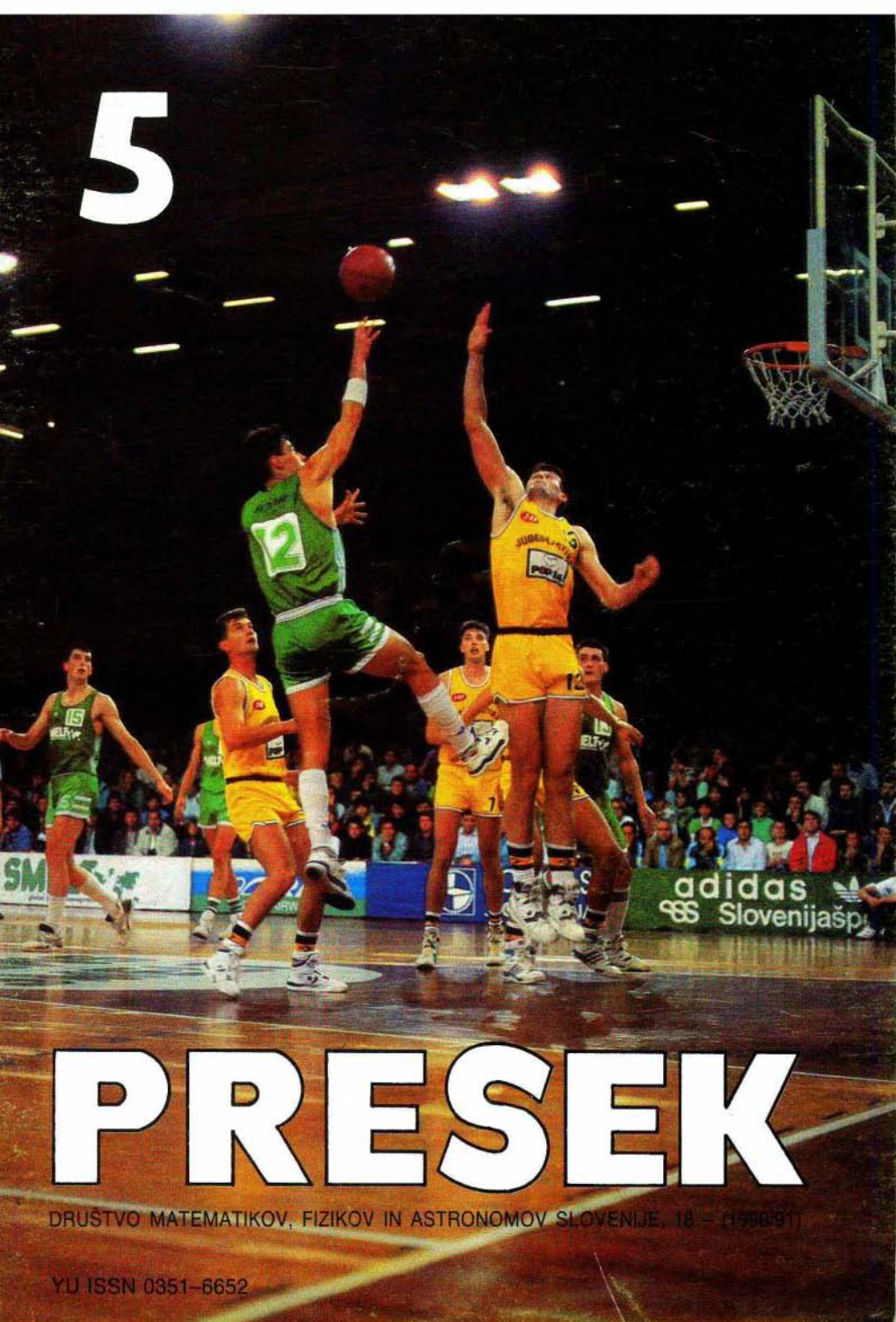


5



PRESEK

DRUŠTVO MATEMATIKOV, FIZIKOV IN ASTRONOMOV SLOVENIJE, 18 - (1990/91)

YU ISSN 0351-6652

PRESEK – list za mlade matematike, fizike, astronome in računalnikarje
18. letnik, leto 1990/91, številka 5, strani 257-320

VSEBINA

MATEMATIKA	Kako dobimo vse točke na enotski krožnici - Rešitev naloge str. 313 (Janez Rakovec) 258-262 Obrat Eulerjevega izreka (Boris Lavrič) 264-267
FIZIKA	Koš! Koš! (Janez Strnad) 268-274
TEKMOVANJA	31. zvezno tekmovanje srednješolcev iz matematike - Rešitev nalog str. 298-303 (Matjaž Željko) 276-278 10. republiško tekmovanje iz fizike za osnovnošolce - Re- šitve nalog str. 314-318 (Mirko Cvahte, Zlatko Bradač) . 280-286
NALOGE	Kje tiči vzrok? (Marija Vencelj) 257 Ostanki - Rešitev str. 275 (Boris Lavrič) 263 Iracionalne vsote - Rešitev str. 296 (Boris Lavrič) 267 Tri Wellsove uganke - Rešitev str. 306-307 (Boris Lavrič) 286-287 PRESEKOVA NADLOGA - Mala zbirka nalog L. Fibonaccija (Vilko Domajnko) 290-293 Kocka ima rdečke (Darjo Felda) 297
REŠITVE NALOG	Mimogrede - Rešitev s str. 242 (Vilko Domajnko) 275 26. republiško tekmovanje osnovnošolcev iz matema- tike - Rešitve s str. 228 (Aleksander Potočnik) 294-296 Z grafi gre lažje - Rešitev s str. 36 (Vilko Domajnko) 297 21. zvezno tekmovanje osnovnošolcev iz matematike - Rešitve s str. 230 (Aleksander Potočnik, Darjo Felda) ... 304-306 34. republiško tekmovanje srednješolcev iz matematike - Rešitve s str. 232 (Darjo Felda) 308-312 Koledarji - Rešitev s str. 220 (Darjo Felda) 313 Slikovna križanka "Matematični pojmi" - Rešitev s str. 243 (Marko Bokalič) III
RAZVEDRILO	Nepredvidljivo zaporedje (Ciril Pezdir) 263 Slikovna križanka "Kratka zgodovina fizike" (Marko Bokalič) 288-289 Furth H.P., Nevarnosti sodobnega življenja 293 PISMA BRALCEV - Karikatura (Aleš Črnič) 312
NOVE KNJIGE	Lang S., Matka! Pogovori z učenci (Janez Rakovec) 274 Sadovski L.E. in A.K., Matematika in šport (Jože Čibej). 278-279 emT _E X in L _A T _E X (Matija Lokar) 319-320 Angleške astronomske znamke (Janez Strnad) III-IV
NA OVITKU	Z letošnje košarkarske tekme v Ljubljani Smelt-Olimpia : : POP84 (Foto Igor Modic) Glej članek na str. 268 I

KJE TIČI VZROK?

Pred šolskim testom iz eksponentnih enačb je Miha doma nekoliko vabil. V zbirki nalog je naletel na naslednjo enačbo, ki je bila z dvema zvezdicama označena kot težja:

$$\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^{2x} + \left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^x = \left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^3$$

Takole je premišljeval: "Za eksponente velja: $2x+x=3$, torej je $x=1$." Napravil je preskus, ki je pokazal, da je rezultat pravilen.

Vendar mu tisti dve zvezdici nista dali miru in kmalu je spregledal, kje ga je polomil.

Sedaj pa ga muči vprašanje, kje je vzrok, da je tudi po napačni poti dobil pravi rezultat.

Bi znali odgovoriti na to vprašanje?

Poskusite enačbo tudi rešiti!

Marija Vencelj

PRESEK

list za mlade matematike, fizike, astronome in računalnikarje
18.letnik, šolsko leto 1990/91, številka 5, strani 256–320

UREDNIŠKI ODBOR: Vladimir Batagelj, Tanja Bečan (jezikovni pregled), Dušica Boben (pisma bralcev, stavljenje teksta), Vilko Domajnko, Darjo Felda (tekmovanja), Bojan Golli, Marjan Hribar, Sandi Klavžar (računalništvo), Damjan Kobal, Edvard Kramar (Presekova knjižnica), Boris Lavrič (matematika, odgovorni urednik), Andrej Likar (fizika), Matija Lokar, Franci Oblak, Peter Petek, Marko Petkovšek (glavni urednik), Pavla Ranzinger (astronomija), Marjan Smerke (svetovalec za fotografijo), Miha Štalec (risbe), Ciril Velkovrh (urednik, nove knjige, novice), Marija Vencelj.

Dopise pošiljajte in list naročajte na naslov: Društvo matematikov, fizikov in astronomov Slovenije - Podružnica Ljubljana - Komisija za tisk, Presek, Jadranska c. 19, 61111 Ljubljana, p.p. 64, tel (061) 265-061/53, št. žiro računa 50101-678-47233. Naročnina za šolsko leto 1990/91, vplačana po 1.1.1991, je za posamezne naročnike 150.-din, za skupinska naročila šol 120.-din, posamezna številka 30.-din (24.-din).

List sofinancirajo RKRDT, RKVITK in RKK

Ofset tisk Časopisno in grafično podjetje DELO, Ljubljana

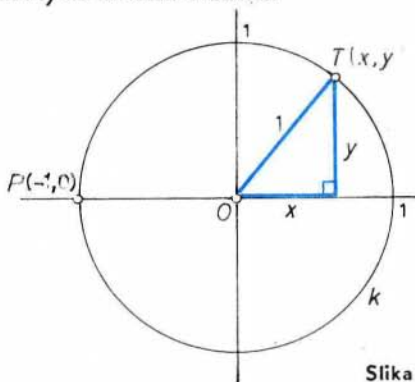
Tekst je postavljen z računalnikom SLIM 286, ALTECH, Ljubljana

© 1991 Društvo matematikov, fizikov in astronomov Slovenije – 1054

KAKO DOBIMO VSE TOČKE NA ENOTSKI KROŽNICI

V Presekovi knjižnici je ravno kar v slovenskem prevodu izšla težko pričakovana knjiga *Matka!* znamenitega matematika Sergeja Langa. Eno njenih poglavij govori o *pitagorejskih trojicah*, to je o trojicah celih števil (a, b, c) , ki zadoščajo enačbi $a^2 + b^2 = c^2$. Avtor pokaže, kako dobimo prav vse pitagorejske trojice s tem, da poiščemo vse urejene pare racionalnih števil (x, y) , ki zadoščajo enačbi $x^2 + y^2 = 1$. To so, gledano geometrijsko, vse racionalne točke (ki imajo obe koordinati racionalni) na enotski krožnici.

V ravnini naj bo izbran pravokotni koordinatni sistem. Naj bo k enotska krožnica v tej koordinatni ravnini, to je krožnica s polmerom 1 in s središčem v izhodišču O koordinatnega sistema (slika 1). Torej je k množica vseh tistih točk $T(x, y)$ v ravnini, katerih koordinati zadoščata enačbi $x^2 + y^2 = 1$. (Upoštevati je treba, da je razdalja poljubne točke $T(x, y)$ od izhodišča O enaka $\sqrt{x^2 + y^2}$.)



Slika 1.

V knjigi *Matka!* izvemo, kako lahko dobimo točke na krožnici k na naslednji način. Naj bo t poljubno realno število in naj bosta koordinati x in y točke $T(x, y)$ tile funkciji t -ja:

$$x = \frac{1 - t^2}{1 + t^2} \quad y = \frac{2t}{1 + t^2} \quad (*)$$

Tedaj točka $T(x, y)$ leži na enotski krožnici k . Iz (*) namreč izhaja:

$$x^2 + y^2 = \frac{1 - 2t^2 + t^4}{1 + 2t^2 + t^4} + \frac{4t^2}{1 + 2t^2 + t^4} = \frac{1 + 2t^2 + t^4}{1 + 2t^2 + t^4} = 1$$

Velja pa tudi tale, obratna trditev, ki jo zapišimo kot izrek:

IZREK. Za poljubno točko $T(x, y)$ na enotski krožnici k , različno od točke $P(-1, 0)$, obstaja takšno realno število t , da velja:

$$x = \frac{1 - t^2}{1 + t^2} \quad , \quad y = \frac{2t}{1 + t^2}$$

Preden bomo to dokazali, ne bo odveč nekaj pojasnil. Izrek pove, da se koordinati vsake točke na krožnici k , razen $P(-1, 0)$, izražata s formulama (*). Če upoštevamo še prejšnjo ugotovitev, to pomeni: Ko t preteče vsa realna števila, tedaj točka $T(x, y)$, kjer je $x = \frac{1-t^2}{1+t^2}$, $y = \frac{2t}{1+t^2}$, preteče vso enotsko krožnico k , z izjemo točke $P(-1, 0)$. Lahko tudi rečemo: $Z(*)$ je dana preslikava (predpis), ki vsakemu realnemu številu $t \in \mathbb{R}$ priredi ustrezno točko $T(x, y) \in k$ in ki množico realnih števil $\mathbb{R}$ preslika na enotsko krožnico k brez točke $P(-1, 0)$. Neodvisno spremenljivko t navadno imenujemo *parameter*; pravimo, da je krožnica k z zvezama (*) podana *parametrično*.

$Z(*)$ smo torej dobili vse točke na enotski krožnici, razen točke $P(-1, 0)$. Če pa za t vstavimo poljubno racionalno število, sta očitno tudi $x = \frac{1-t^2}{1+t^2}$ in $y = \frac{2t}{1+t^2}$ racionalni števili. Izkaže se: Ko t preteče vsa racionalna števila, tedaj ustrezna točka $T(x, y)$ preteče vse racionalne točke na enotski krožnici, razen točke $P(-1, 0)$. (Glej konec dokaza našega izreka.) Tako torej dobimo vse urejene pare racionalnih števil (x, y) , ki zadoščajo enačbi $x^2 + y^2 = 1$. Iz teh pa dobimo, kot že rečeno, vse pitagorejske trojice.

Že večkrat omenjena izjemna točka $P(-1, 0)$ ima koordinati $x = -1$, $y = 0$, ki se ne izražata s formulama (*). Če naj bo namreč $y = \frac{2t}{1+t^2} = 0$, mora biti $t = 0$ in potem je $x = \frac{1-t^2}{1+t^2} = 1$, torej x ni enak -1 .

Dokažimo naš izrek najprej po algebraini poti, kakor je to narejeno v knjigi *Matka!* (le da se tam avtor povsod omeji na racionalna števila). Naj bo $T(x, y)$ poljubna točka na enotski krožnici k , različna od $P(-1, 0)$. Želimo najti tako realno število t , da bosta izpolnjeni enačbi (*). Uganemo: Treba je vzeti $t = \frac{y}{x+1}$. Tedaj je $(x+1)t = y$ in potem $(x+1)^2 t^2 = y^2$. Ker je $T(x, y) \in k$, je $x^2 + y^2 = 1$ in tako je $y^2 = 1 - x^2$. Torej je

$$(x+1)^2 t^2 = 1 - x^2 = (1+x)(1-x)$$

Ker je $x \neq -1$ in tako $x+1 \neq 0$, lahko to enačbo delimo z $x+1$ in dobimo:

$$(x+1)t^2 = 1 - x$$

Preuredimo:

$$x(1+t^2) = 1 - t^2$$

In že imamo:

$$x = \frac{1-t^2}{1+t^2}$$

Potem je:

$$x+1 = \frac{1-t^2+1+t^2}{1+t^2} = \frac{2}{1+t^2}$$

In končno:

$$y = (x+1)t = \frac{2t}{1+t^2}$$

Torej za poljubno točko $T(x, y) \in k$, različno od $P(-1, 0)$, res obstaja tak $t \in \mathbb{R}$ (našli smo ga: $t = \frac{y}{x+1}$), da velja: $x = \frac{1-t^2}{1+t^2}$, $y = \frac{2t}{1+t^2}$. (Če

ostri kot ψ pri oglišču P , zato so si podobni. Dolžine nekaterih njihovih stranic lahko že takoj ugotovimo: $|PO| = 1$, $|UO| = t$, $|PT'| = |PO| + |OT'| = 1 + x$, $|TT'| = y$.

Parameter t bomo izrazili s koordinatama x, y točke T .

Trikotnika PUO in PTT' sta podobna, zato je $\frac{|UO|}{|PO|} = \frac{|TT'|}{|PT'|}$.

Seveda je $\frac{|UO|}{|PO|} = \frac{t}{1} = t$ in $\frac{|TT'|}{|PT'|} = \frac{y}{x+1}$. Torej je $t = \frac{y}{x+1}$.

Koordinati x, y točke T pa bomo izrazili s parametrom t .

Za trikotnik PUO pove Pitagorov izrek: $|PU|^2 = |PO|^2 + |UO|^2 = 1 + t^2$. Torej je $|PU| = \sqrt{1+t^2}$.

Trikotnika POS in PUO sta podobna, zato je $\frac{|PS|}{|PO|} = \frac{|PU|}{|PO|} = \frac{1}{\sqrt{1+t^2}}$. Torej je $|PS| = |PO| \cdot \frac{1}{\sqrt{1+t^2}} = \frac{1}{\sqrt{1+t^2}}$. Potem je $|PT| = 2|PS| = \frac{2}{\sqrt{1+t^2}}$.

Trikotnika PTT' in PUO sta podobna, zato je $\frac{|PT'|}{|PT|} = \frac{|PO|}{|PU|} = \frac{1}{\sqrt{1+t^2}}$. Torej je $|PT'| = |PT| \cdot \frac{1}{\sqrt{1+t^2}} = \frac{2}{\sqrt{1+t^2}} \cdot \frac{1}{\sqrt{1+t^2}} = \frac{2}{1+t^2}$. Ker je $|PT'| = 1 + x$, je $x = |PT'| - 1 = \frac{2}{1+t^2} - 1 = \frac{1-t^2}{1+t^2}$. Nadalje je $\frac{|TT'|}{|PT'|} = \frac{|UO|}{|PO|} = t$. Torej je $y = |TT'| = |PT'| \cdot t = \frac{2}{1+t^2} \cdot t = \frac{2t}{1+t^2}$.

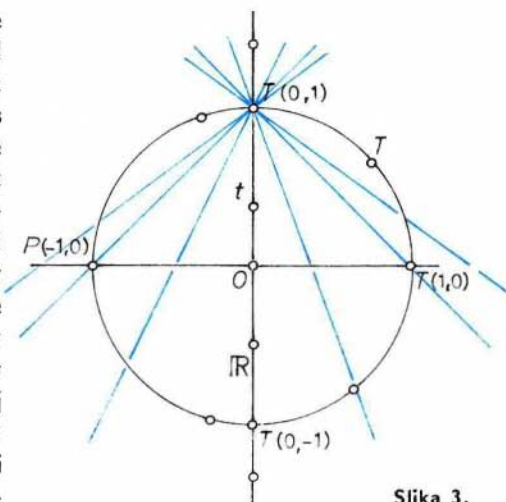
Tako smo dokazali naš izrek: Za poljubno točko $T(x, y) \in k$, različno od $P(-1, 0)$, smo našli tak $t \in \mathbb{R}$, da je $x = \frac{1-t^2}{1+t^2}$, $y = \frac{2t}{1+t^2}$. Pri tem je t ordinata presečišča premice skozi P in T z ordinatno osjo, hkrati pa je $t = \frac{y}{x+1}$. (V primeru, ko je $T = P$, seveda takega t -ja ne moremo dobiti, saj gre skozi eno in isto točko $T = P$ nešteto premic.) Obratno pa je točka $T(x, y)$ presečišče krožnice k s premico skozi $P(-1, 0)$ in $U(0, t)$.

Slika 2 je narejena za primer, ko je $x > 0$ in $y > 0$. Bralec lahko sam nariše slike za druge možnosti lege točke $T(x, y)$, ki so seveda nekoliko drugačne; ogleda naj si sliko 3. Naš dokaz pa v bistvu velja za vse primere, le da bi ga bilo treba tu in tam še izostriti. (Tako namesto: $|UO| = t$, $|TT'| = y$ upoštevamo: $|UO| = |t|$, $|TT'| = |y|$, kar velja vedno, tudi kadar je $y < 0$ in s tem $t < 0$.)

Geometrijski pomen parametra t nam pomaga nazorno videti, kako ustrezna točka $T(x, y)$ (v smislu formul (*)) potuje po krožnici k , ko t teče po realnih številih. Dogovorimo se, da poljuben t kar enačimo s točko $U(0, t)$ na ordinatni osi; s tem pa množico realnih števil $\mathbb{R}$ enačimo z ordinatno osjo. Zdaj lahko rečemo za poljuben $t \in \mathbb{R}$: ustrezna točka T (v smislu formul (*)) je presečišče premice skozi P in t s krožnico k (slika 3).

Ob sliki ni težko ugotoviti, da velja naslednje. Ko je $t = 0$, je ustrezna točka T enaka $T(1, 0)$. Ko je $t = 1$, je $T = T(0, 1)$; ko pa je $t = -1$, je $T = T(0, -1)$. (V teh dveh primerih T sovпада s t .) Ko t narašča od 0 do

1, tedaj ustrezna točka T potuje po prvem kvadrantu krožnice k od $T(1, 0)$ do $T(0, 1)$. (Prvi kvadrant krožnice k je pač njen presek s prvim kvadrantom koordinatne ravnine.) Ko t narašča od 1 čez vsako mejo, tedaj T potuje po drugem kvadrantu krožnice k od $T(0, 1)$ proti $P(-1, 0)$. Ko pa t pada od 0 do -1 , tedaj T potuje po četrtem kvadrantu krožnice k od $T(1, 0)$ do $T(0, -1)$. Ko t pada od -1 pod vsako mejo, tedaj T potuje po tretjem kvadrantu krožnice k od $T(0, -1)$ proti $P(-1, 0)$. (Seveda bi do teh spoznanj lahko prav tako prišli na podlagi formul (*).)



Slika 3.

Iz vsega tega lahko povzamemo: Ko t preteče v pozitivnem smislu vso množico realnih števil $\mathbb{R}$, oziroma ordinatno os, tedaj ustrezna točka T preteče vso enotsko krožnico k , z izjemo točke $P(-1, 0)$, v pozitivnem smislu (ki je nasproten smislu urnega kazalca). Pri tem gre T skozi vsako posamezno točko na k samo enkrat, saj je tudi t s točko T natanko določen in zato dobimo vsako posamezno točko na k samo pri enem t -ju. Torej lahko rečemo:

Preslikava, ki vsakemu $t \in \mathbb{R}$ priredi ustrezno točko $T \in k$ (v smislu formul (*)), preslika množico realnih števil $\mathbb{R}$ *bijektivno* (povratno enolično) na enotsko krožnico k brez točke $P(-1, 0)$.

O tej preslikavi smo spregovorili že takoj za našim izrekom. Zdaj pa smo še dodali ugotovitev o njeni bijektivnosti.

Za bralce, ki dobro poznajo kotne funkcije, ne bo pretežka naslednja

NALOGA

Na sliki 2 sta označena kota $\sphericalangle TPT' = \psi$ in $\sphericalangle TOT' = \varphi$. Kakšna je zveza med njima? Parameter t (ordinato točke U) in koordinati x, y točke T izrazi s kotnimi funkcijami kota ψ . Odtod izpelji formuli: $x = \frac{1-t^2}{1+t^2}$, $y = \frac{2t}{1+t^2}$.

Janez Rakovec

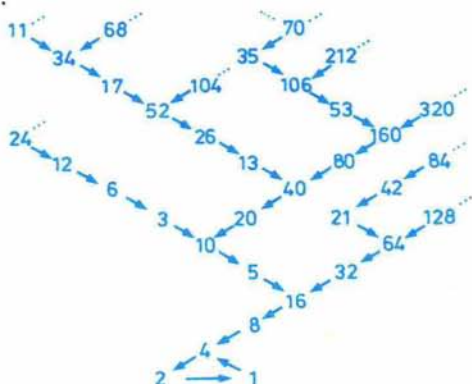
NEPREDVIDLJIVO ZAPOREDJE

Vzemimo katerokoli naravno število. Če je število sodo, ga razpolovimo, če pa je liho, ga potrojimo in prištejemo ena. Tako dobimo novo število, s katerim ponovimo opisani postopek, in tako nadaljujemo. Poskusimo s 15 in s 6:

15, 46, 23, 70, 35, 106, 53, 160, 80, 40, 20, 10, 5, 16, 8, 4, 2, 1, ...

6, 3, 10, 5, 16, 8, 4, 2, 1, ...

Obe zaporedji končata v zanki 4, 2, 1. Med prvimi 50 naravnimi števili je 27 najhujše. Šele po 77 korakih doseže zaporedje največjo vrednost 9232 in potem je potrebnih še 34 korakov, da konča v zanki 4, 2, 1. Postopek lahko tudi obrnemo in si narišemo takole drevo:



DOMNEVA: Zaporedje za vsako naravno število konča v zanki 4, 2, 1.

Do sedaj te domneve še nihče ni dokazal, niti je ni ovrgel s protiprimerom, to je začetnim številom, ki ne privede do zanke 4, 2, 1. Če protiprimer obstaja, mora biti izredno veliko število, saj so bila preizkušena že vsa naravna števila do $7 \cdot 10^{11}$. Če domneva drži, so v zgornjem drevesu vključena vsa naravna števila; če pa ne, potem obstaja vsaj še eno drevo s koreninami v drugi zanki, ali pa se zaporedje razteza v neskončnost, ne da bi se števila ponavljala.

Ciril Pezdir

OSTANKI

Pri katerih naravnih številih n je vsota

$$s_n = 1^n + 2^n + 3^n + \dots + n^n$$

deljiva s tri?

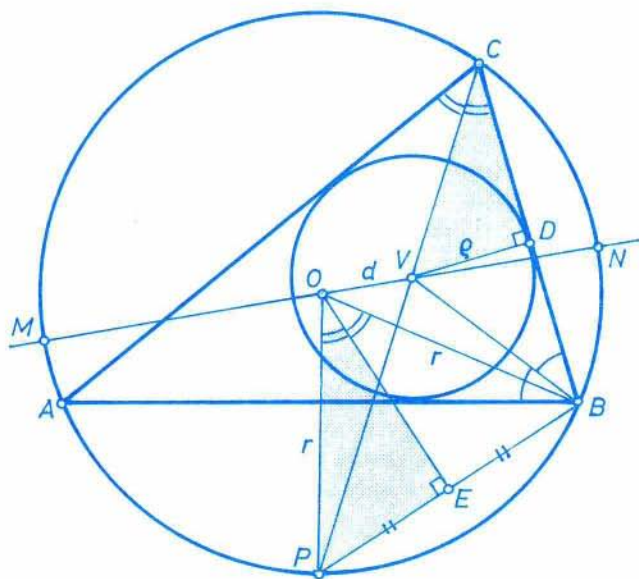
Boris Lavrič

OBRAT EULERJEVEGA IZREKA

Označimo z r in ρ dolžini polmerov očrtane in vrtane krožnice danega trikotnika ABC . Že v osemnajstem stoletju je velik matematik Leonhard Euler (1707 - 1783) dokazal, da razdaljo d med središčema obeh krožnic lahko izrazimo s formulo

$$d^2 = r^2 - 2\rho r \quad (1)$$

ki se zdaj po njem imenuje (takšnih formul je še nekaj!). Oglejmo si dokaz te formule, ki nam bo omogočil utemeljiti zanimiv "obrat" lastnosti (1):



Slika 1

Označimo z O in V središči očrtane in vrtane krožnice trikotnika ABC in položimo skozi O in V premer MN očrtane krožnice. Spustimo pravokotnico VD na stranico BC , kotnosimetralo CV trikotnika ABC pa podaljšajmo do sečišča P z očrtno krožnico. Nato načrtajmo še višino OE enakokrakega trikotnika PBO . Seveda E razpolavlja osnovnico PB , torej velja

$$|PB| = 2|PE| \quad (2)$$

Ker je središčni kot POB nad tetivo PB dvakrat večji kot obodni kot PCB nad isto tetivo, velja še

$$\sphericalangle POE = \frac{1}{2} \sphericalangle POB = \sphericalangle PCB \quad (3)$$

Primerjajmo zdaj kota BVP in VBP . Upoštevajmo, da je prvi zunanji kot trikotnika BCV , da sta BV in CV kotni simetrali trikotnika ABC in da sta ABP in ACP obodna kota nad isto tetivo AP , pa dobimo

$$\begin{aligned} \sphericalangle BVP &= \sphericalangle VBC + \sphericalangle BCV = \\ &= \sphericalangle VBA + \sphericalangle ACP = \\ &= \sphericalangle VBA + \sphericalangle ABP = \sphericalangle VBP \end{aligned}$$

Od tod sledi enakost

$$|PB| = |PV| \quad (4)$$

Točki M in N smo določili tako, da velja $|MV| = r + d$ in $|VN| = r - d$ ali obratno, zato po izreku o sekantah dobimo

$$|PV| \cdot |VC| = |MV| \cdot |VN| = r^2 - d^2 \quad (5)$$

Iz (3) preberemo, da sta pravokotna trikotnika PEO in VDC podobna, zato velja

$$\rho : |VC| = |VD| : |VC| = |PE| : |PO| = |PE| : r \quad (6)$$

od koder z uporabo (2), (4) in (5) dobimo iskano formulo

$$2\rho r = 2|PE| \cdot |VC| = |PV| \cdot |VC| = r^2 - d^2$$

Dokaz enakosti (1) je s tem končan, bralec pa bo brez težav iz (1) izluščil še oceno

$$r \geq 2\rho$$

in ugotovil, da v njej nastopi enačaja natanko takrat, kadar je trikotnik ABC enakostraničen.

Zdaj je na vrsti obrat lastnosti (1):

Predpostavimo, da razdalja d med središčema krožnic s polmeroma dolžine r in ρ zadošča enakosti (1). Potem velja

$$r \geq 2\rho \quad \text{in} \quad (r - \rho)^2 = \rho^2 + d^2 > d^2$$

Od tod sledi $r > p + d$, torej krožnica s polmerom p leži znotraj krožnice s polmerom r . Ponuja se naslednje vprašanje: Ali obstaja kak trikotnik, ki mu je večja krožnica očrtana, manjša pa včrtana? Ne le, da je odgovor pritrdilen, velja še več:

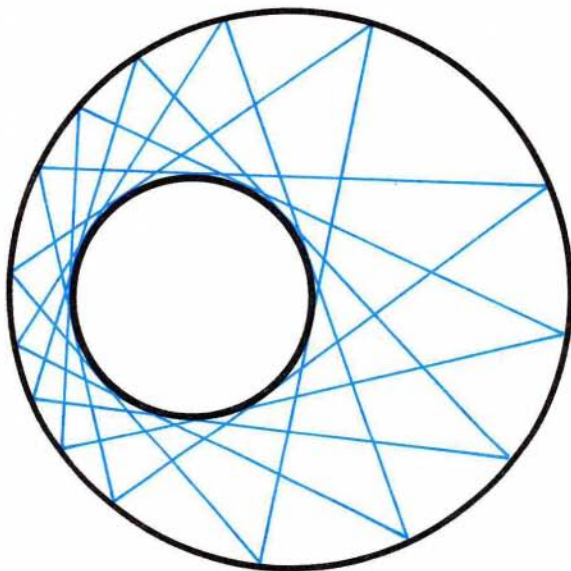
Vsak trikotnik, ki je včrtan večji krožnici in se z dvema stranicama dotika manjše, je njej očrtan.

Utemeljitev te trditve bomo oprli na dokaz formule (1): Včrtajmo v večjo krožnico s središčem O trikotnik ABC , ki naj se s stranicama AC in BC dotika manjše krožnice s središčem V . Točke M, N, P, D in E postavimo tako kot pri dokazu zveze (1). Prav tako lahko ugotovimo, da veljajo lastnosti (2), (3), (5) in (6). Združimo (1) in (5) v

$$|PV| \cdot |VC| = 2pr$$

iz (6) vzemimo $|PE| \cdot |VC| = pr$ in iz dobljenih enakosti preberimo $|PV| = 2|PE|$. Uporabimo še (2) in dobimo $|PV| = |PB|$, torej tudi

$$\sphericalangle BVP = \sphericalangle VBP$$



Slika 2

Od tod zaradi enakosti $\sphericalangle PCB = \sphericalangle ABP$ sledi

$$\sphericalangle VBA = \sphericalangle VBP - \sphericalangle ABP = \sphericalangle BVP - \sphericalangle PCB = \sphericalangle VBC$$

kar pove, da je BV kotna simetrala trikotnika ABC . Torej je le-ta res očrtan manjši krožnici, kot smo trdili.

Pravkar dokazano lastnost ilustrira slika 2.

Sklenimo sestavek z nalogami:

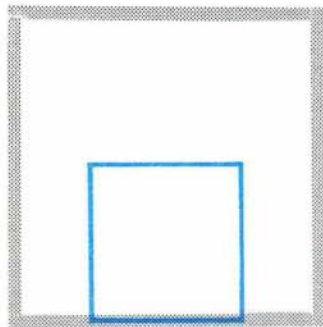
1. Središče krožnice, očrtane danemu trikotniku, leži na njegovi včrtani krožnici. Kolikšno je razmerje dolžin polmerov obeh krožnic?

2. Poišči potreben in zadosten pogoj za obstoj pravokotnega trikotnika, ki je včrtan krožnici s polmerom r in hkrati očrtan krožnici s polmerom ρ .

3. V danem kvadratu leži manjši kvadrat, katerega osnovnica leži na sredini osnovnice večjega kvadrata (Glej sliko 3). Obema očrtamo krožnici. Dokaži, da sta enakovredni naslednji izjavi:

a. Obstaja trikotnik, ki mu je večja krožnica očrtana, manjša pa včrtana.

b. Središče večje krožnice leži na manjši.



Slika 3

4. Osnovnica AB enakokrakega trikotnika ABC meri 8 cm, krak pa je dvakrat daljši od razdalje med središčema očrtane in včrtane krožnice tega trikotnika. Kolikšna je njegova ploščina?

Boris Lavrič

Rešitve bodo objavljene v naslednji številki Preseka.

IRACIONALNE VSOTE

Dokaži, da so števila

$$\sqrt{2} + \sqrt{3}, \sqrt{2} + \sqrt[3]{3}, \sqrt[3]{2} + \sqrt{3} \quad \text{in} \quad \sqrt[3]{2} + \sqrt[3]{3}$$

iracionalna.

Boris Lavrič

KOŠ! KOŠ!

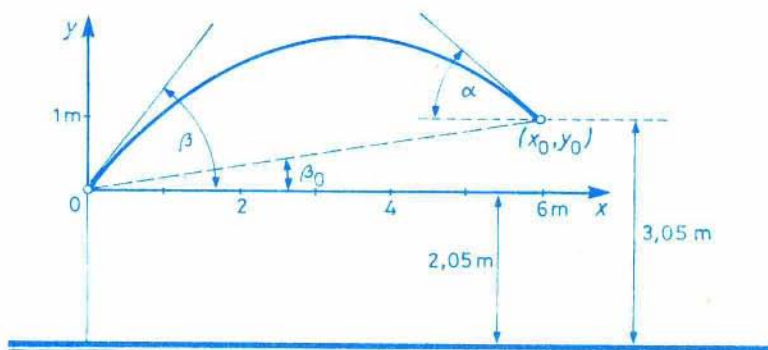
Študenti mestnega koledža v Springfieldu v ameriški zvezni državi Massachusetts so zelo radi igrali ameriški nogomet. Velikokrat pa so se morali zaradi dežja odpovedati priljubljeni igri z žogo. Njihovemu učitelju Jamesu Naismithu je šlo tarnanje študentov zaradi slabega vremena do živega in poskusil jim je ustreči z igro z žogo v dvorani. Pri njej je bilo treba žogo spraviti v visoko postavljena koša za breskve. Pozneje so košema odstranili dno, da ni bilo treba vedno plezati po žogo, in ju vpeli. Tako je bila leta 1891 rojena *košarka*, ki sodi med najbolj priljubljene športne igre. V počastitev stoletnice košarke poenostavljeno opišimo del pomembnega sestavnega dela igre - *meta na koš*. Pri tem shajamo z osnovnimi enačbami za enakomerno in enakomerno pospešeno premo gibanje in trigonometrijo.

Opazujemo gibanje središča žoge v navpični ravnini, ko leti žoga proti košu. Sredina obroča v košu naj bo v točki (x_0, y_0) , če zapusti središče žoge metalčevo roko, ko je v izhodišču. Središče žoge se giblje z začetno hitrostjo v pod kotom β proti vodoravnici. Kot med zveznico sredine obroča z izhodiščem in vodoravnico zaznamujemo z β_0 in kot med smerjo hitrosti središča žoge pri letu skozi obroč in vodoravnico z α (slika 1).

Gibanje središča žoge pri *poševnem metu* razstavimo na vodoravno in navpično gibanje. Začetno hitrost razstavimo na vodoravno komponento $v \cos \beta$ in na navpično komponento $v \sin \beta$. Pri vodoravnem gibanju je hitrost konstantna in razdalja narašča sorazmerno s časom:

$$v_x = v \cos \beta \qquad x = vt \cos \beta$$

Slika 1. Met na koš.



Pri navpičnem gibanju je hitrost sestavljena iz konstantnega dela, ki ustreza gibanju z začetno hitrostjo navzgor, in iz dela, ki s časom enakomerno narašča in ustreza prostemu padanju. Razdalja zaradi prvega prispevka narašča sorazmerno s časom, zaradi drugega pa sorazmerno s kvadratom časa, kar je značilno za enakomerno pospešeno gibanje, kakršno je prosto padanje:

$$v_y = v \sin \beta - gt \quad y = vt \sin \beta - \frac{1}{2}gt^2$$

Pospešek prostega pada ali težni pospešek g meri $9,8 \text{ m/s}^2$. Iz zadnje od prvih dveh enačb izračunamo čas $t = x/v \cos \beta$ in ga vstavimo v zadnjo enačbo:

$$y = x \tan \beta - \frac{gx^2}{2v^2 \cos^2 \beta}$$

Središče žoge se giblje po *paraboli*.

Če gre središče žoge skozi sredino obroča, mora veljati

$$y_o = x_o \tan \beta - \frac{gx_o^2}{2v^2 \cos^2 \beta} = x_o \tan \beta_o$$

V enačbo smo vključili nazadnje še kot β_o , saj velja $\tan \beta_o = y_o/x_o$. Delimo jo z x_o in dobimo

$$\tan \beta_o = \tan \beta - \frac{gx_o}{2v^2 \cos^2 \beta} \quad (1)$$

Iz enačbe najprej izračunamo $x_o = (2v^2 \cos^2 \beta / g)(\tan \beta - \tan \beta_o)$ in to zvezo predelamo v

$$x_o = \frac{v^2}{g \cos \beta_o} (\sin (2\beta - \beta_o) - \sin \beta_o) \quad (2)$$

$$\text{Pot vodi preko korakov: } x_o = \frac{2v^2 \cos^2 \beta}{g} \left(\frac{\sin \beta}{\cos \beta} - \frac{\sin \beta_o}{\cos \beta_o} \right) =$$

$$= \frac{v^2}{g} \left(2 \sin \beta \cos \beta - \frac{2 \cos^2 \beta \sin \beta_o}{\cos \beta_o} \right) =$$

$$= \frac{v^2}{g \cos \beta_o} (\sin 2\beta \cos \beta_o - \cos 2\beta \sin \beta_o - \sin \beta_o)$$

Pri njih uporabimo enačbe sa sinus in kosinus dvojnega kota in za sinus razlike kotov:

$$2 \sin \beta \cos \beta = \sin 2\beta, \quad \cos 2\beta = \cos^2 \beta - \sin^2 \beta = 2 \cos^2 \beta - 1 \quad \text{in}$$

$$\sin 2\beta \cos \beta_0 - \cos 2\beta \sin \beta_0 = \sin (2\beta - \beta_0)$$

Kot, pod katerim prileti središče žoge skozi obroč, določata komponenti hitrosti v_{x_0} in v_{y_0} v točki (x_0, y_0) takole:

$$\begin{aligned} \tan \alpha &= \frac{-v_{y_0}}{v_{x_0}} = \frac{-(v \sin \beta - gt)}{v \cos \beta} = -\tan \beta + \frac{g}{v \cos \beta} \frac{x}{v \cos \beta} = \\ &= -\tan \beta + \frac{gx}{v^2 \cos^2 \beta} \end{aligned}$$

Pri tem smo upoštevali, da je komponenta hitrosti v smeri osi y pri košu negativna in - kot prej - izrazili čas s koordinato x . Z enačbo (1) dobimo drugo pomembno zvezo:

$$\tan \alpha = \tan \beta - 2 \tan \beta_0 \quad (3)$$

Zdaj se vprašajmo po najugodnejšem kotu za met. Pri kolikšnem kotu je hitrost pri dani razdalji x_0 najmanjša? V enačbi (2) nastopa kot β samo v prvem členu. Sinus ne more biti večji od 1 in doseže to vrednost pri $2\beta - \beta_0 = 90^\circ$, torej je

$$\beta_n = 45^\circ + \frac{1}{2}\beta_0 \quad (4)$$

najugodnejši kot za met. Pri tem kotu preide enačba (2) v

$$x_0 = \frac{v^2(1 - \sin \beta_0)}{g \cos \beta_0}$$

Iz nje izračunamo najmanjšo hitrost

$$v = \sqrt{\frac{gx_0 \cos \beta_0}{1 - \sin \beta_0}} = \sqrt{\frac{gx_0^2}{\sqrt{x_0^2 + y_0^2} - y_0}}$$

s katero dosežemo koš iz dane razdalje x_0 .

Vzemimo, da meče igralec z meje območja treh točk pri $x_0 = 6$ m in

je ob metu središče žoge 1 meter pod košem ($y_o = 1$ m). Najprej iz enačbe $\tan \beta_o = y_o/x_o = \frac{1}{6}$ izračunamo kot $\beta_o = 9,5^\circ$ in nato iz enačbe (4) najugodnejši kot $\beta = 45^\circ + \frac{1}{2} \cdot 9,5^\circ = 55^\circ$. Zadnja enačba da za hitrost pri najugodnejšem kotu

$$v = \sqrt{\frac{9,8 \text{ ms}^{-2} \cdot 6 \text{ m} \cdot \cos 9,5^\circ}{1 - \sin 9,5^\circ}} = 8,3 \text{ m/s}.$$

Ta hitrost narašča z naraščajočo razdaljo (slika 3).

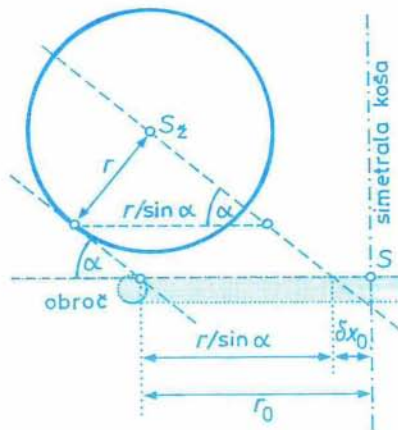
Žoga z maso $m = 0,6$ kg ima pri tej hitrosti kinetično energijo $\frac{1}{2}mv^2 = \frac{1}{2} \cdot 0,6 \text{ kg} \cdot 8,3^2 \text{ m}^2\text{s}^{-2} = 21$ joulov. Pri pospeševanju žoge mora metalčeva roka opraviti tolikšno delo, kot da bi telo z maso 2 kilogramov dvignila meter visoko. Če traja pospeševanje 0,2 sekunde, dela tedaj z močjo 21 joulov/0,2 sekunde = 105 wattov.

Zanima nas še, kolikšen je kot α pri najugodnejšem kotu β_n ? Iz enačbe (3) dobimo za ta primer z adicijskimi izreki za kotne funkcije $\alpha = 45^\circ - \frac{1}{2}\beta_o$. Pri našem zgledu meri ta kot $\alpha = 45^\circ - \frac{1}{2}9,5^\circ = 40^\circ$.

V premeru meri obroč koša 18 col ($2r_o = 45,7$ cm) in žoga $9,5$ col ($2r = 24,1$ cm), tako da je razmerje radijev žoge in obroča $r/r_o = k = 0,53$. Žoga zato lahko zgreši s svojim središčem sredino obroča največ za odmik

$$\delta x_o = r_o - \frac{r}{\sin \alpha} = r_o(1 - k/\sin \alpha) \quad (5)$$

v eno ali drugo stran. Kljub temu gre skozi obroč, če prileti pod kotom α . Upoštevali smo na eni in drugi strani skrajni odmik, pri katerem se žoga ravno podrsa po obroču (slika 2). Žoga gre skozi obroč tudi še pri nekoliko večjem odkliku, ko se odbije na obroču. Vendar takih košev in košev, pri katerih se žoga odbije na tabli, tu nismo upoštevali.



Slika 2. Dopustni odmik pri letu žoge skozi obroč.

Pri metu z meje območja treh točk pod najugodnejšim kotom je največji dovoljeni odmik po enačbi (5)

$$\delta x_o = 22,9 \text{ cm} (1 - 0,53/\sin 40^\circ) = 4 \text{ cm}$$

Nazadnje se zanimajmo še za to, kako se spremeni odmik, če malo spremenimo kot β . Enačbo (2) zapišemo za povečani kot β' :

$$x'_o = \frac{v^2}{g \cos \beta_0} (\sin (2\beta' - \beta_0) - \sin \beta_0)$$

od nje odštejemo enačbo (2) in razliko delimo z enačbo (2):

$$\frac{x'_o - x_o}{x_o} = \frac{\delta x_o}{x_o} = \frac{\sin (2\beta' - \beta_0) - \sin (2\beta - \beta_0)}{\sin (2\beta - \beta_0) - \sin \beta_0}$$

Števec predelamo z enačbo za razliko sinusov in nato uporabimo enačbo za kosinus vsote kotov:

$$\begin{aligned} \sin (2\beta' - \beta_0) - \sin (2\beta - \beta_0) &= 2 \cos (2\beta - \beta_0 + \delta\beta) \sin \delta\beta = \\ &= 2 \cos (2\beta - \beta_0) \cos \delta\beta \sin \delta\beta - 2 \sin (2\beta - \beta_0) \sin^2 \delta\beta \end{aligned}$$

Pri tem smo uvedli razliko kotov $\delta\beta = \beta' - \beta$. Ta razlika je majhna in njen sinus je tudi majhen. Tako je drugi člen, ki vsebuje kvadrat njenega sinusa, precej manjši od prvega. Odločilni prvi člen postane enak nič pri najugodnejšem kotu β_n . Tedaj velja namreč $2\beta_n - \beta_0 = 90^\circ$, a kosinus pravega kota je enak nič. Pri najugodnejšem kotu dobimo najmanjši relativni odmik:

$$\frac{\delta x_o}{x_o} = - \frac{2 \sin^2 \delta\beta}{1 - \sin \beta_0} \quad (6)$$

Za koliko stopinj se lahko metalec pri metu pod najugodnejšim kotom z meje območja treh točk zmoti v eno ali v drugo stran, da ne bo zgrešil meta? V enačbo, ki jo dobimo iz (6)

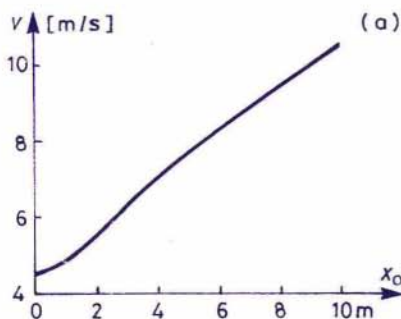
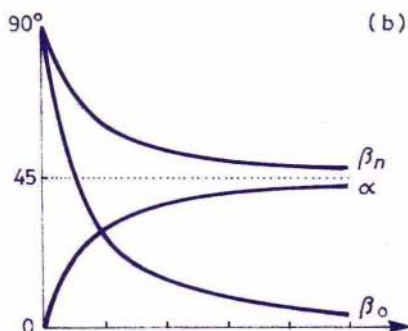
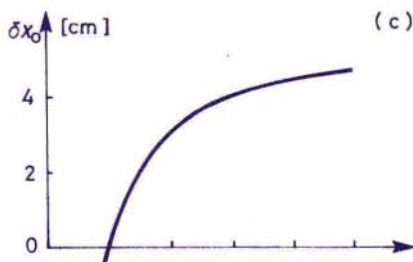
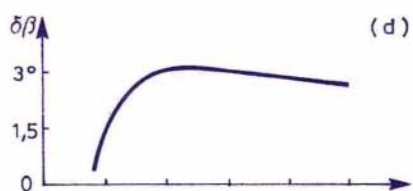
$$\delta\beta = \sqrt{\frac{(1 - \sin \beta_0) |\delta x_o|}{2x_o}}$$

vstavimo $x_o = 6 \text{ m}$, $\beta_0 = 9,5^\circ$ in $\delta x_o = 4 \text{ cm}$, pa dobimo $\delta\beta = 0,053 = 3^\circ$. Kot v stopinjah izračunamo tako, da kot v ločni meri pomnožimo s $360^\circ/2\pi$.

Tudi sicer dosežemo pri določanju kotov brez merjenja nenatančnost na nekaj stopinj. Črta, ki jo s prosto roko narišemo skozi dve točki v razmiku deset centimetrov, je za okoli 3° odklonjena od premice, narisane z ravnilom.

Po vsem tem si ne moremo kaj, da ne bi občudovali zanesljivosti košarkarjev pri metu na koš. P.J.Brancazio je v članku *Physics of basketball*, American Journal of Physics **49** (1981) 356 poročal o okoli 80 metih dobrih košarkarjev. Mete je med igro posnel s filmsko kamero in po posnetkih premeril. Pri uspešnih metih je bil kot zelo blizu najugodnejšega kota. Dobri košarkarji dosežejo v igri, ko jih nasprotniki pri metu ovirajo, 50 % in več zadetkov. Pri neoviranih metih v igri izkoristek naraste na kakih 70 % in pri kazenskih metih na 90 %. Po Guinnessovi knjigi rekordov iz leta 1980 je Ted St.Martin leta 1977 zadel 2036 zaporednih kazenskih metov na koš, Fred L.Newman pa je leta 1978 zadel 88 zaporednih kazenskih metov z zavezanimi očmi. R.Vinokur je v članku *Kinematika basketbol'nogo broska*, Kvant (1990) 4 (2), v katerem je dokaj podrobno obdelal gibanje žoge pri metu, opozoril na to, da mora izvrsten košarkar poleg

Slika 3. Začetna hitrost žoge pri metu pod najugodnejšim kotom (a), kot β_0 , kot α in najugodnejši kot β_n (b), odklik δx_0 (c) in odklik $\delta\beta$ (d) v odvisnosti od razdalje x_0 pri višinski razliki $y_0 = 1$ m



preostalega treninga po petstokrat na dan vreči žogo na koš, da ostane v vaji.

Košarkar in fizik se lotita meta na koš popolnoma različno. Fizik raziskuje na splošno pojav, ki ga je tako poenostavil, da ga obvlada s preprostimi enačbami. Tu smo se omejili na navpično ravnino skozi sredino obroča in nismo obravnavali odmikov od najboljše smeri levo in desno. Izognili smo se tudi zračnemu upor, ki ni popolnoma zanemarljiv, in vrtenju žoge. Košarkar si z vajo pridobi spretnost, da zadene koš iz vseh mogočih položajev. V obeh dejavnostih gre za spoznavanje pojavov in za izkušnje in v obeh imajo glavno vlogo možgani, le da na različnih ravneh. Podrobnosti o tem še ne poznamo. Zares pa košarkarjeva raven fiziku ne more koristiti in najbrž si tudi košarkar s fizikovo ne more dosti pomagati.

Janez Strnad

LANG S., MATKA! Pogovori z učenci. Prevedel Janko Moder. Ljubljana 1991. (Presekova knjižnica; 34) 116 strani

Ta knjiga je nekaj posebnega. Njen avtor Serge Lang je zelo priznan raziskovalec v algebri, napisal pa je tudi osemindvajset učenih knjig z različnih področij matematike. Predava na znani ameriški univerzi Yale, vendar se je pred nekaj leti na lastno pobudo oglasil pri srednješolcih v Parizu in v kanadskem Torontu. V tej knjigi beremo, kako se je z njimi pogovarjal o zanimivih rečeh iz matematike, kot so: raztegi likov in teles, število π , ploščina in obseg kroga, prostornina in površina krogle, prostornine piramid in stožcev, višje dimenzije, pitagorejska števila, neskončnosti ... Seveda so ga učenci spraševali tudi o njegovem lastnem delu.

Ti razgovori so vseskozi živahni in duhoviti, kakor v izvirniku, tako nič manj v imenitnem prevodu našega priznanega jezikoslovca Janka Modra. Avtor doseže, da učenci sami izvedejo posamezne majhne korake v celotni izpeljavi in tako uvidijo, da matematike le ni tako nemogoče razumeti. Za konec pa kakšen učenec še ponovi ves dokaz. Takšno dokazovanje pomaga človeku k samostojnemu logičnemu mišljenju ter k razumevanju, zakaj je nekaj res v matematiki in kakšne so zveze med navidez različnimi matematičnimi pojmi. Ob zgledih avtor pokaže, kako je algebra v pomoč geometriji, marsikaj pa tudi obratno (na primer vsota neke neskončne vrste pomeni prostornino piramide in jo tako zlahka določimo). Sploh nas S. Lang po najkrajši poti popelje v sredino dogajanja in nam odpre pogled na lepoto matematične zgradbe. Svojemu izvirnemu pristopu je avtor dodal še številne metodične napotke, zbrane v pripombah k poglavjem.

Janez Rakovec

OSTANKI – Rešitev s str. 263

Oglejmo si najprej ostanke, ki jih dobimo pri deljenju števil

$$1^k, 2^k, 3^k, 4^k, \dots; k \in \mathbb{N}$$

s tri. Brez težav lahko ugotovimo, da so ostanki enaki

$$1, 2, 0, 1, 2, 0, \dots \text{ za lihe } k$$

$$1, 1, 0, 1, 1, 0, \dots \text{ za sode } k$$

in da se periodično ponavljajo s periodo 3. Od tod sledi, da delne vsote

$$1^k, 1^k + 2^k, 1^k + 2^k + 3^k, \dots$$

pri deljenju s tri dajo ostanke

$$1, 0, 0, 1, 0, 0, 1, 0, 0, \dots \text{ za lihe } k$$

$$1, 2, 2, 0, 1, 1, 2, 0, 0, \dots \text{ za sode } k$$

ki se ponavljajo s periodo 3 za lihe k in s periodo 9 za sode k . Zdaj sestavimo zaporedje ostankov, ki jih dobimo pri deljenju števil $s_1, s_2, s_3, \dots$ s tri. Dobimo periodično zaporedje

$$1, 2, 0, 0, 0, 1, 1, 0, 0, 1, 0, 2, 1, 1, 0, 2, 0, 0, \dots$$

s periodo 18. Vsota s_n je torej deljiva s tri, kadar je n deljiv z 18 in kadar pri deljenju z 18 da enega od ostankov 3, 4, 5, 8, 9, 11, 15, 17.

Boris Lavrič

MIMOGREDE – Rešitev naloge s str. 242

S pomočjo logaritmiranja rešimo enačbo $2^{-2190000000} = 10^x$. Dobimo: $x = -659255690,6$. Naj bo poslej: $y = 659255690$. Zatorej:

$$\begin{aligned} 1 - 2^{-2190000000} &= 1 - 10^x = \\ &= 1 - 0,000\dots000a\dots \quad (a \neq 0) \end{aligned}$$

$$= 0,999\dots999b\dots \quad (b \neq 9)$$

Vilko Domajnko

31. ZVEZNO TEKMOVANJE SREDNJEŠOLCEV IZ MATEMATIKE

31. zvezno tekmovanje srednješolcev iz matematike je letos organiziralo Društvo matematikov, fizikov in astronomov Bosne in Hercegovine. Tekmovanje je bilo v Tuzli, 20. in 21. aprila 1990. Letos je bilo med 121 učenci iz vseh krajev Jugoslavije tudi 16 tekmovalcev iz naše republike: iz prvega letnika Bojan GORNIK, Marko KRAJNC, Mitja MASTNAK in Andrej SRAKAR, iz drugega Tomaž CEDILNIK, Marko SLAPAR in Gregor ŠEGA, iz tretjega Igor PANIČ in Marko PETRUŠIČ ter iz četrtega Andrej BAUER, Aleš ČASAR, Alenka KAVKLER, Marko KERN, Mitja KOLŠEK, Roman MODIC in Martin RAIČ. Vodila sta jih študenta matematike Peter ANASTASOV in Matjaž ŽELJKO, zastopnik Slovenije v zvezni tekmovalni komisiji pa je bil asistent Darjo FELDA.

Slovenska ekipa je po naporni nočni vožnji prispela v Tuzlo v petek zjutraj. Prebivala je v zelo lepem hotelu Tuzla. Naslednji dan so tekmovalci v gimnaziji Meše Selimovića štiri ure reševali naslednje naloge:

Prvi letnik

1. Naj bo n naravno število. Dokaži enakost

$$\underbrace{(33 \dots 3)}_n^2 + \underbrace{(55 \dots 5)}_{n-1} \underbrace{(44 \dots 4)}_n^2 = \underbrace{(55 \dots 5)}_{n-1} \underbrace{(44 \dots 4)}_{n-1}^2$$

2. Dan je ostrokotni trikotnik ABC s kotom $\sphericalangle ACB = 60^\circ$. Dokaži, da središče trikotniku očrtanega kroga leži na simetrali enega od kotov, ki jih oklepata višini iz oglišč A in B .
3. Naj bo $f : \{a_1, a_2, \dots, a_n\} \rightarrow \{a_1, a_2, \dots, a_n\}$ bijekcija z lastnostjo $a_1 + f(a_1) < a_2 + f(a_2) < \dots < a_n + f(a_n)$, kjer so $a_1 < a_2 < \dots < a_n$ dana realna števila. Dokaži, da je f identična preslikava.
4. Na tabli sta zapisani števili 1 in 2. Ko zapisujemo nanjo nova števila, se držimo naslednjega pravila: če sta na tabli števili a in b , lahko dopišemo število $ab + a + b$. Ali lahko na ta način dobimo števili 13121 in 12131?

Drugi letnik

1. Poišči vse pare (x, y) različnih naravnih števil, takšnih, da velja: če

- zamenjamo zadnji dve števki v številu x^2 , dobimo y^2 .
2. Lomljena črta, ki je razdeljena na odseke dolžine 3 in s krajšiči odsekov na plašču kocke z robom 2, povezuje dve najbolj oddaljeni oglišči te kocke. Koliko najmanj odsekov ima lahko ta črta?
 3. Dan je trikotnik ABC . Naj točka K leži na AB , L na BC in M na KL . Dokaži, da velja $\sqrt[3]{P_{ABC}} \geq \sqrt[3]{P_{AKM}} + \sqrt[3]{P_{MLC}}$, kjer P pomeni površino.
 4. Kralj želi zgraditi takšen pritličen dvorec z 1990 sobami, da velja:
 - a. Vsaka soba ima 0, 1 ali 2 vrat.
 - b. Med vsakima dvema sobama so največ ena vrata in iz vsake sobe vodijo na ulico največ ena vrata.
 - c. Vrat, ki vodijo na ulico, je 19, sob z enimi vrati pa 90.
 Ali je mogoče zgraditi tak dvorec?

Tretji in četrti letnik

1. Kvader dimenzije $m \times n \times p$ (m , n in p so naravna števila) je sestavljen iz mnp kock s stranico 1. Vsaki od teh kock je prirejeno realno število. Za vsak kvader dimenzije $m \times 1 \times 1$ ali $1 \times n \times 1$ ali $1 \times 1 \times p$, ki je sestavljen iz teh kock, velja: števila, ki so prirejena kockam v tem kvadru, vzeta po vrsti, tvorijo aritmetično zaporedje. Vsota osmih števil, ki so prirejena kockam ob ogliščih kvadra, je enaka a . Izračunaj vsoto vseh prirejenih števil.
2. Naj bo $x_0 = 1990$ in $x_n = -\frac{1990}{n}(x_0 + x_1 + \dots + x_{n-1})$ za $n \geq 1$. Izračunaj $x_0 + 2x_1 + 2^2x_2 + \dots + 2^{1990}x_{1990}$.
3. Naj bo S središče očrtanega kroga in H višinska točka trikotnika ABC . Q naj bo taka točka, da je S središče daljice HQ ter T_1 , T_2 , T_3 po vrsti težišča trikotnikov BCQ , CAQ in ABQ . Dokaži, da je $AT_1 = BT_2 = CT_3 = \frac{4}{3}R$, kjer je R polmer očrtanega kroga trikotnika ABC .
4. Koliko različnih binarnih relacij, ki niso ne simetrične ne antisimetrične, obstaja v množici n elementov? (Rečemo, da je relacija antisimetrična, če za poljubna različna elementa a in b , taka, da je a v relaciji z b , velja, da b ni v relaciji z a .)

Popoldne so si tekmovalci ogledali muzej solarstva in tovarno soli, zvečer pa je bilo družabno srečanje v diskoteki hotela. Že po nekajurnem popravljanju nalog je tekmovalna komisija opazila veliko izenačenost tekmovalcev; po objavljenih neuradnih rezultatih je bilo jasno, da na podlagi rezultatov s tekmovanja ne bo moč določiti ekipe za Mednarodno matematično olimpiado.

Tekmovalna komisija je zato sklenila, da bo v nedeljo zjutraj "mala olimpiada", za katero so bile izbrane naslednje naloge:

1. Zaporedje $\{a_n\}$ je dano s predpisom $a_{n+2} \cdot a_n = a_{n+1}^2 + 8$ in z začetnimi pogoji $a_1 = 4$, $a_2 = 6$. Dokaži, da je izraz $9a_n^2 - 128$ kvadrat racionalnega števila.
2. Dokaži, da velja $[\sqrt{n} + \sqrt{n+1} + \sqrt{n+2} + \sqrt{n+3}] = [\sqrt{16n+20}]$ za vsa naravna števila n .
3. Dokaži, da v vsaki množici $n+1$ naravnih števil, katerih prafaktorji so iz dane množice n praštevil, obstaja nekaj števil (eno ali več), katerih produkt je popoln kvadrat.

Slovenska ekipa se je letos odrezala izvrstno. Andrej BAUER je dobil drugo nagrado, Mitja MASTNAK, Andrej SRAKAR, Tomaž CEDILNIK in Roman MODIC so dobili tretje nagrade, Bojan GORNIK, Gregor ŠEGA, Aleš ČASAR, Mitja KOLŠEK in Martin RAIČ pa so bili pohvaljeni. Za mesta v olimpijski ekipi so se potegovali Andrej BAUER, Tomaž CEDILNIK in Roman MODIC, a žal ni nobenemu uspelo dobiti "karte" za Peking.

Tekmovalci so se vrnili v Ljubljano v ponedeljek zjutraj. Omeniti je treba še, da je imela slovenska ekipa letos prvič enotedenske priprave, in sicer en teden pred tekmovanjem. Dosedanje tiddnevne priprave tik pred tekmovanjem so bile namreč preveč naporne.

Matjaž Željko

Sadovski L.E., Sadovski A.K., **MATEMATIKA IN ŠPORT.**
Društvo matematikov, fizikov in astronomov RS, 1990, 192
str. (Knjižnica Sigma ; 47) Cena 200.00 din (160.00 din)

MATEMATIKA IN ŠPORT sodi v plejado knjig, ki poskušajo (mlademu) bralcu odkrivati nova področja, kjer je mogoče koristno uporabiti matematične metode. V njej so obravnavana nekatera športna dogajanja, ki jih lahko proučujemo z metodami uporabne matematike, in to v dveh stopnjah: avtorja najprej v opisni obliki predstavita posamezen problem in nakažeta metode za njegovo reševanje, nato pa pojasnita, kako na takšni osnovi zgradimo primeren

model in (z občutkom za pravo mero strogosti in obravnavo podrobnosti) uporabimo ustrezna matematična orodja za rešitev naloge.

Delo, ki ga avtorja namenjata učencem, športnikom, trenerjem, učiteljem matematike in telesne kulture, je razdeljeno na deset poglavij z naslednjimi naslovi: Matematika športu in šport matematiki, Kaj je to "UPORABNA MATEMATIKA"? , Matematični model teniške igre, Ah, ti sodniki!, Pogovorimo se o rekordih, Linearno programiranje, Teorija iger, Organizacija tekmovanj, O športnih kvalifikacijah, Zaključek.

Za večino bralcev bo to delo predvsem bogat pregled različnih matematičnih metod, včasih delno prilagojenih za uporabo na specifičnem področju. Opis metod v knjigi je primeren tudi za matematično manj izkušenega bralca, zato jo bo verjetno že osnovnošolec lahko prebral "po diagonali", srednješolci pa bi se morali (z nekaj dodatnega miselnega napora) že uspešno prebiti skozi celotno delo. V knjigi pa je tudi toliko informacij o športu samem, da ne bo nič manj zanimiva za tiste, ki matematično plat problemov povsem obvladajo. Za vzorec omenimo poleg - po našem mnenju - najbolj zanimivih postopkov (kako izračunavajo rating šahistom, kako določajo vrstni red tekmovalcev v gimnastiki ali umetnostnem drsanju) še modele teniške igre, računanje trenda v zvezi z razvojem svetovnega rekorda pri skoku s palico, napovedi o tem, kdaj bo presežen Beamonov rekord v skoku v daljavo (avtorja trdita, da je verjetnost, da pride do tega pred letom 2000, večja od 0.60), določanje najboljše taktike v raznih športnih disciplinah (pri menjavah igralcev v hokeju na ledu, pri sestavljanju teniške ekipe, pri začetku finiša v hitrostnem drsanju ali pri izpuščanju posameznih tež pri dviganju uteži) in uporabno matematičnih metod pri organizaciji različnih tekmovanj (kako npr. v tenisu postavimo nosilce skupin, kako določimo po Bergerjevem sistemu pare za posamezno kolo šahovskega turnirja in kako to gre po švicarskem sistemu).

Knjigo "Matematika in šport", ki je prvič izšla leta 1985 v zbirki "Kvant" pri moskovski založbi "Nauka", je več kot prevedel Bojan Hvala: ne gre namreč le za dobeseden prevod ruskega izvirnika, ampak za zaokroženo priredbo knjige za naše razmere, tako pri predstavitvi posameznih metod (prilagojeno našemu srednješolcu) kot pri izbiri nekaterih praktičnih zgledov. Ker je prevajalec poskrbel tudi za dodatne informacije o slovenski in tuji literaturi, ki omogoča poglobljeno spoznavanje posameznih matematičnih metod, lahko v knjigi MATEMATIKA IN ŠPORT vidimo tudi privlačen splošni uvod v uporabno matematiko in jo kot takšno še posebej toplo priporočamo v branje.

Jože A. Čibej

10. REPUBLIŠKO TEKMOVANJE IZ FIZIKE ZA OSNOVNOŠOLCE

Oddelek za fiziko pedagoške fakultete v Mariboru in Društvo matematikov, fizikov in astronomov sta bila organizatorja jubilejnega tekmovanja iz fizike za osnovnošolce. V predavnicah in laboratorijih pedagoške fakultete v Mariboru se je 5. maja 1990 v znanju fizike pomerilo 69 ekip osnovnošolcev.

Pred republiškim tekmovanjem so bila 7. aprila 1990 področna tekmovanja v devetih mestih, kjer so tekmovanja organizirali in vodili: Jožica Dolenšek (Celje), Franc Pogorelnik (Dravograd), Mirko Cvahte in Zlatko Bradač (Maribor), Eda Okretič (Koper), Anita Fakin (Nova Gorica), Jože Stare (Kranj), Edo Dečko (Murska Sobota), Danijel Brezovar (Novo Mesto) in Franci Prijatelj (Ljubljana). Sodelovalo je 221 ekip iz 7. razredov in 269 ekip iz 8. razredov, skupaj 980 učencev.

Naloge za področna tekmovanja in republiško tekmovanje sta pripravila Mirko Cvahte in Zlatko Bradač.

Ob tej priložnosti še enkrat čestitamo tekmovalcem za dosežene rezultate.

Rezultati republiškega tekmovanja

7. razred

1. mesto: Miha JURAS, Maruša KUNAVER, 19 točk (20 možnih), OŠ Majda Vrhovnik, Ljubljana, mentorja Breda Koroušič, Pavle Zajc

2. mesto: Jaša PELKIČ, Eva VEBLE, 18 točk, OŠ Bojan Ilich, Maribor, mentor Martin Knuplež;

3. mesto: Matjaž PLANINŠIČ, Barbara ŽAVCER, 17,5 točk, OŠ Radlje ob Dravi, Radlje, mentor Franc Pogorelnik; Marko ŽNIDARIČ, Gregor GODEC, 17,5 točk, OŠ Bogdan Tušek, Miklavž, mentor Zvonko Trstenjak;

Pohvale: Rihard HUDEJ, Katarina LOREDAN, 16,5 točk, OŠ Boris Kidrič, Ajdovščina, mentor Bojan Rustja; Domen CUKJATI, Simon ŽAKELJ 16 točk, OŠ Log - Dragomer, mentor Marko Gerbec; Borut KOLARIČ, Matjaž BRINC 15,5 točk, OŠ Ledina, Ljubljana, mentor Maja Turk; Jure KLEMENČIČ, Jernej ULE, 15,5 točk, OŠ Majda Vrhovnik, Ljubljana, mentorja Pavle Zajc, Breda Koroušič; Andrej BENEDIK, Leon RIHTARŠIČ, 15,5 točk, OŠ Prešernove brigade, Železniki, mentor Nada Kavčič; Gorazd ZUPANČIČ, Marjan ŠTERK, 15,5 točk, OŠ Milka Šobar - Nataša, Novo mesto, mentor Milena Košak; Miha POGAČAR, Uroš KRALJ, 15 točk, OŠ Josip Plemelj,

Bled, mentor Helena Vojvoda; Jernej ŽUPEC, Aleš POLIČ, 15 točk, OŠ Lenart, Lenart, mentor Danijel Divjak;

8. razred

1. mesto: Tjaša KOLLER, Marko OREŠKOVIČ, 19 točk, OŠ Rihard Jakopič, Ljubljana, mentor Marija Košenina;

2. mesto: Jure VRHOVNIK, Matjaž VENCELJ, 18,5 točk, OŠ Cveto Močnik, Vič - Rudnik, mentor Ponikvar-Lazič; Vesna DEKLEVA, Živa PEČAN, 18,5 OŠ Vojka Šmuc, Izola, mentor Lijana Turk;

3. mesto: Borut GAJZER, Cveto GAŠPERUT, 18 točk, OŠ Slavko Šlander, Maribor, mentor Irena Pernat; Dejan KROŠELJ, Jure FERLEŽ, 18 točk, OŠ Veljko Vlahovič, Celje, mentor Aleksander Špec;

Pohvale: Uroš PAUNOVIČ, Mitja LEVSTEK, 16,5 točk, OŠ Majda Vrhovnik, Ljubljana, mentor Karmen Šturm; Primož PIRIH, Uroš LAVRENČIČ, 16,5 točk, OŠ Veljko Vlahovič, Ljubljana, mentor Ivanka Madronič; Iztok KAVKLER, Teja TAMŠE, 16 točk, OŠ Fran Roš, Celje, mentor Darja Polšak; Peter KANTE, Narvika BAVCON, 15 točk, OŠ IX. korpus NOVJ, Nova Gorica, mentor Anita Fakin; Denis PODLESEK, Uroš IVANC, 14,5 točk, OŠ Edvard Kardelj, Murska Sobota, mentor Franc Brumen; Jernej FILIPČIČ, Boštjan ŽVANUT, 13,5 točk, OŠ Dušan Bordon, Koper, mentor Nevenka Mask; Samo PIRC, Metod KRIVEC, 13,5 točk, OŠ Anton Tomaž Linhart, Radovljica, mentor L. Hajdinjak.

Ekipa OŠ Rihard Jakopič iz Ljubljane se je uvrstila na zvezno tekmovanje.

Naloge s področnih tekmovanj

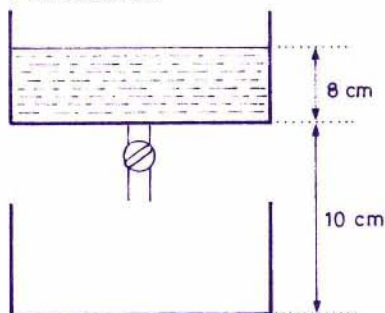
7. razred

- Približno izračunaj, koliko moramo v enem letu plačati za vodo, ki odteče iz pokvarjene vodovodne pipe, če pade iz pipe vsako sekundo ena kaplja. Kubični meter vode stane 20 din. Prostornino kaplje oceni sam.
- Vodni zbiralnik leži 70 m nad mestom. Najmanj s kolikšno silo moramo s prstom pritiskati na odprtino odprte vodovodne pipe, da voda ne odteka:
 - na vrhu 40 m visokega nebotačnika;
 - v pritličju nebotačnika?
 Ploščina odprtine vodovodne pipe je $1,5 \text{ cm}^2$.
- Pet enakih silomerov obesimo enega pod drugim. Kolikšna je razdalja od zgornjega kavlja zgornjega silomera do spodnjega kavlja spodnjega

silomera? Dolžina enega neobremenjenega silomera je 15 cm, teža pa 1,5 N. Pri sili 10 N je dolžina silomera 20 cm.

4. Dve enaki posodi sta povezani s cevjo z ventilom, kot kaže slika. V zgornji posodi je 16 kg vode, spodnja je prazna. Nato nastavimo ventil tako, da se voda enakomerno pretoči v 20 minutah.

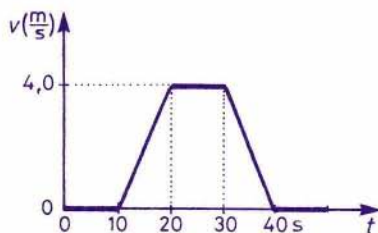
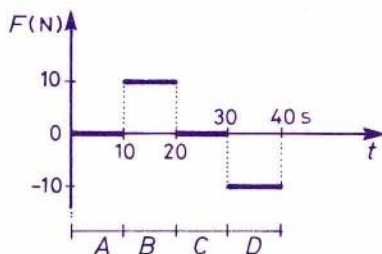
- Kolikšna je sprememba potencialne energije vode v 20 minutah?
- Kolikšna je sprememba potencialne energije vode v prvih 10 minutah in kolikšna v drugih 10 minutah?
- Kolikšna je sprememba potencialne energije samo v 10. minuti?



5. Dve metrski palici, prva je bakrena, druga aluminijasta, postavimo eno do druge vzdolž iste premice in segrejemo za 80°C .
- Za koliko se spremeni razdalja med sredinama palic?
 - Kje na palicah sta točki, med katerima se razdalja najbolj poveča? Podatke za računanje raztezkov poišči v učbeniku.

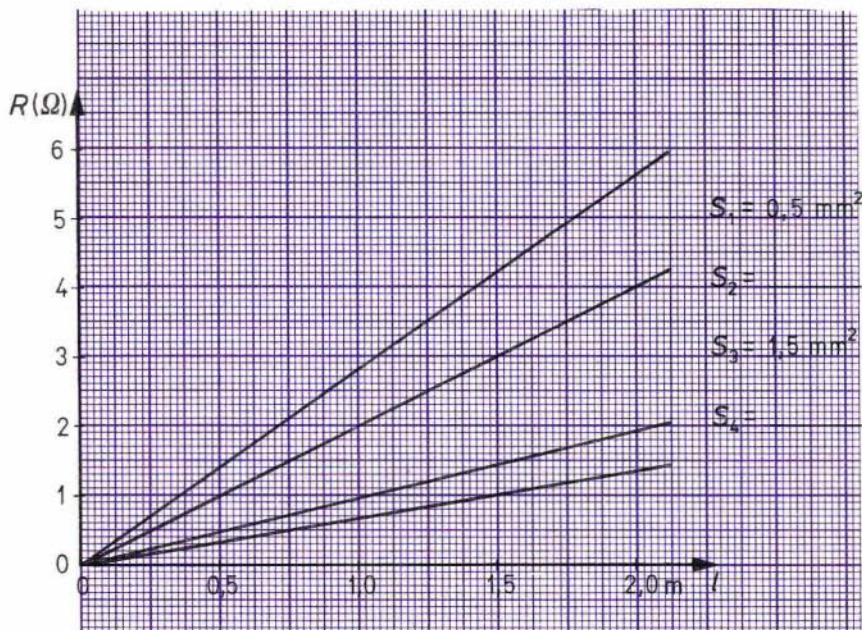
8. razred

- Po voznem redu vzleti letalo ob 8.00 uri iz kraja A, nakar leti s povprečno hitrostjo 500 km/h do kraja B. V meglenih jutrih prestavijo vzlet na 9.00 uro, povprečna hitrost letala pa je za 100 km/h večja, da je pristanek v kraju B po voznem redu. Kolikšna je razdalja med krajema A in B?
- S kolikšno hitrostjo kroži Maribor okrog zemeljske osi? Zemljepisna širina Maribora je približno 45° , polmer Zemlje pa je 6400 km.
-



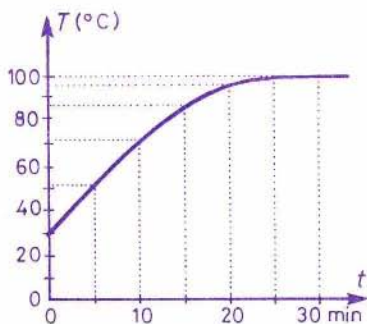
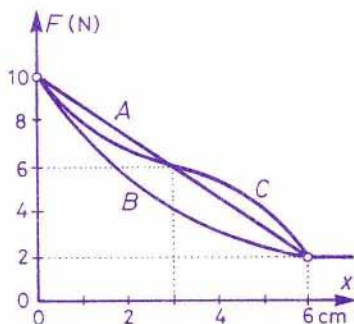
Na klado deluje sila F . Diagrama kažeta, kako se sila F in hitrost v spreminjata v odvisnosti od časa. Kolikšno delo opravi sila F v posameznem časovnem intervalu (A, B, C in D , glej sliko)? Kolikšno je skupno opravljeno delo?

4. Žepni računalnik na sončne celice potrebuje za delovanje napetost okrog 1,5 V. Približno izračunaj, kolikšen električni tok teče skozi računalnik med delovanjem. Ko sije sonce, pade vsako sekundo na 1 m^2 približno 1000 J svetlobne energije. Računalnik deluje tudi pri 100 krat šibkejši svetlobi. Druge podatke oceni sam. Sončne celice pretvorijo približno 15 % vpadle svetlobne energije v električno.
5. Diagram prikazuje, kako se spreminja upor žice v odvisnosti od dolžine žice l in od preseka žice S .
 - a) Kakšen presek in kolikšno dolžino žice moramo uporabiti, če hočemo napraviti 20 ohmski upornik?
 - b) Na diagramu dopolni podatke za manjkajoče preseke vodnikov!



Naloge z republiškega tekmovanja

1. V mešanici helija in kisika je 25 prostorninskih odstotkov helija. Kolikšen je delež helija, ki ga izrazimo v masnih odstotkih? Gostota helija je $0,18 \text{ kg/m}^3$, kisika pa $1,4 \text{ kg/m}^3$ pri normalnem tlaku in normalni temperaturi.
2. Tri telesa z oznakami A, B in C spuščamo v vodo in merimo odvisnost sile vzmetne tehtnice, na kateri je telo obešeno, od višine x potopljenega dela telesa. Diagram sil kaže slika. Pri $x = 0$ je telo tik nad vodno gladino, x merimo od vodne gladine navpično navzdol.
 - a. Kolikšne so mase teles in kolikšne gostote?
 - b. Na en diagram približno nariši, kako se spreminjajo sile vzgona za vsa tri telesa v odvisnosti od vrednosti x !
 - c. Približno nariši oblike teles!



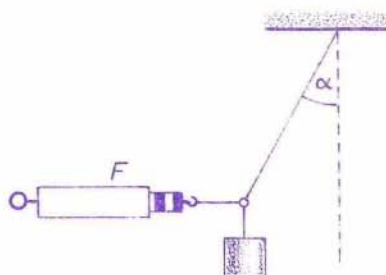
3. Med segrevanjem $0,50 \text{ kg}$ vode s potopnim grelnikom smo merili temperaturo in čas, njuno medsebojno odvisnost kaže diagram. Grelnik je vsakosekundo oddal vodi 200 J toplote. Koliko toplote je ušlo v okolico:
 - a) V času od 0 do 5 min?
 - b) V času od 15 do 20 min?

Eksperimentalni nalogi

7. razred

4. Brez uporabe merila izmeri vsaj na 1 cm natančno dolžino žice, pri čemer si lahko pomagaš z listom A4, ki ima dimenzije 297 mm in 210 mm . Postopek merjenja razumljivo opiši, ravnila in drugih merilnikov dolžin ne smeš uporabljati.
Potrebščine: žica, list A4, škarje.

5. Izmeri, kako se spreminja v odvisnosti od kota α sila F , s katero moramo vleči utež v vodoravni smeri, da utež miruje (glej sliko). Nariši diagram sila F v odvisnosti od kota α ! Da bo diagram lep, izmeri silo pri čimveč različnih kotih, recimo pri 0° , 15° , 30° , 45° , 60° , 75° . Kolikšna pa bi bila sila pri kotu 90° ?



Potrebščine: stojalo z vrvico in utežjo, silomer, 2 trikotnika, milimetrski papir.

8. razred

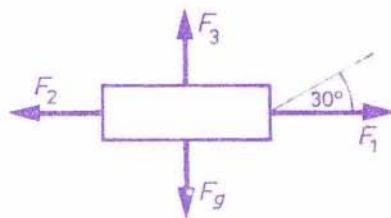
1. Osebni avtomobil vozi enakomerno s hitrostjo 90 km/h in prehiteva tovorni avtomobil, ki ima hitrost 50 km/h . Osebni avtomobil je dolg 4 m , tovornjak pa 10 m . Razdalja med avtomobiloma pred in po prehitevanju naj bo 60 m .

- Koliko časa traja prehitevanje?
- Kolikšno pot prevozi osebni avtomobil med prehitevanjem?

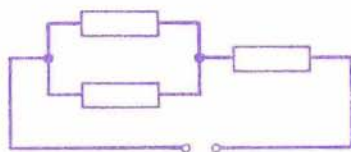
2. Na telo z maso $3,0 \text{ kg}$ delujejo štiri sile, kot kaže slika. Velikosti teh sil so: $F_1 = 45 \text{ N}$, $F_2 = 20 \text{ N}$, $F_3 = 30 \text{ N}$ in $F_g = 30 \text{ N}$. S kolikšno dodatno silo F moramo delovati na telo, da se bo gibal s pospeškom 20 m/s^2

- v smeri sile F_1 ,
- navpično navzgor,
- pod kotom 30° glede na smer sile F_1 ?

Za vse tri primere določi velikost in nariši smer dodatne sile F !



3. Na kolikšno največjo napetost lahko priključimo električno vezje, ki je na sliki, če so vsi trije uporniki enaki in imajo upor 200Ω ter največjo dopustno moč $0,5 \text{ W}$?



Eksperimentalni nalogi

4. S špiritnim gorilnikom segrej 400 ml vode za približno 10 K in izračunaj, koliko odstotkov toplote gre v izgubo pri takem segrevanju. Izračunaj tudi, kolikšen toplotni tok oddaja špiritni gorilnik. V priročniku najdemo podatek, da se pri gorenju 1 g špirita sprosti 27 kJ toplote. Za segretje 1 kg vode za 1K potrebujemo 4200 J toplote. Potrebščine: špiritni gorilnik, stojalo, čaša, tehtnica z utežmi, termometer, stoparica.
5. Izmeri notranji upor
- ampermetra na merilnem območju 100 mA,
 - voltmetra na merilnem območju 3 V. Nariši električni vezji za obe meritvi. Opozorilo: Ampermetra ne smeš priključiti neposredno na napetostni izvir, ampak samo zaporedno z upornikom. Potrebščine: voltmeter, ampermeter, napetostni izvir 0 - 25 V, upornik z uporom nekaj sto ohmov.

Mirko Cvahte, Zlatko Bradač

TRI WELLSOVE UGANKE

iz njegove knjižice *Recreations in logic*, Dover Publications, New York.

POŠEVNO SEŠTEVANJE

1

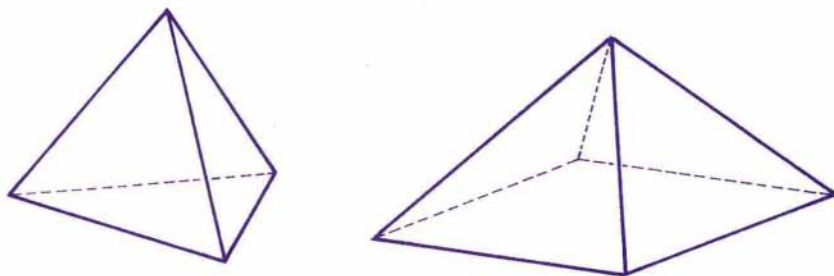
Spodaj so zapisane ena pod drugo brez konca (v desetiškem številskem sestavu) vse zaporedne potence števila 3, tako da je vsaka postavljena za eno mesto bolj desno kot tista nad njo. Kaj dobimo, če vsa ta števila seštejemo na običajen način?

```

1
 3
 9
27
81
243
729
2187
....
.....
?????????????...
```

RAZMERJE PROSTORNIN

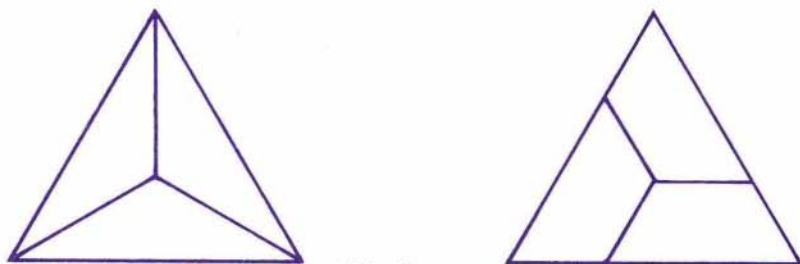
2 Računanje prostornin piramid je lahko zamotano, a ne v tej uganki. V kakšnem razmerju sta prostornini pravilne tristrane in pravilne štiristrane piramide, če imata obe robove enako dolge? Z računanjem se pri tem res ni treba mučiti, že množenje z dve je čisto dovolj.



Slika 1

TRISEKCIJA TRIKOTNIKA

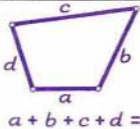
3 Enakostranični trikotnik zlahka razrežemo na tri skladne like, na primer tako kot na spodnjih risbicah. Z naslednjim dodatnim pogojem pa postane naloga trši oreh. Noben rez ne sme iti skozi središče trikotnika, ki tedaj leži znotraj enega od kosov. Vsaj en lik je seveda treba sestaviti iz najmanj dveh narezanih kosov. In še vprašanje: Najmanj koliko kosov moramo pri tem narezati?



Slika 2

Prevedel Boris Lavrič

SLIKOVNA KRIŽANKA

 $a + b + c + d =$	TALISOVA ORANŽADA	AM.FILM. IGRALKA	REČ	GOSPO- DARSKI USTROJ	PRIVESEK PRI GORENJI HIŠI			STAR FRANC. KOVANEC	NEDOSEC- LJIV VZOR
	KILO- METER					SPRIJE- TOST	REKA V FRANCIJI		
KNJIGA IZ KNJIŽNICA SIGMA									
AVTOR ZGOR- NJEGA DELA									
	VRSTA LADJE SOL BOROVE KISLINE							POLITIK MORO	
	ČAČAK				NASPROTNO IZBIOLJ- ŠANJU REKA V AVSTRILI			SMER V UMETNOSTI	
NEVARNA SKALA V MORJU			ANGLEŠKI MLADINSKI PISATELJ						KRAJ NAD DOLINO SAVE
			MRLIČ						KOPER
ARGON		REKA V SARAJEVU PREROKO- VANA PRI- HOČNOST							
ORODJE ZA DAJANJE LONCEV V KRUŠNO PEČ							PRIPOVEDNA PESNITEV		
GLAVNO MESTO GANE							VZVIŠEN PRIOTOR		
MESTO V SZ ITALIJI					DEL OBRAZA				NEMŠKI PISATELJ
									SANJE
PALUBA				RADIJ	HOMER- JEV JUNAK				
NAVIGA- CIJSKA NAPRAVA					SEMENJ				
NAPAD, NASKOK					HIPNOZI PODOBNO STANJE				

"KRATKA ZGODOVINA FIZIKE"

NOVNICA	PRIJAVA	VBOGAJME	ITAL. NAFTNI KONCERN	MAKED. PESNIK (KOČO)		ŠIBENIK	SOBICA V KMEČKI HIŠI	PRVI SEKRETAR OZN	REČNI ZAVOJ	AVTOR MARKO BOKALIČ
					PODLISTEK					IZBRANA VISOKA DRUŽBA
NGLEŠKO PEN. IME						IZUMITELJ TELEFONA				
ILKANSKI ZMECEK						ŠVICARSKI PISATELJ				
			PISATELJI- CA VAŠTE					JOSIP IPAVEC		
			OBLIKA TEL. VAJ					OVČJE MESO		
							AVT (ORIGIN.)			
							RIMSKA 2			
				PLINSKA ŽARNICA						
				PESNIK STRNIŠA						
	ST. SLOV. PEVEC (RAFKO)								POTU- JOČI PASTIR	AVANS, PREDU- JEM
TV VODITE- LJICA (OLGA)	GERMAN. BOGINJE USODE 1. IN 11. CRKA						1			
							UPOŠTE- VANJE			
					DEL ELEKTRO- MOTORJA OSEBNI ZAIIMEK					
		GRUDEN				LETNI ČAS				
		OLIVER CROMWELL				RAZLIČNA SOGLASN.				
	TELESNI UD									RISBE MIHA ŠTALEC
	MESTO V EVROP. DELU TURČIJE									

MALA ZBIRKA NALOG L. FIBONACCIIJA

Italijanski matematik **Leonardo Fibonacci** (1170 - 1250) velja za najpomembnejšega evropskega matematika v 13. stoletju. Med drugim je Evropejcem prvi predlagal uporabo desetih števk (cifer) - številskih znamenj, ki jih danes uporabljamo širom sveta, v njegovem času pa so jih uporabljali zgolj v arabskih deželah. Poleg tega pa so pomembni tudi njegovi prispevki k teoriji diofantskih enačb, pri reševanju kubičnih enačb in še kje. Marsikomu pa je ime poznano zaradi Fibonaccijevega zaporedja.



Leonardo Fibonacci

Leta 1228 je Fibonacci izdal znamenito delo *Liber abaci* (Knjiga o abaku). In prav iz te knjige izvira tudi večina izmed dvanajsterice nalog, ponujenih v pokušino bralcem Preseka. Zahtevnostni spekter teh nalog je kar širok. Med njimi je namreč veliko takšnih, ki se jih lahko lotijo že tudi osnovnošolci, z nekaterimi drugimi pa utegnejo imeti precej opravka tudi v matematiki spretnejši srednješolci. A kakorkoli že - rešitve tistih nalog, ki jih boste zmogli, nam seveda le pošljite. Nagrade vas čakajo!

Še tole - preden se zares lotite reševanja nalog, preberite tudi *Opombe k nalogam in namige za reševanje*. Utegne koristiti!

Zdaj pa zares.

1. Kralj je poslal 30 ljudi v svoj ogromni sadovnjak, da bi mu tam sadili drevesa.
Povej, koliko dni bi potrebovalo 36 ljudi za to, da bi posadili 4400 dreves, če je znano, da je onih 30 ljudi sadilo 1000 dreves natanko 9 dni.
2. Katero število da, če ga množiš z $\frac{19}{20}$, svoj kvadrat?

3. Koliko parov zajcev dobimo od enega para novorojenih zajcev po enem letu, če privzamemo, da vsak izmed parov skoti vsak mesec po en nov par, ki je zatem ploden od drugega meseca starosti naprej, in da med temi zajci ni smrtnih primerov?
4. Neki mož ima sadovnjak z jablanami, v katerega vodi sedem vrat. Ko se je nekoč vračal iz sadovnjaka, je dal stražarju pri prvih vratih polovico jabolok iz košare, ki jo je nosil s seboj. Zatem mu je dodal še eno jabolko. Drugemu je dal polovico tistega, kar mu je ostalo, in spet še eno jabolko povrh. In tako naprej tudi vsakemu izmed naslednjih petih stražarjev - polovico jabolok iz košare, za povrh pa še eno. Naposled je zapustil sadovnjak z enim samim jabolkom v košari.
Koliko jabolok je nabral ta dobri mož tistikrat v svojem sadovnjaku?
5. Nekdo je vložil en denarij. Zaradi obresti bo imel čez pet let že dva denarija, pet let zatem pa se mu bo bogastvo v banki znova podvojilo. Povej, na koliko denarijev bi zrasel ta njegov vložen denarij v sto letih?
6. Neki mož je zapustil svojemu najstarejšemu sinu en zlatnik in še sedmino vseh preostalih zlatnikov. Zatem je dal drugemu najstarejšemu sinu iz preostale vsote dva zlatnika in spet še sedmino vseh preostalih zlatnikov. Od tega, kar mu je ostalo, je dal tretjemu sinu tri zlatnike in še sedmino vseh preostalih. In tako naprej - vsak naslednji je dobil po en zlatnik več od prejšnjega in še sedmino vseh preostalih zlatnikov povrh. Zadnji, najmlajši, je naposled dobil, kar je pač ostalo. Toda, glej - vsi sinovi so dobili enako!
Koliko sinov je imel mož in koliko zlatnikov jim je razdelil?
7. Katerih pet uteži je treba izbrati, da bi se dalo z njihovo pomočjo tehtati katerokoli breme, ki ni težje od 30 kilogramov in čigar težo merimo z naravnim številom?
Tudi uteži naj tehtajo celo število kilogramov. Tehtaš tako, da na eno stran tehtnice postavljaš uteži, na drugo stran pa breme.
8. Oni je kupil 30 ptičkov za vsega skupaj 30 cekinov. S cenami je bilo na semnju pa takole: za tri vrabce je bilo treba odšteti po cekin, za prav toliko so prodajali tudi par divjih golobov, medtem ko so bili domači golobi že po dva cekina vsak. Kupil je od vsakega po nekaj.
Koliko ptičev te in one vrste je torej tedaj nosil domov?

9. Dokaži, da je produkt vsote dveh kvadratov z vsoto drugih dveh kvadratov spet vsota dveh kvadratov.
10. Poišči tak ulomek x , da bosta števili $x^2 + 5$ in $x^2 - 5$ vsako zase kvadrata nekega drugega ulomka.
11. Trije imajo skupaj veliko denarja. Prvi je lastnik polovice, drugi tretjine, tretji pa šestine vsega. Potem pa se spro med seboj in vsak izmed njih si nagrabi s tega kupa, dokler tam ne ostane prav nič več. Ko se spet nekoliko pomirijo, vrne prvi polovico tistega, kar je vzel, drugi tretjino nagrabljenega, tretji pa le šestino nagrabljenega. Ves vrnjeni denar dajo znova na en kup in si ga potem še enkrat razdele med seboj na enake dele. In začuda - na tak način dobi vsak spet prav tisti znesek, ki mu je pripadal po dogovoru že od vsega začetka!
Povej, koliko denarja je bilo na tistem kupu na začetku in koliko je dobil vsak izmed teh treh.
12. Reši enačbo $x^3 + 2x^2 + 10x = 20$.

Opombe k nalogam in namigi za reševanje

3. Že omenjeno Fibonaccijevo zaporedje se mora za svojo popularnost zahvaliti najbrž prav tej nalogi.
5. Fibonacci je v svojih tekstih poimenoval znana števila z *numerus* ali *denarij*, kar pomeni denar, neznana števila pa z *res*, kar pomeni stvar.
6. To nalogo zasledimo tudi v delih nekaterih kasnejših znamenitih matematikov. Tako sta se z njo ukvarjala tudi francoski matematik *Nicolas Chuquet* (umrl pribl. 1500) in pa *Leonhard Euler* (1707 - 1783), vsem znani švicarski matematik.
7. Naloga je v literaturi bolj znana pod imenom Bachetov problem o utežeh. Francoski matematik *Claude Gaspard Bachet de Méziriac* (1587 - 1630) jo je leta 1612 objavil v svoji znameniti zbirki *Problèmes plaisant et delectables* (Zabavni in očarljivi problemi).
9. Uporaba črkovnih simbolov v algebri je bila v 13. stoletju seveda šele v povojih. Sicer pa naloga govori o t.i. Fibonaccijevi enačbi.
10. Zadnje tri naloge iz te zbirke so znane po tem, da jih je moral Fibonacci reševati na nekem matematičnem tekmovanju. Rešil jih je naravnost bravurozno, čeprav zagotovo niso vse lahke. Ker je tudi ta naloga v dani obliki zelo zahtevna, namignimo, da ima iskani ulomek imenovalec 12.

11. Množica vseh rešitev te naloge je neskončna. Morda bi bilo zanimivo poiskati najmanjšo neničelno celoštevilsko rešitev.
12. Namignimo, da enačba ne premore racionalnih korenov. Fibonacci je znal poiskati njen koren na devet decimalnih mest natančno. Ga zmorete prekiniti?

Literatura

Boyer Carl Benjamin: *A history of mathematics*, New York, John Wiley & Sons, 1968,
 Dadić Žarko: *Razvoj matematike*, Zagreb, Školska knjiga, 1975,
 Eves Howard: *An Introduction to the History of Mathematics*, New York, Holt Rinehart and Winston, 1969.

Vilko Domajnko

Harold P. Furth, NEVARNOSTI SODOBNEGA ŽIVLJENJA

V antideželi, daleč tam zunaj na robu sveta,
 je izobraženi dr. Edvard Antiteller doma.
 Sredi antiotrok in antikegljev prebiva,
 ni mar mu atomov
 ne teorije, ki zlivanje jeder odkriva.
 Z antimetrom meri razdalje,
 ko dan za dnem, koder že bodi,
 zamišljen skozi antidoline in antihribovja hodi.
 Pomislite, komaj se v znanosti danes kaj zaiskri,
 že se mladina po šolah jutri o tistem uči.
 Znenada nad morjem se krožnik leteči pojavi,
 "Komisija za jedrsko energijo" napis na njem pravi.
 Torej je res. "Ni jim preprečil strah poseči v globine
 vesolja," si reče, četudi se spomni na mah
 svarila, da človek nekaznovan ne more
 po zvezdah poseči.
 "Kako je kaj?" je vprašal še komandant – tako povedo
 anali – in segel je tujcu v roko, nato
 so le žarki gama ostali.

Iz Biltena 27. republiškega tekmovanja
 iz matematike za dijake srednjih šol, Črnomelj 1989

REŠITVE NALOG

26. REPUBLIŠKO TEKMOVANJE OSNOVNOŠOLCEV IZ MATEMATIKE – Rešitve nalog s str. 228

7. razred

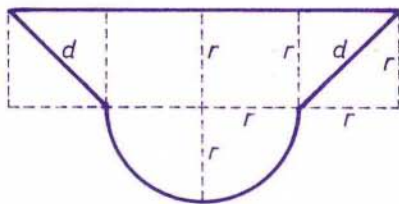
1. Izraz uredimo $\frac{a}{2+a} + \frac{2a}{2-a} + \frac{9}{4-a^2} = \frac{2a-a^2+4a+2a^2+9}{4-a^2} = \frac{(a+3)^2}{4-a^2}$.

Ulomek $\frac{(a+3)^2}{4-a^2}$ ima najmanjšo pozitivno vrednost za $a = 0$. Tedaj je števec ulomka najmanjši, imenovalec pa največji.

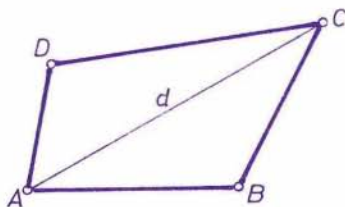
2. Zaradi $8316 = 2^2 \cdot 3^3 \cdot 7 \cdot 11$ moramo število 8316 pomnožiti s $3 \cdot 7 \cdot 11 = 231$, saj je $8316 \cdot 231 = (2 \cdot 3^2 \cdot 7 \cdot 11)^2$. Iz $8316 \cdot 231 = 1386^2$ vidimo, da je zmnožek kvadrat števila 1386.

3. V zapisu 1234567891011121314151617181920212223...9991000... iščemo cifro na tisočem mestu. Za zapis 9 enomestnih števil rabimo 9 cifer, za zapis 90 dvomestnih jih rabimo 180 in za zapis 900 trimestnih 2700 cifer. Zaradi $1000 - 189 = 811$ iščemo cifro na 811-tem mestu med trimestnimi števili, račun $811 : 3 = 270$ (ost. 1) pa pove, da je iskana cifra prva cifra 271-tega trimestnega števila. To je število 370, iskana cifra pa 3.

4. Najprej izračunamo ploščino zemljišča: $p = \frac{\pi r^2}{2} + r^2 + 2r^2 = r^2(\frac{\pi}{2} + 3) = 25 \cdot (\frac{\pi}{2} + 3) = 114,25 \text{ m}^2$, nato pa, koliko semen porabimo: $114,25 \cdot 4 = 457$ dag. Ostane nam še izračun dolžine ograje $o = \pi r + 4r + 2d = r(\pi + 4 + 2\sqrt{2}) = 5(\pi + 4 + 2\sqrt{2}) \doteq 49,8 \text{ m}$.



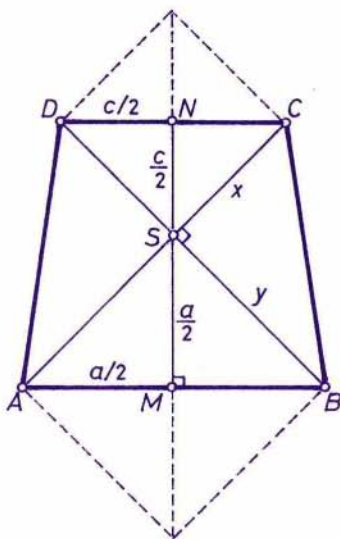
5. Iz $o_1 + o_2 = o_s + 2d$, imamo $25 + 27 = 32 + 2d$, odtod pa $2d = 20$ in $d = 10$.



8. razred

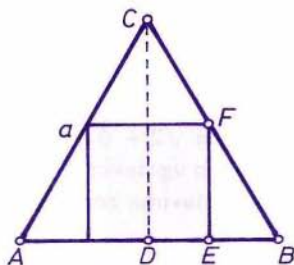
1. Ker je $\frac{x-2}{x+2} = \frac{-\frac{10}{3}-2}{-\frac{10}{3}+2} = 4$ in $\frac{x+2}{x-2} = \frac{1}{4}$, dobimo $4 = k \cdot \frac{1}{4}$, $k = 16$.

2. Pomagamo si s sliko. Najprej je $\overline{SM} = \overline{AM} = a/2$, $\overline{SN} = \overline{DN} = c/2$ in $v = \overline{NM} = a/2 + c/2 = 7$ cm ter $p = s \cdot v = \frac{a+c}{2} \cdot \frac{a+c}{2} = 49$ cm². Nato pa $y = \overline{SB} = a/\sqrt{2}$, $x = \overline{SC} = c/\sqrt{2}$ in $b^2 = x^2 + y^2 = \frac{a^2}{2} + \frac{c^2}{2} = \frac{100}{2}$ oziroma $b = 5\sqrt{2}$ cm ter $o = a + 2b + c = 14 + 10\sqrt{2} \doteq 28,1$ cm.

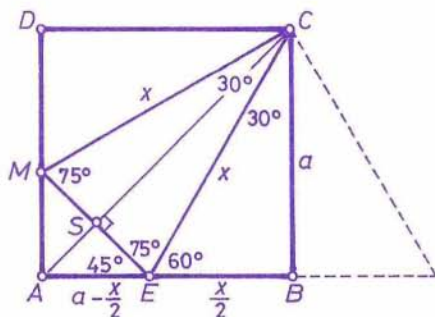
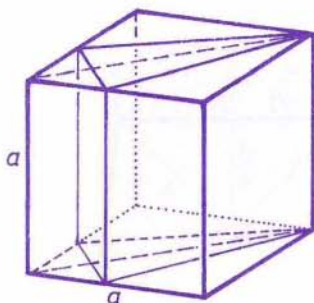


3. Pišimo $1 + 2 + 3 + \dots + n = \frac{n(n+1)}{2}$ in označimo trimestno število z enakimi ciframi z $111x$. Potem je $\frac{n(n+1)}{2} = 111x$, $n(n+1) = 2 \cdot 3 \cdot 37 \cdot x$, $n(n+1) = (6 \cdot x) \cdot 37$, odtod $x = 6$ in iz $n(n+1) = 36 \cdot 37$ še $n = 36$ ter $\frac{n(n+1)}{2} = 666$. Sešteti moramo 36 zaporednih naravnih števil. Vsota je trimestno število 666.

4. $\triangle BDC \sim \triangle BEF$, zato:
 $\frac{a\sqrt{3}}{2} : \frac{a}{2} = x : (\frac{a}{2} - \frac{x}{2})$,
 $\frac{a\sqrt{3}}{2} \cdot \frac{a-x}{2} = \frac{ax}{2}$, $a\sqrt{3}(a-x) = 2ax$, $x(2 + \sqrt{3}) = a\sqrt{3}$ in odtod
 $x = \frac{a\sqrt{3}}{2 + \sqrt{3}}$ oziroma
 $x = a\sqrt{3}(2 - \sqrt{3})$.



5. Iz slik razberemo $\overline{EB} = x/2$, $\overline{AE} = a - x/2$, $x = \frac{2a\sqrt{3}}{3}$, $\overline{ME} = (a - \frac{x}{2}) \cdot \sqrt{2} = \frac{a(3-\sqrt{3})\sqrt{2}}{3}$ in $\overline{SC} = \frac{a\sqrt{2}(3+\sqrt{3})}{6}$. Prostornina prizme $V_p = O \cdot v = \frac{\overline{ME} \cdot \overline{SC} \cdot a}{2} = \frac{a(3-\sqrt{3})2 \cdot a\sqrt{2}(3+\sqrt{3}) \cdot a}{6 \cdot 6} = \frac{a^3 \cdot 2 \cdot 6}{36} = a^3/3$ je 33,3 % prostornine kocke, saj je prostornina kocke a^3 .



Aleksander Potočnik

IRACIONALNE VSOTE — Rešitev s str. 267

Če velja $\sqrt{2} + \sqrt{3} \in \mathbb{Q}$, je

$$\sqrt{6} = (1/2)((\sqrt{2} + \sqrt{3})^2 - 5) \in \mathbb{Q}$$

kar pa ni res. Torej $\sqrt{2} + \sqrt{3} \notin \mathbb{Q}$.

Denimo, da $r = \sqrt{2} + \sqrt[3]{3} \in \mathbb{Q}$. Potem je

$$3 = (r - \sqrt{2})^3 = r^3 + 6r - (3r^2 + 2)\sqrt{2}$$

in spet pridemo do protislovja

$$\sqrt{2} = (r^3 + 6r - 3)/(3r^2 + 2) \in \mathbb{Q}$$

ki pove, da je $\sqrt{2} + \sqrt[3]{3} \notin \mathbb{Q}$.

Podobno ugotovimo, da je število $\sqrt[3]{2} + \sqrt{3}$ iracionalno.

Predpostavimo zdaj, da je $s = \sqrt[3]{2} + \sqrt[3]{3} \in \mathbb{Q}$. Potem iz enakosti

$$\begin{aligned} s^2 &= 2 + 3(\sqrt[3]{12} + \sqrt[3]{18}) + 3 = \\ &= 5 + 3\sqrt[3]{6}(\sqrt[3]{2} + \sqrt[3]{3}) = 5 + 3s\sqrt[3]{6} \end{aligned}$$

sledi $\sqrt[3]{6} \in \mathbb{Q}$, kar ni res. Torej tudi $\sqrt[3]{2} + \sqrt[3]{3} \notin \mathbb{Q}$.

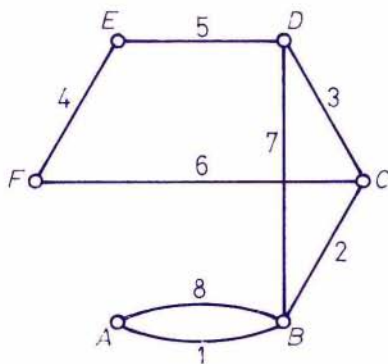
Da se dokazati, da za vsak par naravnih števil $m, n > 1$ velja $\sqrt[m]{2} + \sqrt[n]{3} \notin \mathbb{Q}$.

Boris Lavrič

Z GRAFI GRE LAŽJE – Rešitev s str. 36

1. Zasleduj zaporedje črk SAJSPLOHNITAKŠNEPOTI.
2. Opisani sprehod skozi zgradbo je mogoč, če ga sprehajalec začne v zunanosti zgradbe in ga konča v sredinski severni sobi, ali pa, če gre po isti poti nazaj.
3. Iz labirinta vodijo natanko štiri različne poti.
4. Najprej opazimo, da lahko točke grafa obarvamo z dvema različnima barvama tako, da sta poljubni dve med seboj povezani točki različno obarvani. Zatem sklepamo takole – začetna in končna točka v krožni vožnji po grafu morata biti zaradi prejšnje ugotovitve različno obarvani. Ker pa ima ta graf 11 točk (liho število!), je to seveda neizvedljivo. (Detajle naj izdelava bralec kar sam.)
5. A, B, C, D, E in F naj bodo oznake omenjenih šestih prijateljev. Zaporedje njihovih osmih pogovorov je podano s števili ob povezavah v grafu takole (predstavlja le eno izmed številnih možnih rešitev):
6. Belčeva žena se je rokovala dvakrat.

Knjižno nagrado (Z. Šporer, Oh, ta matematika in D. Bajc, T. Pisanski, Najnujnejše o grafih) sta tokrat dobili sestre *Irena* in *Joži Onerela* iz Ljubljane. Rešili sta dve nalogi in s tem gladko zmagali v množici kandidatov za nagrado – bili sta namreč edini, ki sta nam poslali rešitve. Čestitamo!



Vilko Domajnko

KOCKA IMA RDEČKE

Kocka ima rdeče obarvana oglišča, središča vseh robov in središča vseh mejnih ploskev. Poleg naštetih točk je samo še točka v središču kocke rdeča. Koliko je premic, na katerih ležijo po tri rdeče točke?

Darjo Felda

31. ZVEZNO TEKMOVANJE SREDNJEŠOLCEV IZ MATEMATIKE – Rešitve s str. 276

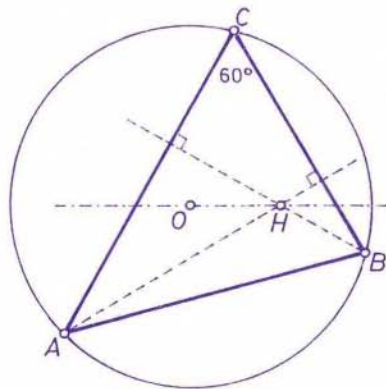
Prvi letnik

$$\begin{aligned}
 1. \quad & \text{Izračunajmo: } A = (\underbrace{33 \dots 3}_n)^2 + (\underbrace{55 \dots 5}_{n-1} \underbrace{44 \dots 4}_n)^2 = \\
 & = (3(10^{n-1} + \dots + 1))^2 + (5 \cdot 10^n(10^{n-2} + \dots + 1) + 4(10^{n-1} + \dots + 1))^2 = \\
 & = \frac{1}{9}(10^n - 1)^2 + (5 \cdot 10^n \frac{10^{n-1} - 1}{9} + 4 \frac{10^n - 1}{9})^2 = \\
 & = \frac{1}{9^2}(9(10^n - 1)^2 + (5 \cdot 10^{2n-1} - 10^n - 4)^2) = \\
 & = \frac{1}{9^2}(9(10^n - 1)^2 + \frac{1}{4}(10^{2n} - 2 \cdot 10^n - 8)^2) = \\
 & = \frac{1}{18^2}(36(10^n - 1)^2 + (10^n - 1)^4 - 18(10^n - 1)^2 + 9^2) = \\
 & = \frac{1}{18^2}((10^n - 1)^2 + 9)^2
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 B &= \underbrace{55 \dots 5}_{n-1} \underbrace{44 \dots 4}_{n-1} 5 = 5 \cdot 10^n \frac{10^{n-1} - 1}{9} + 40 \frac{10^{n-1} - 1}{9} + 5 = \\
 &= \frac{1}{9}(5 \cdot 10^{2n-1} - 5 \cdot 10^n + 4 \cdot 10^n - 40 + 45) = \\
 &= \frac{1}{18}(10^{2n} - 2 \cdot 10^n + 10) = \frac{1}{18}((10^n - 1)^2 + 9)
 \end{aligned}$$

Iz $A = B^2$ sledi veljavnost formule.

2. Ker sta $\sphericalangle AHB$ in $\sphericalangle AOB$ enaka 120° , ležita točki H in O na loku, s katerega vidimo daljico AB pod kotom 120° , oziroma je štirikotnik $ABHO$ tetiven. Potem je $\sphericalangle OBA = \sphericalangle OHA = 30^\circ$, saj sta nad istim lokom, trikotnik $\triangle ABO$ pa je enakokrak s kotom 120° ob vrhu. Toda kot $\sphericalangle B'HA = 60^\circ$, zato je premica skozi H in O njegova simetrala.



3. Ločimo dva primera:

- a. Naj bo $f(a_k) = a_1$ in $k > 1$. Potem velja $a_1 + f(a_1) < a_2 + f(a_2) < \dots < a_k + f(a_k) = a_k + a_1$ oziroma $a_i + f(a_i) < a_k + a_1$ za $i < k$. Torej $f(a_i) < a_k + a_1 - a_i < a_k$ in od tod $\{f(a_1), f(a_2), \dots, f(a_{k-1})\} \subseteq \{a_1, a_2, \dots, a_{k-1}\}$. Toda $f(a_i) \neq a_1$ za $i = 1, 2, \dots, k-1$ ker $f(a_k) = a_1$. Sledi protislovje $\{f(a_1), f(a_2), \dots, f(a_{k-1})\} \subseteq \{a_2, \dots, a_{k-1}\}$, ker je f bijekcija.
- b. Če je $f(a_1) = a_1$, se omejimo na števila $a_2, \dots, a_n$ in ponovimo prejšnji sklep.

4. S predpisom $f(c) = c + 1$ definirajmo funkcijo f , katere definicijsko območje naj bodo vsa števila na tabli, ki jih je moč dobiti z danim pravilom. Pišimo $c = a + b + ab$, torej $c + 1 = (a + 1)(b + 1) = f(c)$. Ker je f bijekcija, bo število c na tabli natanko tedaj, ko bo $(a + 1)(b + 1)$ oziroma $2^n \cdot 3^m$ v zalogi vrednosti funkcije f . Na začetku sta v zalogi vrednosti funkcije f namreč le števili 2 in 3. Število 13121 je na tabli, ker je $13121 + 1 = 2 \cdot 3^8$. Razcep $12131 + 1 = 2^2 \cdot 3^2 \cdot 337$ pa nam pove, da števila 12131 ni na tabli.

Drugi letnik

1. Ker par (x, y) reši nalogo natanko tedaj, ko jo reši (y, x) , zadošča, da opazujemo primer $x > y$. Naj bo $x^2 = \overline{a_1 a_2 \dots p q}$ in $y^2 = \overline{a_1 a_2 \dots q p}$; torej $x^2 - y^2 = 9(p - q)$. Dokazali bomo, da $d = p - q$ ne more biti enak 9, 8, 7 ali 6:

- a. če $d = 9$, potem $p = 9$ in $q = 0$; toda x^2 se ne more končati na 90;
- b. če $d = 8$, potem $(p, q) \in \{(9, 1), (8, 0)\}$; toda x^2 se ne more končati na 80 niti na 91 (saj bi x^2 ne bil oblike $4k + 1$);
- c. če $d = 7$, potem $(p, q) \in \{(9, 2), (8, 1), (7, 0)\}$; toda x^2 se ne more končati na 92 niti na 70, y^2 pa se ne more končati na 18;
- d. če $d = 6$, potem $(p, q) \in \{(9, 3), (8, 2), (7, 1), (6, 0)\}$; toda x^2 se ne more končati na 93, 82, 71 ali 60.

Torej $d \leq 5$. Sledi $2y + 1 \leq x + y \leq (x - y)(x + y) = 9d \leq 45$ oziroma $y \leq 22$. Z direktnim preizkusom vseh možnosti za y dobimo edini rešitvi (13, 14) in (14, 13).

2. Sfera s središčem v A in radijem 3 seka plašč kocke $ABCD A_1 B_1 C_1 D_1$ po lokih $\widehat{KL}$, $\widehat{LN}$ in $\widehat{NK}$. Če izhaja lomljena črta iz oglišča A , mora biti naslednji lom M_1 na enem izmed lokov $\widehat{KL}$, $\widehat{LN}$ in $\widehat{NK}$. Če $M_1 \notin \{K, L, N\}$, potem A leži na krogli radija 3 s središčem v M_1 , vse ostale točke kocke pa ležijo znotraj krogle – naslednji lom bi moral biti spet v A .

Torej $M_1 \in \{K, L, N\}$. Ker so K, L in N razpolovišča stranic, je jasno, da lahko zaradi simetrije vzamemo za M_1 katerokoli izmed točk K, L ali N . Lomljena črta je določena enolično do dolžine natančno.

3. Velja

$$\frac{P_{AKM}}{P_{ABC}} = \frac{P_{AKM}}{P_{AKL}} \cdot \frac{P_{AKL}}{P_{ABL}} \cdot \frac{P_{ABL}}{P_{ABC}} = \frac{KM}{KL} \cdot \frac{AK}{AL} \cdot \frac{BL}{BC}$$

Uporabimo neenakost med aritmetično in geometrično sredino in dobimo neenakosti $\sqrt[3]{\frac{P_{AKM}}{P_{ABC}}} \leq \frac{1}{3} \left(\frac{KM}{KL} + \frac{AK}{AB} + \frac{BL}{BC} \right)$ in $\sqrt[3]{\frac{P_{MLC}}{P_{ABC}}} \leq \frac{1}{3} \left(\frac{ML}{KL} + \frac{KB}{AB} + \frac{LC}{BC} \right)$. Ti dve neenakosti še seštejemo in pomnožimo s $\sqrt[3]{P_{ABC}}$.

4. Oglejmo si tako pot po dvorcu, za katero velja, da je začetek poti v sobi z enimi vrati ali pa pri enih od zunanjih vrat, da je konec poti prav tako v sobi z enimi vrati ali pa pri enih od zunanjih vrat in da gre pot skozi vsaka vrata največ enkrat. Začetek in konec vsake take poti sta lahko ali oba v sobi z enimi vrati ali oba pri zunanjih vratih ali pa je eden v sobi z enimi vrati, drugi pa pri zunanjih vratih.

Potemtakem bi morali biti število sob z enimi vrati in število zunanjih vrat, iste parnosti. Števili sta 19 in 90, zato takega dvorca ni moč zgraditi.

Tretji in četrti letnik

1. Oglejmo si najprej števila, ki ležijo na dnu:

$$\begin{array}{cccc} a_{11}^{(1)} & a_{12}^{(1)} & \dots & a_{1n}^{(1)} \\ a_{21}^{(1)} & a_{22}^{(1)} & \dots & a_{2n}^{(1)} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m1}^{(1)} & a_{m2}^{(1)} & \dots & a_{mn}^{(1)} \end{array}$$

Če je A_i vsota števil iz i -te vrstice, velja $A_i = \frac{n}{2}(a_{i1}^{(1)} + a_{in}^{(1)})$, vsota vseh števil na dnu je

$$\begin{aligned} A_1 + A_2 + \dots + A_m &= \\ &= \frac{n}{2}(a_{11}^{(1)} + a_{21}^{(1)} + \dots + a_{m1}^{(1)} + a_{1n}^{(1)} + a_{2n}^{(1)} + \dots + a_{mn}^{(1)}) = \\ &= \frac{n}{2} \cdot \frac{m}{2}(a_{11}^{(1)} + a_{m1}^{(1)} + a_{1n}^{(1)} + a_{mn}^{(1)}) \end{aligned}$$

Po analogiji bo vsota števil v k -tem nadstropju $N_k = \frac{mn}{4}(a_{11}^{(k)} + a_{m1}^{(k)} + a_{1n}^{(k)} + a_{mn}^{(k)})$, vsota vseh števil pa

$$\begin{aligned} N_1 + N_2 + \dots + N_p &= \\ &= \frac{mn}{4}(a_{11}^{(1)} + a_{11}^{(2)} + \dots + a_{11}^{(p)} + a_{m1}^{(1)} + a_{m1}^{(2)} + \dots + a_{m1}^{(p)} + \\ &\quad + a_{1n}^{(1)} + a_{1n}^{(2)} + \dots + a_{1n}^{(p)} + a_{mn}^{(1)} + a_{mn}^{(2)} + \dots + a_{mn}^{(p)}) = \\ &= \frac{mnp}{8}(a_{11}^{(1)} + a_{m1}^{(1)} + a_{1n}^{(1)} + a_{mn}^{(1)} + a_{11}^{(p)} + a_{m1}^{(p)} + a_{1n}^{(p)} + a_{mn}^{(p)}) = \\ &= \frac{mnp}{8} \cdot a \end{aligned}$$

2. Za $n \geq 2$ velja $n x_n = -1990 \sum_{k=0}^{n-1} x_k$ in $(n-1)x_{n-1} = -1990 \cdot \sum_{k=0}^{n-2} x_k$, nato pa $n x_n - (n-1)x_{n-1} = -1990 x_{n-1}$ oziroma $x_n = -\frac{1990-n+1}{n} x_{n-1}$. Čeprav smo zadnjo rekurzivno formulo izpeljali za $n \geq 2$, velja očitno tudi za $n = 1$. Uporabimo jo n -krat, pa dobimo: $x_n = (-1)^n \cdot \frac{1990-n+1}{n} \cdot \frac{1990-n}{n-1} \dots \frac{1990}{1} \cdot x_0 = (-1)^n \binom{1990}{n} 1990$ za $0 \leq n \leq 1990$.

Uporabimo binomski izrek: $\sum_{k=0}^{1990} 2^k x_k =$
 $= \sum_{k=0}^{1990} 2^k (-1)^k \binom{1990}{k} \cdot 1990 =$
 $= 1990 \cdot \sum_{k=0}^{1990} (-1)^k \binom{1990}{k} \cdot 2^k = 1990(1-2)^{1990} = 1990$

3. Naj bo C_1 razpolovišče daljice AB in T težišče $\triangle ABC$. Iz $\triangle COT$ in $\triangle TSC_1$ sledi $S\vec{C}_1 = \frac{1}{2}\vec{C}\vec{O}$.

$$\begin{aligned} C\vec{T}_3 &= C\vec{Q} + Q\vec{T}_3 = C\vec{Q} + \frac{2}{3}Q\vec{C}_1 = C\vec{S} + S\vec{Q} + \frac{2}{3}Q\vec{C}_1 = \\ &= C\vec{S} + O\vec{S} + \frac{2}{3}Q\vec{C}_1 = C\vec{S} + O\vec{S} + \frac{2}{3}(Q\vec{S} + S\vec{C}_1) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&= \vec{CS} + \vec{OS} + \frac{2}{3}(\vec{QS} + \frac{1}{2}\vec{CO}) \\
&= \vec{CS} + \vec{OS} + \frac{2}{3}(-\vec{OS} + \frac{1}{2}\vec{CO}) \\
&= \vec{CS} + \vec{OS} + \frac{2}{3}(-\vec{OS} + \frac{1}{2}(\vec{CS} - \vec{SO})) = \frac{4}{3}\vec{CS}
\end{aligned}$$

Točke C, S in T_3 so torej kolinearne in $CT_3 = \frac{4}{3}CS = \frac{4}{3}R$. Analogno dokažemo še $AT_1 = BT_2 = CT_3 = \frac{4}{3}R$.

4. Pri dani relaciji $\mathcal{R}$ velja za poljubna dva različna elementa a in b iz množice n elementov natanko ena izmed naslednjih možnosti: $a \mathcal{R} b$ in $b \mathcal{R} a$, $a \mathcal{R} b$ in $\neg b \mathcal{R} a$, $\neg a \mathcal{R} b$ in $b \mathcal{R} a$ ali pa $\neg a \mathcal{R} b$ in $\neg b \mathcal{R} a$. Vseh binarnih relacij je $2^n \cdot 4^{\binom{n}{2}}$, faktor 2^n se pojavi zaradi parov z enakimi komponentami. Antisimetričnih relacij je $2^n \cdot 3^{\binom{n}{2}}$ (prva možnost namreč odpade), simetričnih pa $2^n \cdot 2^{\binom{n}{2}}$ (odpadeta druga in tretja možnost). Relacij, ki so simetrične in antisimetrične hkrati, je 2^n . Relacij, ki rešijo nalogo, je torej

$$2^n \cdot 4^{\binom{n}{2}} - 2^n \cdot 3^{\binom{n}{2}} - 2^n \cdot 2^{\binom{n}{2}} + 2^n = 2^n \cdot (4^{\binom{n}{2}} - 3^{\binom{n}{2}} - 2^{\binom{n}{2}} + 1)$$

IZBIRNO TEKMOVANJE ZA OLIMPIADO

1. Vsi a_n so pozitivni. Iz zveze $a_{n+3} a_{n+1} - a_{n+2} a_n = a_{n+2}^2 - a_{n+1}^2$ sledi $a_{n+1}(a_{n+3} + a_{n+1}) = a_{n+2}(a_{n+2} + a_n)$ oziroma $\frac{a_{n+3} + a_{n+1}}{a_{n+2}} = \frac{a_{n+2} + a_n}{a_{n+1}} = \dots = \frac{a_3 + a_1}{a_2} = \frac{5}{2}$, ker je $a_3 = \frac{a_2^2 + 8}{a_1} = 11$. Od tod $a_{n+1} = \frac{2}{5}(a_{n+2} + a_n)$. Potemtakem $a_{n+1}^2 = \frac{4}{25}(a_{n+2}^2 + 2a_{n+2}a_n + a_n^2) \Rightarrow a_{n+1}^2 - \frac{16}{25}a_{n+2}a_n = \frac{4}{25}(a_{n+2}^2 - 2a_{n+2}a_n + a_n^2) \Rightarrow \Rightarrow 9a_{n+1}^2 - 128 = (2(a_{n+2} - a_n))^2$.
Opomba: s pomočjo $a_n = \frac{2^{n+2} + 2^{3-n}}{3}$ z lahkoto dokažemo trditev naloge.

2. S pomočjo neenakosti med aritmetično in kvadratno sredino dobimo $\sqrt{n} + \sqrt{n+1} + \sqrt{n+2} + \sqrt{n+3} < \sqrt{16n+24}$. Po drugi strani pa neenakosti $\sqrt{n} + \sqrt{n+3} > \sqrt{4n+5}$ in $\sqrt{n+1} + \sqrt{n+2} > \sqrt{4n+5}$ implicirata $\sqrt{16n+20} < \sqrt{n} + \sqrt{n+1} + \sqrt{n+2} + \sqrt{n+3}$

Nobeno od števil $16n + 21$, $16n + 22$, $16n + 23$, $16n + 24$ ne more biti popolni kvadrat. Dejstvo $[\sqrt{16n + 20}] = [\sqrt{16n + 24}]$ dokazuje trditev naloge.

3. Reševali bomo z indukcijo na število praštevil.

Če je $n = 1$, vzamemo števili $a_1 = p_1^{\alpha_1}$ in $a_2 = p_1^{\alpha_2}$. Če je kateri izmed $\alpha_i \equiv 0 \pmod{2}$, je a_i popolni kvadrat, sicer pa je $a_1 \cdot a_2$ popolni kvadrat. Predpostavimo, da za vsako množico $n + 1$ naravnih števil, katerih edini praštevilski faktorji so v dani množici n praštevil, trditev velja. Faktorizirajmo $n + 2$ naravnih števil po $n + 1$ praštevilskih faktorjih:

$$\begin{aligned} a_1 &= p_1^{\alpha_{11}} p_2^{\alpha_{12}} \cdots p_n^{\alpha_{1n}} p_{n+1}^{\alpha_{1,n+1}} \\ a_2 &= p_1^{\alpha_{21}} p_2^{\alpha_{22}} \cdots p_n^{\alpha_{2n}} p_{n+1}^{\alpha_{2,n+1}} \\ &\vdots \\ a_{n+2} &= p_1^{\alpha_{n+2,1}} p_2^{\alpha_{n+2,2}} \cdots p_n^{\alpha_{n+2,n}} p_{n+1}^{\alpha_{n+2,n+1}} \end{aligned}$$

Če so vse potence $\alpha_{i,n+1}$ sode, je naloga končana, saj med števili $a_1, \dots, a_{n+1}$ najdemo po indukcijski predpostavki nekaj števil, katerih produkt je popolni kvadrat (upoštevamo prafaktorje $p_1, \dots, p_n$).

Če pa je med potencami $\alpha_{i,n+1}$ kakšna liha (npr. pri a_{n+2}), tvorimo $n + 1$ števil $b_1, b_2, \dots, b_{n+1}$ takole:

$$b_i = \begin{cases} a_i; & \alpha_{i,n+1} \equiv 0 \pmod{2} \\ a_i \cdot a_{n+2}; & \alpha_{i,n+1} \not\equiv 0 \pmod{2} \end{cases}$$

V teh številih nastopajo faktorji p_{n+1} v sodih potencah, zato po indukcijski predpostavki najdemo števila $b_{i_1}, b_{i_2}, \dots, b_{i_l}$, katerih produkt je popolni kvadrat. V produktu teh števil se pojavi vsako od števil $a_1, a_2, \dots, a_{n+1}$ kvečjemu enkrat. Če se pojavi a_{n+2} v sodi potenci, pomeni, da smo produkt $a_{i_1} \cdot a_{i_2} \cdots a_{i_l}$ pomnožili z a_{n+2}^{2m} , pa je ta faktor odveč, saj je že $a_{i_1} \cdot a_{i_2} \cdots a_{i_l}$ popolni kvadrat. Če se pa a_{n+2} pojavi v lihi potenci a_{n+2}^{2m+1} , lahko odvržemo a_{n+2}^{2m} in se končno pojavi le v prvi potenci.

To pomeni, da v produktu $b_{i_1} \cdot b_{i_2} \cdots b_{i_l}$ nastopa vsako od števil $a_1, a_2, \dots, a_{n+2}$ kvečjemu enkrat in je produkt popolni kvadrat. Trditev je dokazana.

Matjaž Željko

21. ZVEZNO TEKMOVANJE OSNOVNOŠOLCEV IZ MATEMATIKE – Rešitev nalog s str. 230

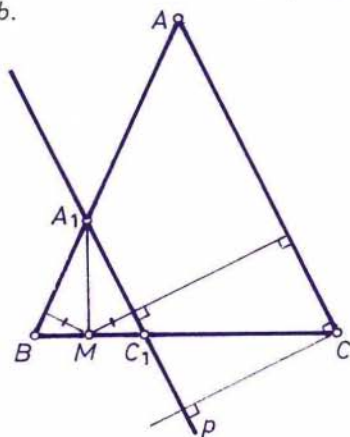
7. razred

1. Dvomesni večkratniki števila 23 so 23, 46, 69 in 92. Ko skušamo najti največje naravno število z zahtevano lastnostjo, nas razmišljanje vodi takole: 92, 923, 6923 in 46923 (na posameznem koraku poiščemo največje dvo, tri, štiri in petmestno število s tako lastnostjo). Naprej ne gre več, saj se nobeden od dvomesnih večkratnikov ne začne s 3 ali konča s 4, zato je iskano število 46923.

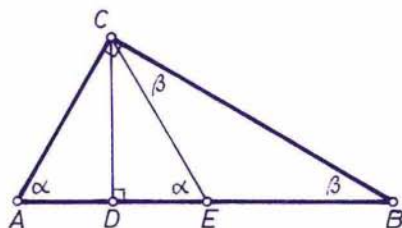
2. Naj bo $\overline{abbb}$ trimestno število. Lahko ga zapišemo v obliki $100a + 10b + b = 98a + 7b + 2a + 4b = 7(14a + b) + 2(a + b + b)$. leva stran je po predpostavki deljiva s 7, na desni je prvi seštevanec deljiv s 7, to pa pomeni, da mora biti nujno tudi $a + b + b$ deljivo s 7.

3. Iz $a + d < b + c$ in $a + b = c + d$ dobimo $b + a + d < b + b + c$ in $c + d + d < 2b + c$, $2d < 2b$, kar pomeni $d < b$. Podoben sklep nas pripelje do $a < c$. Zato velja $a < c < d < b$.

4. Naj bo $\triangle ABC$ enakokraki trikotnik z osnovnico BC in p premica, ki je vzporedna kraku AC in od njega oddaljena $1/\sqrt{2}AB$. Premica p odseka od trikotnika $\triangle ABC$ trikotnik $\triangle A_1BC_1$. Nožišče višine iz točke A_1 tega trikotnika je iskana točka M .



5. Označimo z D nožišče višine pravokotnega trikotnika $\triangle ABC$ iz točke C in naj bo E točka daljice BD , za katero velja $\overline{DE} = \overline{AD}$. Tedaj je $\overline{BE} = \overline{AC} = \overline{CE}$, torej sta trikotnika $\triangle ACE$ in $\triangle BCE$ enakokraka. Zato in zaradi $\alpha + \beta = 90^\circ$ dobimo $\sphericalangle ACD = \sphericalangle DCE = \sphericalangle BCE = \beta = 90^\circ : 3$. Koti merijo $\alpha = 60^\circ, \beta = 30^\circ, \gamma = 90^\circ$.



8. razred

1. Naj bodo $n-1$, n in $n+1$ tri zaporedna naravna števila. Tedaj je $(n-1)^3 + n^3 + (n+1)^3 = n^3 - 3n^2 + 3n - 1 + n^3 + n^3 + 3n^2 + 3n + 1 = 3n(n^2 + 2)$. Dokazati je še treba, da je $n(n^2 + 2)$ deljivo s 3. Če je $n = 3k$, je to očitno, če pa je $n = 3k + 1$, je drugi faktor deljiv s 3, ker je $n^2 + 2 = 9k^2 + 6k + 1 + 2 = 3(3k^2 + 2k + 1)$.

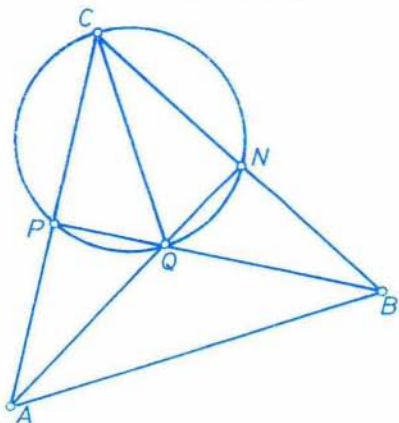
2. Zapišemo enačbo $x + 10 + \frac{10}{x}(x + 10) = 72$ in jo poenostavimo $(x - 2)(x - 50) = 0$. Od dveh rešitev enačbe $x_1 = 2$ in $x_2 = 50$ nalogi ustreza samo prva. Iskano število je torej 2.

3. Iskano število n je oblike $1 \dots x$. Začetne cifre večkratnikov n , $2n$, $3n$, $4n$, $5n$ in $6n$ so vse različne od 0 in različne med seboj ter so hkrati cifre števila n . Prav tako so končne cifre teh večkratnikov med seboj različne. Če bi imela dva večkratnika isto končno cifro, bi imela njuna razlika končno cifro 0. Toda razlika je enaka enemu od večkratnikov (npr. $6n - 2n = 4n$, $5n - 3n = 2n$, ...), ta pa ne more imeti cifre 0, saj je n nima. Sklepamo torej, da x ni 0, 1 ali 5 in da je lih. Ker se pri produktu števil 3 in 9 z 2, 3, 4, 5 in 6 ne pojavi cifra 1 na zadnjem mestu, je x lahko le 7. Tako dobimo še preostale cifre števila n : 4, 8, 5, 2.

Hitro se prepričamo, da se vsaka od cifer števila n pojavi natanko po enkrat kot enica, desetica, stotica, ..., stotisočica. Denimo, da bi imela dva izmed večkratnikov isto cifro na nekem mestu. Razlika, ki je enaka enemu od večkratnikov, bi imela na tem mestu cifro 0 ali cifro 9, teh pa ni med ciframi števila n .

Sedaj ni težko poiskati števila n . Iz $21n = n + 2n + 3n + 4n + 5n + 6n = 111111 + 222222 + 444444 + 555555 + 777777 + 888888 = 111111 \cdot 27 = 2999997$ sledi $n = 142857$.

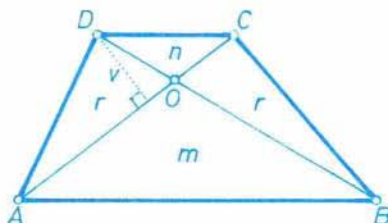
4. Najprej vidimo $\sphericalangle AQB = \sphericalangle PQN = 90^\circ + \frac{\gamma}{2}$. Ker je $PQNC$ tetivni štirikotnik, je $\gamma = 180^\circ - \sphericalangle PQN = 90^\circ - \frac{\gamma}{2}$, $\gamma = 60^\circ$. Iz $\sphericalangle AQB = 2\gamma$ sledi, da je Q središče očrtanega kroga $\triangle ABC$, zato $\sphericalangle QAB = \sphericalangle QBA = \sphericalangle QBC = \sphericalangle QCB = \sphericalangle QCA = \sphericalangle QAC$ in $\triangle ABC$ je enakokraničen ter $PN \parallel AB$. Trikotnik $\triangle NPQ$ je enakokrak, z višino



iz oglišča Q je razdeljen na dva skladna trikotnika, ki sta polovici enakostraničnega z višino $1/2$. Ploščina $\triangle NPQ$ je torej $\sqrt{3}/12$.

5. Naj bo O presečišče diagonal AC in BD . Iz enakosti ploščin trikotnikov $\triangle ABC$ in $\triangle ABD$ sledi, da sta tudi ploščini trikotnikov $\triangle ADO$ in $\triangle BCO$ enaki, recimo r .

Iz $r = \frac{1}{2} \times v$ in $n = \frac{1}{2} y v$ sledi $\frac{r}{n} = \frac{x}{y}$. Na podoben način dobimo $\frac{m}{r} = \frac{x}{y}$, odtod pa sledi $r^2 = mn$ in $r = \sqrt{mn}$. Končno dobimo ploščino trapeza $p = m + n + 2r = m + n + 2\sqrt{mn} = (\sqrt{m} + \sqrt{n})^2$.



Aleksander Potočnik in Darjo Felda

TRI WELLSOVE UGANKE – Rešitev s str. 286

1. POŠEVNO SEŠTEVANJE

Dobimo periodično zaporedje iz decimalnega zapisa števila $\frac{1}{7}$, torej 142857142857... Res, zapišimo števila nekoliko drugače

$$0,1 = 0,1$$

$$0,03 = 0,1 \cdot 0,3$$

$$0,009 = 0,1 \cdot 0,3^2$$

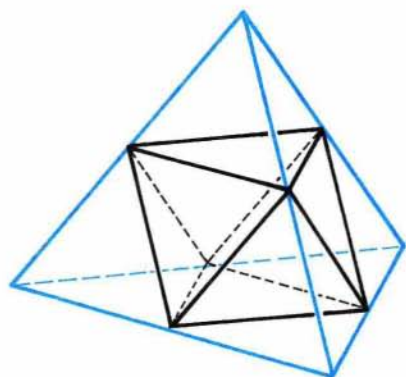
$$0,0027 = 0,1 \cdot 0,3^3$$

.....

in seštejmo geometrijsko vrsto

$$0,1(1 + 0,3 + 0,3^2 + \dots) = \frac{1}{7}$$

2. RAZMERJE PROSTORNIN



Pravilni četrverec z dvakrat daljšo stranico, kot jo imata dani telesi, razkosamo na štiri manjše pravilne četrverce in pravilni osmerek, kot kaže slika. Vsi robovi nastalih teles so enako dolgi in merijo pol manj kot rob prvotnega četrverca. Prostornine podobnih teles so v razmerju kubov razmerij njihovih robov, torej so manjši četrverci prostorninsko osemkrat manjši od prvotnega. Štirje zavzemajo polovico velikega četrverca, osmerek pa ostalo polovico. Ker je osmerek sestavljen iz dveh pravilnih štiristranih piramid, je prostornina vsake dvakrat večja od prostornine četrverca z enako dolgimi robovi.

3. TRISEKCIJA TRIKOTNIKA

Minimalno rešitev sestavlja pet kosov, več pa pove slika.



Bralec naj poskusi dokazati, da so štirje kosi premalo za iskano trisekcijo.

Prevedel Boris Lavrič

34. REPUBLIŠKO TEKMOVANJE SREDNJEŠOLCEV IZ MATEMATIKE – Rešitve nalog s str. 232

Prvi letnik

1. Najprej iz $1 \leq a \leq b \leq c \leq d \leq e$ dobimo $4 + e \leq a + b + c + d + e \leq 5e$ in zaradi pogoja (b) v nalogi še $4 + e \leq a b c d e \leq 5e$. Odtod pridemo do dveh neenakosti $a b c d \leq 5$ in $4 \leq (a b c d - 1)e$. Iz zadnje sklepamo $a b c d > 1$, tako da imamo $2 \leq a b c d \leq 5$ in si ogledamo vse možnosti kar v tabeli

a	b	c	d	Vsota = Produkt	Ali je možno
1	1	1	2	$5 + e = 2e$ $e = 5$	je
1	1	1	3	$6 + e = 3e$ $e = 3$	je
1	1	2	2	$6 + e = 4e$ $e = 2$	je
1	1	1	4	$7 + e = 4e$ $e = 7/3$	ni (e ni cel)
1	1	1	5	$8 + e = 5e$ $e = 2$	ni (dobili smo $e < d$)

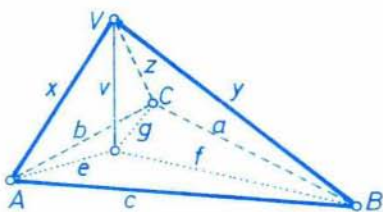
Dobili smo torej 3 peterke: $(1, 1, 1, 2, 5)$, $(1, 1, 1, 3, 3)$ in $(1, 1, 2, 2, 2)$.

2. Pokažimo najprej, da je množica naravnih števil vsebovana v $\mathcal{M}$. Zaradi trditve (b) je bodisi $1 \in \mathcal{M}$ ali pa $-1 \in \mathcal{M}$, toda $(-1) \cdot (-1) = 1$, zato $-1 \notin \mathcal{M}$ in $1 \in \mathcal{M}$. Iz $1 \in \mathcal{M}$ pa po (a) sledi $1 + 1 \in \mathcal{M}$, nato $2 + 1 \in \mathcal{M}$, $\dots \Rightarrow \mathcal{N} \subset \mathcal{M}$.

Naj bo m poljubno naravno število. Zaradi (b) je $\frac{1}{m} \in \mathcal{M}$ ali pa $-\frac{1}{m} \in \mathcal{M}$. Toda $-\frac{1}{m} \cdot m = -1 \notin \mathcal{M}$, zato $\frac{1}{m} \in \mathcal{M}$ in $-\frac{1}{m} \notin \mathcal{M}$. Ker so vsa števila oblike $\frac{1}{m}$ in vsa naravna števila v $\mathcal{M}$, so po (a) tudi vsa števila oblike $\frac{n}{m}$ ($n, m \in \mathcal{N}$) v $\mathcal{M}$. Število 0 ni v $\mathcal{M}$, kar sledi iz $0 = -0$ in trditve (b). Res je $\mathcal{M} = \mathbb{Q}^+$.

3. Druga neenačba da $x = 2$ ali $x = -2$, nato pa iščemo vse možnosti za y iz prve neenačbe. Sistemu neenačb zadoščajo pari $\{(2, y); |y| \leq 2\} \cup \{(-2, y); 2 \leq |y| \leq 3\}$.

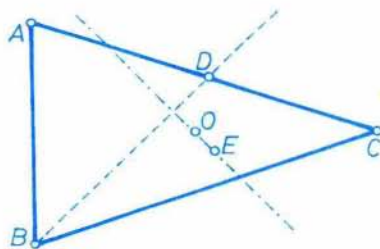
4. Iz slike razberemo $x \leq e + v$, $y \leq f + v$ in $z \leq g + v$, od koder dobimo $x + y + z \leq e + f + g + 3v$, nato pa še $e + f \leq a + b$, $f + g \leq b + c$ in $g + e \leq a + c$ ter iz tega $e + f + g \leq a + b + c$. Končno je $x + y + z \leq a + b + c + 3v$, kar je bilo treba pokazati.



Drugi letnik

1. Enakost $\frac{a}{b+c} + \frac{b}{c+a} + \frac{c}{a+b} = 1$ po vrsti množimo z a , b in c . Iz dobljenih enakosti izrazimo $\frac{a^2}{b+c} + \frac{b^2}{c+a} + \frac{c^2}{a+b} = a + b + c - \frac{ab+bc}{c+a} - \frac{ac+bc}{a+b} - \frac{ab+ac}{b+c} = 0$.
2. Če bi obstajal tak y , pri katerem bi $f(y) = 0$, potem bi bila f identično enaka 0 (saj bi za vsak x veljalo $f(x) \cdot f(y) = 0 = f(x - y)$), te funkcije pa ne iščemo, saj ne zadošča pogoju $f(1990) = 1$. Denimo torej, da ni takega y , kjer bi $f(y) = 0$. Pišimo $x = 2y$, pa imamo $f(y) \cdot f(2y) = f(y)$ oziroma $f(2y) = 1$ za vsak y in $f \equiv 1$.
3. Najprej ugotovimo, da so vse tri stranice trikotnika manjše od $\frac{1}{2}$ (npr. iz $c < a + b$ in $a + b + c = 1$ sledi $c < 1 - c$ oziroma $c < \frac{1}{2}$). Odtod sledi $(2a-1)(2b-1)(2c-1) < 0$, oziroma $8abc - 4(ab+bc+ca) + 2(a+b+c) - 1 < 0$ ali $8abc - 4(ab+bc+ca) + 1 < 0$. Po drugi strani sklepamo $1 = a + b + c = (a + b + c)^2 \Rightarrow 2(ab + bc + ca) = 1 - (a^2 + b^2 + c^2)$. Upoštevajmo to v prejšnji neenakosti, pa imamo $8abc - 2 + 2a^2 + 2b^2 + 2c^2 + 1 < 0$ in takoj še $a^2 + b^2 + c^2 + 4abc < \frac{1}{2}$.

4. Označimo $\vec{a} = \vec{OA}$, $\vec{b} = \vec{OB}$ in $\vec{c} = \vec{OC}$. Izrazimo $\vec{OD} = \frac{1}{2}(\vec{a} + \vec{c})$, $\vec{DE} = \frac{2}{3}(\vec{DB} + \frac{1}{2}\vec{BC}) = \frac{1}{3}(-\vec{a} + \vec{b})$, $\vec{OE} = \vec{OD} + \vec{DE} = \frac{1}{6}(\vec{a} + 2\vec{b} + 3\vec{c})$ in $\vec{BD} = \vec{BO} + \vec{OD} = -\vec{b} + \frac{1}{2}(\vec{a} + \vec{c}) =$



$= \frac{1}{2}(\vec{a} - 2\vec{b} + \vec{c})$. Oglejmo si $\vec{OE} \cdot \vec{BD} = \frac{1}{12}(\vec{a} + 2\vec{b} + 3\vec{c})(\vec{a} - 2\vec{b} + \vec{c}) = \frac{1}{12}(4\vec{a} \cdot \vec{c} - 4\vec{b} \cdot \vec{c}) = \frac{1}{3}(\vec{a} - \vec{b}) \cdot \vec{c}$. Tu smo upoštevali, da so vektorji $\vec{a}$, $\vec{b}$ in $\vec{c}$ enako dolgi. Ker je $\vec{a} - \vec{b} = \vec{BA}$ in ker leži $\vec{c}$ na višini na osnovnico, je $\vec{OE} \cdot \vec{BD} = 0$, premica skozi O in E je res pravokotna na BD .

Tretji letnik

1. Očitno mora biti $x \geq 0$, zato enačba pri $a < 0$ nima rešitev. Če je $a = 0$, je edina rešitev $x = 0$. Naj bo odslej $a > 0$. Iz $\sqrt{a + \sqrt{x}} = a - x$ sledi $a \geq x$. Enačbo kvadrirajmo in uredimo $a^2 - a(2x + 1) + x^2 - \sqrt{x} = 0$ ter rešimo $a = \frac{1}{2}(2x + 1 \pm (2\sqrt{x} + 1))$. Oglejmo si obe rešitvi:

(i) $a = x + \sqrt{x} + 1$ lahko zapišemo v obliki $a - \frac{3}{4} = (\sqrt{x} + \frac{1}{2})^2$, zato seveda $a \geq \frac{3}{4}$. Izrazimo $\sqrt{x} = \sqrt{a - \frac{3}{4}} - \frac{1}{2}$, pa vidimo, da mora biti $a \geq 1$ zaradi $\sqrt{x} \geq 0$. Končno imamo $x = (\sqrt{a - \frac{3}{4}} - \frac{1}{2})^2$. Preveriti moramo, ali velja $a \geq x$: $a - x \geq 0 \iff \sqrt{a} - \sqrt{x} \geq 0 \iff \sqrt{a} - (\sqrt{a - \frac{3}{4}} - \frac{1}{2}) \geq 0 \iff \sqrt{a} - \sqrt{a - \frac{3}{4}} + \frac{1}{2} \geq 0$. Zadnja neenakost očitno velja, saj je kvadratni koren naraščajoča funkcija.

(ii) $a = x - \sqrt{x}$: ta enakost je protislovna, saj je $x = 0$ ne reši, $-\sqrt{x} = a - x \geq 0$ pa ne velja.

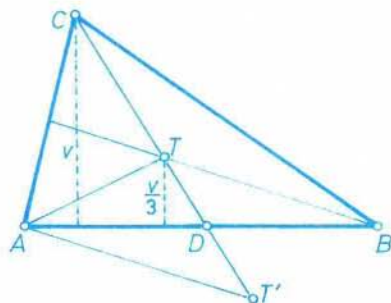
2. Iz $f(0 + 0) \leq f(0) + f(0)$ sledi $f(0) \geq 0$, zaradi točke (a) v nalogi pa $f(0) = 0$. Nato $f(x) \geq f(x + (-x)) - f(-x) = 0 - f(-x) \geq x$ in zaradi $f(x) \leq x$ (točka (a) v nalogi) $f(x) = x$.

3. a) Iz slike vidimo: $S_{ADT} =$

$$= \frac{\frac{5}{2} \cdot \frac{3}{2}}{2} = \frac{1}{6} \cdot \frac{5 \cdot 3}{2} = \frac{1}{6} S_{ABC}$$

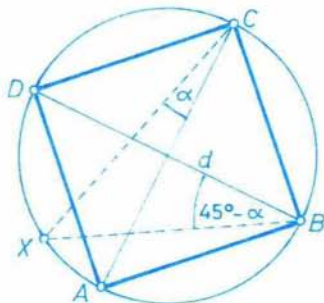
b) Najprej ugotovimo $S_{ABC} = 3 \cdot S_{AT'T}$, če smo T' izbrali na podaljšku težiščnice na stranico AB tako, da $TD = DT'$, saj sta trikotnika $\triangle AT'T$ in $\triangle BTD$ skladna. Sedaj pa izračunajmo ploščino trikotnika $AT'T$ po Heronovem obrazcu:

$$S_{AT'T} = \sqrt{\frac{2}{3}t \cdot \frac{2}{3}(t - t_a) \cdot \frac{2}{3}(t - t_b) \cdot \frac{2}{3}(t - t_c)} = \frac{4}{9} \sqrt{t(t - t_a)(t - t_b)(t - t_c)},$$



kjer nam pomeni $t = \frac{1}{2}(t_a + t_b + t_c)$. Zaradi prejšnje ugotovitve je $S_{ABC} = \frac{4}{3}\sqrt{t(t-t_a)(t-t_b)(t-t_c)}$.

4. Spet si pomagamo s sliko. Če označimo kot $\angle ACX$ z α in diagonalo kvadrata z d , potem izrazimo $AX = d \sin \alpha$ in $CX = d \cos \alpha$. Ker je $\angle ABX = \angle ACX$ (sta nad istim lokom), je $\angle XBC = 90^\circ - \alpha$ in $\angle XBD = 45^\circ - \alpha$, tako da imamo $BX = d \cos(45^\circ - \alpha) = \frac{\sqrt{2}}{2} d (\cos \alpha + \sin \alpha) = \frac{\sqrt{2}}{2} (AX + CX)$. Če bi torej bili AX in CX racionalni, BX ne bi bila racionalna.



Četrti letnik

1. Zapišimo tabeli

$$a_n = 2 \cdot a_{n-1} + 2^{n-1}$$

$$a_{n-1} = 2 \cdot a_{n-2} + 2^{n-2}$$

...

$$a_1 = 2 \cdot a_0 + 2^0$$

in

$$a_n = 2 \cdot a_{n-1} + 2^{n-1}$$

$$2 \cdot a_{n-1} = 2^2 \cdot a_{n-2} + 2^{n-1}$$

...

$$2^{n-1} \cdot a_1 = 2^n \cdot a_0 + 2^{n-1}$$

Če vrstice desne tabele med seboj seštejemo in upoštevamo $a_0 = 1$, dobimo $a_n = (n+2)2^{n-1}$.

2. Naj bo $c_0, c_1, c_2, c_3, \dots$ desetiški razvoj števila $\sqrt{10}$. Hitro ugotovimo, da je $a_{2k} = 0$, saj je $(\sqrt{10})^{2k} = 10^k$, ki ima zadnjo cifro enako 0. Zaradi $[(\sqrt{10})^{2k+1}] = [10^k \cdot \sqrt{10}]$ je $a_{2k+1} = c_k$ ($k = 0, 1, 2, \dots$). Dano zaporedje je torej $c_0, 0, c_1, 0, c_2, 0, c_3, 0, \dots$ in ni periodično, ker je $\sqrt{10}$ iracionalno število.
3. Če v $f(x + f(y)) = f(x) + y$ vstavimo $x = 0$, dobimo $f(f(y)) = f(0) + y$, če pa zamenjamo x in y med sabo in izberemo $x = 0$, dobimo $f(y + f(0)) = f(y)$. Potem pa imamo $f(y) = f(y + f(0)) =$

$= f(f(f(y))) = f(0) + f(y)$, iz tega $f(0) = 0$ in $f(f(x)) = x$ ter $f(x+y) = f(x+f(f(y))) = f(x) + f(y)$. To pomeni, da za vsak $n \in \mathcal{N}$ velja $f(nx) = n f(x)$, zaradi $f(nx - nx) = 0 = f(nx) + f(-nx)$ pa še $f(-nx) = -n f(x)$ oziroma velja $f(mx) = m f(x)$ za vsak cel m . Potem pa ni težko pokazati za racionalna števila: $f(m \frac{1}{m}) = m f(\frac{1}{m}) \Rightarrow \frac{1}{m} f(1) = f(\frac{1}{m})$, analogno gre z ulomkom $\frac{m}{n}$. Iz $f(x \cdot 1) = x \cdot f(1)$ sklepamo, da je $f(x) = Ax$, kjer je A konstanta, zato $A(x + Ay) = Ax + y$ in $A^2 y = y$ ter $A = \pm 1$. Iskani funkciji sta torej $f(x) = x$ in $f(x) = -x$.

4. Naj bodo $a_1, a_2, \dots, a_n$ stranice našega večkotnika. Na splošnosti ne izgubimo, če privzamemo $a_1 \geq a_2 \geq \dots \geq a_n$. Predpostavimo, da za vsaki dve stranici b in c večkotnika, kjer je $b \geq c$, velja $b/c \geq 2$. To pomeni, da za vsak $i \in \{1, 2, \dots, n-1\}$ velja $a_i/a_{i+1} \geq 2$ in

$$a_2 \leq \frac{a_1}{2}, a_3 \leq \frac{a_2}{2} \leq \frac{a_1}{4}, \dots, a_n \leq \frac{a_{n-1}}{2} \leq \frac{a_1}{2^{n-1}}$$

Če neenakosti seštejemo, dobimo $a_2 + a_3 + \dots + a_n \leq a_1(\frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \dots + \frac{1}{2^{n-1}}) = \frac{a_1}{2^{n-1}}(1 + 2 + \dots + 2^{n-2}) = a_1(1 - \frac{1}{2^{n-1}}) < a_1$. Dobili smo, da je stranica a_1 daljša od vsote vseh drugih, kar ni mogoče. Naša predpostavka nas je privedla v protislovje, zato vedno najdemo med stranicami večkotnika vsaj dve (npr. b in c), da velja $1 \leq \frac{b}{c} < 2$.

Darjo Felda



KAKO DOBIMO VSE TOČKE NA ENOTSKI KROŽNICI

- Rešitev s str. 262

Kot ψ je obodni, kot φ pa središčni kot nad istim lokom na krožnici k . (Glej sliko 2 na str. 260.) Zato je $\varphi = 2\psi$.

Očitno je $\tan \psi = \frac{t}{1}$, se pravi $t = \tan \psi$. Dalje je $x = \cos \varphi$, $y = \sin \varphi$. Potem je

$$x = \cos 2\psi = \cos^2 \psi - \sin^2 \psi = \cos^2 \psi \left(1 - \frac{\sin^2 \psi}{\cos^2 \psi} \right) = \cos^2 \psi (1 - \tan^2 \psi)$$

$$y = \sin 2\psi = 2 \sin \psi \cos \psi = 2 \frac{\sin \psi}{\cos \psi} \cos^2 \psi = 2 \tan \psi \cos^2 \psi$$

$$\text{Ker je } 1 + \tan^2 \psi = \frac{1}{\cos^2 \psi}, \text{ je } \cos^2 \psi = \frac{1}{1 + \tan^2 \psi}.$$

Upoštevajmo še, da je $\tan \psi = t$, pa dobimo:

$$x = (1 - \tan^2 \psi) \cdot \frac{1}{1 + \tan^2 \psi} = \frac{1 - t^2}{1 + t^2}$$

$$y = 2 \tan \psi \cdot \frac{1}{1 + \tan^2 \psi} = \frac{2t}{1 + t^2}$$

Janez Rakovec

KOLENDARJI – Rešitev s str. 220

Z zbiranjem lahko konča, če ima v zbirki 14 različnih letnih koledarjev (prvi dan v letu je lahko katerikoli izmed sedmih dni v tednu, pa še na navadna in prestopna leta moramo paziti). Označimo z $D1, D2, \dots, D7$ dneve v tednu. Cikel štirih zaporednih let ima $366 + 3 \cdot 365$ dni ali 208 tednov in 5 dni. Če se je prestopno leto začelo z $D1$, se naslednja prestopna leta začnejo takole: 1976 – $D6$, 1980 – $D4$, 1984 – $D2$, 1988 – $D7$, 1992 – $D5$, 1996 – $D3$. Šele leta 1996 bo torej dedek zbral vse različne letne koledarje za prestopna leta.

Do takrat bo zagotovo zbral tudi vse različne letne koledarje za navadna leta. Navadna leta neposredno pred prestopnimi se namreč začnejo z dnem v tednu, ki je neposredno pred dnevom v tednu, s katerim se začnejo ta prestopna leta (tako imamo 1971 – $D7$, 1975 – $D5$, 1979 – $D3$, ..., 1995 – $D2$). V resnici pa je dedek že leta 1978 imel vse možne koledarje za navadna leta.

Darjo Felda

10. REPUBLIŠKO IN PODROČNO TEKMOVANJE IZ FIZIKE ZA OSNOVNOŠOLCE - Rešitve nalog s strani 280

Področno tekmovanje

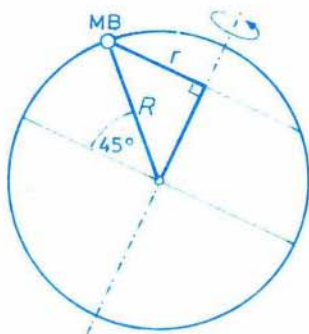
7. razred

1. Kocka z robom 4 mm ima prostornino 64 mm^3 . Prostornino kapljice zato ocenimo na približno 50 mm^3 . (Za pravilne lahko štejemo ocene med 10 in 250 mm^3 .) V enem letu je $365.24.60.60 = 31536000 \text{ s}$. Prostornina vseh kapljic je torej $31536000.50 \text{ mm}^3 = 1,6 \text{ m}^3$. Za vodo, ki nam odteče, moramo plačati približno 32 din.
2. Tlak v kapljevinah narašča z globino: $\Delta p = \sigma \cdot h$. Tlak v vodovodni napeljavi v pritličju je torej za $\Delta p = 10000 \text{ N/m}^3 \cdot 70 \text{ m} = 700000 \text{ N/m}^2$ večji od tlaka na gladini zbiralnika, 30 m pod zbiralnikom pa za 300000 N/m^2 večji. V pritličju moramo pritiskati na odprtino pipe najmanj s silo $F = \Delta p S = 70 \text{ N/cm}^2 \cdot 1,5 \text{ cm}^2 = 105 \text{ N}$, na vrhu nebotičnika pa s silo $30 \text{ N/cm}^2 \cdot 1,5 \text{ cm}^2 = 45 \text{ N}$.
3. Zgornji silomer raztegne teža štirih preostalih, naslednji silomer teža treh preostalih itd. Teža 1,5 N raztegne silomer za 0,75 cm. Skupni raztezek vseh silomerov je: $4,0,75 \text{ cm} + 3,0,75 \text{ cm} + 2,0,75 \text{ cm} + 1,0,75 \text{ cm} = 7,5 \text{ cm}$. Skupna dolžina je torej $75 \text{ cm} + 7,5 \text{ cm} = 82,5 \text{ cm}$.
4. a) Po 20 minutah se višina vode spremeni za 10 cm in je sprememba potencialne energije $\Delta W_p = mgh_1 = 16 \text{ J}$.
b) Po 10 minutah se pretoči polovica vode. Predstavljati si smemo, da se iz zgornje posode preseli zgornja polovica vode v spodnjo posodo. Sprememba višine je potem 14 cm in $\Delta W_p = 8 \text{ kg} \cdot 10 \text{ m/s}^2 \cdot 0,14 \text{ m} = 11,2 \text{ J}$. V preostalem času se spremeni potencialna energija za $16 \text{ J} - 11,2 \text{ J} = 4,8 \text{ J}$.
- c) V eni minuti se pretoči 0,8 kg vode, višina vode v posodi se spremeni za 0,4 cm. V 10. minuti se višina vode v zgornji posodi zmanjša od 4,4 cm na 4,0 cm, v spodnji pa poveča od 3,6 cm na 4 cm. Srednja višinska razlika gladin v tej minuti je 10,4 cm in $\Delta W_p = 0,8 \text{ kg} \cdot 10 \text{ m/s}^2 \cdot 0,104 \text{ m} = 0,83 \text{ J}$.
5. a) 0,5 m dolg odsek bakrene palice se podaljša za $1,7.0,5.80.0,01 \text{ mm} = 0,68 \text{ mm}$, aluminijaste pa za $2,3.0,5.80.0,01 \text{ mm} = 0,92 \text{ mm}$. Skupna sprememba razdalje je $0,68 \text{ mm} + 0,92 \text{ mm} = 1,60 \text{ mm}$
b) Največja sprememba razdalje je med točkama na skrajnih koncih palic.

8. razred

1. V eni uri redno letalo preleti razdaljo $500 \text{ km/h} \cdot 1 \text{ h} = 500 \text{ km}$. Tolikšno razdaljo nadoknadi zamujemo letalo v 5 urah, ker ima za 100 km/h večjo hitrost. Čas leta rednega letala je 6 h in razdalja med točkama A in B je $500 \text{ km/h} \cdot 5 \text{ h} = 3000 \text{ km}$.

2. Trikotnik na sliki je polovica kvadrata. Zato velja $r = R/\sqrt{2} = 4540 \text{ km}$. Hitrost kroženja je $v = 2\pi r/t = 28500 \text{ km}/24 \text{ h} = 1190 \text{ km/h}$.



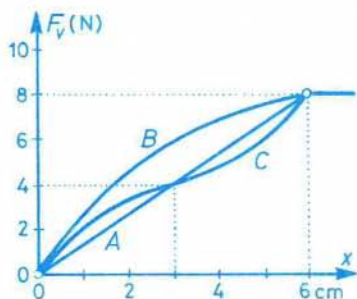
3. Ko je sila F enaka nič, je tudi delo te sile enako nič: $A_A = 0$, $A_C = 0$. V intervalih B in D najprej izračunamo opravljeni poti. Iz diagrama sledi $s_B = 20 \text{ m}$ in $s_D = 20 \text{ m}$. Sledi $A_B = 10 \text{ N} \cdot 20 \text{ m} = 200 \text{ J}$, $A_D = -10 \text{ N} \cdot 20 \text{ m} = -200 \text{ J}$. Skupno delo je enako 0.
4. Računalnik deluje pri 100 krat šibkejši svetlobi od navedene, zato je dovolj, da pade na m^2 v eni sekundi 10 J svetlobne energije. Ploščino sončnih celic moramo oceniti sami. Pri žepnih računalnikih je površina okoli 5 cm^2 . Na tako površino pade vsako sekundo $5 \text{ cm}^2 / 10.000 \text{ cm}^2 \cdot 10 \text{ J} = 0,005 \text{ J}$ energije. 15% te energije pretvori sončna celica v električno delo. Najprej izračunamo električno moč: $P = A/t = 0,15 \cdot 0,005 \text{ J} / 1 \text{ s} = 0,00075 \text{ W}$, nato pa še tok: $I = P/U = 0,00075 \text{ W} / 1,5 \text{ V} = 0,5 \text{ mA}$.
5. a) Če izberemo žico s presekom $0,5 \text{ mm}^2$, lahko iz diagrama razberemo, da ima 1 m dolga žica upor 2,8 ohma. Za 20 ohmski upornik potrebujemo torej $(20/2,8) \text{ m} = 7,1 \text{ m}$ žice. Če bi izbrali žico s presekom $1,5 \text{ mm}^2$, bi potrebovali $3,7,1 \text{ m} = 21,3 \text{ m}$ žice.
- b) V diagramu pri dolžini 2 m narišemo navpičnico in preberemo upore od zgoraj navzdol: $R_1 = 5,6\Omega$, $R_2 = 4,0\Omega$, $R_3 = 1,9\Omega$, $R_4 = 1,4\Omega$. Upor vodnika je obratno sorazmeren s presekom, zato velja za drugi vodnik $S_2 = (R_1/R_2) \cdot S_1 = (5,6\Omega/4\Omega) \cdot 0,5 \text{ mm}^2 = 0,7 \text{ mm}^2$. Enako dobimo za četrti vodnik: $S_4 = (5,6\Omega/1,4\Omega) \cdot 0,5 \text{ mm}^2 = 2 \text{ mm}^2$.

Republiško tekmovanje

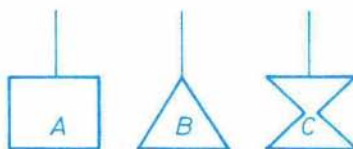
7. razred

1. V izbrani prostornini, recimo v 1 m^3 , je $0,25 \text{ m}^3$ helija in $0,75 \text{ m}^3$ kisika. Masi plinov sta: $m_{\text{He}} = \rho_{\text{He}} \cdot V_{\text{He}} = 0,045 \text{ kg}$, $m_{\text{O}_2} = \rho_{\text{O}_2} \cdot V_{\text{O}_2} = 1,05 \text{ kg}$. Skupna masa mešanice je $m_{\text{He}} + m_{\text{O}_2} = 1,09 \text{ kg}$. Delež helija izračunamo tako, da delimo maso helija s skupno maso: $m_{\text{He}}/m = 0,045 \text{ kg}/1,09 \text{ kg} = 0,041 = 4,1\%$.
2. a) Sila pri $x = 0$ je nasprotno enaka teži in je za vsa tri telesa enaka. Ker je teža 10 N , je masa $m_A = m_B = m_C = 1,0 \text{ kg}$. Pri $x > 6 \text{ cm}$ se sile ne spreminjajo več, telesa so potopljena in sila vzgona je $10 \text{ N} - 2 \text{ N} = 8 \text{ N}$, spet enaka za vsa tri telesa. Zato so enake tudi prostornine in gostote teles. $V = 0,8 \text{ dm}^3$ in $\rho = 1,0 \text{ kg}/0,8 \text{ dm}^3 = 1,25 \text{ kg/dm}^3$.

b)



c)

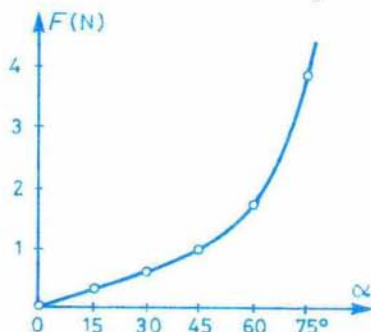


3. a) V prvih 5 minutah se je temperatura vode spremenila za približno 22 K , torej je voda sprejela toploto $Q_v = mc\Delta T = 0,5 \cdot 4200 \cdot 22 \text{ J} = 46000 \text{ J}$. V tem času je grelnik oddal 60000 J toplote. Ušlo je torej $60000 \text{ J} - 46000 \text{ J} = 14000 \text{ J}$ toplote.
- b) V času med $15. \text{ min}$ in $20. \text{ min}$ se je temperatura spremenila za približno 10 K , $Q_v = mc\Delta T = 0,5 \cdot 4200 \cdot 10 \text{ J} = 21000 \text{ J}$ in v okolico je ušlo 39000 J toplote.
4. Na žico lahko položimo 6 daljših stranic A_4 , eno krajšo, pri zadnji meritvi ocenimo, da je papir za 10 mm daljši od žice: $l = 6 \cdot 297 \text{ mm} + 210 \text{ mm} - 10 \text{ mm} = 1982 \text{ mm}$. Z merilnim trakom izmerjena dolžina je 1987 mm . Možnih je še več drugačnih postopkov.

5. V nalogi navedene kote narišemo s trikotnikoma na list papirja, list pripnemo na stojalo, na katerem visi utež in izmerimo silo.

Tabela meritev je:

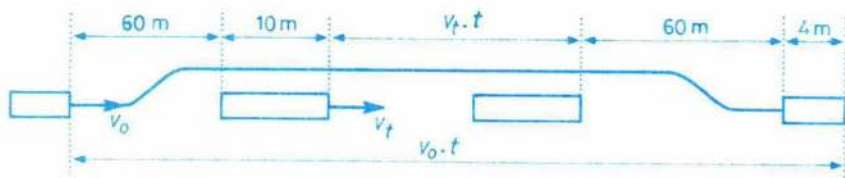
kot $\alpha(^{\circ})$	$F \text{ (N)}$
0	0,0
15	0,3
30	0,6
45	1,0
60	1,7
75	3,9



Pri 90° bi bila sila neskončno velika.

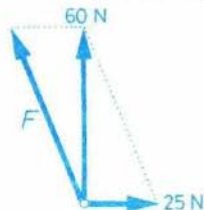
8. razred

1. Med prehitevanjem prevozi osebni avtomobil razdaljo $v_o \cdot t$, tovornjak pa razdaljo $v_t \cdot t$.



Iz slike vidimo, da velja $v_o \cdot t = 60 \text{ m} + 10 \text{ m} + v_t \cdot t + 60 \text{ m} + 4 \text{ m}$, od koder sledi $t = 134 \text{ m} / (v_o - v_t) = 12,1 \text{ s}$. Prehitevanje traja 12,1 s, osebni avtomobil pa med prehitevanjem prevozi razdaljo $v_o \cdot t = 302 \text{ m}$.

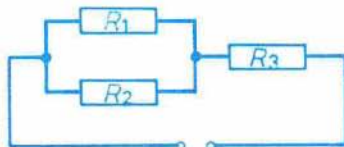
2. Rezultanta vseh sil na sliki je 25 N v smeri sile F_1 . Če naj se telo giblje s pospeškom 20 m/s^2 , mora biti rezultanta vseh zunanjih sil nanj enaka $m \cdot a = 3,0 \text{ kg} \cdot 20 \text{ m/s}^2 = 60 \text{ N}$.
- Na telo moramo delovati z dodatno silo $F = 60 \text{ N} - 25 \text{ N} = 35 \text{ N}$ v smeri sile F_1 .
 - Z načrtovanjem sil v primer- nem merilu (npr. $60 \text{ N} = 60 \text{ mm}$) ugotovimo, da mo-



ra biti dodatna sila F enaka 65 N. Velikost sile F lahko izračunamo tudi po Pitagorovem izreku $F = \sqrt{(60 \text{ N})^2 + (25 \text{ N})^2} = 65 \text{ N}$.

- c) Z načrtovanjem ugotovimo: $F \approx 40 \text{ N}$ pod kotom približno 50° glede na smer sile F_1 .

3. Skupni upor upornikov R_1 in R_2 je 100Ω , zato je napetost na teh dveh upornikih dvakrat manjša kot napetost na uporniku R_3 . Najprej bi pregorel upornik R_3 , saj je napetost na njem največja.



Moč izračunamo iz enačbe $P = U^2/R$. Napetost na uporniku R_3 je lahko največ $U = \sqrt{PR} =$

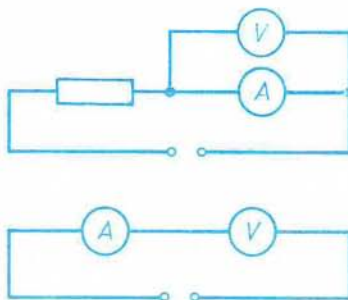
$= \sqrt{0,5 \text{ W} \cdot 200\Omega} = 10 \text{ V}$. Ko je napetost na uporniku R_3 10 V, je napetost na upornikih R_1 in R_2 5 V, torej lahko vezje priključimo na napetost največ 15 V.

4. Pred in po segrevanju moramo stehtati gorilnik s špiritom, da ugotovimo, koliko špirta je zgorelo. Pri eni od meritev smo 400 g vode segreli za 10 K v 630 sekundah. Pri tem je zgorelo 2,0 g špirta. Gorilnik je oddal $2,0 \cdot 27000 \text{ J} = 54000 \text{ J}$ toplote. Voda je prejela toploto $Q = 0,400 \cdot 10 \cdot 4200 \text{ J} = 16800 \text{ J}$. V izgubo je šlo torej 37200 J, kar je 69%. Toplotni tok, ki ga oddaja špiritni gorilnik, je $P = 54000 \text{ J} / 630 \text{ s} = 86 \text{ W}$.

5. a) Z meritvijo ugotovimo, da je npr. pri toku 50 mA skozi ampermeter, padec napetosti na notranjem upor ampermetra 0,20 V. Torej je notranji upor ampermetra

$$R_A = 0,20 \text{ V} / 50 \text{ mA} = 4\Omega.$$

- b) Izmeriti moramo tok, ki teče skozi voltmeter. Pri napetosti na voltmetru 3 V, teče skozi voltmeter tok $33\mu\text{A}$, torej je notranji upor voltmetra $R_V = 3 \text{ V} / 33\mu\text{A} = 90000\Omega$.



NOVE KNJIGE

PROGRAMSKI PAKET emT_EX 3.0, Primož Gabrijelčič in dr., Društvo matematikov, fizikov in astronomov Slovenije, Ljubljana 1991.

Marko Razpet, SEDI IN PIŠI Z L^AT_EX-om, Društvo matematikov, fizikov in astronomov Slovenije in Zavod Republike Slovenije za šolstvo, Ljubljana 1991, Račkova knjižnica 3.

Časi, ko je bil izpis na računalniškem tiskalniku sinonim za grde, oglate črke, so že davno mimo. Vedno bolj izpopolnjeni tiskalniki in ustrezna programska oprema nam omogočajo, da so računalniški izpisi povsem primerljivi s knjigotiskom. Eno od najbolj izpopolnjenih orodij za oblikovanje in izpis besedila je program T_EX. Zasnoval ga je znani matematik in računalnikar Donald E. Knuth. Omogoča nam res kvalitetno pripravo besedila za tisk in že na cenениh 9-igličnih tiskalnikih dobimo kakovosten izpis. Ko smo pred tremi leti v Preseku pisali o tem programu, ki nam nadomesti strica v tiskarni (Matija Lokar, T_EX, Presek **15** (1987-88) 6, 326-332), se je kar nekaj bralcev zanimalo, kako bi do tega programa prišli. Žal so bile doslej različne izpeljave T_EX-a za PC združljive računalnike dokaj draga zadeva. Seveda smo si programe nekako 'izposodili', vendar je slaba vest ostala. No sedaj si lahko oddahnemo in vsem bralcem sporočimo, da lahko poceni pridejo do T_EX-a. In ne le do njega. Skupaj z njim dobimo še cel kup zanimivih programov. Tako je priložen program, ki nam omogoči, da naredimo slike in jih nato vključimo v besedilo, program METAFONT za oblikovanje novih naborov znakov, nadgradnja T_EX-a L^AT_EX in še in še. Posebej L^AT_EX je zanimiva zadeva. Ker je priprava besedil v T_EX-u včasih nekoliko zapletena, je Leslie Lamport pripravil sistem ukazov, ki so nekakšna nadgradnja T_EX-a in ga poimenoval L^AT_EX. Omogoča nam enostavnejše oblikovanje besedila. Poleg preprostejše uporabe ima še to dobro lastnost, da naše znanje T_EX-a ni vrženo proč. Še vedno imamo na voljo vse ukaze, kot jih pozna T_EX in pa cel kup novih. Tako je večina uporabnikov T_EX-a, kar jih poznam, prešla na uporabo L^AT_EX-a. Če T_EX uporabljate, boste nad L^AT_EX-om prav gotovo navdušeni, če pa ne - poskusite, saj ni težko. Da bo učenje L^AT_EX-a še lažje, nam bo pomagala knjiga Marka Razpeta, *Sedi in piši z L^AT_EX-om*. O njej nekoliko več v nadaljevanju.

Sedaj pa se vrnimo k programskemu paketu. S posredovanjem skupine navdušenih uporabnikov T_EX-a, je konec prejšnjega leta v Slovenijo prišel

emT_EX, izvedba nove inačice T_EX-a. Avtor, Eberhard Mattes z univerze v Stuttgartu, je program namenil prostemu razširjanju. (Zato ga lahko dobimo zastonj.) V originalni obliki je dokaj neroden za uporabo, vsaj za večino uporabnikov. Zahvaljujoč stikom z avtorjem je omenjena skupina pripravila več paketov s programi, ki so sedaj v obliki, primerni za večino uporabnikov in udobno nameščeni na diskete.

Programski paket je razdeljen na 7 paketov, med katerimi nekateri nastopajo v več inačicah. Običajni uporabnik, bo za delo potreboval le paketa 1 in 2, ki sta na treh disketah 5,25" oz. dveh 3,5", tako da so stroški nabave res minimalni: 400,00 din (320,00 din) oz. 350,00 din (280,00 din).

Poleg disket dobimo še knjižico s kratkimi navodili za uporabo tega programskega paketa. Opisano je nameščanje, vsebina paketov, način klica programov, namen posameznih pomožnih programov. Priložen je tudi dodatek z navodili za začetnike in seznam naborov znakov. Marsikdo bo pogrešal podrobnejših navodil, vendar bodo za prvo silo zadostovala tudi ta.

Seveda pa se bo potrebno naučiti ustreznih ukazov. Verjetno bo najlažje začeti kar s L_AT_EX-om. Zelo primeren pripomoček pri učenju bo tretja knjiga iz Račkove knjižnice *Sedi in piši z L_AT_EX-om*, avtorja Marka Razpeta. Kot pravi sam avtor, se je L_AT_EX-a mogoče naučiti vsaj v 15 urah. Ob pomoči knjižice bo to šlo še lažje in hitreje. Gradivo je podano sistematično in pregledno. Opremljeno je s številnimi zgledi, ki niso sami sebi namen, ampak so zelo uporabni. Tako v knjigi najdemo primer kemijske formule, kontrolne naloge iz nemškega jezika, primerek vabila, pesem, številne zapletene matematične formule, razpredelnice, ... Tako ne bo težav, da bodo vaše seminarske naloge dobile poleg kvalitetne vsebine še prvovrsten izgled, šolsko glasilo bo zaživelo v novi luči, rezultati šolskih tekmovanj bodo ličnejši, ne bo več napak pri testih zaradi nerazločnih formul, ... Knjižica je res dobro napisana. Njena glavna odlika je ravno ta, da njen naslov ne laže, saj začetnikom ne bo delala težav. Kljub temu pa bo tudi izkušen uporabnik v njej našel marsikaj koristnega.

Če natipkate z računalnikom več kot eno stran na mesec, ne pomišljajte in kupite programski paket emT_EX in se skupaj z Razpetovo knjigo lotite učenja. Omenimo, da tudi Presek že kar nekaj časa oblikujejo s pomočjo T_EX-a. Ker vedno več avtorjev svoje članke napiše kar v T_EX-u, je delo pri pripravi Preseka močno olajšano.

Matija Lokar

SLIKOVNA KRIŽANKA
"MATEMATIČNI POJMI"
 - Rešitev s str. 243

	Ročník	Strana	Číslo listu	Sešit / Materiál Běžný	✓	Průběh sestavení	Průběh neuváděný sestavitel	Průběh
OSNOVA TELEFON PO KONTAKTU GLASNE	P	L	E	S	VELA ROKA	K	R	P
ORNDICE	L	I	N	A	EPHOPIA ROKA	O	D	R
LUMINELI	A	M	A	T	ER	TRIST	T	S
*****	N	I	Č	K	E	K	E	C
TI	E	T	A	S	N	A	G	A
SMYSL PROČEČ	T	A	J	G	A	V	A	L
	DELICATE PROČEČ	*****	ROZKROK Z ROZKROK ROZKROK ROZKROK ROZKROK ROZKROK	K	U	S		
SESTAV STRAH GLASNE MČOV	K	V	A	R	T	E	T	
GLASNE (ROZKROK)	O	S	T	A	N	S	I	Č
	P	O	L	O	S	K	A	R
ČD	A	T	A	S	T	A	R	K
OSNOVA PO KONTAKTU	Č	A	S	T	O	T	A	T

Proizvodnja in prodaja računalniške opreme

Servis
računalniške opreme

Prodaja tuje strokovne literature



ALTECH
Alternativne Tehnologije, d.o.o.
 Titova 118
 61000 Ljubljana
 tel.: (+38) 061 347 969
 Fax: (+38) 061 347 961

ANGLEŠKE ASTRONOMSKE ZNAMKE

Jeseni 1990 je angleška pošta s štirimi znamkami počastila dve pomembni astronomski obletnici: dvestoletnico zvezdarne v Armaghu na Severnem Irskem in stoletnico Britanske astronomske zveze. Že leta 1675 so osnovali Kraljevi greenwiški observatorij, predvsem zato, ker so mornarji potrebovali točen čas in zvezdne karte za orientacijo.

Na znamki za 22 penijev kaže glavna risba stavbo zvezdarne v Armagh. Na levi vidimo radijski daljnogled v Jodrell Banku s paraboloidno anteno s premerom 76 metrov, na desni pa največji britanski daljnogled. Daljnogled je eden izmed najboljših na svetu, nosi ime po Williamu Herschlu in stoji na La Palmi na Kanarskih otokih. Zgornji okrasni trak vsebuje risbe Zemlje, merilnika vetra, Sonca in neba.

Znamka za 26 penijev ima na sredi risbo kometa, Luninega mrka in razlago plime in je posvečena Newtonovemu gravitacijskemu zakonu. Levo je prvi Newtonov zrcalni daljnogled iz leta 1672 in desno veliki Herschlov zrcalni daljnogled. William Herschel je leta 1781 odkril planet Uran in narisal dotlej najnatančnejšo zvezdno karto. Okrasni trak kaže komet in Herschlovo risbo

naše Galaksije. Kraljevi astronom Edmund Halley je na osnovi Newtonovega zakona predvidel, da se bo vrnil komet, ki ga imenujemo po njem.

Znamka za 31 penijev vsebuje risbe ozvezdij in stare naprave za ugotavljanje lege zvezd na nebu in opozarja na pomen astronomije za natančno merjenje časa. Okrasni trak kaže planete Osončja, ki so jih poznali v Herschlovem času.

Znamka za 37 penijev kaže starodavni Stonehenge, v katerem so častili Sonce in ki daje slutiti zasnovo koledarja. Na levi risbi vidimo armilarno sfero, staro napravo za določanje leg nebesnih teles in časa, desna pa opozarja na pomen astronomije za orientacijo na morju. Okrasni trak kaže Lunine mene.

Risbe je narisal Jeff Fisher, ki večkrat prispeva tudi kako naslovnico za revijo New Scientist. Čeprav se zdijo nekoliko natrpane in je treba dobro pogledati, da približno ugotovimo, kaj naj bi kazale, dajejo znamke ugoden vtis.

Janez Strnad

