEMATIKA	Eulerjeva poliedrska formula (Marija Vencelj).....	2-6
	Kombinatorno pravilna telesa (Marija Vencelj).....	18-20
	Problem treh vrčev in trilinearne koordinate (Marija Vencelj).....	32-37
	Platonovi poliedri (Vilko Domajnko).....	40-44
	O kolinearnosti treh točk (D.M.Milošević, prev. in pripr.	
	M.Dobovišek).....	46-49
	Kompleksna cela števila (Borut Zalar).....	50-53
FIZIKA	Superprevodniki in njihova uporaba (Andrej Cvelbar).....	8-13
	Mehurčki (Janez Strnad).....	22-27
ASTRONOMIJA	Kako so prvič ugotovili velikost zvezde (Marian Prosén)...	14-17
	Zvezdni interferometer (Janez Strnad).....	28-30
	Proksima Kentavra (Marian Prosén).....	38-39
NOVE KNJIGE	Virčenko N.A., Matematika v aforizmih, citatih in izrekih	
	(Dušica Boben).....	6
	Prosen M., Veliki in mali medved (Darja Žužek-Delač).....	7
	Bibliografije in biografije slovenskih matematikov in fizikov	
	(Ciril Velkovich).....	27
	Weinberg N., Prve tri minute (Ciril Velkovich).....	53
	Lokar M., Začeti z dBASE IV (Jože Andrej Čibej).....	54-55
	Priročniki za osnovne in srednje šole.....	55
	Račkova knjižnica (Ciril Velkovich).....	64
NALOGE	Test za dvojčke (Boris Lavrič).....	7
	Očrtaj kvadrat. Naokrog po stožcu. Delitev plena ali težave	
	se začno šele po ropu (Marija Vencelj).....	20-21
	Kobonovi trikotniki (Ciril Pezdir).....	45
	Vzporednica (Boris Lavrič).....	45
	Ročna spretnost in še kaj (Vilko Domajnko).....	49
	Z geometrijskim zaporedjem od atoma do Galaksije	
	(Ciril Pezdir).....	60
RAZVEDRILO	Zelo strokovna križanka (Marko Bokalič).....	31
	Od igre "Križci in krožci" do igre "Rendzju"	
	(Milan Ambrožič).....	56-60
	Jakobova lestev (Marija Vencelj).....	61
	Tangram zgolj v obrisih (Vilko Domajnko).....	62-63, III
	Šah. Zmaga? (Peter Petek).....	IV
NA OVITKU	E. Escher, Zvezde, lesorez, 1948. - Pravilna in iz njih sestavljene	
	telesa so burila domišljijo in duha matematikov, filozofov in	
	umetnikov - glej tudi članek V. Domajnka, Platonovi poliedri	
	na str. 40.....	I

UVODNIK

PRESEK JE POLNOLETEN

Pa je Presek res že od nekdaj, porečejo najmlajši med vami. Drugim se bo zazdel vrstnik, kar si Presek pravzaprav najbolj želi biti. Ima pa Presek tudi take bralce, prijatelje in sodelavce, ki se bodo spomnili tiste deževne Murske Sobote pred devetnajstimi leti, ko so na občni zbor Društva slovenskih matematikov, fizikov in astronomov mladi navdušenci prinesli prvo in edino številko praPreseka ter z njo napovedali Presekovo rojstvo. Dobro leto zatem je izšla prva številka nove revije za mlade matematike, fizike in astronome, odtlej redno izhajala, postala spotoma še revija za računalnikarje, in tako je danes pred nami prva številka njenega devetnajstega letnika.

V osemnajstih letih izhajanja je Presek našel svoje današnje ugledno mesto v slovenski strokovni literaturi za mlade. Bralci nam zagotavljajo, da je to imeniten časopis, ki ga radi berejo osnovnošolci in srednješolci, njihovi učitelji in starši, pa tudi drugi ljubitelji matematike in fizike, celo upokojenci. Sodelavci pri Preseku to še kako radi slišimo. Veseli smo pohvale, da je Presek vsak dan boljši, pa tudi pisma vojaka, da sta mu dan ali dva v vojski hitreje minila ob branju Preseka.

Seveda pa pohvale obvezujejo. Pri Preseku se bomo trudili, da vam bo revija še naprej všeč in zato vaš zvesti spremljevalec skozi šolska leta in v razvedrilo morda tudi kasneje.

Včasih za nas to ni najlažje. Za posamezno številko potrebujemo kar precej kvalitetnih prispevkov, krog Presekovih sodelavcev pa ni prav velik. Zato vabimo k sodelovanju vse, ki so jim Presekova področja poklic ali konjiček. Vse – od učiteljev na osnovnih šolah, tja do matematikov in fizikov na univerzi in inštitutih. Naj nas ne bo s Puškinom strah:

*Starosti vsaki Zevs premili
igračke je izbrati znal;
kako bi starcu se čudili,
če z ropotuljo bi rožljajl.*

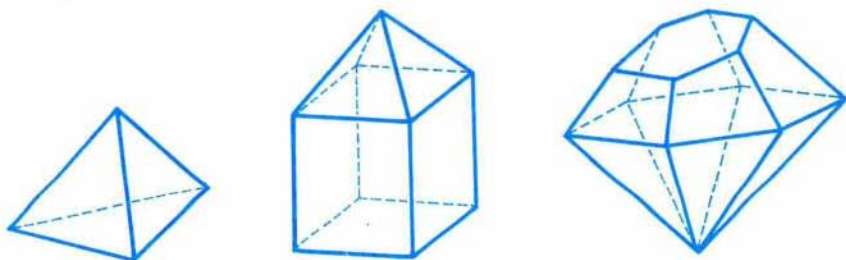
Marija Vencelj

MATEMATIKA

EULERJEVA POLIEDRSKA FORMULA



Se še spomnite, kako ste v osnovni šoli ob prvem srečanju s kocko ali tetraedrom šteli, koliko oglišč imata, pa koliko robov in stranskih ploskev? Bi napravili to še za telesa na sliki 1? Vsakemu od teles poiščite število oglišč (vrhov) V , število robov R in število stranskih ploskev S .



Slika 1

Nato za vsako teh teles izračunajte vrednost izraza

$$V - R + S \quad (1)$$

Sedaj pa napravite to še s pravo nogometno žogo, tako, ki je sešita iz samih petkotnih in šestkotnih usnjenih krpic. Nič hudega ni, če ni dovolj napihnjena za dober nogomet. Tako bo še bolj podobna oglatemu telesu. Toda tudi pri dobro napihnjeni žogi ne morete zgrešiti, kaj morate šteti za oglišče, kaj za rob in kaj za stransko ploskev. Za tiste, ki žoge nimate pri roki, naj povem, da jo sestavlja 12 petkotnikov in 20 šestkotnikov. Do prve brce so petkotniki črni in šestkotniki beli, njihovo razporeditev pa lahko uganete s karikature.

Ste izračunali vrednost izraza (1) in ste presenečeni? Ali pa vam rezultat postaja všeč?

Gre za preprosto geometrijsko resnico, ki so jo poznali že stari Grki in je privlačevala pozornost matematikov več kot dva tisoč let, preden jo je leta 1752 dokazal veliki švicarski matematik Leonhard Euler.

Euler je dokazal, da za *poljuben enostaven polieder velja formula*

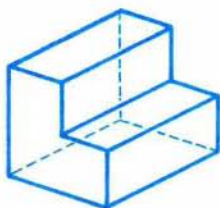
$$V - R + S = 2 \quad (2)$$

ki jo imenujemo *Eulerjeva poliedrska formula*. Saj ste vedno dobili tak rezultat, kajne?

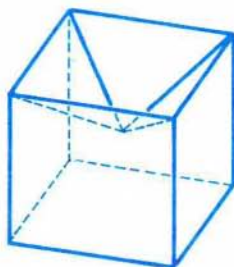
In kaj vse sodi med *enostavne* poliedre? S strogo definicijo se ne bomo ukvarjali, za dober občutek pa bo zadoščalo naslednje: Opazujmo samo mejno ploskev (površino) poliedra. Če ni povezana, to je, če sestoji iz dveh ali več ločenih kosov, polieder ni enostaven. Če pa je mejna ploskev povezana, je polieder enostaven, kadar je ta mejna ploskev taka, da bi jo bilo moč, če bi bila narejena iz primerno prožnega materiala, napihniti v krogelno ploskev (sfero). Očitno vsa telesa s slike 1 izpolnjujejo ta pogoj, pa tudi žoga. Na sliki 2a je še nekaj enostavnih poliedrov. Da pa enostavnost poliedra za veljavnost formule (2) ni nebitven pogoj, kaže primer 2b. Telo na sliki 2b sestoji iz dveh tetraedrov s skupnim ogliščem in očitno ni enostaven polieder, saj bi ga v tistem skupnem oglišču ne mogli "razpihniti". Zanj (2) ne velja, pač pa je $V - R + S = 3$.

Eulerjevo poliedrsko formulo bomo dokazali le za *konveksne (izbočene) poliedre*, posebno podmnožico enostavnih poliedrov.

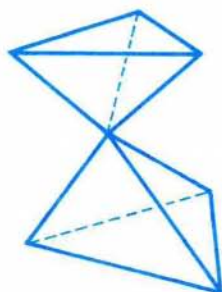
Definicija. *Konveksen polieder je tak omejen presek končnega števila polprostorov, ki ne leži ves v eni ravnini.*



Slika 2a



Slika 2b



Konveksen polieder ima očitno končno mnogo oglišč, robov in stranskih ploskev. Stranske ploskve so konveksni večkotniki.

Dokaz formule (2). Naj bo P konveksen polieder, število njegovih oglišč naj bo V , število robov R in S število stranskih ploskev. Opazujmo vse premice, ki jih je moč položiti skozi vse možne pare njegovih oglišč. Nato izberimo tako ravnino Q_0 , ki ni vzporedna nobeni teh premic.

Ta drobní tisk lahko preskočijo vsi tisti, ki jih ni nič zaskrbelo, ali taka ravnina sploh obstaja. Z dvomljivci - upam, da je kaj tudi takih - pa pogledimo, kako je z njenim obstojem. Naj bodo $p_1, p_2, \dots, p_m$ opazovane premice in O poljubna točka v prostoru. Označimo s $Q_i, i = 1, 2, \dots, m$, ravnine, ki potekajo skozi O in pravokotno na p_i . Nadalje izberimo tako premico p_0 , ki bo potekala skozi O in ne bo ležala v nobeni od ravnin Q_i . Tu imamo očitno še zelo široko izbiro. Premica p_0 ni pravokotna na nobeno od opazovanih premic $p_i, i = 1, 2, \dots, m$. Poljubna ravnina, pravokotna na p_0 , ima tedaj lastnost, da ni vzporedna nobeni teh premic.

Zaradi lažjega izražanja predpostavimo, da je ravnina Q_0 vodoravna in da vsa oglišča leže nad njo.

Očitno je, da leže posamezna oglišča poliedra P na različnih višinah glede na Q_0 . Izberimo jim oznake glede na njihovo višino: A_1 naj bo najnižje, A_2 naslednje, ..., A_V najvišje oglišče.

Vsaki stranski ploskvi poliedra pripada pri tem natanko določeno oglišče, ki je za to stransko ploskev najnižje. Enako velja za robove. Označimo z R_i in $S_i (i = 1, 2, \dots, V)$ število robov, oziroma stranic, ki jim je A_i najnižje oglišče. Seveda je $R_V = S_V = 0$. Nadalje je očitno

$$R = R_1 + R_2 + \dots + R_{V-1} \quad (3)$$

in

$$S = S_1 + S_2 + \dots + S_{V-1} \quad (4)$$

Med R_i in S_i veljajo določene zveze. Prva

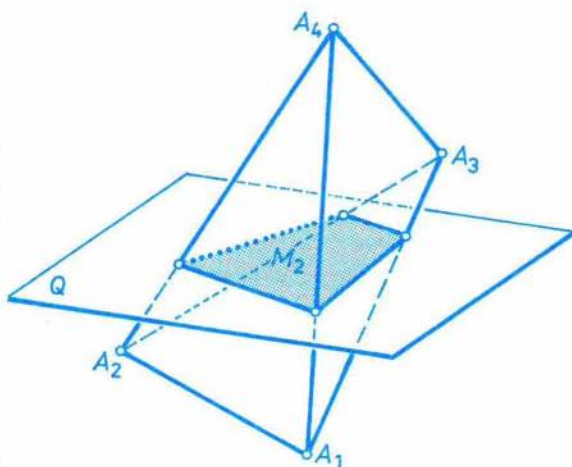
$$R_1 = S_1 \quad (5)$$

je očitna, saj se v najnižjem oglišču stika prav toliko robov kot stranic in vsem je to oglišče najnižje.

Da bomo dobili ostale zveze, presekajmo polieder P med ogliščema A_i in A_{i+1} ($i = 2, 3, \dots, V-1$) z ravnino, vzporedno ravnini Q_0 . Presek je konveksen večkotnik, ki ga označimo z M_i . Vsakemu izmed R_i robov poliedra P , ki izhajajo navzgor iz oglišča A_i , pripada neko oglišče večkotnika M_i , vsaki od S_i stranskih ploskev, katerim je A_i najnižje oglišče, pa natanko določena stranica večkotnika. Ta oglišča in te stranice sestavljajo nesklenjeno poligonsko črto, ki je del robu (obsega) večkotnika M_i (ker je i vsaj 2, to pri konveksnem poliedru ni nikoli ves obseg večkotnika). Če je A_i najnižje oglišče dveh robov iste stranske ploskve, je zaradi konveksnosti stranskih ploskev hkrati tudi najnižje oglišče te stranske ploskve. To pa pomeni, da opazovana poligonska črta sestoji iz enega samega kosa, ki je lahko tudi samo točka. Taka poligonska črta ima natanko eno oglišče več, kot ima stranic, od koder takoj sledi zveza

$$R_i - S_i = 1 \quad \text{za} \quad i = 2, 3, \dots, V-1 \quad (6)$$

Postopek je ilustriran na sliki 3. Polieder P je tam tetraeder, $i = 2$, M_2 je konveksen štirikotnik, temu koraku prirejena poligonska črta pa sestoji le iz ene stranice in dveh oglišč. Na sliki je označena pikčasto.



Slika 3

Če od (3) odštejemo (4) in upoštevamo (5) in (6), dobimo

$$\begin{aligned} R - S &= (R_1 - S_1) + (R_2 - S_2) + \dots + (R_{V-1} - S_{V-1}) = \\ &= 0 + \underbrace{1 + 1 + \dots + 1}_{(V-2)\text{-krat}} = V - 2 \end{aligned}$$

od tod pa takoj Eulerjevo formulo $V - R + S = 2$.

Marija Vencelj

Virčenko N.A., MATEMATIKA V AFORIZMIH, CITATIH IN IZREKIH. Ljubljana 1990. 260 strani (Knjižnica Sigma; 48)

Nenavadna lepota vlada v carstvu matematike, podobna ne toliko lepoti umetnosti kot lepoti narave; razsoden razum se uči ceniti to lepoto prav tako kot lepoto narave. (E. Kummer)

Ta citat je eden izmed tisočpetstotih, ki jih najdete v novi knjižici Sigmee N.A. Virčenkova *Matematika v aforizmih, citatih in izrekih*. V knjigi so zbrane misli preko 600 velikih ljudi iz različnih časovnih obdobij, dežel in poklicev.

Vsebinsko so razdeljene na šest poglavij:

- definicija in bistvo matematike,
- pomen matematike in njena povezanost z drugimi znanostmi,
- učenje in poučevanje matematike,
- o lepoti matematike in matematičnega ustvarjanja,
- elementarna matematika
- višja matematika in kibernetika.

Kot že naslovi povedo, bo prebiranje izrekov, citatov in aforizmov zanimivo tako za učence in učitelje kot za druge ljubitelje matematike. Prevajalec Dušan Pagon je knjigo obogatil še z zanimivim imenskim in stvarnim kazalom.

Celotna knjiga je opevanje matematike in potrjevanje njene vrednosti. Zato za konec, za pokušino prepíšimo še eno, ne pogostokrat izraženo misel:

Če v matematiki ne bi bilo lepote, bi najbrž ne bilo tudi same matematike. Kaj bi tedaj privlačilo k tej zahtevni znanosti največje genije človeštva? (N. A. Čajkovski)

Dušica Boben

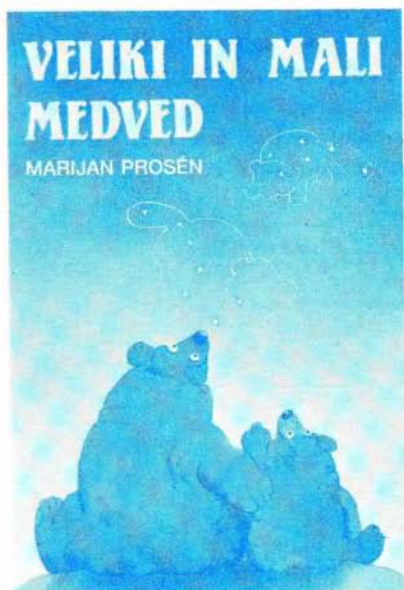
TEST ZA DVOJČKE

Zanimiv kriterij za praštevila daje znani *Wilsonov izrek*, po katerem je naravno število $n > 1$ praštevilo natanko takrat, kadar je število $(n - 1)! + 1$ deljivo z n . Poskusi z njegovo pomočjo dokazati naslednji kriterij za pare praštevil dvojčkov:

Za naraven $n > 2$ sta $n - 1$ in $n + 1$ par praštevil dvojčkov natanko takrat, kadar je število $4(n - 2)! + n + 3$ deljivo z $n^2 - 1$.

Boris Lavrič

M. Prosén, VELIKI IN MALI MEDVED, Ljubljana 1990, 32 str., cena 100 din



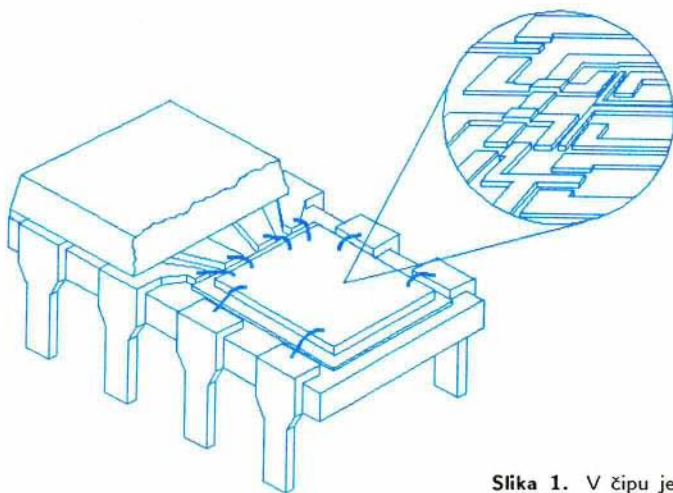
Vsi, ki nas astronomija vsaj malo zanima, gotovo poznamo plodno delo Marijana Proséna. S svojimi članki in knjižicami z astronomsko vsebino uspešno premaguje praznino, ki obstaja na tem področju. Znani sta njegovi knjižici *Astronomček Tonček*, MK, Ljubljana 1985 in *Prvi stik z vesoljem*, DZS, Ljubljana 1984, pa tudi vrsta člankov v različnih revijah, s katerimi avtor približa astronomijo in raziskovalno delo osnovnošolcem. Tokrat je poskrbel za najmlajše in v samozaložbi izdal slikanico z desetimi zgodbami oziroma miti o ozvezdjih, ki jih lahko opazujemo iz naših krajev. Tekst je zapisan z velikimi tiskanimi črkami, tako da lahko sežejo po knjižici že otroci prvega razreda. Zgodbe so napisane preprosto in v lepem jeziku. Orientacijska zvezdna karta ob koncu knjižice bo v pomoč učiteljem, ko bodo poskušali potešiti radovednost otrok ob opazovanju jasnega nočnega neba, seveda pa tudi staršem. Knjižico krasi ilustracije Matjaža Schmidta.

Darja Žužek-Delač

SUPERPREVODNIKI IN NJIHOVA UPORABA

Vsaka snov ima veliko lastnosti. Na nekatere smo pozorni, na druge pa ne. Tudi *električna upornost* je ena izmed lastnosti snovi. V vsakdanjem življenju nas električna upornost predmetov le redko zanima. Pri okenskem steklu nas bolj kot električna upornost zanima prepustnost za svetlobo in mehanska trdnost. Pri hišni električni napeljavi pa mimo nje ne moremo. Električni tok, ki teče skozi žarnico, da le-ta svetí, teče tudi skozi žice električne napeljave in jih brez potrebe segreva. Žice se grejejo tem bolj, čim večja je njihova električna upornost. Da je segrevanje čim manjše, uporabljajo v napeljavah bakrene žice, saj je baker znan kot dober prevodnik električnega toka. Kljub temu izgube niso zanemarljive. Iz šole vemo, da imajo tanke žice večjo upornost kot debele. Njena velikost je enaka $R = \rho l / S$, kjer je ρ specifična upornost snovi, l dolžina žice in S ploščina preseka žice, torej morajo biti žice primerno debele. To ni vedno preprosto dosegljivo.

V osebnem računalniku npr. najdemo veliko črnih plastičnih škatlic z mnogimi nogicami. Pravimo jim čipi (Chip v angleščini pomeni drobec in nekateri čipi so res izredno drobni glede na to, kaj vse se skriva v njih). V enem samem čipu je lahko tudi milijon drobnih stikal (polprevodniških transistorjev), ki so povezana med seboj. Da spravimo vsa ta stikala na ploščico, veliko nekaj kvadratnih centimetrov, morajo biti zelo majhna. Tudi povezave med njimi morajo biti zelo tanke, na primer široke $1\mu\text{m}$ in visoke $1\mu\text{m}$ (eno tisočinko



Slika 1. V čipu je veliko med seboj povezanih stikal ter drugih elementov.

milimetra). Ploščina preseka je torej 10^{-12}m^2 . Ob podatku za baker $\rho = 2 \cdot 10^8 \Omega\text{m}$ sledi, da ima žička z dolžino 5mm upornost 100Ω (med tem ko je upornost sto metrov dolge žice hišne napeljave na primer 1Ω). Ker je na čipu med seboj zaporedno povezanih veliko stikal in se upornosti povezav seštevajo, je upornost cele verige kar velika. Kljub temu se izdelovalci čipov trudijo, da bi še zmanjšali velikost stikal na čipu in povezav med njimi. Če tega ne bi delali že doslej, bi osebni računalnik zasedel velik del hiše.

Ker se bo zmanjševanje elementov na čipu še nadaljevalo, se bo večala tudi upornost povezav. Stikal in povezav bo vedno več. Čeprav skozi vsa ta stikala in povezave teče navadno razmeroma majhen tok, se čipi grejejo, v prihodnje pa se bodo še bolj. Na žalost stikala pri visoki temperaturi ne delajo prav.

Vse naštete težave bi obšli, če bi našli snov, ki bi imela bistveno manjšo specifično upornost kot baker ali pa bi bila njena vrednost celo enaka nič. Take snovi poznamo in se imenujejo superprevodniki, vendar se superprevodnost pojavi le pri zelo nizkih temperaturah okoli absolutne ničle (na primer pri temperaturah pod 20 Kelvinov). Pri višjih temperaturah superprevodne lastnosti izginejo in te snovi postanejo navadni prevodniki. Temperaturo, pri kateri postane superprevodnik navaden prevodnik, imenujemo kritična temperatura. Različni superprevodniki imajo različne temperature prehoda T_c , na primer:

element	T_c	spojina	T_c
Al	1.2K	NbTi	9.6K
Hg	4.2K	Nb ₃ Sn	18K
Pb	7.2K	Nb ₃ Ge	23K
Nb	9.2K		

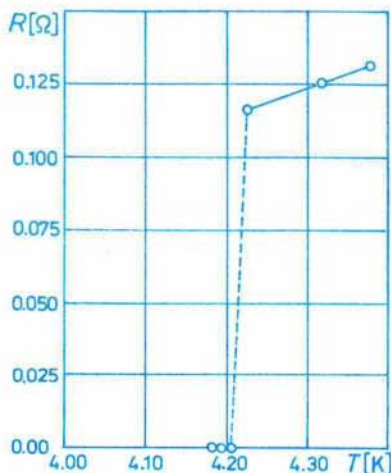
Pojav superprevodnosti je leta 1911 odkril Nizozemec Kammerlingh Onnes, kateremu je prvemu uspelo doseči temperaturo 4.2K in utekočiniti helij. Ko je Onnes ohlajal živo srebro s potapljanjem v termos posodo s tekočim helijem in pri tem meril električno upornost, je opazil, da upornost živega srebra med ohlajanjem nenadoma pade na nič. Po tem odkritju so v 75 letih do 1986 našli še 25 drugih superprevodnih elementov in na tisoče njihovih spojin, ki so superprevodne, vendar so morali vse te snovi hladiti s tekočim helijem. Najvišja temperatura prehoda je bila 23K. Te superprevod-

nike imenujemo *navadni* superprevodniki.

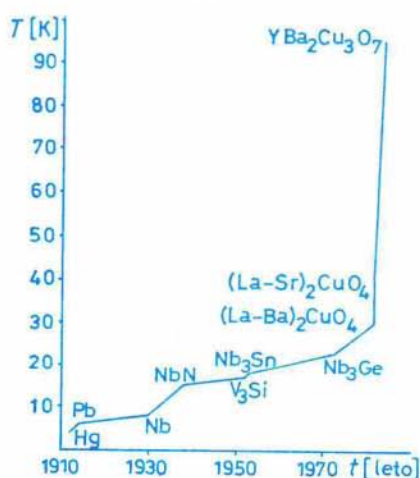
Leto 1986 pomeni veliko prelomnico pri odkrivanju superprevodnih snovi. Od tedaj naprej smo spoznali nove spojine, ki imajo temperaturo prehoda bistveno višje, pri 90K, 100K in celo pri 125 Kelvinih. Te superprevodnike imenujemo *visokotemperaturni* superprevodniki. Zelo razveseljuje, da jih lahko hladimo s tekočim dušikom, ki ima temperaturo 77K. Tekoči dušik je več kot desetkrat cenejši od tekočega helija. Cena je pomembna zato, ker med ohlajanjem v tekočem heliju ali tekočem dušiku superprevodnik odda toploto hladilni tekočini, ki zato izpareva. Tudi zaradi nepopolne toplotne izolacije je hladilne tekočine vedno manj. Helij je tako dragocen, da ga lovimo in ponovno utekočinimo. Dušik je veliko cenejši in ga ponavadi kupimo že vtekočinjenega ter ga ob uparevanju vračamo nazaj v zrak.

Visokotemperaturni superprevodniki so zapletene spojine. Skupno jim je to, da vsebujejo poleg drugih elementov baker in kisik. V isti skupini elementov pogosto najdemo več superprevodnih spojin, ki imajo te elemente v različnih razmerjih, kar je vzrok za različne temperature prehoda. Najpogostejše skupine elementov, ki tvorijo visokotemperaturne superprevodnike, so Tl-Ca-Ba-Cu-O, Bi-Sr-Ca-Cu-O in Y-Ba-Cu-O (npr. $\text{YBa}_2\text{Cu}_3\text{O}_7$, $T_c = 93\text{K}$).

Glede na to, da moramo superprevodnike ves čas ohranjati na nizki temperaturi, kar je drago, superprevodniki niso primerni za vsakdanjo uporabo.



Slika 3. Odvisnost uporaba R stebrička Hg v odvisnosti od temperature T v bližini superprevodnega stanja (K. Onnes 1908)



Slika 4. Najvišja poznana temperatura $T[\text{K}]$ prehoda v superprevodno stanje v odvisnosti od časa t .

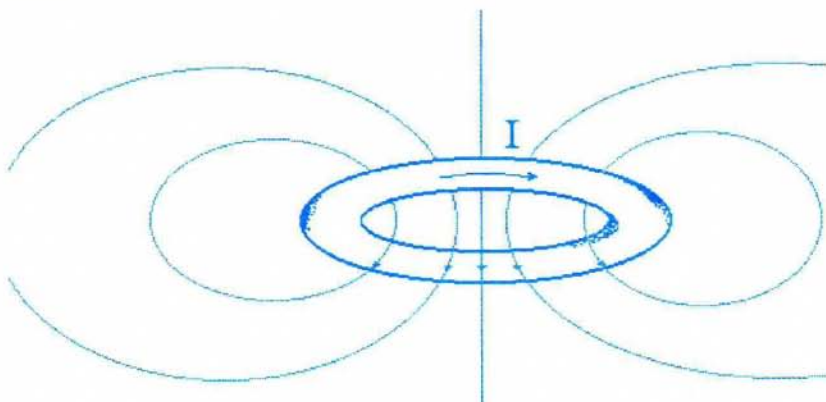
Uporabljamo pa jih tam, kjer nam njihove posebnosti veliko pomenijo. Denimo, da želimo ustvariti močan elektromagnet velikih razsežnosti. V preteklosti so za to uporabljali navitje bakrenih žic, po katerem je tekel velik električni tok. Žice so bile votle in hlajene z vodo, saj so se zaradi velikega toka močno grele. V novejšem času nadomeščajo bakrena navitja s superprevodnimi. V superprevodnih navitjih lahko tečejo tudi veliki tokovi, ne da bi se navitja segrevala. Seveda pa moramo superprevodnike ves čas ohlajati. Cena električne energije, ki jo porabimo za neželjeno gretje bakrenih žic, je nekajkrat večja od stroškov, ki jih porabimo za ohlajanje, napajanje in vzdrževanje superprevodnega magneta. Poleg tega se magnetno polje superprevodnih magnetov med obratovanjem manj spreminja od magnetnega polja bakrenih navitij, ker se baker greje in zato tudi razširja.

Pri obravnavi uporabe superprevodnikov ne moremo mimo Josephsonovega spoja (imenuje se po Brianu Josephsonu). Tako imenujemo sendvič, ki ga dobimo, če med dva kosa superprevodnika vtaknemo zelo tanko plast izolatorja (snovi, ki ima zelo veliko upornost). V tem sendviču teče iz enega kosa superprevodnika skozi izolator v drugi kos superprevodnika enosmerni električni tok. Kljub temu, da teče ta tok skozi izolator, med superprevodnima kosoma ni nobene napetosti. Če na superprevodna kosa priključimo napetost, teče med njima skozi izolator izmenični tok s frekvenco, ki je sorazmerna priključenim napetosti. Ker znamo frekvenco zelo natančno meriti, smo tako dobili natančen voltmeter. Če pa priključimo med superprevodnika poleg enosmerne napetosti U_0 še izmenično napetost z amplitudo $U_{\sim}$ (napetost med superprevodnikoma torej spreminjamo sinusoidno med $U_0 + U_{\sim}$ in $U_0 - U_{\sim}$), teče skozi izolator med njima električni tok, ki je frekvenčno moduliran (frekvenca električnega toka se sinusoidno spreminja v odvisnosti od priključene izmenične napetosti).

Iz dveh Josephsonovih spojev lahko sestavimo SQUID. To je superprevodni obroč, ki je na dveh mestih prekinjen z izolatorjem. Že prej smo omenili, da lahko majhen enosmerni tok teče skozi Josephsonov spoj, ne da bi se med superprevodnikoma pojavil padec napetosti. Če enosmerni tok povečamo, se napetost pojavi. Velikost toka, ki je potreben, da se pojavi napetost, je odvisna od magnetnega pretoka skozi obroč (to je od produkta gostote magnetnega polja in preseka obroča). Zato lahko s squidom merimo magnetna polja, ki so lahko zelo majhna.

Naše telo oddaja, podobno kakor radijski ali televizijski oddajnik, elektromagnetna valovanja, ki nudijo veliko podatkov o našem zdravstvenem stanju in o trenutnih dogajanjih v telesu. Zdravniki želijo s pomočjo teh valovanj opazovati biološke dejavnosti v telesu, vključno z usodnimi dejavnostmi srca

in možganov. To valovanje je od sto tisočkrat do deset milijardkrat šibkejšo od zemeljskega elektromagnetnega polja. Tako šibka polja lahko merimo le s squidi, toda poleg zemeljskega polja so v navadni sobi še elektromagnetna valovanja radijskih in televizijskih postaj, postaj radioamaterjev, miličnikov, gasilcev, reševalcev. Da lahko prisluhnemo skrajno šibkim signalom iz telesa, moramo vsem neželenim valovom preprečiti pristop v sobo za meritve. Tudi v ta namen lahko uporabimo superprevodnike. Sobo obdamo s superprevodnimi ploščami, saj superprevodniki zelo dobro zaustavljajo elektromagnetno valovanje. Tako lahko prisluhnemo drobnemu elektromagnetnemu valovanju telesa.



Ker taka soba tudi navzven ne prepušča elektromagnetnega valovanja, jo lahko uporabljajo tudi tisti, ki ne želijo, da bi se elektromagnetno valovanje njihovih računalnikov, ki obdelujejo strogo zaupne podatke, širilo navzven in bi jih lahko vohuni razvozlati. Vsak računalnik namreč pri svojem delovanju oddaja elektromagnetno valovanje.

Vrnimo se še enkrat k Josephsonovem spoju. Uporaben je tudi kot logična celica (logične celice so osnovni gradniki računalnika). Povedali smo že, da je vrednost toka skozi spoj, pri kateri se pojavi napetost, odvisna od magnetnega pretoka, torej od zunanjega magnetnega polja. Če v bližini Josephsonovega spoja speljemo dva električna vodnika, s tokom v teh vodnikih ustvarjamo magnetno polje tudi v območju Josephsonovega spoja. Če teče skozi ta spoj tok, ki je le malo manjši od kritičnega toka, potem lahko z dovolj velikim magnetnim poljem bližnjih vodnikov ustvarjamo napetost na tem spoju. Če skozi vsaj en vodnik teče dovolj velik tok, njegovo polje povzroči nastanek napetosti na Josephsonovem spoju. Napetost na spoju se torej po-

javi, če teče dovolj velik tok v enem ALI drugem vodniku. To je logična celica ALI. Da nam enako vezje opravlja funkcijo IN, pošiljamo po vodnikih manjša tokova, tako da le oba skupaj dajeta dovolj močno magnetno polje, ki ustvari napetost na spoju. Tok enega samega vodnika ne zadostuje. Za to sta potrebna toka v obeh vodnikih. Iz celic, ki opravljajo funkciji IN in ALI, lahko nato sestavimo vezje, ki opravlja zapletene logične operacije, kakršne srečamo pri računalniku. Prednost pred današnjimi vezji s transistorji je v večji hitrosti ter manjši porabi energije, slabosti pa so višja cena, zahtevnejša izdelava, slabše poznavanje snovi in manj razvita tehnologija.

Naprave s superprevodnimi elementi so se kljub pogosto visoki ceni izdelave in visokim stroškom vzdrževanja že prebile na nekatera področja, kjer so lahko prinesle bistveno izboljšanje lastnosti ali nižje stroške v primerjavi s klasičnimi napravami. Sem spadajo predvsem veliki magneti, ki jih uporabljamo v medicinski diagnostiki na osnovi jedrske magnetne resonance in elektronske naprave (analogno digitalni pretvorniki in drugi preoblikovalniki fizikalnih veličin, visokofrekvenčni osciloskop). Naj omenim tudi magnetno ločevanje snovi v industriji. Poleg že ustaljenih načinov uporabe superprevodnikov se uveljavljajo tudi novi. Tako preučujejo različne možnosti za izdelavo superprevodnih motorjev, generatorjev in daljnovodov. Nove možnosti se kažejo tudi v prometu, saj se bomo morda vozili z ladjami, ki jih bo poganjal magnetno ustvarjeni vodni curek, ali z vlaki, ki bodo lebdeli v magnetnem polju nad tračnicami. Na področju obrambe in vesoljske tehnike lahko ob uporabi superprevodnikov pričakujemo orožje z elektromagnetno izstrelitvijo, prenos večje mikrovalovne moči in vesoljske ladje brez posadke. Na področju elektronike bomo priče novim vrstam transistorjev in izboljšanim integriranim vezjem, ki bodo vključevala tudi Josephsonove spoje, povezane s superprevodnimi povezavami. Superprevodne magnete že sedaj na veliko uporabljajo pri pospeševalnikih delcev. V industriji bomo lahko superprevodnike uporabili za magnetno zaščito, za tipala fizikalnih količin, pomembni pa bodo tudi pri pripravi in obdelavi snovi.

Možnih uporab superprevodnikov je veliko. Morali bomo še malo počakati, da se iz gošče novih raziskav, ki se je razrasla po odkritju visokotemperaturnih superprevodnikov, izluščijo najbolj realistične uporabe. Ne gre pa zanemariti že obstoječih sistemov, temelječih predvsem na nizkotemperaturnih superprevodnikih. Letno prodajo v svetu za okoli 400 milijonov ameriških dolarjev superprevodnikov v vseh mogočih oblikah. Ta številka kaže, da so superprevodniki prešli iz področja zanimivosti v področje uporabe. O njih bomo torej še slišali.

Andrej Cvelbar

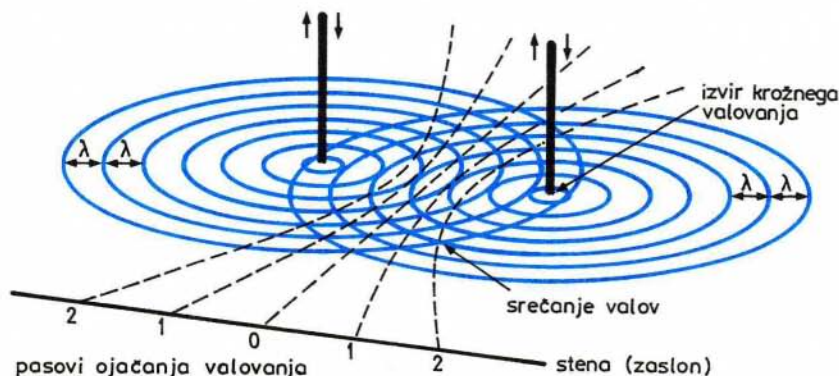
ASTRONOMIJA

KAKO SO PRVIČ UGOTOVILI VELIKOST ZVEZDE

Palici vzporedno razmaknimo in ju navpično v enakomernih časovnih razmakih sočasno pomakajmo v gladino mirujoče vode (v kadi, luži, ribniku). Na vodnem površju vzbudimo dvojce krožnih valovanj, ki se srečata (slika 1). Na tistem mestu vodnega površja, kjer hribi valov, ki prihajajo od prve palice, padejo na hribe valov, ki jih vzbuja druga palica, se skupno valovanje ojači (nastane še večji hrib); če pa hribi enega valovanja padejo na doline drugega in obratno, se valovanje uniči (ni valovanja).

Svetloba je tudi valovanje, zato tudi pri njej lahko pride do takega pojava. Če pada svetloba z oddaljenega točkastega svetila na temen zastor, kjer sta ozki vzporedni odprtini - reži, vsaka zase deluje kot izvir svetlobnega valovanja, kakor kaže opisan primer s palicama. Svetlobni valovanji iz rež se srečata. Na zaslonu za režama lahko opazujemo ojačenje in oslavljenje svetlobe - svetle in temne pasove (proge). (slika 2) Če pada na reži še svetloba z drugega takega svetila, ki je za kot φ odmaknjeno od prvega, dobimo na zaslonu prav take pasove, ki pa so nekoliko premaknjeni glede na pasove, ki jih povzroči prvo svetilo (slika 2).

Naj z obeh med seboj navidezno razmaknjenih svetil pada svetloba hkrati na obe reži. Če razmikamo reži, se pri določenem razmiku rež zgodi, da svetli pasovi prve "slike" zvezde padejo na temne pasove druge "slike" in obratno. Pasovi izginejo. Slika na zaslonu postane enakomerno svetla. Če tedaj izmerimo razmik b med režama in poznamo povprečno valovno dolžino



Slika 1. Srečanje valov pri sočasnem periodičnem pomakanju dveh vzporednih in navpičnih palic v mirujočo vodno površje.

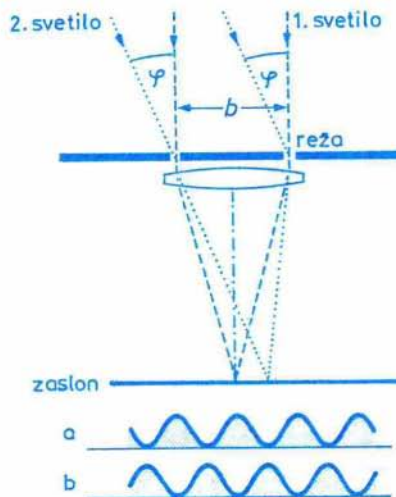
λ svetlobe, ki s svetil pada na reži, lahko izračunamo kotni razmik φ med točkastima svetiloma (Natančno razlago glej v članku J. Strnada *Zvezdni interferometer* v tej številki *Preseka*):

$$\varphi = \frac{1}{2} \frac{\lambda}{b}$$

Če damo pred objektiv daljnogleda zastor z režama, dobimo poseben astronomski instrument - *zvezdni interferometer*. Zvezdne "slike", ki nastanejo s srečanjem svetlobnih valov iz obeh rež, opazujemo na zaslonu v goriščni ravnini objektiva daljnogleda (slika 2).

Zvezde vidimo na nebu sicer kot bolj ali manj svetle pike. Če pa bi se jim zadosti približali in bi jih gledali "od blizu", bi jih videli približno tako, kot vidimo Sonce, torej kot svetle krožce. Vsako zvezdo, ki jo "vidimo" kot svetel krožec, si lahko predstavljamo sestavljeno iz dveh polovic - dveh svetlih polkrožcev. Če vsak polkrožec navidezno nadomestimo s točkastim svetilom (svetlobnim težiščem približno v središču polkrožca), zvezdo lahko obravnavamo tako, kot da je sestavljena iz dveh točkastih svetil. Ti svetili sta navidezno razmaknjeni za kot φ , ki je približno enak polovici vrednosti zornega kota β zvezde, to je kota, pod katerim "vidimo" zvezdo z Zemlje (slika 3). Velja torej

$$\beta = 2\varphi = \frac{\lambda}{b}$$

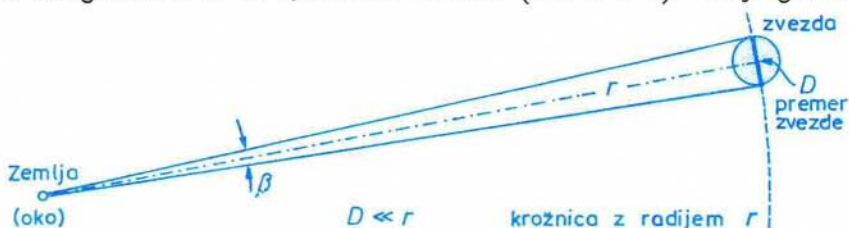


Slika 2. Srečanje svetlobe na zaslonu za režama - princip zvezdnega interferometra (shema). Krivulja *a* kaže razporeditev svetlih in temnih pasov na zaslonu za prvo točkasto svetilo, krivulja *b* pa za drugo točkasto svetilo. Kjer je hrib, tam na zaslonu vidimo svetel pas; kjer je dolina, pa temen. Krivulji sta narisani za primer, ko svetli pasovi prve "slike" padejo na temne pasove druge. S φ smo označili zorni kot oziroma navidezni razmik med svetiloma.

Če pada svetloba z zvezde na zvezdni interferometer, ki mu spreminjamo razmik med režama, morajo pri določenem razmiku rež svetli in temni pasovi izginiti.

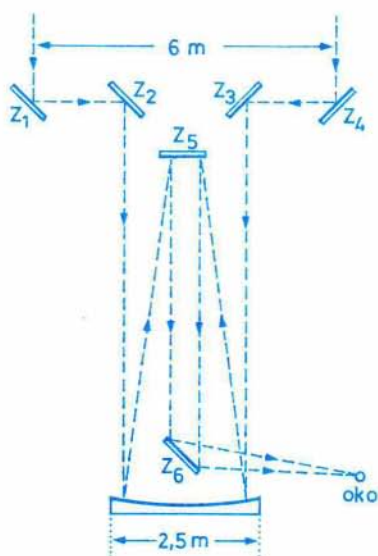
Po prvi svetovni vojni so na gori Wilson v ZDA zgradili tedaj največji daljnogled na svetu, 2,5-metrski reflektor. A.A. Michelson in F.G. Pease sta želela izkoristiti 2,5 m široko odprtino tega daljnogleda, da bi na opisani način izmerila zorni kot zvezde. Reži sta postavila 2,5 m narazen pred objektiv daljnogleda. Svetli in temni pasovi, ki sta jih opazovala z močno lupo, niso in niso izginili. Merjenje zornega kota zvezde ni uspela. Računi so pokazali, da bi morala vzeti daljnogled z večjo odprtino (od 3 do 6 m), da bi pasovi izginili in bi merjenje uspelo.

Ker tako velikega daljnogleda nista imela, sta izdelala poseben tram, ki sta ga nataknila na 2,5-metrski reflektor (sliki 4 in 5). Daljnogled z

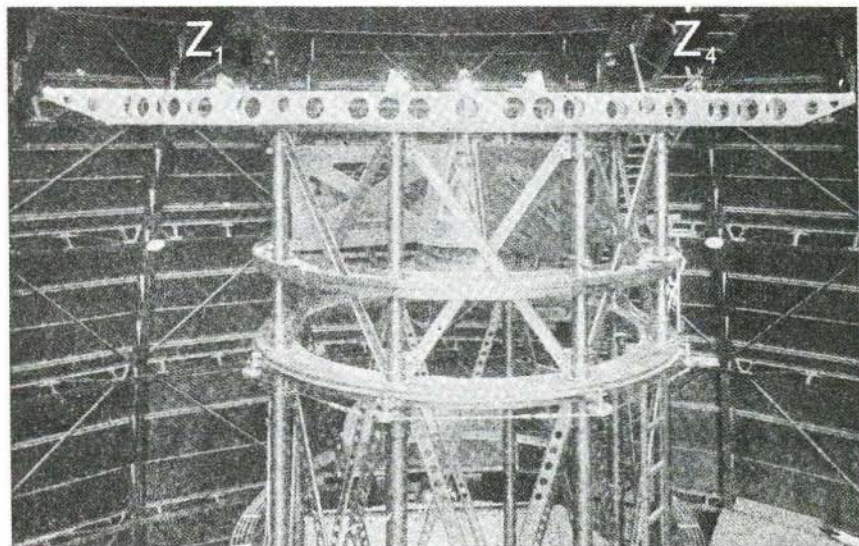


Slika 3. Zorni kot β zvezde je skrajno majhen, saj so zvezde silno daleč od nas. Misli si zvezdo kot razbeljeno plinsko kroglo, D naj bo njen premer, r pa oddaljenost od Zemlje. Sestaviš enačbo $D/2\pi r = \beta/360^\circ$. Pri znanih r in β iz enačbe izračunaš D .

V našem primeru je $r = 6 \cdot 10^{18}$ m in $\beta = 0,05''$. Ker je premer Sonca $D_S = 14 \cdot 10^8$ m, sledi, da je $D/D_S \doteq 10^3$. Prepričaj se o tem.



Slika 4. Shema šestmetrskega zvezdnega interferometra, s katerim sta Michelson in Pease izmerila prvi zorni kot zvezde.



Slika 5. Šestmetrski zvezdni interferometer - pritrjen na 2,5-metrski reflektor na gori Wilson.

nastavkom sta v mrzli noči, 13. decembra 1920, usmerila proti svetli zvezdi *Betelgezi* v ozvezdju Oriona. Svetloba z zvezde je padla na ravni zunanji premični zrcali Z_1 in Z_4 (ki sta delovali kot premični reži), se od njiju odbila na notranji nepremični ravni zrcali Z_2 in Z_3 , od njiju vpadla na vboklo zrcalo daljnogleda, nato na zrcali Z_5 in Z_6 in končno prispela v okularni del daljnogleda (oko), kjer sta z močno lupo opazovala svetlobne proge.

Ko sta razmikala zunanji zrcali, sta pri razmiku treh metrov res ugotovila, da so pasovi izginili. To je bil trenutek, ki sta ga znanstvenika čakala leta in leta. Tedaj sta namreč *prva izmerila zorni kot zvezde*. Izmerila sta kot $0,05''$ (pet stotink kotne sekunde). Kako majhen je ta kot, pove primerjava, da pod tolikšnim kotom na primer vidimo škatlico vžigalic v razdalji 200 km. Ker sta poznala *Betelgezino* oddaljenost (paralakso; glej *Presek 18, 20*) od Zemlje, sta izračunala tudi *polmer (velikost)* te zvezde. Izračunala sta, da je *Betelgeza* kar 1000-krat večja od Sonca.

Michelson in Pease sta pri tej meritvi uporabila valovno lastnost svetlobe. Prvič v zgodovini astronomije sta ugotovila, da obstajajo v vesolju zvezde, ki so več stokrat večje od našega Sonca, potrdila sta to, kar so prej nakazovali le z računi.

Marijan Prosén

KOMBINATORNO PRAVILNA TELESA

Pravilno telo je konveksen polieder, katerega stranske ploskve so sami skladni pravilni večkoniki, ki v ogliščih oblikujejo skladne prostorske kote. Mednje očitno sodita pravilni tetraeder in kocka, pa tudi pravilni oktaeder, dodekaeder in ikozaeder, katerih skice si lahko ogledate na začetku članka V. Domanjka Platonovi poliedri v tej številki Preseka. V omenjenem članku boste v zvezi z njimi našli tudi marsikatero zgodovinsko zanimivost.

Že stari Grki so vedeli, da poleg navedenih petih poliedrov drugih pravilnih teles ni. Oglejmo si dokaz te trditve!

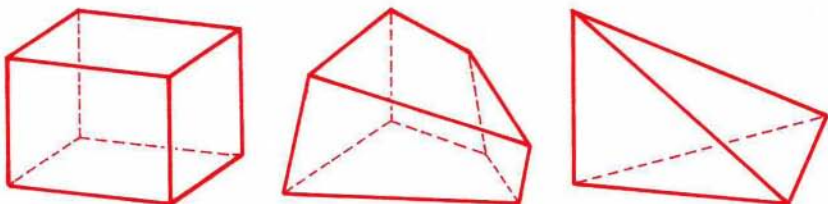
S konveksnimi poliedri smo se srečali že v članku *Eulerjeva poliedrska formula* v tej številki Preseka. Tam smo pokazali, da za vsak konveksen polieder velja zveza

$$V - R + S = 2 \quad (1)$$

kjer je V število oglišč, R število robov in S število stranskih ploskev poliedra.

Iz posameznega oglišča poliedra izhaja končno mnogo robov. Njihovo število imenujemo *red oglišča* poliedra.

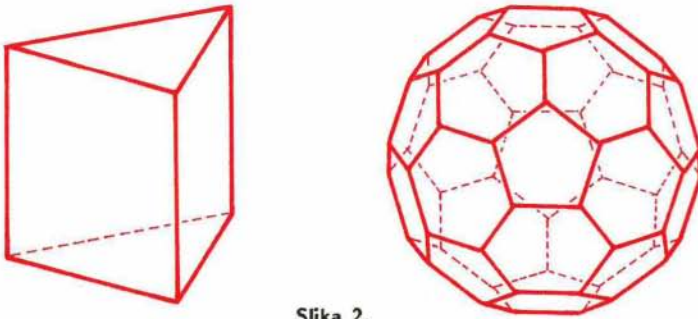
Definicija. *Kombinatorno pravilno telo tipa (m, n) je konveksen polieder, katerega stranske ploskve so sami m -kotniki, vsa oglišča pa imajo red n .*



Slika 1.

Na sliki 1 je nekaj kombinatorno pravilnih teles, pokončna tristrana prizma in nogometni žogi podoben polieder na sliki 2 pa nista kombinatorno pravilni telesi. Med kombinatorno pravilna telesa sodijo očitno tudi vsi pravilni poliedri.

Števili m in n sta seveda enaki najmanj 3, vendar to ni edina omejitev. Različnih tipov kombinatorno pravilnih teles je namerč presenetljivo malo. Velja:



Slika 2.

Izrek. *Obstaja natanko pet različnih tipov kombinatorno pravilnih teles. To so tipi $(3, 3)$, $(4, 3)$, $(3, 4)$, $(5, 3)$ in $(3, 5)$.*

Dokaz. Naj bo X poljuben kombinatorno pravilen polieder tipa (m, n) . Kot običajno označimo z V , R in S število njegovih oglišč, robov in stranskih ploskev.

Ker iz vsakega oglišča izhaja n robov in ima vsak rob dve oglišči, velja

$$2R = nV$$

Nadalje ima vsaka stranska ploskev m robov in posamezen rob pripada dvema stranskima ploskvama. Zato velja

$$2R = mS$$

Vstavimo

$$V = 2R/n \quad \text{in} \quad S = 2R/m$$

v Eulerjevo poliedrsko formulo (1). Dobimo

$$(2/n - 1 + 2/m)R = 2$$

od koder sledi

$$R = 2mn/(2m + 2n - mn)$$

Število robov R je seveda pozitivno število. Torej mora biti

$$2m + 2n - mn > 0$$

Z razstavljanjem dobimo

$$(m-2)(n-2) < 4 \quad (2)$$

Ker sta m in n naravni števili, enaki najmanj 3, sledi iz (2), da tudi nista večji od 5. Stranske ploskve kombinatorno pravilnega telesa so torej lahko le trikotniki, štirikotniki ali petkotniki in v posameznem oglišču se lahko stika največ pet robov. Natančnejši pogled pove, da pridejo v poštev le pari

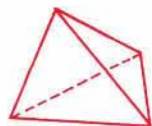
(3, 3), (4, 3), (3, 4), (5, 3), (3, 5)

Posamezne tipe kombinatorno pravih teles podrobneje predstavlja sosednja tabela:

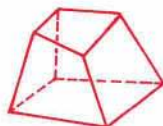
Očitno vsakemu tipu kombinatorno pravih teles ustreza natanko eno pravilno telo. Torej je pravih teles res pet: tetraeder, heksaeder (kocka), oktaeder, dodekaeder in ikozaeder. Njihova imena so grška in pomenijo število stranskih ploskev poliedra: tetraeder ima 4, heksaeder 6, oktaeder 8, dodekaeder in ikozaeder pa 12 oziroma 20 stranskih ploskev.

m n V R S

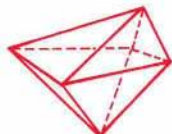
3 3 4 6 4



4 3 8 12 6



3 4 6 12 8



5 3 20 30 12



3 5 12 30 20



Marija Vencelj

OČRTAJ KVADRAT

Danemu trikotniku ABC očrtaj kvadrat $CDEF$, tako da bo C skupno oglišče obeh likov, oglišči A in B trikotnika pa bosta ležala na tistih kvadratovih stranicah, ki ne gresta skozi C .

Marija Vencelj

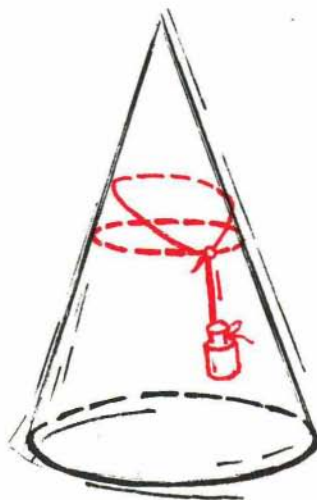
NAGRADNA NALOGA

NAOKROG PO STOŽCU

Na plašč pokončnega krožnega stožca - pa ne v sam vrh - pritrdimo vponko. Nanjo privežemo en konec vrvi, drugega pa speljemo okrog stožca, ga vpneemo skozi vponko in nanj obesimo utež (glej sliko). V kakšni legi se bo vrv ustalila?

Teža vrvice in trenje naj bosta zanemarljivo majhna v primerjavi s težo uteži.

Marija Vencelj



DELITEV PLENA ali TEŽAVE SE ZAČNO ŠELE PO ROPU



Trije roparji so trgovcu vzeli vrč s 24 litri dragocenega balzama. Med begom so srečali lončarja in še njegova olajšali za tri posode. Ko so prišli na varno mesto, so se ustavili, da bi plen razdelili. Odkrili so, da ukradene posode drže 13, 11 oziroma 7 litrov. Kako naj s temi posodami razdele balzam na tri enake dele?

Marija Vencelj

Merilniki za naelektrene delce so dokaj zapletene naprave. Delci iz sveta atomov v njih povzročijo razpoznaven dogodek v svetu velikih teles. Zato merilniki izkoriščajo pojave, ki jih delec z razmeroma zelo majhno energijo zgolj sproži, potrebna energija pa pride iz okolice. Naelektreni delec se pri prehodu skozi snov obreguje ob atome in izbija iz njih elektrone. Ionski pari, kakor imenujemo elektron in pozitivni ion, imajo pomembno vlogo. V plinskem merilniku sproščeni elektroni v močnem električnem polju okoli pozitivne elektrode na kratki razdalji pridobijo dovolj energije, da povzročijo nastanek novih in novih ionskih parov. Nastane sunek električnega toka in na uporniku med elektrodama sunek napetosti. Tega ojačijo in zaznajo. Potrebno energijo da izvir napetosti. Podobno je v polprevodniškem merilniku. V fotografski emulziji naelektreni delci izbijejo elektron iz kristalnega zrnca za svetlobo občutljive soli, ki počrni, ko film razvijemo.

Nekateri merilniki se odlikujejo po tem, da v njih naelektreni delec zapusti sled, ki jo je mogoče neposredno fotografirati. V teh je snov v neravnovesnem stanju. Pred osemdesetimi leti je C.T.R. Wilson razvil *meglično celico*. V njej v prenasičeno vlažnem zraku naelektreni delci delujejo kot kondenzacijska jedra, na katerih se izločijo kapljice vode (slika 1). Prenasičen zrak naredimo tako, da nenadoma zmanjšamo tlak v nasičeno vlažnem zraku. Soroden pojav opazimo pri letalih v veliki višini: v prenasičenem zraku delujejo dimni delci izgorelega goriva kot kondenzacijska jedra, na katerih se izločijo kapljice vode. Z meglično celico so spočetka odkrili precej novih delcev, na primer pozitron, in raziskali nekatere reakcije, posebno, dokler so bili navezani na naelektrene delce z veliko energijo iz vesolja. Po uvedbi velikih pospeševalnikov in po tem, ko se je zanimanje fizikov obrnilo k bolj kratkoživim delcem, se je pokazala slabost meglične celice. Pot delcev z visoko energijo je bila v plinu meglične celice prevelika, da bi lahko zasledovali delec od nastanka do razpada. Poskusili so z zelo gostim plinom pri tlaku, ki je bil celo tristokrat višji od navadnega zračnega tlaka. Vendar je moralo od poskusa do poskusa

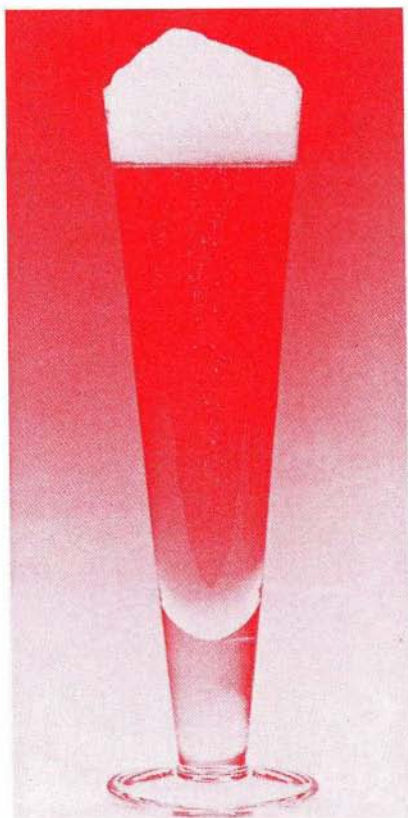


Slika 1. V prenasičeno vlažnem zraku meglične celice zapusti hitri naelektreni delec sled kapljic. Eden izmed prvih posnetkov C.T.R. Wilsona je vzet iz njegovega govora ob podelitvi Nobelove nagrade leta 1927.

s tako meglično celico poteči pol ure. Ker je treba računati s številnimi neuspešnimi poskusi, ne upanja, da bi si lahko pomagali s tako celico.

Ali ne bi bilo bolje, če bi se delec gibal po kapljevini, ki je več stokrat gostejša kot plin? Na to možnost je pomislil ameriški fizik Donald Glaser pred štiridesetimi leti. Ali bi bila namesto prenasičenega zraka uporabna s plinom prenasičena kapljevina? Tako kapljevino dobro poznamo. Nastane, ko odpremo steklenico sodavice, mineralne vode, piva, šampanjca. Iz vode, ki je prenasičena z ogljikovim dioksidom, izhajajo mehurčki plina. Spočetka jih je pogosto toliko, da se na vrhu zberejo v peno. Pozneje pa se razvijajo mehurčki na mestih, na katerih so na steni steklenice ali kozarca z mikroskopom vidne neenakomernosti (slika 2). Ali se ne bi mehurčki izločali tudi na naelektrenih delcih ionskih parov, ki bi jih zapustil na svoji poti hiter naelektreni delec? Donald Glaser je segrel nekaj steklenic piva in sodavice, da je bila kapljevina kolikor mogoče prenasičena. Potem jih je odprl in postavil obnje radioaktivni izvir, a ni opazil, da bi se pojavili zaradi tega dodatni mehurčki.

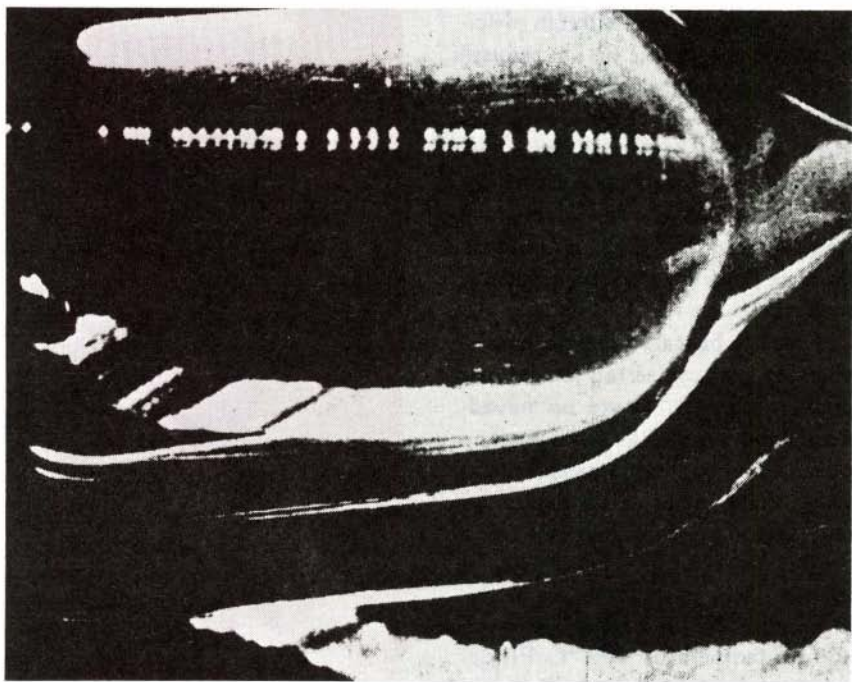
Več je obetala pregreta kapljevina. Za poskuse se mu je zdel najpripravnejši eter, ki vre pri navadnem tlaku pri 35°C . (Ima majhno površinsko napetost in nizek kritični tlak. Voda je kar se da nepripravna.) Ocenil je, da bi bilo eter treba pregreti do 140°C . V nekem članku iz leta 1924 je prebral, da je bilo mogoče več ur obdržati pregreti eter pri temperaturi 130°C . Pri deset stopinj višji temperaturi pa je v povprečju po minuti sunkovito zavrel sam od sebe. D. Glaser je uvidel, da je na pravi poti, ko se je prepričal,



Slika 2. V pivu se dvigajo mehurčki ogljikovega dioksida, ki se razvijajo ob neenakomernostih v steni.

da so si približno v tolikšnem času sledili hitri naelektreni delci iz vesolja ali iz radioaktivnih elementov v okolici, ki so zadeli posodico z etrom. Kmalu je opazil prve sledi naelektrenih delcev v pregretem etru (slika 3). Nato so ugotovili, da je v ta namen uporaben tudi pregreti vodik pri zelo nizki temperaturi. Reakcije delcev z jedri vodika iz enega samega protona so kar se da pregledne. Tako so naredili načrte za *mehurčno celico*, s katero so pred nekako tridesetimi leti odkrili veliko novih delcev in raziskali veliko reakcij med delci. Leta 1960 je Donald Glaser dobil za svoje odkritje Nobelovo nagrado.

V mehurčni celici so nenadno zmanjšali tlak, da je postal vodik pregret – njegova temperatura je bila nad vreliščem pri tistem tlaku. Kratek čas je bila celica pripravljena za zaznavanje. Na delcih ionskih parov, ki so jih puščali na svoji poti hitri naelektreni delci, so nastali mehurčki. Sledi so fotografirali s tremi kamerami, da so lahko rekonstruirali poti delcev v pro



Slika 3. V pregretem etru zapusti hitri naelektreni delec sled mehurčkov etra. Eden izmed prvih posnetkov D.Glaserja je vzet iz njegovega govora ob podelitvi Nobelove nagrade leta 1960.

storu. Celico so postavili v magnetno polje, da so po ukrivljenosti sledi določili kinetično energijo delca. Celica je bila pripravljena za zaznavanje vsakih nekaj sekund. Ker so pospeševalniki dajali sunke delcev tudi v tolikšnem časovnem razmiku, počasnost celice ni motila. Pozneje je tudi mehurčna celica začela kazati svoje pomanjkljivosti in je danes ne uporabljajo več. Nadomestili so jo predvsem merilniki z mrežo žičnatih elektrod, ki jih je mogoče priključiti neposredno na računalnik.

Pripovedujejo, da je D.Glaser pred odkritjem mehurčne celice ure in ure sedel v študentski pivnici in strmел v pivo, da bi opazil sled iz mehurčkov, ki bi jo povzročil kak hitri naelektreni delec iz vesolja. Vprašanje, ali nastanejo na poti hitrega naelektrenega v prenasičeni kapljevini, denimo v pivu, mehurčki, je raziskal na hitro. Iz njegovih poznejših izjav je bilo mogoče razbrati, da svoje ugotovitve nima za dokončno. Frank S.Crawford iz Lawrenceovega laboratorija in z oddelka za fiziko kalifornijske univerze v Berkeleyu, na katerem je delal tudi D.Glaser, se je odločil, da bo zadevi prišel do dna. Zgodbo o Glaserju je slišal prvič pred skoraj štiridesetimi leti, nato je sodeloval pri razvoju mehurčne celice pod Luisom Alvarezom.

F.S.Crawford se je z mehurčki v vodi in pivu ukvarjal pravzaprav iz drugega razloga. V člankih *The hot chocolate effect*, *American Journal of Physics* **50** (1982) 398 in *Hot water, fresh beer, and salt*, prav tam **58** (1990) 1033 je raziskoval predvsem znižanje najnižjega tona stolpca vode, ko se v vodi pojavijo mehurčki. Pojav je zanimiv in bi o njem kazalo poročati kdaj drugič. Frekvenca je sorazmerna s hitrostjo zvoka in ta je v vodi z mehurčki dokaj majhna. Tega ni težko razumeti. Hitrost zvoka je obratno sorazmerna s koreninom iz stisljivosti in gostote. Voda ima zelo majhno stisljivost in veliko gostoto. Zrak ima precej večjo stisljivost kot voda, a manjšo gostoto, zato je v njem hitrost zvoka manjša kot v vodi. Voda z mehurčki ima stisljivost kot zrak in gostoto kot voda, zato je v njej hitrost zvoka še manjša kot v zraku. Sol je koristna, ker se vroča voda iz pipe ali pivo penita, ko vržemo vanju prgišče soli, čeprav sta se prej že prenehala peniti.

Najprej je uporabil radioaktivni izvir iz kobaltovega izotopa ^{60}Co , v katerem je na sekundo razpadlo po 370 tisoč jeder. Izvir je približal kozarcu s pivom in poskušal ugotoviti, ali je nastalo kaj več mehurčkov. Opazil ni nobenega povečanja števila mehurčkov. Nato je uporabil tisočkrat močnejši izvir, ki ga je bilo treba držati ob kozarcu s kleščami. Tudi v tem primeru ni bilo nobenega učinka. Naposled je poskusil z zelo velikim izvirom biomedicinskega oddelka Lawrenceovega laboratorija, v katerem je razpadlo po 74 bilijonov jeder na sekundo. Kozarec je bilo treba z daljinskim upravljanjem postaviti v razdaljo dobre pol metra od izvira in opazovati preko televizije. Tudi v tem primeru ob obsevanju ni bilo mogoče ugotoviti dodatnih mehurčkov.

Po enominutnem obsevanju se ni pojavilo nič dodatnih pen.

D.Glaser je F.S.Crawfordu povedal za svoje poskuse z radioaktivnim izvirom in mu svetoval, naj uporabi curek delcev α . V Berkeleyu so nekdanji slavni protonski pospeševalnik bevatron, s katerim so na primer prvič zaznali antiprotone, spremenili v pospeševalnik za ione. Curek ionov z zelo veliko energijo uporabljajo tudi za obsevanje bolnikov. Na kraj, na katerem s curkom ionov iz bevatrona obsevajo bolnike, so postavili plastično prozorno posodo s kvadratno osnovno ploskvijo s pivom. Delci α so prihajali iz pospeševalnika v sekundnih sunkih s po 40 milijardami delcev, ki so si sledili na 4 sekunde, in se zaustavili v pivu. Dodatnih mehurčkov niso zaznali.

F.S.Crawfordu so svetovali, naj uporabi še curek železovih ionov, ki jih izkoriščajo v "vesoljskih bioloških raziskovanjih". V vesolju je namreč veliko delcev z visoko energijo in med njimi so razmeroma pogosti železovi ioni. Pospeševalnik je dajal sekundne sunke s po 20 milijoni ionov vsake štiri sekunde. Tudi obsevanje z železovimi ioni ni dalo dodatnih mehurčkov. Če bi vsak ion rodil mehurček, bi se moralo pivo izdatno peniti.

Naposled so obsevali pivo še z uranovimi ioni. V sekundnem sunku je bilo po dvesto tisoč uranovih ionov in sunki so se ponavljali na pet sekund. Kljub vsemu prizadevanju tudi v tem primeru niso zaznali dodatnih mehurčkov. Tako je mogoče s precejšnjo gotovostjo trditi, da v vodi, prenasajeni z ogljikovim dioksidom, hitri naelektreni delci ne rodijo mehurčkov. F.S.Crawford svojih poskusov ne bi mogel narediti, če ne bi bilo v njegovem laboratoriju velikih naprav in če mu znanci, ki delajo ob njih, ne bi bili pripravljeni pomagati. O poskusih - imenoval jih je "zgodovinski zaključek" - je poročal lani v *American Journal of Physics*, reviji, ki je posvečena poučevalskim in kulturnim vidikom fizike, in ne v raziskovalnih revijah.

Aprila letos se je s pismom uredniku te revije odzval P.C.Mangelsdorf, ki je Crawfordu očital, da prevečkrat pije pivo s fiziki, premalo pa s fizikalnimi kemiki. Ti bi ga opozorili, da se v vodi raztopi mnogo manj plina, če ji dodamo katero koli sol. V koncentrirani raztopini elektrolita ob raztapljanjem se zrnцу soli lahko pivo obdrži le malo raztopljenega ogljikovega dioksida. Zato nastajajo dodatni mehurčki, ne samo zaradi tega, ker zrnca delujejo kot jedra, ob katerih se nabirajo molekule dioksida. Po Mangelsdorfu kemija elektrolitov tudi pojasni, zakaj sunek hitrih ionov v pivu ne rodi dodatnih mehurčkov. Čeprav je dokaj razredčena raztopina elektrolita, je v litru piva veliko ionov, denimo milijonkrat manj kot je delcev v kilomolu. Sunek hitrih ionov povzroči nastanek samo milijonkrat manj ionov. Četudi bi vsi ioni nastali v milijonini litra, to je v kubičnem milimetru, bi jih nastalo zgolj toliko, kolikor je bilo v njem prej ionov elektrolita. Ob tem bi se ta kubični milimeter segrel za

kako polovico stopinje. Zaradi povišane temperature bi se morda izločilo malo dodatnih mehurčkov, ne pa zaradi povečanja števila ionov za dvakrat. Tako ni upanja, da bi lahko opazovali sledi naelektrenih delcev v prenasičeni kapljevi, posebno ne takšni, ki jo je mogoče piti.

Janez Strnad

BIBLIOGRAFIJE IN BIOGRAFIJE SLOVENSКИH MATEMATIKOV IN FIZIKOV

Med velikimi Slovenci so tudi pomembni matematiki in fiziki. Bralcem Preseka bi radi ponovno predstavili brošure, ki so v zadnjih petindvajsetih letih izšle v njihov spomin. Pri Slovenski akademiji znanosti in umetnosti (ob sodelovanju Društva matematikov, fizikov in astronomov Slovenije) so izšle tri knjige, ki jih je napisal pokojni prof. Jože Povšič:

8. Bibliografija FRANCA MOČNIKA, avtorja številnih osnovnošolskih učbenikov, 1966.
10. Bibliografija JURIJA VEGE, sestavljalca velikih in malih logaritemskih priročnikov, 1974 (razprodano).
12. Bibliografija FRANCA HOČEVARJA, avtorja številnih srednješolskih učbenikov, 1978.

Pri Društvu matematikov, fizikov in astronomov Slovenije pa sta doslej izšli v Presekovi knjižnici dve brošuri:

23. Strnad J., JOŽEF STEFAN - Ob stopetdesetletnici rojstva, 1985.
26. Vidav I., JOSIP PLEMELJ - Ob dvajsetletnici smrti, 1987.

Založba Obzorja, Maribor pa je izdala v zbirki vodnikov Kulturni in naravni spomeniki Slovenije brošuro
Pavšič J., JURIJ VEGA, 1983.

Omenjene knjige lahko dobite pri Komisiji za tisk DMFAS, 61111 Ljubljana, Jadranska c. 19.

Ciril Velkovrh

ASTRONOMIJA

ZVEZDNI INTERFEROMETER

Zelo oddaljeni vzporedni črtasti svetili 1 in 2 (slika 1), ki ju vidimo pod kotom β , sevata enobarvno svetlobo z valovno dolžino λ . Na pot svetlobe postavimo oviro, v kateri sta v razmiku b ozki reži I in II, vzporedni s svetiloma. Svetlobo iz reži prestrežemo na oddaljenem zaslonu. Svetili sevata neodvisno drugo od drugega in za vsako od njiju nastane na zaslonu interferenčna slika iz svetlih in temnih prog.

Mislimo na svetilo 1. Na določenem mestu na zaslonu nastane svetla proga, če se pot delnega valovanja skozi režo I in pot delnega valovanja skozi režo II razlikujeta za večkratnik valovne dolžine:

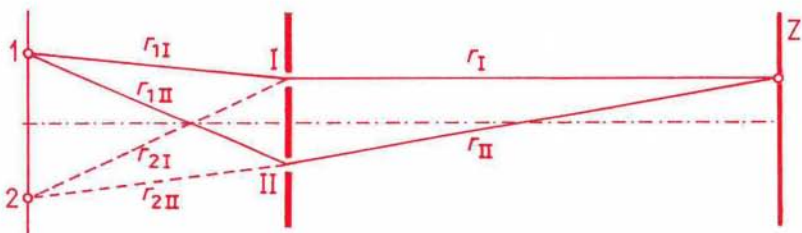
$$r_{1I} + r_I - (r_{1II} + r_{II}) = N\lambda, \quad N = 1, 2, 3, \dots \quad (1)$$

Tedaj na zaslonu drugo delno valovanje doseže vrh, če ga doseže prvo, in drugo delno valovanje doseže dolino, če jo doseže prvo. Delni valovanji se ojačita.

Na drugem mestu na zaslonu nastane temna proga, če se pot delnega valovanja skozi režo I in pot delnega valovanja skozi režo II razlikujeta za večkratnik valovne dolžine in še za polovico valovne dolžine (ali v celoti za lih večkratnik polovične valovne dolžine). Tedaj se valovanji na zaslonu popolnoma oslabita, ker pride vrh v prvem na dolino v drugem in dolina v prvem na vrh v drugem.

Podobno velja za delni valovanji iz svetila 2, ki potujeta skozi reži I in II, le da je v tem primeru treba upoštevati razliko poti

$$r_{2I} + r_I - (r_{2II} + r_{II}) \quad (2)$$



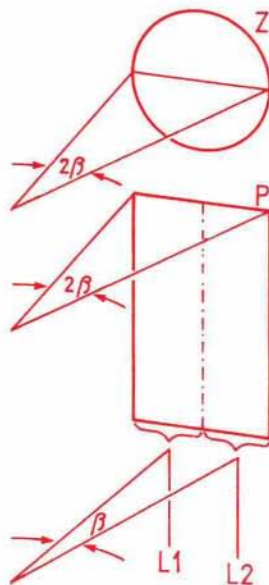
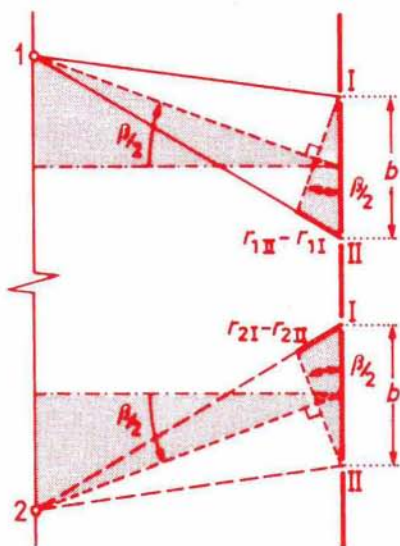
Slika 1. Poti delnih valovanj iz svetila 1 skozi reži I in II in poti delnih valovanj iz svetila 2 skozi reži I in II na zaslon. Risba ni narisana v merilu, v resnici sta svetili mnogo bolj oddaljeni od reži kot reži od zaslona.

Če se zanimamo za razmere na zaslonu, moramo za vsak del zaslona sestaviti gostoto svetlobnega toka iz prvega svetila in gostoto svetlobnega toka iz drugega.

Skupna gostota svetlobnega toka na zaslonu se spreminja, ko spreminjamo razmik rež b . Mislimo si, da se pri tem spreminja lega svetlih prog, ki ustrezajo svetilu 1, glede na svetle proge, ki ustrezajo svetilu 2. Manjšajmo dokaj velik b . Na zaslonu vidimo svetlejše in temnejše proge, ki postajajo izrazitejše, nato manj izrazite, izginejo in se zopet pojavijo, postajajo izrazitejše in tako naprej. Zadnjič zginejo pri mejnem razmiku b_0 , pri katerem pride svetla proga, ki ustreza svetilu 1, na temno progo, ki ustreza svetilu 2, pa sta obe razliki poti (1) in (2) različni ravno za polovično valovno dolžino. Tedaj velja

$$\frac{1}{2}\lambda = r_{2I} + r_{II} - (r_{2II} + r_{II}) - \{r_{1I} + r_{II} - (r_{1II} + r_{II})\} = r_{2I} - r_{1I} + r_{1II} - r_{2II}$$

Z risbe (slika 2) razberemo, da je približno



Slika 2. Kot $\frac{1}{2}\beta$ je majhen in para trikotnikov na zgornji in na spodnji risbi sta podobna.

Slika 3. Pravokotno ploskovno svetilo P razdelimo na dve polovici in vsako izmed njiju obravnavamo kot črtasto svetilo $L1$ in $L2$. Širina pravokotnega svetila ustreza premeru zvezde Z .

$$r_{2I} - r_{2II} = r_{1II} - r_{1I} = \frac{\pi}{180^\circ} \frac{\beta}{2} b_0$$

Kot $\frac{1}{2}\beta$ je tako majhen, da smemo namreč daljico, ki je pravokotna na srednjico kota, izenačiti z lokom. Lok pa dobimo tako, da radij kroga b pomnožimo s kotom v stopinjah in še s $\pi/180^\circ$. Oboje vstavimo v enačbo, pa preostane

$$2\beta = \frac{180^\circ \lambda}{\pi b_0}$$

Vzemimo namesto črtastih svetil dolgo pravokotno ploskovno in enakomerno svetlo svetilo P (slika 3). To svetilo razdelimo na dva enaka dela in ta dela nadomestimo s črtastima svetiloma $L1$ in $L2$ na njunih sredinah. Črtasti svetili vidimo pod kotom β , a širini pravokotnega svetila ustreza kot 2β .

Zvezde ne sevajo enobarvne svetlobe, zato upoštevamo valovno dolžino sestavine, ki jo sevajo najizdatneje. Če gre za zvezdo, ki je podobna Soncu, se ne zmotimo dosti, če vzamemo valovno dolžino okoli 560 nanometrov ali $560 \cdot 10^{-9}$ metra, za katero je oko najboljčutljivejše.

Zvezde so drobni krožci, ne dolga pravokotna svetila. Vendar vsaj približno obvelja zanje to, kar smo ugotovili. Kot 2β , pod katerim vidimo širino pravokotnika, ustreza kotu, pod katerim vidimo premer zvezde. Natančnejši račun pokaže, da pri krožnem svetilu zadnjič izginejo proge, ko je kot za petino večji kot pri pravokotnem svetilu. Premeru zvezde ustreza kot

$$2\beta = 1,2 \cdot \frac{180^\circ \lambda}{\pi b_0}$$

Denimo, da proge zadnjič izginejo, ko manjšamo razmik rež, ali se prvič pojavijo, ko ga večamo, približno pri $b_0 = 3$ m. Premer zvezde bi v tem primeru videli pod kotom

$$2\beta = \frac{1,2 \cdot 180^\circ \cdot 560 \cdot 10^{-9} \text{ m}}{\pi \cdot 3 \text{ m}} = 1,3 \cdot 10^{-5}^\circ = 0,05''$$

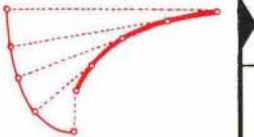
Pri tem smo upoštevali, da ima kotna stopinja 3600 kotnih sekund.

Janez Strnad

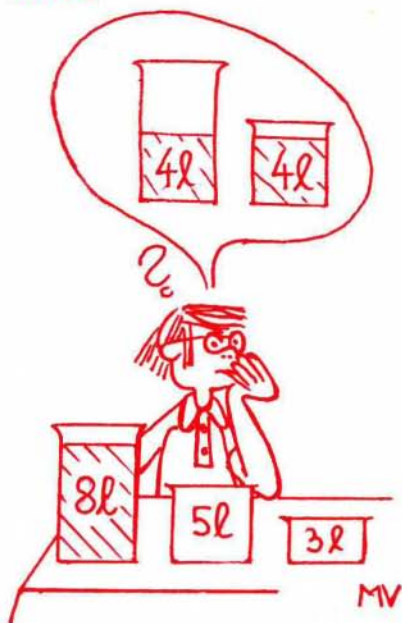
Marko Bokalič že vrsto let sestavlja Presekove slikovne križanke, pri čemer poskuša uvrstiti vanje čimveč strokovnih pojmov. Povabili smo ga, naj pripravi križanko s samimi strokovnimi izrazi. Poskusil je, rezultat je križanka na naslednji strani.

RAZVEDRILO

ZELO STROKOVNA KRIŽANKA

SESTAVIL MARKO BOKALČ	SMER, V KATERO SE GIBLJE SONCE	NARAVO- SLOVNA ZNAČNOST	OPERACIJA MED MNOŽICAMI	STARA INDUSTRIJ- SKA RASTLINA	OZNAKA ZA IMAGINAR- NOST	VRH ALI DNO PARABOLE	PRIPOMO- ČEK ZA TEHTANJE	$\begin{vmatrix} a & b \\ c & d \end{vmatrix}$	100 m ²
NAJVEČJI ODMIK OD MIROVNE LEGE									
OBČA KONSTANTA V ENAČBI									
NENASIČEN OGLJIKO- VODIK					GIBALNI POJAV				NEMŠKI MATEMATIK (GEORG)
					TRITIJ				
OBŽALO- VANJE				BARIT					
				ŠTEVILO ELEMENTOV KONČ.GRUPE					
POLEG VELIKOSTI DOLOČA VEKTOR					STIK DVEH PLOŠKEV	86 87 88 89 Pn Fr ? Ac			
ANGL. PLOŠČ. MERA						23 24 25 26 V Cr ? Fe			
VALOVANJE, KI GA ZAZNAVAMO S SLUHO						TRETJA POTENCA			
ZVONKO TRONTELJI			PODOBNI ČRKI			OZVEZDJE OB NEBES. EKVATORJU			
			STIKALNA NAPRAVA			RENTGEN			
IZVOR				IT.NARAVO- SLOVEC (GIORDANO)					
				ZVEZDA, KI ZAZAFI					
NEMŠKI ZDRAVNIK IN FILOZOF (LORENZ)					USMER- JENO GIBANJE	ENOTA ZA TLAK			
						ALUMINIJ			
KROGELNA KAPICA							NEWTON		ABDUS SALAM
							22. IN 4. ČRKA		
			ASTRO- NOMSKI KROŽEK			OSNOVNA FIZIKALNA KOLIČINA			

PROBLEM TREH VRČEV IN TRILINEARNE KOORDINATE



Pred seboj imate vrč z 8 litri tekočine in dva prazna vrča, ki držita 5 litrov in 3 litre. Ali je mogoče le s temi pripomočki razdeliti tekočino na dva enaka dela in kako, če to gre?

Na voljo nam je samo prelivanje tekočine med posodami. Pri tem je očitno smiselno le tako pretakanje, pri katerem na posameznem koraku ali povsem napolnimo posodo, v katero vlivamo, ali do dna izpraznimo posodo, iz katere vlivamo – kar se pač prej zgodi. Jasno je tudi, da tako prelivanje ne sme potekati kar na slepo srečo, če naj kaj kmalu ali sploh dosežemo želeno.

Ta, sicer zelo stara naloga, je bila zastavljena bralcem Preseka že pred leti. Z njo smo se srečali tudi v članku Razdeliva si vino v lanski 4. številki.

Tokrat si bomo ogledali, kako si pri reševanju takih in sorodnih nalog pomagamo s *trilinearnimi koordinatami*. Še prej pa povejmo, kaj sploh trilinearne koordinate so.

Naj bo v ravnini $\mathcal{R}$ dan enakostraničen trikotnik ABC s stranico a in višino v . Trilinearne koordinate x, y, z točke $T \in \mathcal{R}$ so števila, po absolutnih vrednostih enaka razdaljam točke T od nosilk stranic BC, CA in AB . Posamezna koordinata je pozitivna, če leži točka T na isti strani ustrezne nosilke kot notranjost trikotnika. Sicer je negativna. Označevali bomo $T = (x, y, z)$. Za razliko od kartezičnih koordinat so trilinearne koordinate posamezne točke medsebojno odvisne. Če je T notranja točka trikotnika ABC , kot na sliki 1, nam primerjava ploščin trikotnikov

$$p(ABC) = p(TBC) + p(TCA) + p(TAB)$$

da

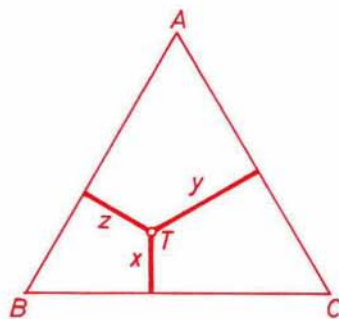
$$\frac{1}{2}av = \frac{1}{2}ax + \frac{1}{2}ay + \frac{1}{2}az$$

od koder sledi zveza med trilinearnimi koordinatami

$$x + y + z = v \quad (1)$$

Podobno pokažemo, da velja zveza (1) tudi v primeru, če je T robna ali zunanja točka trikotnika ABC . Vedno je torej vsota trilinearnih koordinat enaka višini danega enakostraničnega trikotnika.

Zaradi zveze (1) so trilinearne koordinate idealne za obravnavo problemov, v katerih imajo tri spremenljive količine konstantno vsoto. Če je ena od količin konstantna, drugi dve pa se spreminjata, se ustrezna točka giblje vzdolž vzporednice eni od stranic trikotnika ABC . Oglišča imajo kooordinate



Slika 1

$$A = (v, 0, 0), B = (0, v, 0), C = (0, 0, v)$$

in nosilke stranic enačbe

$$x = 0, y = 0, z = 0$$

Situacija, primerna za uporabo trilinearnih koordinat, nastopa tudi tedaj, ko je v litrov tekočine porazdeljenih v treh posodah: x litrov v prvi, y v drugi in z litrov v tretji posodi. Ko npr. prelivamo tekočino iz prve posode v drugo, se ustrezna točka (x, y, z) giblje vzdolž premice $z = \text{konst}$ v taki smeri, da x pada in y narašča. Če vsaka od posod drži vsaj v litrov, lahko vsaka od koordinat zavzame vrednosti od 0 do v . Tedaj je operacijsko področje problema kar ves enakostraničen trikotnik z višino v . To je trivialen primer, ki ga označimo $[v; v, v, v]$.

Veliko zanimivejši je primer $[v; a, b, c]$, ko je v litrov tekočine porazdeljenih v treh posodah s prostorninami a, b in c litrov in je

$$v \geq a > b > c$$

Denimo, da bi v takem primeru radi le s prelivanjem tekočine med poso-

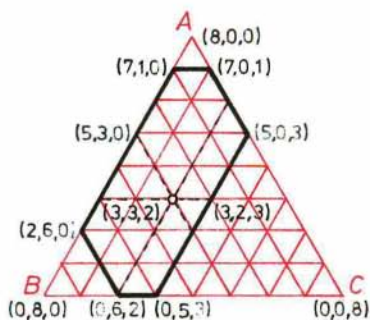
dami odmerili d litrov. Tedaj je operacijsko področje problema določeno z neenačbami

$$0 \leq x \leq a, \quad 0 \leq y \leq b, \quad 0 \leq z \leq c$$

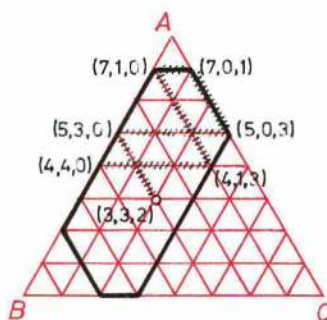
Točke na robu območja pripadajo takim porazdelitvam tekočine, pri katerih je vsaj ena od posod bodisi polna bodisi prazna. Področje samo je v splošnem šestkotnik, ki ga omejujejo premice

$$x = 0, \quad x = a, \quad y = 0, \quad y = b, \quad z = 0, \quad z = c$$

Ta šestkotnik je lahko reduciran v petkotnik, štirikotnik ali trikotnik. Za primer $[8; 7, 6, 3]$ je operacijsko področje skicirano na sliki 2.



Slika 2



Slika 3

Začetni porazdelitvi tekočine v treh posodah ustreza neka točka v notranjosti ali na robu operacijskega področja. Ko prelivamo tekočino med posodami, tako da posode polnimo in praznimo, se točka giblje vzdolž vzporednice eni od stranic trikotnika do roba operacijskega območja, nato vzporedno z drugo stranico spet do roba območja in tako dalje. Če se točka giblje po robu območja, lahko spremeni smer le v oglišču šestkotnika. Želeno količino d bomo odmerili, če bomo pri takem gibanju prišli v robno točko, ki bo imela eno od trilinearnih koordinat enako d .

Seveda to ni vedno mogoče. Če so posode celolitrške in v njih celolitrške začetne količine, ne bomo mogli z njimi odmeriti pollitrške količine. V tem primeru imajo namreč robne točke, ki jih lahko dosežemo, očitno samo celoštevilске koordinate.

Tudi problemi, v katerih nastopajo le cela števila, so lahko rešljivi ali

nerešljivi. Različne situacije, ki se lahko pojavijo, si oglejmo na nekaj primerih.

Poglejmo najprej primer $[8; 7, 6, 3]$, katerega operacijsko področje prikazuje slika 2. Denimo, da imamo v prvi (sedemlitrski) posodi 3 litre tekočine, prav toliko v drugi in 2 litra v tretji posodi. Radi bi odmerili dvakrat po 4 litre tekočine. Začetnemu stanju ustreza točka $(3, 3, 2)$. Črtkano je na sliki 2 označenih šest možnih prvih prelivanj tekočine. Daljica med $(3, 3, 2)$ in $(5, 3, 0)$ predstavlja prazenje tretje posode v prvo, daljica od $(3, 3, 2)$ do $(3, 2, 3)$ polnjenje tretje iz druge itd.

Na sliki 3 imamo označeno eno od možnih poti, ki vodijo od točke $(3, 3, 2)$ do točke $(4, 4, 0)$ in iz katere lahko preberemo, kako naj prelivamo tekočino, da jo bomo razdelili na dva enaka dela po 4 litre. Poglejmo! Najprej izpraznimo tretjo posodo v prvo, nato drugo v tretjo in iz tretje napolnimo prvo. Preostali liter izlijemo iz tretje posode v drugo in nato napolnimo tretjo posodo iz prve. Tako že imamo v prvi posodi 4 litre tekočine. Nato izpraznimo še tretjo posodo v drugo in naloga je opravljena. Ves postopek lahko na kratko zapišemo z zaporedjem točk:

$$(3, 3, 2), (5, 3, 0), (5, 0, 3),$$

$$(7, 0, 1), (7, 1, 0), (4, 1, 3), (4, 4, 0)$$

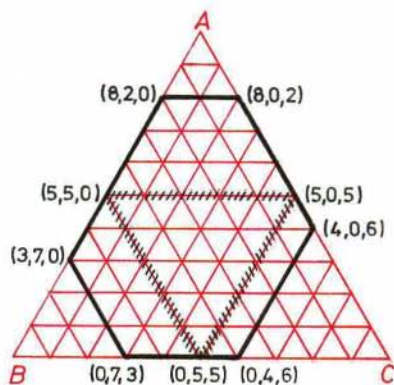
Sami lahko nadaljujete pot od točke $(4, 4, 0)$ dalje. Paziti morate le na to, da sme potekali le po operacijskem območju vzporedno stranicam trikotnika ABC in sme spremeniti smer le, ko dosežete ali rob ali oglišče operacijskega območja. Videli boste, da lahko z njo dosežete vsako robno točko s celoštevilskimi koordinatami, kar pomeni, da lahko v problemu $[8; 7, 6, 3]$ odmerimo poljubno celolitrsko količino, manjšo kot 8 litrov.

Na sliki 4 je ilustrirana naloga $[10; 8, 7, 6]$, v kateri bi radi 10 litrov tekočine razdelili na dva enaka dela z uporabo posod, ki držijo po 8, 7 in 6 litrov. Vsaj eno koordinato enako 5 imajo na robu operacijskega področja le točke $(0, 5, 5)$, $(5, 0, 5)$ in $(5, 5, 0)$. Te tri točke pa povezuje zaključena trikotna pot, v katero ne moremo vstopiti z nobene druge poti. Torej ne bomo nikoli s prelivanjem dosegli količine 5 litrov, razen če bi že na samem začetku v eni od posod imeli 5 litrov tekočine. Te vrste težave se pojavijo v vsakem problemu $[v; a, b, c]$, pri katerem je

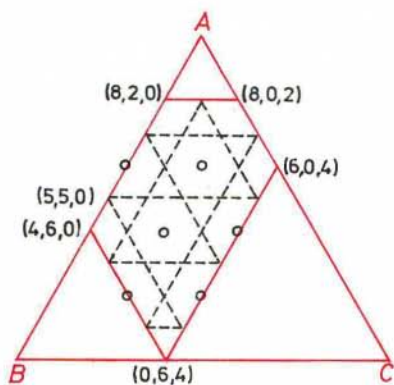
$$v = 2d \geq a > b > c > d$$

Nekoliko drugačna anomalija se pojavi v problemu $[10; 8, 6, 4]$, prikazanem na sliki 5. Pot, ki poteka skozi točko $(5, 5, 0)$, je tudi tu zaključena

lomljenka, le precej bolj prepletena kot v prejšnjem primeru. Poteka skozi vse točke z lihimi koordinatami. Vanjo ne moremo prodreti iz točk s sodimi koordinatami. Gre za ilustracijo preprostega dejstva, da lihega števila litrov ne moremo odmeriti samo s posodami, katerih kapacitete so vse sode. Težave takega tipa lahko pričakujemo pri vsakem problemu $[v; a, b, c]$, pri katerem števila a, b, c niso tuja.



Slika 4



Slika 5

V ugankarskih kotičkih poljudnoznanstvenih revij največkrat naletimo na probleme $[v; a, b, c]$, pri katerih je

$$v = a = 2d = b + c \quad (2)$$

Operacijsko območje je pri teh problemih paralelogram z oglišči $(a, 0, 0)$, $(c, b, 0)$, $(0, b, c)$ in $(b, 0, c)$.

Taka je tudi naloga, ki smo si jo zastavili na samem začetku: razdeliti 8 litrov tekočine na dva enaka dela s pomočjo dveh praznih posod, ene 5-litrške in ene 3-litrške. Prva posoda, v kateri je tekočina na začetku, lahko sicer drži več kot 8 litrov, vendar bo v vsakem primeru potekalo prelivanje natanko tako, kot če bi bila 8-litrška. Imamo torej problem $[8; 8, 5, 3]$, ki res ustreza pogoju (2).

Ker je najprej vsa tekočina v prvi posodi, začne pot v točki $(8, 0, 0)$. Na prvem koraku lahko ali napolnimo 5-litrsko posodo, kar je prikazano na sliki 6, ali 3-litrsko posodo, kot na sliki 7. Prva izbira nas po sedmih korakih

pripelje v točko $(4, 4, 0)$, druga po osmih korakih. Tedaj imamo v večjih dveh posodah v vsaki po 4 litre tekočine. Zapišimo obe poti:

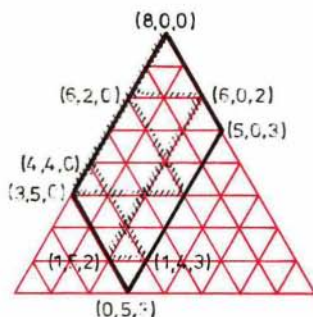
$$(8, 0, 0), (3, 5, 0), (3, 2, 3), (6, 2, 0), (6, 0, 2),$$

$$(1, 5, 2), (1, 4, 3), (4, 4, 0)$$

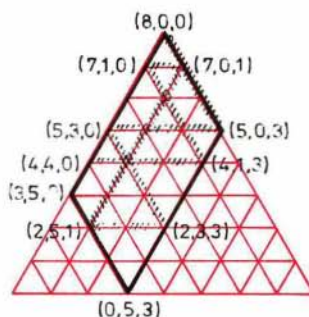
in

$$(8, 0, 0), (5, 0, 3), (5, 3, 0), (2, 3, 3), (2, 5, 1)$$

$$(7, 0, 1), (7, 1, 0), (4, 1, 3), (4, 4, 0)$$



Slika 6



Slika 7

Vidimo še, da obe poti skupaj dosežeta vsako robno točko paralelograma s celimi koordinatami. Torej bi z danimi posodami lahko odmerili vsako celo količino med 0 in 8 litri, ne samo razdelili tekočino na dva enaka dela. To gre pri poljubnem problemu, ki izpolnjuje pogoj (2), če sta b in c tuji števili.

Marija Vencelj

Kdor prezira evklidsko geometrijo, je kakor mož, ki po povratku iz tujih krajev, omalovažuje svoj lastni dom.

H.G. Forder

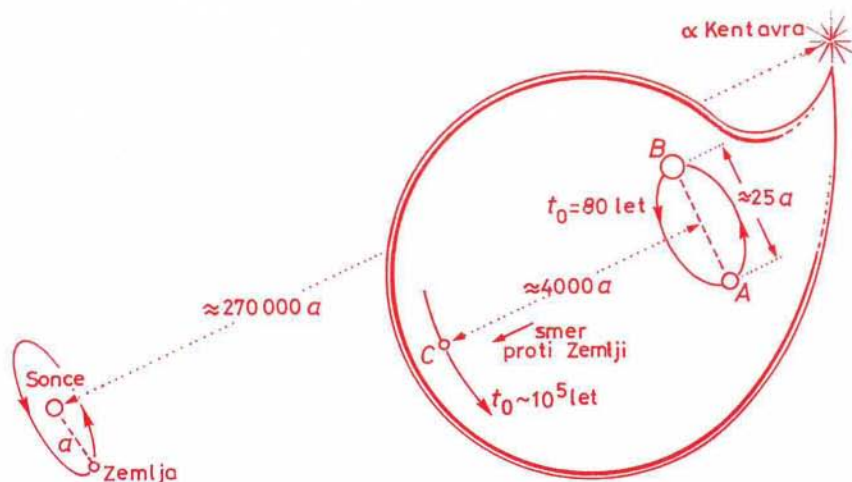
ASTRONOMIJA

PROKSIMA KENTAVRA

V *Karti južnega neba*, ki je izšla skupaj s *Karto severnega neba* pri Društvu matematikov, fizikov in astronomov Slovenije, poišči ozvezdje Kentavra in v njem svetlo zvezdo α (alfa). Zvezda α Kentavra je dobro vidna s prostim očesom, vendar je iz naših krajev ne vidiš, ker leži prenizko na južnem nebu. Oglejmo si nekaj podrobnosti o tej zvezdi.

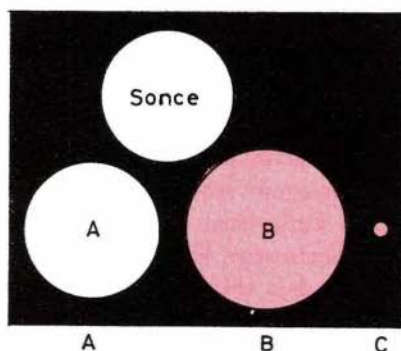
To, da nam je α Kentavra najbližja zvezda, je znano vsaj 150 let, od kar so izmerili njeno paralakso (glej *Presek 18*, 50). Sicer pa so že koncem 17. stoletja s sistematičnimi in natančnimi opazovanji ugotovili, da je α Kentavra dvojna zvezda, torej par zvezd *A* in *B*, ki krožita druga okrog druge. Leta 1915 so z daljnogledi ob α Kentavra izsledili še šibko zvezdico *C*, ki z zvezdama v paru sestavlja sistem treh, z gravitacijsko silo med seboj povezanih zvezd - *trizvezdje*. Najbolj zanimivo v tem trizvezdju je to, da nam je *tretja zvezda C bliže kot zvezdi v paru*. Dali so ji ime *Próksima Kentavra* (Proxima Centauri = α Kentavra *C*; latinsko: proxima - najbližja, bližnja), saj zvezda leži v ozvezdju Kentavra.

Zvezdi *A* in *B* sta od nas oddaljeni 4,34 svetlobnega leta, zvezda *C* pa 4,28 svetlobnega leta. (Svetlobno leto je razdalja, ki jo svetloba s hitrostjo $3 \cdot 10^8$ m/s prepotuje v enem letu. To je razdalja $3 \cdot 10^8$ m/s $\cdot$ 365 $\cdot$ 24 $\cdot$ 60 $\cdot$ 60 s =



Slika 1. Prikaz oddaljenosti trizvezdja α Kentavra od Sonca oziroma Zemlje in zgradba tega trizvezdja - shema; *a* - astronomska enota, t_0 - obhodni čas.

$= 9,5 \cdot 10^{15} \text{ m} \doteq 63000$ astronomskih enot, to je razdalj Zemlja - Sonce.) Če nismo preveč natančni, lahko za vse tri zvezde rečemo, da so od nas oddaljene približno 4 svetlobna leta. Proksima nam je torej bliže kot α Kentavra A in α Kentavra B za okoli 4000 astronomskih enot, kar je okoli 22 svetlobnih dni. Ker sta zvezdi A in B v paru razmaknjeni med seboj le okoli 25 astronomskih enot (kar je malo več od oddaljenosti Urana od Sonca), ima trizvezdje nekoliko nenavadno zgradbo (slika 1). Zvezdi A in B druga drugo obkrožita v 80 letih, Proksima pa obkroži par (natančneje skupno težišče vseh treh zvezd) šele v dobrih 100000 letih. Torej bo Proksima še dolgo časa nam najbližja zvezda. Ni bojazni, da bi svoje prvenstveno mesto kaj kmalu prepustila eni od zvezd v paru.



Slika 2. Velikost zvezd trizvezdja α Kentavra v primeri s Soncem.

Kaj še vemo o fizikalnih značilnostih tega nevsakdanjega trizvezdja? Tole:

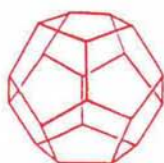
α Kentavra A sveti približno tako kot naše Sonce. Tudi po masi in polmeru mu je zelo podobna. α Kentavra B sveti približno trikrat šibkejše od Sonca, ima nekoliko manjšo maso od Sonca, po polmeru pa je malo večja od Sonca. Temperatura njenega površja je manjša od površinske temperature Sonca: meri približno 4000 K. (Temperatura površja Sonca je približno 6000 K.) Še nižjo temperaturo površja ima Proksima, le okoli 3000 K, in je torej temno rdečkasta zvezda. Polmer Proksime je skoraj 15-krat manjši od polmera Sonca. Tako je ta zvezda po velikosti manjša od Jupitra in celo Saturna, po masi pa ju prekaša okoli stokrat.

Recimo, da bi živel na zvezdi α Kentavra A. Od tam bi videl zvezdo α Kentavra B približno tako, kot bi videli naše Sonce s planeta Urana, Proksimo pa kot skrajno šibko zvezdico v razdalji, ki je stokrat večja od oddaljenosti Plutona od Sonca.

Marijan Prosén

PLATONOVİ POLIEDRI

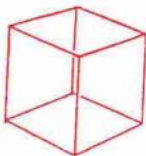
Med konveksnimi poliedri zlahka opazimo njih petero, ki zaradi svoje pravilne zgradbe še posebej izstopajo. Oglejmo si jih pozorneje:



tetraeder



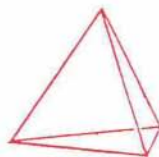
oktaeder



kocka



ikozaeder



dodekaeder

Peterici teh pravilnih poliedrov pravimo tudi **Platonovi** poliedri. Njihova zgodovina je prav zanimiva. Prislunimo ji!

Zdi se težko, če že ne prav nemogoče, seči z besedo ali s sliko tja daleč nazaj - k prvim odkritjem pravilnih poliedrov. Toda današnjim zgodovinarjem in arheologom vendarle marsikaj uspe. Tako so med izkopaninami na gori Monte Loffa blizu Padove v Italiji našli tudi model dodekaedra, ki sodi v sklop predmetov, ki so jih uporabljali Etruščani pred približno 2500 leti.

Spodnja slika nam prikazuje peterico predmetov, ki jih danes hranijo v Ashmolean Museum v Oxfordu v Angliji. Predmeti, v katerih seveda zlahka prepoznamo modele petih pravilnih poliedrov, sodijo v obdobje neolitske kulture na tamkajšnjih tleh in so torej stari vsaj 4000 let.



Žal ni znano, kakšen pomen so te stare kulture pripisovale pravilnim poliedrom.

Več zvedo, če se pomaknemo v obdobje starih Grkov. Znano je, da sta bila lepota in pomen teh teles izjemno visoko čaščena v nauku **Pitagorejcev**.

Tako, recimo, Aëtius (1. ali 2. stol.n.št.) poroča v svojih zapiskih:

"*Pitagora z ozirom na to, da obstaja pet geometrijskih teles, ki se imenujejo tudi matematična, pravi, da je iz kocke nastala zemlja, iz piramide ogenj, iz oktaedra zrak, iz ikozaedra voda in iz dodekaedra sfera vesoljstva.*"

Theo iz Smirne (1. ali 2. stol. n.št.) pa je o pitagorejskem nauku zabeležil, da "*obstaja petero teles (elementov) krogle sveta: v krogli so ogenj, voda, zemlja in zrak, peta pa je ladja, ki nosi kroglo*".

Roko na srce - matematike je v zapisih teh dveh starih poročevalcev najbrž manj, kot smo pričakovali. Pa še o njej, kar je pač je, pravi Aëtius, da je prisotna zgolj "*tudi*"! Misel se pač mora navaditi **Pitagore** (571 - 497 pr.n.št.), ki je bil predvsem mistik in mislec, seveda pa "*tudi*" matematik - gotovo eden prvih pomembnejših.

Kasneje veliki mislec **Platon** (429 - 348 pr.n.št.) ni ne preslišal in ne zanikal ničesar od tega, kar so vedeli povedati Pitagorejci o peterici pravilnih poliedrov. Zapis celo pravi, da je za velik denar kupil knjigo pitagorejskih nauk in po njej napravil svojega *Timeja* - knjigo, v kateri je med drugim obrazložil tudi svoje poglede na vlogo petih pravilnih poliedrov.

Za dodekaeder pravi, da pripada nebu, ker je bistveno različen od ostalih štirih teles. Poleg tega ga je, pravi Platon, že sam Bog uporabil v ta namen, ko je na njegovih dvanajst ploskev zarisal dvanajst zodiakalnih znamenj.

Kocka pripada zemlji, ker ima izmed vseh petih teles najtršo strukturo. In prav takšna, torej trda, je struktura zemlje v primerjavi s strukturami preostalih treh osnovnih elementov.

Tetraeder pripada ognju, pravi Platon, ker je z najmanjšim številom stranskih ploskev izmed vseh teles najbolj gibljiv. Pa tudi zato, ker je najlažji med njimi (danes pravimo, da ima pravilni tetraeder izmed vseh pravilnih teles z dano površino najmanjšo prostornino). Nazadnje pa še zato, ker je najostrejšo telo, če opazujemo njegove prostorske kote v ogliščih. Zbode prav kakor ogenj.

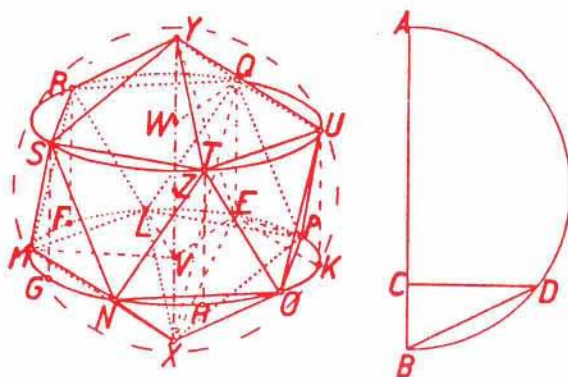
Ikozaeder pripada vodi, ker je v naštetih lastnostih tetraedru najbolj nasproten. Je najmanj gibljivo in nanjtežje telo in ima najmanj ostra oglišča. In kaj je bolj nasprotnega ognju kakor prav voda!

Oktaeder naposled pripada zraku, ker je v vseh omenjenih lastnostih med tetraedrom in ikozaedrom. Prav tako, kakor je zrak med dvema ekstremoma - med ognjem in vodo.

Tako je torej v *Timeju* opisoval Platon pet pravilnih poliedrov. In sedaj je najbrž tudi že jasno, zakaj se jih je kasneje oprijelo ime Platonovi poliedri.

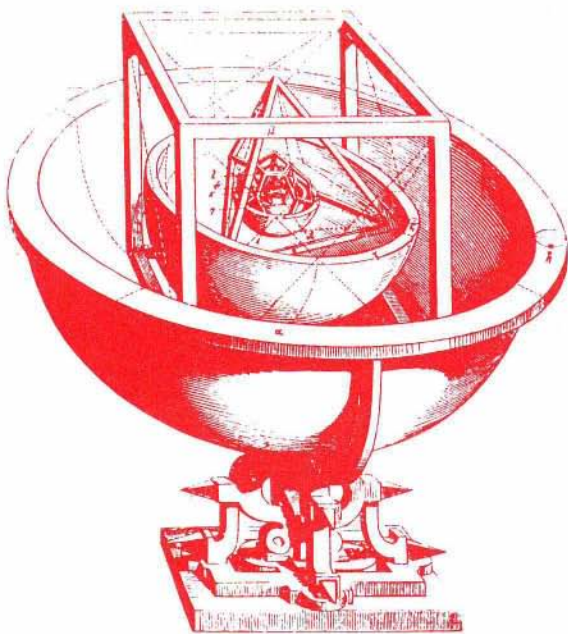
Pri starih Grkih postojmo še malo, preden odhitimo naprej skozi zgodovino po sledih Platonovih poliedrov. Učeni Proklos iz 5. stoletja pravi, da je **Evklid** (365 - 300 pr.n.št.) napisal svoje znamenite *Elemente* zgolj zato, da

Iz Evklidovih *Elementov*
(knjiga 13, izrek 16)



bi v njih obširno in natančno obrazložil vse, kar je potrebnega za poznavanje petih Platonovih poliedrov. Mimogrede - *Elementi* so po vsej verjetnosti najvplivnejša matematična knjiga, kar jih je bilo kdajkoli napisanih. Proklesov pogled na *Elemente* je seveda navzkriž z današnjim. Vendar je treba vedeti, da je bil Proklos goreč Pitagorejec in eden najvnetejših razlagalcev Platonove filozofije.

V srednjem ve-
ku najprej zgolj ome-
nimo beneškega uče-
njaka **Luco Pacioli-
ja** (1445 - 1514).
Zanimivo sliko, ki ga
prikazuje pri ukvarja-
nju s poliedri, najde-
te v lanskoletni tretji
številki Preseka.



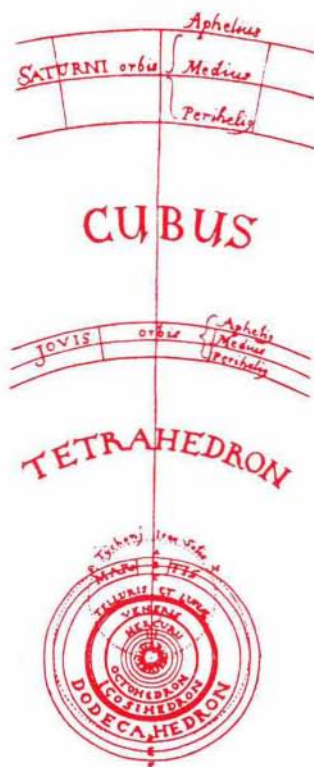
Keplerjeva verzija Son-
čevega sistema iz dela
*Mysterium Cosmogra-
phicum*

Več pozornosti velja posvetiti nemškemu matematiku in astronomu **Johannesu Keplerju** (1571 - 1630). Ta je leta 1596 v nemškem Tübingenu objavil svoje delo *Mysterium Cosmographicum*, ki ga je napisal med svojim bivanjem v štajerskem Gradcu. V njem je pritrdil takrat še sveži in močno vznemirjajoči trditvi Poljaka Kopernika, da stoji Sonce v središču, okrog katerega se vrtijo Zemlja in ostali planeti. Podrobno je obrazložil tudi poti, po katerih se gibljejo planeti. Njegovo predstavo o Osončju bi lahko v zgoščeni obliki podali takole:

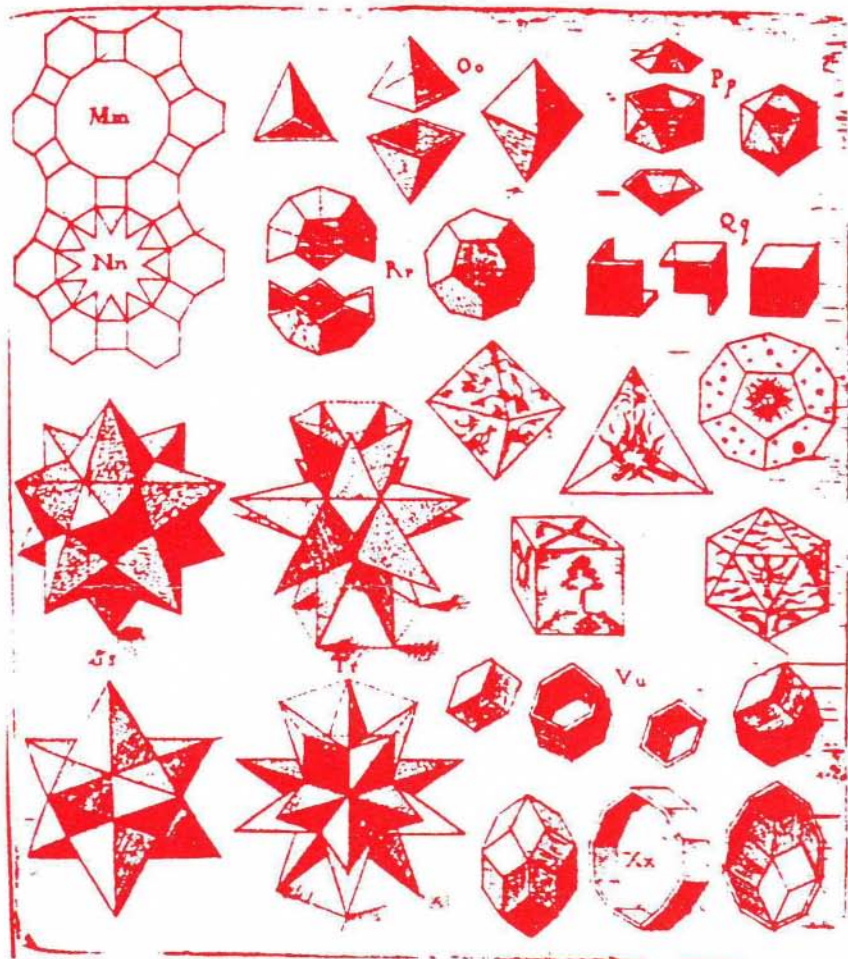
Naj na sferi krogle leži pot Zemlje okrog Sonca. Tej krogli očrtajmo dodekaeder. Na sferi, očrtani temu dodekaedru, leži pot Marsa okrog Sonca. Tretji sferi očrtajmo tetraeder in tetraedru spet sfero. Na sferi, očrtani tetraedru, leži pot Jupitra okrog Sonca. Očrtajmo ji kocko. In na sferi, očrtani kocki, leži pot Saturna okrog Sonca.

Pa se vrnimo nazaj k sferi, po kateri potuje Zemlja in ji včrtajmo ikozaeder. Na ikozaedru včrtani sferi leži pot Venere okrog Sonca. Tej sferi zatem včrtajmo oktaeder. Na oktaedru včrtani sferi leži pot Merkurja in v središču Merkurjeve sfere je točka, ki ustreza položaju Sonca, okrog katerega se gibljejo planeti.

Tako je tistikrat o harmoniji vesolja govoril Kepler, po svojem lastnem prepričanju "bolj filozof v matematiki, kakor pa matematik, ki filozofira". Vse življenje je pri svojem delu prepričano sledil misli, da so "odtisi geometrije izraženi v podobi sveta, tako da je geometrija pravzaprav neke vrste prasluka lepote sveta".



Risba iz Keplerjevega dela *Harmonices mundi* (Harmonija sveta) ponazarja razmerja sfer, na katerih ležijo poti vseh šestih planetov v Osončju, ki so bili tedaj znani Keplerju. Zanimivo, da dokaj dobro ustrezajo dejanskim razmeram v vesolju.



Iz Keplerjevega dela *Harmonices mundi*. Poleg obrazložitve petih Platonovih poliedrov so na sliki nekateri polpravilni in nekateri zvezdni poliedri, ki jih je odkril prav Kepler.

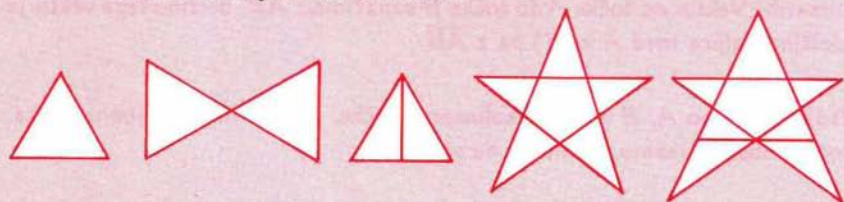
Spoznali smo torej, da je Kepler harmonijo sveta tesno povezoval s harmonijo petih Platonovih poliedrov. In kakor nam kaže zgornja leva slika, je v celoti ohranil tudi nauk Pitagorejcev - poliedre je še zmeraj povezoval s petimi osnovnimi elementi, z nebom, z ognjem, z vodo, z zemljo in z zrakom.

Vilko Domajnko

KOBONOVİ TRIKOTNIKI

Kolikšno je največje število neprekrivajočih trikotnikov, ki jih lahko naredimo z ustrezno razmestitvijo n premic po ravnini?

Naloga sodi v kombinatorično geometrijo, prvi pa jo je zastavil ugankarski ekspert Japonec Kobon Fujimura. Enostavno jo je zastaviti in razumeti, toda splošne rešitve do sedaj še nihče ni našel.



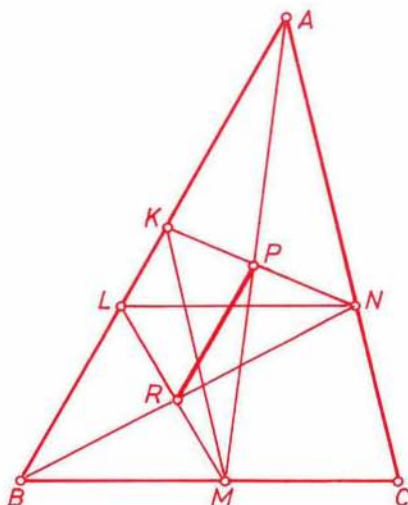
Za $n = 3, 4, 5$ in 6 rešitve ni težko poiskati s poskušanjem. Na sliki vidimo, da je največje število trikotnikov za $n = 3, 4, 5$ in 6 enako eden, dva, pet in sedem. S sedmimi premicami se začno težave. Poskusite poiskati največje (ali čim večje) število trikotnikov za $n = 7, 8$ in 9 .

Ciril Pezdir

VZPOREDNICA

Na stranici AB trikotnika ABC sta dani točki K in L . Na stranici BC poiščemo točko M tako, da je daljica KM vzporedna z AC , na stranici AC pa določimo točko N , za katero je LN vzporedna BC . Daljici AM in KN se sekata v točki P , BN in LM pa v točki R .

1. Dokaži, da je daljica PR vzporedna stranici AB .
2. Izračunaj dolžino daljice PR , če AB meri 7 cm, M razpolavlja BC , N pa razdeli AC v razmerju $2 : 1$.



Boris Lavrič

O KOLINEARNOSTI TREH TOČK

Učenci se že zelo zgodaj srečajo s pojmom kolinearnosti. Če točke ležijo na isti premici, rečemo, da so kolinearne. Namen tega sestavka je, pokazati, kako kolinearnost lahko opišemo s pomočjo vektorjev. Najprej bomo povedali, kdaj so tri točke kolinearne, nato pa bomo trditev uporabili v dveh zanimivih primerih. Vektor od točke A do točke B označimo z $\overrightarrow{AB}$, dolžino tega vektorja (dolžino daljice med A in B) pa z $\overline{AB}$.

Trditev. Če so A , B in C tri kolinearne točke, $A \neq C$ in O poljubna točka, potem obstaja realno število k , da velja:

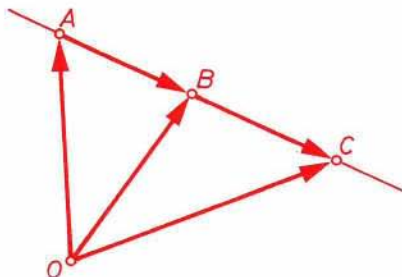
$$\overrightarrow{OB} = (1 - k)\overrightarrow{OA} + k\overrightarrow{OC} \quad (*)$$

Če je $0 \leq k \leq 1$, je točka B na daljici AC .

Dokaz. Naj bodo točke A , B in C na isti premici (slika 1). Ker sta vektorja $\overrightarrow{AB}$ in $\overrightarrow{AC}$ vzporedna, je $\overrightarrow{AB} = k\overrightarrow{AC}$. Ker je $\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{OB} - \overrightarrow{OA}$ in $\overrightarrow{AC} = \overrightarrow{OC} - \overrightarrow{OA}$, je $\overrightarrow{OB} - \overrightarrow{OA} = k(\overrightarrow{OC} - \overrightarrow{OA})$. Izračunajmo $\overrightarrow{OB}$. Dobimo:

$$\overrightarrow{OB} = (1 - k)\overrightarrow{OA} + k\overrightarrow{OC},$$

kar smo hoteli dokazati.



Slika 1

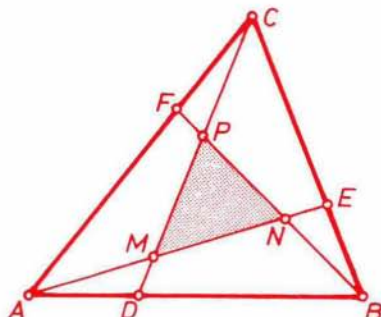
S pomočjo zgornje trditve rešimo dve nalogi.

Naloga 1. Na straneh AB , BC in CA trikotnika ABC ležijo tri točke D , E in F tako, da je $\overline{AD} = (1/3)\overline{AB}$, $\overline{BE} = (1/3)\overline{BC}$ in $\overline{CF} = (1/3)\overline{CA}$. Z M , N in P označimo zaporedoma preseke daljic CD in AE , BF in AE ter CD in BF (slika 2). Dokaži, da je ploščina $p(MNP)$ trikotnika MNP sedmina ploščine trikotnika ABC .

Rešitev. Trikotnika ABC in ABE imata skupno višino, ki izhaja iz oglišča A . Ker je $\overline{BE} : \overline{BC} = 1 : 3$, je

$$p(ABE) = \frac{1}{3}p(ABC) \quad (1)$$

Ker točka N leži na daljicah AE in BF , torej na premici skozi točki A in E ter na premici skozi točki B in F , iz naše trditve sledi, da obstajata števili m in n , za kateri velja:



Slika 2

$$\overrightarrow{CN} = (1-m)\frac{2}{3}\overrightarrow{CB} + m\overrightarrow{CA} \quad \text{in} \quad \overrightarrow{CN} = (1-n)\overrightarrow{CB} + n\frac{1}{3}\overrightarrow{CA}$$

Če zgornja dva izraza za $\overrightarrow{CN}$ izenačimo ter vse prenesemo na levo stran, dobimo:

$$(m - \frac{n}{3})\overrightarrow{CA} + (n - \frac{2}{3}m - \frac{1}{3})\overrightarrow{CB} = 0$$

Ker A , B in C ne ležijo na isti premici, ta enakost lahko velja le, če je

$$m - \frac{n}{3} = 0 \quad \text{in} \quad n - \frac{2m}{3} - \frac{1}{3} = 0$$

Sledi $m = 1/7$ in $n = 3/7$. Zato je

$$\overrightarrow{CN} = \frac{6}{7}(\frac{2}{3}\overrightarrow{CB}) + \frac{1}{7}\overrightarrow{CA} = \frac{6}{7}\overrightarrow{CE} + \frac{1}{7}\overrightarrow{CA}$$

Ker je

$$\overrightarrow{AN} = \overrightarrow{CN} - \overrightarrow{CA} = \frac{6}{7}\overrightarrow{CE} + \frac{1}{7}\overrightarrow{CA} - \overrightarrow{CA} = \frac{6}{7}(\overrightarrow{CE} - \overrightarrow{CA}) = \frac{6}{7}\overrightarrow{AE}$$

je $\overline{AN} : \overline{AE} = 6 : 7$.

Trikotnika ABN in ABE imata skupno višino (iz oglišča B). Zato je

$$p(ABN) = \frac{6}{7}p(ABE) \quad (2)$$

Iz (1) in (2) dobimo

$$p(ABN) = \frac{2}{7}p(ABC)$$

Podobno dobimo

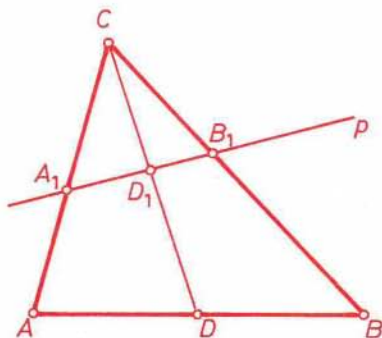
$$p(BPC) = \frac{2}{7}p(ABC) \quad \text{in} \quad p(AMC) = \frac{2}{7}p(ABC)$$

Sedaj pa že lahko izračunamo ploščino trikotnika MNP .

$$\begin{aligned} p(MNP) &= p(ABC) - (p(ABN) + p(BPC) + p(AMC)) = \\ &= p(ABC) - \frac{6}{7}p(ABC) = \frac{1}{7}p(ABC) \end{aligned}$$

Naloga 2. Podan je trikotnik ABC s težiščnico CD . Premica p , ki ne gre skozi nobeno oglišče trikotnika, naj seka daljice CA , CB in CD v točkah A_1 , B_1 in D_1 (slika 3). Dokaži, da velja

$$\frac{\overline{CA}}{\overline{CA_1}} + \frac{\overline{CB}}{\overline{CB_1}} = 2 \frac{\overline{CD}}{\overline{CD_1}} \quad (3)$$



Slika 3.

Rešitev. Oglejmo si vektorje $\overrightarrow{CA_1}$, $\overrightarrow{CB_1}$ in $\overrightarrow{CD_1}$. Izrazimo jih lahko takole:

$$\overrightarrow{CA_1} = k\overrightarrow{CA}, \quad \overrightarrow{CB_1} = n\overrightarrow{CB}, \quad \overrightarrow{CD_1} = m \frac{\overrightarrow{CA} + \overrightarrow{CB}}{2} \quad (4)$$

Enakost (3) sedaj lahko zapišemo tudi takole:

$$\frac{1}{k} + \frac{1}{n} = 2 \frac{1}{m} \quad (5)$$

Za točke A_1 , D_1 in B_1 , ki so kolinearne, uporabimo (*).

$$\overrightarrow{CD_1} = (1-p)\overrightarrow{CB_1} + p\overrightarrow{CA_1}$$

Ko izraze v (4) vstavimo v to enakost in preuredimo, dobimo

$$\left(\frac{m}{2} - pk\right)\overrightarrow{CA} + \left(\frac{m}{2} - n + pn\right)\overrightarrow{CB} = 0$$

Zgornji enakosti je zadoščeno le, če je

$$\frac{m}{2} - pk = 0 \quad \text{in} \quad \frac{m}{2} - n + pn = 0$$

Od tod dobimo:

$$\frac{m}{2k} = p \quad \text{in} \quad \frac{m}{2n} = 1 - p$$

Ko zgornji enakosti seštejemo, vidimo, da velja:

$$\frac{m}{2k} + \frac{m}{2n} = 1$$

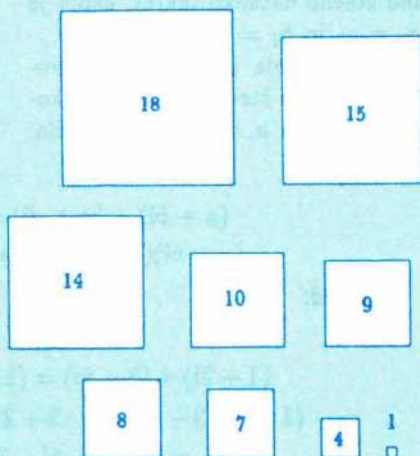
Če zgornjo enakost delimo z m in množimo z 2, dobimo (5), kar smo želeli dokazati.

Naloga: V kakšnem razmerju sta ploščini trikotnikov ABC in MNP , če je $\overline{AD} = (1/r)\overline{AB}$, $\overline{BE} = (1/r)\overline{BC}$ in $\overline{CF} = (1/r)\overline{CA}$. Kaj se zgodi pri $r = 2$?

Dragoljub M. Milošević, prevedel in priredil M. Dobovišek

ROČNA SPRETNOST IN ŠE KAJ

Iz devetih kvadratov s stranicami dolžin 1, 4, 7, 8, 9, 10, 14, 15 in 18 sestavi pravokotnik.



Vilko Domanjko

KOMPLEKSNA CELA ŠTEVILA

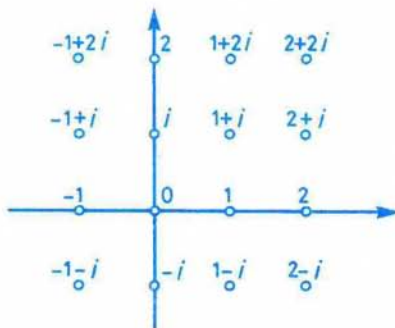
Ogledali si bomo eno od možnosti posplošitve pojma celega števila. Z imenom cela števila mislimo množico $\mathbb{Z} = \{\dots, -2, -1, 0, 1, 2, \dots\}$. Cela števila si lahko predstavljamo kot ogrlico na številski osi.



Osnovo za uvedbo pojma kompleksnega števila predstavlja enačba $x^2 = -1$. Ta enačba nima rešitve v celih številih, pa tudi v realnih številih ne. Da bi to in podobne enačbe lahko reševali, so matematiki uvedli pojem imaginarne enote. To je število i , ki reši zgornjo enačbo, torej $i^2 = -1$. Besedo imaginaren navadno slovenimo kot izmišljen ali navidezen. Število i naj bi torej ne obstajal v resnici, ampak naj bi bilo izmišljotina matematikov. Toda razvoj matematike in tehnike v zadnjem stoletju je pokazal, da je število i zelo uporabno pri čisto praktičnih problemih in torej ni tako za lase privlečeno, kot bi se komu zdelo.

Zdaj definirajmo kompleksna cela števila. Vzemimo dve celi števili a, b , zapišimo $z = a + bi$ in ta formalni zapis imenujmo kompleksno celo število. Zapiša $a_1 + b_1i$ in $a_2 + b_2i$ predstavljata isto kompleksno število natanko takrat, kadar je $a_1 = a_2$ in $b_1 = b_2$.

Seštevanje in množenje kompleksnih celih števil definiramo takole: naj bodo a, b, c, d cela števila. Potem je



$$(a + bi) + (c + di) = (a + c) + (b + d)i$$

$$(a + bi)(c + di) = (ac - bd) + (bc + ad)i$$

Zgled:

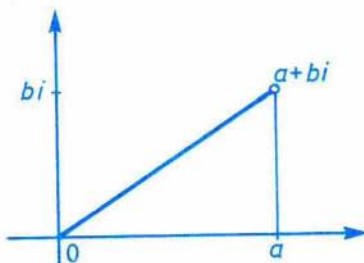
$$(1 + 2i) + (3 - 5i) = (1 + 3) + (2 - 5)i = 4 - 3i$$

$$(1 + 2i)(3 - 5i) = 1 \cdot 3 + 2 \cdot 3 \cdot i - 1 \cdot 5 \cdot i - 2 \cdot 5 \cdot i^2 =$$

$$= 3 + 6i - 5i - 10 \cdot (-1) = 13 + i$$

Zaradi poenostavitve, zapišemo število $a + 0i$ kar a , število $0 + ai$ pa ai .

Vsakemu kompleksnemu celému številu $z = a + bi$ bomo priredili še pozitivno število $N(z) = a^2 + b^2$, ki ga imenujemo *norma* števila z . Če kompleksna cela števila predstavimo kot mrežo, potem je zaradi Pitagorovega izreka $N(z)$ ravno kvadrat dolžine hipotenuze v spodnjem trikotniku.



Najpomembnejša lastnost norme je izražena v naslednji trditvi:

Trditev 1. Naj bosta $z_1 = a + bi$ ter $z_2 = c + di$ dve kompleksni celi števili. Potem velja $N(z_1 z_2) = N(z_1) N(z_2)$.

Dokaz nam da naslednji račun:

$$\begin{aligned} N(z_1 z_2) &= N((ac - bd) + (ad + bc)i) = (ac - bd)^2 + (ad + bc)^2 = \\ &= a^2 c^2 + b^2 d^2 - 2acbd + a^2 d^2 + b^2 c^2 + 2adbc = \\ &= a^2 c^2 + b^2 d^2 + a^2 d^2 + b^2 c^2 = \\ &= (a^2 + b^2)(c^2 + d^2) = N(z_1) N(z_2) \end{aligned}$$

Poglejmo si nekoliko поблиže deljivost kompleksnih celih števil. Definiramo jo enako kot pri celih številih, torej z_1 deli z_2 , če obstaja tako kompleksno celo število w , da je $wz_1 = z_2$.

Najprej si oglejmo zgled:

$$1 \cdot i = i$$

$$i \cdot (-i) = -i^2 = -(-1) = 1$$

Torej 1 deli i in tudi i deli 1. Pri naravnih številih je takšno medsebojno deljenje nemogoče, zato si moramo ta fenomen поблиže ogledati.

Trditev 2. Naj bosta z_1 in z_2 dve neničelni kompleksni celi števili in naj z_1 deli z_2 ter z_2 deli z_1 . Tedaj imamo štiri možnosti:

$$z_1 = z_2, \quad z_1 = -z_2, \quad z_1 = iz_2, \quad \text{ali} \quad z_1 = -iz_2$$

Dokaz: Iz danih pogojev za števili z_1 ter z_2 sledi, da obstajata dve taki

kompleksni celi števili x, y da velja:

$$z_1 = xz_2 \text{ in } z_2 = yz_1$$

Z uporabo trditve 1 dobimo

$$\begin{aligned} N(z_1) &= N(x)N(z_2) \\ N(z_2) &= N(y)N(z_1) = N(y)N(x)N(z_2) \end{aligned}$$

Ker je $z_1 \neq 0, z_2 \neq 0$, so norme pozitivne in zato mora biti $N(x) = N(y) = 1$. Pišemo $x = a + bi$ in dobimo $a^2 + b^2 = 1$. Od tod očitno sledi, da je $a = 0$ in $b^2 = 1$ ali pa $a^2 = 1$ in $b = 0$, torej je x eno od števil $1, -1, i$ in $-i$.

To pomeni, da ima vsako kompleksno celo število z vsaj osem deliteljev. To so $1, -1, i, -i, z, -z, iz, -iz$. Število, ki ima samo teh osem deliteljev, bomo imenovali kompleksno praštevilo. Naj bo p naravno število. Kdaj je p kompleksno praštevilo? Očitno je, da mora biti p praštevilo v običajnem smislu. Da to še ne zadošča, kaže naslednji zgled:

$$(1+i)(1-i) = 1+i-i-i^2 = 2$$

število $1+i$ deli 2, zato 2 ni kompleksno praštevilo. Delni odgovor na naše vprašanje daje:

Trditev 3. Naj bo p praštevilo, ki ima pri deljenju s 4 ostanek 3. Tedaj je p tudi kompleksno praštevilo.

Dokaz: Denimo, da je p mogoče zapisati kot produkt

$$p = (a + bi)(c + di)$$

in da sta števili $a + bi, c + di$ različni od števil $1, -1, i, -i, p, -p, ip, -ip$. Tedaj dobimo $N(p) = p^2 = N(a + bi)N(c + di)$.

Ker število p^2 nima drugih naravnih deliteljev kot 1, p in p^2 in ker $N(a + bi), N(c + di) \neq 1$, dobimo $N(a + bi) = p = a^2 + b^2$. Število p je liho, zato mora biti eno izmed števil a, b sodo, eno pa liho. Kvadrat sodega števila je deljiv s 4, kvadrat lihega števila pa pri deljenju s 4 da ostanek 1 (Dokaži!). Zato vsota $p = a^2 + b^2$ pri deljenju s 4 da ostanek 1, kar pa po predpostavki ni res. Torej je p kompleksno praštevilo.

Pripomnimo še, da tista praštevila, ki pri deljenju s 4 dajo ostanek 1, niso kompleksna praštevila, vendar to ni tako enostavno dokazati.

Za konec pa nekaj nalog:

1. Dokaži, da enačba $N(z) = 3$ nima rešitev v kompleksnih celih številih.
2. Poišči vse rešitve enačbe $N(z) = 5$ v kompleksnih celih številih.
(Rešitve: $2+i$, $2-i$, $-2+i$, $-2-i$)
3. Dokaži, da je število $1+i$ kompleksno praštevilo.
4. Dokaži, da števili 5 in 13 nista kompleksni praštevili. (Nasvet: razcepi obe števili na produkt dveh kompleksnih celih števil.)
5. Reši enačbo $x + y + z = xyz = 1$ v kompleksnih celih številih.
(Rešitev: $1, i, -i$)
6. Razcepi število $19 + 17i$ na produkt kompleksnih praštevil. (Rešitev: $(1+i)(2+i)^2(2-3i)$)
7. Dokaži, da je vsako kompleksno število, čigar norma je praštevilo, kompleksno praštevilo.

Borut Zalar

Weinberg N., PRVE TRI MINUTE, 4. natis, Društvo matematikov, fizikov in astronomov Slovenije, Ljubljana 1991, 144 str. (Knjižnica Sigma ; 32 c)

Letos je izšel že četrti natis te knjige v slovenščini. Za to izdajo smo tekst nanovo stavili z urejevalnikom matematičnih besedil emTeX. S tem smo knjigi dali lepši izgled in za nekaj deset strani zmanjšali njen obseg. Knjigo toplo priporočamo novim generacijam mladih navdušencev za naravoslovne vede in še posebej za astronomijo. V nadaljevanju objavljamo lepo misel o tej knjigi, ki jo je napisal znani fizik.

Ciril Velkovrh

V tej knjigi sem prvič videl podroben opis nastanka vesolja, podan z zgodovinskega in konceptualnega vidika, in sicer v taki obliki, da ga lahko razume povprečen bralec. To je za vse nas velikanska pridobitev. Doslej sem tu in tam naletel na podatke o zgodovini zgodnje razvojne stopnje vesolja, a dokler nisem prebral te knjige, se nisem zavedal, v kolikšni meri je ta zgodovina rezultat skrbnega opazovanja in natančnih izračunov. Izkazalo se je, da je tisto, kar sem imel za ugibanje in nekakšen znanstveni misticizem, nekaj čisto drugega, in ne morem povedati, kakšen čudovit občutek mi to daje.

Isaac Asimov

NOVE KNJIGE

Matija Lokar, ZAČETI Z dBASE IV in dBASE IV - UKAZI IN FUNKCIJE, Zavod Republike Slovenije za šolstvo, Društvo matematikov, fizikov in astronomov Slovenije, Ljubljana 1991.

V okviru projekta **RAČEK** (RAČunalniška EKsplozija) sta v pomoč (predvsem mladim) uporabnikom osebnih računalnikov spet izšla dva priročnika. Matija Lokar, ki ga poznamo tudi kot avtorja številnih člankov v PRESEKU, se je tokrat lotil programskega paketa dBASE IV kot predstavnika programov za obdelavo **baz (zbirk) podatkov**.

Za tiste, ki še nikoli niso imeli opraviti s podatkovnimi bazami, povejmo, da te najlažje primerjamo z običajnimi dvodimenzionalnimi tabelami, v katerih so podatki urejeni v **zapise** tako, da imamo v vsakem stolpcu zapisano vrednost enega od **polj** oziroma **obeležij**. Navedimo bralcem zelo domač zgled: podatke o uspehu, ki so ga dosegli učenci pri testu, bi lahko shranili na računalnik v naslednji obliki:

priimek	ime	nal 1	nal 2,	nal 3	nal 4	nal 5	vsota	ocena
Brezveznik	Feliks	05	00	04	00	00	09	1
Pravdobri	Miha	10	20	20	17	15	82	4
Solidni	Franc	09	13	20	05	15	62	3
Super	Martin	14	20	20	20	20	94	5
Zasilo	Metka	08	14	15	10	05	52	2
...	...	...	...	...	...	...	...	...

Od vsakega programa za delo s podatkovno bazo zahtevamo, da mora obvladati cel kup nalog. Naštejmo samo nekatere najbolj tipične, ki bi jih potrebovali pri tem konkretnem primeru:

- urediti podatke po različnih vrstnih redih (po priimkih učencev, po doseženih točkah, ...);
- poiskati zapis, ki pripada posameznemu učencu;
- izpisati vse (ali pa samo izbrane) podatke na prikazovalnikovem zaslonu ali (če bomo tako želeli) na tiskalniku;
- izračunati povprečno število točk (pri posamezni nalogi in skupaj) in povprečno oceno, ki so jo učenci dosegli pri tem testu itd.

Seveda ne bi škodilo, če bi program znal tudi grafično predstaviti rezultate testa. Na vsak način pa pričakujemo, da bo mogoče naše želje sporočiti računalniku s čim manj duhamornega tipkanja, na primer z izbiro ukazov iz vnaprej pripravljenih menujev, pa še to, če je le mogoče, s pomočjo prijazne miške ...

Programski paket **dBASE** (v več razvojnih stopnjah, dBASE II, dBASE III, dBASE III Plus in dBASE IV) je gotovo najbolj znani programski paket za delo z bazami in je v dobrih desetih letih razvoja postal svetovni standard na tem področju obdelave podatkov: vsak programski paket za delo z bazami podatkov, ki hoče kaj veljati, mora predvsem znati vsaj vse tisto, kar zmore zadnja različica programa dBASE. Zato se zdi, da je izbira tega programskega paketa za uporabo v naših šolah povsem na mestu, kljub temu, da se na našem trgu že pojavljajo tudi sposobnejša programska orodja te vrste (npr. Paradox firme Borland).

Avtor je v dogovoru z založnikoma razdelil priročnik v dva zvezka. V prvem delu opiše nameščanje programskega paketa na osebni računalnik in potrebne prilagoditve, predstavi glavne značilnosti programskega paketa, najpomembnejše ukaze in funkcije ter podrobneje opiše delo z menuji kot osnovnim načinom komunikacije med uporabnikom in programom. V drugem zvezku so zbrani (urejeni v razdelke po skupnih značilnostih, znotraj njih pa po abecedi) vsi ukazi in funkcije, ki jih pozna dBASE IV. Pri vsakem ukazu so navedeni tudi vsi tisti, ki so z njim na kakršenkoli način povezani, zato bo uporabnik ta zvezek pretežno uporabljal kot svoj "razširjeni pomnilnik". Seveda pa je treba reči, da samo branje računalniških priročnikov brez sprotne preverjanja na računalniku močno spominja na učno dobo butalskega kovača (*Gledale bodo oči, naučile se bodo roke...*)

Jože Andrej Čibej

PRIROČNIKI ZA OSNOVNE IN SREDNJE ŠOLE

Štalec I., *Zbirka vaj iz aritmetike, algebre in analize za srednje šole:*

1. razred. 100 str.
2. razred. 88 str.
3. razred. 204 str.
4. razred. 120 str.

Uršič S., *Matematične tabele in formule.* 100 str.

Tudi letos lahko dobijo naročniki Preseka te priročnike pri skupinskem naročilu šol pri DMFAS, Ljubljana, Jadranska c. 19 z 20% popustom.

RAZVEDRILO

OD IGRE "KRIŽCI IN KROŽCI" DO IGRE "RENDZJU"

Gotovo ste že slišali za igro, kjer na liku s 3×3 polji nasprotnika poskušata postaviti tri križce oziroma krožce v vrsto. Zmaga tisti, kateremu to prvega uspe. Vrsta je lahko vodoravna, navpična ali diagonalna. Igralec *A*, ki začne, vpisuje križce, igralec *B* pa krožce. Vpisovanje je seveda izmenično.

S pravilno igro obeh igralcev je rezultat vedno neodločen. V naslednjih slikah označujejo indeksi nad križci in krožci vrstni red vpisov. Vpise (poteze) štejemo skupaj za oba igralca.

O ⁶	O ⁸	X ⁹
X ³	X ¹	O ⁴
O ²	X ⁷	X ⁵

O ⁶	X ³	X ⁹
X ⁷	X ¹	O ⁸
O ²	O ⁴	X ⁵

X ³		X ⁷
O ⁶	X ¹	
X ⁵	O ²	O ⁴

Slika 1. Primeri iger z začetnim vpisom križca v središče lika. Če *B* ne odgovori diagonalno, potem izgubi, kot vidimo pri tretjem primeru.

Kaj se zgodi, če liku dodamo še eno polje? Tedaj s pravilno igro *A* vedno zmaga:

		O ²	
O ⁴	X ¹	X ³	
		X ⁵	

	O ⁴		
X ⁵	X ¹		
	X ³	O ²	

		O ²	
	X ¹		
	X ³		

Slika 2a. Dodano polje ob liku. V vseh treh primerih pomeni zadnja poteza dvojni napad.

Slika 2b. Dodano polje na diagonalni.

Zaradi simetrije je dovolj, da pokažemo, kaj se zgodi, če kvadratek dodamo le ob spodnjem robu lika.

Le v primeru, ko dodamo polje od diagonali, kot vidimo na sliki 2b, je izid lahko neodločen. Bralcu je prepuščeno, da predvidi vse možnosti.

Igra na tri znake v vrsto na liku, ki je večji od 3×3 , torej ni smiselna. Kaj pa, če si postavimo za cilj štiri znake v vrsto na neomejenem liku? Tedaj s pravilno igro spet vedno zmaga igralec, ki začne. Na sliki 3 sta prikazani poti prvega igralca do zmage, če se drugi igralec brani stransko ali diagonalno. Sedaj raje vpisujemo znake na križišča črt namesto na polja med črtami, ker se tudi pri igri rendzju postavlja ploščice na križišča črt.



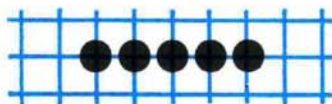
Slika 3. Igra na štiri znake v vrsto. V obeh primerih grozi trojka v dveh smereh hkrati in drugi igralec ne more preprečiti zmage križcev.

Treba je torej poskusiti z igro na pet ali več znakov v vrsto. Igre, v kateri bi npr. skušali postaviti šest križcev v vodoravno, navpično ali diagonalno vrsto, bi se torej naveličali kot prežvečenega žvečilnega gumija. Še po maratonsko dolgi igri ne bi bilo zmagovalca. Preostane nam le igra na pet znakov v vrsto. Igra je močno razširjena in zanjo obstajajo tudi računalniški programi. Taka igra se je pojavila že precej pred našim štetjem na Kitajskem, v Ameriki in v Grčiji. Igrali so na neomejenem igralnem liku tako, da so postavljali bele in črne kamne na križišča vodoravnih in navpičnih črt. Kasneje se je igra razširila s Kitajske na Japonsko, kjer so jo razvijali naprej. Turnirji so pokazali, da črni igralec, ki začne, skoraj vedno zmaga. Zato so lik najprej omejili na velikost 19×19 , tako kot je veliko polje pri znani japonski igri go. Pozneje so velikost lika še zmanjšali na 15×15 , vendar tudi to ni bilo dovolj za uspešno igro drugega igralca. V 17. stol. je japonski prvak Tataki predlagal dodatne omejitve za prvaka igralca, ki uradno veljajo še danes. Japonec Kobayashi je približno v istem času igro imenoval "rendzju", kar v japonščini pomeni "biserna ogrlica". Igra je danes razširjena na Japonskem, v Sovjetski zvezi in na Švedskem, kjer prirejajo tudi uradna tekmovanja.

Rendzju se igra z belimi in črnimi ploščicami valjaste oblike (premer 21 mm, višina 4-5 mm) na deski velikosti približno $33 \text{ cm} \times 33 \text{ cm}$. Na deski

je 15 vodoravnih in 15 navpičnih črt. Zaradi lažje orientacije so vodoravne črte označene s števili od 1 do 15, navpične črte pa s črkami od a do p, pri čemer črki č in j izpuščamo. Ploščice se postavlja na križišča črt. Začne igralec, ki ima črne ploščice. Navadno se igra s časovno omejitvijo, zato se uporabljajo kar šahovske ure. Črni mora odigrati prvo potezo v središče deske (h8). Nato igralca izmenično postavljata ploščice na desko. Zmaga tisti, ki mu prvemu uspe postaviti pet svojih ploščic v nepretrgano vodoravno, navpično ali diagonalno vrsto. Preden opišem prepovedane poteze za črnega, si oglejmo nekaj struktur, ki se pogosteje pojavljajo v igri:

- **Peterka** je nepretrgana vodoravna, navpična ali diagonalna vrsta 5 ploščic enake barve.



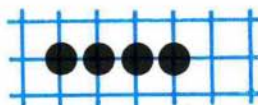
Slika 4. Peterka

- **Dolga vrsta** je nepretrgana vodoravna, navpična ali diagonalna vrsta 6 do 9 ploščic enake barve. Mogoče bo kdo pomislil, da dolga vrsta v igri sploh ni more nastati, ker bi igralec že prej zmagal s peterko. Toda na sliki je primer, ko dolga vrsta nastane, ne da bi prej imeli peterko.



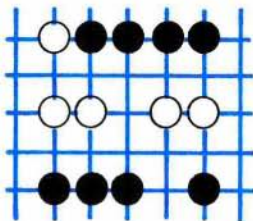
Slika 5. Nastanek dolge vrste.

- **Odprta četverka** je struktura, iz katere lahko na dva načina po eni potezi nastane peterka. Ta struktura vodi do zmage v naslednji potezi, ker jo nasprotnik v eni potezi lahko zapre le na eni strani.



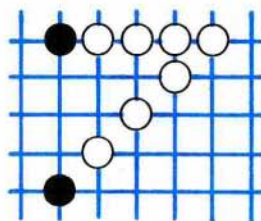
Slika 6. Odprta četverka

- **Zaprta četverka** je struktura, iz katere lahko na en sam način po eni potezi nastane peterka. Nasprotnik jo lahko zapre in se obvaruje pred porazom. Zaprta četverka pa lahko vodi do zmage v kombinaciji z drugimi strukturami.



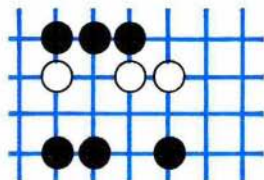
Slika 7a. Primeri zaprtih četverk.

- **Trojka** je struktura, iz katere lahko po eni potezi nastane odprta četverka. Nasprotnik mora trojko na eni strani zapreti, da prepreči nastanek odprte četverke. Kombinacija dveh trojk vodi do zmage, če nasprotnik nima močnejšega napada.

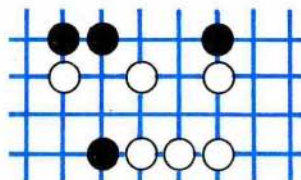


Slika 7b. Kombinacija dveh belih zaprtih četverk vodi do zmage belega.

- **Neprava trojka** je struktura, iz katere lahko po eni potezi nastane zaprta četverka.



Slika 8. Primeri vodoravnih trojk. Dve črni in ena bela trojka.



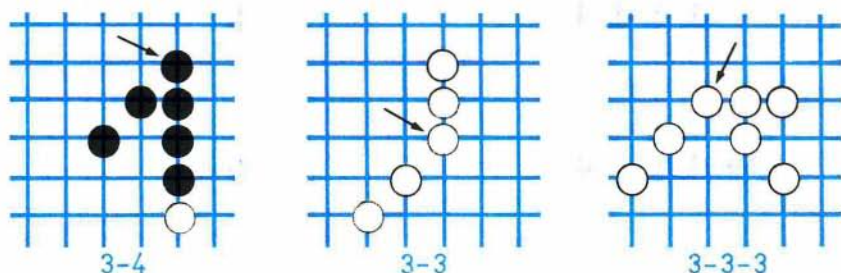
Slika 9. Primeri nepravih trojk.

Četverka in trojka sta napadni strukturi, nepravne trojke pa ne prištevamo k napadnim strukturam.

- **Hkratni napad** je poteza, po kateri nastaneta dve ali več novih napadnih struktur.

Edini dovoljeni hkratni napad za črnega je dvojni napad 3-4, za belega pa ni nobenih omejitev. Poleg tega črni ne sme narediti dolge vrste, beli pa z dolgo vrsto zmaga tako kot s peterko. Na videz nima črni nobenih možnosti za pravo igro zaradi prepovedanih potez, vendar statistika kaže, da imata oba igralca približno enake možnosti za zmago.

Bralcu priporočam še ogled članka Strategije Janka Gravnerja, ki je bil objavljen v Preseku 13 (1984/85) 4, 194.



Slika 10. Primeri hkratnih napadov.

Zahvaljujem se prijatelju Olegu Pljušču iz Minska v Belorusiji, ker me je poučil o zgodovini in pravilih igre rendzju in mi pomagal pri zasnovi članka.

Milan Ambrožič

Z GEOMETRIJSKIM ZAPOREDJEM OD ATOMA DO GALAKSIJE

Modri zvezdi očrtan krog ima premer 2 cm. Vanjo lahko vrišemo manjšo zvezdo, v slednjo še manjšo... Kolikokrat moramo ponoviti postopek vrisovanja, če začnemo z modro zvezdo, da bo imel najmanjši zvezdi očrtan krog vsaj tako majhen premer, kot je premer atoma vodika ($2r_{atom} = 10^{-10}\text{m}$)?



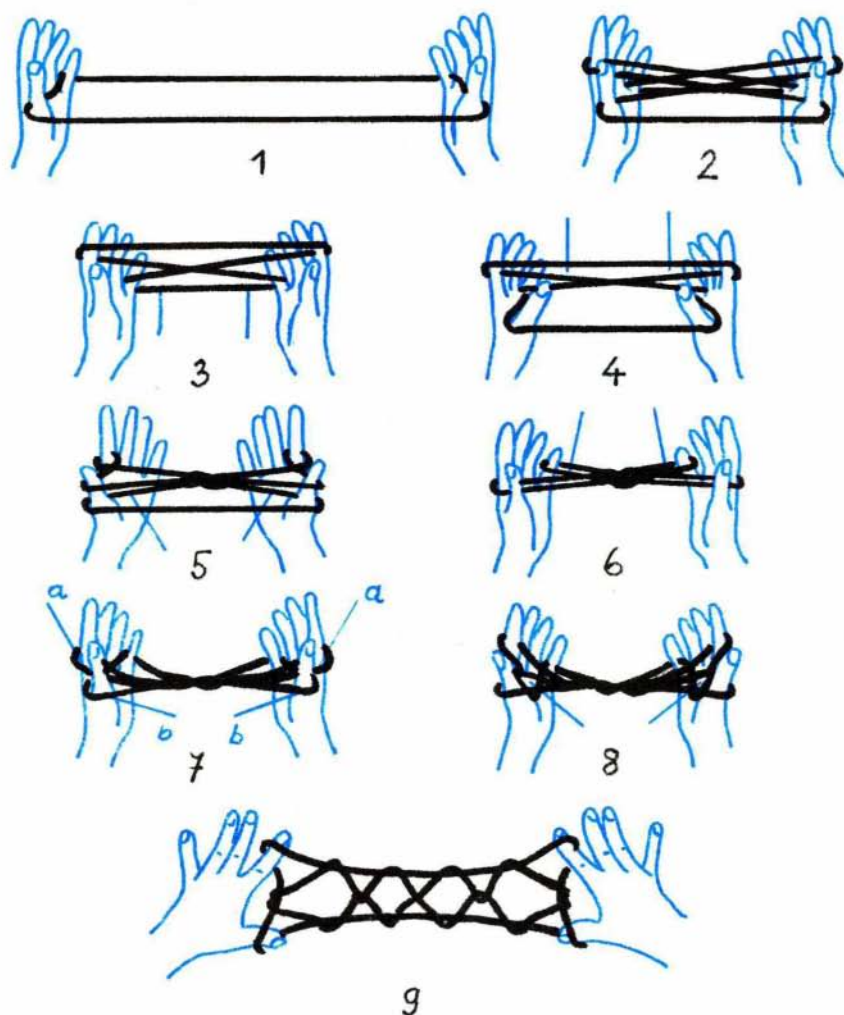
Modro zvezdo lahko vgnezdimo v večjo, slednjo v še večjo... Kolikokrat moramo ponoviti postopek vgnezdenja, če začnemo z modro zvezdo, da bo imel največji zvezdi očrtan krog vsaj tako velik premer, kot je premer naše galaksije, Rimske ceste ($2r_{galaksija} = 7,72 \cdot 10^{20}\text{m}$)?

Ciril Pezdir

JAKOBOVA LESTEV

Za Jakobovo lestev potrebujete približno dva metra voljne vrvice in nekaj spretnosti. Zvežite oba konca vrvice in poskusite! Da bosta izziv in končno zadovoljstvo večja, so na sliki posamezne poteze samo označene. Veliko zabave!

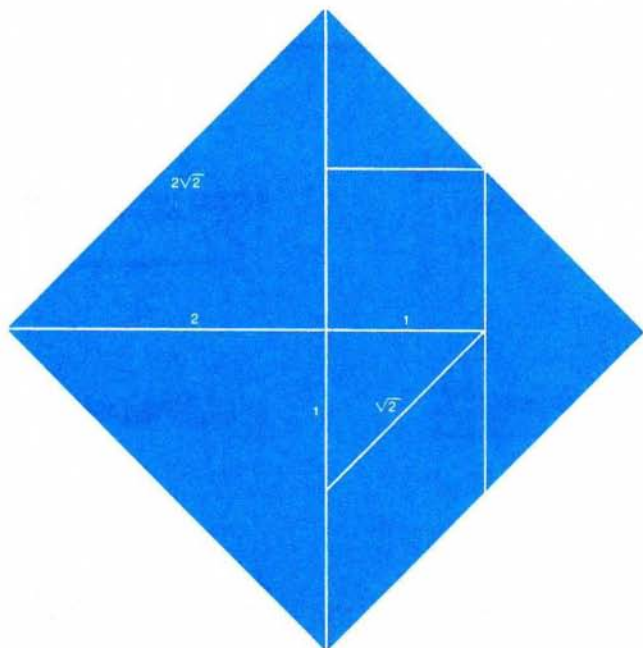
Izbrala Marija Vencelj



TANGRAM – ZGOLJ V OBRISIH

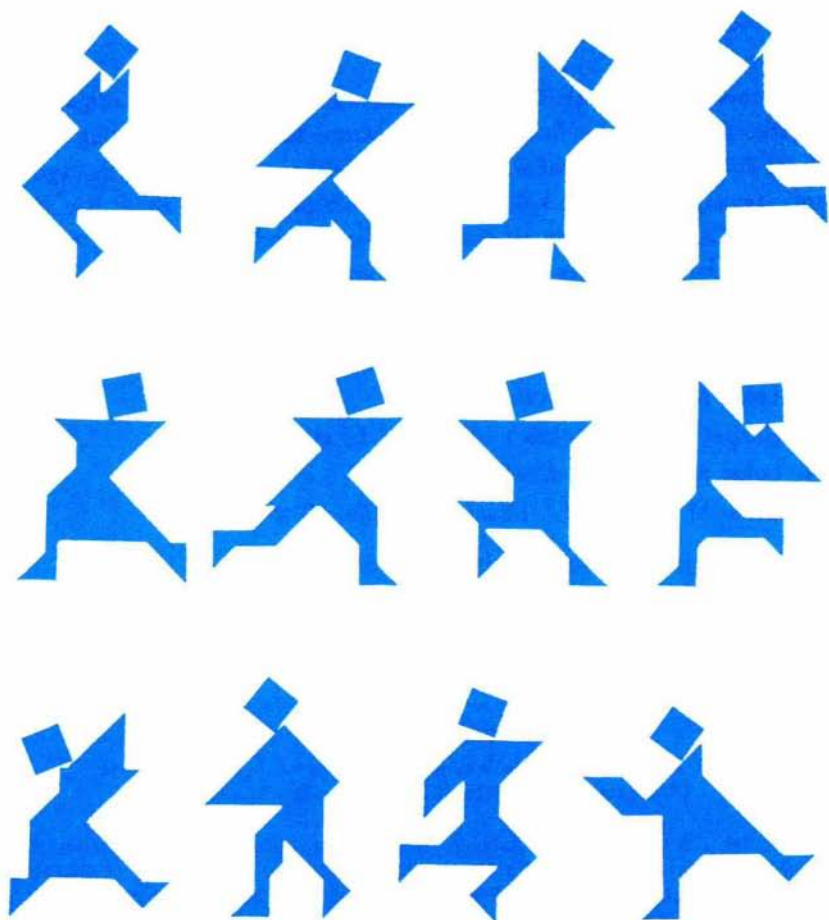
Ali poznate staro kitajsko igro *tangram*? No, karkoli že porečete – v letošnjem letniku Preseka boste imeli priložnost, da jo dodobra spoznate tudi po matematični plati.

Pa začnimo. Vse, kar potrebujete za igranje tangrama, je kos tršega kartona (še boljša je tanjša lesena vezana plošča) in obilica dobre volje. Iz izbranega materiala izdelajte sedmero tangramskih ploščic tako, kakor kaže spodnja slika.



Pravila igre tangram so zelo enostavna. Tangramske ploščice je treba sestavljati v tangramske like. Pri tem moramo vedno uporabiti vseh sedem ploščic. Seveda je igra dvodimenzionalna, nobena izmed tangramskih ploščic ne sme torej stati pokonci.

Še nekaj. Na prvi pogled je morda videti, da je smisel igre v samih tangramskih likih. Sam mislim, da temu še zdaleč ni tako. Poskusite igro ponotranjiti, jo sprejeti vase, ne bodite pozorni le na lik na papirju ali na mizi



pred seboj. Šele tedaj vam bo tangram v resnični užitek.

Tako, bodi dovolj za začetek. Raje kar veselo na delo.

Na naslednji strani vidite dvanajst "plesočih" tangramskih likov. Bi jih znali sami sestaviti?

Poglejte tudi tretjo stran ovitka - lep izziv, kajne?

Verjamem, da vas bo prej ali slej zamikalo, da bi sami poskušali sestaviti kak zanimiv tangramski lik. Morebiti vam pri tem uspe kar cela serija. Tedaj ne bodite sramežljivi. Pišite nam o svojih poskusih in predlogih. Velja?

Vilko Domajnko

RAČKOVA KNJIŽNICA

Kot dopolnitev računalniške programske opreme slovenskih srednjih šol je Društvo matematikov, fizikov in astronomov Slovenije na predlog Zavoda RS za šolstvo in ob finančni podpori Republiškega sekretariata za vzgojo in izobraževanje ter telesno kulturo doslej izdalo pet brošur v zbirki RAČKOVA KNJIŽNICA. Srednje šole so dobile po deset izvodov brezplačno, nadaljnje izvide pa lahko naročite pri društveni komisiji za tisk. Člani društva imajo 20% popust.

1. Klavžar S., *MS DOS. Mali priročnik operacijskega sistema*. 48 str.
2. Lokar M., *Turbo pascal*. 100 str.
3. Razpet M., *Sedi in piši z L^AT_EX-om*. 60 str.
4. Lokar M., *Začeti z dBASE IV*. 60 str.
5. Lokar M., *dBASE IV. Ukazi in funkcije*. 60 str.

V prodaji sta tudi naslednja dva priročnika:

Mihalič R., *PC TOOLS*. 124 str.

Mohar B., Lokar M., *dBASE III plus*. 128 str.

Ciril Velkovrh

PRESEK

list za mlade matematike, fizike, astronome in računalnikarje
19. letnik, šolsko leto 1991/92, številka 1, strani 1-64

UREDNIŠKI ODBOR: Vladimir Batagelj, Tanja Bečan (jezikovni pregled), Dušica Boben (stavljenje teksta), Vilko Domajnko, Darjo Felda (tekmovanja), Bojan Golli, Marjan Hribar, Martin Juvan (računalništvo), Sandi Klavžar, Edvard Kramar, Boris Lavrič, Andrej Likar (fizika), Matija Lokar, Franci Oblak, Peter Petek, Marko Petkovšek (glavni urednik), Pavla Ranzinger (astronomija), Marjan Smerke (svetovalec za fotografijo), Miha Štalec (risbe), Ciril Velkovrh (urednik, nove knjige, novice), Marija Vencelj (matematika, odgovorni urednik).

Dopise pošiljajte in list naročajte na naslov: Društvo matematikov, fizikov in astronomov Slovenije - Podružnica Ljubljana - Komisija za tisk, Presek, Jadranska c. 19, 61111 Ljubljana, p.p. 64, tel. (061) 265-061/53, št. žiro računa 50101-678-47233. Naročnino za šolsko leto 1991/92 bomo določili ob izidu te številke Preseka.

List sofinancirajo RKRDT, RKVITK in RKK

Natisnilo DELO — tiskarna

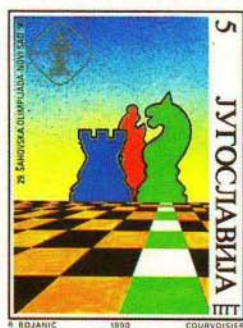
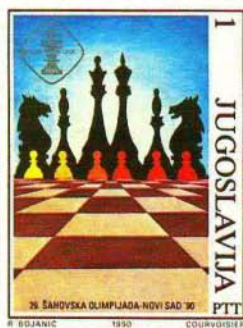
Tekst je postavljen z računalnikom SLIM 286, ALTECH, Ljubljana

© 1991 Društvo matematikov, fizikov in astronomov Slovenije — 1075



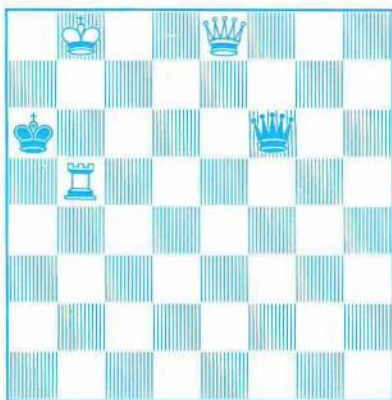
ŠAH

V Novem Sadu je bila v času od 10. - 25. novembra šahovska olimpiada. Ob tem so izšle tudi štiri lepe znamke, ki jih predstavljamo. Za ljubitelje šaha in računalništva pa še zanimiv šahovski problem.



ZMAGA?

V poziciji na diagramu je na potezi beli. Ima trdnjavo več. Vendar kako naj zmaga? Če postavi trdnjavo na d5, jo izgubi po 1. ... Db6 + 2.Kc8, Db7 + 3.Kd8, Dd5x. Na vsako drugo potezo s trdnjavo sledi 1. ... Dd8 + 2. Dd8 x pat. Tudi kraljeve ali damine poteze niso boljše. Beli se ne more izmotati iz večnega šaha, ne da bi izgubil trdnjavo ali dopustil pat. Remi!



Čisto drugo sliko dobimo, če je na potezi črni. V nujnici je. Karkoli potegne, ga beli "zadrigne". Prepričajte se sami.

Zanimivost zgornje pozicije je v tem, da je ni sestavil šahist problemist. Našel jo je računalnik. Predstavlja edini primer obojestranske nujnice v pozicijah z damo in trdnjavo proti dami. Seveda pri tem izvzamemo simetrične pozicije.

Peter Petek