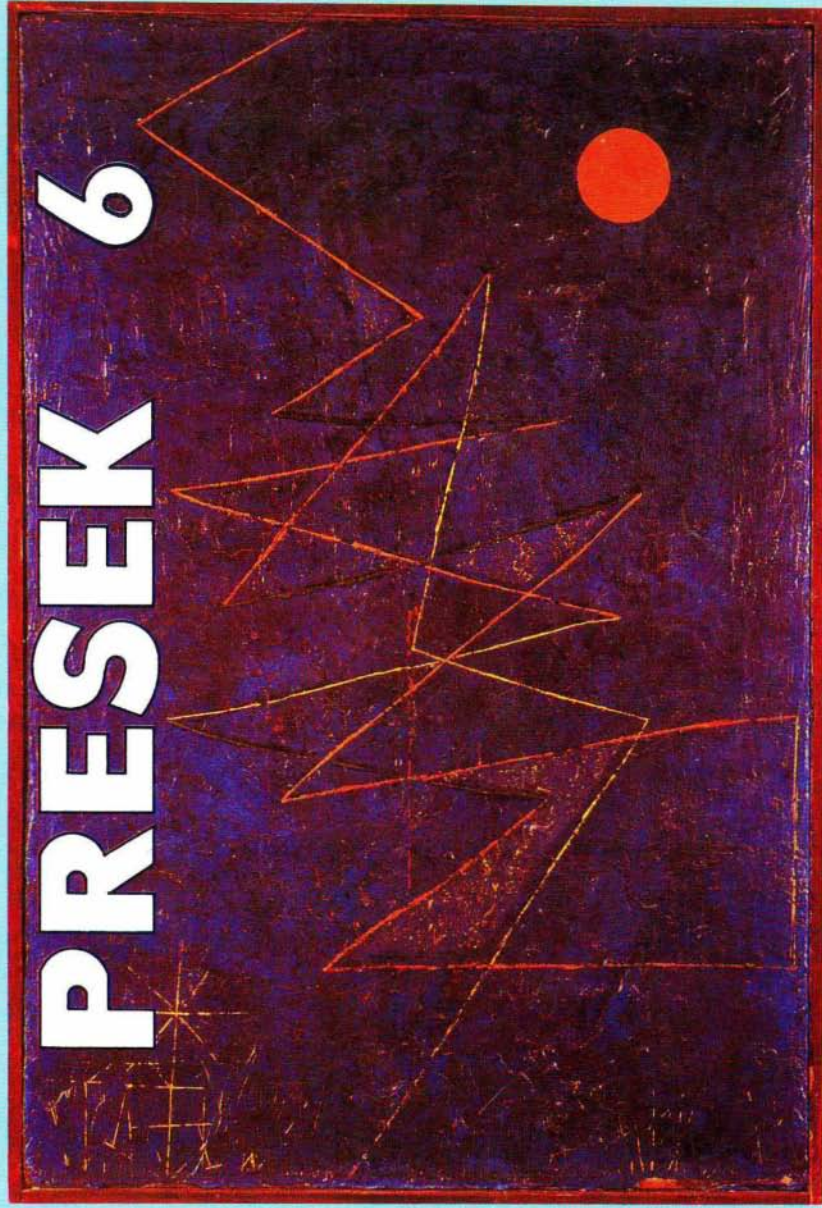


PRESEK 6



PRESEK - list za mlade matematike, fizike, astronome in računalnikarje
18. letnik, leto 1990/91, številka 6, strani 321-384

VSEBINA

MATEMATIKA	Magični kvadrati dimenzije $4n + 2$ (Borut Zalar) 322-327
	Giblivi romb - Odgovor str. 383 (Boris Lavrič) 328-330
	Kardanski prenos (Marija Vencelj) 332-334
FIZIKA	Izrek o ravnovesju navorov (Snežana Mutič, Janez Ferbar) . . 335
	Umor s Foucaultovim nihalom (Janez Strnad) 336-339
	Dirkanje z motorjem (Mitja Slavinec) 340-347
ASTRONOMIJA	Južni križ (Marijan Prosén) 348-350
PISMA BRALCEV	Zelooo težki nalogi (Boris Lavrič) 350
	Odprto pismo šolski javnosti (Dšica Boben) 351
RAČUNALNIŠTVO	Miss Preseka (Ciril Pezdir) 352-355
TEKMOVANJA	5. republiško tekmovanje iz logike - Rešitve str. 377
	(Izidor Hafner) 356-360
NOVICE	Balkanska poletna šola mladih matematikov na Cipru
	(Tomaž Cedilnik) 361
	Po svetovnem nogometnem prvenstvu (Janez Strnad) . . . 362-363
	Iz pogovora z Vladimirom I. Arnoldom
	(prev. in prir. Janez Strnad) 364- 367
	450-letnica rojstva matematikov Vieta in Ludolpha
	(Marija Vencelj) 368- 370
NOVE KNJIGE	J. Ferbar, B. Walpole, Veselje z znanostjo
	(Jožica Hribar) IV, 372- 373
NALOGE	Strela (Boris Lavrič) I, 321
	Motorist (Ciril Velkovrh) 327
	Fibonaccijevo tehtanje (Bojan Mohar) 331
	1991 - Rešitev str. 355 (Boris Lavrič) 351
	Zmaga (Peter Petek) IV, 373
	PRESEKOVA NADLOGA - Eksplozija krožnic
	(Vilko Domajnko) 374-377
REŠITVE NALOG	Kako dobimo vse točke na enotski krožnici -
	Popravek s str. 262 330
	Številski trapez - Rešitev s str. 139 (Milena Strnad) 334
	Kocka ima rdečke - Rešitev s str. 297 (Darjo Felda) 347
	Slikovna križanka "Kratka zgodovina fizike" -
	Rešitev s str. 288 (Marko Bokalič) 367
	Kje tiči vzrok - Rešitev s str. 257 (Marija Vencelj) 371
	Izbirno tekmovanje iz logike za osnovnošolce in srednješolce -
	Rešitev s str. 236 (Izidor Hafner) 380-383
	Obrat Eulerjevega izreka - Rešitev s str. 264 (Boris Lavrič) 384-III
NA OVITKU	Paul Klee, <i>Pisana strela</i> , olje na platnu, 1927.
	(Glej nalogo na str. 321) I

Ob koncu šolskega leta vam ponujamo nekaj počitniških nagradnih nalog, med katere sodi tudi tale:

STRELA

Dobro, a ne pretirano natančno, si oglejte sliko na naslovni strani Preseka. Opazili ste, da je strela, ki se bliska na sliki, sestavljena iz 18 daljic in seka sebe v 14 točkah. Zdaj pa k vprašanjem :

1. Kolikšno je največje število točk, v katerih iz 18 daljic sestavljena strela (lomljena črta) seka samo sebe ?
2. Prav tako vprašanje kot prvo, le da se mora v tem primeru konec strele ujemati z njenim začetkom.
3. Posplošitev prejšnjih vprašanj s pogojem, da strelo sestavlja n daljic.

Odgovore, lahko tudi delne, pošljite na naše uredništvo do konca letošnjega avgusta. Uspešno reševanje in prijetne počitnice.

Boris Lavrič

PRESEK

list za mlade matematike, fizike, astronome in računalnikarje
18. letnik, šolsko leto 1990/91, številka 6, strani 321– 384

UREDNIŠKI ODBOR: Vladimir Batagelj, Tanja Bečan (jezikovni pregled), Dušica Boben (pisma bralcev, stavljenje teksta), Vilko Domajnko, Darjo Felda (tekmovanja), Bojan Golli, Marjan Hribar, Sandi Klavžar (računalništvo), Damjan Kobal, Edvard Kramar (Presekova knjižnica), Boris Lavrič (matematika, odgovorni urednik), Andrej Likar (fizika), Matija Lokar, Franci Oblak, Peter Petek, Marko Petkovšek (glavni urednik), Pavla Ranzinger (astronomija), Marjan Smerke (svetovalec za fotografijo), Miha Štalec (risbe), Ciril Velkoverh (urednik, nove knjige, novice), Marija Vencelj.

Dopise pošiljajte in list naročajte na naslov: Društvo matematikov, fizikov in astronomov Slovenije - Podružnica Ljubljana - Komisija za tisk, Presek, Jadranska c. 19, 61111 Ljubljana, p.p. 64, tel. (061) 265-061/53, št. žiro računa 50101-678-47233. Naročnina za šolsko leto 1990/91, vplačana po 1.1.1991, je za posamezne naročnike 150.-din, za skupinska naročila šol 120.- din, posamezna številka 30.- din (24.- din).

List sofinancirajo RKRDT, RKVITK in RKK

Ofset tisk Časopisno in grafično podjetje DELO, Ljubljana

Tekst je postavljen z računalnikom SLIM 286, ALTECH, Ljubljana

© 1991 Društvo matematikov, fizikov in astronomov Slovenije – 1068

MATEMATIKA

MAGIČNI KVADRATI DIMENZIJE $4n+2$

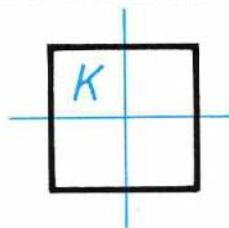
Zvesti bralci Preseka se mogoče spomnijo, da sem pred nekaj leti že dvakrat pisal, kako sestavljamo magične kvadrate. V prvem članku sem pokazal, kako sestavimo magične kvadrate, ki imajo dimenzije 4, 8, 12, 16, ..., v drugem pa, kako sestavimo magične kvadrate lihe dimenzije. Ostali so še magični kvadrati 6, 10, 14, ... Ta števila lahko napišemo v obliki $4n+2$, kjer je $n = 1, 2, \dots$ poljubno naravno število.

Magični kvadrat je kvadratna tabela dimenzije n , v katero vpišemo števila od 1 do n^2 (v vsako polje tabele eno številko in nobene številke ne smemo zapisati dvakrat) tako, da bo vsota v vseh vrsticah, vseh stolpcih in obeh glavnih diagonalah enaka. Primera za $n = 3$ in $n = 4$ sta naslednja:

2	7	6
9	5	1
4	3	8

1	15	14	4
12	6	7	9
8	10	11	5
13	3	2	16

V prvem primeru je vsota v vsaki vrstici 15, v drugem pa 34. Vzemimo zdaj poljuben kvadrat dimenzije $4n+2$ in ga razdelimo na štiri enake kvadrate dimenzije $2n+1$ z dvema simetralama, kot kaže slika.



Polja v kvadratu bomo označevali podobno kot šahisti, le da bomo uporabljali dve številki namesto ene črke in ene številke. Polja v zgornjem levem kotu bomo torej označili s parom števil $(1,1)$, polja v zgornjem desnem kotu s parom števil $(1,4n+2)$, polje v spodnjem levem kotu s številoma $(4n+2, 1)$ in polje v spodnjem desnem kotu pa s številoma $(4n+2, 4n+2)$.

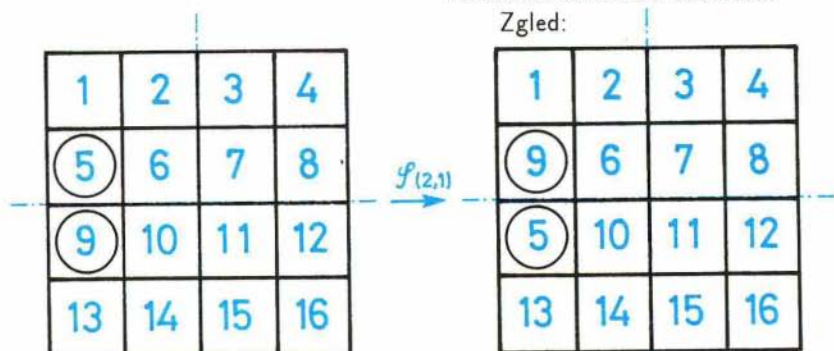
Označimo z $A(i, j)$ tisto število, ki ga zapišemo v polje označeno s parom števil (i, j) . Za začetek bomo števila razporedili kar po vrsti. Če bi bil na primer kvadrat dimenzije 6, bi števila razporedili takole:

1	2	3	4	5	6
7	8	9	10	11	12
13	14	15	16	17	18
19	20	21	22	23	24
25	26	27	28	29	30
31	32	33	34	35	36

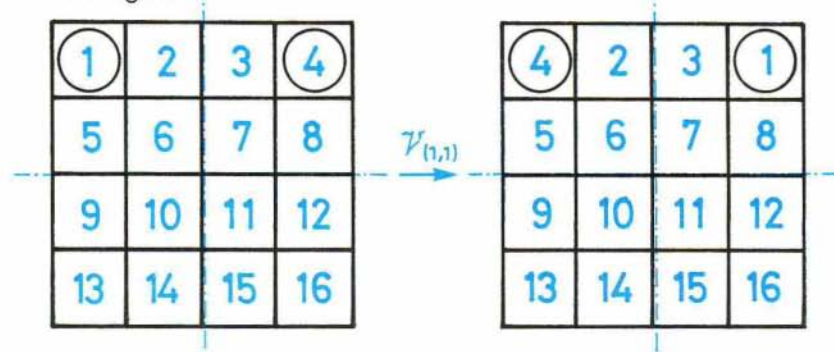
In zdaj prva naloga za bralce. Prepričajte se, da pri taki zaporedni razporeditvi velja formula $A(i, j) = (4n + 2)(i - 1) + j$.

Za konstrukcijo magičnega kvadrata potrebujemo tri operacije, ki jih bomo zdaj opisali. Na tretji sliki je s črko K označena zgornja leva četrtinka našega kvadrata. Operacije bomo definirali na poljih kvadrata K . Operacija $\mathcal{S}$ zamenja števili, ki ležita v danem polju in polju, ki leži v isti vrstici in je simetrično z danim poljem glede na vertikalno simetralo kvadrata.

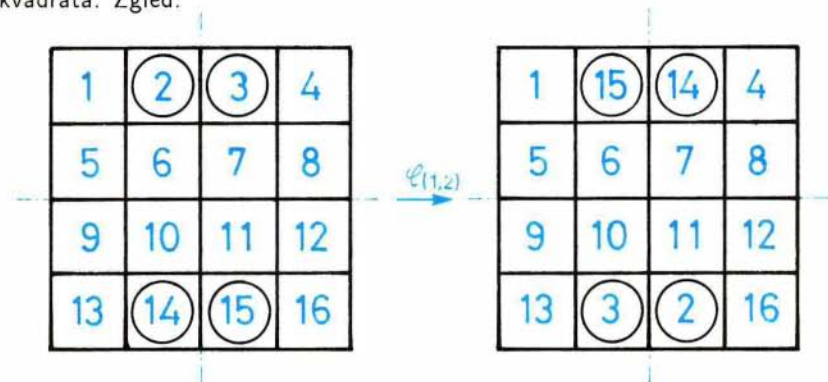
Zgled:



Operacija $\mathcal{V}$ zamenja števili, ki ležita v danem polju in polju, ki leži v istem stolpcu in je simetrično z danim poljem glede na horizontalno simetralo kvadrata. Zgled:



Operacija $\mathcal{C}$ zamenja števili, ki ležita v danem polju in polju, ki leži simetrično z danim poljem glede na središče kvadrata. Zamenja tudi obe števili, ki ležita v poljih, ki sta z danim poljem simetrični glede na obe simetrali kvadrata. Zgled:



Zdaj pa si izberimo v kvadratu K tri skupine polj. V prvi skupini naj bodo polja:

$(1, 1), (1, 2), \dots, (1, n)$ v prvi vrsti

$(2, 2), (2, 3), \dots, (2, n+1)$ v drugi vrsti

...

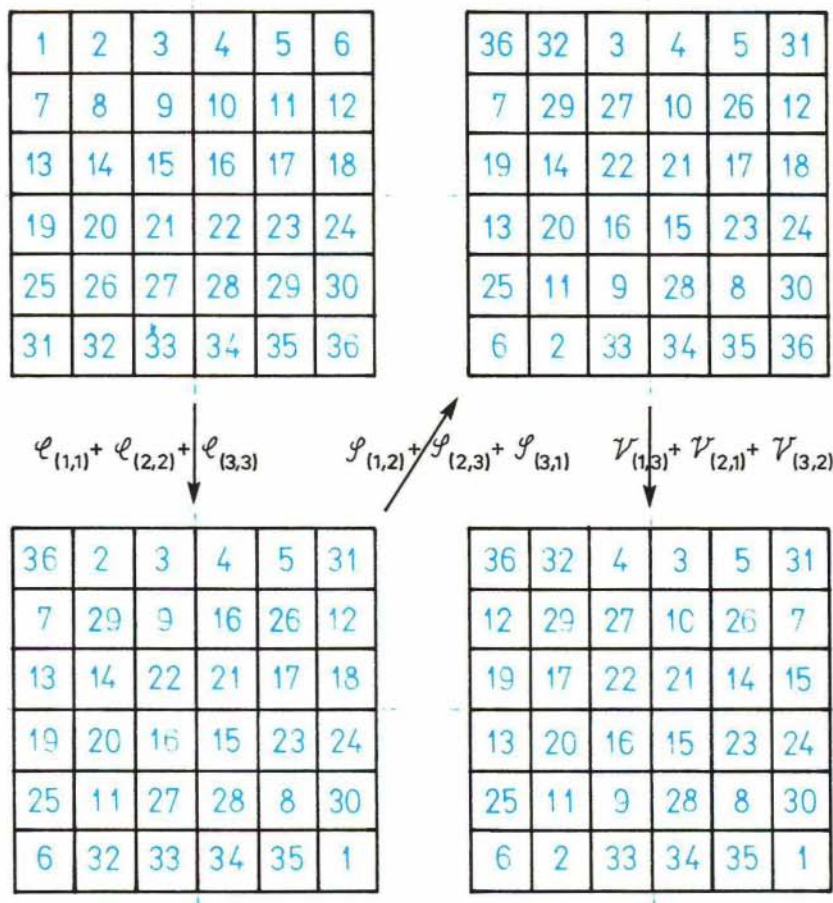
$(2n+1, 2n+1), (2n+1, \overline{2n+2}), \dots, (2n+1, \overline{3n+1})$ v $(2n+1)$ -vi vrsti.

V vsaki vrsti kvadrata K je točno n polj. Toda polje $(2n+1, 2n+2)$ sploh ne leži v kvadratu K , upravičeno porečete. Zato se dogovorimo, da števila, ki presegajo $2n+1$, zmanjšamo za $2n+1$ in to označimo z znakom nad številom. Torej je $\overline{2n+2} = 1, \overline{2n+3} = 2, \overline{4n+2} = 2n+1, \overline{4n+3} = 1$ in tako naprej.

V drugi skupini naj bodo naslednja polja: $(1, n+1), (2, n+2), \dots, (2n+1, \overline{3n+1})$. V vsaki vrstici in vsakem stolpcu kvadrata K je točno eno polje druge skupine. V tretjo skupino pa vzemimo naslednja polja: $(1, n+2), (2, n+3), \dots, (2n+1, \overline{3n+2})$. Spet je v vsaki vrstici in vsakem stolpcu kvadrata K točno eno polje te skupine.

Zdaj pa že lahko opišemo sestavljanje magičnega kvadrata. Na vseh poljih 1. skupine uporabim operacijo $\mathcal{C}$, na vseh poljih 2. skupine uporabim operacijo $\mathcal{S}$, na poljih 3. skupine uporabim operacijo $\mathcal{V}$, ostala polja pa pustim nespremenjena. Kar dobim na koncu je magični kvadrat.

Naredimo še zgled za $n = 1$ oziroma za kvadrat 6×6 . V prvo skupino bomo dali polja: $(1, 1), (2, 2), (3, 3)$. V drugo skupino bomo dali polja: $(1, 2), (2, 3), (3, 4) = (3, 1)$. V tretjo skupino pa bomo dali polja: $(1, 3), (2, 4) = (2, 1), (3, 5) = (3, 2)$. Potek konstrukcije je zdaj naslednji:



Na koncu smo dobili magični kvadrat, v kar se hitro lahko prepričate, če seštejete števila po vrsticah, stolpcih in diagonalah. Vsota v tem kvadratu je 111.

Še domača naloga za računalnikarje. Pobrsajte po starih Presekih in poiščite še oba stara članka o magičnih kvadratih in sestavite program, ki bo sprejel podatek n in izrisal magični kvadrat velikosti $n \times n$.

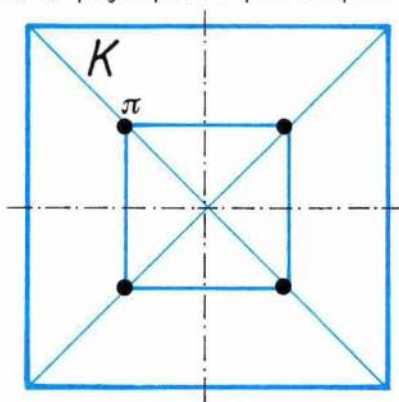
Za matematike pa še dokaz, da je naš postopek res pravilen. Osnova naših razmišljanj bo znana formula za vsoto $1 + 2 + \dots + k = \frac{k(k+1)}{2}$. V našem primeru je torej vsota vseh števil v kvadratu enaka $1 + 2 + \dots + (4n+2)^2 = (2n+1)(4n+2)((4n+2)^2 + 1)$. Ker imamo $4n+2$ vrstic, mora biti vsota v posamezni vrstici enaka $S = (2n+1)((4n+2)^2 + 1)$.

1. korak. Nobeno od polj iz druge in tretje skupine ne leži na glavni diagonalni velikega kvadrata.

Dokaz. Polja (i, j) na tej diagonalni so karakterizirana z lastnostjo $i = j$, oziroma obe komponenti morata biti enaki. Polja 2. skupine imajo koordinate $(i, n+2)$ za nek i iz množice $1, 2, \dots, 2n+1$. Če bi katero izmed teh polj ležalo na diagonalni, bi po definiciji operacije $-$ dobili $i + (2n+1) = n + i$ oziroma $n+1 = 0$, kar je seveda nesmisel. Povsem podobno vidimo, da tudi števila tretje skupine ne morejo biti na diagonalni.

2. korak. Diagonalni imata pravo vsoto.

Dokaz. Vsako polje na eni izmed diagonal je oglišče kvadrata, ki ima vsa oglišča na diagonalah (glej sliko) in natanko eno od teh polj leži v kvadratu K . Zdaj imamo samo dve možnosti: ali to polje spada v prvo skupino ali pa sploh v nobeno izmed treh skupin. V prvem primeru operacija zamenja ta števila med seboj tako, da še vedno vsa ostanejo na isti diagonalni kot prej. V drugem primeru seveda ostanejo na mestu. Torej nobeno število ne zamenja diagonale, zato sta v dobljenem kvadratu vsoti v obeh diagonalah isti, kot sta bili v začetni postavitvi. Da pa sta ti vsoti pravilni, se za vajo prepričajte sami.



3. korak. Vrstice imajo pravo vsoto.

Označimo z $V(k)$ vsoto vseh števil v k -ti vrstici. Na začetku je bila ta vsota enaka

$$\begin{aligned} & V(k) + A(k, 1) + A(k, 2) + \dots + A(k, 4n+2) = \\ & = (4n+2)(k-1) + 1 + (4n+2)(k-1) + 2 + \dots + (4n+2)(k-1) + 4n+2 = \\ & = (4n+2)^2(k-1) + 1 + 2 + \dots + (4n+2) = (4n+2)^2(k-1) + (2n+1)(4n+3) \end{aligned}$$

Ugotoviti je potrebno, kako se je spremenil $V(k)$ po uporabi operacij $\mathcal{V}$, $\mathcal{S}$ in $\mathcal{C}$. Z $V'(k)$ označimo novo vsoto. V k -ti vrstici je eno polje 2. skupine in eno polje 3. skupine. Ko uporabimo operacijo $\mathcal{V}$, se vsota v vrstici ne spremeni. Ko uporabimo operacijo $\mathcal{S}$, pa zamenjamo število v polju (k, i) s številom v polju $(4n+3-k, i)$. Razlika znaša $A(4n+3-k, i) - A(k, i) = (4n+2)(4n+2-k) + i - (4n+2)(k-1) - i = (4n+2)(4n+2-k-k+1) = (4n+2)(4n+3-2k)$.

V k -ti vrstici je tudi n števil 1. skupine. Pri teh uporabimo operacijo $\mathcal{C}$ in v vrstici se zgodita kar dve spremembi: Zamenjata se števili v poljih (k, i) in $(4n+3-k, 4n+3-i)$ ter števili v poljih $(k, 4n+3-i)$ in $(4n+3-k, i)$. Razlika po eni uporabi operacije $\mathcal{C}$ znaša: $A(4n+3-k, 4n+3-i) - A(k, i) + A(4n+3-k, i) - A(k, 4n+3-i) = 2(4n+2)(4n+3-2k)$. Skupna razlika med vsoto V' , ki jo dobimo v k -ti vrstici po uporabi vseh treh operacij in vsoto V , ki je bila v k -ti vrstici pri začetni postavitvi, je torej $(2n+1)(4n+2)(4n+3-2k)$.

$$\begin{aligned} V'(k) &= V(k) + \text{razlika} = (4n+2)^2(k-1) + (2n+1)(4n+3) + \\ &+ (2n+1)(4n+2)(4n+3-2k) = (4n+2)(2n+1)(2k-2+4n+3-2k) + \\ &+ (2n+1)(4n+3) = (2n+1)(4n+2)(4n+1) + 4n+3 = \\ &= (2n+1)(4n+2)^2 + 1 = S \end{aligned}$$

4. korak. Stolpci imajo pravo vsoto.

Ta korak dokažemo povsem podobno kot prejšnji korak. Poskusite sami.

Borut Zalar

MOTORIST

Jure je imel dva prijatelja. Kadar so šli na 8 km oddaljeno kopališče, je s svojim motorjem odpeljal tja in nazaj vsakega posebej. Koliko kilometrov je moral prevoziti tak dan?

Ciril Velkovrh

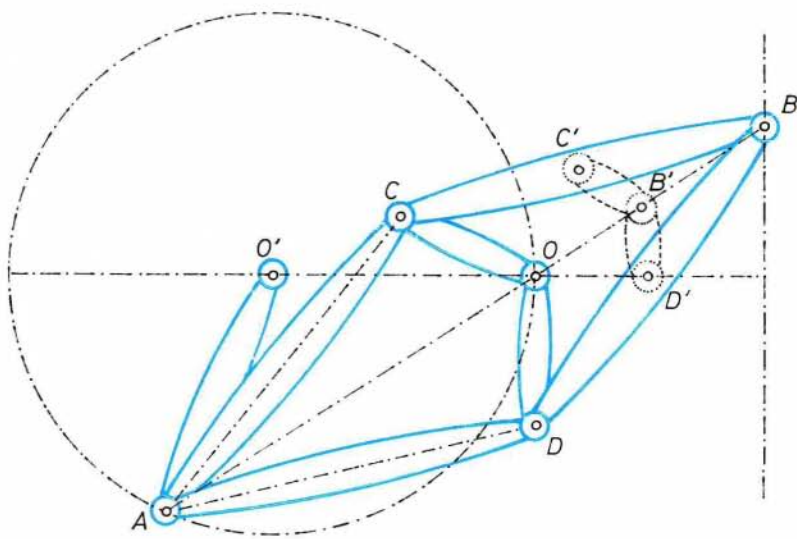
Odgovor: 48 km. Zakaj ne 64 km?

GIBLJIVI ROMB

Dandanes kar mrgoli revij, celo naravoslovnih, včasih pa ni bilo tako. Med redkimi revijami iz fizike, ki so izhajale že v prejšnjem stoletju, sta nemški list *Fortschritte der Physik* in francoska revija *Journal de Physique*. V sedemdesetih letih 19. stoletja sta obe reviji pisali o mehanski napravi, ki pretvarja krožno gibanje v premo. Poglejmo, kaj je o tem napisal avtor *Peaucellier* v članku, ki ga je objavil *Journal de Physique* leta 1873. Pri tem se bomo oprli na prevod tega članka iz knjige D.E. Smitha *A source book in mathematics*. Takole piše:

Znano je, da je v praktični mehaniki pogosto treba krožno gibanje pretvoriti v nepretrgano premo gibanje. Watt⁽¹⁾ je to dosegel z veliko stopnjo popolnosti. Prenos, ki ga je izumil, omogoča zelo tekoče gibanje brez znatnih sunkov in trenja. Zaradi določenih okoliščin pa ima Wattov izum resne pomanjkljivosti.⁽²⁾

Rešitev, ki jo predlagamo, je posledica geometrijskega načela, dobljenega pri iskanju rešitve problema, ki si ga je Watt postavil pri snovanju svojega paralelograma. To načelo daje eksaktno rešitev problema. Leta 1867 je bilo posredovano društvu *Société Philomatique* v Parizu. Neodvisno, a kasneje, ga je odkril tudi ruski matematik *Lipkin*.⁽³⁾ Sledi opis rešitve problema:



Zamislimo si napravo, sestavljeno iz šestih spojenih premičnih prečk $AC = CB = BD = AD, OC = OD$, s fiksnim središčem vrtenja O . Če krajišče A opiše krožnico, ki gre skozi O (kar lahko dosežemo s tem, da ga spojimo s prečko $O'A$) in ima polmer OO' , potem nasprotno krajišče B opiše daljico, pravokotno na OO' in lahko vodi drog bata.

Med drugim lahko opazimo, da velja naslednje: Če na členih BC, BD izberemo enaki dolžini BC', BD' in spojimo C', D' s členoma $C'B', D'B'$, potem točka B' opiše daljico, ki je vzporedna tisti, ki jo opiše B , saj velja $BC' : B'C' = BC : OC$.⁽⁴⁾

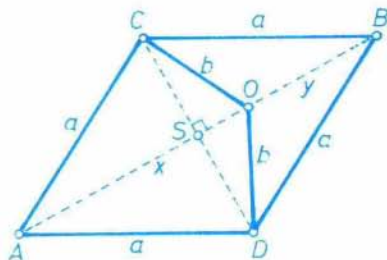
Peaucellierjev članek se s tem konča, naš pa šele zares začne. Opis obravnavane naprave nam skupaj z risbo da točno sliko o njej, vendar ne pojasni ne osnovnega geometrijskega načela njenega delovanja ne lege središča O' krožnice, po kateri se giblje krajišče A . Premostimo zdaj obe težavi:

Označimo z a dolžino prečk romba $ADBC$, z b pa dolžino ročic OC in OD , predpostavimo, da je $a > b$, in poiščimo zvezo med dolžinama $x = |OA|$ in $y = |OB|$.

Diagonali AB in CD se sekata pod pravim kotom v točki S . Točka O očitno leži na AB . Po Pitagorovem izreku je tedaj

$$a^2 = |SC|^2 + |SB|^2$$

$$b^2 = |SC|^2 + |SO|^2$$



in od tod

$$a^2 - b^2 = |SB|^2 - |SO|^2 = (|SB| + |SO|)(|SB| - |SO|) = xy.$$

Če sta torej konca A in B oddaljena od središča vrtenja O za x , oziroma y , potem velja

$$xy = a^2 - b^2 \quad (1)$$

Izberimo zdaj točko O' na razdalji $(a + b)/2$ od O , načrtajmo krožnico k s središčem O' in polmerom $O'O$ in nanjo postavimo krajišče A gibljivega paralelograma $ADBC$. Nato skozi točko B položimo pravokotnico p na

(1) James Watt (1736 - 1819) je britanski fizik in izumitelj, znan po izboljšavi in uporabi parnega stroja. Po njem se imenuje merska enota za moč 1 W.

(2) Izpuščen je odstavek, ki pojasnjuje pomanjkljivosti Wattovega izuma.

(3) Opis naprave je Lipkin (1846 - 1876) objavil v Fortschritte der Physik, 1871.

(4) Avtor tu privzame z risbe podatek $B'C' \parallel OC, B'D' \parallel OD$.

premico $O'O$. Slednja naj seka k še v točki E , p pa v točki F .

Iz slike vidimo, da sta pravokotna trikotnika OAE in OBF podobna, zato velja

$$|OE| : |OA| = |OB| : |OF|$$

To prepišemo v obliki

$$(a+b) : x = y : |OF|$$

in s pomočjo relacije (1) dobimo razdaljo

$$|OF| = xy/(a+b) = (a^2 - b^2)/(a+b) = a - b$$

Premica p torej ni odvisna od lege točke A na krožnici k . To pomeni, da pri drsenju točke A po krožnici k točka B drsi po premici p , prav to pa smo želeli dokazati.

Potrpežljivega bralca vabimo, da določi možne lege točke A na krožnici k in točke B na premici p . Ogleda naj si še možnost $a < b$. Premislek lahko preveri na strani 383.

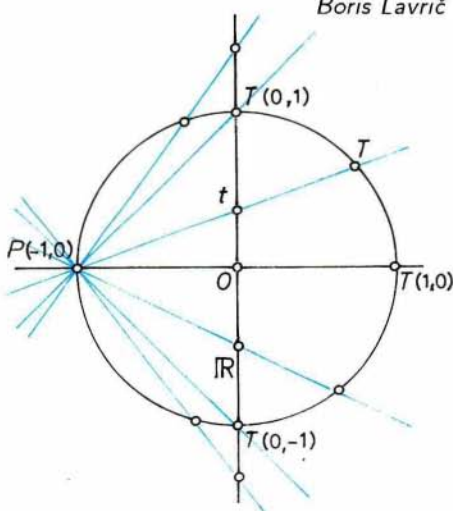
Opomba. O Peaucellierjevem rombu je pisal tudi I. Pucelj v članku Inverzor, Presek IX/3.

Boris Lavrič

KAKO DOBIMO VSE TOČKE NA ENOTSKI KROŽNICI – Popravek k str. 262

V članku z zgornjim naslovom v 5. številki Preseka ste gotovo že opazili napako pri sliki 3: njen modri in črni del sta narobe sestavljena. Tu objavljamo pravilno sliko, da z njo lahko nadomestite napačno.

Urednik



NAGRADNA NALOGA

FIBONACCIJEVO TEHTANJE

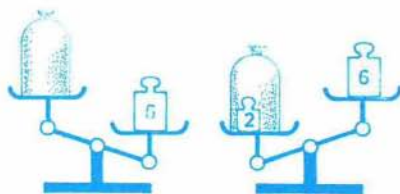
V 5. številki letošnjega letnika (Presek **18** (1990/91), str. 290- 293) je Presek objavil Malo zbirko nalog L. Fibonaccija. V njej najdemo naslednjo nalogo:

Katerih pet uteži je treba izbrati, da bi se dalo z njihovo pomočjo tehtati katerokoli breme, ki ni težje od 30 kilogramov in čigar težo merimo z naravnim številom? Tudi uteži naj tehtajo celo število kilogramov. Tehtaš tako, da na eno stran tehtnice postavljaš uteži, na drugo stran pa breme.

Zanimivo je, da se da nalogo rešiti že s uporabo štirih uteži. Da se pokazati, da je tedaj 30 kilogramov največji možni obseg tehtanja. Bralcem zastavljam naslednje naloge:

1. Opiši, kako lahko tehtamo do 30 kilogramov s štirimi uteži.
2. Kakšen največji razpon lahko dosežemo z uporabo petih uteži?
3. Če je pri tehtanju dovoljeno tudi postavljanje uteži na stran bremena, tedaj z enakim številom uteži lahko dosežemo večje območje tehtanja. Seveda morajo imeti uteži sedaj drugačne teže kot v zgornjem primeru. Kako lahko z uporabo samo treh uteži tehtamo vsako celoštevilsko težo med 1 in 26 kilogrami? Kakšne teže morajo imeti uteži?
4. Verjetno bo pretežka naloga ugotoviti, koliko največ lahko napravimo z dano količino uteži, na primer s štirimi ali petimi. Poskusi pa dokazati, da z uporabo dveh uteži lahko tehtamo le v območju od enega do 8 kilogramov, s tremi pa od enega do 26.

Kot namig pri iskanju rešitev naj vam povemo, da se da z utežema, težkima 2 in 6 kilogramov, tehtati v območju od 1 do 8 kilogramov. Na primer, da je breme težko 5 kilogramov, ugotovimo tako, da najprej vidimo, da je lažje od 6 kilogramov, zatem pa, da je težje od štirih. Slednjo težo ugotavljamo tako, da k bremenu dodamo utež za 2 kilografa, nasproti pa postavimo težjo utež (glej sliko).



Levo: Breme je lažje od 6 kg.

Desno: Breme je težje od 4 kg.

Najpopolnejše rešitve bomo nagradili.

Bojan Mohar

KARDANSKI PRENOS

Pojem kardanskega prenosa srečamo v mehaniki, kadar gre za spremembo krožnega gibanja v premo nihanje.

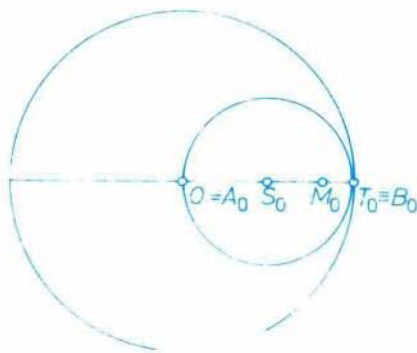
Z matematičnega vidika gre za delni problem naslednje naloge, ki jo je že v 16. stoletju zastavil italijanski matematik *Geronimo Cardano*:

Krog s polmerom r se kotali po notranji strani krožnice s polmerom $2r$. Kakšno pot opiše pri tem izbrana točka kroga?

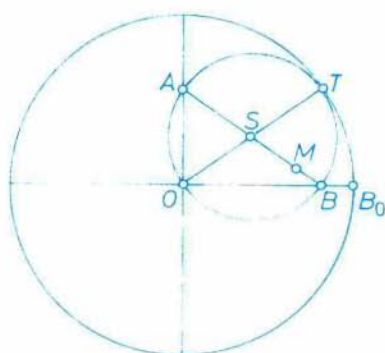
Poskusimo odgovoriti na to vprašanje!

Ker je polmer malega kroga dvakrat manjši od polmera krožnice, po kateri se kotali, se po polnem obhodu vsaka njegova točka vrne v začetni položaj. Nato nadaljuje pot po isti progi kot pri prejšnjem obhodu. Torej moramo poiskati le zaključeno krivuljo, ki jo označena točka opiše, ko se mali krog enkrat zakotali po notranjosti velike krožnice.

Najprej se domenimo za nekaj oznak. Naj bo O središče mirujoče krožnice, S središče kotalečega se kroga in M označena točka, katere tir bomo zasledovali. Nadalje naj bosta A in B krajišči tistega premera malega kroga, ki nosi točko M , ter T dotikališče obeh krogov (slika 2).



Slika 1.



Slika 2.

Začetni položaj izberimo kot na sliki 1, kjer leži točka M na premici skozi središči obeh krogov. Začetne lege posameznih točk smo označili z indeksom nič. Najprej si bomo ogledali, kako se pri kotaljenju spreminja lega premera AB .

Očitno je (slika 2), da sta loka $\widehat{B_0T}$ in $\widehat{BT}$ enako dolga, ker si pri

kotaljenju ustrezata. Prvi pripada krožnici s polmerom $2r$, drugi krožnici s polmerom r . Za ustrezna središča kota zato velja

$$\sphericalangle TOB_0 = \frac{1}{2} \sphericalangle TSB \quad (1)$$

Toda središče O velike krožnice leži v vsakem trenutku na robu malega kroga. Za obodni kot z vrhom v O in krakoma skozi T in B zato velja ena od naslednjih zvez s središčnim kotom:

$$\sphericalangle TOB = \frac{1}{2} \sphericalangle TSB$$

ali (ta primer si narišite sami)

$$\sphericalangle TOB = \pi - \frac{1}{2} \sphericalangle TSB$$

Od tod zaradi (1) sledi

$$\sphericalangle TOB = \sphericalangle TOB_0$$

ali

$$\sphericalangle TOB = \pi - \sphericalangle TOB_0$$

Iz obeh zvez sledi isti sklep: točka B leži na premici, ki poteka skozi točko O in skozi B_0 , začetno lego točke B . Povejmo to še drugače: Eno krajišče tistega premera kotalečega se kroga, ki nosi označeno točko M , se ves čas kotaljenja giblje vzdolž istega premera velike krožnice, tistega, ki ga določa začetna točka B_0 . Očitno opiše ves premer v vsaki smeri po enkrat, ko se mali krog enkrat zakotali po notranjosti velike krožnice (slika 2). To gibanje točke B je v mehaniki uporabljeno kot osnovni princip za pretvorbo krožnega gibanja v premo nihanje.

In kako se pri tem giblje točka A , to je drugo krajišče opazovanega premera? Kot $\sphericalangle AOB$ je kot obodni kot nad premerom AB pravi, torej se točka A giblje ves čas po tistem premeru velike krožnice, ki je pravokoten na premer, po katerem se giblje krajišče B . Ko se torej krog kotali po notranji strani krožnice z dvakrat večjim polmerom, se premer AB giblje tako, da njegovi krajišči drsita po dveh medsebojno pravokotnih premerih velike krožnice.

Končno poglejmo, kako se pri tem giblje točka M ? Odgovor na to vprašanje najdemo v članku *Konstrukcija elipse s trakom papirja* v 4. številki Preseka. Tam zremo: če od treh fiksnih točk dane premice dve drsita vzdolž dveh med seboj pravokotnih premic, opiše tretja točka elipso s središčem v presečišču pravokotnih premic. Temena te elipse ležijo na danih pravokotnih premicah.

Očitno točke A, B, M izpolnjujejo pogoje za uporabo te trditve. Označena točka M torej med kotaljenjem kroga opiše elipso s središčem v središču velike krožnice. Polosi elipse sta enaki $\overline{AM}$ oziroma $\overline{BM}$. V primerih, ko je $M = A$ ali $M = B$, je elipsa reducirana v daljico (premer velike krožnice), ki jo točka M dvakrat opiše, ko se mali krog enkrat zakotali po večji krožnici.

Marija Vencelj

ŠTEVILSKI TRAPEZ - Rešitev s strani 139

1. Sestavimo trapez s sedmimi vrstami:

		2		1		
		2		3		1
		2		5		4
		2		7		9
		2		9		16
		2		11		25
		2		13		36

2. Števila prve vzporednice kraka dvojic 1, 3, 5, 7, 9, ... sestavljajo zaporedje vseh lihih števil. Splošni člen tega zaporedja je $(2n-1)$, za $n \in \mathbb{N}$. Števila druge vzporednice kraka dvojic 1, 4, 9, 16, 25, 36, ... so kvadrati naravnih števil. Lahko jih zapišemo tudi kot delne vsote prejšnjega zaporedja, na primer: 1, $(1+3)$, $(1+3+5)$, $(1+3+5+7)$, ... Števila tretje vzporednice kraka dvojic 1, 5, 14, 30, 55, 91, ... zapišemo kot 1^2 , (1^2+2^2) , $(1^2+2^2+3^2)$, ... Podobno velja za vzporednice kraka enic. Na prvi vzporednici so števila 2, 3, 4, 5, 6, 7, ... na vseh drugih vzporednicah pa delne vsote členov zaporedja predhodne vzporednice.

3. Vsote števil po posameznih vrsticah so 3, 6, 12, 24, 48, 96, ... Vsa števila so deljiva s 3 in sestavljajo geometrijsko zaporedje s prvim členom 3 in kvocientom 2.

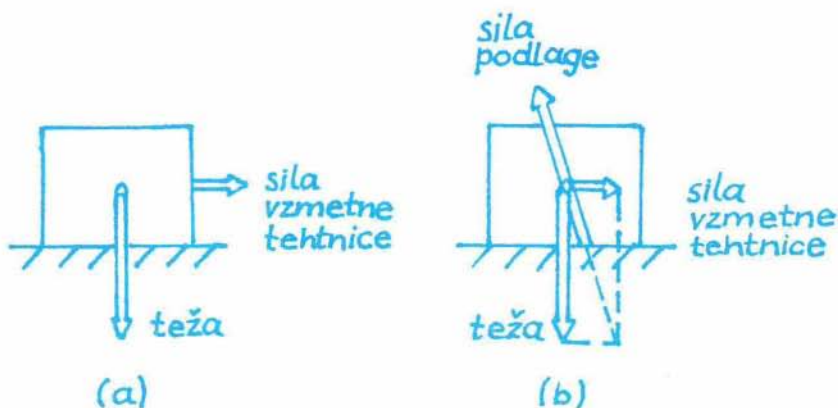
Milena Strnad

IZREK O RAVNOVESJU NAVOROV

V prejšnji številki Preseka je v članku *Zakaj se lahko drsamo in smučamo* slika 1 na strani 195 napačna. Vsota vseh zunanjih sil je nič, vsota vseh zunanjih navorov pa ne, čeprav bi morala biti.

Vsem nevšečnostim bi se ognili, če bi bila vzmetna tehtnica pripeta na dnu. Po sliki 1a pa vidimo, da na telo delujeta dvojici sil z navorom in skušata zavrteti telo v smeri urinega kazalca. Nič na boljšem nismo, če prestavimo pravokotno komponento sile podlage na nosilko sile teže - znebimo se le njunega navora, še vedno pa ostane navor druge dvojice sil. Potrebno je drugače narisati silo podlage.

Predlagava rešitev, ki jo kažeta sliki. Najprej narišemo silo teže v težišču in silo vzmetne tehtnice v njenem prijemališču, ne pa nižje, kot je pomotoma narisano v članku (slika 1a). Navor sile ostane namreč nespremenjen le, če prijemališče sile premaknemo po njeni nosilki. Nato določimo rezultanto obeh sil. Če naj bo vsota vseh zunanjih sil in navorov enaka nič, mora biti sila podlage nasprotno enaka rezultanti in mora ležati na njeni nosilki (slika 1b). V tem primeru telo miruje ali enakomerno drsi, kot smo predvidevali v začetku.



Slika 1. Telo miruje ali enakomerno drsi po vodoravni podlagi.

UMOR S FOUCAULTOVIM NIHALOM

"Ob pol dvanajstih se je v zvoniku stare saške cerkvice prevrnil velik kip in se razletel. Kosi razbitega marmorja so se zagostili za vrata. Osamljeno okno je bilo premajhno, da bi se skozenj zrinil odrasel človek.

Ko se je inšpektor C.D.Sloan z vso močjo oprl na vrata, so se odprla samo za špranjo. Skoznjo je videl sicer prazen prostor z zvonovi, razbitimi marmornimi kosi in - roko mrtvega moža. Kako je lahko morilec pobegnil iz stolpa? Sloan je našel samo porabljeno vžigalico, črno, ožgano nit in nihalo, ki je viselo sredi stolpa.

Sloanov predstojnik: 'Kaj pomeni to nihalo?'

Sloan je zmajal z glavo: 'Mislim, da nihalo ne bi moglo narediti tega. Kip ni stal na zveznici nihala z oknom' (slika 1).

Sloana je oblihl mrzel pot. Nato je dvignil glavo. Nihalo, ki se suče! Videl ga je v muzeju. Toda le, če je dolgo vsaj dvajset metrov. 'Dvajset metrov', je šepetal glas v Sloanovih možganih, 'in miren začetek'. Miren začetek je pomemben. Spomnil se je, kako je mož v muzeju prežgal vrvico, ki je držala nihalo pri strani, z vžigalico. Vžigalico. Navadno vžigalico, kakršno je našel.

'Naj pošljejo koga z mestne policije, ki se razume na nihala.'

'Poglejmo,' je rekel dr. Dabbe, 'Foucaultovo nihalo. Ali ne pokažemo z njim, da se Zemlja vrti?'

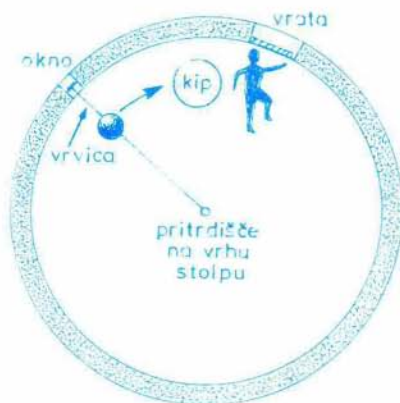
'To je to,' je rekel Sloan.

'Mislim, Sloan, da ste na pravi sledi.'

'Da, to bi pojasnilo porabljeno vžigalico. Nihalo mora zelo mirno začeti nihanje. To je vsa skrivnost. Privezati ga morate na kaj trdnega in potem vrvico prežgati.'

'Denimo, na okenski okvir.'

'Da, tako je.' "



Slika 1. Tloris priprav na umor. Umor naj bi se zgodil blizu Londona, kjer se zavrti ravnina nihala za 12° na uro, tako da bi ostalo zločincu okoli pet ur časa.

* * *

To so bistveni odlomki iz detektivskega romana Catherine Aird *His Burial Too* (Tudi njegov pokop), ki ga je kot žepno knjigo izdala newyorška založba Bantam leta 1981. Umor je hud zločin in ne sodi v Presek – če ne gre za fizikalno zanimivost, ki je dobro zamišljena, a teže izvedljiva. Detektivke ni bilo treba prebrati. Odlomke smo vzeli kar iz majske številke ameriške revije *The Physics Teacher* iz članka R.H.Crana *The Foucault pendulum as a murder weapon and physicist's delight* (Foucaultovo nihalo kot morilsko orožje in fizikova radost). Tudi na naši televiziji smo pred leti videli film, v katerem je v dokaj krvavi zgodovinski zgodbi nastopalo Foucaultovo nihalo z ostrim rezilom. Najbrž ga pisci morilskih zgodb uporabijo zato, ker je gibanje nihala za večino bralcev presenetljivo in ker dopušča, da si zamislijo umor v času, za katerega lahko morilec postreže s trdnim alibijem. Na srečo v kriminalni kroniki o čem podobnem še nismo brali.

O Foucaultovem nihalu je Presek pisal pred kratkim. Ponovimo, da se na severni polobli ravnina nihanja zasuče v eni uri za $15^\circ \sin \varphi$ v smeri urnega kazalca, če je φ zemljepisna širina. Detektivska zgodba je zanimiva sama, ponuja pa tudi priložnost, da še kaj dodamo. Opozoriti kaže predvsem na to, da ni lahko narediti Foucaultovega nihala, ki bi se dlje časa gibalo tako, kakor pričakujemo.

Na to je mogoče sklepati tudi po prvih Foucaultovih poskusih leta 1851. Foucault je imel izkušnje z nihanjem tanke palice, ki se je počasi vrtela, vpeta v stružnici. Kakor se pogosto primeri, je podobno razmišljal tudi francoski matematik in fizik Siméon Denis Poisson že leta 1837. Izračunal je, da se na Zemlji zaradi vrtenja odklonijo na severni polobli izstrelki proti desni. Pomislil je tudi na nitno nihalo, a je bil prepričan, da je odklon premajhen, da bi ga bilo mogoče opaziti. Foucault je vedel za Poissonovo razmišljanje, a je uvidel, da se pri nihalu odkloni v desno seštevajo. O tem je zapisal: "Zdi se mi, da lahko nihalo primerjamo z izstrelkom, ki se odkloni proti desni in ki bi se odklonil v isto smer, ko bi se vračal. Nihalo ima prednost, ker se odkloni seštevajo in dopušča, da preidemo iz območja teorije na območje opazovanja."

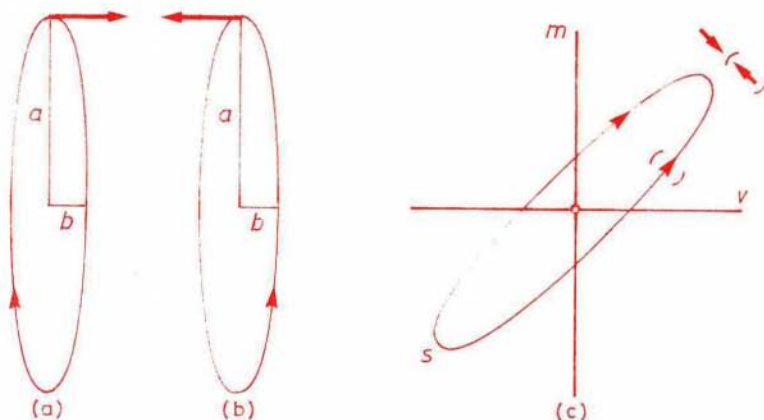
Topničarji so se med tem navadili upoštevati na severni polobli odklon izstrelkov proti desni. Na južni polobli se izstrelki odklonijo na drugo stran, proti levi. Tudi tega se zavedajo, odkar so bili angleški topničarji nemilo presenečeni, ko jim je v bitki pri Falklandskih otokih v prvi svetovni vojni izstrelke neslo proti levi.

Ne vemo, ali je bila za Foucaulta odločilna izkušnja z nihajočo palico, Poissonovo razglabljanje, posvetovanje z mentorjem Aragojem ali vabilo, naj

pripravi zanimiv poskus za pariško svetovno razstavo. Vsekakor je začel poskuse v kleti z 2 metra dolgim nihalom z maso 5 kilogramov. Nihalo je spravil v nihanje tako, da ga je odklonil iz ravnovesne lege, privezal z vrvico, počakal, da je popolnoma obmirovalo, in nato vrvico prežgal. Čez pol ure je opazil, da se je ravnina nihanja zasukala. V Parizu z zemljepisno širino okoli 53° se ravnina zasučje za 12° na uro ali za 6° na pol ure.

Pri poznejših poskusih je Foucault opazoval nihalo le minuto. Pri amplitudi dvometrskega nihala 10° se je v tolikšnem času premaknila skrajna lega za milimeter v tangentni smeri. Motilo je to, da se je zaradi upora zmanjšala amplituda in se je skrajna lega spremenila tudi v radialni smeri. Zato je Foucault poiskal možnost za delo z daljšimi nihali, najprej v pariški zvezdarni z 11 metrov dolgim nihalom in naposled v Pantheonu s 65 metrov dolgim nihalom.

Razloga za to, da je prešel od daljšega časa opazovanja h krajšemu, ni navedel, a domnevamo, da so ga na to napeljale težava. Natančno opazovanje nitnega nihala namreč moti *gibanje po elipsi*. Če nihalo zaženemo tako, da se giblje po sploščeni elipsi, ne po loku, se velika polos elipse vrti v isti



Slika 2. Če se nihalo giblje po zelo sploščeni elipsi (v projekciji na vodoravno ravnino), se velika polos elipse a suče v smeri gibanja nihala po elipsi. Sukanje se prišteje k sukanju ravnine nihanja zaradi vrtenja Zemlje (a) ali se od njega odšteje (b). Kotna hitrost velike polos elipse je pri tem $3\pi ab/4l^2 t_0$, če je b mala polos, l dolžina nihala in t_0 njegov nihajni čas. Pri dvometrskem nihalu z nihajnim časom 2,8 sekunde se pri amplitudi 10° stopinj ali 35 centimetrov velika polos elipse zasučje za 12 stopinj na uro, če meri mala polos 0,8 milimetrov. Pri neidealnem nihalu je nihajni čas odvisen od tega, kako izberemo ravnino nihanja (c). Nihalo niha po loku v ravnini z največjim (v) ali najmanjšim (m) nihajnim časom, v vmesnih legah (s) pa se začne gibati po elipsi. Za poskuse lahko nihalo namenoma nekoliko pokvarimo, tako da v majhni razdalji pod pritrdiščem na vrvico privežemo vodoravno rahlo vijačno vzmet. V ravnini vijačne vzmeti je nihajni čas najmanjši, pravokotno nanjo pa največji.



Slika 3. Veliko Foucaultovo nihalo v Nemškem muzeju Münchnu. Zato, da je mogoče prepričljivo opaziti, kako se vrti ravnina nihanja, postavijo nihalu na pot figure, ki jih postopno podira. Figure so podrte navznoter, po čemer sklepamo, da se celo to nihalo giblje po zelo sploščeni elipsi v smeri urnega kazalca, v isti smeri, kot se vrti ravnina nihanja.

smeri, kot opisuje nihalo elipso (slika 2). To vrtenje nima nič opraviti z vrtenjem Zemlje. Brž ko bi merila mala polos elipse pri dvometrskem nihalu 0,8 milimetra, bi se velika polos vrtela dvakrat hitreje, kot bi pričakovali, ali pa se sploh ne bi vrtela, pač glede na to, ali bi se gibalo nihalo po elipsi v smeri urnega kazalca ali v nasprotni smeri. Do gibanje po elipsi pride lahko tudi v primeru, da nihalo zelo skrbno spravimo v nihanje, tako da se spočetka giblje natanko po loku. K temu prispevajo razne pomanjkljivosti pritrdišča in vrvic, na primer to, da se pritrdišče malo poda pri prehodu skozi ravnovesno lego, ali se tedaj vrvica zaradi prožnosti malo raztegne ali to, da presek vrvic ali žice ni popolnoma krožen, ampak za malenkost sploščen. V teh primerih se pokaže, da je nihajni čas nihala nekoliko odvisen od tega, kako izberemo ravnino nihanja. Če jo izberemo tako, da niha nihalo z najmanjšim ali največjim nihajnim časom - obe ravnini sta druga na drugo pravokotni, ne pride do gibanja po elipsi. Zato je dobro pri poskusih s Foucaultovim nihalom najprej izmeriti nihajni čas nihala v raznih ravninah nihanja. Za kratkotrajne poskuse so uporabna tudi malo slabša nihala, če jih opazujemo, dokler nihajo v ravnini najmanjšega ali največjega nihajnega časa.

Po vsem tem razumemo, da velika in dobra Foucaultova nihala dobijo s skrbno izdelavo pritrdišča in premišljeno izbiri žice in da je pri tem treba pogosto še precej poskušati (slika 3). Ali bi imel morilec za kaj takega dovolj časa, če bi že znal dovolj fizike? Vprašanja, kako bi postavil zelo težak kip v nestabilno lego, iz katere bi ga spravil razmeroma rahel trk z nihalom, si sploh nismo postavili.

Janez Strnad

DIRKANJE Z MOTORJEM

Motor se podlage dotika le v dveh točkah, med vožnjo pa se vseeno ne zvrne, mnogokrat dopušča celo zelo velike nagibe.

Opazujmo motor s stališča voznika. V ovinek se nagnemo, krmilo pa pri tem le malo zasukamo v želeno smer. Med zavijanjem se motor giblje po krožnici, opazujemo ga torej v enakoŕmerno se vrtečem sistemu. Centrifugalna ali sredobežna sila v takih sistemih je:

$$f_c = m * v^2 / R, \quad (1)$$

m je masa motorja in motorista, v je njuna hitrost, R pa je krivinski radij ovinka. Na motorista deluje še sila teže F_g :

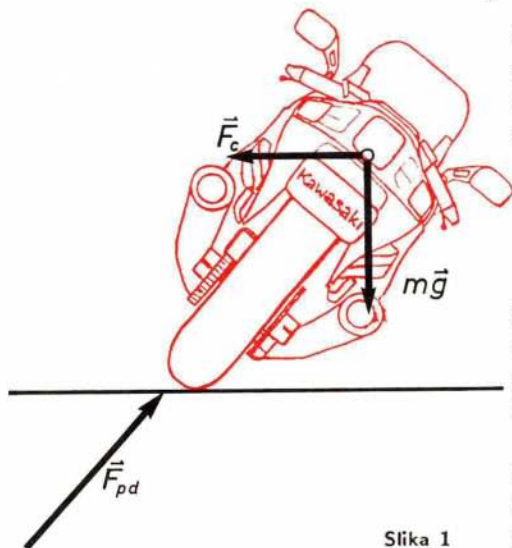
$$F_g = m * g, \quad (2)$$

in sila podlage F_{pd} (slika 1). Pogoji, da se motor ne zvrne je, da je vsota sil in njihovih navorov okrog dotikališča gume s cesto enaka nič. Nagib motorja v ovinku razberemo s slike 1:

$$\tan \alpha = \frac{F_r}{F_g} = \frac{v^2}{Rg}, \quad (3)$$

kjer je α kot med navpičnico na cestišču in motorjem. Zapišimo še hitrost, s katero tako nagnjen motorist prevozi ovinek:

$$v = \sqrt{R * g * \tan \alpha} \quad (4)$$



Slika 1

Vse to velja, dokler je oprijem gum na cestišču dovolj trden, da guma ne zdrsne. Sila lepenja F_1 med gumami in cestiščem torej ne sme biti manjša od F_c .

Sila lepenja F_1 je odvisna od koeficienta lepenja k in pravokotne komponente sile na podlago, pri nas je to sila teže. Za maksimalni možni

nagib $\bar{\alpha}$, pri katerem motor še ne zdrsne, velja torej zveza:

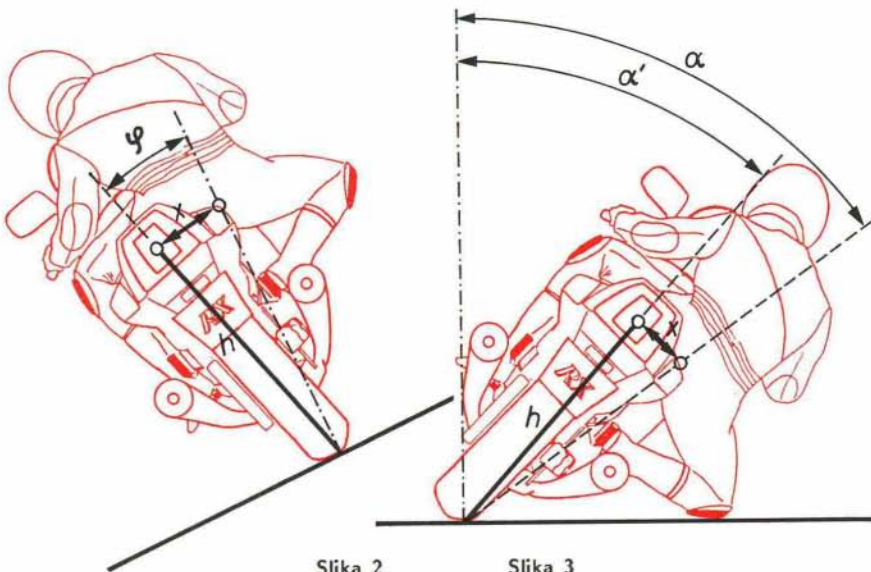
$$\tan \bar{\alpha} = k \quad (5)$$

Ko enačbo (5) uporabimo v enačbi (4), dobimo maksimalno hitrost $\bar{v}$, s katero se da ovinek pri takih pogojih prevoziti:

$$\bar{v} = \sqrt{R * g * k} \quad (6)$$

Povprečni koeficient lepenja med gumami in običajno cesto ocenimo na 0,7, tako da se lahko nagnemo do kotov okrog 35° . Na dirkališču je ta kot tudi do 55° . Dirkališča, kjer dosegajo tako velike nagibe, morajo imeti hrapavo prevleko, ki ne sme imeti izboklin ali vdolbin, motorji pa so opremljeni s posebnimi dobro oprijemajočimi gumami. Pri avtomobilih se da s spojlerji silo, s katero pritiska na podlago, kar nekajkrat povečati, pri motorjih pa to ni smiselno. Dodatna sila zaradi spojlerja leži v simetrijski ravnini motorja in ne vpliva na hitrost $\bar{v}$.

Do zdaj smo privzeli, da težišče ter dotikališče gume s podlago ležita v simetrijski ravnini motorja. S težiščem mislimo skupno težišče motorja in motorista. Dirkači pa ne vozijo tako. Če je pri vožnji naravnost težišče od simetrijske ravnine odmaknjeno za x , mora biti motor nagnjen za kot φ , ki ga izračunamo iz enačbe:



Slika 2

Slika 3

$$\tan \varphi = x/h, \quad (7)$$

h je višina težišča (slika 2). Pri vožnji v ovinek stoji motor v tem primeru bolj pokončno (slika 3). Novi kot nagiba α' dobimo iz enačbe:

$$\tan \alpha' = \tan \alpha * \sqrt{\frac{1 - \cot \alpha * \Delta}{1 + \tan \alpha * \Delta}} \quad (8)$$

Δ smo označili razmerje med premikom težišča x in njegovo višino h ; $\Delta = x/h$.

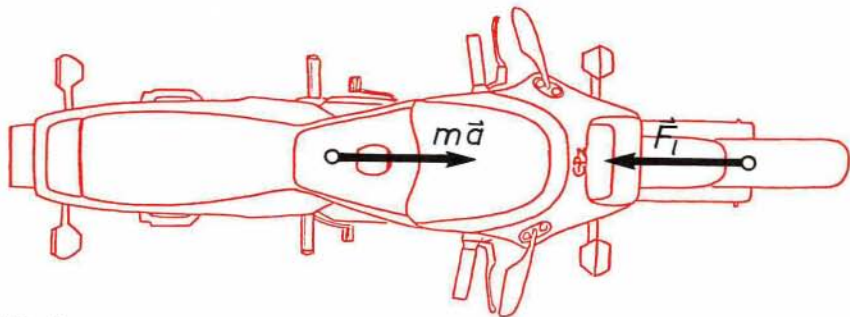
Sedemdeset kilogramov težak motorist se s stopetdeset kilogramov težkim motorjem nagne v ovinek za kot 35° . Če se motorist presede za petnajst centimetrov na eno stran, se skupno težišče, ki naj bo šestdeset centimetrov visoko, pomakne za pet centimetrov. Iz enačbe (8) dobimo, da se je tedaj motoristu treba nagniti le za kot $\alpha' = 32^\circ$. Iz enačbe (8) razberemo, da se kot α' zmanjša tudi, če se težišče zniža. Na dirkah se motoristi presedajo na stran, da so čim nižji in s koleni podrsavajo po cesti.

Oglejmo si razmere pri zaviranju. Motor opazujemo v enakomerno pospešenem opazovalnem sistemu. Sistemska sila je odvisna od pospeška sistema, to je od pojemka a , s katerim motor zavira:

$$F_s = m * a \quad (9)$$

Zunanje sile, ki delujejo na motor so: sila teže, sila podlage in sila lepenja ali trenja, ki ju poimenujmo kar zaviralna sila. Sila podlage uravnovesi silo teže, zaviralna sila pa sistemska silo F_s . Ker je koeficient lepenja nekoliko večji od koeficienta trenja, je ugodneje zavirati tako, da kolesa ne drsijo.

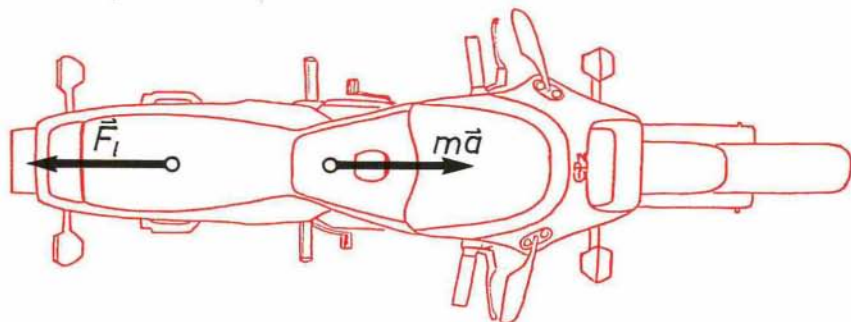
Oglejmo si razmere pri zaviranju. Stara šola vožnje z motorjem je dovoljevala zaviranje le z zadnjo zavoro. Če zaviramo s prednjo zavoro, je



Slika 4

zaviralna sila pred težiščem. Sistemska sila prijemlje v težišču, zato je motor v labilnem ravnovesju (slika 4).

Ker je bil na začetku motoristike oprijem gum na makadamskih cestah slab, je bilo res bolj varno zavirati z zadnjim kolesom. V tem primeru namreč zaviralna sila prijemlje v točki, ki je za prijemališčem sistemske, motor je v stabilnem ravnovesju. (Slika 5.) Cena, ki jo moramo plačati za večjo stabilnost pri zaviranju, pa je manjši zavorni učinek. Poglejmo zakaj!



Slika 5

Motor naj ima medosno razdaljo l , težišče pa naj bo na sredini, v višini h (slika 6). Koeficient lepenja med podlago in posamezno gumo naj bo enak k . Pri zaviranju z zadnjo zavoro je zaviralna sila enaka sili lepenja med podlago in zadnjo gumo. Čeprav je težišče motorja na sredini, pa kolesi nista enako obteženi, ampak je zadnje kolo nekoliko razbremenjeno, odvisno pač od velikosti pojemka motorja a . Obtežitvi prednjega in zadnjega kolesa označimo s F_p in F_z . Skupna obtežitev obeh koles je enaka sili teže motorja:

$$F_g = m * g = F_p + F_z \quad (10)$$

Maksimalna zaviralna sila F_1 je potem:

$$F_1 = F_z * k \quad (11)$$

V težišču prijemljeta enako velika sistemska sila F_s , ki kaže v smeri gibanja motorja in sila teže F_g . Vsota vseh navorov, ki delujejo na motor, mora biti med vožnjo enaka nič. Če vrtilišče postavimo v dotikališče prednje gume, dobimo enačbo:

$$m * g * l/2 = m * a * h + F_z * l \quad (12)$$

Ko v enačbi (12) uporabimo zvezo (9), dobimo za maksimalni pojemek motorja pri zaviranju z zadnjo zavoro a_z enačbo:

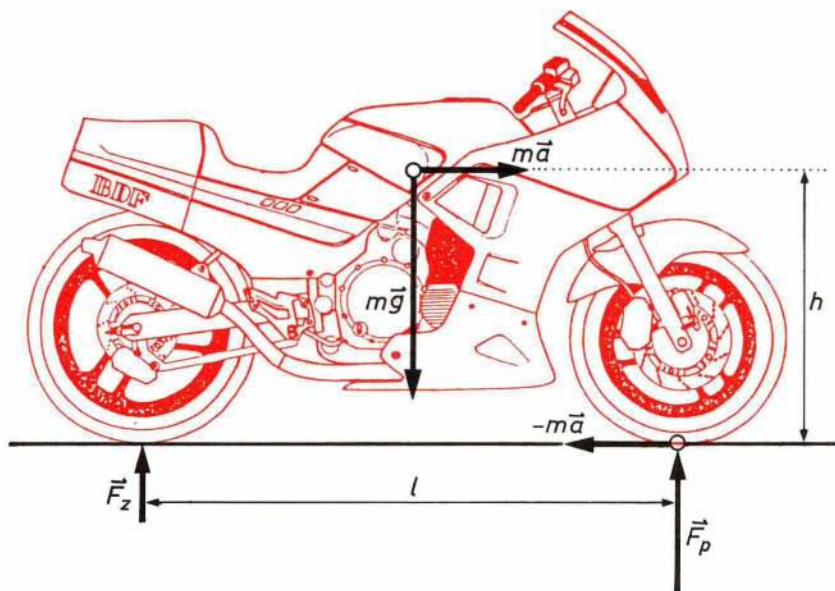
$$a_z = \frac{1}{2} * g * k / (1 + k * \nu), \quad (13)$$

z ν smo označili razmerje $\nu = h/l$. Po pričakovanju je največji pojemek sorazmeren koeficientu lepenja k , vidimo pa tudi, da bo tem večji, čim nižje bo težišče h , ali bolje, čim manjše bo razmerje ν .

Podobno bomo računali še največji pojemek za zaviranje samo s prednjo zavoro, le da zdaj postavimo vrtilišče v dotikališče zadnje gume s podlago. Dobimo:

$$a_p = \frac{1}{2} * g * k / (1 - k * \nu) \quad (14)$$

Do tega bi prišli tudi, če bi vrtilišče postavili v kako drugo točko, recimo v težišče motorja. Enačba (14) ne velja, ko s prednjo zavoro zaviramo tako, da se motor postavi na prednje kolo ali se celo prekopicne naprej. Naj bo vrtilišče v prednjem kolesu. V mejnem primeru (slika 7) mora biti navor teže enak navoru sistemske sile (9). Veljati mora:



Slika 6

$$m * g * k * h \leq m * g * l/2 \text{ ali} \quad (15)$$

$$k\nu \leq \frac{1}{2} \quad (16)$$

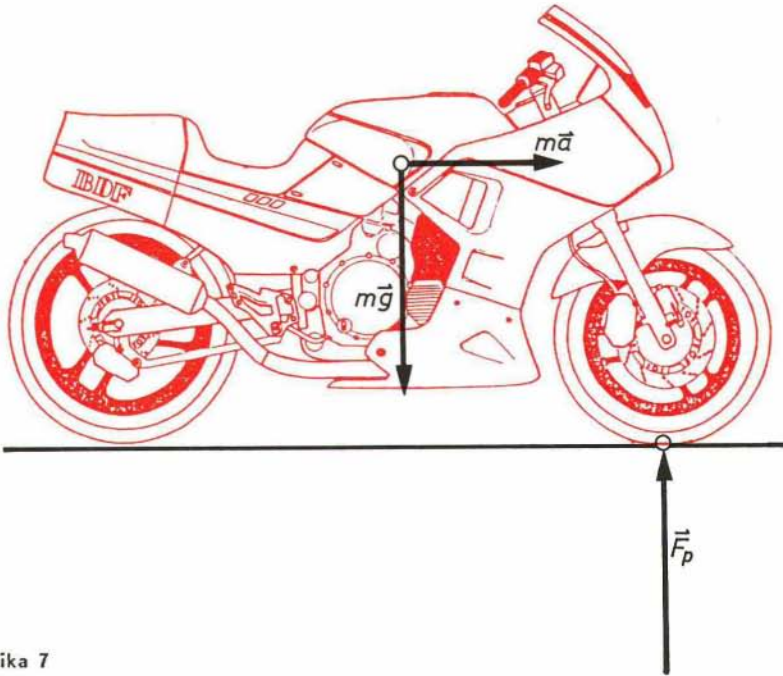
Le v tem primeru je največji pojemek podan z enačbo (14). Razmerje pojemkov a_p in a_z . Razmerje največjih pojemkov in s tem tudi zavornih učinkov zadnje in prednje zavore je za različne razmere različno. Ko je $k * \nu \leq \frac{1}{2}$, velja:

$$\frac{a_z}{a_p} = \frac{1 - k * \nu}{1 + k * \nu}, \quad (17)$$

V mejnem primeru, ko je $k * \nu = \frac{1}{2}$, je razmerje pojemkov enako $\frac{1}{3}$.

Produkt $k * \nu$ je pozitivno število, tako da zveza (17) pove, da je učinek zadnje zavore vedno manjši od učinka prednje. Z izboljšanjem vodljivosti motorjev in oprijema gum dirkači varno zavirajo s prednjo zavoro, zaviranja z zadnjo zavoro se zaradi nestabilnosti celo izogibajo.

Oglejmo si za konec še kombinacijo obeh opisanih primerov, to je za-



Slika 7

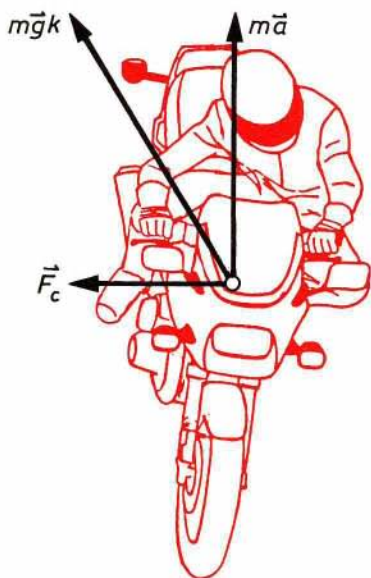
viranje skozi vožnjo v ovinek. Izkušnje nas učijo, da v ovinku ne moremo zavirati tako krepko kot pri vožnji naravnost.

Pri zaviranju v ovinek na motor ob zunanjih silah delujeta dve, med seboj pravokotni sistemski sili. Centrifugalna sila (1) kaže v smeri radija ovinka, sistemski sila (9) pa kaže v smeri gibanja motorja, torej pravokotno na radialno silo. Velikost vsote obeh sil mora biti manjša, kvečjemu enaka maksimalni sili lepenja (10), med gumo in cesto (slika 8). Uporabimo Pitagorov izrek:

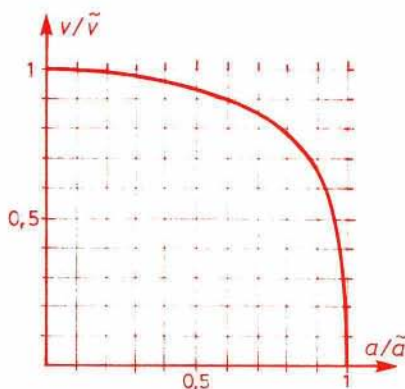
$$(m * g * k)^2 = (m * a)^2 + (m * \frac{v^2}{R})^2, \quad (18)$$

a je pojemek, s katerim zaviramo, v je pa hitrost, s katero vozimo skozi ovinek. Enačbo (18) predelamo v brezdimenzionalno obliko, tako da bomo pojemek primerjali z maksimalnim možnim pojemkom $\bar{a}$ pri zaviranju naravnost. Hitrost vožnje skozi ovinek pa bomo primerjali z največjo hitrostjo $\bar{v}$, to je tisto, s katero bi lahko prevozili ovinek, če ne bi zavirali. Enačbo (18) delimo z $(m * g * k)^2$ in končno dobimo:

$$\frac{v}{\bar{v}} = \sqrt[4]{1 - (\frac{a}{\bar{a}})^2} \quad (19)$$



Slika 8.



Slika 9. Odvisnost pojemka od hitrosti pri zaviranju v ovinku.

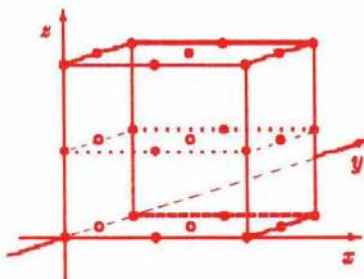
Enačbo (19) predstavimo s krivuljo podobno elipsi (slika 9).

Iz grafa razberemo, da se ob rahlem zaviranju hitrost v le malo zmanjša, ko pa se zaviranje začne približevati svoji ekstremni vrednosti, pa hitrost v hitro pojema z naraščajočim a . V ovinek smemo torej pripeljati z nekoliko večjo hitrostjo, kot $\bar{v}$ in ko še nismo povsem nagnjeni lahko kar uspešno zaviramo.

Mitja Slavinec

KOCKA IMA RDEČKE – Rešitev s str. 297

1. Kocko postavimo v pravokotni koordinatni sistem. Tako imamo 9 premic s po tremi obarvanimi točkami, vzporednih z osjo x , in po enako število premic, vzporednih z osjo y ter osjo z . Na vsaki od treh ravnin, vzporednih z eno od osnovnih ploskev kocke, sta še dve taki premici.



Končno so tu še 4 telesne diagonale kocke. Skupaj je torej 49 premic s po tremi obarvanimi točkami.

2. Nalogo lahko rešimo drugače. Kocko z robom 3 si mislimo sestavljeno iz enotskih kockic (z robom 1). Središča teh kockic obarvamo rdeče in se vprašamo, koliko različnih premic lahko potegnemo tako, da so na vsaki po tri obarvane točke. Nato kocko obložimo z lupino iz enotskih kockic tako, da dobimo kocko z robom 5. Vsaka premica skozi tri obarvane točke gre skozi natanko dve kockici iz lupine in skozi vsako kockico iz lupine gre natanko ena od teh premic. To pomeni, da je število iskanih premic enako polovici enotskih kockic iz lupine: $\frac{5^3 - 3^3}{2} = 49$.

Darjo Felda

JUŽNI KRIŽ

Morda te bo kdaj zanesla pot v kraje ob ekvatorju ali pa celo v kraje na južni zemeljski polobli. Zato nekaj besed o orientaciji v tistih krajih.

Kompas uporabljaš tam enako kot pri nas, saj se magnetna igla tudi tam postavi približno v smer sever-jug. Kako pa se orientiraš po Soncu in zvezdah?

Za kraje na južni zemeljski polobli vzhaja Sonce na vzhodnem delu obzorja, okoli poldneva je najvišje na severni strani neba, zahaja pa na zahodnem delu obzorja. Ko je na južni poluti pomlad, je pri nas jesen, ko je tam poletje, je tu zima itn. Tako je Sonce opoldne najvišje okoli 22. decembra, najnižje pa okoli 21. junija. Ker je tam Sonce opoldne na "severu", sence teles tedaj kažejo proti jugu. To nam služi za grobo orientacijo.

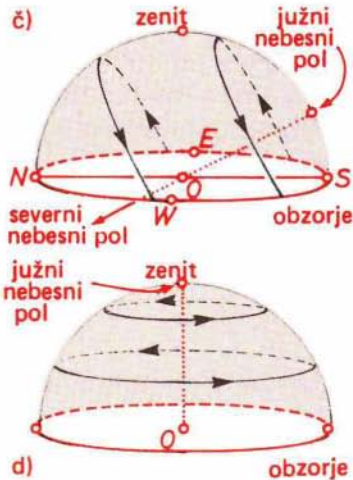
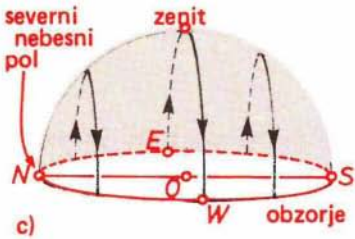
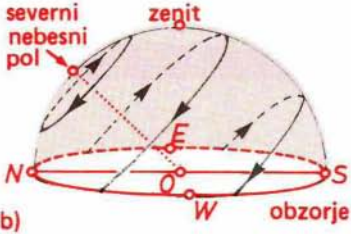
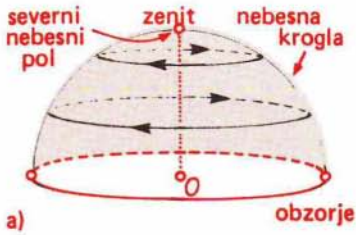
Zamisli si, da bi potoval proti jugu najprej do ekvatorja, potem pa od ekvatorja še dlje proti južnemu zemeljskemu polu. Opazil bi, da se višina Severnice nad obzorjem vse bolj manjša, na nebu pa bi se pojavljala nova in nova ozvezdja z zvezdami, ki jih v naših krajih ne vidiš. Med znanimi zvezdami bi bilo nekaj takih, ki jih ne bi mogel opazovati v istem času kot pri nas, imele pa bi tudi drugačno navidezno gibanje kot pri nas (slika 1). Ko bi prišel na ekvator, bi videl Severnico na obzorju, zvezde pa bi navidezno krožile pravokotno na obzorje. Ko bi potoval še dalje na jug, bi bila zate Severnica že pod obzorjem, zvezde pa bi pri svojem dnevnem gibanju dosegale največjo višino na severni strani neba ali pa med zenitom in južnim nebesnim polom, prav nasprotno kot pri nas.

Pa pogledjmo, kako z zvezdami poiščeš južni nebesni pol. Zakaj prav njega? Zato, ker pod njim leži na obzorju jug. Če pa poznaš smer proti jugu, si se orientiral.

Medtem ko pri nas severni nebesni pol z lahkoto in natančno ugotoviš po *Velikem vozu*, pa z južnim polom ni tako. Južni nebesni pol še kar zanesljivo ugotoviš po ozvezdju *Južni križ*. To je majhno ozvezdje, ki ga ni lahko najti. Leži na južni nebesni polobli in ni vidno iz naših krajev.

Južni križ sestavlja pet svetlejših zvezd, od katerih po dve nasprotni lahko povežeš v križ. Če razdaljo med najbolj razmaknjenima zvezdama α in γ približno 4,5-krat podaljšaš v smer, kot jo kaže slika 2, prideš v bližino točke na nebu, kjer leži južni nebesni pol. Pod njim leži na obzorju jug, kot leži pri nas pod Severnico sever. Tako si se orientiral.

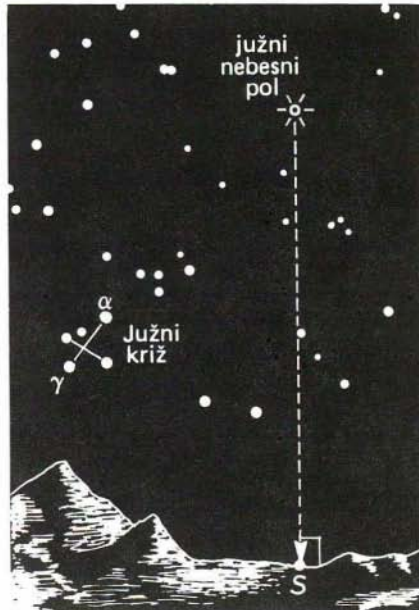
Južni križ je za orientacijo primeren šele za kraje, ki leže južno od ekvatorja, čeprav je tam najprej še zelo nizko nad obzorjem. Toda čim bolj greš proti jugu, tem više leži Južni križ in je za orientacijo vse bolj prikladno



Slika 1. Navidezne dnevne poti vesoljskih teles (zvezd, Sonca itn.);

- a na severnem zemeljskem polu,
 - b v naših krajih,
 - c na zemeljskem ekvatorju,
 - č v krajih južno od ekvatorja,
 - d na južnem zemeljskem polu.
- O pomeni opazovališče.

Slika 2. Ozvezdje Južni križ, po katerem približno ugotoviš lego južnega nebesnega pola. Če vzameš 15 cm dolgo ravnilo, ga dvigneš pred oči in projiciraš na nebo tako, da oznaka za 1 cm sovpada na nebu z zvezdo γ , oznaka za 3 cm pa z zvezdo α , oznaka za 12 cm kaže približno lego južnega nebesnega pola.



ozvezdje, saj pozneje ostaja stalno nad obzorjem.

Južni nebesni pol je torej mnogo težje poiskati kot severnega, ker v njegovi bližini ni niti ene posebno svetle zvezde. Lahko rečemo, da imamo na severni zemeljski poluti kar srečo. Na našem nebu imamo namreč imenitno zvezdo – Severnico, po kateri se lahko vsako vedro noč prav enostavno in hitro orientiramo.

Marijan Prosén

PISMA BRALCEV

Lani je naše uredništvo obiskal zvedavi Luka Garbšček, učenec 4. razreda osnovne šole, in prinesel naslednji

ZELOOO TEŽKI NALOGI

1. Imamo pet polnih zabojev sadja, pet do polovice polnih zabojev sadja in pet praznih zabojev.
Kako bi razdelil ta jabolka med tri ljudi tako, da bodo vsi dobili: 1. enako količino sadja in 2. enako število zabojev.

2. "Kupila bom veliko torto tistemu, katerega kolo bo v dirki do konca ulice drugo prišlo na cilj," je rekla Edijeva mama, ko je odhajala v trgovino. Edi in njegov prijatelj sta oba velika ljubitelja tort, zato sta takoj pričela s tekmo. Vozila sta počasneje in počasneje, dokler nista oba odnehala, ker nista hotela biti prva.
Po krajšem prepiru sta spoznala, da obstaja le en način za nadaljevanje dirke, tako da bi eden od njiju le dobil torto.
Kaj sta iztuhtala?

Za vzpodbudo bomo Luki poslali brošuro Marijana Proséna Veliki in mali medved.

Boris Lavrič

ODPRTO PISMO ŠOLJSKI JAVNOSTI

Pismo Iva Anzenika je vzpodbudilo kar nekaj bralcev, da so nam pisali. Nekateri se hudujete nad njegovim znanjem slovenščine, vsi pa ste si edini, da matematike kljub ustvarjalnemu mišljenju ne zna najbolje.

Trije brihtni (tako so se sami poimenovali) iz Šempetra pri Novi Gorici, so takoj doumeli smisel "Odrprtega pisma" in s pomočjo Ivovih sklepanj dobili nekaj novih "izrekov". Pa si jih pogledjmo:

1. Popravljen Pitagorov izrek.

$$\begin{aligned}a^2 + b^2 &= c^2 \\(a + b)^2 &= c^2 / \sqrt{a + b} = c\end{aligned}$$

2. Posplošitev komplicirane formule.

$$(a \pm b)^n = a^n \pm b^n$$

3. Kako se izognemo velikim številkam.

$$(ab)^n = a \cdot b^n$$

In za konec primer težke naloge, ki postaja z novimi pravili veliko lažja.

$$\begin{aligned}a^n + b^n &= c / \sqrt[n]{a^n + b^n} = \sqrt[n]{c} \\ \sqrt[n]{a^n} + \sqrt[n]{b^n} &= \sqrt[n]{c} \\ a + b &= \sqrt[n]{c}\end{aligned}$$

Vsem lep pozdrav!

Dušica Boben

1991

Dokaži, da enačba $19x^2 - 91y^2 = 1991$ nima celoštevilskih rešitev.

Boris Lavrič

MISS PRESEKA

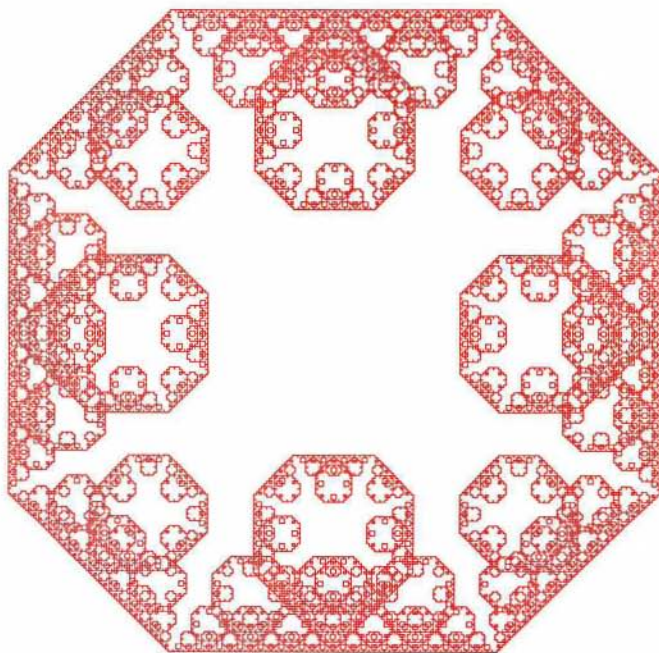
Na začetku šolskega leta smo vas v prvi številki PRESEKA ob članku NE-NAVADNE KRIVULJE povabili k sodelovanju. Poslali naj bi nam svoje konstrukcije teh nenavadnih krivulj. Povabilu se je odzval le **Andrej Zalar** iz Šentjurja, poslal pa nam je kar osem zelo zanimivih krivulj. Za nagrado smo mu poslali knjigo **Enajsta šola računalništva, rešene naloge z republiških tekmovanj 1977-1987**. Držimo tudi obljubo in slike objavljamo skupaj s tabelami in potrebnimi številskimi podatki (S številka slike, N število smeri, R rojstna celica, G generacija).

Komur se slike ne zdijo dovolj zanimive, pa še tole: Same slike so le končen rezultat in ne morejo nadomestiti razumevanja samega postopka in opazovanja dejanskega risanja 'v živo' ob spreminjanju parametrov. Tako kot še marsikje velja: biti udeleženec pomeni več, kot biti le opazovalec.

Ciril Pezdir

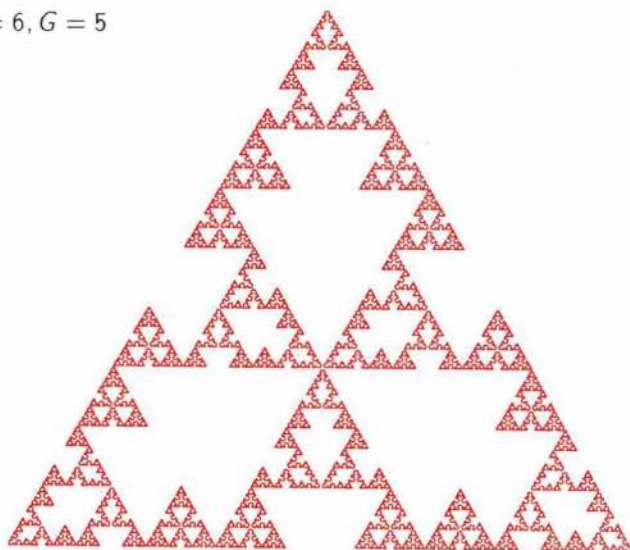
$S = 1,$
 $N = 4,$
 $R = 8,$
 $G = 15$

0	07	0
1	10	1
2	21	2
3	32	3
4	43	4
5	54	5
6	65	6
7	76	7
8	0246	-1



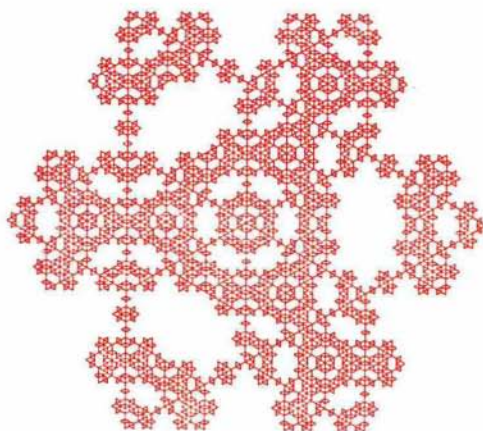
$$S = 2, N = 6, R = 6, G = 5$$

0	0210540	0
1	1501231	1
2	2432102	2
3	3123453	3
4	4054324	4
5	5345015	5
6	012345	-1



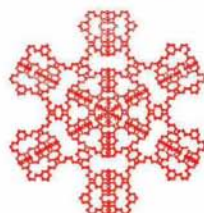
$$S = 3, N = 6, R = 6, G = 5$$

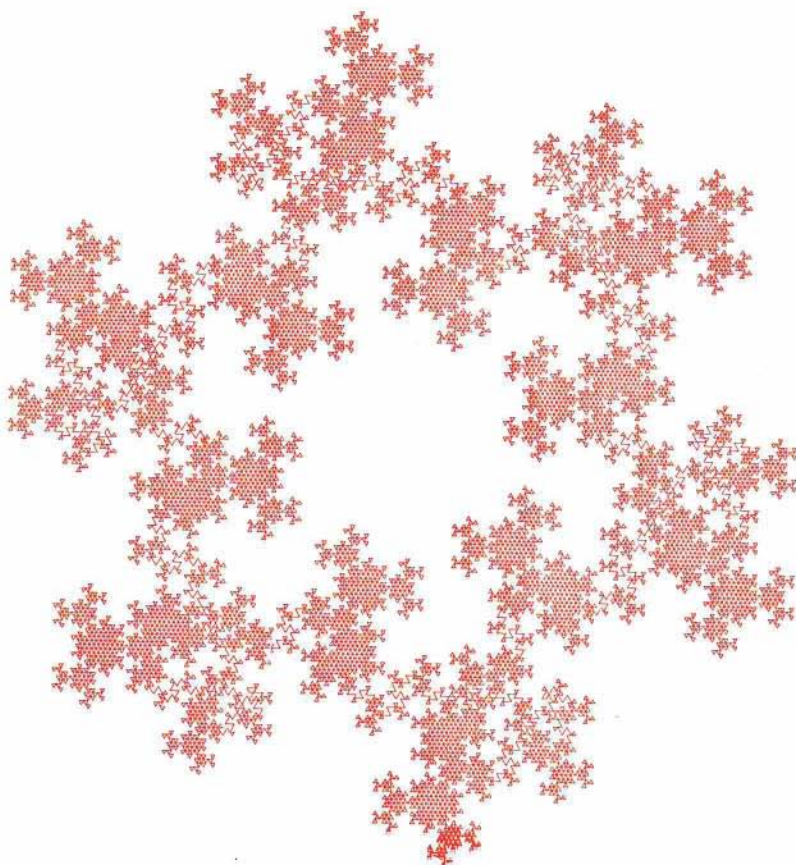
0	0513150	0
1	1024201	1
2	2135312	2
3	3240423	3
4	4351534	4
5	5402045	5
6	024	-1



$$S = 4, N = 6, R = 6, G = 5$$

0	0210540	0
1	1321051	1
2	2432102	2
3	3543213	3
4	4054324	4
5	5105435	5
6	012345	-1



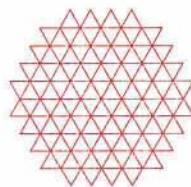


$S = 5, N = 6,$
 $R = 6, G = 7$

0	5115	0
1	0220	1
2	1331	2
3	2442	3
4	3553	4
5	4004	5
6	012345	-1

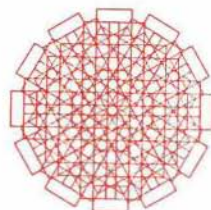
$S = 6, N = 6,$
 $R = 6, G = 10$

0	15	0
1	20	1
2	31	2
3	42	3
4	53	4
5	04	5
6	012345	-1



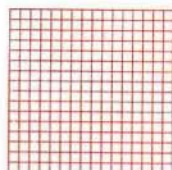
$$S = 7, N = 12, R = 12, G = 3$$

0	0	3	6	3	0	9	6	9	0	0			
1	1	4	7	4	1	10	7	10	1	1			
2	2	5	8	5	2	11	8	11	2	2			
3	3	6	9	6	3	0	9	0	3	3			
4	4	7	10	7	4	1	10	1	4	4			
5	5	8	11	8	5	2	11	2	5	5			
6	6	9	0	9	6	3	0	3	6	6			
7	7	10	1	10	7	4	1	4	7	7			
8	8	11	2	11	8	5	2	5	8	8			
9	9	0	3	0	9	6	3	6	9	9			
10	10	1	4	1	10	7	4	7	10	10			
11	11	2	5	2	11	8	5	8	11	11			
12	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	-1



$$S = 8, N = 4, R = 4, G = 5$$

0	0130	0
1	1201	1
2	2312	2
3	3023	3
4	0123	-1



1991 – Rešitev s str. 351

Ker velja $1991 = 11 \cdot 181$, je število $19x^2 - 91y^2$ deljivo z 11. Zaradi

$$3(x^2 + y^2) = 11(2x^2 - 8y^2) - (19x^2 - 91y^2)$$

je potem tudi vsota $x^2 + y^2$ deljiva z 11. Kvadrat celega števila pri deljenju z 11 lahko da le ostanek 0, 1, 3, 4, 5 ali 9, zato je vsota $x^2 + y^2$ deljiva z 11 le, če sta x in y deljiva z 11. Število 1991 je tedaj deljivo s 121. Seveda to ni res, enačba pa potem nima celoštevilskih rešitev.

Boris Lavrič

5. REPUBLIŠKO TEKMOVANJE IZ LOGIKE

Petega republiškega tekmovanja iz logike se je udeležilo 387 tekmovalcev, ki so bili izbrani na osnovi doseženih rezultatov med več kot 4000 učenci in dijaki, udeleženci izbirnih tekmovanj. Tekmovanje je bilo 20. 10. 1990 na Fakulteti za elektrotehniko in računalništvo Univerze v Ljubljani, kjer je tekmovalcem zaželel dobrodošlico dekan prof. dr. Baldomir Zajc. Na tekmovanju so najbolje razmišljali naslednji učenci, dijaki in študenti:

Sedmi razred

Blaž MALANŠEK, OŠ 15.Divizije-Grm, Novo mesto; Dušan PRAŠNIKAR, OŠ Janka Kersnika-Brdo, Lukovica; Damjan PIPAN, OŠ Staneta Kosca, Ljubljana; Anže SLOSAR, Moj Mikro, Ljubljana; Mirjam ŠULEK, OŠ Gustava Šiliha, Velenje; Klemen IVANEC, Franceta Prešerna, Ribnica; Darko LOMBARDO, OŠ Adolfa Jakhla - Zalog, Ljubljana; Milanka ŠANTELJ, OŠ Notranjskega odreda, Cerknica; Rok TROŠT, OŠ Trnovo, Ljubljana; Anja VALANT, OŠ Frana Roša, Celje;

Osmi razred

Mitja PIRC, OŠ Brežice; Andrej STUDEN, OŠ F. Prešerna Kranj; Martin JESENKO, OŠ Borisa Zihlerl, Ljubljana; Urška KOLAR, Moj Mikro; Matjaž ŠMALC, OŠ Dušana Jereba, Slovenske Konjice; Boštjan FRELIH, OŠ Petra Kavčiča, Škofja Loka; Nataša NABERGOJ, OŠ Draga Bajca, Vipava; Mohor MARETIČ, OŠ Ivana Groharja, Škofja Loka; Peter TRKMAN, OŠ Danile Kumar, Ljubljana; Boštjan HUDOMALJ, OŠ Ivana Skvarče, Zagorje ob Savi; Matej MEDVED, OŠ S. Kosca, Šmartno pod Š.Goro; Alenka STEPIŠNIK, I. OŠ Celje;

Prvi razred

Petra IPAVEC, SNŠ Ljubljana; Maja POHAR, Gimnazija Poljane, Ljubljana; Boštjan KUZMAN, OŠ Šalek, Velenje; Aleš ZAVŠEK, STŠ M.Tita, Celje; Andrej ERHARTIČ, SNŠ Maribor; Uroš LOVRENCIČ, SNŠ Maribor; Teja TAMŠE, STŠ M.Tita Celje; Iztok KAVKLER, STŠ M.Tita Celje; Mijca MELE, SENŠ R. Maistra, Kamnik; Vlado MILOVANOVIČ, SŠEN Šentvid, Ljubljana;

Drugi razred

Matej LAZAR, I. Gimnazija, Maribor; Urška DRČAR, SENŠ R. Maistra, Kamnik; Peter ISKRA, STNŠ Postojna; Samo FIŠINGER, SNŠ M. Zidanšek, Maribor; Toša W. SLAK, Gimnazija Poljane, Ljubljana; Sandra, FABJAN, STŠ M.Tita, Celje; Marko KRAJNC, SNŠ M. Zidanšek, Maribor; Mateja MARC, Gimnazija Kranj; Rok SEŠEK, SŠEN Ljubljana-Šentvid; Mitja NIKOLIČ, SŠEN Ljubljana, Šentvid; Jernej VIČIČ, Gimnazija Koper;

Tretji razred

Jana KRISTANC, Gimnazija Kranj; Tomaž SEŠEK, Gimnazija Bežigrad, Ljubljana; Smiljan VODOVNIK, SŠ TNPU, Ravne na Koroškem; Aleš CADEŽ, Gimnazija Kranj; Jan VASLE, SENŠ R. Maistra, Kamnik; Neven GRŽANIČ, Gimnazija Koper; Krešimir MACAN, SNŠ Ljubljana; Andrej KRANJC, SNŠ Maribor; Marko KUKRIKA, SNŠ Ljubljana; Peter POGAČAR, SENŠ R. Maistra, Kamnik; Herman PUŠNIK, I. Gimnazija, Maribor; Roman Verhovnik, SŠTSFL Litostroj, Ljubljana; Marko ZALOKAR, SŠEN Ljubljana-Šentvid;

Četrti razred

Vojko REBOLJ, SENŠ Kamnik; Vladimir BENS, NSC Nova Gorica; Darja POLAK, Gimnazija Kranj; Branko ŽAKELJ, Gimnazija J. Vege, Idrija; Boštjan BOHAR, SCTPU

Murska Sobota; Simon GRILC, SNS Maribor; Dušanka KOČIČ, STŠ Celje; Aljaž ULE, SNS Ljubljana; Stina VOŠNER, SŠTNP Ravne na Koroškem; Marko PAVLIŠIČ, SŠ Črnomelj;

Študenti

Aleš VAVPOTIČ, Domžale; Aleš ČASAR, Murska Sobota; Mitja ŠVAB, Trst; Gregor A. DOLINAR, Škofja Loka; Aleš GORNJEC, Slovenj Gradec in Dušan KOSANOVIČ, Celje.

Naloge za 7. in 8. razred OŠ

1.

(a) Karte.

Tri po barvi različne karte so položene z licem navzdol. Janez, Peter in Klemen so takole ugibali:

	prva karta	druga karta	tretja karta
Janez	srce	pik	kara
Peter	križ	kara	srce
Klemen	križ	pik	srce

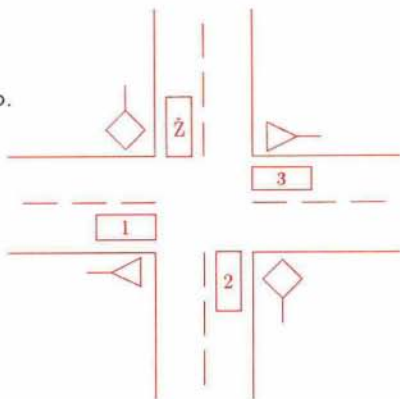
Vsak je vsaj enkrat pravilno ugibal, toda nobena dva nista imela enakega števila pravih ugibanj. Katere karte so na mizi?

(b) Koliko prijateljev?

Boris, Drago in Savin so razpravljali o številu Petrovih prijateljev. Boris je trdil, da ima Peter vsaj petdeset prijateljev. Drago je dejal, da jih gotovo nima toliko, Savin pa je pripomnil, da ima Peter vsaj enega prijatelja. Če je resnična samo ena od zgornjih trditev, koliko prijateljev ima Peter?

2. Glavna cesta prečka stransko cesto.

V križišču na sliki 1 pripeljejo: fičko, žaba, katrca in spaček. Žaba in katrca bosta hkrati kot prvi prevozili križišče. Sledi ji ma fičko. Zadnji bo prevozil križišče spaček. Žaba je levo od katrce. Spaček ne vozi naravnost. Kam peljejo posamezna vozila?



3. Sobotno razvedrilo.

Petra, Lucija in Nina so šle vsaka s svojim prijateljem na večerjo v različne gostilne. Po večerji je odšel en par kegljat, drugi v kino in tretji v opero. Iz naslednjih podatkov poišči za vsako dekle ime njenega prijatelja in gostilno, kjer sta večerjala.

- o Petra ni kegljala.
- o Trije pari so bili: Aleš in njegova prijateljica, Nina in njen prijatelj in par, ki je večerjal Pod lipco.
- o Par, ki je šel v kino, ni večerjal pri Lovcu.
- o Ne Cene ne Lucijin prijatelj nista šla v opero.
- o Henrik ni jedel pri Mraku.
- o Petra ne pozna Aleša.
- o Nina in njen prijatelj včasih večerjata skupaj s parom, ki je večerjal pri Mraku.
- o Par, ki je večerjal Pod lipco, ni šel v kino.

Pomagaj si z razpredelnico!

1. Naloge za 1. in 2. letnik SŠ

(a) Konji.

V konjušnici so dobili vsaj tri nove konje, vendar o njih vemo le malo. Govori se:

- o Vsi novi konji so črni.
- o Vsaj en nov konj je črn, vendar ne vsi.
- o Vsaj en nov konj ni črn.

Kateri dve od teh treh trditev sta lahko obe resnični in tudi obe napačni? Kateri dve trditvi sta lahko obe napačni, ne moreta pa biti obe resnični?

(b) Pet kart.

Doli, Moli in Poli so uganjevale barve štirih asov in jokerja, ki so bili položeni z licem navzdol. Barva vsake karte je bila vsaj enkrat pravilno določena. Vsa dekleta so imela enako število pravih odgovorov, vendar pa nobena ni pravilno uganila dveh zaporednih kart.

	1. karta	2. karta	3. karta	4. karta	5. karta
Doli	joker	srce	križ	pik	kara
Moli	križ	joker	kara	srce	križ
Poli	pik	kara	pik	srce	joker

Kakšne barve so karte?

2. Križišče prednostne in stranske ceste.

V križišče pripeljejo: jugo, škoda, fičko in katrca. Po prometnih predpisih prevozijo križišče v naslednjem vrstnem redu: jugo, škoda, fičko in katrca. Če bi vozila, ki zavijajo, zavijala v nasprotno smer, bi bil vrstni red prehoda takšen: najprej škoda in katrca skupaj, potem jugo in zadnji fičko. Kje so vozila (na glavni ali stranski cesti) in kako zavijajo?

3. Poškodovani športniki.

Štirje mladi športniki so se znašli v ambulanti za poškodbe. Eden je imel poškodovan nos. Iz naslednjih podatkov določi za vsakega polno ime, šport, s katerim se ukvarja, in poškodovani del telesa.

- o Noben od štirih fantov nima enake začetnice imena in priimka.
- o Naši fanti so: Rok, Aljančič, boksar in fant s poškodovano roko.
- o Andrej in Elič sta kmalu ugotovila, da nimata nič zlomljenega, toda košarkar je moral čakati več ur, preden so potrdili, da njegova poškodba ni huda.
- o Fant s poškodovanim kolenom je bil nekaj let starejši od Ribnikarja in nogometaša in je z njima hodil na isto šolo. Erik pa je, nasprotno, odraščal v drugem mestu.
- o Smučar, Feliks in fant s poškodovano ramo so bili že prej v tej bolnici.
- o Ne Fink ne Erik nista nikoli imela poškodovanega nosu.
- o Elič je bil od vseh najmlajši, smučar pa najstarejši.

Pomagaj si z razpredelnico!

Naloge za 3. in 4. letnik srednje šole

1.

(a) Šahovski master-mind.

Pet črnih figur: kralj, kraljica, lovec, skakač in trdnjava, stojijo na šahovnici, na mestih označenih z zvezdicami.

Vsakega od treh kvadratov, označenih z 2, napada teh pet figur natanko dvakrat. Kje so posamezne figure?

8				*				
7	2							*
6								
5		*						2
4								
3			*		*			
2								
1				2				
	a	b	c	d	e	f	g	h

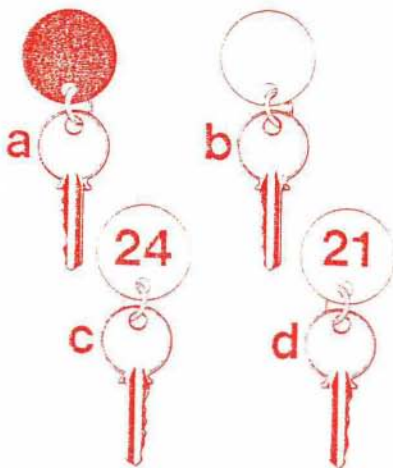
(b) Ključi.

Vsaka ploščica na ključih v nekem hotelu je na eni strani črna ali bela, na drugi strani pa je sobna številka. Na mizi so štiri ključi.

Ugotoviti želiš, če je resnična trditev:

Vsaka črna ploščica ima na drugi strani liho število.

Kateri dve ploščici boš obrnil, da boš lahko preveril pravilnost te trditve?



2. Križišče prednostne in stranske ceste.

V križišču, kjer stranska cesta prečka glavno cesto, pripeljejo iz različnih smeri štirje avtomobili: fičko, jugo, katrca in žaba. Po prometnih predpisih bi križišče prevzeli v temle vrstnem redu: fičko in jugo hkrati, nato katrca in nazadnje žaba. Če bi vozila, ki vozijo naravnost, zavijala levo, vozila, ki zavijajo levo, zavijala desno in vozila, ki vozijo desno, vozila naravnost, bi bil vrstni red takle: katrca, fičko, jugo in žaba. Kako vozi žaba?

3. Pet počitniških hišic.

Takoj za ovinkom stoji v vrsti pet počitniških hišic. Ena od njih se imenuje Jelka. Lastniki hišic so: tri ženske od katerih je ena Cilka, in dva moška. Poišči priimke vseh petih oseb, od katerih se ena piše Filip, ime počitniških hišic in njihov vrstni red, če veš:

- o Ženska iz Breze ni Marija, živi pa v četrti hiši. Fredi je lastnik tretje, gospa Trošt pa druge hiše.
- o Lastnik oziroma lastnica Hrasta, gospa Norčič in Helena živijo v prvih treh hišah, vendar ne nujno v tem vrstnem redu.
- o Gospod Božič je govoril z lastnikom hišice, takoj za svojo. Pogovor pa je poslušal lastnik Bukve, ki živi še naprej v vrsti.
- o Bor ni prva hišica, je pa pred hišo gospe Severjeve. Le-ta pa je pred Tedovo hišo.

Sklepe vnašaj v razpredelnico.

Izidor Hafner, Neža Mramor

BALKANSKA POLETNA ŠOLA MLADIH MATEMATIKOV NA CIPRU

Obisk balkanske matematične šole je bil zame neke vrste tolažilna nagrada, ker se mi je olimpiada izmuznila iz rok. Poleg mene je dobilo vabilo še pet Jugoslovanov. Vodji naše delegacije sta bila iz Sarajeva in sta tudi predavala na omenjeni šoli. Poleg Jugoslavije so sodelovale še Romunija, Bolgarija, Grčija in seveda Ciper (grški del).

Balkanska matematična šola se je odvijala na Dianellios Technical School v Larnaki. Moja pot proti Larnaki se je začela na brniškem letališču 26. avgusta ob enih zjutraj. V Beogradu so se mi pridružili še drugi. Med poletom smo klepetali vsak v svojem jeziku, na enak način smo komunicirali tudi ves čas bivanja na Cipru in smo se kar dobro razumeli, le včasih smo si morali pomagati z angleščino. Prvi dan smo bili prosti. Čakanje na začetek poletne šole smo lahko izkoristili za kopanje v Sredozemskem morju in za sprehajanje po peščeni plaži, ki pa je bila žal prepolna ljudi, zato je marsikdo rajši ostal v šoli in igral namizni tenis. Komur ni bilo do gibanja, je igral karte ali šah.

V šoli smo imeli od ponedeljka do petka po dve predavanji, vsako je trajalo približno uro in pol. Pozne popoldanske in večerne ure smo preživeli na izletih in tako nekoliko spoznali Ciper in njegovo zgodovino. Ogledali smo si Paralimni in okolico, v Nicosii obiskali The Prisons in Arheološki muzej. Namestnik župana Nicosie nam je priredil sprejem v Laiki Yitonii, zvečer pa smo prisostvovali predstavi talentov v Pera Chorion Nissou. Eden od izletov je bil v Pierides Museum in cerkev Svetega Lazarja, v Limassolu pa smo na vinskem festivalu prisostvovali predstavi v stilu "Pokaži, kaj znaš". V petek je bil slovesen zaključek matematične šole. Po slavnostnem govoru župana Larnake so voditelji ekip povedali nekaj besed o svojih vtisih s Cipra. Vsaka ekipa je predstavila svojo državo s kakšno pesmijo. V soboto smo si ogledali samostan v Kykkosu in v nedeljo so ekipe začele odhajati.

Mislim, da matematika ni bila edini namen našega bivanja na Cipru. Prav toliko je pomembno druženje mladih matematikov iz različnih dežel. Na ta način se teko vezi med deželami in med ljudmi – vezi za prihodnost. Matematična šola je potekala izključno v angleščini, kar je bila za nas dragocena izkušnja. Predavanjem sem lahko sledil, ker mi je bila večina obravnavane snovi znana. Predavatelji so bili prijazni in so radi pojasnili vsakomur, česar ni razumel, najsi je bil problem v razumevanju matematike ali angleščine.

Tomaž Cedilnik

PO SVETOVNEM NOGOMETNEM PRVENSTVU

Angležem pomeni nogomet zares "najpomembnejšo postransko zadevo". Celo naravoslovni tednik *Nature* je posvetil minulemu svetovnemu prvenstvu sredi julija kratek nepodpisan sestavek z naslovom *Prestavite vratnici in podnaslovom Razočaranju nad svetovnim prvenstvom bi se lahko na naslednjih tekmovanjih preprosto izognili*. Morda so v domovini nogometa tudi nekoliko razočarani nad uspehom svojega moštva, vendar je pikrim mislim v sestavku vseeno vredno prisluhniti.

Privržence nogometa so najbolj razočarale tekme, v katerih nobeno moštvo ni doseglo zadetka ali kvečjemu vsako od obeh moštev po en zadetek. Izid je bilo treba potem zaradi prirediteljev po sili dobiti "s ponižujočo igro naključja", pri kateri ljudje brcajo žogo iz majhne oddaljenosti od osebe, ki jo imenujemo vratarja". Ta ponižujoča igra naključja - streljanje enajstmetrovk - je v resnici nepotrebna. Do nje pride, ker na današnjih tekmah dosežejo tako malo zadetkov, da izid ne more biti objektivna mera za kakovost moštva.

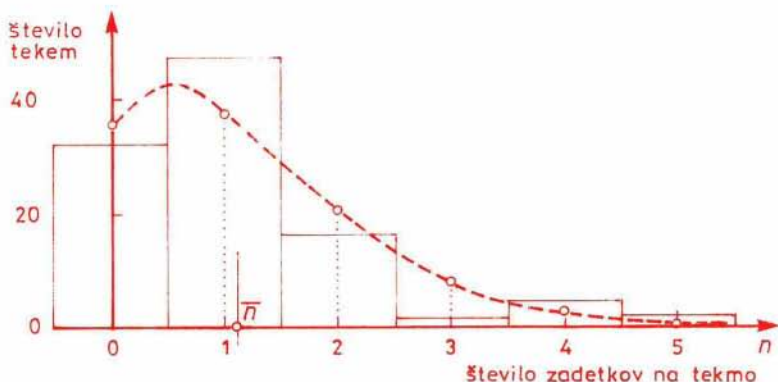
Kakovost moštva določa povprečno število zadetkov, ki jih doseže na tekmih. Vsakemu moštvu je mogoče prirediti ta podatek. Tekma naj bi pokazala, katero moštvo doseže večje povprečno število zadetkov na tekmo. Temu bi se lahko približali s podaljšanim časom igranja, denimo na 12 ur. Vendar bi to zahtevalo prevelik delež časa na televiziji. Zato je preprostejša rešitev, če razmaknejo vratnici, tako da bodo vrata širša in bo lažje doseči zadetek.

Mesec pozneje je A.D. Carothers v pismu uredništvu *Nature* podprl uredniški sestavek s pregledom števila zadetkov, ki so jih dosegla moštva v 90 minutah igre za vseh 52 tekem minulega svetovnega prvenstva. Na tekmo je doseglo (slika 1)

po 0 zadetkov	32 moštev,
po 1 zadetek	47 moštev,
po 2 zadetka	17 moštev,
po 3 zadetke	2 moštv,
po 4 zadetke	4 moštva,
po 5 zadetkov	2 moštv.

(Več kot 5 zadetkov ni doseglo nobeno moštvo.)

Za vsoto dobimo dvojno število tekem 104, saj sta vsako tekmo igrali po dve moštv. Vseh zadetkov je bilo $47 + 2 \cdot 17 + 3 \cdot 2 + 4 \cdot 4 + 5 \cdot 2 = 113$. Moštva so dala v povprečju po $113/104 = 1,087$ zadetka na tekmo, tako da



Slika 1 Porazdelitev moštev po številu danih zadetkov na tekmo na svetovnem nogometnem prvenstvu 1990 v Italiji. Črtkano je narisan *Poissonova porazdelitev*, kot da bi se število zadetkov n lahko spreminjalo zvezno. To porazdelitev podamo kot $p_{\bar{n}}(n) = (\bar{n})^n e^{-\bar{n}} / n!$ pomnoženo s številom tekem 104. Povprečno število zadetkov je $\bar{n} = 1,087$. Tako porazdelitev lahko izpeljemo, če privzamemo, da so vsa moštva enakovredna. Ker privzetek ni izpolnjen in ker je število tekem razmeroma majhno, nas odstopanja ne smejo presenetiti.

je bilo v povprečju na tekmo doseženih $2 \cdot 1,087 = 2,174$ zadetka.

Iz preglednice izhaja, da meri verjetnost za izid 0:0 skoraj $\frac{1}{3}$. To spoznanje je domala neodvisno od tega, koliko zadetkov doseže moštvo na tekmo. Tudi če igrata moštvi, od katerih doseže eno v povprečju zadek več od drugega, na primer če doseže prvo v povprečju na tekmo $\frac{4}{3}$ in drugo $\frac{1}{3}$, je verjetnost, da prvo moštvo premaga drugo, samo malo večja od $\frac{1}{2}$.

Če bi se povečalo povprečno število zadetkov, ki jih doseže moštvo na tekmo, na primer na 4, bi se zmanjšala verjetnost za izid 0:0 na okoli $\frac{1}{6}$. Verjetnost, da bi moštvo s povprečnim številom zadetkov na tekmo $5\frac{1}{3}$ premagalo moštvo z dvakrat manjšim povprečnim številom zadetkov na tekmo $2\frac{2}{3}$, bi se zvečala na $\frac{4}{5}$.

Po tem se vsiljuje predlog, da bi bilo vsekakor umestno povečati povprečno število zadetkov, ki jih moštvo doseže na tekmi. Le tako bi postale nogometne tekme zopet privlačne in zanimive za gledalce in bi bil njihov izid pravičnejši glede na vrednost udeleženih moštev. Ni presenetljivo, da o tem največ razmišljajo v domovini nogometa (Presek je o tem že pisal v daljšem sestavku *Ali je nogomet igra na srečo* 13 (1985/86) 9), vprašanje pa je, ali bo mednarodna nogometna organizacija FIFA v bližnji prihodnosti pripravljena razglabljati o takšni spremembi pravil.

Janez Strnad

IZ POGOVORA Z VLADIMIROM I. ARNOLDOM ⁽¹⁾

Najprej nam, prosim, povejte, kako ste postali matematik? Kakšno vlogo so pri tem imeli družina, šola, matematični krožki, tekmovanja?

V nižjih razredih osnovne šole ni še nič kazalo na mojo matematično pot. Vedno sem sovražil učenje na pamet, zato je učiteljica rekla staršem, da tak toplotalec kot jaz nikoli ne bo obvladal poštevanka.

Prvi matematični pretres sem doživel, ko smo dobili pravega učitelja matematike. Spominjam se naloge o starkah, ki sta istočasno odšli od doma druga proti drugi, se srečali opoldne in prišli v tuje mesto prva ob štirih popoldne in druga od devetih. Treba je bilo ugotoviti, kdaj sta začeli hoditi. Algebre se tedaj še nismo učili. Nalogo sem rešil z razmerji in prvič okusil radost odkritja; zaradi te radosti sem postal matematik.

Prvo matematično knjižico *Števila in slike* Rademacherja in Töplitza sem dobil v roke, ko mi je bilo dvanajst let. Na dan sem prebral po nekaj strani. Leto pozneje mi je stric nekega večera pojasnil, kaj je matematična analiza. Na koncu je omenil, kako določimo površje vode v vrteči se posodi. Nato sem raziskal učbenik Grenvila in Luzina in potem sam brez izbire prebiral vse matematične knjige iz knjižnice zgodaj umrlega očeta (sem matematik v četrtem rodu). Posebej sta mi ugajala Eulerjev *Uvod v analizo majhnega* in Hermitov *Tečaj analize*.

V tem času [sredi petdesetih let] so se na univerzi razvili matematični krožki za učence sedmega do desetega razreda. Ob nedeljah so profesorji predavali učencem (številna izmed predavanj so izšla v zbirki *Popularna matematična predavanja*). Proti koncu šole smo dokaj dobro poznali prednosti (in slabosti) večine predavateljev. Učenci smo napake in prevare izraziteje občutili, ker še nismo bili vajeni dajati videza, da razumemo, česar ni mogoče razumeti (morda so sedanji učenci to prednost zgubili, pa tudi predavanj ni več).

Moj krožek so vodili tedanji študenti, ki so zdaj znani matematiki. Tedanji krožki so dajali manj znanja kot današnji, zato pa je bila vsaka ura praznik. Krožke je preveval duh resnice, lepote in samostojnosti (učenec ni vrečka, ki jo je treba napolniti, ampak bakla, ki jo je treba prižgati) in omejeval obseg znanja na račun kakovosti. Prav v razpravah pri obravnavanju

¹ Vladimir Igorjevič Arnold je eden najvidnejših matematikov današnjega časa. Je profesor na Moskovski državni univerzi, podpredsednik Moskovskega matematičnega društva, dopisni član akademije znanosti in se zanima za širok krog znanstvenih vprašanj. Iz pogovora s sodelavcem *Kvanta*, ki ga je objavila revija julija 1990.

nalog smo se učili polnega razumevanja in matematične strogosti. Zato je bila fizika odrinjena, lepota matematike jo je za dlje časa zasenčila.

Moji uspehi na matematičnih tekmovanjih so naraščali od pohvale v 7. razredu do druge nagrade v 9. in 10. razredu. Čustveno so tekmovanja veliko pomenila, a zdaj se bolj spominjam krožkov in predavanj. Še zdaj cenim lepe knjige, ki sem jih dobil kot nagrade na tekmovanjih: *Nazorno geometrijo* Hilberta in Kohn-Fossena, *Kaj je matematika?* Couranta in Robbinsa, *Uvod v teorijo linearnih prostorov* Šilova ter *Teoretično mehaniko* in *Analizo* Valle-Poussinsa s podolgovatim pravokotnim natiskom: "Zmagovalcu moskovske matematične olimpiade".



Z matematiko se aktivno ukvarjate več kot trideset let. Ali se je v tem času spremenil odnos družbe do matematike?

Odnos družbe (ne samo v SZ) do osnovnih znanosti nasploh in do matematike posebej podrobno opisuje basen I.A.Krylova *Svinja pod hrastom*.² Trideseta in štirideseta leta so pri nas matematiko manj prizadela kot druge znanosti. Kot vemo, je Viète šifriral in dešifriral za francoskega kralja Henrika IV. Odtlej nekatere dele matematike pospešujejo vse vlade, celo Berijo je skrbela ohranitev matematične kulture v državi.

V zadnjih tridesetih letih se je ugled matematike zmanjšal v vseh državah. Mislim, da so tega krivi matematiki sami (predvsem Hilbert in Bourbaki³), ki so proglasili za cilj svoje znanosti raziskovanje vseh nasledkov poljubnih sistemov aksiomov.

² Svinja je rila po koreninah, čeprav jo je hrast opozoril, da raste želod prav na njem (op.prev.).

³ Nicolas Bourbaki je kolektivni psevdonim za skupino francoskih matematikov, ki so napisali tečaj sodobne matematike, v katerem dosledno uporabljajo aksiomatično metodo.

Ali tudi v matematiki lahko govorimo o 'modi'?

Razvoj matematike spominja na hitro vrtenje kolesa, s katerega brizgajo curki na vse strani. Moda je pot od glavnega tira po tangenti. Ta tok posnemovalskih del je zelo opazen in vsebuje glavni del mase, vendar se čez čas zagotovo zgubi, ko se odtrga od kolesa. Da bi ostali na kolesu, si morate ves čas prizadevati, da se gibljete pravokotno na tangento.

Ali se s časom spreminjajo kriteriji strogosti v matematičnih razglabljanjih? Kako so povezani s sedanjo teoretično matematiko računalniški poskusi (na primer v teoriji fraktalnih množic)? Ali matematik-raziskovalec potrebuje računalnik? Ali ga v svojih raziskovanjih uporabljate?

Kolikor vem, se od Evklidovih časov kriteriji strogosti v matematiki niso spremenili. Računalniki ponujajo velike možnosti za poskušanje in tudi jaz uporabljam računalnik, skupaj z logaritmičnim računalom in tablico za množenje. Mislim, da večine matematičnih rezultatov ne bi bilo brez poskušanja te ali one vrste. Računalniški poskusi so na primer veliko prispevali k znamenitim delom Juliája, Fatouja in drugih pri iteraciji polinomov.

Veliko se ukvarjate s popularizacijo matematike.⁴ Kaj mislite o popularizaciji?

Eden od prvih popularizatorjev - Faraday - je prišel do sklepa: "Popularno nikoli ni poučno in poučno ne popularno". Ta pojav Faradaya lahko pojasnimo s pripombo N.Bohra, da sta jasnost in resnica komplementarni.

Mnogi bralci Kvanta bi radi postali matematiki. Ali obstajajo znaki (in nasprotni znaki) o tem, da lahko postane matematik vsakdo, ki ga zanima matematika? Ali je za bodočega matematika obvezno sodelovanje na tekmovanjih?

Ko sem A.N.Kolmogorovu pripovedoval o svojem sodelovanju na Concours général, ki v Franciji ustreza našim olimpiadam, je devetdesetletni Adamar negodoval, da je bil on samo drugi; tisti, ki je bil prvi, je tudi postal matematik, a veliko slabši. Nekateri zmagovalci ne naredijo pozneje nič ko-

⁴ Bralcem priporočamo Arnoldovo knjigo *Huygens in Barrow, Newton in Hooke*, Nauka, Moskva 1989.

450 - LETNICA ROJSTEV MATEMATIKOV VIETA IN LUDOLPHA

Zanimivo je, da sta se leta 1540 rodila kar dva matematika, katerih imeni sta se do danes ohranili v malodane vseh srednješolskih učbenikih tega sveta: *Francoz François Viète* in *Nizozemec Ludolph van Ceulen*. Koeficiente kvadratne enačbe

$$x^2 + px + q = 0$$

in njena korena x_1 in x_2 povezujeata Viètovi formuli:

$$x_1 + x_2 = -p$$

$$x_1 \cdot x_2 = q$$

Po van Ceulenu pa število π pogosto imenujemo *Ludolfovo število*.



François Viète

LUDOLPHI & CEULEN De CIRCULO & ADSCRIPTIS LIBER.

In quo plurimorum polygonorum latera per irrationalium numerorum
gryphos, quorum liber seriem per numeros abfolutos finitum
Algebraicorum aequationum legem explicatur.

Quae hactenus inoffensa pagina nunc innotuit
Omnia à vernaculo Latine fecit, et annotatibus illustravit
Willebrordus Snellius A. F.



LYOD. SATAV.
Apud Iohannem Colster Anno 1619.

Prva L. van Ceulnova knjiga

François Viète (Vieta) - Galski Apolonij (1540 - 1603)

se je rodil v premožni trgovski družini v Fontenay-le-Compte, študiral pravo in bil pravni svetovalec v tedanji visoki družbi, med drugim tudi francoskemu kralju Henriku III in hugenotskemu Henriku IV. Nemajhno slavo je njegov ostri um požel 1589 v vojni s Španijo, ko mu je po naročilu Henrika IV uspelo najti ključ tajne pisave, ki so jo Španci uporabljali v vojnih načrtih. Pisava je bila tako zamotana, da so se Španci počutili povsem varne. Pretreseni, da je bila odkrita, so se celo pritožili pri papežu, češ da Francija v vojni uporablja čarovnijo.

Z matematiko se je Vieta veliko ukvarjal predvsem po 40. letu starosti. Svoja dela je z velikimi uspehi izdajal v samozaložbi. Veliko so ga ponatiskovali, vendar mnoga njegova dela dandanes veljajo za izgubljena, čeprav vemo, da so obstajala. Vieta ima velike zasluge za razvoj algebre, ker je v njej prvi uvedel preprosto in uporabno simboliko ter s tem matematikom odprl pot v algebro. Izid njegove "*Isagoge*" (In artem analiticam Isagoge) leta 1591 lahko štejemo za spočetje moderne algebre.

Ukvarjal se je tudi z ravninsko in sferno trigonometrijo in tabeliranjem trigonometričnih funkcij. Veljal je za izjemnega mojstra v računanju s trigonometričnimi funkcijami in je prvi - moderno povedano - predstavil trigonometrične funkcije z neskončnimi vrstami. Izračunal je vrednost števila π na 9 decimalk natančno, pri čemer si je pomagal z dvema 1296-kotnikoma, ki ju je včrtal in očrtal krožnici. Nadalje je predstavil število π z neskončnim produktom in z verižnim ulomkom.

Še bi lahko naštevali, a se ustavimo le ob njegovem zadnjem delu. To je zvezek "*Apollonius Gallus*". V njem je rešil vseh deset konstrukcijskih problemov, ki nastopajo v Apolonijevi nalogi. To je naloga, kjer je potrebno poiskati vse krožnice, ki se dotikajo treh danih krožnic, pri čemer je vsaka od danih krožnic lahko izrojena v premico ali reducirana v točko. To nalogo je zastavil in rešil že antični matematik Apolonij iz Perge okoli 200 let p. n. š. v izgubljenem delu, o katerega obstoju in vsebini vemo nekaj le iz del pozno antičnega matematika Papposa. Vieta je kot prvi matematik to domnevno delo obnovil. Ker je bil Apolonij iz Perge eden najslavnejših antičnih matematikov, si je Vieta z izbiro naslova "*Apollonius Gallus*" prislužil vzdevek, ki mu ga radi pritikajo - *Galski Apolonij*.

Ludolph van Ceulen (1540 - 1610)

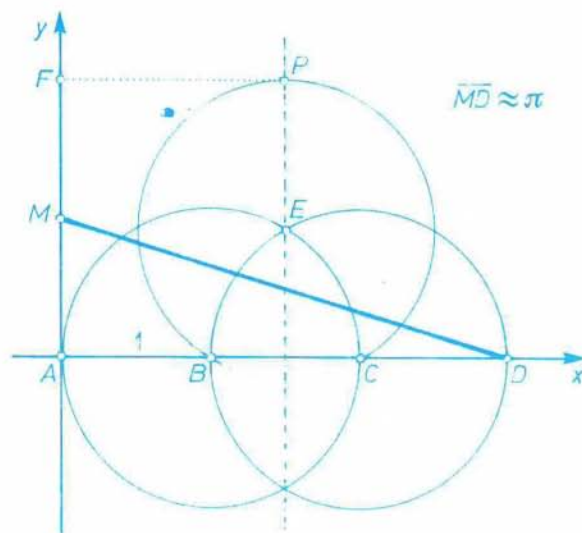
se je rodil v Hildesheimu, študiral matematiko in jo v več krajih poučeval, dokler mu ni bila ponujena profesura za strategijo vojskovanja v Leidenu na Nizozemskem. Umrl je 70 let star kot ugleden učenjak na univerzi v Leidenu. Na njegovo željo so mu na nagrobnik vklesali 36 decimalnih mest števila π . Nihče pred njim pri določanju števila π ni dosegel tolikšne natančnosti. Van Ceulenov rezultat so izboljšali šele konec 17. stoletja.

Vrednost

$$\pi = 3,14159\ 26535\ 89793\ 23846\ 26433\ 83279\ 50288$$

je objavil leta 1596 v svoji knjigi *Van den Cirkel*. Bogato geometrijsko delo z 260 stranmi je ohranjeno v latinskem prevodu. Po njegovi smrti je izšla še ena knjiga, ki govori o uporabi aritmetike v osnovah geometrije.

In še naloga za Presekovke bralce:



Izračunajte, s kolikšno natančnostjo podaja vrednost števila π geometrijska konstrukcija na sliki 1. Pri tem imajo vse tri krožnice polmer enak 1, po dve in dve pa potekata skozi središče tretje. Daljica FP je vzporedna osi x , točka M pa je razpolovišče daljice AF . Približek za π je dolžina daljice MD , torej $MD \approx \pi$.

Marija Vencelj

KJE TIČI VZROK – Rešitev s str. 257

Rezultat je enak pravilnemu, ker osnova $\alpha = \frac{1+\sqrt{5}}{2}$ ustreza enačbi

$$\alpha^2 + \alpha = \alpha^3$$

kar preverimo z direktnim računom.

Ta enačba ima še dve rešitvi: 0 in $\frac{1-\sqrt{5}}{2}$, ki pa nista pozitivni in ne moreta biti osnova eksponentne funkcije. Torej je $\frac{1+\sqrt{5}}{2}$ edina osnova, pri kateri je Mihov postopek lahko dal pravi rezultat.

In kako rešimo dano enačbo? Če izračunamo kub na desni strani enačbe in vstavimo novo spremenljivko

$$y = \left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^x \quad (1)$$

dobimo enačbo

$$y^2 + y - (2 + \sqrt{5}) = 0 \quad (2)$$

Koren iz diskriminante te enačbe dobimo z nastavkom

$$\sqrt{9 + 4\sqrt{5}} = a + b\sqrt{5}$$

kjer sta a in b racionalni števili. To zvezo na obeh straneh kvadriramo

$$9 + 4\sqrt{5} = a^2 + 5b^2 + 2ab\sqrt{5}$$

od koder zaradi racionalnosti a in b sledi

$$a^2 + 5b^2 = 9, \quad 2ab = 4$$

Ta sistem zlahka rešimo. Dobimo dve iracionalni rešitvi, ki nas ne zanimata, in dve racionalni $a = 2, b = 1$ ter $a = -2, b = -1$. Torej je

$$\sqrt{9 + 4\sqrt{5}} = \pm(2 + \sqrt{5})$$

Enačba (2) ima torej rešitvi

$$y_1 = \frac{1+\sqrt{5}}{2} \quad \text{in} \quad y_2 = -\frac{3+\sqrt{5}}{2}$$

Ker je y kot eksponentna funkcija (1) vedno pozitiven, y_2 ne pride v poštev. Iz y_1 pa dobimo, da je $x = 1$.

Marija Vencelj

NOVE KNJIGE

VESELJE Z ZNANOSTJO

"Presneta fiz'ka, sploh je ne kapiram! Doma se vsi ubadamo z n'o in to sam zato, da spraskamo skupaj za tisto piškavo dvojko. TRŠICA me k'r naprej krega, da n'č ne znam, ampak jest se učim! Vse zakone na pamet! K'me pa vpraša, pa zmrznem. Sprašuje me pa ene čudne poskuse, to pa ni tist' k'r se napiflam. Pa spet dobim šus. Sovraž'm fiz'ko!"

Kolikokrat sem že slišala podobne pripombe. Sem "tršica", ampak ta "tršica" zelo rada uči fiziko, uživa v njej. Srce se mi kar trga, ko slišim take izjave. Razumem pa učence, ki tako tarnajo. Tudi sama nisem imela rada fizike ne v osnovni ne v srednji šoli. ZAKAJ? V osnovni šoli nam je učitelj samo predaval, poizkusov pa sploh nismo delali. Mimogrede, tudi predaval ni kaj prida. Na pamet smo se naučili nekaj formul, pa smo že imeli oceno dve ali tri. V srednji šoli pa je profesor že vnaprej predvideval, da nekaj znamo iz osnovne šole. Kakšna zmota!!! In ker naj bi poizkuse že znali delati, smo se spet poglobljali v teorijo, težke izračune... Učila sem se in učila, imela fiziko 5, razumela je pa v bistvu nisem. To sem videla, ko sem začela študirati na Pedagoški akademiji, kjer sem prvič videla kup poizkusov. Moram reči, da sem tudi akademijo zapustila z mešanimi občutki in trdnim sklepom, da te preklemane fizike že ne bom učila. A glej ga šmenta - prva služba, ki sem jo dobila, je bila poučevanje fizike. Začela sem se poglobljati v osnovo naravoslovnih predmetov, v izvedbo preprostih, življenjskih poizkusov in na moč sem bila presenečena, ko sem ugotovila, kako zabavno in poučno je to. Tako sem ponovno odkrila "toplo vodo" pri 21-ih letih. Kako žalostno in smešno hkrati! Fiziko sem vžljubila in prav srečna sem, ko vidim, kako me učenci pri izvedbi preprostih poizkusov iz življenja in preprosti fizikalni razlagi le-teh gledajo in poslušajo z velikim zanimanjem. Škoda, ker v osnovni šoli ni več časa za take stvari. Zato naredim več poizkusov pri dodatnem pouku. Za to pa je potrebna ustrezna oprema in literatura. Pred nekaj dnevi sem dobila na vpogled zbirko treh knjižic VESELJE Z ZNANOSTJO (Voda, Zrak, Svetloba), v katerih so prikazani poizkusi, triki, ki jih lahko vsakdo naredi doma sam s pripomočki, ki mu jih nudi kuhinja, pisalna miza, domača delavnica, ... Potrebno pa je, jasno, interes in pridne roke tistega, ki se poizkusa loti. Če imate vse te pripomočke in lastnosti, je uspeh zagotovljen že vnaprej. V knjigah je poleg opisa poizkusov zapisana še preprosta razlaga rezultatov. Po mojem mnenju so knjižice primerne za učence osnovnih šol. Priporočila bi jih tudi vsem učiteljem, ki nimajo ustrezne literature o zanimivih, izvedljivih poizkusih. Poizkuse lahko razložimo zelo preprosto - ali pa na malce "višjem

nivoju", tako so te knjižice primerne za vse razrede osnovne šole. Čeprav bi se morda osmošolci poizkusom smejali, bi jim nasmešek izginil z obraza, ko bi morali po "fizikalno" dokazati in razložiti preprosto, življensko uganko.

Knjižice so v izvirniku napisane v angleščini. Prevedel in priredil jih je prof. dr. Janez Ferbar, izdala pa Pomurska založba iz Murske Sobote. Tiskane so na kvalitetnem papirju, z lepimi in preglednimi barvnimi fotografijami in risbami. In kar je najvažnejše, razvijajo otrokovo razmišljanje in razgledanost.

Poleg teh treh knjižic so doslej v izvirniku izšle naslednje knjižice: Moving, Electricity-Magnets, Sound, Simple Chemistry, Weather. Te knjige naj bi pri nas izšle naslednjo jesen.

Za poiskušnjo objavljamo še odlomek iz knjižice Voda, s strani 31 Ukana s čarobnim jajcem, na 4. strani ovitka pa naslovnice vseh treh knjig.

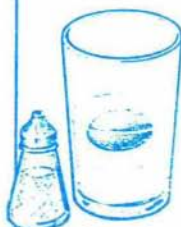
"tršica" Joži Hribar



Ukana s čarobnim jajcem

Slana voda ima večjo gostoto kot navadna, zato v morju lažje plavamo kot v jezeru. To lastnost lahko izrabimo za ukano z jajcem.

Pripomočki: dva kozarca, sol, dve jajci.



Slana voda



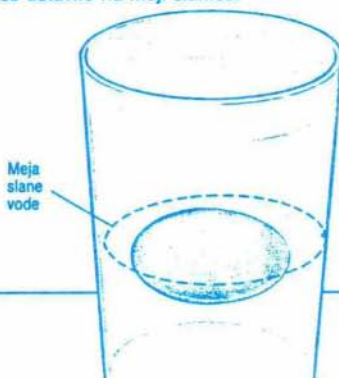
Navadna voda

V pol kozarca vode vmešaj deset čajnih žličk soli. V drugi kozarec do polovice nalij navadno vodo. V vsak kozarec spusti jajce in ugotovi, ali plava. Odkril boš, da jajce v slani vodi plava, ker ima **manjšo** gostoto kot slana voda. V navadni vodi pa se bo jajce potopilo, ker ima **večjo** gostoto kot navadna voda.



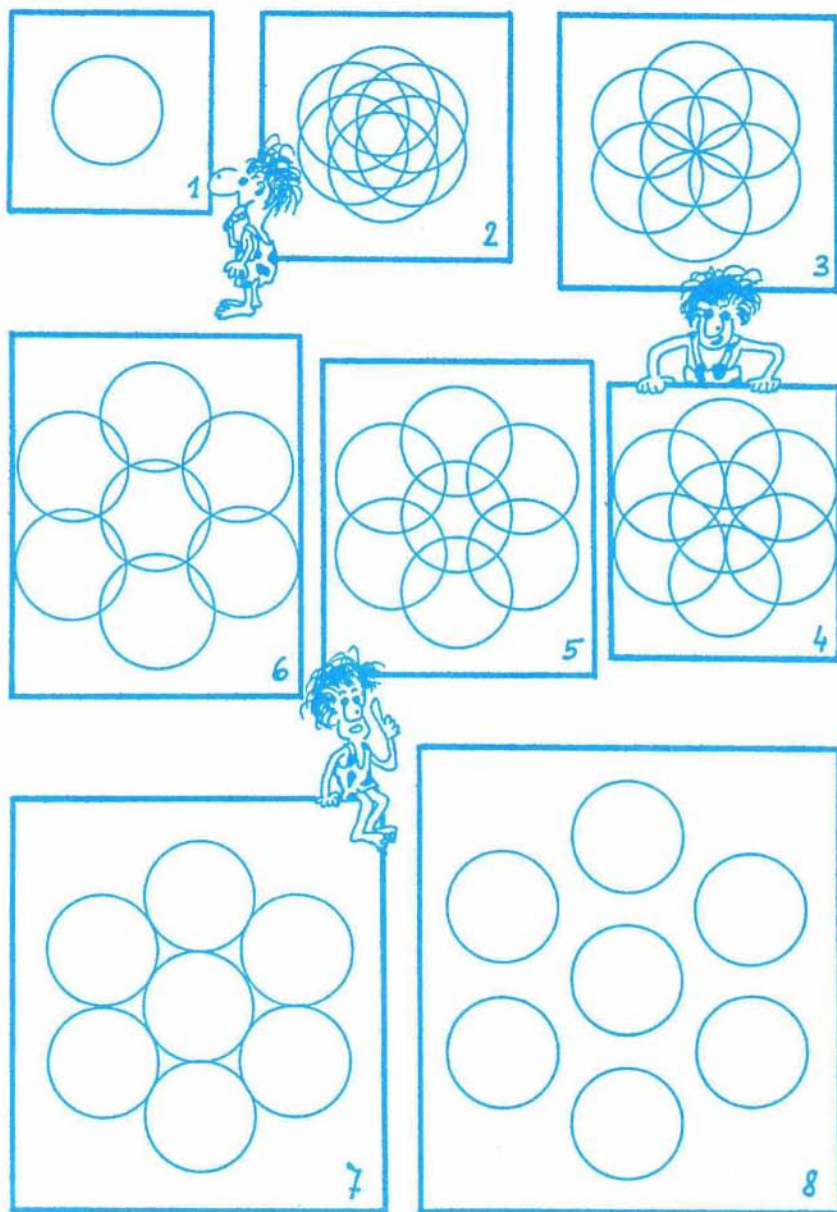
Naredi še en poskus.

Kozarec do polovice napolni z navadno vodo, v drugega pa nalij prav toliko slane vode. Navadno vodo zelo pazljivo zlij na slanico. Tekočini naj se ne zmešata! Curek navadne vode prestrezi z žlico ali pa naj polzi po steni kozarca. Jajce narahlo spusti v vodo. Potonilo bo v sladki vodi in se ustavilo na meji slanice.



NALOGE

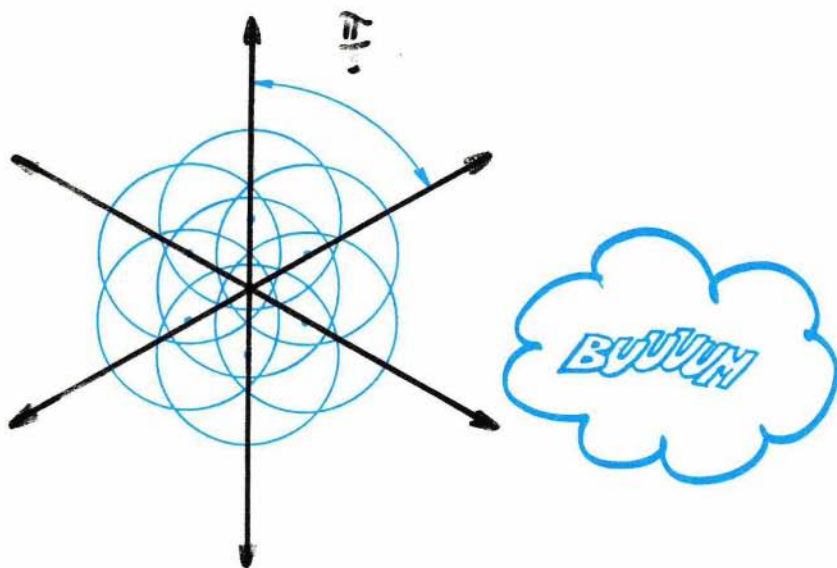
PRESEKOVA NADLOGA – EKSPLOZIJA KROŽNIC



Za začetek si pozorno oglejmo strip na prejšnji strani.

Zdi se, da nam strip v svoji prvi sliki prikazuje krožnico v ravnini. Vendar pa tak videz prav nagajivo vara! Krožnic, ki "nastopajo" v stripu, je v resnici namreč kar sedem. Seveda na prvi sliki ne moremo opaziti vseh, kajti središče imajo skupno, polmere pa tudi enake.

V nadaljevanju nam strip prikazuje zanimivo geometrijsko eksplozijo. Šestero krožnic se nenadoma požene vsaka v svojo smer. Le eni, sedmi, ni do tega. Ostane raje kar na svojem mestu. Ostale krožnice pa se razletijo tako spretno, da sosednji poltraki, po katerih bežijo njihova središča, oklepajo med seboj zmeraj natanko šestino polnega kota. Simetrija v eksploziji se torej ves čas ohranja.



Krožnicam sledimo nato še nekaj časa, dokler vsa reč ne postane vendarle preveč razpršena (sličice od 3 do 8).

In kakor eksplodirajo krožnice, se nam rado pripeti podobno tudi z nalogami in z vprašanji. Torej!

1. Dopolni tabelo, v tabeli že zapisane trditve pa preveri.

n	število območij, na katera razpade ravnina na n -ti sličici v stripu	oddaljenost d središča zunanje krožnice (*) od začetnega središča
1	2	$d = 0$
2	44	$0 < d < r (**)$
3	25	
4		$d = (2r\sqrt{3})/3$
5		
6	20	$d = r\sqrt{3}$
7	14	$d = 2r$
8		

2. Dokaži, da razpade ravnina pri eksploziji krožnic na kvečjemu 44 območij.

3. Spustimo sedaj domišljijo z zanke in si zamislimo, da strip ilustrira pravzaprav eksplozijo sedmih krogelnih lupin - recimo jim poslej kar oble. Zaradi poenostavitve je vsa reč narisana kar v dvodimenzionalni projekciji - torej na ravnini. In ta ravnina naj bo vzporedna s tisto, po kateri se prvih šest obel odmika od začetnega skupnega središča.

Ali bi ti za takšno eksplozijo uspelo izpolniti z ustreznimi podatki tabelo? Ta naj bo podobna prejšnji, ima pa naj naslednje rubrike:

n	število teles, na katera razpade prostor v trenutku, ki ga prikazuje n -ta sličica stripa	oddaljenost d središča zunanje oble od začetnega središča
1	.	.
2	.	.
.	.	.

Opombe:

(*) Zunanja krožnica naj bo katerakoli izmed tistih (šestih), ki se v eksploziji odmikajo od začetnega skupnega središča.

(**) r naj bo polmer sleherne izmed krožnic v eksploziji.

4. Za konec pa se vrnimo spet na začetek - nazaj k eksploziji krožnic v ravnini.

Ali bi znal narisati in v ustrezni tabeli tudi numerično obdelati strip, ki bi predstavljal projekcijo te eksplozije v enodimenzionalni podprostor - premico?

Literatura:

Keith Critchlow, *Islamic Patterns*, Thames and Hudson, London 1989

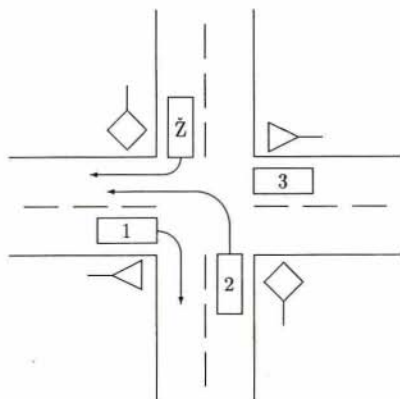
Vilko Domajnko

5. REPUBLIŠKO TEKMOVANJE IZ LOGIKE – Rešitve s str. 356

7. in 8. razred OŠ

1.

- (a) Prva karta je križ, druga je pik in tretja srce.
- (b) Če bi bila resnična Borisova izjava, bi bila resnična tudi Savinova, kar nasprotuje dejstvu, da je resnična ena sama izjava. Zato je resnična Dragova izjava, ki je negacija Borisove. Ker pa je tudi Savinova izjava neresnična, nima Peter nobenega prijatelja.



2. Rešitev naloge je na sliki 2.

3. Če ste podatke pravilno vnesli v razpredelnico:

	Petra	Nina	Lucija	Pod lipco	Lovec	Mrak	opera	keg	kino
Cene		DA	NE			NE	NE		
Henrik	DA		NE			NE	DA	NE	NE
Aleš	NE	NE	DA	NE	NE	DA	NE		
opera	DA		NE			NE			
kegljanje	NE	DA	NE			NE			
kino			DA	NE	NE	DA			
Pod lipco	DA	NE							
Lovec	NE	DA	NE						
Mrak		NE	DA						

ste iz nje lahko razbrali, da sta šla Petra in Henrik najprej Pod lipco, potem pa v opero, Nina in Cene sta večerjala pri Lovcu, potem pa sta skupaj kegljala, Lucija in Aleš pa sta šla po večerji pri Mraku v kino.

1. in 2. letnik SŠ

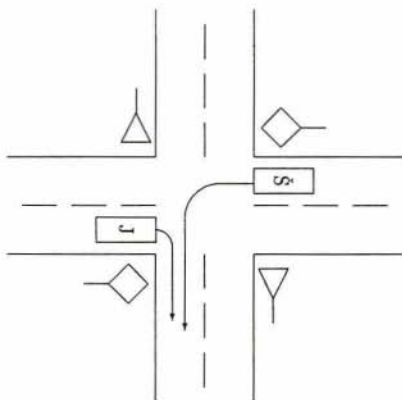
1.

- (a) Druga in tretja trditev sta lahko hkrati resnični (če je med novimi konji sicer vsaj en črn, pa tudi vsaj en, ki ni črn) in hkrati neresnični (če so vsi novi konji črni).

Prva in druga trditev sta lahko hkrati neresnični (če noben konj ni črn), ne moreta pa biti hkrati resnični.

- (b) Pravilnih odgovorov mora biti pet ali šest. Ker so imela dekleta enako število pravilnih odgovorov, mora biti število pravilnih odgovorov deljivo s tri, torej šest. Od tod takoj ugotovimo, da je četrta karta srce, pravilni razpored kart pa je: pik, joker, križ, srce in kara.

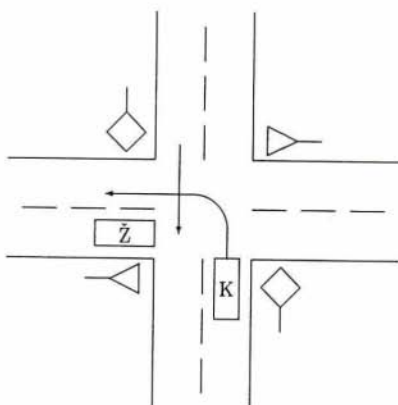
2. Rešitev naloge je na sliki 3.
3. Iz izpolnjene razpredelnice razberemo, da ima Andrej Ribnikar, ki je boksar, poškodovan nos; Erik Aljančič, košarkar, si je poškodoval ramo; Feliks Elič, nogometaš, ima poškodovano roko; Rok Fink, smučar, pa koleno.



3. in 4. letnik SŠ

1.

- (a) Na polju b5 stoji kralj, na g7 kraljica, na e3 lovec, na c3 skač in na d8 trdnjava.
- (b) Najprej obrnemo ploščico a. Če je na drugi strani sodo število, trditev ni pravilna. V nasprotnem primeru obrnemo ploščico c. Če je črna, je trditev napačna, če je bela, je trditev pravilna. Ploščici b in d ne vplivata na pravilnost trditve.



2. Rešitev naloge je na sliki 4.
3. Iz pravilno izpolnjene razpredelnice sledi rešitev:
Lastnica prve hišice, Jelke, je Marija Norčič; druga hišica se imenuje Bor, njena lastnica pa je Helena Trošt. Lastnik tretje hišice, Hrasta, je Fredi Božič; četrta hišica, Breza, je last Cilke Sever; peti preostane ime Bukev in lastnik Ted Filips.

Izidor Hafner

REŠITVE NALOG

IZBIRNO TEKMOVANJE IZ LOGIKE ZA OSNOVNOŠOLCE IN SREDNJEŠOLCE - Rešitve s str. 236

7. in 8. razred OŠ

- 1a. Iz 4. dejstva sklepamo, da sedita Boris in Tomaž na isti strani Tine. Ker je Boris poleg Tine, je med Tino in Tomažem vsaj en sedež. Iz 2. dejstva sledi, da je Jasna na drugi strani Tine kot Tomaž. Med Jasno in Borisom je vsaj en sedež (Tinin). Če bi bil med Jasno in Borisom več kot en sedež, bi bila Lucija poleg Jasne in Tine, kar je v nasprotju s 1. dejstvom. Vrstni red je torej: Jasna - Tina - Boris - Lucija - Tomaž.
- b. Andrejeva in Borisova izjava si nasprotujeta: ena je resnična, druga napačna. Ker je resnična samo ena od treh izjav, je Klemnova izjava napačna. To pomeni, da je tat Klemen.
2. Vozilo 1 je katrca, vozilo 2 je žaba, vozilo 3 je jugo, vozilo 4 pa je fičko.
- 3.

	Boris	Peter	Rok	Samo	berač	pek	robot	slon
Branka	NE	NE	DA	NE	NE	DA	NE	NE
Pavla	NE	NE	NE	DA	NE	NE	DA	NE
Renata	DA	NE	NE	NE	NE	NE	NE	DA
Saša	NE	DA	NE	NE	DA	NE	NE	NE
berač	NE	DA	NE	NE				
pek	NE	NE	DA	NE				
robot	NE	NE	NE	DA				
slon	DA	NE	NE	NE				

1. in 2. letnik SŠ

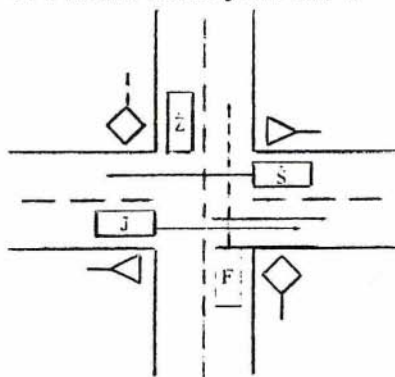
- 1a. Izvlekla bo eno pismo iz predala označenega z NOTRANJA IN ZUNANJA. Če je pismo označeno z NOTRANJE, potem so v predalu samo notranja pisma (saj so vse nalepke premešane). Potem bo predal označen ZUNANJA vseboval mešanico notranjih in zunanjih pisem, predal NOTRANJA pa bo vseboval sama zunanja pisma. Podobno sklepamo, če Jana potegne pismo z oznako ZUNANJE.

b. Pomagamo si z razpredelnico.

	franc.	šved.	nem.	jap.	ang.
Phillip				DA	NE
Paul			DA		
James	DA		NE		
Louis	DA				NE
George			DA	DA	

Ker Paul služi Jamesu in Georgu za prevajalca, mora imeti z vsakim po en skupni jezik. Od tod sklepamo, da George govori nemško, skupni jezik Paula in Jamesa je lahko edino angleški, kajti sicer bi morala Phillip in Louis govoriti angleško, kar ni res.

2. Pravilna rešitev je na sliki 4.



Slika 4. K = katra, Ž = žaba, G = golf, F = fičo

3. Pri sklepanju si pomagamo z razpredelnico:

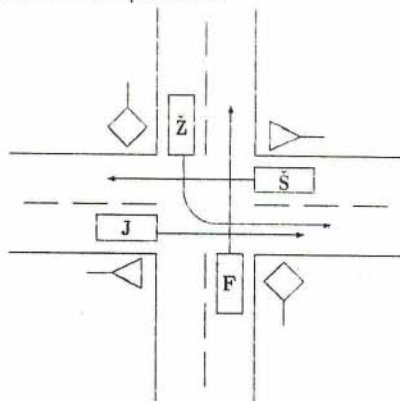
	vojščak	lutka	medved	lev	avto	1.	2.	3.	4.	5.
Marko	DA	NE	NE	NE		NE	NE	NE	NE	DA
Sandi		NE		DA		DA			NE	NE
Karel		NE	NE		DA				DA	NE
Toni		DA			NE		DA		NE	NE
Janez			DA		NE			DA		NE
1.										
2.										
3.										
4.			NE							
5.		NE	NE	NE						

3. in 4. letnik SŠ

- 1a. Prva poteza: trdnjava s h7 na g7. Če črni premakne kralja z d8 na c8 ali na e8, ga beli matira s trdnjavo na h8 oziroma na a8. Če črni premakne konja na b7 ali e8, sledi mat s trdnjavo na a8. Če črni premakne konja na c8 ali f7, sledi mat s trdnjavo na g8. Če gre črni konj na kakšno drugo polje, pa lahko matiramo s katerokoli trdnjavo. Na katerokoli drugo potezo belega bi se črni lahko rešil mata v dveh potezah.

b. Če bi A govoril resnico, bi C in D lagala, pa tudi B in E bi lagala, saj trdita, da A laže. Toda potem sta izjavi C-ja in D-ja resnični, to je protislovje. A torej laže. Ker A laže, vsaj eden od C in D govori resnico. Recimo, da je to D. Potem C in E lažeta. Ker E laže in A laže, mora B govoriti resnico. Recimo, da C govori resnico. Potem B in D lažeta. Ker B laže in A laže, mora E govoriti resnico. Zanesljivo lahko torej trdimo le to, da A laže.

2. Rešitev je na sliki 5.



Slika 5. F = fičo, Š = škoda,
Ž = žaba, J = jugo

3.

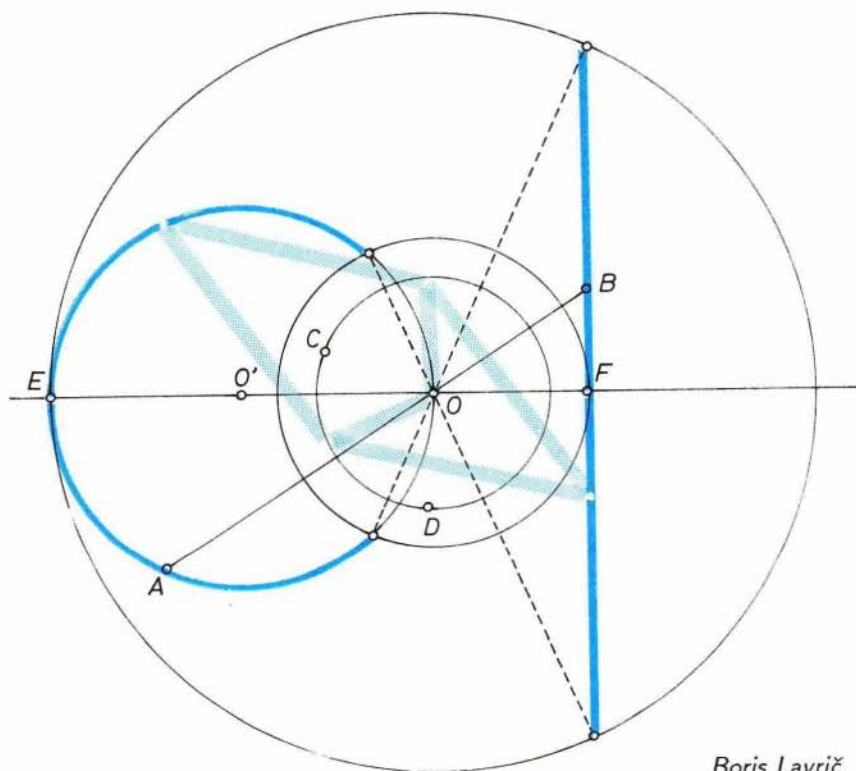
	Gorazd	Janez	Edo	Drago	Palčič	Aljančič	Markič	Elič
Andreja	NE	DA			NE	NE	NE	DA
Helena	DA				NE	DA	NE	NE
Tina	NE			DA		NE		NE
Marta	NE	NE	DA	NE		NE		NE
vaza	NE			DA	NE	NE	DA	NE
lonec			DA		DA	NE	NE	NE
rože	DA	NE		NE	NE	DA	NE	NE
slika		DA	NE		NE	NE	NE	DA
Palčič	NE	NE	DA	NE				
Aljančič	DA	NE	NE	NE				
Markič	NE	NE	NE	DA				
Elič	NE	DA	NE					

	vaza	lonec	rože	slika
Andreja	NE	NE	NE	DA
Helena	NE	NE	DA	NE
Tina			NE	
Marta			NE	

Izidor Hafner

GIBLJIVI ROMB – Odgovor s str. 330

Če je $a < b$, podobno kot v sestavku dokažemo, da je $xy = b^2 - a^2$, in nato ugotovimo, da velja $|OF| = b - a$. Možne lege točk A in B so označene na spodnji risbi za primer $a > b$, pri $a < b$ pa je položaj zelo podoben.



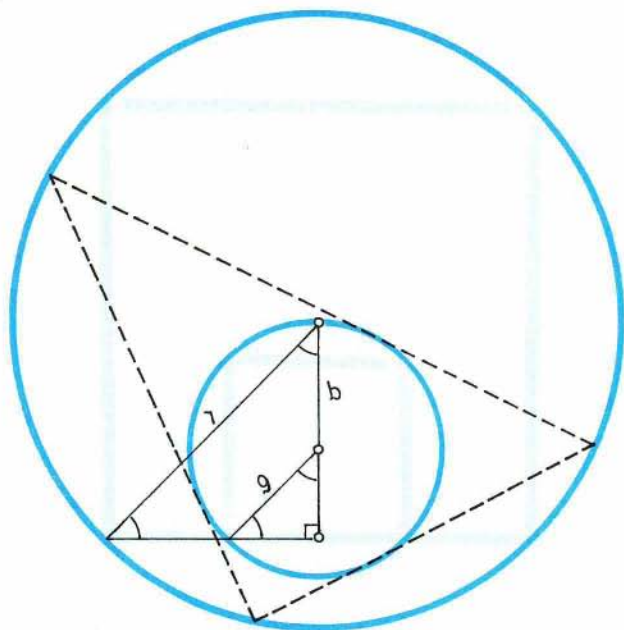
Boris Lavrič

OBRAT EULERJEVEGA IZREKA – Rešitev s str. 264

1. Oznake ρ , r in d imajo enak pomen kot v sestavku, od koder je naloga. Če središče očrtane krožnice leži na vrtani, je $d = \rho$, torej po formuli (1) velja $\rho^2 = r^2 - 2\rho r$. Od tod dobimo razmerje r/ρ , na primer takole:

$$(r - \rho)^2 = 2\rho^2 \Rightarrow r - \rho = \rho\sqrt{2} \Rightarrow r/\rho = \sqrt{2} + 1$$

2. Denimo, da obstaja pravokotni trikotnik, ki je včrtan krožnici s polmerom r in očrtan krožnici s polmerom ρ . Njegova hipotenuza sovpada s premerom večje krožnice, zato poleg enakosti (1) velja še ocena $d \geq \rho$.

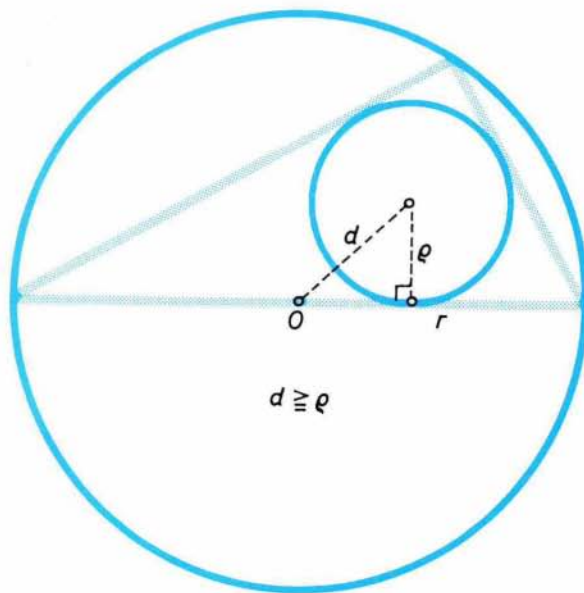


Slika 1

Oboje skupaj pa je tudi zadosten pogoj za obstoj pravokotnega trikotnika, ki je včrtan krožnici s polmerom r in očrtan krožnici s polmerom ρ . Res, zaradi (1) manjša krožnica leži znotraj večje (glej str. 266), zaradi $d \geq \rho$ pa ne vsebuje središča večje krožnice. Tedaj pa je premer večje krožnice, ki se dotika manjše, hipotenuza iskanega pravokotnega trikotnika (pri tem seveda uporabimo obrat Eulerjeve formule).

Lahko je videti, da smemo pogoj $d \geq \rho$ nadomestiti s pogojem $r \geq (\sqrt{2} + 1)\rho$.

3. Iz slike 2 razberemo, da za razdaljo d med središčema obeh očrtanih krožnic velja $d = (r - \rho)\sqrt{2}/2$.



Slika 2

Če velja a), je $d^2 = r^2 - 2pr$, zato $(r - \rho)^2 = 2r^2 - 4pr$ in tedaj $\rho^2 = r^2 - 2pr = d^2$, torej velja b). Te sklepe lahko obrnemo, zato sta izjavi a) in b) enakovredni.

4. Izrazimo z $a = |AC| = |BC|$ in $c = |AB|$ razdaljo d med središčema očrtane in včrtane krožnice. Uporabimo formuli

$$r = a^2 c / (4p) \text{ in } \rho = 2p / (2a + c)$$

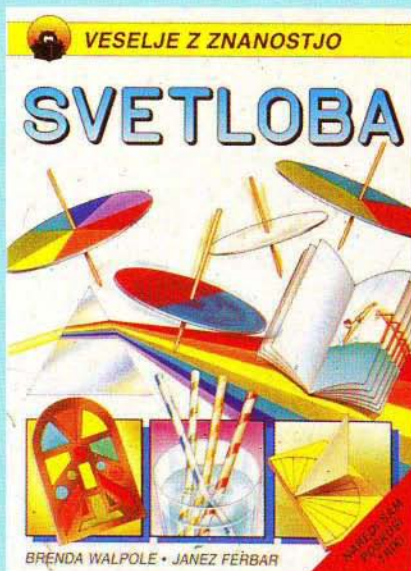
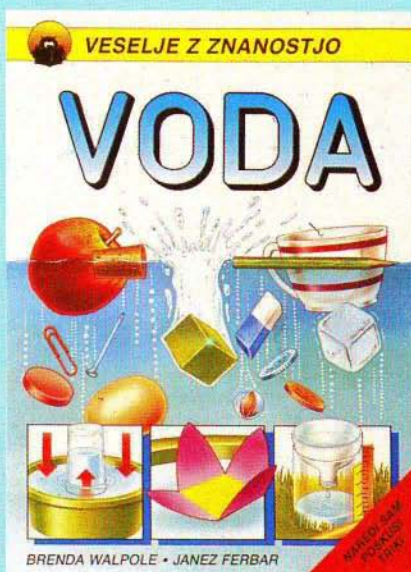
za polmer r in ρ teh dveh krožnic in upoštevajmo, da je ploščina p trikotnika ABC enaka $p = (c/2)\sqrt{a^2 - (c/2)^2}$. Po formuli (1) je potem

$$d^2 = r^2 - 2pr = \frac{a^4 c^2}{c^2(4a^2 - c^2)} - \frac{a^2 c}{2a + c} = \frac{a^2(a - c)^2}{4a^2 - c^2}$$

Po podatkih naloge je $c = 8$ cm in $a = 2d$. Če to vstavimo v gornjo formulo za d in enačbo poenostavimo, dobimo $a = 5$ cm in naposled še $p = 12$ cm².

Boris Lavrič

NOVE KNJIGE



Moji prvi koraki

VESELJE Z ZNANOSTJO

Brenda Walpole
ZRAK * VODA * SVETLOBA
Naredi sam. Poskusi. Triki.
Prev., prir. Janez Ferbar.
Ilustracije K.K.Chen, P.Bull.
Pomurska založba 1990, 3 krat
40 str., 19 x 26 cm.