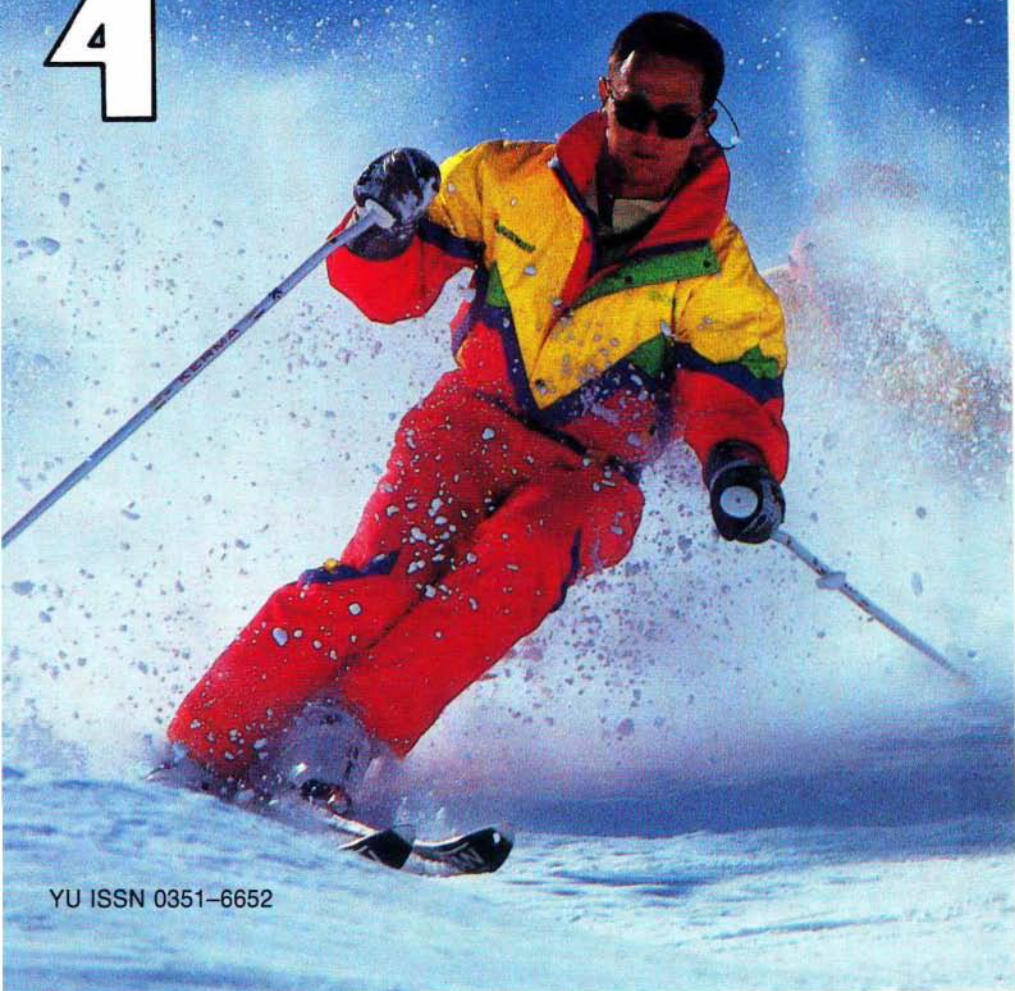


DRUŠTVO MATEMATIKOV, FIZIKOV IN ASTRONOMOV SLOVENIJE, 18 – (1990/91)

PRESEK

4



YU ISSN 0351-6652

VSEBINA

FIZIKA	Zakaj se lahko drsamo in smučamo? (Janez Strnad)	194-201
MATEMATIKA	Geometrijsko seštevanje nekaterih številskih vrst (Gregor Pavlič)	202-205
	Razdeliva si vino (Franc Savnik)	206-210
	Konstrukcija elipse s trakom papirja (Marija Vencelj)	212-214
NOVICE	Urniki tekmovalcev v letu 1991 (Darjo Felda)	220-223
	Pisma bralcev (Janez Ferbar)	224
	Mednarodni astronomski mladinski tabor Pokljuka 90 (Mirjana Galičič)	226-227
	Kyoto 1990 (Dušan Repovš)	III
TEKMOVANJA	26. republiško tekmovanje osnovnošolcev iz matematike .	228-229
	21. zvezno tekmovanje osnovnošolcev iz matematike (Aleksander Potočnik)	230-231
	34. republiško tekmovanje srednješolcev iz matematike (Lidija Kleindienst)	232-235
	Izbirno tekmovanje iz logike za osnovnošolce in srednješolce (Izidor Hafner)	236-240
	Tekmovanje iz matematike v ZRN (Matjaž Željko)	241
ASTRONOMIJA	Zakaj vidimo Sonce ob obzorju sploščeno (Marijan Prosén)	248-251
	Koliko časa zahaja Sonce (Marijan Prosén)	252-254
NALOGE	Obrnjeni Fermat - Rešitev str. 251 (Boris Lavrič)	218
	Posebni trikotniki - Rešitev str. 246 (Boštjan Hostnik)	218
	Koledarji. Kocka ima rdečke (Darjo Felda)	222, 229
	Nagradna naloga (Boštjan Hostnik)	246
	Stiskanje plastike. Mili zvonovi. Zlata jajca. Megla v plastiki. Padajoče deske. Slike s trgatve. (Janez Ferbar)	225, 231, 235, 247, 255- 256
RAZVEDRILLO	Slikovna križanka "Matematični pojmi" (Marko Bokalič) . . .	193
	Nenavadni preizkus (Damjan Kobal)	216-218
	Bufonova kratkočasna (Vilko Domajnko)	242-243
	Mili meter (Janez Ferbar)	256
REŠITVE NALOG	Pravilni osemnajstkotnik - Rešitev s str. 159. Pravokotni trikotnik - Rešitev s str. 133 (D. M. Milošević, prev. Boris Lavrič)	210-211
	Stella octangula - Rešitev s str. 160. Kako razdeliti? - Rešitev s str. 190 (Vilko Domajnko)	215
	Četrta praštevilka - Rešitev s str. 175 (Boris Lavrič)	219
	Slikovna križanka "Matematični pojmi - I" - Rešitev s str. 153 (Marko Bokalič)	219
	Ali lahko manjšina zmaga na volitvah - Rešitev s str. 139 (Vilko Domajnko)	223
	Popolni kvader - Rešitev s str. 139 (Edvard Kramar)	223
	Na velikem papirnatem traku - Rešitev s str. 191 (D.M. Milošević)	229
	Dve Eccovi nalogi - Rešitev s str. 125 (Neža Mramor)	240
	Triangulacija večkotnikov - Rešitev s str. 186. Enake vsote - Rešitev s str. 129 (Boris Lavrič)	244-245
NA OVITKU	Zakaj lahko smučamo? (Slika k članku na str. 194)	I
	Zahajajoče Sonce - Slike k člankoma na str. 248 in 252 (Foto Herman Mikuz)	IV

SLIKOVNA KRIŽANKA "MATEMATIČNI POJMI"

SATURN 		$\lim_{n \rightarrow \infty}$	=	ČEBELJA TVORBA	SESTAVIL MARKO BOKALIČ	$\sqrt{\quad}$	RIKO DEBENJAK	PREDSED- NIK NIKARAQUE (DANIEL)	$\frac{N}{m^2}$
GIBANJE TELESA PO RITMU GLASBE					VRELA VODA				
OKENCE					EVROPSKA REKA ZNANSTVENA NATANČNOST				
LJUBITELJ							TRST GORIŠČNA PLOSKEV		
$a + x = a$				SLOV. MLADINSKI FILM					
η									
SIBIRSKI PRAGOZD						DEL VALOVANJA RAZLIČNI ČRKI			
 DELAVEC, KI KOPLJE	$a + b = x$	ZAZNAVA Z JEZIKOM KNJIGA ZEMLJE- VIDOV						 PISMENKA	
SESTAV ŠTIRIH GLASBE- NIKOV									
SLOV. IGRALEC (BORIS)						COLA 10^2			
				PESNIK DAVIČO					
OČE				NEMŠKI ATOMSKI FIZIK					
OSNOVNA FIZIKALNA KOLIČINA				TORINO			TANTAL		

ZAKAJ SE LAHKO DRSAMO IN SMUČAMO?

V ameriški reviji *The Physics Teacher*, ki je posvečena poučevanju fizike v srednji šoli, je urednik razdelka o preprostih poskusih novembra 1987 poročal o poskusih v vakuumu. Omenil je, da se ledišče z naraščajočim tlakom zniža, in navrgel, da se je mogoče drsati, ker se ob znižanju ledišča pri povečanem tlaku pod drsalko stali led. Maja 1989 je revija objavila ugovor bralca. Kljub temu, da je bil dopisnik z iste univerze kot urednik, je trajalo skoraj dve leti do objave odziva. Po mnenju dopisnika se ledišče zaradi tlaka premalo zniža, da bi se ob hladnem vremenu led pod drsalko zaradi tega stalil. Urednik se je branil, češ da vsaj pri temperaturi okoli $0\text{ }^{\circ}\text{C}$ pojava, ki ga je omenil, ne gre spregledati. Poleg tega je pri zavijanju drsalka nagnjena proti ledu in se dotika ledu na manjši ploskvi, zaradi česar je tlak precej visok.

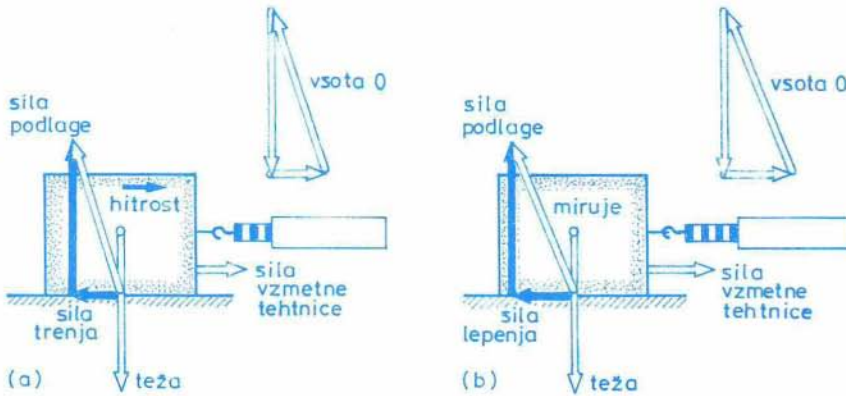
Odzivi bralcev na članke so skoraj vedno poučni. Ob njih se najprej vprašamo, kdo ima prav, če odziv nasprotuje prvotnemu mnenju. Ali se zares lahko drsamo in smučamo zato, ker se zaradi povečanega tlaka pod drsalko ali smučko zniža ledišče in se led ali sneg stali v zelo tanko plast vode?

Najprej malo premislimo. Tališče ledu, ledišče, se z naraščajočim tlakom zniža. Tako je tudi pri drugih snoveh, ki imajo v trdnem stanju manjšo gostoto kot v kapljevinskem. Pri snoveh, ki imajo v trdnem stanju večjo gostoto kot v kapljevinskem, pa se tališče z naraščajočim tlakom zviša. Pri navadnem zračnem tlaku 1 bar se led tali pri temperaturi $0\text{ }^{\circ}\text{C}$, pri tlaku 2 bara pa pri temperaturi $-0,007\text{ }^{\circ}\text{C}$. Če je led pri tem tlaku pri temperaturi med $-0,007$ in $0\text{ }^{\circ}\text{C}$, se začne taliti. Tlak je treba povišati na 134 barov, da se zniža ledišče do temperature $-1\text{ }^{\circ}\text{C}$. Merjenja kažejo, da ima navadno led temperaturo zraka nad njim. Pri temperaturi zraka nekaj stopinj Celzija pod ničlo znižanje ledišča zaradi povišanega tlaka pod drsalko že ne more imeti pomembne vloge.

Trenje

Sila trenja F_t je komponenta sile podlage v nasprotni smeri gibanja na telo, ki drsi s konstantno hitrostjo po ravni podlagi. Sila trenja je na širokem območju hitrosti in komponente sile podlage pravokotno na podlago F_n (slika 1a) sorazmerna s to silo. Zato je smiselno vpeljati *koefficient trenja*

$$k_t = F_t / F_n$$



Slika 1. Sile na telo, ki enakomerno drsi po vodoravni podlagi (a) ali miruje (b)

Podlaga lahko deluje na telo z vzdolžno komponento tudi, ko telo miruje; to je *sila lepenja*. Ta sila ima zgornjo mejo *največjo silo lepenja* F_l (slika 1b). Koeficient lepenja

$$k_l = F_l / F_n$$

ki je večji od koeficienta trenja, je pravzaprav koeficient trenja pri hitrosti 0.

Za telo, ki enakomerno drsi navzdol po klancu z nagibom β , velja

$$k_t = \tan \beta$$

Vzdolžna komponenta teže telesa F_g je namreč tedaj enako velika kot sila trenja $F_t = F_g \sin \beta$ in pravokotna komponenta teže enako velika kot sila klanca na telo v tej smeri $F_n = F_g \cos \beta$.

Če telo miruje na klancu, je sila lepenja manjša od največje sile lepenja. Ko povečamo nagib do kota β_l in telo zdrsne, velja enačba

$$k_l = \tan \beta_l$$

Koeficient trenja in koeficient lepenja sta odvisna od snovi, iz katerih sta podlaga in telo, od obdelave dotikajočih se ploskev, od njune čistoče in od tega, kaj se je z njima prej dogajalo. Močno ju zmanjšamo, če med telo in podlago damo kapljevino. Merjenja sile trenja in sile lepenja so razmeroma nenatančna, zato po navadi zapišemo koeficienta samo z enim mestom ali kvečjemu z dvema.

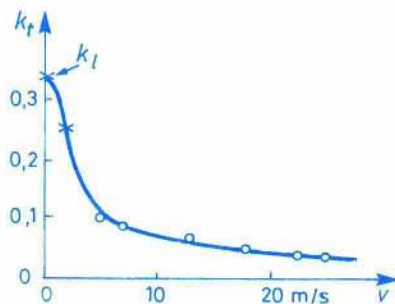
Lepenje in trenje pojasnimo takole. Dotikajoči se ploskvi nista popol-

noma gladki in drobne vzpetine podlage segajo v vdolbine telesa. Ko telo drsi po podlagi ali ga silimo, da se premakne, spreminjajo drobne vzpetine obliko in nekatere se strgajo. Pri tem se majhna območja telesa in podlage segrejejo do precej visoke temperature.

Zgodovina

Trenje štejemo po krivici med bolj dolgotrajne zadeve v fiziki. Če dobro preudarimo, bi bilo brez njega življenje popolnoma drugačno. V starih časih je veljala Aristotelova trditev, da mora - po naše - na opazovano telo delovati od nič različna rezultanta sil, da se telo giblje premo enakomerno. Mislil je pač na voz, ki ga vleče konj, a je trenje popolnoma spregledal. I. Newton je osnovne zakone mehanike preskusil najprej na gibanju planetov okoli Sonca, pri katerem ni trenja. Dandanes lahko delamo poskuse brez trenja, na primer, z zračno progo, pri kateri iz drobnih lukenj izteka zrak, tako da se po njej gibljejo vozički na zračni blazini.

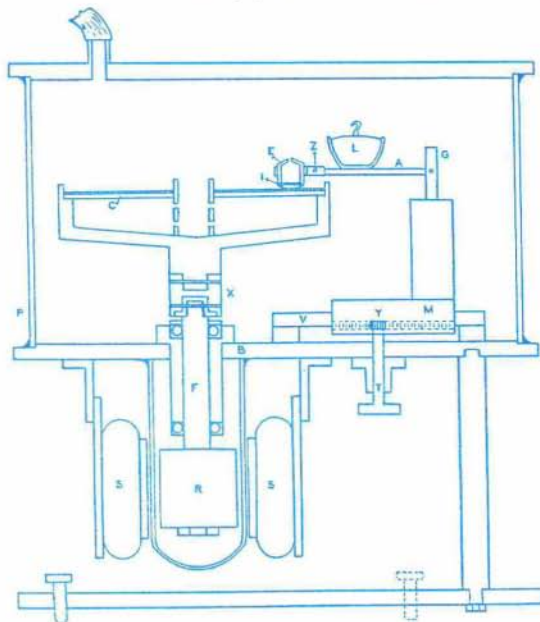
Nekaj ugotovitev o trenju je zapisal v *Beležke* Leonardo da Vinci na začetku 16. stoletja. Prva sistematična dognanja o trenju je objavil leta 1699 Francoz Guillaume Amontons, ne da bi jih sodobniki opazili. Na novo jih je ugotovil francoski vojaški inženir Charles Augustine de Coulomb leta 1785. Njegove ugotovitve je izpopolnil francoski general A.J. Morin leta 1830. Tedaj so mislili, da je koeficient trenja neodvisen od hitrosti, ker so pač merili pri razmeroma majhni hitrosti. Šele pozneje so Anglež Francis Galton in drugi spoznali, da koeficient trenja z naraščajočo hitrostjo pojema in da pri zelo majhni hitrosti preide v koeficient lepenja (slika 2). Da je koeficient trenja na ledu manjši kot na drugih sorodnih snoveh zaradi znižanja ledišča pri povišanem tlaku, je trdil Osborne Reynolds leta 1901.



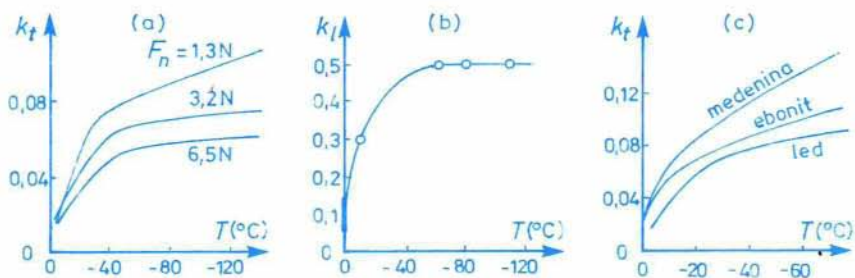
Slika 2. Odvisnost koeficienta trenja kovine na tej kovini od hitrosti. Križca kaže ta podatek A.J. Morina, krožci pa merjenja F. Galtona. Danes vemo, da dobimo tak izid samo pri običajnih kovinskih površinah, koeficient trenja za kovinski telesi z zelo čistima površinama je mnogo večji.

Kaj pa kažejo merjenja? Najbolje je pogledati v knjige in revije, saj poskusi te vrste niso preprosti. Večinoma sicer ne najdemo tistega, kar iščemo, a na srečo naletimo na to kdaj pozneje, ko iščemo kaj drugega. Tako zasledimo temeljito poročilo, ki sta ga F.P.Bowden in T.P.Hughes v članku *The mechanism of sliding on ice and snow* (Mehanizem drsenja po ledu in snegu) objavila v *Proceedings of the Royal Society* (Razpravah Kraljeve družbe, to je angleške akademije znanosti) leta 1939.

Bowden in Hughes, sicer člana laboratorija za fizikalno kemijo v Cambridgeu, sta delala poskuse na raziskovalni postaji na sedlu Jungfraujoch 3346 metrov nad morjem v švicarskih Alpah. V ta namen so izkopali v sneg votlino, v kateri se temperatura ni nikoli dvignila čez -3°C . Za poskuse so zgradili posebno napravo (slika 3). V njej je elektromotor (RS) okoli navpične osi vrtel vodoravno ploščo (C). Z gredjo (F) so jo toplotno izolirali od motorja. Plošča je bila votla in jo je bilo mogoče posebej hladiti, tudi z utekočinjenim zrakom. Zgoraj so nanjo pritrdili ledeno ali snežno podlago. Nad njo je spodnji del ročice (A) nosil telo iz ledu ali druge snovi (I), ki je drselo po plošči. Z vijakom (TY) so lahko ročico prestavljali bližje ali dalje od osi. Na zgornji del ročice so polagali uteži (L) in tako spreminjali silo, pravokotno na



Slika 3. Naprava F.P.Bowdena in T.P.Hughesa iz leta 1939



Slika 4. Merjenja F.P.Bowdena in T.P.Hughesa iz leta 1939: temperaturna odvisnost koeficienta trenja za led na ledu pri treh različnih obremenitvah (a), koeficienta lepenja za led na ledu (b) in koeficienta trenja za ebonitno in medeninasto smučko na ledu (c). Pri ponovitvi so merjenja v enakih okoliščinah večkrat dala nekoliko drugačen izid in so navedena povprečja za več merenj.

podlago. Ročico je nit (Z) povezovala z vzmetjo v obliki traku, na katero so pritrdili zrcalce in nanj usmerili ozek svetlobni curek. Odklon curka na steni je meril silo trenja. Vse skupaj so lahko pokrili s steklenim poveznikom (P), iz katerega so izsesali zrak. Pokazalo se je, da je bil poveznik odveč. Zrak je bil tako čist, da se površina teles na zraku ni nič umazala. Pri merjenju sile trenja je telo drselo po ledu ali snegu večinoma s hitrostjo 4 m/s.

Najprej so se prepričali, da je koeficient trenja neodvisen od velikosti stične ploskve. Nato so merili temperaturno odvisnost koeficienta trenja ledu na ledu. Pri zelo nizki temperaturi je meril ta koeficient 0,11 in je bil le okoli dvakrat manjši od koeficienta trenja sorodnih snovi; koeficient trenja kalcita po kalcitu meri na primer 0,2. Pri temperaturi okoli -40°C se je koeficient trenja ledu po ledu značilno spremenil, za 30 % pri spremembi temperature za deset stopinj (slika 4a). Koeficient trenja drugih snovi se le neznatno spremeni pri tolikšni temperaturni spremembi, pri kovinah je sprememba celo zanemarljiva. Podobno temperaturno odvisnost je kazal tudi koeficient lepenja ledu na ledu (slika 4b).

Koeficient trenja drugih snovi na ledu so merili, ker jih je zanimal vpliv toplotne prevodnosti. Poskuse so delali z medeninasto in ebonitno smučko z dolžino 1,5 cm, širino 0,5 cm in debelino 0,5 cm. Pri temperaturi 0°C je bil koeficient trenja za obe smučki skoraj enak. Pri nižji temperaturi pa je bil za ebonit, ki je toplotni izolator, manjši kot za medenino (slika 4c). Pri višji temperaturi - smučki so tudi segreli na 10°C - je bil koeficient trenja za medenino manjši kot za ebonit. Naposled so uporabili tudi votlo ebonitno smučko, pri kateri so toplotno prevajanje izdatno izboljšali, če so vanjo natočili

živo srebro. Koeficient trenja se je povečal v nekaterih primerih celo za 70 %, ko so to naredili.

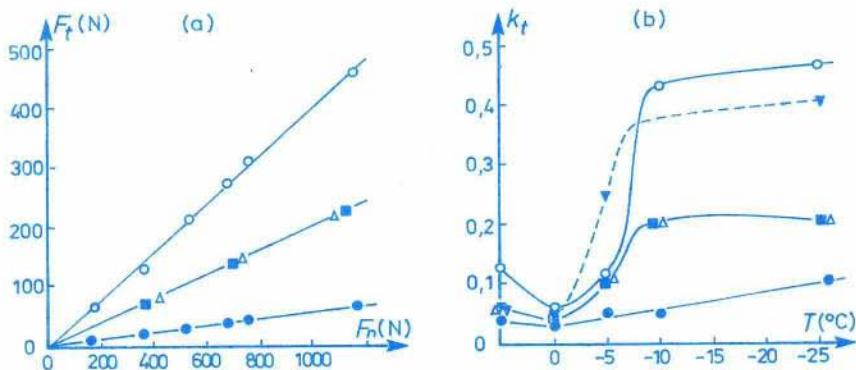
Nato so preverili učinek voska. Iz lesa hikorija, severnoameriškega oreha, so izdelali 4,5 cm dolgo, 1,3 cm široko in 0,2 mm debelo smučko. Pri temperaturi -3°C se je koeficient trenja lesene smučke zmanjšal od 0,08 na 0,03, koeficient trenja kovinske smučke pa samo od 0,03 na 0,025, ko so smučko namazali.

Merili so tudi električni upor med drobno elektrodo v smučki in podlago iz ledu, ki so mu dodali pred strditvijo nekaj kalijevega klorida. Pri temperaturi okoli -10°C je bil upor razmeroma velik, čeprav je bil koeficient trenja majhen. Blizu ledišča pa se je upor stokrat zmanjšal. Pri nižji temperaturi je sicer nastala plast vode, a le na ločenih majhnih predelih. V bližini ledišča pa je nastala plast vode po vsej površini ledu. Njena debelina je bila tako majhna, da je ni bilo mogoče videti. S podatkom za koncentracijo kalijevega klorida so z izmerjenim električnim uporom ocenili debelino plasti na 0,07 mm.

Poskusi s smučko na podlagi iz snega so dali podobne izide, le da je bil koeficient trenja večji kot na ledeni podlagi. Za povozčeno leseno smučko so namerili na ledu koeficient trenja 0,04, na snegu pa 0,09. Pretežni del tega povečanja so pripisali dodatni sili zaradi odrivanja snega.

Nekaj poskusov so naredili na prostem s pravimi smučmi. Par smučí iz hikorija so povezali, nanju postavili breme in ju z vzmetno tehtnico vlekli s hitrostjo 10 cm/s. Za koeficient trenja so namerili 0,06, za koeficient lepenja pa 0,08. Po nekajkratni vožnji po isti sledi sta se zmanjšala oba, koeficient trenja in koeficient lepenja. Oba koeficienta sta bila za prave smučí manjša kot za model smučke.

Po drugi svetovni vojni je F.P.Bowden nadaljeval z delom na Inštitutu za raziskovanje snega in plazov na sedlu Weissfluhjoch nad Davosom. O tem je poročal v članku *Friction on snow and ice* (Trenje na snegu in ledu) leta 1953 v isti reviji. To pot se je omejil na prave smučí na snegu. Uporabil je smučí, katerih drsno ploskev je prevlekel s smučarskim lakom, z norveškim in s švicarskim smučarskim voskom in obložil s plastično snovjo politetrafluoretilenom. Pri temperaturi -11°C je nameril za te smučí po vrsti koeficiente trenja 0,42; 0,2; 0,2 in 0,05 (slika 5a). Tudi pri smučeh je raziskal temperaturno odvisnost koeficienta trenja in opazil, da je pri znižanju temperature od -5 na -10°C koeficient trenja izdatno zrasel (slika 5b). O izrazitem povečanju koeficienta trenja za smučí in sani pri zelo nizki temperaturi so poročali že prej številni polarni raziskovalci, na primer J.M.Scott in F.Nansen. Pri temperaturi med -30 in -40°C se jim je zdelo, da se gibljejo smučí in



Slika 5. Merjenje F.P.Bowdena iz leta 1953: sila trenja v odvisnost od obremenitve, koeficient trenja je konstanten (a) in temperaturna odvisnost koeficienta trenja za smuči na snegu (b): ○ lakirana drsna ploskev, ▽ namazana s parafinom, △ namazana s švicarskim smučarskim voskom, norveškim smučarskim voskom, ● obložena s politetrafluoretilenom.

sani po pesku. Zaradi tega je Bowden meril tudi silo trenja smuči na pesku in ugotovil, da zares ni mnogo večja kot na snegu pri nizki temperaturi. Raziskal je še vpliv površinske napetosti in ugotovil, da so za oblogo smuči pripravne snovi, ki jih voda ne omoči.

* * *

Opisana merjenja pričajo, da imata led in sneg pri zmernih temperaturah pod ničlo razmeroma majhen koeficient trenja, ker nastane med ledom ali snegom in drsečim telesom tanka vodna plast. Kako nastane ta plast, če je ne povzroči znižanje ledišča pri povišanem tlaku? Nastane zaradi dela sile trenja. Ob drsenju po ledu se namreč sprošča toplota, zaradi katere se zviša temperatura do ledišča in se tanka plast ledu stali. Čeprav del toplote nekoristno odteče v okolico, preostali del zadostuje, da nastane plast vode, ki je pri nizki temperaturi zelo tanka in pri nekoliko višji temperaturi debelejša. V bližini ledišča utegne biti plast še nekoliko debelejša zaradi znižanja ledišča pri povišanju tlaka. Prepričajmo se o tem s preprostim računom, ki se naslanja na Bowdenovega in Hughesovega.

Vzemimo, da se pri temperaturi $-10\text{ }^{\circ}\text{C}$ smuča smučar z maso 70 kg na več kot 2 m dolgih in v povprečju 7 cm širokih smučeh. Pri koeficientu trenja 0,05 se mora klanec na 100 metrih spustiti za več kot 5 m, se pravi, da mora biti njegov nagib večji kot okoli 3° . Pri blagem nagibu dobimo silo trenja, ko težo 700 newtonov pomnožimo z 0,05, torej $F_t = 35\text{ N}$. Ko se

smuči premaknejo za 1 cm, opravi ta sila delo $35 \text{ N} \cdot 0,01 \text{ m} = 0,35 \text{ J}$. Zaradi dovedenega dela se segreje led do ledišča in stali. Izgub toplote ni treba upoštevati, ker traja premik zelo kratek čas. Kilogramu ledu je treba dovesti 2100 joulov toplote, da ga segrejemo za eno stopinjo, in 335 000 joulov, da ga pri temperaturi 0°C stalimo. Skupaj da to $(2100 \cdot 10 + 335\,000)$ joulov = $= 356\,000 \text{ J}$. Kako debelo plast ledu stali toplota $0,35 \text{ J}$ na površini $2 \cdot 2 \text{ m} \cdot 0,07 \text{ m} = 0,28 \text{ m}^2$? Ker je gostota ledu približno 1000 kg/m^3 , velja enačba $0,35 \text{ J} = 356\,000 \text{ Jkg}^{-1} \cdot 1000 \text{ kgm}^{-3} \cdot 0,28 \text{ m}^2 \cdot d$ in dobimo za debelino naposled $d = 3,5 \cdot 10^{-9} \text{ m}$. Premer molekule vode meri nekaj 10^{-10} m , tako da nastane plast vode z debelino deset in več molekul. To zadostuje, da se gibljejo smuči po tanki plasti kapljavine in je zaradi tega koeficient trenja razmeroma majhen.

Naredili smo le zelo grobo oceno, ki pa ji zaupamo, ker smo jemali neugodne podatke. Računali smo, kot da bi se sneg dotikal vse drsne ploskve smučke. Podatka o efektivni površini, na kateri se sneg zares dotika drsne ploskve, ni, toda merjenja pri kovinah so pokazala, da je efektivna površina pogosto celo tisočkrat manjša od drsne ploskve. Pri snegu, ki je mehkejši, bi morda lahko računali z desetkrat manjšo efektivno površino ($0,028 \text{ m}^2$), kar bi dalo desetkrat debelejšo plast vode. Najbrž bi smeli vzeti nekajkrat večjo pot kot 1 cm, ne da bi bilo treba upoštevati izgubo toplote. V tem primeru pa bi morali upoštevati tudi hitrost smuči.

Tako smo opisali poskuse in naredili približne račune, ki podpirajo misel, da se lahko smučamo in drsamo zato, ker se zaradi trenja pod smučmi ali drsalkami stali sneg ali led in nastane tanka plast vode. Podrobnosti o tem pojavu dandanes skrbno raziskujejo v laboratorijih tovarn smuči in smučarskih mašč. A najbrž tudi razglabljanje o starejših poskusih ni bilo dolgočasno.

Janez Strnad

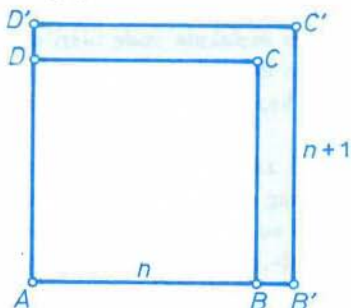
V fizikalnih knjigah je razširjena napačna trditev, da je led spolzek zaradi tanke plasti vode, ki nastane, ker se led stali pod povišanim tlakom. Led je zares spolzek zaradi tanke plasti vode, toda ta nastane zaradi toplote, ki se razvije pri trenju, ne zaradi povišanega tlaka. Taljenje zaradi povišanega tlaka je stranski pojav kvečjemu pri drsanju in nepomembno pri smučanju in drugih primerih drsenja po ledu in snegu...

K.S.Mendelson, *American Journal of Physics* **53** (1989) 393

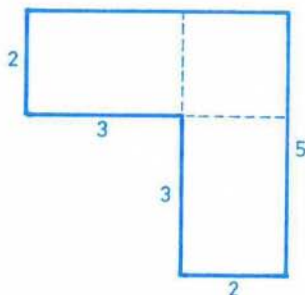
GEOMETRIJSKO SEŠTEVANJE NEKATERIH ŠTEVILSKIH VRST

(A) Aristotel v enem od svojih del piše, kako so Pitagorejci znali poiskati vsoto prvih n lihih števil z uporabo geometrije.

Vzemimo kvadrat $ABCD$ s stranico dolžine $|AB| = n$ in ga dopolnimo do večjega kvadrata $AB'C'D'$ s stranico dolžine $|AB'| = n + 1$ (slika 1).



Slika 1. Ploščina lika $BB'C'D'DC$ je enaka razliki ploščin obeh kvadratov.



Slika 2. Gnomon $G_{2,5}$.

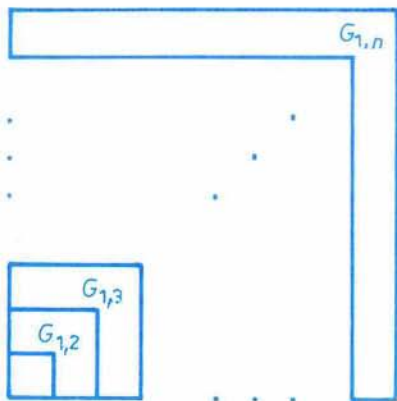
Osenčeni lik $BB'C'D'DC$ na sliki 1 so Pitagorejci imenovali **gnomon**. Bolj splošno je gnomon "širine" k in dolžine m sestavljen iz dveh pravokotnikov z osnovnico k in višino $m - k$ ter kvadrata s stranico k . Označili ga bomo s simbolom $G_{k,m}$.

Njegova ploščina meri

$$P(G_{k,m}) = 2mk - k^2 \quad (1)$$

In sedaj k nalogi. Vzemimo kvadrat s stranico dolžine 1 (lahko ga imenujemo tudi gnomon $G_{1,1}$) in mu dodajmo gnomon $G_{1,2}$, temu dodajmo gnomon $G_{1,3}$ in tako naprej do gnomona $G_{1,n}$. Na ta način smo sestavili kvadrat z osnovnico dolžine n .

Ker velja zapored: $p(G_{1,1}) = 1, p(G_{1,2}) = 3, \dots, p(G_{1,n}) = 2n - 1$, je naloga že rešena: $1 + 3 + \dots + (2n - 1) = n^2$



Slika 3.

(B) Z uporabo formule

$$1 + 2 + 3 + \dots + n = \frac{n(n+1)}{2} \quad (2)$$

ki je geometrično utemeljena na 28. strani P1, lahko izračunamo tudi vsoto bolj neobičajne številске vrste:

$$S_n = 1 \cdot 2 + 2 \cdot 3 + 3 \cdot 4 + \dots + n \cdot (n+1)$$

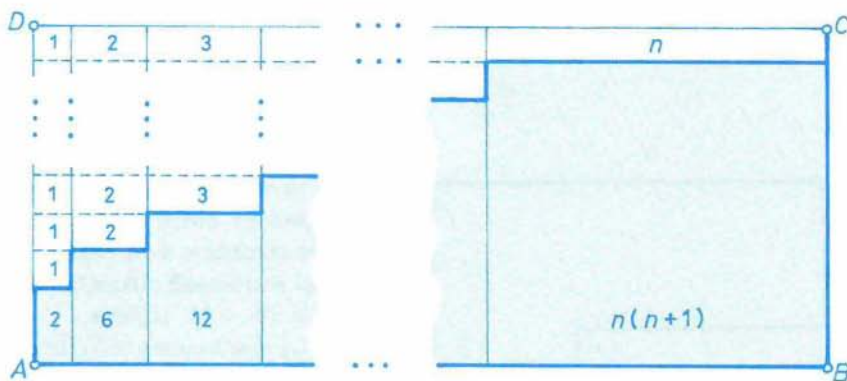
Delimo zgornjo enakost z 2

$$\frac{S_n}{2} = \frac{1 \cdot 2}{2} + \frac{2 \cdot 3}{2} + \frac{3 \cdot 4}{2} + \dots + \frac{n \cdot (n+1)}{2}$$

in za vsak sumand na desni uporabimo formulo (2). Dobimo

$$\frac{S_n}{2} = 1 + (1+2) + (1+2+3) + \dots + (1+2+\dots+n)$$

Narišimo zdaj pravokotnik $ABCD$ z osnovnico dolžine $|AB| = (1+2+\dots+n)$ in višino $(n+2)$ in ga razdelimo na pravokotnike, kot kaže slika 4.



Slika 4.

Ploščina pravokotnika $ABCD$

$$p = (1 + 2 + \dots + n)(n+2) = \frac{n(n+1)(n+2)}{2}$$

je vsota ploščine osenčenega lika pod stopničasto krivuljo

$$p_1 = 1 \cdot 2 + 2 \cdot 3 + 3 \cdot 4 + \dots + n(n+1)$$

in ploščine lika nad njo

$$p_2 = 1 + (1+2) + (1+2+3) + \dots + (1+2+\dots+n)$$

Zato velja $p(ABCD) = S_n + \frac{1}{2}S_n = \frac{3}{2}S_n$. Od tod pa že dobimo iskano formulo:

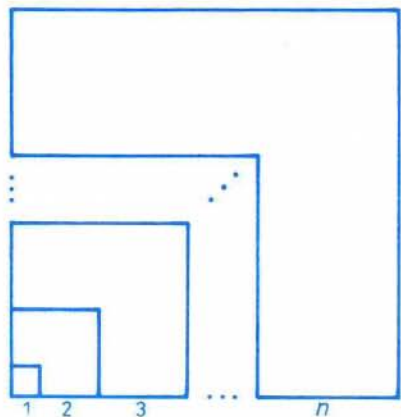
$$S_n = 1 \cdot 2 + 2 \cdot 3 + 3 \cdot 4 + \dots + n(n+1) = \frac{n(n+1)(n+2)}{3}$$

Z njeno pomočjo lahko najdemo vsoto kvadratov prvih n naravnih števil. Zapišemo

$$\begin{aligned} & 1 \cdot 2 + 2 \cdot 3 + 3 \cdot 4 + \dots + n \cdot (n+1) = \\ & = 1(1+1) + 2(2+1) + 3(3+1) + \dots + n(n+1) = \\ & = (1^2 + 2^2 + 3^2 + \dots + n^2) + (1+2+3+\dots+n) \end{aligned}$$

in že dobimo

$$\begin{aligned} 1^2 + 2^2 + 3^2 + \dots + n^2 &= \frac{n(n+1)(n+2)}{3} - \frac{n(n+1)}{2} = \\ &= \frac{n(n+1)(2n+1)}{6} \end{aligned}$$



(C) Za konec izpeljimo še formulo za vsoto kubov prvih n naravnih števil na način, ki ga je v svojem pomembnem delu Fakhri opisal arabski matematik Alkarkhi na prehodu iz 10. v 11. stoletje.

Naj ima kvadrat $ABCD$ osnovnico $|AB| = (1+2+\dots+n)$. Razdelimo ga na n gnomonov

Slika 5.

$$G_{1,1}, G_{2,1+2}, G_{3,1+2+3}, \dots, G_{n,1+2+\dots+n}$$

Ploščina k -tega gnomona tega zaporedja je po (1) in (2) enaka

$$2k \frac{k(k+1)}{2} - k^2 = k^3$$

Torej je vsota ploščin vseh gnomonov ravno vsota kubov prvih n naravnih števil.

$$1^3 + 2^3 + \dots + n^3 = (1 + 2 + \dots + n)^2 = \left[\frac{n(n+1)}{2} \right]^2$$

Gregor Pavlič

Literatura

- [1] M. Sevdíć, *Matematiška čitanka*, Nakladni zavod Hrvatske, Zagreb 1947
- [2] D.E. Smith, *history of mathematics*, Dover publ., New York 1923

PRESEK

list za mlade matematike, fizike, astronome in računalnikarje
18.letnik, šolsko leto 1990/91, številka 4, strani 193– 256

UREDNIŠKI ODBOR: Vladimir Batagelj, Tanja Bečan (jezikovni pregled), Dušica Boben (pisma bralcev, stavljenje teksta), Vilko Domajnko, Darjo Felda (tekmovanja), Bojan Golli, Marjan Hribar, Sandi Klavžar (računalništvo), Damjan Kobal, Edvard Kramar (Presekova knjižnica), Boris Lavrič (matematika, odgovorni urednik), Andrej Likar (fizika), Matija Lokar, Franci Oblak, Peter Petek, Marko Petkovšek (glavni urednik), Pavla Ranzinger (astronomija), Marjan Smerke (svetovalec za fotografijo), Miha Štalec (risbe), Ciril Velkovrh (urednik, novice), Marija Vencelj.

Dopise pošiljajte in list naročajte na naslov: Društvo matematikov, fizikov in astronomov SR Slovenije - Podružnica Ljubljana - Komisija za tisk, Presek, Jadranska c. 19, 61111 Ljubljana, p.p. 64, tel (061) 265-061/53, št. žiro računa 50101-678-47233. Naročnina za šolsko leto 1990/91, vplačana po 1.1.1991, je za posamezne naročnike 150.-din, za skupinska naročila šol 120.- din, posamezna številka 30.- din (24.- din).

List sofinancirajo RKRDT, RKVITK in RKK

Ofset tisk Časopisno in grafično podjetje DELO, Ljubljana

© 1991 Društvo matematikov, fizikov in astronomov Slovenije – 1050

RAZDELIVA SI VINO

V četrti številki 14. letnika *Preseka* je bila pod gornjim naslovom objavljena tale starodavna naloga:

“Dva prijatelja imata osem litrov vina v osemilitrski posodi. Poleg tega imata še petlitrsko in trilitrsko steklenico. Vino bi si rada razdelila na pol. Kako naj samo s prelivanju med temi tremi posodami razdelita vino?”

Anekdota pravi, da je ta naloga usodno vplivala na življenjsko pot znamenitega francoskega matematika Poissona (*Siméon Denis Poisson*, 1781 — 1840), ki da je kot deček kazal na vseh področjih dokaj omejene sposobnosti. Ko pa je samostojno rešil nalogo o delitvi vina s pretakanjem med različno velikimi posodami, se je ogrel za matematiko in se z njo ukvarjal vse življenje.

Nalogo lahko posplošimo. Vzemimo posode A , B , C s celoštevilskimi prostorninami a , b , c , pri čemer je a sodo število in je $c \leq b$. Prva posoda naj bo polna, drugi dve prazni. Zanima nas, ali lahko vsebino posode A razpolovimo samo s pretakanjem med danimi posodami.

O izražanju: Naši predniki so za ravnanje z vinom in z drugimi tekočinami razvili obsežno in tenkočutno izrazje, o čemer pričajo glagoli *točiti*, *dotočiti*, *iztočiti*, *natočiti*, *odtočiti*, *potočiti*, *pretočiti*, *pritočiti*, *raztočiti*, *stočiti*. Žal med njimi ni takega, ki bi v celoti ustrežal potrebam naše naloge. Zadovoljili se bomo z zvezo “*natočiti iz X v Y*”, ki naj pomeni “*s pretakanjem iz X v Y izprazniti X ali napolniti Y*”.

Iz povedanega sledi, da je pred vsakim pretakanjem in po njem vsaj ena posoda polna, ali pa je ena prazna.

Trenutno razporeditev vina po posodah A , B , C opišimo z urejeno trojico celih nenegativnih števil (x, y, z) , kjer je

$$x + y + z = a \quad \text{in} \quad x \leq a, \quad y \leq b, \quad z \leq c.$$

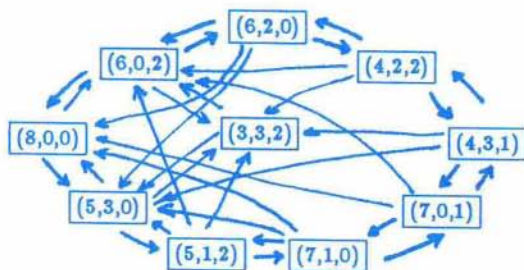
Začetno stanje je tedaj podano s točko $(a, 0, 0)$, rešitev naloge pa je vsaka točka, ki jo lahko dosežemo s pretakanjem in ima vsaj eno koordinato enako $\frac{a}{2}$. Pretakanje med posodami lahko opišemo z usmerjenimi povezavami točk. Dobimo usmerjeni graf; imenujmo ga *graf naloge* $[a, b, c]$ ali kar *graf* $[a, b, c]$.

V tem članku se bomo ukvarjali izključno z nalogami, v katerih je $b + c \leq a$. Največjo skupno mero prostornin b in c bomo označevali z d . Upoštevali bomo, da je tedaj $b = b'd$ in $c = c'd$, kjer sta si števili b' in c' tuji.

Bralcu predlagam, da za ogrevanje nariše grafa $[20, 9, 6]$ in $[28, 15, 10]$

in ju primerja z grafom $[8, 3, 2]$. Videl bo, da imajo vsi trije enako število točk in isto število povezav in da so si tudi sicer zelo podobni. Pozneje bomo videli, da sta za to "odgovorna" pogoj $b + c \leq a$ in enakost razmerij $b : c$.

Slika 1. Graf $[8, 3, 2]$. V vsaki točki je vsaj ena posoda polna, ali pa je ena prazna. Naloga ima dve rešitvi: $(4, 2, 2)$ in $(4, 3, 1)$.



V nalogi $[20, 9, 6]$ lahko pretočimo naenkrat le 3, 6 ali 9 litrov vina, v nalogi $[28, 15, 10]$ pa le 5, 10 ali 15 litrov. To ni naključje; velja namreč

IZREK 1. Če je $b + c \leq a$, sta prostornini vina v posodah B in C večkratnika največje skupne mere teh dveh posod.

Trditev je očitno pravilna za začetno točko $(a, 0, 0)$. In če velja za točko (x_n, y_n, z_n) , velja tudi za točko $(x_{n+1}, y_{n+1}, z_{n+1})$, ki jo iz prejšnje dobimo z enim natakanjem. Zaradi privzetka $b + c \leq a$ namreč lahko pretočimo iz poljubne posode v katero koli drugo posodo le večkratnik največje skupne mere d . Tako se veljavnost izreka prenese s točke $(a, 0, 0)$ na vsako drugo točko grafa.

Prostornina vina v posodi A je največja v točki $(a, 0, 0)$, najmanjša pa je takrat, ko sta posodi B in C polni: $a - b - c \leq x \leq a$. Ti oceni skupaj z izrekom 1 povesta, da so vrednosti x med števili $x_k = a - kd$, kjer je $k = 0, 1, \dots, b' + c'$. Pokazali bomo, da ob pametnem pretakanju lahko prostornina vina v posodi A doseže vsako izmed vrednosti x_k . Uporabimo postopek P1, ki je opisan na sliki 2.

V postopku P1 je posoda B pred vsakim natakanjem iz A v B prazna, po njem pa je polna, saj bi sicer posoda A bila prazna in bi zaradi $x = 0$ in $y < b$ ob privzetku $b + c \leq a$ veljalo $x + y + z < a$. Zato se pri vsakem natakanju iz A prostornina x zmanjša za b . Podobno uvidimo, da se pri vsakem natakanju v A prostornina x poveča za c .

Naj bo (x_m, y_m, z_m) m -ta točka, ki jo obiščemo v postopku P1. Očitno je $x_1 = a$. Pokažimo, da za vsako drugo dovoljeno vrednost m velja:

Če je $m = 2k$ ali $m = 2k + 1$, je $x_m = a - b - c + (kc) \bmod (b + c)$, kjer je k ustrezno naravno število in je $(kc) \bmod (b + c)$ ostanek pri deljenju $kc : (b + c)$.

- 1° Trditev je pravilna za $m = 2$, saj $(1 \cdot c) \bmod (b + c) = c$ in je $x_2 = a - b$.
- 2° Naj bo $m = 2k + 1$. Iz opisa postopka P1 je razvidno, da v točko z liho zaporedno številko lahko pridemo le z natakanjem iz B v C . Po formuli za x_m je $x_{2k+1} = x_{2k}$ in tako je tudi prav, saj pri natakanju iz B v C pustimo vino v posodi A pri miru.
- 3° Iz točke z zaporedno številko $m = 2k + 1$ stopimo v naslednjo točko. Pokazati moramo, da je

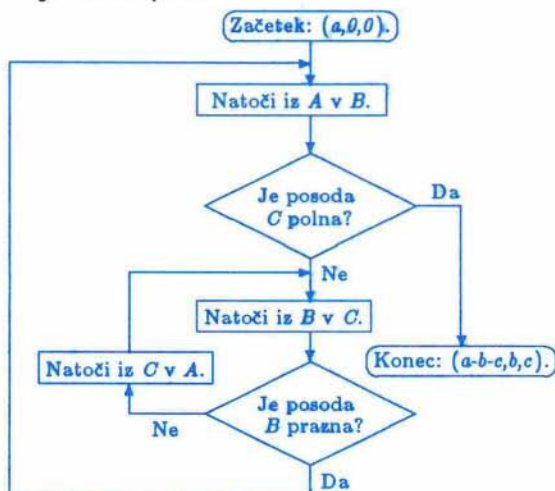
$$x_{m+1} = a - b - c + ((k + 1)c) \bmod (b + c).$$

Poglejmo v posodo B . Če je prazna, je $x_m \geq a - c$. Od tod sledi ocena $(kc) \bmod (b + c) + c \geq b + c$, zaradi katere je

$$(kc) \bmod (b + c) + c - (b + c) = ((k + 1)c) \bmod (b + c),$$

$$\begin{aligned} x_{m+1} &= x_m - b = x_m + c - (b + c) \\ &= a - b - c + (kc) \bmod (b + c) + c - (b + c) \\ &= a - b - c + ((k + 1)c) \bmod (b + c). \end{aligned}$$

Za natakanje iz A v B je trditev pravilna.



Slika 2. Postopek P1. Iz A lahko odtočimo le b litrov vina, v A ga lahko dotočimo le c litrov naenkrat. V točko z liho zaporedno številko lahko pridemo le z natakanjem iz B v C .

Če pa posoda B ni prazna, pustimo vino v njej pri miru in po natakanju iz C v A je $x_m + c < a$. Potem je

$$(kc) \bmod (b+c) + c < b+c, \text{ zato} \\ (kc) \bmod (b+c) + c = ((k+1)c) \bmod (b+c) \text{ in je}$$

$$x_{m+1} = x_m + c = a - b - c + (kc) \bmod (b+c) + c \\ = a - b - c + ((k+1)c) \bmod (b+c).$$

Formula za x_{m+1} velja tudi pri natakanju iz C v A .

Sedaj znamo izračunati prostornino x_m za vsako točko, ki jo obiščemo v postopku P1. Ne vemo pa še, ali ta postopek doseže vse točke grafa; ne vemo niti, ali se sploh kdaj konča. Naslednji premislek pokaže, da je odgovor na obe vprašanji pritrdilen.

Naj bosta b' in c' prostornini posod B in C , izmerjeni z največjo skupno mero teh dveh posod. Števili b' in c' sta si tedaj tuji in ko preteče k vrednosti $1, 2, \dots, b' + c'$, zavzame izraz $a - b - c + (kc) \bmod (b+c)$ natanko $b' + c'$ različnih vrednosti.

Denimo, da to ni res. Potem obstajata v zaporedju $1, 2, \dots, b' + c'$ različni števili k_1 in k_2 , za kateri dajeta izraza $k_1 c$ in $k_2 c$ pri deljenju z $b+c$ enak ostanek. Potem je razlika $k_1 c - k_2 c$ deljiva z $b+c$ in je produkt $(k_1 - k_2)c'$ deljiv z $b' + c'$. Ker sta si števili c' in $b' + c'$ tuji, je razlika $k_1 - k_2$ deljiva z $b' + c'$. To pa je zaradi ocene $k_1 - k_2 < b' + c'$ možno le, če je $k_1 = k_2$. Res so za $k = 1, 2, \dots, b' + c'$ vse vrednosti $a - b - c + (kc) \bmod (b+c)$ med seboj različne.

Brž ko k doseže vrednost $b' + c'$, je

$$x_m = a - b - c + ((b' + c')c) \bmod (b+c) \\ = a - b - c + ((b+c)c') \bmod (b+c) \\ = a - b - c.$$

Posodi B in C sta tedaj polni in postopek P1 se konča.

Iz povedanega sledi, da doseže v postopku P1 prostornina vina v posodi A vsako izmed vrednosti $x_k = a - kd$, kjer je $k = 0, 1, \dots, b' + c'$.

Vrednosti $x = a$ in $x = a - b - c$ nastopita le v prvi in zadnji točki, vse druge vrednosti x pa nastopijo po dvakrat. Graf $[a, b, c]$ ima potemtakem $2(b' + c')$ točk. Preštejmo še povezave. V točkah $(a, 0, 0)$ in $(a - b - c, b, c)$ izvirata po dve, v točkah $(a - b, b, 0)$ in $(a - c, 0, c)$ izvirajo po tri, v vsaki

izmed preostalih točk pa po štiri. Imamo

IZREK 2. Če je $b+c \leq a$, ima graf naloge $2(b'+c')$ točk in $8(b'+c')-6$ povezav.

Vidimo, da ob pogoju $b+c \leq a$ podatek a ne vpliva na število točk. Tako ima na primer graf $[1734, 243, 162]$ deset točk – toliko kot graf $[1734, 3, 2]$ ali pa graf $[8, 3, 2]$.

Po vsem, kar smo ugotovili o grafu pretakanja, lahko nalogo o delitvi vina povemo takole:

Ali je enačba $a - kd = a/2$ z neznanko k rešljiva v številih

$1, 2, \dots, b' + c'?$

Izračunamo $k = \frac{a}{2d}$ in odgovor zapišemo v

IZREK 3. Če je $b+c \leq a$, je naloga o delitvi vina rešljiva natanko takrat, kadar prostornina $\frac{a}{2}$ ne presega vsote $b+c$ in je večkratnik največje skupne mere posod B in $\bar{C}$.

V postopku P1 smo s pretakanjem iz A v B , iz B v C in iz C nazaj v A obiskali vsako točko grafa natanko enkrat. To pa lahko naredimo tudi s postopkom — imenujmo ga P2, ki je zasnovan na strategiji pretakanja $A \rightarrow C \rightarrow B \rightarrow A$. Bralec se lahko sam prepriča, da iz točke $(a, 0, 0)$ do rešitve (če ta sploh obstaja) vodijo tudi druge poti. Vendar je najkrajša tista, ki jo kaže postopek P1, ali pa tista, ki jo kaže postopek P2. Njuni dolžini se da izračunati, vendar tega vprašanja tokrat ne bomo načenjali.

Franč Savnik

PRAVILNI OSEMNAJSTKOTNIK — Rešitev s str. 159

Poglejmo na sliko 2 iz naloge, zapišimo ploščino trikotnika ABC na dva načina

$$p = (1/2)ah = (1/2)Rv, \quad h = \overline{CF}$$

in izrazimo $v = ah/R$. Pravokotni trikotnik CEH ima ob oglišču E kot 30° , zato je

$$CE = 2CH = 2v = 2ah/R$$

in tedaj

$$a\sqrt{3}/2 = \overline{EF} = \overline{CF} - \overline{CE} = h - 2ah/R = h(1 - 2a/R)$$

Po Pitagorovem izreku je $h^2 = R^2 - a^2/4$, torej s kvadriranjem prejšnje enakosti dobimo

$$3a^2/4 = (R^2 - a^2/4)(1 - 2a/R)^2$$

Postavimo $a = kR$ in po kratkem računu sledi

$$k^4 - k^3 - 3k^2 + 4k - 1 = (k - 1)(k^3 - 3k + 1) = 0$$

kar nam takoj da enačbo (2), saj vemo, da $k \neq 1$.

PRAVOKOTNI TRIKOTNIK — Rešitev s str. 133

Kot ob oglišču A pravokotnega trikotnika ABC s pravim kotom v C naj meri 15° , D naj bo zrcalna slika točke B glede na nosilko katete AC , BE pa bodi višina na AD v trikotniku ABD .

Poglejmo na sliko in označimo $a = \overline{BC}$, $b = \overline{AC}$, $c = \overline{AB}$, $d = \overline{BE}$. Iz podobnosti trikotnikov ABC in BDE sledi $\overline{BD} : \overline{AB} = \overline{BE} : \overline{AC}$, torej $2a : c = d : b$ oziroma

$$2ab = cd \quad (1)$$

Ker ima pravokotni trikotnik ABE kota 30° in 60° , je $d = c/2$, iz (1) pa dobimo $c = 2\sqrt{ab}$.

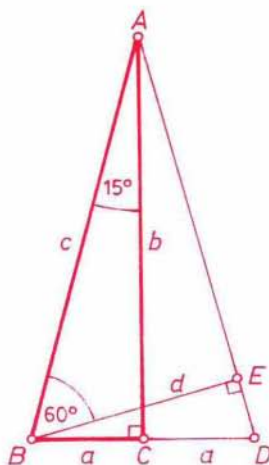
Polmer R trikotniku ABC očrtanega kroga meri pol hipotenuze c , torej $R = c/2 = \sqrt{ab}$.

To enakost lahko dobimo tudi takole: Ploščino trikotnika ABD izrazimo na dva načina

$$p = (\overline{BD}/2)\overline{AC} = (\overline{AD}/2)\overline{BE}$$

in upoštevamo, da je $\overline{AD} = c$ in $d = c/2 = R$. Od tod že sledi $ab = (c/2)d = R^2$ oziroma $R = \sqrt{ab}$.

Dragoljub M. Milošević, prev. Boris Lavrič

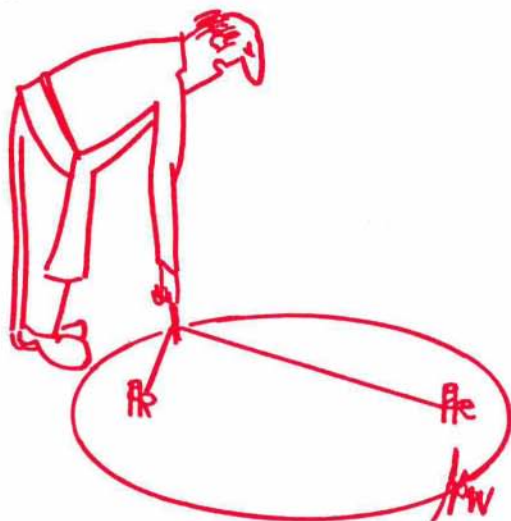


KONSTRUKCIJA ELIPSE S TRAKOM PAPIRJA

Verjetno je med številnimi definicijami elipse najbolj znana tista, ki pravi:

Elipsa je geometrijsko mesto točk v ravnini, katerih vsota razdalij od dveh fiksnih točk ravnine je konstantna.

Zato tudi ni nič čudnega, da je med konstrukcijskimi metodami za elipso najbolj poznana "vrtnarska metoda". Saj veda katera? To je tista, pri kateri vrtnar zabije v zemljo dva količka, nanju priveže primerno dolgo vrvico in s tretjim prostim količkom ob napeti vrvici, kot kaže slika 1, zariše na vrtu lepo elipsno gredico.



Slika 1.

Manj znana je "papirčkova metoda", konstrukcija elipse s pomočjo papirnatega traku, čeprav jo je že v 5. stoletju učil bizantinski matematik Proklos. Prikazana je na sliki 2, nekoliko posplošena pa se glasi:

Naj bodo A , B , C tri fiksne točke premice l . Če se premica l giblje tako, da dve od točk drsita vzdolž dveh med seboj pravokotnih premic p in q , vzdolž vsake po ena, opiše tretja točka elipso s središčem v presečišču premic p in q . Temena elipse ležijo na premicah p in q .

Dokaz je preprost. Pravokotni premici p in q izberimo za koordinatni osi, na drseči premici l pa izberimo oznake tako, da bo točka A drsela po premici

$$|x| = a \cos \alpha \quad (1)$$

$$|y| = b \sin \alpha$$

Predznak koordinate je odvisen od kvadranta, v katerem se točka C nahaja. Iz (1) sledi

$$\frac{|x|}{a} = \cos \alpha$$

$$\frac{|y|}{b} = \sin \alpha$$

in od tod enačba elipse

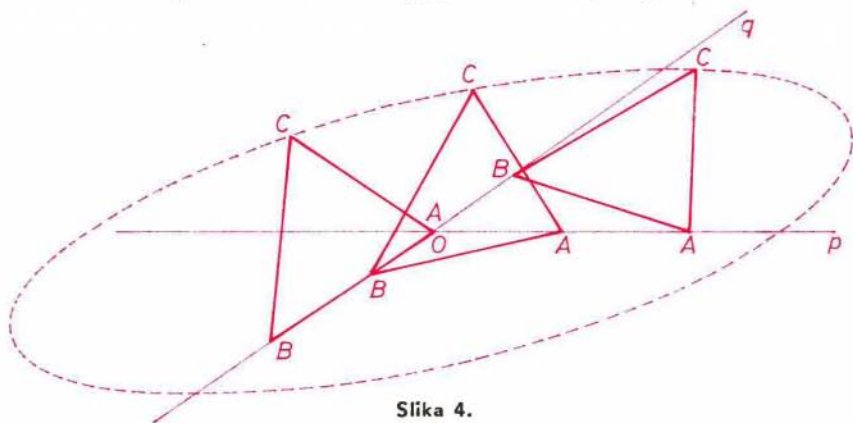
$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$$

Točka C torej res opiše elipso s središčem v presečišču premic p in q in z osema na teh dveh premicah. Njeni polosi sta a in b , oddaljenosti točke C od točk A in B , ki drsita po premicah p in q .

Omenimo še, da je v 17. stoletju holandski matematik *Franciscus van Schooten* mlajši, našel naslednjo, izredno lepo posplošitev Proklosove trditve:

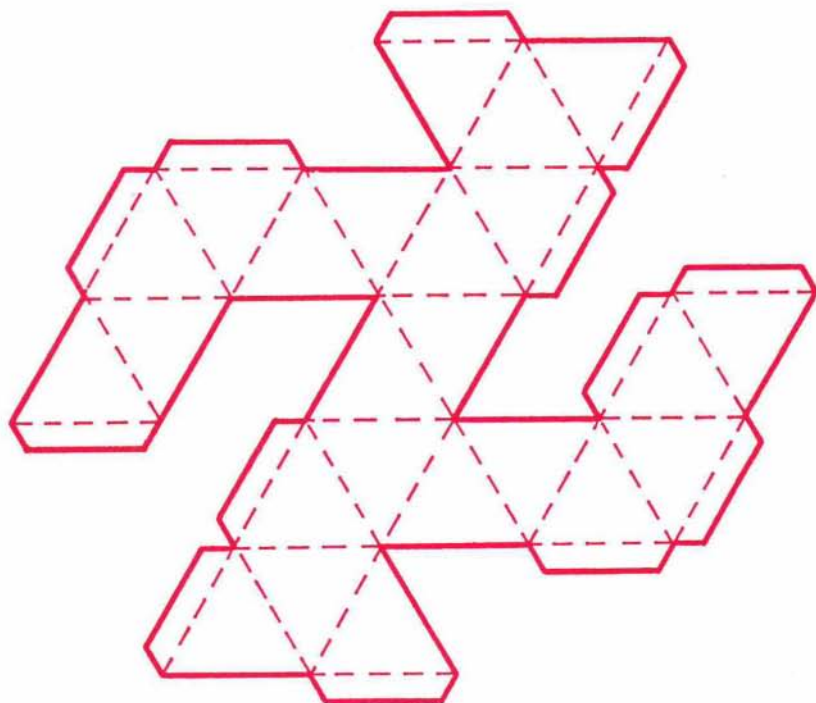
Če drsita v ravnini dve oglišči togega trikotnika po dveh sekajočih se premicah, opiše tretje oglišče elipso s središčem v presečišču obeh premic.

Prikazana je na sliki 4, več o njej pa morda kdaj drugič!



Slika 4.

STELLA OCTANGULA – Rešitev s str. 160



Vilko Domajnko

KAKO RAZDELITI? - Rešitev iz prejšnje številke Preseka, st. 190

Nanizajmo vsa možna (in enako verjetna) zaporedja treh nadaljnjih metov kovanca, kjer s C označimo cifro z G pa grb: CCC, CCG, CGC, GCC, CGG, GCG, GGC, GGG. B bi dobil 1000 ducatov le v prvem primeru, v ostalih sedmih pa bi jih dobil A, torej bi bilo treba znesek razdeliti v razmerju 7 proti 1. Tako A-ju pripada 875 ducatov, B-ju pa 125 ducatov.

Vilko Domajnko

NENAVADEN PREIZKUS

Ker je ta članek nastal na pobudo in kot odgovor na pismo našega bralca Bojana Žižka, ga začnimo z njegovim stavkom:

"Preizkus deljenja lahko opravimo z množenjem. Kaj pa množenje? Ali lahko na kakšen način preverimo pravilnost množenja? Seveda brez računalnika in z uporabo enostavnejših operacij, kot je prvotno množenje?"

Pa najprej na primerih predstavimo idejo, ki nam jo je posredoval Bojan Žižek.

Zanima nas, ali smo pravilno zmnožili: $77 \times 9 = 693$. Opišimo naš nenavadni preizkus:

$$\begin{aligned}77 \times 9 &= 693 \\(7 + 7) \times 9 &| (6 + 9 + 3) \\14 \times 9 &| 18 \\(1 + 4) \times 9 &| (1 + 8) \\5 \times 9 &| 9 \\45 &| 9 \\(4 + 5) &| 9 \\9 &= 9\end{aligned}$$

Zapišimo še nekaj primerov:

a) $25 \times 25 = 625$

$$\begin{aligned}7 \times 7 &| 13 \\49 &| 4 \\13 &| \\4 &= 4\end{aligned}$$

c) $17 \times 24 \neq 39$

$$\begin{aligned}8 \times 6 &| 12 \\48 &| 3 \\12 &| 3 \\3 &= 3\end{aligned}$$

b) $26531 \times 987 = 26186097$

$$\begin{aligned}17 \times 24 &| 39 \\8 \times 6 &| 12 \\48 &| 3 \\12 &| 3 \\3 &= 3\end{aligned}$$

d) $16 \times 9 \neq 532$

$$\begin{aligned}7 \times 9 &| 10 \\63 &| 1 \\9 &\neq 1\end{aligned}$$

Namesto vsakega števila, ki nastopa v množenju, napišemo vsoto njegovih števk. Za tako dobljena števila postopek ponovimo. Postopek ponavljamo, dokler v izrazu ne dobimo samih enomestnih števil. Na levi dobljeni števk zmnožimo. Postopek seštevanja števk ponovimo. Če je bilo množenje na začetku pravilno, bomo vselej na koncu dobili na levi in desni enaki števk.

Verjetno se to "čaranje" marsikomu zdi nenavadno, skoraj neverjetno ... Poskusite s primeri še sami! Zaman boste iskali primer, ki se ne bi iztekel "pravilno".

Pisec teh vrstic vas toplo vabi, da sami razvozlate to "skrivnost", gotovo pa jo boste lažje razkrili s pomočjo naslednjih odstavkov.

Za naravno število n , bomo s $s(n)$ označili vsoto števk števila n . Tako velja na primer $s(101) = 2$, $s(999) = 27$, ... Smiselno je napisati na primer $s(s(s(199))) = s(s(19)) = s(10) = 1$. Očitno je, da za vsako naravno število n dovolj dolga "vrsta s -ov": $s(s(s...(s(n))...))$ da število med 1 in 9. Pa označimo to število s $S(n)$. Tako je na primer $S(10) = s(10) = 1$, $S(98) = s(s(98)) = s(17) = 8$, $S(199) = 1$, itd.

S takimi oznakami se naš preizkus množenja napiše zelo enostavno:

$$\begin{aligned} p \times q &= n \\ S(p) \times S(q) &| S(n) \\ S(S(p) \times S(q)) &= S(n) \end{aligned}$$

"Skrivnost" bo torej razjasnjena, če pokažemo, da velja sklep

$$p \times q = n \Rightarrow S(S(p) \times S(q)) = S(n)$$

Poglejmo si поблиže, kaj pravzaprav pomenita $s(n)$ in $S(n)$. Zapišimo število n v obliki:

$$n = a_0 + a_1 10 + a_2 10^2 + \dots + a_l 10^l$$

kjer so $a_0, a_1, \dots, a_l$ števke, ki nastopajo v (desetiškem) zapisu števila n . Iz zapisa

$$n = a_0 + a_1(1 + 9) + a_2(1 + 9)^2 + \dots + a_l(1 + 9)^l$$

vidimo, da je

$$n = a_0 + a_1 + a_2 + \dots + a_l + 9k_0$$

pri čemer je k_0 naravno število. Torej n in $s(n)$ pri deljenju z 9 dasta enak ostanek. Od tod sledi, da je

$$n = S(n) + 9k, k \in \mathbb{N} \quad (a)$$

in $S(n)$ ostanek, ki ga dobimo pri deljenju števila n z 9. Ker vemo, da $S(n)$ ne more biti 0, namesto 0 dobimo 9.

Zdaj enakost $p \times q = n$ zapišemo s pomočjo (a):

$$\begin{aligned}(9k_p + S(p))(9k_q + S(q)) &= 9k_n + S(n) \\ 9(9k_p k_q + S(p)k_q + S(q)k_p) + S(p)S(q) &= 9k_n + S(n)\end{aligned}$$

In ker zaradi (a) velja $S(p)S(q) = S(S(p)S(q)) + 9k$, je očitno res

$$S(S(p)S(q)) = S(n)$$

Na koncu povejmo, da je preizkus bolj nenavaden in zanimiv kot uporaben - to nas pouči primer c). Če je preizkus negativen, vemo, da smo se zmotili, če pa je pozitiven, ne moremo trditi, da je množenje pravilno. Preizkus torej zna pokazati nepravilnost, pravilnost pa žal ne more potrditi.

Damjan Kobal

OBRNJENI FERMAT

Diofantska enačba

$$n^x + n^y = n^z$$

pri nobenem naravnem številu $n > 2$ ne premore rešitve s celimi števili x, y, z .

Zaradi pomanjkanja prostora dokaza ne bomo zapisali tu, pač pa na strani 251.

Boris Lavrič

POSEBNI TRIKOTNIKI

Trikotniku ABC bomo rekli *posebni trikotnik*, če se težiščnica na stranico BC , višina na stranico AC in simetrala notranjega kota ob oglišču C sekajo v isti točki. Poišči zvezo med dolžinami $a = \overline{BC}$, $b = \overline{AC}$ in $c = \overline{AB}$ stranic posebnega trikotnika ABC .

Boštjan Hostnik

ČETRTO PRAŠTEVILSKA - Rešitev s strani 175

Denimo, da je najmanjše število med 100 zaporednimi naravnimi števili večje od 7. Oglejmo si poljubnih 30 zaporednih členov tega zaporedja. Le tista števila, ki dajo pri deljenju s 30 ostanke 1, 7, 11, 13, 17, 19, 23 ali 29 so kandidati za praštevila, vsa ostala so namreč deljiva z 2, s 3 ali s 5. Ker teh osem kandidatov pri deljenju s 7 da vse možne ostanke, je vsaj eden deljiv s 7, torej je praštevil največ 7. Med 90 zaporednimi členi prvotnega zaporedja je zato največ 21 praštevil. Ostane še 10 členov, med katerimi je pet sodih in eno liho, ki je deljivo s 5. torej so le štiri lahko praštevila. Potemtakem je v prvotnem zaporedju največ 25 praštevil.

Zdaj ni težko videti, da je 26 praštevil le v zaporedju, ki se začne z 2 in konča s 101.

Da se dokazati, da obstaja le šest zaporedij, ki vsebujejo po 25 praštevil. Njihovi začetni členi so 1, 3, 4, 5, 10 oziroma 11.

Boris Lavrič

SLIKOVNA KRIŽANKA "MATEMATIČNI POJMI"

– Rešitev s str. 153

(Marko Bokalič)

	PLAVOKA	NEUTRALNA SILICA	ČISTO ČRNO RDEČA	NARAVNA	SESTRA ČRNO BOKAL		POVEČ ŠIRJE RUMENO	VEDNJA JAVNO JAVNA
	OD	V	O	D	K	R	I	
	DEL	T	A	V	A	T		
ELASTIČNA FUNKCIJA	S	K	A	T	R	A	D	O
OBRAČUN REŠILA	E	L	D	O	R	A	D	O
VEŠTAK NA MATEMATIKI	K	E	A	O	B	R	V	I
	R	I	L	A	N	N		
	O	P	Z	L	A	T	A	N
	P	R	E	S	E	K		
	T	E	M	E	S	E	M	E
VRATA PRED VRATNO VRATNO	I	L	O	K	I	Z	I	D
POVEČANJE VRATA	K	A	N	B	O	O	L	E
DO	A	T	A	A	M	P	E	R

Proizvodnja in prodaja
računalniške opreme

Servis
računalniške opreme

Prodaja tuje
strokovne literature



ALTECH

Alternativne Tehnologije, d.o.o.

Titova 118

61000 Ljubljana

tel.: (+38) 061 347 969

Fax: (+38) 061 347 961

URNIK TEKMOVANJ V LETU 1991

področje	šola	tekmovanje	datum
matematika	osnovna	šolsko občinsko republiško zvezno	do 6. aprila 13. april 18. maj 1. junij
	srednja	izbirno republiško zvezno balkaniada olimpiada	16. marec 6. april 19. – 21. april maj julij
fizika	osnovna	področno republiško zvezno	6. april 4. maj 24. – 26. maj
	srednja	izbirno republiško zvezno olimpiada	13. april 11. maj 24. – 26. maj junij
logika	osnovna in srednja	izbirno republiško	20. ali 21. september 19. oktober
matematika za razvedrilo	osnovna in srednja	republiško	7. september
računalništvo	osnovna	šolsko področno republiško	5. april 20. april 11. maj
	srednja	republiško zvezno	17. – 18. maj junij
raziskovanje inovatorstvo	srednja	republiško	7. junij

KOLEDARJI

Leta 1970 je dedek začel z zbiranjem koledarjev. Takrat je sklenil, da bo z zbiranjem nehal, ko bo imel vse možne različne letne koledarje. Ker je pozabljen, pa še kar naprej vsako leto dopolni svojo zbirko z novim koledarjem. Ali ga boš opozoril, da lahko z zbiranjem konča ?

1. Matematika – osnovna šola

Vsa tekmovanja bodo potekala v skladu s Pravilnikom o tekmovanju osnovnošolcev iz matematike za Vegova priznanja. Pojasnila lahko dobite pri g. A. POTOČNIKU, OŠ K. D. Kajuh, Vlahovičeva 42, Ljubljana, telefon (061) 445 - 626.

2. Matematika – srednja šola

Razpis izbirnega tekmovanja (za vse učence, ki želijo sodelovati na republiškem tekmovanju) bomo tako kot doslej skupaj s prijavnici poslali na šole. Vsa pojasnila daje g. D. FELDA, Fakulteta za elektrotehniko in računalništvo, Tržaška 25, Ljubljana, tel. (061) 265 - 161, int. 233.

3. Fizika – osnovna šola

Republiško tekmovanje bo v Mariboru. Tekmovanje je ekipno, ekipo sestavljata dva učenca. Vsaka šola lahko prijavi po eno ekipo za 7. in 8. razred. Vse ekipe, ki želijo sodelovati na republiškem tekmovanju, se morajo udeležiti področnega tekmovanja v ustrezni organizacijski enoti Zavoda Republike Slovenije za šolstvo:

- v Celju na Tehniški srednji šoli, Pot na Lavo 22 (J. Dolenšek);
- v Mariboru na Pedagoški fakulteti, Koroška c. 160 (M. Cvahte in Z. Bradač);
- v Kopru na Srednji pedagoški in naravoslovnomatematični šoli, Cankarjeva 2 (E. Okretič);
- v Ljubljani na Pedagoški akademiji, Kardeljeva ploščad 16 (F. Prijatelj);
- v Radovljici na OŠ A. T. Linhart, Kranjska 27 (J. Stare);
- v Murski Soboti na Srednješolskem centru tehniško pedagoške usmeritve, V. Vlahovića 12 (E. Dečko);
- v Novi Gorici na OŠ IX. korpusa NOVJ, Kidričeva 36 (A. Fakin);
- v Novem mestu na OŠ 15. divizije, Grm, Trdinova 7 (D. Brezovar);
- v Dravogradu na OŠ Radlje (F. Pogorelnik).

Gradivo za pripravo tekmovalcev je snov iz učbenikov J. Ferbarja in F. Plevnika za 7. in 8. razred, ki ju učenci lahko med tekmovanjem uporabljajo. Predtekmovanje bo sestavljeno iz vprašanj in računskih nalog, na republiškem tekmovanju pa se bodo učenci poleg tega pomerili še v eksperimentalnem delu. Priporočamo, da izvedete šolsko tekmovanje. Prijave za področno tekmovanje pošljite na ustrezno zgoraj navedeno organizacijsko enoto najkasneje do **25. marca**. Informacije dobite pri g. F. PRIJATELJU, OŠ T. Čufar, Čufarjeva 11, Ljubljana, tel. (061) 313 - 135 ali (061) 313 - 156.

4. Fizika – srednja šola

Razpis za tekmovanja bomo skupaj s prijavnici poslali na šole do konca februarja. Informacije dobite pri g. I. KUKMANU na Fakulteti za strojništvo, Murnikova 2, Ljubljana, tel. (061) 223 - 133, int. 275.

5. Logika

Na republiškem tekmovanju tekmujejo učenci, ki bodo v času tekmovanj v 7. in 8. razredu osnovne šole, učenci srednjih šol in študenti. Šole, ki bodo organizirale izbirno tekmovanje, se morajo prijaviti na razpis do **1. junija** na ZOTKS, Komisija za logiko, Lepi pot 6, 61001 Ljubljana. Šolam bomo poslali tudi naloge za 5. in 6. razred. Komisija za logiko bo izbrala do 50 tekmovalcev iz posamezne skupine za nastop na republiškem tekmovanju. Učenci šol, ki ne bodo organizirale izbirnega tekmovanja, se lahko prijavijo do 30. avgusta na najbližji šoli, kjer bodo tekmovanje izvedli. Druge informacije daje g. A. JUS na ZOTKS, tel. (061) 263 - 676.

6. Matematika za razvedrilo

Vse informacije dobite v časopisih MOJ MIKRO, GEA in PROTEUS.

7. Računalništvo – osnovna šola

Razpisi za tekmovanje so že na šolah. Informacije dobite pri g. A. JUSU, ZOTKS – Svet za tehnično vzgojo mladine, Lepi pot 6, Ljubljana, tel. (061) 263 - 676.

8. Računalništvo – srednja šola

I. Raziskovalne naloge

Strokovna komisija bo pregledala naloge, ki bodo do **1. maja** prispele na naslov Gibanje znanost mladini, Lepi pot 6, Ljubljana. Na osnovi dobljenih ocen bo določila tiste učence, ki bodo svoje naloge ustno zagovarjali.

II. Tekmovanje iz znanja računalništva

Mentorji naj pošljejo prijavo šole s poimenskim seznamom tekmovalcev (ne več kot po 5 učencev za vsako od treh tekmovalnih skupin) do **10. aprila** na Gibanje znanost mladini. Pri tem naj upoštevajo pravila, ki že vrsto let veljajo za to tekmovanje.

Potrditev prijav in natančni razpored tekmovanja bodo šole dobile teden dni pred tekmovanjem. Šolam priporočamo, da izvedejo predtekmovanja in tako

izberejo najboljše predstavnike. Učenci šol, ki se ne bodo prijavile na tekmovanje kot organizacije, se lahko sami prijavijo na isti naslov, prav tako najkasneje do 10. aprila. Informacije dajeta g. R. DORN in g. M. ZRIMEC, Fakulteta za elektrotehniko in računalništvo, Tržaška 25, Ljubljana, tel. (061) 273 - 489.

9. Raziskovanje in inovatorstvo

Razpise za 24. srečanje mladih raziskovalcev in inovatorjev Slovenije sosrednje šole že dobile, podrobnejše informacije pa dobite pri g. B. SOTOŠKU, ZOTKS – Gibanje znanost mladini, Lepi pot 6, Ljubljana, p.p. 99, tel. (061) 263 - 676 ali (061) 267 - 380.

Darjo Felda

ALI LAHKO MANJŠINA ZMAGA NA VOLITVAH? – Rešitev s str. 156

Predstavnikov manjšine mora biti vsaj $6^6 = 46656$.

Vilko Domajnko

POPOLNI KVADER – Rešitev nalog s str. 139

1. Števila a , b in c ne morejo biti vsa liha, ker bi tedaj bila vsota $a^2 + b^2 + c^2$ oblike $4m + 3$, kvadrat lihega števila d pa je oblike $4n + 1$, $m, n \in \mathbb{N}$. Če pa sta dve med njimi lihi in eno sodo, pa je vsota $a^2 + b^2 + c^2$ oblike $4m + 2$. Število d bi tedaj moralo biti sodo, kvadrat takega števila pa je oblike $4n$, $m, n \in \mathbb{N}$. Torej vsaj dva od robov imata skupen faktor 2.

2. Če upoštevamo obrazce (1), dobimo

$$V = abc = 4p^2q^2r \mid (4q^2 - r^2)(4p^2 - r^2) \mid$$

Pri tem je (p, q, r) pitagorejska trojica in je generirana v obliki $p = 2uv$, $q = u^2 - v^2$, $r = u^2 + v^2$. Zato velja $p^2q^2r = 4u^2v^2 \cdot (u^2 - v^2)^2 \cdot (u^2 + v^2)$. Upoštevaj še, da je produkt $uv(u-v)(u+v)$ deljiv s 3 in produkt $uv(u-v)(u+v)(u^2 + v^2)$ s 5 (gl. 5. štev. Preseka 1988/89, str. 302). Torej je V deljiv s faktorjem $4 \cdot 4 \cdot 3^2 \cdot 5 = 720$.

Edvard Kramar

PISMA BRALCEV

Ganilo in zganilo me je pismo Dušice Boben v Preseku 18 (1990) 40. zavihal sem rokave in že pišem. Najprej o Preseku. K predlogom, kako k pisanju pripraviti več bralcev iz šol, dodajam še enega. Objavljajte predloge za domače poskuse in povabite bralce, da opišejo, kako so potekali in kakšni so bili izidi. Koristno je, če so izidi lahko osnova za tekmovanje. Šele po tej stopnji sprašujte za razlago.

Če se na predlog za poskus ne odzove nihče od bralcev iz šol, ki jim je Presek namenjen, je treba razmisliti, če ne bi kazalo nadaljnje pisanje prenesti v Obzornik za matematiko in fiziko. Za zgled naj omenim zanimivo nadaljevanko o obratnem brizgalniku, ki bi ga glede na udeležence v diskusiji prav lahko prekrstili v profesorski brizgalnik.

Zdaj pa za Presek. Le o čem? Seveda o brizgallll...ki. Gotovo ste se ob brizgalnikih z ven štrlečimi in ukrivljenimi izrastki domislili, da tekočina lahko izteka tudi skozi skromnejše, pa za ta namen nič manj učinkovite naprave – skozi luknjice in špranjice. Zaradi slogovne zveznosti bom posode z odprtinami imenoval brizgalke. Po novi ameriški šegi k poskusom najprej vabim bralke, vendar ne dvomim, da se bodo enako vneto poigrali z njimi tudi bralci.

Naberite si naročje različnih pločevink, plastenk in kartonk. Režite, strizite, vrtajte, luknjajte, žgite, praskajte, pikajte vanje luknjice, špranjice, odprtine različnih oblik in velikosti. Preluknjane posode obešajte na nitko ali vrstico. Natakajte vanje vodo in luknjice se bodo spremenile v brizgalke, nekatere posode pa v vrtiljake. Ne bo se zavrtela vsaka. Treba jo je prav izbrati, prav obesiti, prav preluknjati in prav (na)polniti. Napišite in narišite, kako ste svojo spravili na ples.

Ali ste našli kakšno tako, za katero menite, da je z nobenim luknjanjem ni mogoče pripraviti, da bi se zavrtela? To bi bila nekakšna Urška med brizgalkami. Narišite jo. Ali bi sprememba spola zalegla za to, da zapleše? (Pa smo spet pri brizgalniku, boste zavzdihnil.)

Kakšna naj bo brizgalka, da se z enim polnjenjem čim večkrat zavrti? Narišite in opišite najvztrajnejšo plesalko. Naštejte vse tiste njene lastnosti, ki so jo naredile za prvakinjo.

Koliko vode v povprečju potrebuje tvoja najboljša plesalka za en obrat? Za koliko ji zraste energija, ko jo obešeno napolniš? Za koliko pa se ji pri vsakem obratu v povprečju energija zmanjša? Račun razloži z risbo in besedo.

V nadaljevanju na tej in še nekaterih straneh vam bomo posredovali v rubriki Naloge še nekaj podobnih vprašanj.

STISKANJE PLASTENK

Preden platenke predelaš v brizgalke, je mogoče z njimi narediti še kak poskus. Do vrha jih napolni z vodo in jih odprte stiskaj. Kaj se zgodi?

"Nekaj vode izteče," boš rekel. "Tega se ne splača poskušati!" Mogoče pa le! Poišči platenko, ki jo boš lahko stisnil tako, da se bo gladina vode v njej znižala. Nariši in opiši, kakšna mora biti platenka in kako jo je treba stiskati.

Ali se pri stiskanju platenke njena prostornina ohrani? Kaj pa površina? Kako pa je z ohranitvijo pri mečkanju platelinske ali ilovnate kepe? Se ohranja prostornina, površina?

Ko stiskaš odprto tubo zobne paste, razmisli, če se pri tem ohranjata prostornina in površina tube? Kaj pa prostornina in površina paste? Ali je mogoče valjasto tubo stisniti tako, da se ji prostornina zveča?

V veliko platenko (za 1,5 l ali 2 l) iz brezbarvne plastike, v kakršnih prodajajo šumeče pijače, natoči polno vode. V vodo položi plastično kapico kemičnega svinčnika, ki si jo na spodnjem robu obtežil z nekaj sponkami za papir. Kapica naj plava na gladini tako, da le kak milimeter vršička kuka iz vode. Privij pokrovček na platenko, nato pa platenko stiskaj in popuščaj. Kaj se dogaja s plavcem? Nekateri mu raje pravijo potapljač. Zakaj?

O tem, ali telesa plavajo ali potonejo, odloča razlika gostot telesa in tekočine. Ker je voda prav malo stisljiva, se ji gostota pri stiskanju platenke ne spremeni. Potemtakem je izid poskusa odvisen od lastnosti plavča. Se pri stiskanju kaj spremeni masa plavča m ? Kaj pa njegova prostornina V ?

Pri razmisleku o prostornini moraš upoštevati tudi, kaj se dogaja znotraj plavča. Če tega ne veš, naredi dodatni poskus. Vlogo plavča naj prevzame visok prozoren kozarec, ki ga z odprtino obrnjeno navzdol potiskaš v vodo. Kaj se pri tem dogaja v kozarcu?

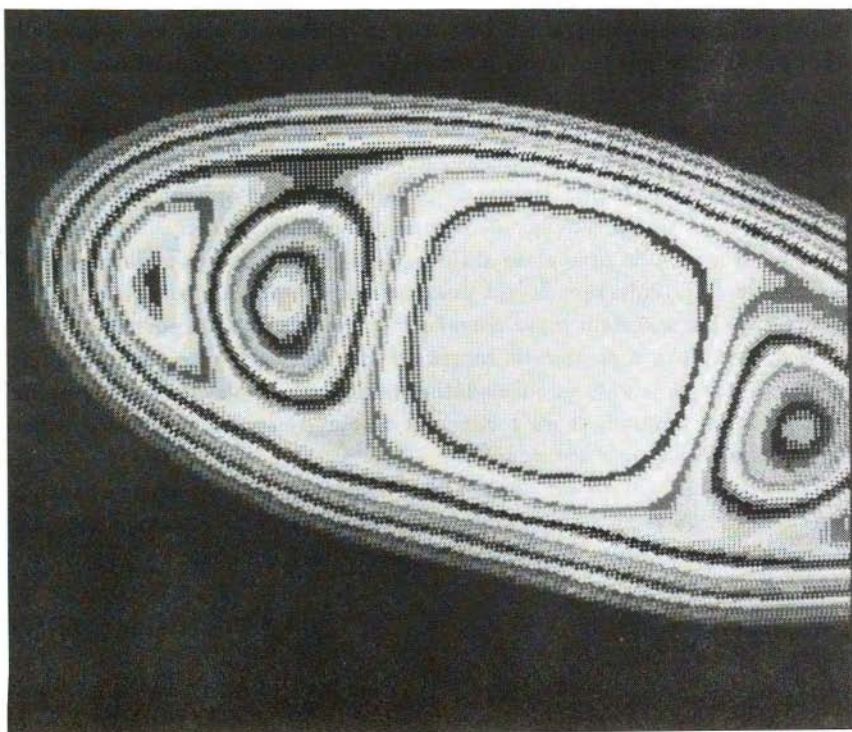
Če zdaj veš, katera od obeh lastnosti plavča (m , V) se pri stiskanju ohranja in katera se spreminja, lahko poveš tudi, kaj se pri stiskanju dogaja s povprečno gostoto plavča. Tako lahko razložiš izid poskusa.

Janez Ferbar

MEDNARODNI ASTRONOMSKI MLADINSKI TABOR, Pokljuka '90

Mladinski raziskovalni tabori so postali priljubljena oblika počitnikovanja za učence in dijake, ki hočejo vedeti več in združiti poletni počitek z lahkotnim uvodom v posamezne znanosti. Astronomsko društvo Javornik, ADJ Ljubljana, pripravi vsako leto svoj astronomski tabor na Javorniku nad Črnim Vrhom, kjer stoji Slovenski ljudski astronomski observatorij. Letos pa ga je, tako kot pred petimi leti, nadomestil mednarodni astronomski mladinski tabor IAYC (International Astronomical Youth Camp). Zaradi prostorskih težav je potekal na Pokljuki, v Šport hotelu, od 16.7. do 6.8. To je bil po vrsti 16. IAYC, ki ga organizira IWA, International Workshop Astronomy. Člani te organizacije zgolj iz navdušenja in ljubezni do astronomije ter želje po mednarodnem sodelovanju izberejo državo in primeren kraj, kjer v sodelovanju z domačimi astronomskimi društvi izvedejo tabor.

Tokrat so delovne skupine Sončev sistem v gibanju, Zvezde in zvezdni sistemi, Astrofizika, Gravitacija in kozmologija, Meteorji, Spremenljivke, Praktična astronomija vodili mentorji iz Francije, Nemčije, Italije, Nizozemske in Jugoslavije, udeleženci pa so bili iz vseh koncev Evrope.

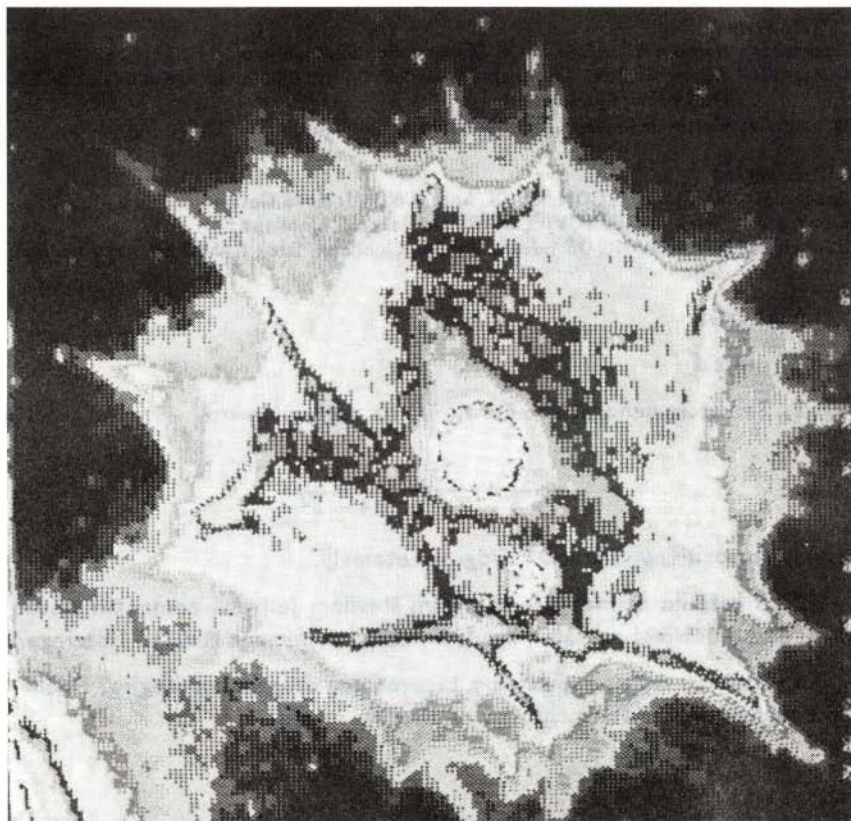


Astronomska oprema je bila najboljša doslej: številni binokularji, 5 do 20 centimetrski reflektorji, fotometer, manjša CCD kamera in PC računalniki; AGO z Golovca pa nam je prijazno posodil daljnogled Celestron 14. Čeprav je bila marsikatera noč delno oblačna, nekajkrat je tudi deževalo, smo veliko opazovali in merili. Fotografiji sta CCD posnetka Saturna (slika 1) in meglice okrog ene od zvezd v zvezdni kopici Plejade (slika 2). Delovno poročilo, IAYC'90 Report, je v vezani obliki na voljo pri ADJ, Tavčarjeva 2, Ljubljana.

Ker so prispevki iz lastnega žepa za naše razmere dokaj visoki, se IAYC-ja navadno udeleži zelo malo Jugoslovanov. Letos je izjemoma sodelovalo kar deset domačih srednješolcev. Vsi so v preteklem šolskem letu opravili raziskovalne naloge pri gibanju Znanost mladini, njihovo udeležbo pa so omogočile še raziskovalne skupnosti slovenskih občin.

Vsi, ki vas zanima več o astronomskih taborih v letu 1991 (IAYC bo v Nemčiji), lahko dobite informacije pri Astronomskem društvu Javornik.

Mirjana Galičič



26. REPUBLIŠKO TEKMOVANJE OSNOVNOŠOLCEV IZ MATEMATIKE

19. maja 1990 so se v Ljubljani, Mariboru, Celju, Novi Gorici in Kopru zbrali na republiškem tekmovanju tisti učenci 7. in 8. razreda osnovnih šol, ki so pokazali največ znanja na občinskih tekmovanjih. Tekmovanja se je udeležilo 217 sedmošolcev in 282 osmošolcev.

Republiška tekmovalna komisija pod predsedstvom prof. Terezije Uran je pripravila naloge, pregledala rešitve, določila kriterij za podelitev zlatih Vegovih priznanj in določila ekipo za zvezno tekmovanje v Kaštel Lukšiču pri Splitu.

Za osvojitev zlatega Vegovega priznanja je bilo v obeh razredih potrebno zbrati 13 od 25 možnih točk. Tako je priznanje osvojilo 62 sedmošolcev in 101 osmošolec.

Nagrade so prejeli:

7. razred

- I. nagrada: Barbara KRAIGHNER, OŠ Majde Vrhovnik, Ljubljana
- II. nagrada: Matej CEPIN, OŠ Leopold Maček Borut, Ljubljana, Dejan VELUŠČEK, OŠ Ledina, Ljubljana
- III. nagrada: Martin JESENKO, OŠ Boris Zihlerl, Ljubljana

8. razred

- I. nagrada: Narvika BOVCON, OŠ IX. korpus NOVJ, Nova Gorica
- II. nagrada: Marko OREŠKOVIČ, OŠ Rihard Jakopič, Ljubljana
- III. nagrada: Nika NOVAK, OŠ Edvard Kardelj, Ljubljana, Iztok KAVKLER, OŠ Fran Roš, Celje

NALOGE

7. razred

1. Za katero nenegativno število a ima vsota ulomkov

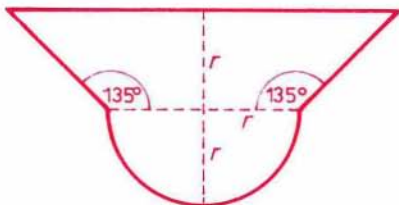
$$\frac{a}{2+a} + \frac{2a}{2-a} + \frac{9}{4-a^2}$$

najmanjšo pozitivno vrednost? Odgovor utemelji.

2. S katerim najmanjšim naravnim številom je treba pomnožiti število 8316, da bo dobljeni zmnožek kvadrat nekega naravnega števila? Katerega?

3. Naravna števila zapisujemo zaporedoma drugega za drugim. Pričnemo z najmanjšim. Katera cifra bo na tisočem mestu?

4. Zemljišče ima obliko, kot je prikazano na sliki ($r = 5$ m). Radi bi ga ogradili in zasejali s travo. Koliko metrov žične ograje potrebujemo in koliko semena, če na 1 m^2 porabimo 4 dag semena?



5. Štirikotnik razdelimo z eno izmed diagonal na dva trikotnika z obsegoma 25 m in 27 m. Izračunaj dolžino te diagonale, če je obseg štirikotnika 32 m.

8. razred

1. V enačbi $\frac{x-2}{x+2} = k \cdot \frac{x+2}{x-2}$ določi k , če je $x = -\frac{10}{3}$.

2. V enakokrakem trapezu z osnovnicama $a = 8 \text{ cm}$ in $c = 6 \text{ cm}$ se diagonali sekata pravokotno. Izračunaj obseg in ploščino trapeza.

3. Koliko prvih zaporednih naravnih števil je treba sešteti, da bo vsota trimestno število z enakimi ciframi?

4. V enakostranični trikotnik s stranico a je včrtan kvadrat tako, da so oglišča kvadrata na straneh trikotnika. Izrazi z a stranico kvadrata.

5. Iz kocke z robom a izrežemo pokončno prizmo. Njena osnovna ploskev je enakokraki trikotnik, katerega višina na osnovnico leži na diagonali osnovne ploskve kocke, kot med krakoma je 30° . Koliko procentov prostornine kocke je prostornina največje take prizme?

Aleksander Potočnik

NA VELIKEM PAPIRNATEM TRAKU — Rešitev s str. 191

Izpustimo iz danega zapisa zadnje število, torej 9999. Nato razvrstimo števila, ki sestavljajo novi zapis, v pare:

$$(1, 9998), (2, 9997), (3, 9996), \dots, (4999, 5000)$$

Vsota števk obeh števil vsakega para je 36, iskana vsota pa je zato enaka $36(4999 + 1) = 180000$.

Dragoljub M. Milošević

21. ZVEZNO TEKMOVANJE OSNOVNOŠOLCEV IZ MATEMATIKE

Letošnje zvezno tekmovanje je bilo v soboto 2. junija v OŠ Vjeko Butir v Kaštel Lukšiću pri Splitu. Tekmovalci, med katerimi so bili po sklepu republiške tekmovalne komisije tudi slovenski sedmošolci Barbara KRAIGHER, OŠ Majde Vrhovnik, Ljubljana, Matej CEPIN, OŠ Leopold Maček Borut, Ljubljana in Dejan VELUŠČEK, OŠ Ledina Ljubljana ter osmošolci Narvika BOVCON, OŠ IX. korpus NOVJ, Nova Gorica, Marko OREŠKOVIČ, OŠ Richard Jakopič, Ljubljana, Nika NOVAK, OŠ Edvard Kardelj, Ljubljana in Iztok KAVKLER, OŠ Fran Roš, Celje, so se zbrali v turističnem naselju Resnik v Kaštel Štafiliću že v petek popoldne.

V soboto nas je ob prihodu v šolo Vjeko Butir presenetila izredno lepo urejena okolica šole, ki se lahko pohvali s 4 ha lastnega botaničnega vrta s preko 800 različnimi vrstami rastlin z vseh koncev sveta. Svečana otvoritev tekmovanja je bila ob 8. uri, ob 9. uri pa se je začelo zares. Dve uri in pol so tekmovalci, bilo je 53 sedmošolcev in 44 osmošolcev, reševali precej zapletene naloge.

Po kosilu so organizatorji za tekmovalce in spremljevalce pripravili ladijski izlet po kaštelanskem zalivu, tekmovalna komisija pa je pregledala izdelke.

Tekmovanje je bilo zaključeno s svečano podelitvijo nagrad in pohval v nedeljo ob 10. uri.

Naši tekmovalci so se solidno odrezali, saj je Iztok Kavkler osvojil III. nagrado, Barbara Kraigher pa pohvalo. Izmed predlogov nalog, ki so jih prispevali člani tekmovalne komisije iz vseh republik in avtonomnih pokrajin, so bile izbrane naslednje:

7. razred

1. Katere je največje naravno število, ki ima naslednjo lastnost: dvomestno število, zapisano s poljubnima dvema sosednjima števčkama tega števila, je deljivo s 23.
2. Če sta v trimestnem naravnem številu, ki je deljivo s 7, zadnji dve cifri med seboj enaki, je tudi vsota cifr trimestnega števila deljiva s 7. Dokaži trditev.
3. Za štiri števila a, b, c in d velja:

$$d > c, a + b = c + d \quad \text{in} \quad a + d < b + c$$

Uredi dana števila po velikosti.

4. Na osnovnici BC enakokrakega trikotnika $\triangle ABC$ določi točko M , tako da bo razlika razdalj te točke od krakov trikotnika enaka polovici dolžine kraka AB .
5. V pravokotnem trikotniku deli višina na hipotenuzo hipotenuzo na dva dela, katerih razlika dolžin je enaka dolžini ene katete. Izračunaj notranje kote tega trikotnika.

8. razred

1. Dokaži, da je vsota kubov treh zaporednih naravnih števil deljiva z 9.
2. Enomestno naravno število povečamo za 10. Tako smo ga povečali za nekaj odstotkov. Če dobljeno število povečamo za enako število odstotkov, dobimo 72. Izračunaj prvotno število.
3. Določi šestmestno naravno število, katerega produkti z 2, s 3, s 4, s 5 in s 6 so spet šestmestna števila, zapisana z istimi ciframi kot iskano število, vendar v drugačnem vrstnem redu.
4. V trikotniku $\triangle ABC$ seka simetrala kota $\sphericalangle CAB$ stranico BC v točki N , simetrala kota $\sphericalangle CBA$ pa stranico AC v točki P , pri čemer velja, da je $\overline{PN} = 1$. Presek simetral AN in BP je točka Q . Oglisišče C leži na krožnici, ki poteka skozi točke P, Q in N . Izračunaj ploščino trikotnika $\triangle NPQ$.
5. Diagonali poljubnega trapeza delita trapez na štiri trikotnike. Ploščini trikotnikov, ki ležita ob osnovnicah trapeza, merita m (cm^2) in n (cm^2). Izrazi ploščino trapeza z m in n .

Aleksander Potočnik

NALOGA

MILI ZVONOVI

Poslušaj zvonjenje zvonov. Ali lahko ugotoviš, koliko zvonov zvoni? Ali kembliji udarjajo po zvonovih z enakimi ali z različnimi frekvencami? Ali se zvonovi majoje z enakimi ali z različnimi frekvencami? Ali so zvonovi enako veliki? Na kakšen način prilagajamo frekvence nihanja različno velikih zvonov?

Če hočeš različne slovenske zvonove poslušati kar doma, si kupi Heli-donovo ploščo Pritrkavanje.

Janez Ferbar

34. REPUBLIŠKO TEKMOVANJE SREDNJEŠOLCEV IZ MATEMATIKE

Če bi Platon pisal Biblijo, bi jo nedvomno začel z besedami: "V začetku je Bog ustvaril matematiko, potem pa v skladu z njenimi zakoni nebo in zemljo."

(M. Kline)

Letošnje republiško tekmovanje srednješolcev iz matematike je bilo v Idriji kot ena od prireditev ob 500-letnici tega znamenitega rudarskega mesta. Organizirala ga je Srednja šola Jurija Vege, potekalo pa je v soboto, 31. marca. Začeli smo ga s slovesnostjo v Filmskem gledališču – prvi slovenski gledališki luči. Tekmovalcem so spregovorili ravnatelj srednje šole dipl. oec. Milan Cvelbar, predsednica občinske skupščine ing. Ivica Kavčič in pomočnica direktorja Zavoda za šolstvo prof. Draga Urbas-Keravica. Po kratkem kulturnem programu so se tekmovalci zbrali v poslopju prve slovenske realke. Tam jih je čakala malica, ki ji je sledilo trdo delo. Reševali so naslednje naloge:

Prvi letnik

- Poišči vse peterke (a, b, c, d, e) naravnih števil, za katere velja
 - $a \leq b \leq c \leq d \leq e$
 - $a + b + c + d + e = a b c d e$
- Dana je neprazna podmnožica $\mathcal{M}$ racionalnih števil $\mathbb{Q}$. Naj velja:
 - če sta a in b iz množice $\mathcal{M}$, sta $a + b$ in ab v množici $\mathcal{M}$
 - če je r racionalno število, velja natanko ena od naslednjih trditev: $r \in \mathcal{M}$, $-r \in \mathcal{M}$ ali pa $r = 0$.
 Dokaži:
 - množica naravnih števil je vsebovana v $\mathcal{M}$
 - $\mathcal{M} = \mathbb{Q}^+$ ($\mathbb{Q}^+$ je množica pozitivnih racionalnih števil)
- Poišči vse pare (x, y) realnih števil, ki zadoščajo neenačbama $||x - 1| - |y|| \leq 1$ in $x^4 - 8x^2 + 16 \leq 0$.
- Dana je tristrana piramida $ABCV$ s stranicami osnovne ploskve a, b in c ter stranskimi robovi x, y in z . Njena višina v , ki jo spustimo z vrha V , ima nožišče na trikotniku ABC . Pokaži, da velja $x + y + z \leq a + b + c + 3v$.

Drugi letnik

1. Pokaži: če za realna števila a , b in c velja

$$\frac{a}{b+c} + \frac{b}{c+a} + \frac{c}{a+b} = 1,$$

potem velja tudi $\frac{a^2}{b+c} + \frac{b^2}{c+a} + \frac{c^2}{a+b} = 0$.

2. Poišči vse funkcije $f: \mathcal{R} \rightarrow \mathcal{R}$, ki zadoščajo pogojema:
 a) $f(x) \cdot f(y) = f(x-y)$ za poljubna realna x in y
 b) $f(1990) = 1$.
3. Dan je trikotnik s stranicami a , b , c in obsegom 1. Pokaži, da je $a^2 + b^2 + c^2 + 4abc < \frac{1}{2}$.
4. V enakokrakem trikotniku $\triangle ABC$ ($\overline{AC} = \overline{BC}$) naj bo O središče očrtanega kroga, D razpolovišče stranice AC in E težišče trikotnika $\triangle DBC$. Pokaži, da je premica skozi O in E pravokotna na BD .

Tretji letnik

1. Obravnavaj enačbo $x + \sqrt{a + \sqrt{x}} = a$.
2. Za funkcijo $f: \mathcal{R} \rightarrow \mathcal{R}$ velja $f(x) \leq x$ za vsak $x \in \mathcal{R}$ in $f(x+y) \leq f(x) + f(y)$ za poljubni realni števili x in y . Dokaži, da je $f(x) = x$ za vsak $x \in \mathcal{R}$.
3. a) Pokaži, da težiščnice razdelijo trikotnik na šest manjših med seboj plosčinsko enakih trikotnikov.
 b) Pokaži: če so t_a , t_b in t_c težiščnice trikotnika in $t = (t_a + t_b + t_c)/2$, je ploščina trikotnika enaka $p = (4 \cdot \sqrt{t(t-t_a)(t-t_b)(t-t_c)})/3$.
4. Dokaži, da razdalje od poljubne točke na krožnici do oglišč tej krožnici vrtanega kvadrata ne morejo biti hkrati racionalne.

Četrty letnik

1. Zaporedje je dano z $a_0 = 1$, $a_{n+1} = 2a_n + 2^n$. Izrazi splošni člen tega zaporedja kot funkcijo njegovega indeksa (to je $a_n = f(n)$).

2. Dano je zaporedje, katerega n -ti člen je zadnja cifra števila $[(\sqrt{10})^n]$ za $n = 1, 2, 3, \dots$. Ali je zaporedje periodično? ($[x]$ pomeni največje celo število, ki ni večje od x ; primera: $[8.29] = 8$, $[8] = 8$)
3. Poišči vse take funkcije $f : \mathbb{Q} \rightarrow \mathbb{Q}$, za katere velja $f(x + f(y)) = f(x) + y$.
4. Dokaži, da med stranicami poljubnega n -kotnika, $n \geq 3$, vedno lahko najdemo vsaj dve (označimo ju na primer z b in c), da velja $1 \leq b/c < 2$.

Medtem ko so učenci reševali zapletene naloge, smo za goste, mentorje in druge spremljevalce pripravili predstavitev kraja, njegove bogate zgodovine, šole in glasila, ki smo ga izdali ob tej priložnosti. Želeli smo, da bi tudi tekmovalci zvedeli nekaj več o našem mestu, zato smo v glasilo vključili dva prispevka našega zgodovinarja prof. Janeza Kavčiča (500 let Idrije, Idrijske šolske tradicije). Bivša učenca naše šole, dr. Milan Hladnik, docent na FNT, in dipl. ing. Bojan Hvala, asistent na FNT, sta prispevala dve zanimivi besedili: Zakaj študirati matematiko in Utrinki o matematiki in pedagoškem poklicu. Sledijo še razmišljanja naših bivših učencev, študentov na FNT, nato pa smo predstavili odlomka iz dveh knjig, ki bosta izšli v zbirki Sigma, v slovenski jezik sta ju prevedla naša bivša učenca dr. Dušan Pagon in dipl. ing. Bojan Hvala. Iz knjige Matematika v aforizmih, citatih in izjavah smo si izposodili tudi našo uvodno misel.

Po predstavitvi glasila je ravnatelj dipl. oec. Milan Cvelbar predstavil še šolo in programe, ki jih izvajamo.

Tekmovanje je bilo zaključeno ob 11.45. Sledilo je kosilo za vse udeležence, ki so ga pripravili v idrijskih tovarnah Kolektor in Rotomatika, po njem pa so si tekmovalci ogledali znamenitosti našega mesta ter razstavo grafik idrijskega akademskega slikarja Rudija Skočirja.

Ob 16.30 je bila v Filmskem gledališču svečana razglasitev rezultatov tekmovanja. Prisotnim je spregovoril dr. Milan Hladnik, ki je najboljšim podelil nagrade in priznanja. Te so dobili:

Prvi letnik:

Prva nagrada: Andrej SRAKAR (SNŠ Ljubljana) in Mitja MASTNAK (STŠ MT Celje)
 Tretja nagrada: Bojan GORNIK (SŠPTNU Novo mesto) in Marko KRAJNC (SNŠ MZ Maribor)
 Pohvala: Damjan ŠKULJ in Gordana KUHAČ (SŠ Brežice), Tomaž URBIČ (SŠPTNU Novo mesto), Samo FIŠINGER (SNŠ MZ Maribor), Uroš STERLE (SŠPRNMU Kranj), Luka ŠTRAUS (SNŠ Ljubljana), Sebastjan KUDER (SŠNMEU Trbovlje), Primož MIHELIČ (TSC Nova Gorica), Marko MUROVEC (NSC Nova Gorica).

Drugi letnik:

Prva nagrada: Gregor ŠEGA (SNŠ Ljubljana)

Druga nagrada: Tomaž CEDILNIK (SNŠ Ljubljana)

Tretja nagrada: Marko SLAPAR (SŠPRNMU Kranj)

Pohvala: Mojca VILFAN in Andrej STROJNIK (SNŠ Ljubljana), Mateja ANTOLIČ (SŠC DK Ptuj), Alan GREGOROVIC (SPNMS Koper), Matjaž KOTNIK (SNŠ MZ Maribor), Rok DEŽELAK (SŠNMEU Trbovlje)

Tretji letnik:

Tretja nagrada: Igor PANIČ (SŠEN Ljubljana) in Marko PETRUŠIČ (SNŠ Ljubljana)

Pohvala: Blaž KORITNIK (SNŠ Ljubljana), Dušanka KOCIČ (STŠ MT Celje), Jure VELKAVERH (SŠEN Ljubljana), Tatjana MARVIN (NSC Nova Gorica)

Četrty letnik:

Prva nagrada: Martin RAIČ (SNŠ Ljubljana)

Druga nagrada: Aleš ČASAR (SCTPU Murska Sobota) in Mitja KOLŠEK (CSŠTUDU Titovo Velenje)

Tretja nagrada: Andrej BAUER in Roman MODIC (SNŠ Ljubljana) ter Alenka KAVKLER (SNŠ MZ Maribor)

Pohvala: Marko KERN (SŠPRNMU Kranj), Roman MAURER (SŠNMEU Trbovlje), Sašo JEZERNIK in Jure DOBNIKAR (SNŠ MZ Maribor), Boštjan RAČIČ in Andrej RAKAR (SNŠ Ljubljana), Borut NOVAK (CSUI Jesenice), Marko ŠKALA (SŠDTU EK Črnomelj), Uroš SAKSIDA (NSC Nova Gorica), Damjan GOROPEVŠEK (SKSMS Maribor), Matjaž JAKOPEC (SŠPTNU Novo mesto).

Ob koncu svečane razglasitve nas je obiskal še gledališki igralec Silvij Božič, ki nam je kot škafar v pristnem idrijskem govoru spregovoril o svojih časih.

Organizatorji smo se trudili, da bi bilo udeležencem tekmovanja čim prijetnejše med nami in da bi na mesto in šolo ohranili lepe spomine.

Lidija Kleindienst

NALOGA

ZLATA JAJCA

V plastični rumenjak iz čokoladnega jajca (kinder) deni jekleno kroglico za avtomobilski ležaj. Tudi steklena frnikola bo dobra. Zakotali zlato jajce po nagnjeni hrapavi deski ali nagnjeni mizi. Kaj se zgodi? Razloži, kaj se dogaja v notranjosti kotalečega zlatega jajca. Zakaj smo ob izidu poskusa presenečeni?

Janez Ferbar

IZBIRNO TEKMOVANJE IZ LOGIKE ZA OSNOVNOŠOLCE IN SREDNJEŠOLCE

7. in 8. razred OŠ

1a. PET UČENCEV

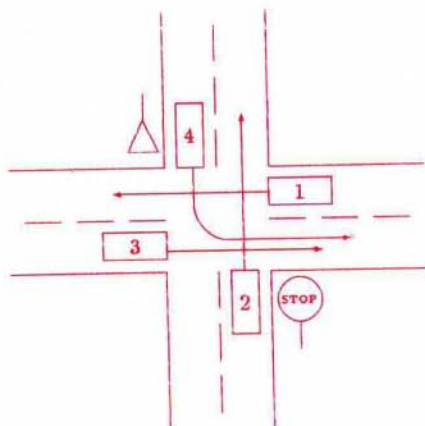
Pet učencev je sedelo drug poleg drugega v vrsti. Ali lahko ugotoviš vrstni red iz naslednjih podatkov?

- o Lucija je za toliko oddaljena od Tine, kot je Jasna od Borisa.
- o Tina sedi med Tomažem in Jasno.
- o Boris sedi poleg Tine.
- o Tina ne sedi med Borisom in Tomažem.

b. KDO SI JE SPOSODIL KOLO?

Na policiji so zasliševali Andreja, Braneta in Klemna, ki so bili osumljeni kraje kolesa. Andrej je dejal, da je kolo ukradel Boris. Boris je trdil, da je nedolžen. Klemen je o sebi rekel, da ni tat. Policaji so vedeli, da eden govori resnico, druga dva pa lažeta. Kdo je ukradel kolo?

2. KRIŽIŠČE PREDNOSTNE IN STRANSKE CESTE



Pred križišče pripeljejo fičko, žaba, katrca in jugo (slika 1). Jugo ima prednost pred žabo, le-ta pa pred fičkom, ki je desno od katrce. Kje je katero vozilo?

Slika 1. Križišče prednostne in stranske ceste.

3. MAŠKARADA

Branka, Pavla, Renata in Saša so šle na maškarado, vsaka s svojim prijateljem, ki so se imenovali Boris, Peter, Rok in Samo. Le-ti so bili

preoblečeni v berača, peka, robota in slona, vendar ne nujno v tem vrstnem redu. Iz naslednjih dejstev poišči za vsako dekle ime njenega prijatelja in njegovo masko:

- o Začetne črke dekletovega imena, imena njenega prijatelja in naziva njegove maske so v vseh primerih različne.
- o Pek je najprej plesal s svojo prijateljico, potem pa še s Sašo in Borisovo prijateljico.
- o Rok, ki ni pripeljal Saše, je dober slonov prijatelj, toda noben od obeh ne pozna Pavlinega prijatelja preveč dobro.
- o Branka in Petrova prijateljica sta obe večji kot robotova prijateljica.

Pomagaj si s tabelo!

1. in 2. letnik srednjih šol

1a. ZUNANJA IN NOTRANJA PISMA

Čeprav se nihče ni dotaknil vsebine predalov, je nekdo prestavil vse nalepke na predalih. Jana je vedela, da so vsi predali pravilno napolnjeni in da je vsako pismo označeno z NOTRANJE ali ZUNANJE. Jana je uvidela, da z odpiranjem enega samega predala in pregledom enega samega pisma iz tega predala lahko enostavno popravi nalepke. Kako?

NOTRANJA
ZUNANJA
NOTRANJA IN ZUNANJA

b. PET JEZIKOV

Pet profesorjev se je v času mednarodne konference srečalo pri kosilu. Kmalu so ugotovili, da imajo težave s sporazumevanjem. Dva sta znala francosko, dva švedsko, dva nemško, dva japonsko in dva angleško. Vsak je znal dva jezika, toda nobena dva nista govorila istih dveh jezikov. Iz naslednjih podatkov določi, kdo govori posamezne jezike:

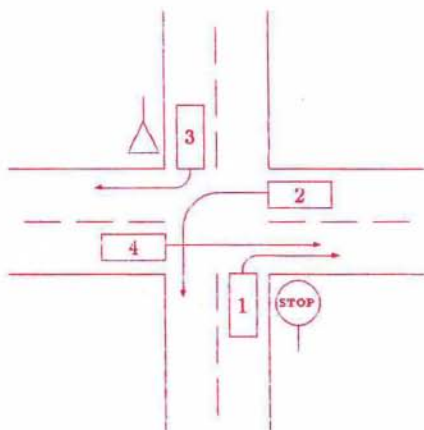
- o Ne Phillip ne Louis ne govorita angleško.
- o George in Phillip znata japonsko.
- o James in Louis se lahko pogovarjata v francoščini.
- o Paul govori nemško, James pa ne, toda ugotovila sta, da imata en skupen jezik.
- o George in James nimata skupnega jezika, toda Paul jima je prevajal.

2. KRIŽIŠČE

Pred križišče pripeljejo katrca, žaba, fičko in golf (Slika 2)

- o Fičko prihaja s stranske ceste.
- o Golf ne sme med prvimi prepeljati križišča.
- o Žaba je na glavni cesti.
- o Katrca je levo od fička.

Kje je katero vozilo?



Slika 2. Križišče

3. LOV NA ZAKLAD

Marko se je s štirimi prijatelji udeležil lova na zaklad. Vsak od njih je našel drugačen zaklad. Eden od zakladov je bil kositrni vojščak. Potem, ko so našli zaklade, so se vračali ob različnih časih. Iz podatkov določi za vsakega fanta zaklad, ki ga je našel, in vrstni red, v katerem so se vrnili na začetno mesto:

- o Sandi se je vrnil neposredno pred osebo, ki je našla lutko. Ta oseba ni bila zadnja.
- o Oseba, ki je našla medvedka, se je vrnila neposredno pred Karlom, ki pa tudi ni bil zadnji.
- o Toni se je vrnil neposredno pred Janezom, ki pa se je vrnil neposredno pred fantom, ki je našel avtomobilček.
- o Fant, ki je našel leva, ni bil zadnji.
- o Karel ni našel lutke.

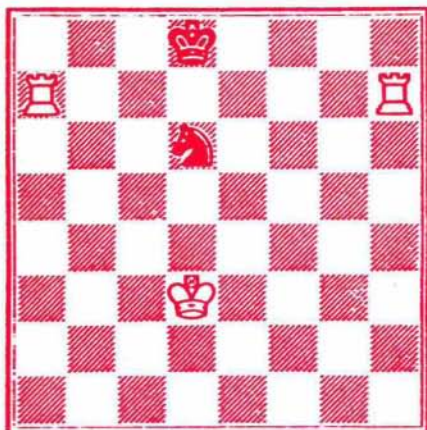
Pri sklepanju si pomagaj s preglednico.

Članek Odprto pismo šolski javnosti, ki je bil objavljen v P-3, na str. 184 in 185, sodi v rubriko **BOLJ ZA ŠALO KOT ZARES**.

3. in 4. letnik srednjih šol

1a. MAT V DVEH POTEZAH

Beli na potezi v dveh potezih matira črnega. Kako?



b. PET SUMLJIVIH

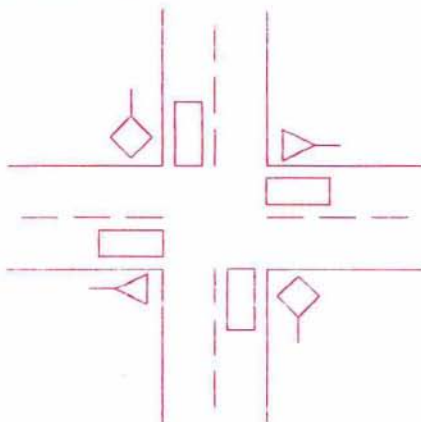
Pet osumljenih, A, B, C, D in E, je na zaslišanju izjavilo:

- A: C in D lažeta
- B: A in E lažeta
- C: B in D lažeta
- D: C in E lažeta
- E: A in B lažeta

Kaj lahko sklepamo?

2. GLAVNA CESTA PREČKA STRANSKO CESTO

Pred križišče pripeljejo štiri vozila: škoda, žaba, fičko in jugo (Slika 3). Jugo je levo od fička, le-ta pa ni nasproti škoda. Križišče bo najprej prevozil fičko, nato žaba, tretji jugo in nazadnje škoda. Dve vozili vozita naravnost naprej, dve pa zavijata. Kako vozijo posamezna vozila?



Slika 3. Glavna cesta prečka stransko cesto

3. POVABLJENI NA VEČERJO

Božičevi so povabili Tino in njenega moža ter še tri druge poročene pare na večerjo. Določijo pare in darilo, ki so ga prinesli gostje.

- o Povabljeni pari so: Andreja z možem, Palčičevi, Gorazd z ženo in par, ki je prinesel kristalno vazo.
 - o Par, ki je prinesel kuhinjski lonec, je prišel zadnji. Aljančiči so prišli prvi.
 - o Janez in žena nista prinesla rož.
 - o Gospod Markič in Edo sta razpravljala o nogometu, medtem ko sta se Janez in gospod Aljančič pogovarjala z ženskami.
 - o Eličeva sta prišla za Heleno in njenim možem, toda pred parom, ki je prinesel vazo.
 - o Marta in Dragova žena imata radi rože, vendar jih nobena ni prinesla.
 - o Par, ki je prinesel sliko, je prišel pred Edom z ženo, vendar ne prvi.
- Kdo so pari in kaj so prinesli?

Pomagaj si z razpredelnico!

Izidor Hafner

DVE ECCOVI NALOGI – Rešitev s str. 125

(1) Nobeno število potrditev in povratnih potrditev ne zadostuje. Generala nikoli ne bosta napadla. Vzrok je v temle. Na začetku general A pozna neko dejstvo, ki ga general B ne pozna, general B pa bo napadel samo, če bo to dejstvo poznal. Recimo, da v nekem trenutku eden od obeh generalov, recimo mu general X, ve nekaj, kar mora drugi general, recimo mu general Y, vedeti, da bo napadel. Torej general X pošlje goloba. Toda čeprav Y sporočilo prejme, X ne more napasti, ker ne ve, da je Y zadnje sporočilo prejel. Torej zdaj general Y ve nekaj (namreč to, da je prejel zadnje sporočilo generala X), kar mora general X vedeti, da bo napadel. Isti argument se ponavlja znova in znova, le vlogi generalov X in Y se menjata.

(2) Dovolj je en sam let goloba. Ko golob preleti greben, straže prižgejo svetlobni signal. Tako A ve, da B ve, da namerava A napasti.

Pripravila Neža Mramor

TEKMOVANJE IZ MATEMATIKE V ZRN

Tekmovanje iz matematike za srednješolce v ZRN poteka na treh stopnjah. Na prvi stopnji dobijo učenci 4 naloge, ki jih morajo rešiti v nekaj mesecih. Tisti, ki jim v glavnem uspe rešiti vse te naloge, se uvrstijo na drugo stopnjo. Za uvrstitev na tretjo stopnjo morajo v celoti rešiti nove štiri naloge, za kar imajo dva meseca časa. Naloge je potrebno reševati samostojno z morebitno pomočjo literature. Tekmovanje na tretji stopnji poteka v obliki kolokvija¹ s profesorji matematike s srednjih in visokih šol. Na tej stopnji tudi izberejo ekipo za matematično olimpiado.

Za zgled si oglejmo naloge z druge stopnje:

1. Poišči vse trojice (x, y, z) celih števil, da velja $2^x + 3^y = z^2$.
2. Vsakemu robu konveksnega poliedra predpišimo smer tako, da v vsako oglišče vodi vsaj en rob in da tudi iz vsakega oglišča vodi vsaj en rob. Sprehod po robovih naj bo mogoč le v predpisanih smereh. Dokaži, da obstajata vsaj dve stranski ploskvi, ki ju lahko obhodimo.
3. Naj bosta $\{a_n\}$ in $\{b_n\}$ dve zaporedji naravnih števil, podani s predpisoma

$$a_{n+1} = n \cdot a_n + 1 \text{ in } b_{n+1} = n \cdot b_n - 1 \text{ za vsak } n \in \mathbb{N}$$

Dokaži, da obstaja največ končno mnogo naravnih števil, ki so členi obeh zaporedij.

4. Naj za naravni števili k in n velja: $1 < k \leq n$ in naj bodo $x_1, x_2, \dots, x_k$ taka pozitivna števila, katerih vsota je enaka njihovem produktu.
 - a. Dokaži $x_1^{n-1} + x_2^{n-1} + \dots + x_k^{n-1} \geq kn$
 - b. Pod katerimi potrebnimi in zadostnimi pogoji za k, n in $x_1, x_2, \dots, x_k$ velja $x_1^{n-1} + x_2^{n-1} + \dots + x_k^{n-1} = kn$?

Srednješolce vabimo, da pošljejo rešitve do konca februarja 1991 na naslov KOMISIJA ZA POPULARIZACIJO MATEMATIKE V SREDNJI ŠOLI, Jadranska 19, 61111 Ljubljana, pp 64. Najboljše čaka prijetno presenečenje.

Matjaž Željko

¹ kolokvij: (lat. *colloquium*) ustni izpit (v obliki pogovora)

Kolikšna je verjetnost, da bo Sonce vželo tudi jutrišnjega dne?

Vprašanje se morda ne zdi povsem na mestu, saj bi vsak izmed nas skorajda zagotovo približno takole odgovoril:

"Čisto zagotovo bo vželo, zagotovo. Kaj pa vendar misliš?!"

In zakaj, vas vprašam, zakaj naj bi tole naše ljubo Sonce tako zelo zagotovo vželo tudi jutrišnjega dne?

Vsaj del tistih, ki so bili še maloprej tako zelo prepričani v svoj odgovor, bi se sedaj morebiti že zmedel:

"Ja, saj doslej je vendar še prav slehernega dne vželo. In ne vem, zakaj naj ne bi bilo tako tudi jutri."

Vendar pa vsa ta reč le ni tako zelo preprosta. Namreč – če se opremo na predpostavko, da je naše ljubo Sončece doslej resda še slehernega dne vželo, potem je največ, kar smemo trditi, to, da se bo **z zelo veliko verjetnostjo** tudi jutri natanko tako obnašalo. Toda z vso gotovostjo pa tega le ne moremo trditi.

Eden izmed tistih, ki so nekoč že davno tega polagali temelje verjetnostnega računa, je bil tudi francoski matematik in sploh za skorajda vse mogoče reči bister možakar **George-Louis Leclerc Comte de Buffon** (1707 - 1788). O njem je Presek pred leti že pisal; takrat o njegovem znamenitem problemu o metanju igle (E. Kramar: *Ocenjevanje približka števila π na osnovi preproste statistične metode*, Presek, št. 4, leto 1984/85). Buffonovo najpomembnejše delo so zagotovo *Priloge k zgodovini narave* (1777). In v *Eseju o moralni aritmetiki*, ki je sicer četrti del *Prilog*, je Buffon o našem uvodnem problemu približno takole razmišljal:

Verjetnost, da nam jutrišnjega dne Sonce ne vzide, naj bo po tem današnjem dnevu dvakrat manjša od verjetnosti, ki je veljala za ta dan. In tako naj velja sploh za sleherni dan - z vsakim naslednjim dnem se naj ta verjetnost razpolovi.

Prav zlahka iz Buffonovega razmišljanja razberemo, kako postaja verje-



tnost, da bi Sončevega vzhoda nekega dne na žalost nič več ne dočakali, ob takšnih predpostavkah sčasoma vse manjše in manjše. Na srečo!

Pri odgovoru na uvodno vprašanje je Buffon uporabljal danes že dobro udomačen dogovor: Verjetnost gotovega dogodka je označil z 1, verjetnost nemogočega dogodka z 0, verjetnost kateregakoli slučajnega dogodka pa je med 0 in 1. Tako je verjetnost zelo gotovega dogodka skoraj 1, verjetnost skoraj nemogočega dogodka pa je zelo blizu števila 0. Če, na primer, odleti v zrak kovanec, je verjetnost, da pade cifra, $\frac{1}{2}$, prav tolikšna pa je verjetnost, da pade grb. In vsota verjetnosti danega dogodka in verjetnosti negacije tega dogodka je vselej 1, neodvisno od samega dogodka.

Če sedaj s p označimo verjetnost, da bo Sonce vzšlo tudi jutri, s p' pa verjetnost, da ne bo vzšlo, je torej

$$p = 1 - p'$$

Naj bo $\frac{1}{2}$ začetna verjetnost v Buffonovem razmisleku tista torej, s katero "so pričakovali" vzhod Sonca takrat daleč nazaj, tistega "prvega dne" pred recimo 6 milijoni let. Že kar prvega dne menda zares ni bilo mogoče trditi, niti da bo Sonce zagotovo vzšlo in niti, da ga zagotovo ne bo na nebo, in je $\frac{1}{2}$ recimo da kar primerna vrednost za verjetnost prvega Sončevega vzhoda v zgodovini.

Verjetnost, da Sonce ne bi vzšlo naslednjega dne, potem ko mu je prvega dne to tako nadvse lepo uspelo, je v skladu z Buffonovim razmislekom le še $\frac{1}{4}$. Zatem pa se verjetnosti neprijetnega dogodka, da bi nas Sonce nekega dne na lepem pustilo na cedilu, po posameznih dnevih takole zvrstijo: $\frac{1}{8}, \frac{1}{16}, \frac{1}{32}, \frac{1}{64}, \dots$. In ker je nad Zemljo Sonce doslej vzšlo že približno 6000000 x 365 -krat, je verjetnost, da bo vzšlo tudi jutrišnjega dne

$$p = 1 - \frac{1}{2^{2190000000}} = 0,9999999999\dots$$

Pa imamo mi dandanašnji res pravo srečo, mar ne?

Mimogrede - ali znate povedati, koliko zaporednih devetic za decimalno vejico se vrsti v zgoraj zapisanem številu?

Opomba: Da ne bo zablude in pomot z nezaželenimi posledicami - omenjenemu in - priznam - tudi nekoliko za lase privlečenemu problemu ter hkrati Buffonovemu odgovoru nanj posvečamo pozornost seveda zgolj v okviru Buffonove teorije o kozmosu. O tem, koliko je ta njegova astronomija v skladu z danes veljavno, pa naj spregovori raje kakšna druga zgodba.

Vilko Domajnko

REŠITVE NALOG

TRIANGULACIJE VEČKOTNIKOV - Rešitev s str. 186

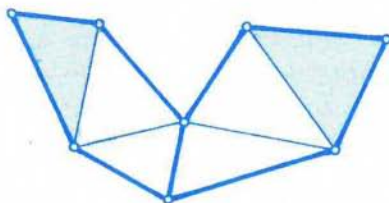
1. Naj pri triangulaciji n -kotnika nastane m diagonal. Ker je po izreku 1 v triangulaciji $n - 2$ trikotnikov, imajo ti skupaj $3(n - 2)$ stranic. Vsaka diagonalna meji na dva trikotnika triangulacije, vsaka stranica večkotnika pa na enega, zato velja enakost

$$3(n - 2) = 2m + n$$

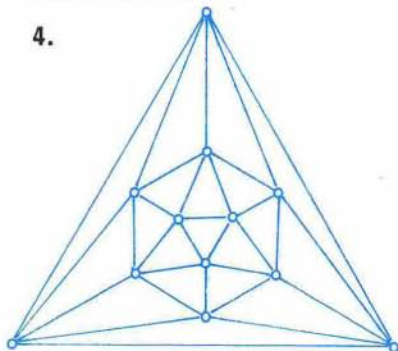
Od tod zlahka dobimo iskano število diagonal $m = n - 3$.

2. Vsaj eden od dveh trikotnikov triangulacije, katerih skupna stranica je diagonalna večkotnika, ima največ eno stranico na robu večkotnika. Obravnavani večkotnik ima namreč vsaj pet stranic.

3. Dokazujemo z matematično indukcijo. Za štirikotnik trditev očitno velja. Naj pri danem $n > 4$ trditev velja za vsak k -kotnik, kjer je $k < n$. Katerakoli diagonalna iz triangulacije n -kotnika ga razdeli na dva večkotnika, ki imata manj kot n stranic. Lahko je videti (premisli!), da v vsakem obstaja tak trikotnik iz triangulacije, ki ima dve stranici na robu prvotnega večkotnika, torej trditev velja tudi za n -kotnik.



4.



5. Iskano število označimo z m . Z uporabo izreka 2 na enak način kot pri nalogi 1 dobimo

$$3(r + 2k - 2) = 2m + r$$

od koder sledi

$$m = r + 3k - 3$$

6. Naj bosta $\mathcal{T}_1$ oziroma $\mathcal{T}_2$ družini vseh takih trikotnikov iz triangulacije z oglišči v $\mathcal{M}$, ki imajo na robu večkotnika eno oziroma dve stranici, družina $\mathcal{T}_0$ pa naj vsebuje vse trikotnike iz triangulacije, ki nimajo na robu nobene stranice. Označimo s p_0, p_1 in p_2 število trikotnikov v $\mathcal{T}_0, \mathcal{T}_1$ in $\mathcal{T}_2$. Vsak trikotnik iz $\mathcal{T}_1$ prispeva eno stranico robu večkotnika, vsak trikotnik iz $\mathcal{T}_2$ pa dve. Zato velja zveza

$$r = p_1 + 2p_2$$

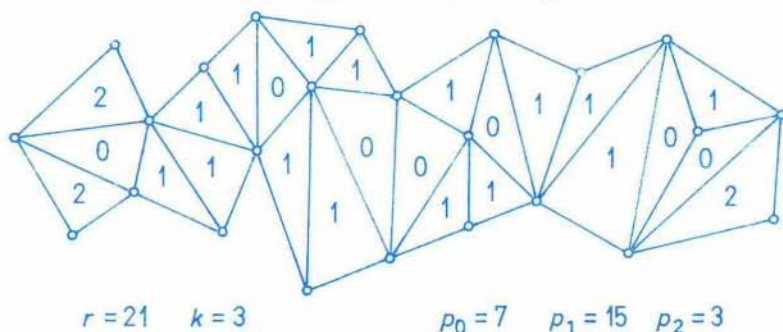
kjer je r število točk iz $\mathcal{M}$, ki ležijo na robu n -kotnika. Ker vsak trikotnik iz triangulacije pripada natanko eni izmed družin $\mathcal{T}_0, \mathcal{T}_1$ in $\mathcal{T}_2$, vseh skupaj pa je po izreku $2r + 2k - 2$, velja

$$r + 2k - 2 = p_0 + p_1 + p_2$$

Iz prve zveze izrazimo p_1 , ga vstavimo v drugo zvezo in dobimo

$$r + 2k - 2 = p_0 + (r - 2p_2) + p_2$$

Od tod sledi enakost $p_0 = p_2 + 2k - 2$, ki smo jo dokazovali.



ENAKE VSOTE - Rešitev s strani 129

Leva naloga: Sedmico iz prvega stolpca nadomestite z osmico, le-to pa z dvojko. Namesto dvojke postavite sedmico.

Desna naloga: Šestico v tretjem stolpcu nadomestite s šestico, le-to s sedmico, namesto sedmice pa postavite primarno obrnjen kartonček s šestico - torej z devetico.

Boris Lavrič

POSEBNI TRIKOTNIK - Rešitev s str. 218

Težiščnica iz oglišča A , višina iz B in simetrala kota C naj sekajo nasproti ležeče stranice trikotnika ABC zaporedoma v točkah E, F in D . Ker se AE, BF in CD sekajo v isti točki, lahko uporabimo Cevov izrek, po katerem je

$$\frac{\overline{AD} \cdot \overline{BE} \cdot \overline{CF}}{\overline{DB} \cdot \overline{EC} \cdot \overline{FA}} = 1$$

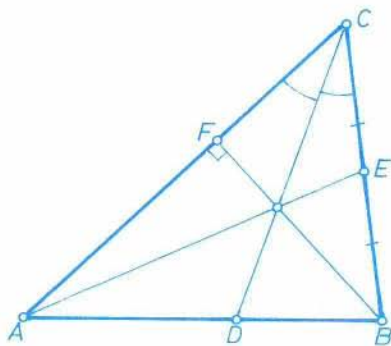
Seveda velja $\overline{BE} = \overline{EC}$ in po izreku o kotni simetrali še $\overline{AD} : \overline{DB} = b : a$. Izračunajmo $\overline{CF}$ in $\overline{FA}$. Postavimo $x = \overline{CF}$, $v = \overline{BF}$, dvakrat uporabimo Pitagorov izrek

$$\begin{aligned} x^2 + v^2 &= a^2 \\ (b-x)^2 + v^2 &= c^2 \end{aligned}$$

in že lahko izračunamo

$$\begin{aligned} \overline{CF} = x &= (a^2 + b^2 - c^2)/(2b) \\ \overline{FA} = b - x &= (b^2 + c^2 - a^2)/(2b) \end{aligned}$$

Dobljene zveze vnesemo v Cevov izrek in pred nami je iskana relacija $a(b^2 + c^2 - a^2) = b(a^2 + b^2 - c^2)$. Naloga je rešena, bralca pa čaka nova -



NAGRADNA NALOGA

Poišči s pomočjo osebnega računalnika nekaj posebnih trikotnikov s celoštevilskimi dolžinami stranic in določi tistega z najmanjšim obsegom. Rešitve, torej programe in dobljene rezultate, pošljite na naše uredništvo do 28.2.1991. Avtorji najboljših odgovorov bodo nagrajeni.

Boštjan Hostnik

MEGLA V PLASTENKI

Veliko prozorno plastenko za šumeče pijače oplakni z mlačno vodo, da na stenah pri dnu ostane nekaj kapljic. Plastenko nato obrni z odprtino navzdol in jo nekoliko stisni. Prijatelj naj pod odprtino plastenke podrži gorečo vžigalico ali papirček tako, da dim vstopa v odprtino. Da boš zajel več dima, stisk polagoma popuščaj, da se plastenka poravnava in pri tem poseša dim. Na obrnjeno plastenko privij pokrovček. Odslej naprej lahko plastenko poljubno obračáš. Podrži jo pred seboj proti svetlobi. Dima je v njej tako malo, da ga ne opaziš. Plastenko nato stisni in jo nekaj časa drži stisnjeno. Glej skozenjo proti svetlobi. Nato stisk popusti, da se plastenka poravna. Kaj opaziš v njej? Plastenko spet stisni. Kaj pa se zdaj zgodi?

Pri razlagi poskusa je treba vedeti, da se megla izloči iz nasičeno vlažnega zraka, če so v njem drobni delci – kondenzacijska jedra. Zrak v plastenki navlažimo tako, da zmočimo njene stene. V kratkem času izhlapi toliko vode, da je zrak skoraj nasičeno vlažen. Dodatno povečamo relativno vlažnost, če zrak na hitro ohladimo. Zrak se ohladi, če se razpne. To se zgodi, ko popusti sila na stene plastenke. Kot kondenzacijska jedra služijo dimni delci. Preden plastenko lahko popustimo, jo moramo stisniti. Pri stiskanju pa se zrak segreje. Zato moramo po stiskanju malo počakati, da plastenka odda toploto okolici, in šele nato dosežemo ohladitev pod okoliško temperaturo z raztegnitvijo. Zdaj tudi razumemo, zakaj megla v plastenki izgine, ko plastenko stisnemo. Zrak v njej se segreje in meglene kapljice v njem spet izhlape.

Poskusa s plavačem (str. 225) in meglo sta opisana tudi v osnovnošolskem učbeniku. S plastenkami, ki jih je dandanašnji mogoče najti povsod, pa je poskus mogoče narediti veliko učinkoviteje kot s steklenkami.

PADAJOČE DESKE

Naberi nekaj desk, kartonov, stiropornih plošč in drugih plošč pravokotne oblike. Postavljalj jih pokonci na gladkih tleh in jih spuščaj, da padejo. Zaznamuj lego spodnjega roba v začetni in v končni legi. Katera sila povzroči premik spodnjega roba? Ali ta sila odda padajoči plošči kaj dela? Ali se velikost in smer sile tal na ploščo med padanjem kaj spreminjata? Na to vprašanje odgovori posebej za navpično in posebej za vodoravno komponento sile tal. Vodoravna je posledica lepenja ali trenja.

Zakaj se nekatere plošče zapeljejo naprej, druge pa nazaj?

Janez Ferbar

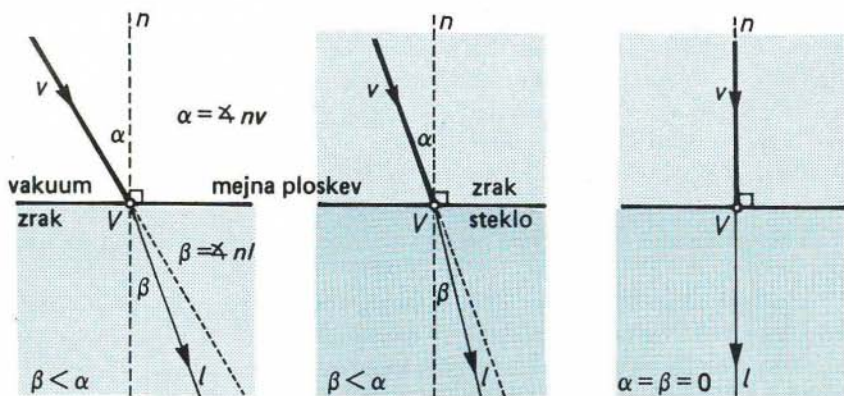
ASTRONOMIJA

ZAKAJ VIDIMO SONCE OB OBZORJU SPLOŠČENO

V praznem prostoru ali homogeni prozorni snovi se svetloba širi premočrtno. Svetlobni žarek je torej raven. Pri prehodu iz praznega prostora v prozorno snov ali pri prehodu iz ene prozorne snovi v drugo spremeni svojo smer, kot bi se lomil. Tako temu naravnemu pojavu tudi rečemo *lom* ali *refrakcija svetlobe* (slika 1; glej še *Presek 17, 26*).

Zrak je snov, ki je prozorna za svetlobo. Zemljo ogrinja zračna odeja - ozračje. To je prav tako prozorno za svetlobo, ki prihaja z oddaljenih vesoljskih teles, npr. planetov, Sonca, zvezd.

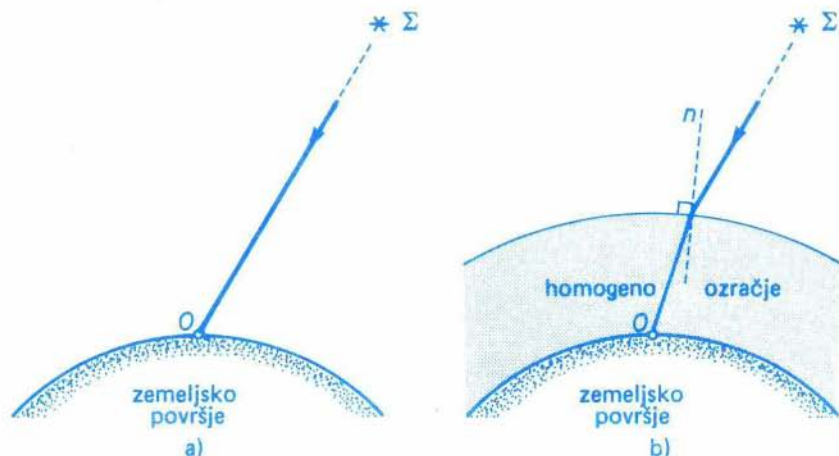
Svetlobni žarek, ki na primer prihaja z zvezde in pade v opazovalčevo oko na površju Zemlje, mora iti skozi ozračje. V primeri z medplanetnim prostorom, kjer praktično vlada vakuum, ima naše ozračje kar znatno gostoto (okoli 1 kg/m^3 ob morski gladini). Zato se svetlobni žarek pri prehodu iz medplanetnega prostora v ozračje lomi, torej spremeni smer* (slika 2).



Slika 1. V praznem prostoru ali homogeni prozorni snovi potuje svetlobni žarek premočrtno. Pri prehodu iz vakuumu v prozorno snov ali pri prehodu iz ene prozorne snovi v drugo pa spremeni svojo smer, se lomi. Pri tem velja *lomni zakon*: Vpadni svetlobni žarek v , lomljeni žarek l in pravokotnica n na mejno ploskev v vpadni točki V ležijo v isti ravnini. Vpadni kot α in lomni kot β , ki ju merimo med smerjo navpičnice in smerjo posameznega žarka, nista enako velika ($\alpha \neq \beta$). Če prihaja svetlobni žarek iz prozorne snovi z manjšo gostoto v prozorno snov z večjo gostoto, npr. iz zraka v steklo, se svetlobni žarek lomi k navpičnici. Ta primer nas bo tudi zanimal. Pri pravokotnem vpadu se svetlobni žarek ne lomi.

* Seveda svetloba z vesoljskega telesa utрпи še druge spremembe: razklon, vpoj, sipanje, migotanje zaradi turbulentnosti ozračja itn. V tem prispevku se bomo spoznali le s spremembo smeri.

Ker je ozračje sestavljeno iz zračnih plasti, ki jim gostota narašča proti zemeljskemu površju, se svetlobni žarek vse bolj in bolj lomi (k navpičnici na meji dveh plasti), ko prodira globlje v zračne plasti (slika 3). Zato vsa vesoljska telesa, razen tistih v zenitu, katerih svetlobni žarek predira zračne plasti pod pravim kotom (ni loma), vidimo višje, kot so v resnici (slika 3). Ali drugače povedano: vesoljsko telo vidimo v smeri, ki se nekoliko razlikuje od smeri, v kateri bi ga videli, če ne bi bilo ozračja. Omenjena sprememba smeri je odvisna od višine vesoljskega telesa nad obzorjem. Opazovanja kažejo, da pada z višino. Za vesoljsko telo, ki ga opazujemo tik ob obzorju (višina je nič), je sprememba smeri največja, in sicer $35'$ (kar je okoli pol stopinje); za vesoljsko telo na višini 5° je okoli $10'$; za vesoljsko telo na višini 10° je okoli $5'$, potem pa je vse manjša; za vesoljsko telo v zenitu (višina je 90°) pa je nič. (Seveda je sprememba smeri svetlobnega žarka odvisna še od temperature in tlaka ozračja.)

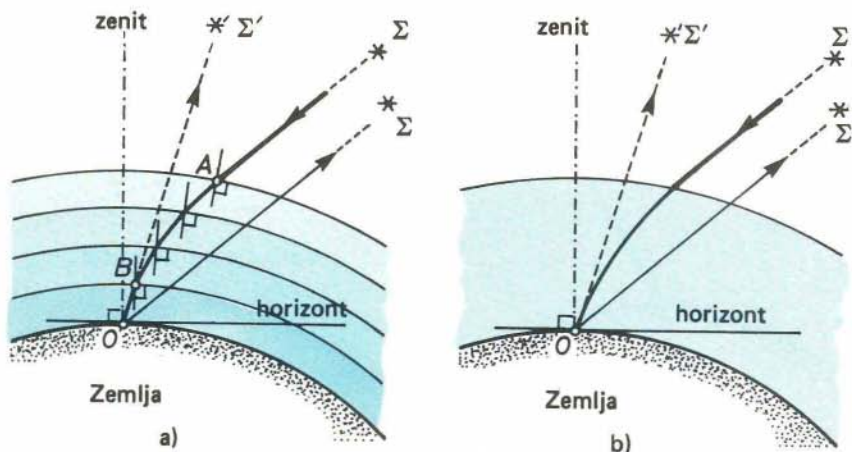


Slika 2. Pot svetlobnega žarka od zvezde do opazovalčevega očesa O na zemeljskem površju: a - če ne bi bilo ozračja; b - če privzamemo, da bi imelo ozračje zgornjo mejo in konstantno gostoto. *Opomba:* Najbrž pa veš, da ozračje ni enakomerno gosto, ampak da njegova gostota pada z nadmorsko višino. Pa tudi o zgornji meji je težko govoriti, saj ozračje polagoma prehaja v medplanetni prostor. Kolikšna je pravzaprav višina ozračja ali kot tudi rečemo, debelina zračne plasti? Opazovanja kažejo, da se zaradi trenja z zračnimi molekulami meteorji prižigajo na višinah 60 do 90 km. Polarne sije, ki so naravni pojavi v našem ozračju, zabeležijo na višinah 800 do 900 km. Torej sega ozračje visoko. Bodi kakorkoli že. V višinah, večjih od 100 km, ima zrak že tako majhno gostoto, da ga imamo lahko pri obravnavanju loma svetlobe za vakuum. Privzemimo, da je debelina ozračja okoli 100 km. To je zelo malo v primeri s polmerom Zemlje, ki meri 6400 km. In prav v tej tanki zračni plasti spremeni svetlobni žarek z oddaljenega vesoljskega telesa svojo smer (glej dalje).

Zaradi loma svetlobe v zemeljskem ozračju torej vidimo vesoljska telesa višje, kot so v resnici. Zaradi tega pojava se na primer podaljša čas, v katerem je vidno Sonce nad obzorjem; dan je torej daljši kot v resnici.

Sonce vidimo kot enakomerno svetlo okroglo ploščico pod zornim kotom okoli $30'$. Ob zahodu Sonca, ko je prava višina središča Sonca enaka nič, vidimo Sonce še nad obzorjem. Višina njegovega središča je namreč okoli $35'$. Sonce zaide šele čez nekaj minut, ko je središče Sonca $35'$ pod obzorjem oziroma, ko je višina središča Sonca okoli $-35'$. Prav tako zaradi loma svetlobe v ozračju vzhaja Sonce nekoliko prej. Iz tega sledi, da ob enakonočju dan ni enak noči. Ob enakonočju je npr. na ekvatorju dan, to je čas, v katerem vidimo Sonce nad obzorjem, za okoli 4,5 minut daljši od noči.

Zaradi loma v ozračju vidimo Sonce (in tudi Luno) tik ob obzorju rahlo sploščeno (slika 4). Sploščenosti Sonca se navadno pridružijo še drugi optični pojavi tako, da Sonce ob zahodu včasih nudi prav čudovit in veličasten prizor narave.

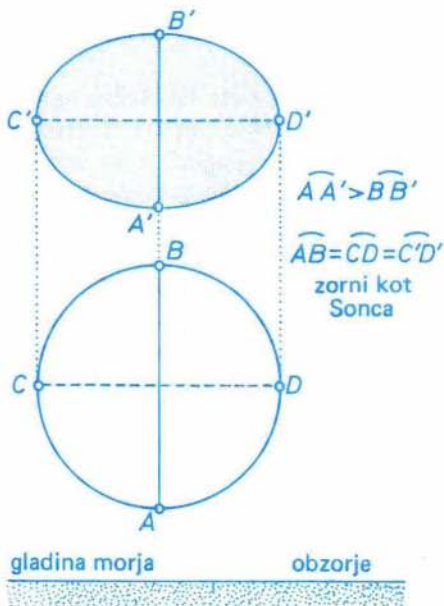


Slika 3. Pot svetlobnega žarka od zvezde Σ skozi ozračje, kjer se lomi (k navpičnici) v številnih zračnih plasteh, do opazovalčevega očesa O na dnu ozračja.

a) ΣA je začetni del poti žarka v medzvezdnem in medplanetnem prostoru; A naj bo točka na vrhnji plasti ozračja, v katero vpade žarek, BO je končni del poti žarka, ki prispe v oko; opazovalec vidi zvezdo v smeri OB oziroma v smeri $O\Sigma'$, torej opazuje zvezdo višje, kot je v resnici. $O\Sigma$ prava (resnična) smer zvezde, $O\Sigma'$ opazovana (navidezna) smer zvezde, $\angle \Sigma'O\Sigma$ kot med pravo in opazovano smerjo pove spremembo smeri svetlobnega žarka na poti skozi ozračje za vesoljsko telo na določeni višini.

b) V bistvu se svetlobni žarek ne ukrivlja "lomljeno", ampak zvezno. Zato je pot svetlobnega žarka skozi ozračje zvezna krivulja. Zaradi boljšega razumevanja je sprememba smeri narisano pretirano.

Slika 4. Razlaga sploščenosti Sonca ob obzorju. Naj bosta A in B krajišči navideznega premera Sončeve ploskvice (zornega kota) v legi tik ob obzorju, če ne bi bilo ozračja. Zaradi loma svetlobe v ozračju se točka A dvigne više kot točka B . A se dvigne v A' , B pa v B' . Ker je višina točke A manjša od višine točke B , je sprememba smeri AA' večja od spremembe smeri BB' . Sledi, da je navpični navidezni premer $A'B'$ nekoliko manjši od navideznega premera $AB = CD$, ki je pravzaprav zorni kot Sonca, katerega vrednost okoli $30'$ se zaradi loma ne spremeni. Zato je Sonce ob obzorju, npr. ob morsk gladini narahlo sploščeno. Na sliki je sploščenost prikazana pretirano. Glej še sliko 5.



Slika 5 Zahajajoče Sonce opazujemo sploščeno zaradi loma svetlobe v zemeljskem ozračju. (Slikano s Celestronom 8. Foto Herman Mikuž, IV. stran ovitka, levo zgoraj.)

Marijan Prosén

OBRNJENI FERMAT — Rešitev s str. 218

Denimo, da pri danem $n \in \mathbb{N}$ števila $x, y, z \in \mathbb{Z}$ rešijo enačbo $n^x + n^y = n^z$. Očitno je $n > 1$, $x < z$, $y < z$, poleg tega pa smemo brez škode privzeti, da je $x \leq y$. Če delimo enačbo z n^x in potem preuredimo, dobimo

$$1 = n^{y-x}(n^{z-y} - 1)$$

Ker sta eksponenta $y - x, z - x$ cela in velja $y - x \geq 0, z - x \geq 1$, mora biti $y - x = 0$ in $n^{z-y} = 2$. Od tod sledi $n = 2, y = x$ in $z = x + 1$. Torej so edine rešitve prvotne diofantske enačbe pri $n \in \mathbb{N}$ dane s formulo

$$n = 2, (x, y, z) = (x, x, x + 1), x \in \mathbb{Z}$$

Boris Lavrič

KOLIKO ČASA ZAHAJA SONCE

"To pa res ne more biti težko ugotoviti," porečeš in nadalje najbrž takole razmišljaš: "Jasnega večera tik pred zahajanjem Sonca udobno sedem v travo ali pa na klop. Pogledam na uro in z nje odberem čas t_1 , ko se spodnji rob Sonca navidezno dotakne daljnje gore ali pa gladine morja. Nekaj časa potrpi in nato z ure odberem čas t_2 , ko se zgornji rob Sonca navidezno dotakne gore, to je torej trenutek, ko je Sonce pravkar zašlo. Razlika časov $t_2 - t_1$ mi da čas zahajanja Sonca za določen predmet (goro, hišo, morje) tistega dne (slika 1). Ker pa Sonce ni vedno na istem mestu na nebesni krogli (nebu), je zato njegov čas zahajanja v različnih dneh različen. Vse je še odvisno od kota, pod katerim zahaja Sonce za oddaljeni predmet, in tudi od oblike različnih predmetov."

Dobro razmišljaš. A ko boš poskusil to, o čemer si pravkar modroval, narediti, boš verjetno naletel na večje ali manjše težave. Kmalu si boš na jasnem, da si precenil svoje sposobnosti in da tudi tako preprosto opazovanje zahteva celega človeka.

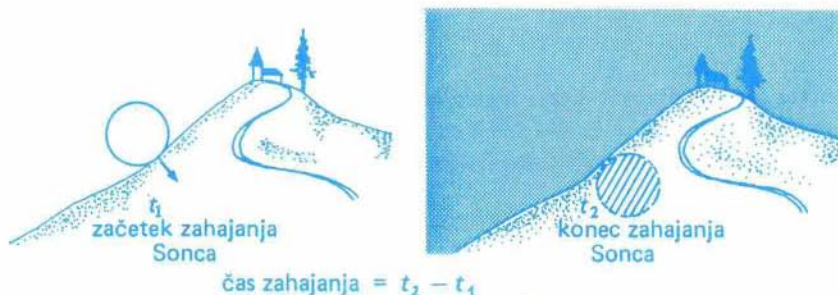
Imam pripombe. Tole bi te rad vprašal:

Ali si med tem, ko si opazoval zahajanje Sonca, premikal glavo? Če si jo, je tu že precejšnja napaka pri merjenju časa.

Ali si opazoval z enim očesom? Če nisi, je prišlo spet do napake (paralakse; glej *Presek*, 18, 50).

Ali si zahajanje Sonca opazoval z okajeno šipico, varilskim steklom, močno obarvanim filtrom, očrnjenim filmom ali vsaj temnimi očali? Če nisi, si naredil slabo uslugo svojim očem, saj je bilo tako opazovanje nevarno za tvoj vid. Sonca namreč ne smeš opazovati s prostim očesom, ker si lahko poškoduješ mrežnico očesa in si tako uničiš vid. Lahko pa ga opazuješ skozi

Slika 1. Zahajanje Sonca za oddaljeno goro.



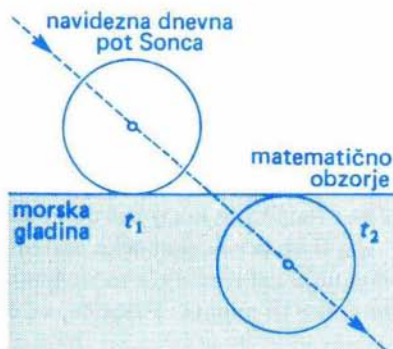
meglo, na primer v megličastih jesenskih večerih. Takih pa je pri nas mnogo. Vendar vedno velja: **Pri opazovanju Sonca bodi zelo previden.**

Ali si opazoval sam ali v družbi? Če si opazoval sam, je dolgčas. Celo pri merjenju si lahko manj natančen kot v družbi. Ker si dvakrat pogledal na uro in nato glave najbrž nisi vsakič postavil v enako poprejšnjo lego, je tudi prišlo do napake. Mnogo bolje je meriti s stoparico. Še najboljše je, da zahajanje Sonca opazujeta dva. Prvi opazuje Sonce, drugi pa na znak prvega odbira čas. Drugi večer pa zamenjata vlogi.

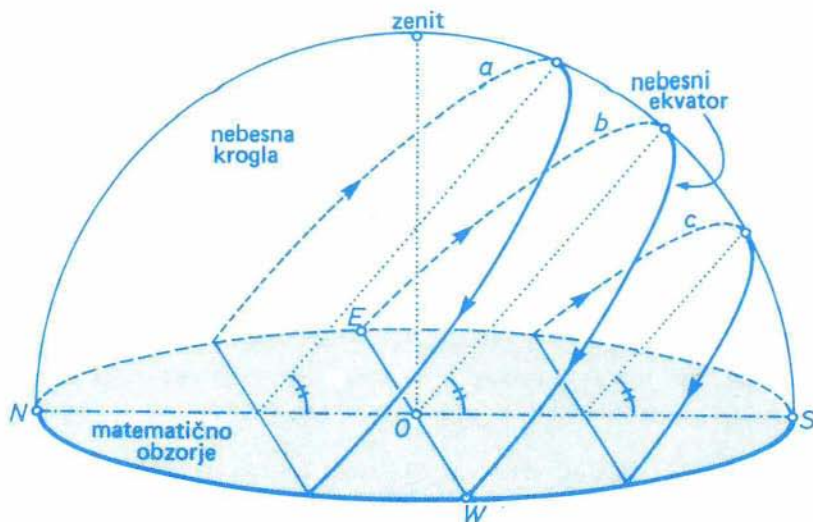
Če te zanima le to, kako se Sonce polagoma potaplja oziroma izginja za oddaljeno goro, potem opazuj samo ta pojav. Nič ne meri. Le uživaj ob pogledu na zahajajoče Sonce in včasih prav čudovite in enkratne prizore narave pri tem, npr. spreminjajoče se barve večernega neba. Če pa bi iz takega opazovanja rad izluščil kaj več, potem se loti opazovanja, kar se da resno.

Predlagam ti namreč, da poskušaš oceniti čas zahajanja Sonca za vodoravno ravnino (obzorje), najbolje za gladino morja, v različnih dneh leta (slika 2). Sonce zahaja (in tudi vzhaja) vsak dan drugje in vsakič za predmetom drugačne oblike. Zato je čas zahajanja vsakič drugačen. Tudi če bi vsak dan meril čas zahajanja Sonca za idealno obzorje, kot ga najbolje predstavlja gladina morja, bi ugotovil, da se čas zahajanja spreminja. Poskusi oceniti čas zahajanja Sonca za vodoravno ravnino (streho, zid) v različnih dneh v letu. Opazuješ npr. vsak deseti dan. Sestavi preglednico:

datum	začetek zahajanja	konec zahajanja	čas zahajanja	opombe
	t_1	t_2	$t_2 - t_1$	
...	...	...	...	...



Slika 2. Zahajanje Sonca za matematično obzorje.



Slika 3. Navidezna dnevna pot Sonca na srednjih zemljepisnih širinah, npr. pri nas: *a* - ob letnem solsticiju (kresu), *b* - ob enakonočju, *c* - ob zimskem solsticiju (božiču). Ob enakonočju se Sonce giblje praktično po nebesnem ekvatorju, v drugih dneh pa skoraj po vzporednikih, vzporednih z nebesnim ekvatorjem. *O* pomeni opazovališče.

Slika 4. Štiri faze zahajanja Sonca. Slikano s Celstronom 8. Foto Herman Mikuž. (Glej četrto stran ovitka)

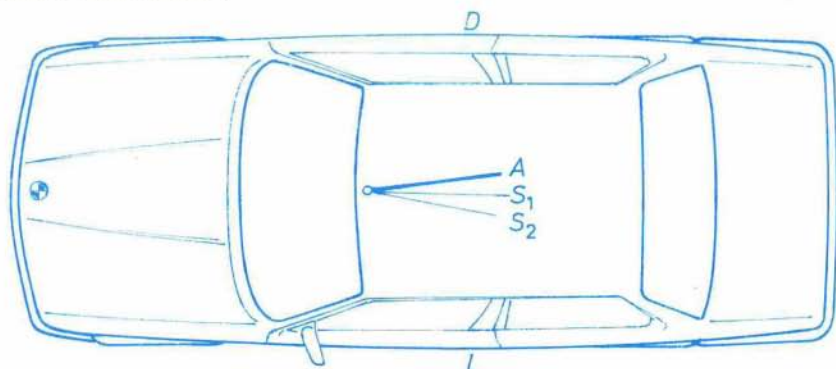
Zakaj se spreminja čas zahajanja Sonca celo za idealno obzorje? Najenostavnejša razlaga bi bila takale: Naklonski kot navideznih dnevnih poti Sonca proti obzorju se med letom ne spreminja (slika 3). Torej se Sonce spušča glede na vodoravno ravnino vedno enako. (Po vzporednikih se giblje Sonce počasneje, torej dalj časa zahaja, kot ko se giblje po nebesnem ekvatorju.) Sonce tudi ne spreminja svoje velikosti, to je polmera. Razdalja med Zemljo in Suncem pa se spreminja. To pomeni, da z Zemlje vidimo Sonce pod različnimi zornimi koti. Pozimi nam je Sonce bližje kot poleti. Pozimi ga opazujemo pod večjim zornim kotom kakor poleti. Zato pozimi zahaja dalj časa kot poleti. Vendar razlika med najdaljšim časom zahajanja Sonca pozimi in najkrajšim časom zahajanja Sonca poleti ni tako velika, kot navadno mislimo. Razlika je manj kot deset sekund.

Naj ti ob koncu prispevka posredujem še dva zanimiva podatka. V krajih na ekvatorju zahaja Sonce za matematično obzorje dobri dve minuti. Pri nas pa že dobre tri minute. Prepričaj se o tem.

Marijan Prosén

SLIKE S TRGATVE

Letos je bila trgatav zgodnja in sladka. Oktobrsko sonce je sijalo in gostov se je nabralo v gorica kot škorcev. Avtomobili so zapolnili vse kolovoze, in ko sem za trenutek sedel k brenti, sem se z brega ozrl v bleščečo rdečo pločevinasto streho lepota pod seboj. Z roba strehe je štrlela poševna antena A proti sredini, na strehi pa sem videl dve njeni podobi: S_1 in S_2 . Ponujal se mi je takle pogled:



"Le zakaj sta na sliki dve podobi anten," sem premišljal. Medtem je sonce zakril oblak in podoba S_1 je izginila. Potemtakem lahko vprašanje za vas postavim takole:

1. Zakaj sta na avtomobilski strehi dve podobi antene, kadar sije sonce? Narišite, v kateri smeri je sonce.

Med mojim premišljevanjem so mi berači napolnili brento in vstati je bilo treba. Še med vstajanjem sem zrl na streho in ena od podob se je ob tem premaknila tako, da sem stoje videl podobo S_2 med A in S_1 .

2. Katera podoba se zaradi gibanja opazovalca premika? Zakaj? Na kateri strani avtomobila je bil opazovalec - na levi L ali na desni D ?

Ko sem se s prazno brento vračal mimo avta, sem pazljivo položil kamenček na krajišče tiste podobe, ki je mirovala, čeprav sem hodil ob avtu in premikal glavo. Ko pa sem čez dan še večkrat prišel mimo, sem opazil, da se je ta podoba daljšala.

3. Zakaj se ena podoba antene na strehi čez dan daljša? Kaj se pri tem dogaja z drugo podobo, če jo opazujemo vselej z istega mesta?
4. Antena se je lesketala v soncu. Na eni podobi se je to videlo, na drugi pa ne. Katera podoba se ne lesketa kot antena in zakaj ne?
5. Ker sem s premikanjem očesa lahko dosegel, da se je ena podoba antene lahko daljšala ali krajšala, sem se hotel postaviti tako, da bi se obe podobi na strehi natanko pokrili. Ko mi je to uspelo, se mi je v očeh zalesketala podoba sonca, da mi je skoraj vzelo vid. Z risbo razloži, zakaj se sončni zajček znajde ravno v opazovalčevem očesu, ko se obe sliki antene pokrijeta.

Če so naloge pretežke za risbo in razmislek, jih lahko rešiš s poskusom. Pločevinasto streho predstavi z zrcalom, anteno s slamico v plastelinski kepici ali v krušni sredici, za sonce pa uporabi žepno svetilko. Poskus naredi v sobi z zastrtimi zavesami.

6. Če poskus narediš z dobro očiščenim zrcalom, ne uspe. Opaziš samo eno podobo. Katero? Če hočeš videti obe podobi, mora biti zrcalo prašno. Nanj pihni malo moke ali zdroba.
Če na zrcalo napihaš preveč prahu, prvotna podoba izgine in ostane samo druga. Razloži zakaj.
Avtomobilska streha je torej podobna prašnemu zrcalu. To lastnost obdrži, če jo še tako zloščiš. Kako to?
7. Včasih kdo pravi: "Zjutraj so sence dolge, proti poldnevu se krajšajo, nato pa se spet daljšajo." To ni vedno res. Zapiči dopoldne palico tako, da se bo njena senca podaljševala, ko bo šla ura proti poldnevu. Popoldne pa zapiči palico tako, da se bo njena senca skrajševala, ko bo sonce potovalo proti zatonu.

Janez Ferbar

MILI METER

V šoli sem nekoč malce presenečen poslušal študentko, ki je vpeljevala nov način sklanjanja enot: "Premier žice je pet milih metrov." Njen predlog za sklanjanje je potemtakem naslednji: mili meter, milega metra, milemu metru, ... Prav prijetno se sliši, mar ne? Poskusimo to še z drugimi enotami. Mili amper, milega ampera, ... mili henry, milega henryja, ... Veliko prijaznejša bi bila fizika ob takem sklanjanju.

Janez Ferbar

KYOTO 1990

Matematiki iz vsega sveta se vsaka štiri leta zberejo na mednarodnem kongresu. Od 21. do 29. avgusta 1990 se jih je tako v Kyotu, na Japonskem, zbralo okoli štiri tisoč, prišli pa so iz več kot osemdesetih držav, med njimi tudi iz Jugoslavije.

Na številnih predavanjih so vodilni strokovnjaki, večinoma iz najuglednejših univerz širom po svetu, predstavili najpomembnejša odkritja teoretične (in deloma tudi uporabne) matematike v zadnjih štirih letih ter našli najpomembnejše nerešene probleme, s katerimi naj bi se v prihodnje spoprijeli. Očitno je, da se matematika izredno hitro razvija. Iz leta v leto raste število raziskovalcev, rojevajo pa se tudi nova področja. Eno najpomembnejših sporočil kongresa je, da igra teoretična fizika vse pomembnejšo vlogo v nekaterih vejah matematike, predvsem v topologiji in diferencialni geometriji.

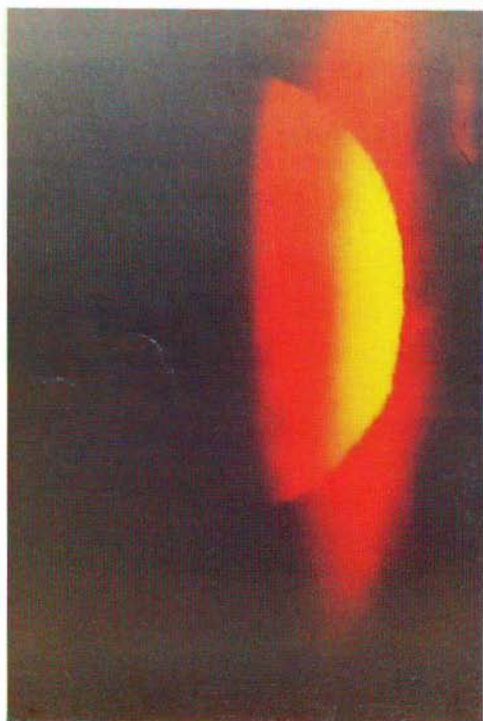
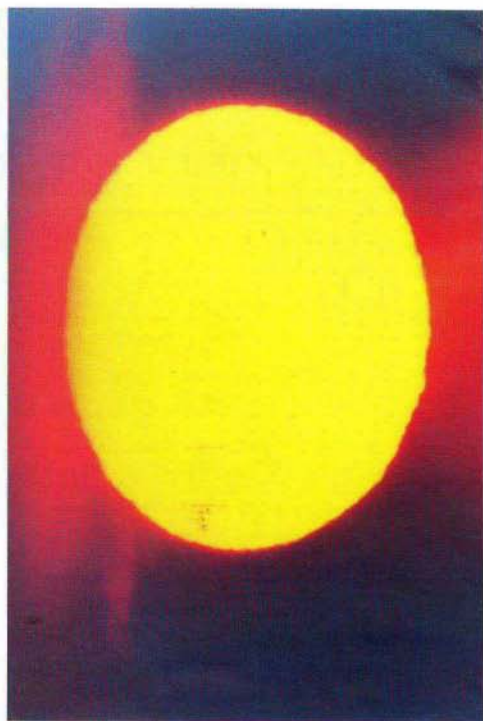
V Kyotu so že dvanajstič podelili Fieldsove medalje. To je največje priznanje, ki ga lahko matematik prejme za svoje raziskovalno delo. Nagrada je v marsikaterem pogledu enakovredna Nobelovim nagradam (kot je znano, Nobelovih nagrad za matematiko ne podeljujejo), imenuje pa se po kanadskem matematiku J.C. Fieldsu. Zanimivo je, da jo lahko dobijo le mlajši od 40 let. Tokrat so bili dobitniki nagrade štirje: 36-letni Rus V. Drinfel'd, 37-letni Američan V. Jones, 38-letni Američan E. Witten (fizika) ter 39-letni Japonec S. Mori. Vsi nagrajenci so že v rani mladosti pokazali izjemno nadarjenost za matematiko, Fieldsove medalje pa so prejeli za izjemno pomembne rezultate v obdobju minulih deset let.

Naslednji mednarodni kongres matematikov bo čez štiri leta v švicarskem mestu Zürichu, ki je doslej že dvakrat gostilo to prireditev. Morda bo med udeleženci tudi kakšen bralec Preseka.

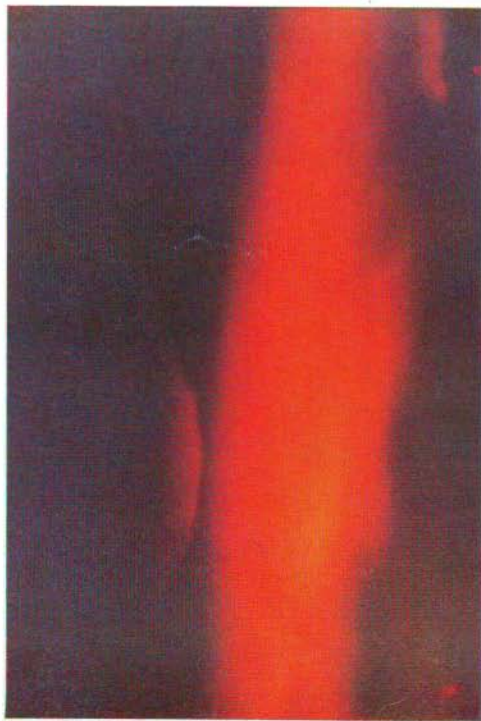
Dušan Repovš



Japonci so v času kongresa izdali zelo lepo znamko.



3



4