

3

PRESEK

DRUŠTVO MATEMATIKOV, FIZIKOV IN ASTRONOMOV SLOVENIJE,
LETNIK 18 1990/91

PRESEK – list za mlade matematike, fizike, astronome in računalnikarje
18.letnik, leto 1990/91, številka 3, strani 129-192

VSEBINA

FIZIKA	Veriga in oboki (Andrej Likar).....	130
MATEMATIKA	Popolni kvader (Edvard Kramar).....	134
	Večkotniki na kvadratni mreži. Rešitve nalog str. 154 (Boris Lavrič).....	140
RAČUNALNIŠTVO	Naslov (Ciril Pezdir).....	146
RAZVEDRILO	Slikovna križanka "Matematični pojmi" (Marko Bokalič)....	153
	Ali lahko manjšina zmaga na volitvah? (Vilko Domajnko)...	156
	Stella Octangula (Vilko Domajnko).....	160
REŠITVE NALOG	Pogovarjamo se s pomočjo računalnika – Rešitev s str. 86 (Jernej Čop).....	145
	Družinska – Rešitev s str. 113 (Boris Lavrič).....	155
	Slikovna križanka "Fizikalne enote" – Rešitev s str. 121 (Marko Bokalič).....	161
	6. šolsko tekmovanje iz matematike za srednješolce – Rešitve s str. 94 (Darjo Felda).....	162
	Tri praštevilske – Rešitev s str. 99 (Boris Lavrič).....	165
	16. izbirno tekmovanje iz matematike za srednješolce – Rešitev s str. 94 (Darjo Felda).....	166
	25. tekmovanje za srebrno Vegovo priznanje – Rešitve nalog s str. 108 (Aleksander Potočnik).....	170
	Povprečnik in njegovi prebivalci – Rešitve s str. 89 (Boris Lavrič).....	173
	Še dve Eccovi nalogi – Rešitve s str. 44 (Izbr. in prev. Neža Mramor).....	174
	14. republiško tekmovanje iz računalništva – Rešitve s str. 100 (Sandi Klavžar).....	176
	Nekaj navodil tistim, ki želijo obogateti – Rešitve s str. 122 (Prev. in pril. Neža Mramor).....	191
MATEMATIKA	Triangulacije večkotnikov (Boris Lavrič).....	186
	Zasukaj premico (Boris Lavrič).....	192
NALOGE	Enake vsote (Boris Lavrič).....	129
	Pravokotni trikotnik (D.M.Milošević, prev. Boris Lavrič)....	133
	Številski trapez (Milena Strnad).....	139
	Pravilni osemnajstkotnik (D.M.Milošević, prev. in pril. Boris Lavrič).....	159
	Četrta praštevilska (Boris Lavrič).....	175
	Kako razdeliti? (Vilko Domajnko).....	190
	Na velikem papirnatem traku ... (D.M. Milošević, prev. Peter Petek).....	191
PISMA BRALCEV	Janezova naloga (Dušica Boben).....	183
	Pisal nam je ... (Damjan Kobal).....	184
	Odprto pismo šolski javnosti (Anzenik Ivo).....	184
NA OVITKU	Antemija Izidor in Izidor sta bila vodilna arhitekta svojega časa in vodji del pri gradnji Hagie Sophie.....	I

ENAKE VSOTE

Kartončki so opremljeni s števkami od 1 do 9 in zloženi v tri stolpce, kot kaže slika spodaj levo. Prestavite tri kartončke tako, da bodo stolpci ostali na svojih mestih, vsota števk pa bo v vseh treh stolpcih enaka.

Seveda je šlo delo gladko od rok, zato enako nalogo opravite še s kartončki, ki jih kaže slika spodaj na desni.

1	2	4
6	3	8
7	5	9
14	10	21

1	2	3
4	5	6
8	7	9
13	14	18

Boris Lavrič

PRESEK

list za mlade matematike, fizike, astronome in računalnikarje
18.letnik, šolsko leto 1990/91, številka 3, strani 129-192

UREDNIŠKI ODBOR: Vladimir Batagelj, Tanja Bečan (jezikovni pregled), Dušica Boben (pisma bralcev, stavljenje teksta), Vilko Domajnko, Darjo Felda (tekmovanja), Bojan Golli, Marjan Hribar, Sandi Klavžar (računalništvo), Damjan Kobal, Edvard Kramar (Presekova knjižnica), Boris Lavrič (matematika, odgovorni urednik), Andrej Likar, Matija Lokar, Bojan Mohar (glavni urednik), Franci Oblak, Peter Petek, Pavla Ranzinger (astronomija), Marjan Smerke (svetovalec za fotografijo), Miha Štalec (risbe), Ciril Velkovrh (urednik, nove knjige, novice), Marija Vencelj.

Dopise pošiljajte in list naročajte na naslov: Društvo matematikov, fizikov in astronomov SR Slovenije - Podružnica Ljubljana - Komisija za tisk, Presek, Jadranska c. 19, 61111 Ljubljana, p.p. 64, tel (061) 2665-061/53, št. žiro računa 50101-678-47233. Naročnina za šolsko leto 1990/91, vplačana do 31. 12. 1990, je za posamezne naročnike 100.- din, za skupinska naročila šol 80.- din, posamezna številka 20.- din (16.- din), za tujino 20 000 lir.

List sofinancirajo RKRDT, RKVITK in RKK

Ofset tisk Časopisno in grafično podjetje DELO, Ljubljana

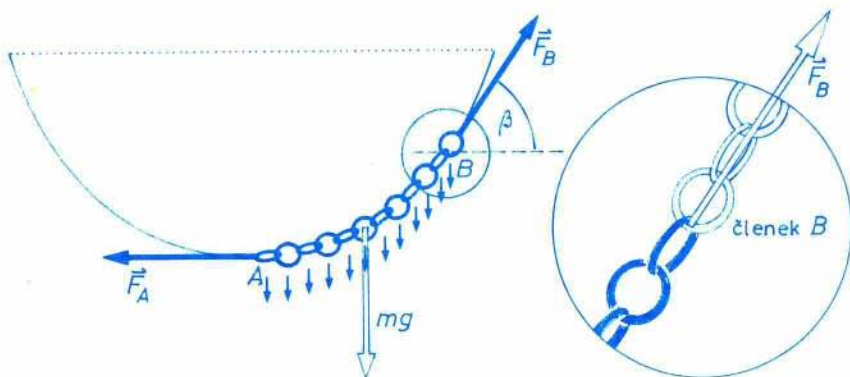
Tekst je postavljen z računalnikom SLIM 286, ALTECH, Ljubljana

© 1990 Društvo matematikov, fizikov in astronomov Slovenije - 1036

VERIGA IN OBOK

Veriga je zanimivo telo. Vsa je gibka, prenese le natezne sile. Členki so namreč gibljivi v vse smeri, le pri nategu se oprejo drug na drugega in kljubujejo dokaj veliki sili. Trdnost in gibkost sta ugodni lastnosti, ki uvrščata verigo med nepogrešljiva mehanična orodja.

Veriga, ki jo ohlapno pritrdimo med drevesi, se umiri v značilni legi. Opazujemo kos verige med najnižjim členkom A in členkom B nekje blizu pritrdišča in poiščimo vse sile, ki na ta kos delujejo (slika 1). Najprej je tu



Slika 1. Zunanje sile na kos verige med členkoma A in B .

teža kosa, ki jo sestavljajo teže vseh členkov in deluje navpično navzdol ter je enaka produktu mase vseh členkov v opazovanem delu verige in pospeška prostega pada g :

$$F_g = m g$$

Opazovani del verige je vpet v preostalo verigo. Členek A vleče kos verige v vodoravni smeri, to je v smeri svoje vzdolžne osi, s silo F_A . Členek B vleče v smeri svoje vzdolžne osi s silo F_B . Sili F_A , F_B in težo imenujemo *zunanje sile*, ker jih povzročajo telesa, ki jih ne štejemo k izbranemu kosu verige. Sile med členki opazovanega dela verige pa so *notranje sile*. Opazovani kos verige je *sistem*, vsa preostala telesa pa tvorijo *okolico*. Preostale zunanje sile (na primer vzgon v zraku) pa zanemarimo.

Prvi Newtonov zakon omogoča, da zunanje sile podrobneje opredelimo. Opazovani kos verige miruje, zato mora biti vsota vseh zunanjih sil nanj

enaka nič. To pomeni, da morata biti teža in navpična komponenta sile F_B nasprotno usmerjeni in po velikosti enaki:

$$F_B \sin \beta = mg \quad (1)$$

Podobno velja za vodoravno komponento sile F_B in silo F_A :

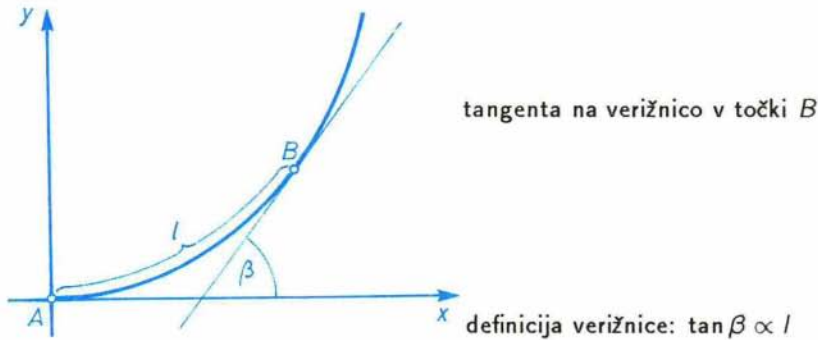
$$F_B \cos \beta = F_A \quad (2)$$

Iz obeh enačb sledi

$$\tan \beta = mg / F_A \quad (3)$$

kar dobimo, če delimo med seboj levi in desni strani enačb (1) in (2) in upoštevamo, da je $\tan \beta = \sin \beta / \cos \beta$.

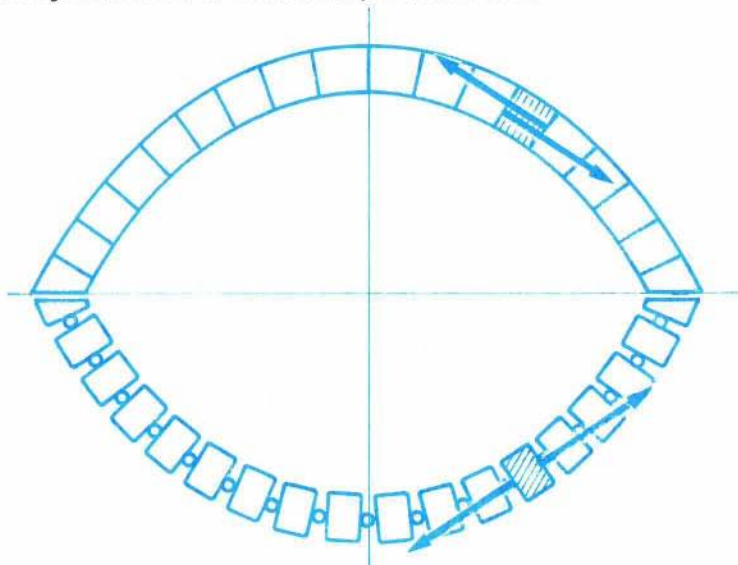
Krivulji, ki se prilega prosto viseči verigi, pravimo *verižnica*. Da pridemo do nje, si moramo misliti zelo tanko homogeno verigo z zelo velikim številom členkov. Kot β je tedaj kot med tangento na verižnico in vodoravnico, izraz homogena pa pomeni, da je masa kosa verige sorazmerna z njegovo dolžino. Vse zapisane enačbe ostanejo pri tem veljavne. Tangens naklonskega kota tangente na verižnico je torej sorazmeren z dolžino l , ki jo štejemo od točke, v kateri je tangenta vodoravna (slika 2).



Slika 2. Pri verižnici je tangens naklonskega kota tangente v poljubni točki B sorazmeren z dolžino krivulje med točko A , v kateri je tangenta vodoravna, in izbrano točko B .

Naredimo verigo, katere členki so kamniti in povezani med seboj s kaveljčki, ki so skriti v vdolbinicah sredi kamnov (slika 3). Sosednja kamna sta tako oblikovana, da se z ravnima vzporednima ploskvama skoraj dotikata. Izbran kamen vlečeta sosedja s silama, ki sta pravokotni na ravni ploskvi kamna. Postavimo zdaj to "verigo" na glavo, pa dobimo kamnit obok. Kamni

se dotikajo drug drugega, izbrani kamen sedaj sosednja dva stiskata s prav tako velikima silama, kot sta ga prej vlekla vsaksebi. Obok v obliki pokončne verižnice je zato trden in se ne zruši pod lastno težo.



Slika 3. V oboku v obliki pokončne verižnice so kamni le stisnjeni, obok je trden in ne poka.

Do tega pomembnega spoznanja je prvi prišel Anglež Robert Hooke, znan po zakonu o raztezanju prožnih teles. Skupaj z arhitektom Christopherjem Wrenom je pomagal graditi London po znanem velikem požaru v sedemnajstem stoletju. Mnogi poznavalci arhitekture so prepričani, da je Wren uspešno uporabil misel o obrnjeni verigi pri načrtovanju velikih stavb, na primer cerkve sv. Pavla v Londonu.

Misel o obrnjeni verigi je vredno uporabiti tudi pri gradnji kupol z zidaki. Gradbeni elementi so v kupoli le stisnjeni, če je kupola v navpičnem prerezu podobna pokončni verižnici. Kupole drugačnih oblik rade pokajo. Tega

¹ Prokopij iz Cezareje, *Pod Justinijanovim žezlom*, Cankarjeva založba, Ljubljana, 1961

² Slopi: verjetno provizorični gradbeni deli, ki so jih po dokončanju oboka odstranili.

³ Antemij, Izidor sta bila vodilna arhitekta svojega časa in vodji del pri gradnji Hagie Sophie.

verjetno ni poznal Michelangelo pri gradnji cerkve sv. Petra v Rimu. Z vzdrževanjem njegove kupole imajo Italijani danes precej sitnosti. Kupolo so na spodnjem koncu, kjer najbolj poka, opasali z vrsto jeklenih obročev, ki delno preprečujejo nadaljnje poškodbe. Vprašanje pa je, če bi bila "pravilna" kupola prav tako lepa, kot je Michelangelova.

Danes gradijo kupole iz železobetona ali podobnih materialov. Kupole so tanke in lahke, lupina pa tako trdna, da brez težav prenese tudi velike upogibne obremenitve.

Zgodovinar Prokopij iz Cezareje¹ takole hvali cesarja Justiniana ob gradnji Hrama Svete Modrosti (Hagie Sophie v Carigradu) v šestem stoletju našega štetja:

"Cesar je sodeloval pri gradnji ne samo z denarjem ampak tudi z naporom miselnim delom in z vsemi silami svoje bogate duševnosti, kot bom razložil v nadaljevanju. Eden od obokov, ... - arhitekti jih imenujejo tudi 'rebra' (loroi), je bil že na obeh straneh sezidan, le na sredini še ni bil dovršen, ampak je čakal zaključne obdelave. Slopi (pessoj) ², na katerih je temeljila celotna konstrukcija, niso mogli več vzdržati gmote, ki je pritiskala nanje, nenadoma so se v njih pojavile razpoke in zdelo se je, da se bodo vsak čas sesuli. Antemij, Izidor ³ in njuni sodelavci so se ob tem prestrašili; ker si s svojo tehniko niso vedeli pomagati, so vso zadevo sporočili cesarju. In cesar je brž velel obok do kraja dovršiti. Pod čigavim vplivom je to storil, ne vem - mislim pa, da pod božjim navdihnjem, saj sam ni bil izvedenec v gradbeni stroki. 'Ko bo obok počival sam na sebi', je dejal 'ne bo več pogrešal opore od spodaj.' In če ne bi bilo prič, ki lahko potrdijo resničnost te zgodbe, bi me gotovo imeli za prilizovalca, ki mu ni mogoče verjeti. Ker pa živi še mnogo ljudi, ki so na lastne oči videli, kaj se je zgodilo, lahko brez oklevanja zgodbo pripovedujem do kraja. Arhitekti so izpolnili cesarjev ukaz: svod se je brez nevarnosti lepo usločil in praksa je potrdila pravilnost cesarjeve zamisli. Tako je bil ta svod dovršen."

Andrej Likar

PRAVOKOTNI TRIKOTNIK

Eden od kotov pravokotnega trikotnika meri 15° . Dokaži, da je polmer njegovega očrtanega kroga geometrična sredina njegovih katet. Geometrična sredina števil a in b je $\sqrt{ab}$.

Dragoljub M. Milošević
prevedel Boris Lavrič

POPOLNI KVADER

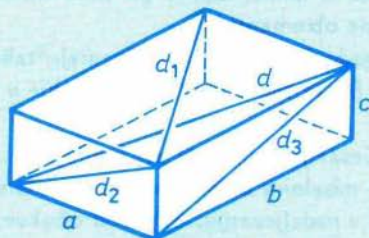
Eden zelo starih, lahko razumljivih, vendar do današnjih dni nerešenih problemov je poiskati kvader, ki bi imel za dolžine vseh stranic, vseh stranskih in tudi glavne diagonale celoštevilске vrednosti. Poiskati bi bilo treba sedem naravnih števil a, b, c, d_1, d_2, d_3 in d , ki so povezana z naslednjimi enačbami

$$a^2 + b^2 = d_1^2$$

$$a^2 + c^2 = d_2^2$$

$$b^2 + c^2 = d_3^2$$

$$a^2 + b^2 + c^2 = d^2$$



Kvadr, ki bi imel tako lastnost, bomo rekli *popolni kvader*. Kljub številnim poskusom, tega problema še do danes ni uspelo razrešiti. Ni uspelo najti nobene sedmerice naravnih števil, ki bi hkrati zadoščala zgornjim enačbam, niti ni uspelo dokazati, da take sedmerice ni. V zadnjem času so si poskušali pomagati tudi z vse zmogljivejšimi računalniki, vendar so uspeli, le preveriti, da ne obstaja popoln kvader, s stranicami, katerih dolžine ne presegajo nekaj deset tisoč. Seveda pa s tem odgovora še ni. Ker matematiki niso uspeli rešiti zgornjega problema v celoti, so nekoliko popustili v naštetih zahtevah. Zahtevali so, da je le šest od zgornjih količin celoštevilskih. Če se po vrsti odrečemo, da je dolžina glavne diagonale, ene od stranskih diagonal, oziroma ene od stranic naravno število, dobimo tri nove probleme. Vendar pa tudi ti niso čisto enostavno rešljivi, izkazalo pa se je, da ima vsak od njih neskončno rešitev. Pokazali bomo, kako je uspelo najti neskončno mnogo rešitev za dva od teh problemov.

Problem 1. Poišči kvader, ki ima za dolžine stranic in stranskih diagonal naravna števila.

Rešiti moramo torej sistem naslednjih treh enačb

$$a^2 + b^2 = d_1^2, \quad a^2 + c^2 = d_2^2, \quad b^2 + c^2 = d_3^2$$

v naravnih številih a, b, c, d_1, d_2 in d_3 . Zapišimo najprej a v obliki

$a = \pm(ps - c^2/(ps))/2$, kjer sta zaenkrat p in s še poljubna. Na koncu bomo vzeli tak znak, da bo število a pozitivno. Izračunajmo

$$a^2 + c^2 = \frac{1}{4}(p^2s^2 - 2c^2 + \frac{c^4}{p^2s^2}) + \frac{4c^2}{4} = \frac{1}{4}(ps + \frac{c^2}{ps})^2$$

Dobili smo kvadrat, vendar zaenkrat racionalnega števila. Podobno postavimo $b = \pm(qs - c^2/(qs))/2$, kjer je tokrat q zaenkrat še poljubno naravno število, s pa isti kot zgoraj. Na isti način kot prej dobimo

$$b^2 + c^2 = \frac{1}{4}(qs + \frac{c^2}{qs})^2$$

Oglejmo si še, kako je z vsoto kvadratov prvih dveh neznank

$$a^2 + b^2 = \frac{1}{4}((p^2 + q^2)s^2 - 4c^2 + \frac{(p^2 + q^2)c^4}{p^2q^2s^2})$$

Najprej izberimo števili p in q tako, da bo $p^2 + q^2 = r^2$, torej naj bo (p, q, r) pitagorejska trojica. Sledi

$$a^2 + b^2 = \frac{1}{4}(r^2s^2 - 4c^2 + \frac{r^2c^4}{p^2q^2s^2})$$

Sedaj pa izberimo število s tako, da uničimo zadnja dva člena. Torej $s = rc/(2pq)$. Da se v tem izrazu znebimo ulomka, postavimo $c = 2pqt$, torej, $s = rt$, kjer bomo tudi t še naknadno določili. Pojdimo sedaj po vrsti nazaj. Najprej je $a^2 + b^2 = r^2s^2/4 = r^4t^2/4$ in

$$a = \pm(prt - 4pq^2t/r)/2$$

Iz obeh izrazov vidimo, da je smiselno izbrati $t = 2r$, oziroma $s = 2r^2$ in dobimo $a = \pm(pr^2 - 4pq^2)$ in podobno $b = \pm(qr^2 - 4p^2q)$, saj tu p in q vlogi zamenjata. Vrnimo se k tretji stranici $c = 2pq \cdot 2r = 4pqr$. Ali so vsote kvadratov zopet kvadrati naravnih števil? Izračunajmo

$$a^2 + b^2 = r^2s^2/4 = r^6$$

$$a^2 + c^2 = (2pr^2 + 8pq^2)^2/4 = (pr^2 + 4pq^2)^2$$

$$b^2 + c^2 = (2qr^2 + 8p^2q)^2/4 = (qr^2 + 4p^2q)^2$$

Našli smo torej za a, b, c, d_1, d_2 in d_3 naslednjo množico rešitev

$$\begin{aligned} a &= p|4q^2 - r^2|, & b &= q|4p^2 - r^2|, & c &= 4pqr \\ d_1 &= r^3, & d_2 &= p(4q^2 + r^2), & d_3 &= q(4p^2 + r^2) \end{aligned} \quad (1)$$

pri čemer mora biti (p, q, r) pitagorejska trojica. Za p in q lahko uporabimo znane obrazce: $p = u^2 - v^2$, $q = 2uv$, $r = u^2 + v^2$, $u, v \in \mathbb{N}$, $u > v$ (gl. npr. Presek, 14, str. 274) in spoznamo, da imamo neskončno kvadrov, ki imajo vse tri robove in vse tri stranske diagonale celoštevilske. Kvadri, ki jih dobimo po zgornjih obrazcih, se imenujejo tudi *Eulerjevi kvadri*. Zapišimo nekaj konkretnih primerov takih kvadrov

p	q	r	a	b	c	d_1	d_2	d_3
3	4	5	117	44	240	125	267	244
5	12	13	2035	828	3120	2197	3725	3228
15	8	17	495	4888	8160	4913	8175	9512
...	...	...	...	...	...	...	...	...

Izkaže se, da z zgornjimi obrazci ne dobimo vseh rešitev problema 1. Na primer kvader s stranicami 85, 132, 720 je rešitev zgornjega problema, vendar ga ne dobimo iz zgornjih obrazcev. Diagonale ima namreč po vrsti 157, 725 in 732 in nobena ni oblike r^3 , $r \in \mathbb{N}$. Očitno so vsi večkratniki rešitve zgornjega problema zopet rešitve, velja pa tudi tole: če je kvader s stranicami (a, b, c) rešitev problema 1, je tudi kvader s stranicami (ab, bc, ac) rešitev tega problema, v kar se lahko vsak sam prepriča. Na ta način še obogatimo množico rešitev prvega problema, vendar tudi s tem še ne dobimo vseh rešitev. Pojavi se vprašanje, ali ima kakšen od dobljenih kvadrov tudi telesno diagonalo celoštevilsko. Na žalost se je izkazalo, da ne. Ker s temi rešitvami problema 1 nismo izčrpali vseh, s tem ni rečeno, da ne obstaja kvader, ki bi imel vseh sedem nastopajočih količin celoštevilskih.

Problem 2. Določi kvader, ki ima za dolžine vseh stranic, glavne diagonale in dveh stranskih diagonal celoštevilске vrednosti.

Vzemimo, da za d_3 ne zahtevamo celoštevilске vrednosti. Iščemo torej šesterico naravnih števil, ki so povezana z enačbami

$$a^2 + b^2 = d_1^2, \quad a^2 + c^2 = d_2^2, \quad a^2 + b^2 + c^2 = d^2$$

Ker sta (a, b, d_1) in (a, c, d_2) pitagorejski trojici, jih kot vemo lahko pišemo v obliki

$$a = s \cdot 2u_1v_1, \quad b = s(u_1^2 - v_1^2), \quad d_1 = s(u_1^2 + v_1^2)$$

$$a = t \cdot 2u_2v_2, \quad c = t(u_2^2 - v_2^2), \quad d_2 = t(u_2^2 + v_2^2)$$

kjer so $s, t, u_1, u_2, v_1, v_2 \in \mathbb{N}$, $u_1 > v_1$, $u_2 > v_2$ in zaenkrat še poljubni. Ker morata oba produkta za a dati isto vrednost, izberimo $s = u_2v_2$, $t = u_1v_1$. Na razpolago imamo še štiri parametre, pustili bomo zaenkrat tri med njimi neodvisne in postavili $u_2 = p$, $v_2 = q$, $u_1 = 2r$, $v_1 = p + q$, kjer $p, q, r \in \mathbb{N}$. Za stranice in stranski diagonali sedaj dobimo

$$a = 4pqr(p + q), \quad b = pq(4r^2 - (p + q)^2), \quad c = 2r(p + q)(p^2 - q^2)$$

$$d_1 = pq(4r^2 + (p + q)^2), \quad d_2 = 2r(p + q)(p^2 + q^2)$$

Izpolniti moramo še tretjo enačbo v naravnih številih $a^2 + b^2 + c^2 = d^2$ oziroma $d_1^2 + c^2 = d^2$. Dobimo

$$d_1^2 + c^2 = p^2q^2(4r^2 + (p + q)^2)^2 + 4r^2(p + q)^2(p^2 - q^2)^2$$

Ali se da izraz na desni spraviti na popoln kvadrat pri primerni izbiri parametrov p, q in r ? Izkazalo se je, da to zagotovo gre, če so v naslednji zvezi

$$p^2 + pq + q^2 = r^2 \quad (2)$$

Če to, upoštevamo, po malo daljšem računu zgornji izraz prevedemo na obliko

$$d_1^2 + c^2 = (2p^4 + 3p^3q + 6p^2q^2 + 3pq^3 + 2q^4)^2$$

kar pa zopet lahko poenostavimo, če upoštevamo zvezo (2)

$$d_1^2 + c^2 = (p^2 + r^2)^2(q^2 + r^2)^2$$

Nazadnje lahko povzamemo: če izberemo p, q in r tako, da so rešitve enačbe (2) v naravnih številih, so števila a, b, c, d_1 in d iz zvez

$$a = 4pqr(p + q), \quad b = pq(3r^2 - pq), \quad c = 2r(p + q)|p^2 - q^2|,$$

$$d_1 = pq(5r^2 + pq), \quad d_2 = 2r(p + q)(p^2 + q^2), \quad d = (p^2 + r^2)(q^2 + r^2)$$

rešitev problema 2. Pri tem smo pri stranici c pisali absolutno vrednost, da ni treba pisati zahteve $p > q$. O diofantski enačbi (2) je Presek pisal nazadnje v 5. številki 16. letnika. Od tam lahko razberemo, da dobimo bogato množico rešitev te enačbe z obrazci

$$p = u^2 - v^2, \quad q = 2uv + v^2, \quad r = u^2 + uv + v^2; \quad u, v \in \mathbb{N}, \quad u > v$$

Te izraze bi sicer lahko vstavili v zgornje zveze, vendar bi dobili precej nepregledne obrazce. Zapišimo nekaj kvadrov, ki jih dobimo na ta način

p	q	r	a	b	c	d_1	d_2	d
3	5	7	3360	1980	1792	3900	3808	4292
8	7	13	43680	25256	5850	50456	44070	50794
5	16	19	127680	80240	184338	150800	224238	238162
...	...	...	...	...	...	...	...	...

Hitro lahko opazimo, da imajo rešitvene šestorke skupne faktorje. Če na primer prvo delimo s 4, dobimo kvader s stranicami (840, 448, 495). Zopet se izkaže, da z zgornjimi obrazci ne dobimo vseh rešitev problema 2. Med drugim ne dobimo kvadra s stranicami (104, 153, 672), ki je najmanjši kvader med rešitvami problema 2.

Problem 3. *Poišči kvader, ki ima za dolžine dveh stranic, vseh stranskih in glavne diagonale naravna števila.*

Vzemimo, da naprimer c ni nujno naravno število, očitno pa je njegov kvadrat naravno število in ga označimo z e . Naša zahteva je sedaj poiskati naravna števila a, b, e, d_1, d_2, d_3 in d tako, da bodo izpolnjene enačbe

$$a^2 + b^2 = d_1^2, \quad a^2 + e = d_2^2$$

$$b^2 + e = d_3^2, \quad a^2 + b^2 + e = d^2$$

Tudi za ta problem je uspelo najti neskončno rešitev. Ker je zopet izpeljava malo daljša, jo tokrat izpustimo. Zapišimo samo nekaj konkretnih rešitev

a	b	d_1	d_2	d_3	d
520	576	776	943	975	1105
124	957	965	3724	3843	3845
969	1480	1769	2775	2992	3145
...	...	...	...	...	...

Za konec še dve nalogi:

1. Dokaži, da tri paroma tuja naravna števila ne morejo biti dolžine robov popolnega kvadra.
2. Dokaži, da je prostornina Eulerjevih kvadrov število, ki je deljivo vsaj s 720.

Edvard Kramar

ŠTEVILSKI TRAPEZ

Trapez sestavi iz števil tako, da zapišeš na krajšo zgornjo osnovnico števili 2 in 1, na levi krak same dvojke in na desnega same enice. Vsako nižjo vrsto dobiš kot pri Pascalovem trikotniku, tako da zapišeš med števili zgornje vrste njuno vsoto. Tako sestavljajo drugo vrsto števila 2, $2 + 1 = 3$ in 1, tretjo 2, $2 + 3 = 5$, $3 + 1 = 4$ in 1, ... :

1.vrsta		2	1						
2.vrsta		2	3	1					
3.vrsta		2	5	4	1				
4.vrsta		2	7	9	5	1			
5.vrsta		2	9	16	14	6	1		
6.vrsta		2	11	.	.	.	.	1	
7.vrsta		2	.	.	.	.	.	.	1

1. Oglej si številski trapez, vpiši manjkajoča števila in dodaj še nekaj vrst.
2. Ugotovi povezavo med števili na vzporednicah k obema krakoma.
3. Ali je vsota števil vsake vrste deljiva s 3?

Milena Strnad

VEČKOTNIKI NA KVADRATNI MREŽI

Na mreži iz kvadratkov ploščine 1 leži večkotnik, ki ima oglišča v križiščih te mreže. Koliko meri njegova ploščina? Nekaj spretnosti zadostuje, da jo določimo brez večjih težav; formula, ki jo nameravamo obravnavati v tem prispevku, pa nam delo zelo olajša. Ploščina je namreč enaka

$$p = r/2 + k - 1$$

kjer je r število križišč mreže, ki leže na robu lika, k pa število križišč v notranjosti večkotnika.

Zapisano enakost je odkril leta 1899 matematik Pick in se zato imenuje *Pickova formula*. Lani je to formulo angleški dijak Skevington z majčkeno pomočjo svojega učitelja matematike posplošil na večkotnike z večkotniškimi luknjami. Ugotovil je, da ploščina večkotnika z l luknjami meri $p = r/2 + k + l - 1$.

Najprej bomo postopoma dokazali Pickovo formulo, do posplošitve pa bo potem potreben le še korak.

1. Enostavni paralelogrami in trikotniki

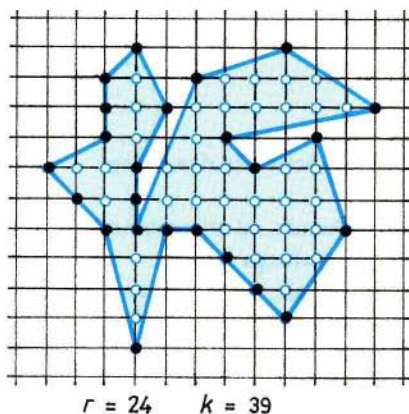
Položimo na obravnavano kvadratno mrežo ravnino $\mathbb{R}^2 = \mathbb{R} \times \mathbb{R}$, tako da bodo točke s celoštevilskimi koordinatami pokrile točno vsa križišča mreže. Seveda tedaj križišča tvorijo množico $\mathbb{Z}^2 = \mathbb{Z} \times \mathbb{Z}$.

Namenimo zdaj nekaj besed paralelogramom z oglišči v $\mathbb{Z}^2$. Naj bo P takšen paralelogram. Ta določa novo mrežo, sestavljeno iz skladnih paralelogramov, ki jih dobimo z vzporednimi premiki paralelograma P (glej sliko).

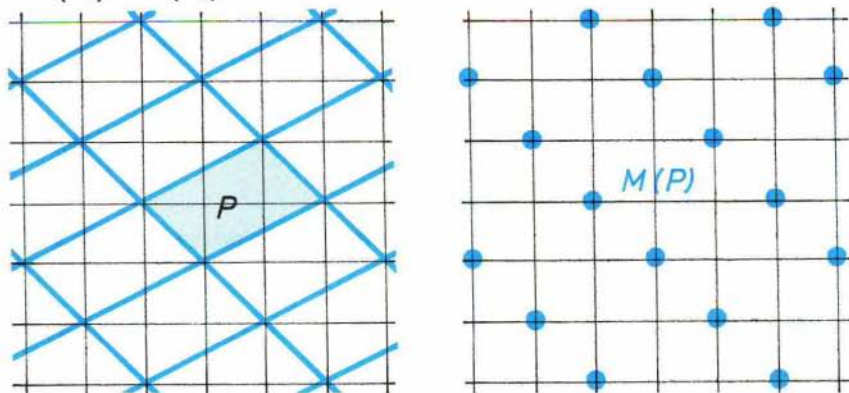
Označimo z $M(P)$ množico vseh križišč te mreže in povabimo bralca, da dokaže naslednji trditvi.

T1 Množica $M(P)$ je vsebovana v $\mathbb{Z}^2$.

T2 Tri različne točke iz $\mathbb{Z}^2$ so oglišča treh različnih paralelogramov



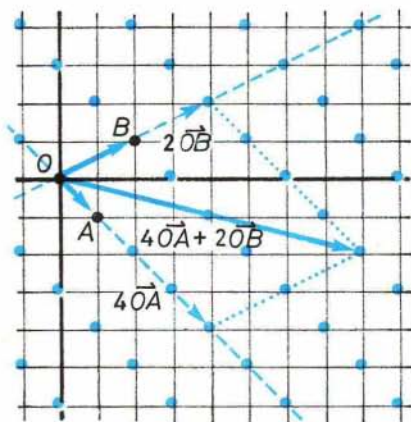
P_1, P_2 in P_3 . Vsi trije določajo mreže z istimi križišči, torej: $M(P_1) = M(P_2) = M(P_3)$.



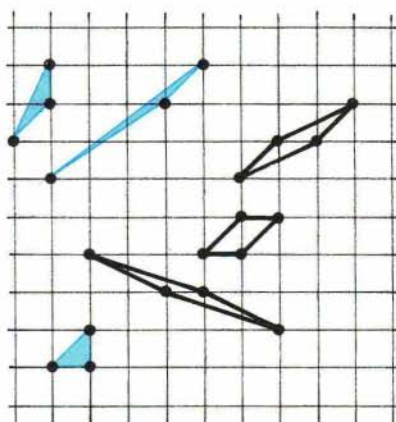
Naj ima paralelogram P eno oglišče v točki $O = (0, 0)$, dve drugi pa v točkah A in B . Z uporabo rezultata druge trditve vidimo, da se celoštevilski večkratniki vektorja $\vec{OA}$ končajo v tistih točkah množice $M(P)$, ki ležijo na nosilki daljice OA . Podobno velja za celoštevilске večkratnike vektorja $\vec{OB}$. Od tod hitro sledi, da konci vektorjev oblike

$$m\vec{OA} + n\vec{OB}, \quad m, n \in \mathbb{Z} \quad (*)$$

tvorijo množico $M(P)$.



Slika 1.



Enostavni paralelogrami in trikotniki
Slika 2.

Naslednja definicija nam bo skrajšala nadaljnje pisanje.

Paralelogram (oziroma trikotnik) z oglišči v $\mathbb{Z}^2$ je *enostaven*, če razen oglišč ne vsebuje nobene točke iz $\mathbb{Z}^2$.

Bralec se bo brez težav prepričal o naslednjih lastnostih enostavnih paralelogramov in trikotnikov.

T3 Če je trikotnik z oglišči $A, B, C \in \mathbb{Z}^2$ enostaven, so vsi paralelogrami z oglišči v točkah A, B in C enostavni.

T4 Paralelogram P z oglišči v $\mathbb{Z}^2$ je enostaven natanko takrat, kadar množica $M(P)$ sovпада z $\mathbb{Z}^2$.

Ploščino p trikotnika z oglišči $A = (a_1, a_2), B = (b_1, b_2), C = (c_1, c_2)$ lahko izračunamo po znani formuli

$$2p = |a_1(b_2 - c_2) + b_1(c_2 - a_2) + c_1(a_2 - b_2)| \quad (F)$$

Če oglišča leže v množici $\mathbb{Z}^2$, je na desni strani formule celo število, torej ploščina takšnega trikotnika meri vsaj $1/2$. Kateri trikotniki imajo ploščino enako $1/2$? Odgovor da naslednji izrek.

IZREK 1. *Trikotnik z oglišči v $\mathbb{Z}^2$ ima ploščino enako $1/2$ natanko takrat, kadar je enostaven.*

Dokaz. Denimo, da trikotnik z oglišči $A, B, C \in \mathbb{Z}^2$ ni enostaven. Potem vsebuje vsaj eno točko $D \in \mathbb{Z}^2$, ki ni njegovo oglišče. Če D leži v notranjosti trikotnika ABC , ta razpade na trikotnike ABD, BCD in CAD , zato meri njegova ploščina vsaj $3/2$. Če pa D leži na stranici trikotnika ABC , je ta sestavljen iz dveh manjših, zato njegova ploščina meri vsaj 1 . Torej je trikotnik ABC s ploščino $1/2$ nujno enostaven.

Naj bo zdaj trikotnik z oglišči $A, B, C \in \mathbb{Z}^2$ enostaven in P paralelogram z oglišči A, B, C in D . Po trditvi T3 je tudi paralelogram P enostaven, torej T4 pove, da velja $M(P) = \mathbb{Z}^2$.

Brez škode za splošnost dokaza smemo privzeti, da oglišče C leži v izhodišču $O = (0, 0)$. Ker konci vektorjev oblike $(*)$ tvorijo $\mathbb{Z}^2$, obstajata taki celi števili m in n , da velja

$$m\mathbf{OA} + n\mathbf{OB} = \mathbf{OS}, \text{ kjer je } S = (1, 0)$$

Za $A = (a_1, a_2)$ in $B = (b_1, b_2)$ je zato

$$ma_1 + nb_1 = 1$$

$$ma_2 + nb_2 = 0$$

Od tod brez težav dobimo enakosti

$$m(a_1b_2 - a_2b_1) = b_2$$

$$n(a_1b_2 - a_2b_1) = -a_2$$

ki povesta, da celo število

$$d = a_1b_2 - a_2b_1$$

deli b_2 in a_2 . Če namesto točke S vzamemo točko $T = (0, 1)$, na enak način kot prej vidimo, da d deli tudi a_1 in b_1 . Potem pa je $d = a_1b_2 - a_2b_1$ deljiv z d^2 in zato enak $-1, 0$ ali 1 . Ploščina trikotnika ABC je različna od nič in po formuli (F) meri

$$p = (1/2) |a_1b_2 - a_2b_1| = |d|/2$$

torej je enaka $1/2$. S tem je dokaz sklenjen.

2. Pickova formula in njena posplošitev

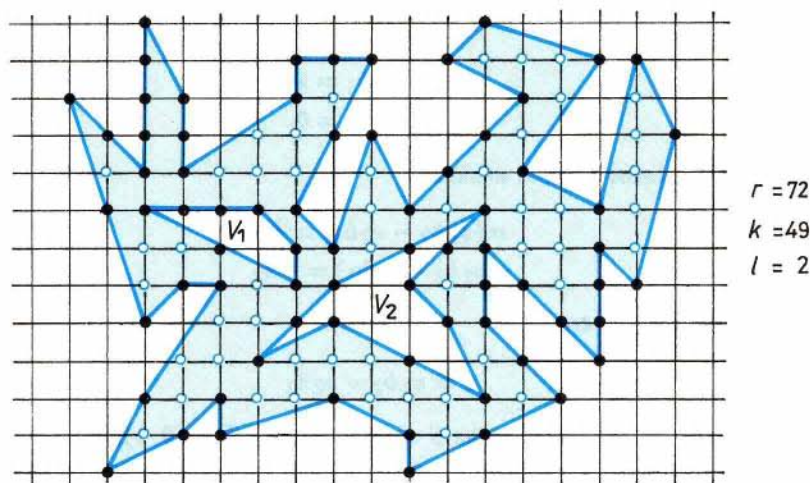
Dokaz Pickove formule bomo naslonili na prvo poglavje in na članek *Triangulacije večkotnikov* iz te številke Preseka.

Naj bo r točk iz $\mathbb{Z}^2$ na robu večkotnika z oglišči v $\mathbb{Z}^2$, k pa v njegovi notranjosti. Napravimo triangulacijo z oglišči v teh $r + k$ točkah. Vsak trikotnik iz triangulacije ima le oglišča v $\mathbb{Z}^2$, zato je enostaven in ima po izreku 1 ploščino enako $1/2$. Izrek 2 iz prej omenjenega članka pove, da je v triangulaciji $r + 2k - 2$ trikotnikov, torej meri ploščina večkotnika $p = r/2 + k - 1$.

Pickova formula je tu, njeno posplošitev pa strnimo v naslednji izrek.

IZREK 2. Večkotnik z oglišči v $\mathbb{Z}^2$ naj ima l večkotniških lukenj, ki se ne dotikajo ena druge ali roba večkotnika in imajo oglišča v $\mathbb{Z}^2$. Če je r točk množice $\mathbb{Z}^2$ na robu preluknjanega večkotnika, k pa v njegovi notranjosti, meri njegova ploščina

$$p = r/2 + k + l - 1$$



Dokaz. Označimo večkotniške luknje z $V_1, V_2, \dots, V_l$, nepreluknjani večkotnik pa z V_0 . Naj r_i točk iz $\mathbb{Z}^2$ leži na robu večkotnika V_i ($i = 1, 2, \dots, l$), k_i točk iz $\mathbb{Z}^2$ pa v njegovi notranjosti. Preštejmo točke iz $\mathbb{Z}^2$ narobu preluknjanega večkotnika:

$$r = r_0 + r_1 + \dots + r_l$$

nato pa še vse točke iz $\mathbb{Z}^2$, ki ležijo v notranjosti nepreluknjanega večkotnika V_0 :

$$k_0 = k + (r_1 + k_1) + \dots + (r_l + k_l)$$

Po Pickovi formuli je ploščina V_i enaka $p_i = r_i/2 + k_i - 1$, zato ploščina preluknjanega večkotnika meri

$$\begin{aligned} p &= p_0 - (p_1 + \dots + p_l) = \\ &= r_0/2 + k_0 - 1 - (r_1/2 + \dots + r_l/2 + k_1 + \dots + k_l) + l = \\ &= r_0/2 + k + (r_1 + \dots + r_l) + (k_1 + \dots + k_l) - (r_1 + \dots + r_l)/2 - (k_1 + \dots + k_l) + l - 1 = \\ &= (r_0 + r_1 + \dots + r_l)/2 + k + l - 1 = r/2 + k + l - 1 \end{aligned}$$

Izrek je dokazan, bralca pa čaka še nekaj nalog.

1. Dokaži, da enakostranični trikotnik ne more imeti vseh treh oglišč v $\mathbb{Z}^2$.

2. Naj ima daljica le krajišči A in B v $\mathbb{Z}^2$. Potem obstaja tak $C \in \mathbb{Z}^2$, da je trikotnik ABC enostaven.

3. Poišči vsaj en preluknjani večkotnik z oglišči v $\mathbb{Z}^2$ in s ploščino $p = 3$.

4. Dokaži, da meri ploščina preluknjane večkotnika z l večkotniškimi luknjami in z oglišči v $\mathbb{Z}^2$ vsaj $(5l + 1)/2$ in da se ta ocena ne da izboljšati.

Boris Lavrič

Opomba: O Pickovi formuli je pisal tudi I. Pucelj v Preseku P-V/1.

POGOVARJAJMO SE S POMOČJO RAČUNALNIKA – Rešitve nalog s str. 86

ENADVA ... TISOČ: s pomočjo papirja in svinčnika ugotovimo, da je tisoča črka z leve S v besedi trinoSemdeset, tisoča z desne pa O v besedi devetstOšestinpetdeset.

IIIIIIIV ... M: uganko najlažje rešimo s pomočjo računalnika. Tisoča črka z leve je levi C iz števila CCXXII (222), medtem ko je tisoča z desne strani desni C iz števila DCCCLIII (853).

SLEPARSKI CIGAN: Cigan lahko s takimi stavami dobro zasluži, ker so stave zanj ugodnejše! Recimo, da potegne iz vreče karto, ki je zgoraj bela. Potem so enako verjetni trije (in ne dva!) primeri:

$$\frac{B}{B} \quad \frac{B}{B} \quad \frac{B}{\bar{C}}$$

Prvi in drugi primer z leve se med seboj razlikujeta! Vsakič je zgoraj druga stran. Torej cigan ugame barvo spodnje strani z verjetnostjo $\frac{2}{3}$ in ti seveda pobere ves denar.

TELEVIZIJSKI KVIZ: Gost oddaje si mora premisliti! Recimo najprej, da si ne premisli. Ker vztraja pri svoji odločitvi, je vprašanje, ali si hoče premisliti, brez pomena. Nagrado zadane z verjetnostjo $\frac{1}{3}$. Če pa si premisli in pokaže preostala od treh vrat, ima $\frac{2}{3}$ možnosti, da so ta vrata prava. Poglejmo zakaj: bistvo je v tem, da, če prvič pokaže prava vrata (za to ima $\frac{1}{3}$ možnosti), potem, ko si premisli nagrado izgubi, če pa najprej pokaže prazna vrata (za to ima $\frac{2}{3}$ možnosti), potem, ko si premisli, nagrado zagotovo dobi.

Jernej Čop

NASLOV

Kaj je skupnega besedam **'beseda'**, **'tri'** in naslovu tega prispevka? Na nek način opisujejo same sebe. Beseda **'NASLOV'** nastopa na mestu naslova, beseda **'beseda'** opisuje pojem besede in je tudi sama beseda, beseda **'tri'** pa opisuje število tri in je sestavljena iz treh črk. Ali obstaja poleg besede **'tri'** še katera, ki sebe opiše na tak način? Kar štejmo: štiri, pet, šest, sedem, osem, devet, deset,... Počasi izgubljam upanje, da bo mogoče naslednje število pravo. Pri dovolj velikem številu upanje opustimo in zaključimo, da ga ni. Kako pa je s takimi besedami v drugih jezikih? V angleščini je taka beseda **'four'** v nemščini **'vier'**, v latinščini je sploh ni,... Posebno mesto med besedami, ki opisujejo same sebe, ima beseda **'jaz'**. Poleg tega, da govori o sebi, govori tudi o osebi, ki jo izgovarja.

Poleg besed poznamo tudi stavke, ki opisujejo sami sebe. Npr.: **'Ta stavek vebuje slovnično napako'**, **'Ta stavek brez glagola'**, **'V tem stavku je šest besed'**, **'Ta stavek ima enaintrideset malih črk'**,... Da najdemo zadnji stavek je potrebno že malo več truda. Pa poskusimo najti stavek oblike **'Ta stavek ima ___ črk'**. Po nekaj poskusih vstavitve besede za število črk in štetju črk opazimo, da se nam rešitev izmika. Kljub temu, da ne preverimo vseh števil, zaključimo, da rešitev ne obstaja. Toda pravi matematiki dvomijo v vsako trditev, ki je ne znajo dokazati. Kako pa bi dokazali naš zaključek, da rešitev ne obstaja?

Zanimivo je tudi vprašanje, ali je stavek **'Ta stavek vebuje slovnično napako'** pravilen. Če vzamemo za kriterij pravilnosti slovnično pravilnost, potem seveda ni pravilen. Kaj pa če vzamemo za kriterij pravilnosti resničnost tega, kar stavek govori? Že res, da stavek vsebuje slovnično napako, ampak stavek pravi, da **'vebuje'** slovnično napako! O čem torej stavek sploh govori?

Mogoče se kdo še spominja naloge, objavljene v P IX-4. Naloga je zahtevala, da v stavek

'V tem stavku 0 nastopa __ krat,
1 nastopa __ krat,
2 nastopa __ krat,
3 nastopa __ krat,
4 nastopa __ krat,
5 nastopa __ krat,
6 nastopa __ krat,
7 nastopa __ krat,
8 nastopa __ krat,
9 nastopa __ krat.

vpišemo na črtice števila, pisana na običajen način, tako da bo stavek govoril resnico. Poleg tega pa je naloga še zahtevala, da poiščemo vse rešitve. Kako se naloge lotimo?

Rešitev predstavimo z vektorjem $(x_0, x_1, \dots, x_9)$. Komponenta x_i nam pove, kolikokrat v stavku nastopa številka i . Komponente vektorja so torej števila, s katerimi štejemo, to pa so ravno naravna števila. Rešitev lahko iščemo s sistematičnim pregledovanjem 'vseh možnih' vektorjev, s poizkušanjem in popravljanjem ali pa z enostavno metodo, ki jo bomo uporabili kasneje za reševanje podobne, a zahtevnejše naloge.

S sistematičnim pregledovanjem bi gotovo prišli do rešitve, če ta seveda obstaja, vprašanje pa je, koliko časa bi za to potrebovali. Vseh vektorjev ne moremo pregledati, saj jih je neskončno mnogo. Torej moramo iskanje omejiti. Vektorji, katerih komponente so velika števila, za rešitev ne pridejo v poštev. Za vsako številko lahko razmislimo, največ kolikokrat bi se lahko pojavila v rešitvi. Npr.: številka 9 se v rešitvi verjetno ne bo pojavila več kot 3-krat. Tako pridemo do vrednosti komponent, za katere je še smiselno pregledovati vektorje. Pomagamo si lahko z računalnikom. Vgnezdimo deset **for** stavkov in za vsako kombinacijo števec preverimo, če je rešitev. Zaradi enostavnosti naj vsi števci **for** stavkov tečejo od 1 do 20.

```
for x0:=1 to 20 do
  for x1:=1 to 20 do
    ...
    for x9:=1 to 20 do
      if resitev(x) then izpisi(x);
```

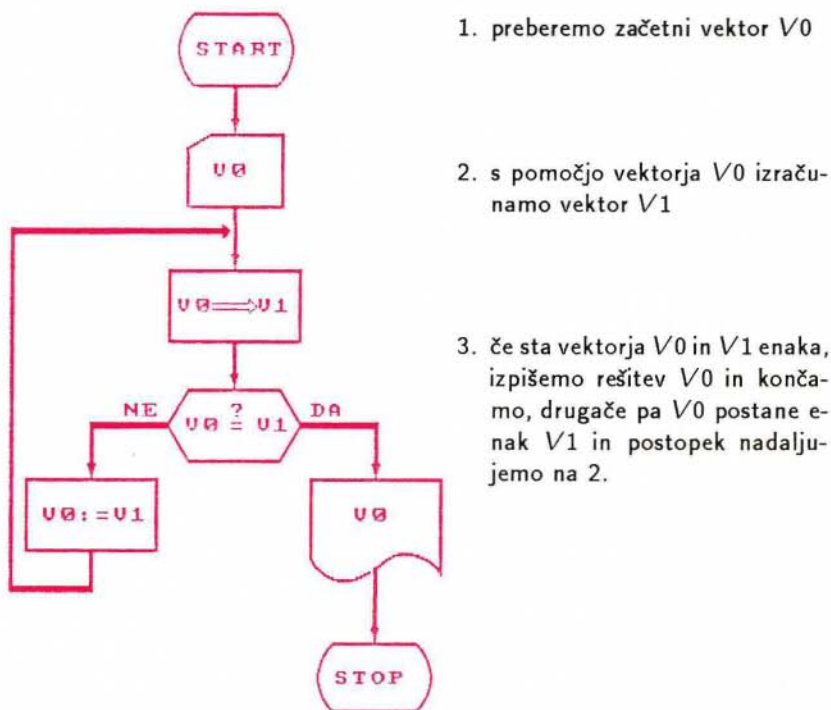
Logična funkcija 'resitev' vrne vrednost 'true', če je vektor x rešitev, in 'false', če ni. Podprogram 'izpisi' pa izpiše vektor x . Tako bomo preverili vse vektorje med $(1,1,1,1,1,1,1,1,1,1)$ in $(20,20,20,20,20,20,20,20,20,20)$, teh pa je kar 20^{20} . Če bi lahko računalnik preveril 1000 vektorjev v sekundi, bi za to delo potrebovali več kot tristo let! Če pa bi bile zgornje meje vrednosti v **for** stavkih po vrsti naslednje: 3,13,5,5,4,4,3,3,3,3, bi za to delo potrebovali "le" 21 minut. Zakaj ravno take zgornje meje? Določil sem jih po "občutku" - čim nižje so, bolj nevarno je, da izpustimo vektor, ki je rešitev. Vidimo, da si lahko z ustreznim razmislekom in nekaj tveganja prihranimo veliko časa. Takemu sistematičnemu pregledovanju možnih rešitev pravimo **metoda grobe sile**. Običajno je primerna za reševanje problemov majhnega obsega.

Še najhitreje pridemo do rešitve s svinčnikom in radirko v roki, s poskušanjem in popravljanjem. Poznam dve rešitvi in ne dvomim dosti, da sta edini.

Če s poskušanjem ne uspete najti obeh, vam bo to gotovo uspelo s pomočjo naslednje preproste metode.

Izmislimo si poljuben začetni vektor, npr. $(1,1,1,1,1,1,1,1)$. Če v stavek vstavimo ta vektor, je stavek nepravilen. Sedaj izračunamo naslednji vektor tako, da bo pravilno opisoval stavek z začetnim vektorjem. To je vektor $(1,11,1,1,1,1,1,1)$. Ker je stavek še vedno nepravilen, računanje naslednjega vektorja ponovimo. Dobimo $(1,12,1,1,1,1,1,1)$, $(1,11,2,1,1,1,1,1)$, $(1,11,2,1,1,1,1,1)$, ... Že po treh korakih smo prišli do rešitve. To rešitev označimo z r_0 , drugo, ki jo boste našli sami, pa z r_1 .

Na sliki 1 je diagram poteka za pravkar opisani postopek.



Slika 1. Diagram poteka

Napišimo še program, ki bo izvajal ta postopek.

```

program samoOpis;
type vektor=array [0..9] of integer;
var v0,v1:vektor;
    i,korak:integer;

procedure izracun(var v1:vektor;v0:vektor);
    { s pomocjo vektorja v0 izracunamo vektor v1}
begin
    for i:=0 to 9 do v1[i]:=1;           {vrednost komponent vektorja v1
je najmanj 1}
    for i:=0 to 9 do
        while v0[i] <> 0 do begin
            {v0[i] komponento delimo na cifre in povecamo}
            v1[v0[i] mod 10]:=v1[v0[i] mod 10]+1;
                                                    {ustrezno komponento v1}
            v0[i]:=v0[i] div 10;
        end;
    end; {izracun}

function enaka(v0,v1:vektor):boolean;
    {=true, ce sta vektorja v0 in v1 enaka, =false drugace}
var eenaka:boolean;
begin
    eenaka:=true;
    i:=0;
    while eenaka and (i <= 9) do begin
        if v0[i] <> v1[i] then eenaka:=false;
                                                    {v0 in v1 primerjamo po komponentah}
        i:=i+1;
    end;
    enaka:=eenaka;
end; {enaka}

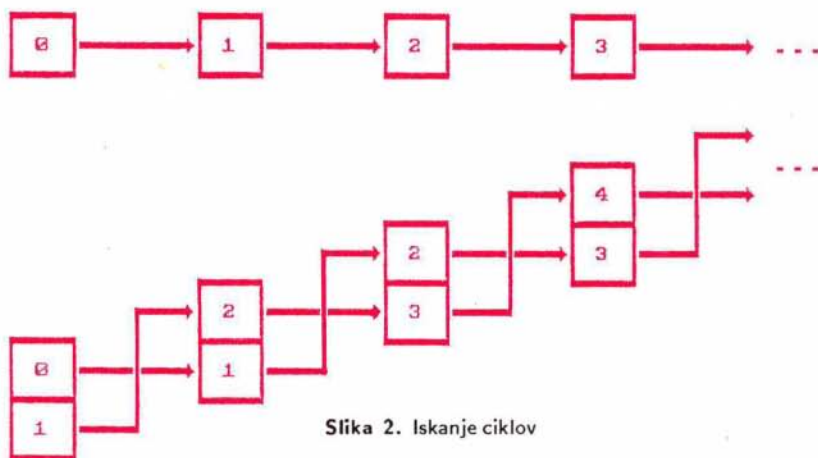
begin {samoOpis}
    writeln;
    writeln('Zacetni vektor: '); {vnos zacetnega vektorja}
    for i:=0 to 9 do read(v0[i]);
    v1:=v0;
    korak:=0;
    repeat                                     {ponavljam postopek dokler nista v0 in v1 enaka}
        v0:=v1;
        izracun(v1,v0);
        korak:=korak+1;
        write(korak:3,' '); {izpis zaporednega koraka in vektorja v1}
        for i:=0 to 9 do write(v1[i],' ');
        writeln;
    until enaka(v0,v1);
    write('Resitev: '); {izpis resitve}
    for i:=0 to 9 do write(v0[i],' ');
end. {samoOpis}

```


Po vnosu začetnega vektorja, program ponavlja postopek tako dolgo, dokler ne najde rešitve. Po nekaj poskusih ugotovimo, da nekateri začetni vektorji 'konvergirajo' k rešitvi r_0 , nekateri k rešitvi r_1 , vsi ostali pa se ujamejo v nek cikel in ne pripeljejo do rešitve.

Da se bomo lažje izražali, se dogovorimo za nekaj pojmov. Rekli bomo, da je oddaljenost vektorja v_1 od vektorja v_2 enaka n , če naš postopek pripelje vektor v_1 do vektorja v_2 v n korakih. Številu vektorjev, ki se ponavljajo, kadar postopek ne pripelje do rešitve, bomo rekli dolžina cikla. Z $V_n(v)$ bomo označili množico vseh tistih vektorjev, katerih oddaljenost od vektorja v je enaka n .

Kako teče postopek za iskanje rešitve, to je "cikla" dolžine 1, smo si že ogledali, shematično pa je prikazan na sliki 2a. Vsak pravokotnik predstavlja vektor z 10 komponentami, število v njem pa nam pove, kolikokrat smo uporabili postopek nad začetnim vektorjem, označenim z v_0 , da smo dobili ta vektor. Puščice predstavljajo izračun novega vektorja. Postopek končamo, ko sta dva zaporedna vektorja enaka.



Slika 2. Iskanje ciklov

Cikel dolžine 2 lahko iščemo s pomočjo vektorja z 20 komponentami (slika 2b). Na vsakem koraku izračunamo naslednji vektor s pomočjo zadnjega tako, da drugi del naslednjega vektorja izračunamo s pomočjo prvega dela zadnjega, prvi del naslednjega pa iz drugega dela zadnjega. Tudi tu postopek končamo, ko sta dva zaporedna vektorja enaka, cikel dolžine 2 pa smo našli, če sta dva dela z 10 komponentmi različna. Vseskozi moramo torej poznati zadnja dva vektorja z 20 komponentami. Če pa bi želeli iskati cikle kakršnekoli

dolžine, bi izvajali postopek, kot je prikazan na sliki 2a, pri čemer bi si morali zapomniti vse vektorje in ob vsakem izračunu novega preveriti ali je morda enak kateremu izmed prejšnjih.

Ali se lahko zgodi, da postopek generira vedno nove vektorje, ne da bi se ujel v cikel? To bi bil "cikel" z neskončno dolžino.

Z računalnikom sem preizkusil kar precej vektorjev in edini cikel, ki sem ga našel, ima dolžino dva. Izmenjujeta se dva vektorja, ki ju bom imenoval c_0 in c_1 . Ker ju ni težko najti, vam njuno iskanje prepuščam za vajo.

Porazdelitev vektorjev po množicah in delovanje postopka na njih je prikazano na sliki 3. Ali so s to sliko zajeti vsi vektorji? Če so, potem sta r_0 in r_1 edini rešitvi, vektorja c_0 in c_1 pa sestavljata edini cikel.

$$\begin{aligned} \dots V_2(r_0) \rightarrow V_1(r_0) \rightarrow r_0 \quad r_1 \leftarrow V_1(r_1) \leftarrow V_2(r_1) \dots \\ \dots V_2(c_0) \rightarrow V_1(c_0) \rightarrow c_0 \rightleftarrows c_1 \leftarrow V_1(c_1) \leftarrow V_2(c_1) \dots \end{aligned}$$

Slika 3. Porazdelitev vektorjev in delovanje postopka

In sedaj:

Ta stavek, narejen s pomočjo računalnika, vsebuje petindvajset a-jev, dva b-ja, en c, tri č-je, osemnajst d-jev, sedeminpetdeset e-jev, en f, en g, dva h-ja, šestnajst i-jev, dvaintrideset j-jev, tri k-je, dva l-ja, sedem m-jev, enaindvajset n-jev, šest o-jev, šest p-jev, devet r-jev, triindvajset s-jev, pet š-jev, osemindvajset t-jev, tri u-je, devetindvajset v-jev, dva z-ja, en ž in šestdeset praznih mest.

Bo mogoče kdo preveril njegovo pravilnost? Da sem prišel do tega stavka, sem uporabil zgoraj opisani postopek. Stavek iz prejšnje naloge je opisovala deseterica števil, ta stavek pa opiše šestindvajseterica. Sestaviti stavek, ki na tak način opisuje (dokumentira) samega sebe, je precej zahtevnejša naloga od prejšnje. Tu se postopek ne ustali tako hitro niti v rešitvi niti v kakšnem ciklu. Za iskanje ciklov sicer nisem naredil programa, sem pa s pomočjo stolpničnega diagrama opazoval, kako se vektor med postopkom spreminja. Če bi bil cikel dovolj kratek, bi to opazil. Za občutek naj povem, da sem za določene začetne vektorje opazoval tudi po 1000 korakov, pet vsako sekundo. Program je bil napisan v turbo pascalu, izvajal pa sem ga na računalniku IBM PC-XT, 8MHz.

Program sem preuredil tako, da računalnik sam nastavi začetni vektor, katerega komponente so slučajna števila med 1 in 80, in ga spusti v postopek. Če v 50 korakih postopek ne pripelje do rešitve, nastavi nov začetni vektor. Kolikšna je verjetnost, da program izbere vektor, oddaljen od rešitve največ

50 korakov? Kaj vpliva na izbiro optimalnega števila korakov, ki jih mora prehoditi začetni vektor, dokler ga ne zamenjamo z novim? Pri tem moramo upoštevati tudi čas, to je našo nestrpnost.

Program za iskanje samodokumentiranega stavka sem pognal večkrat. Enkrat je prišla rešitev že po nekaj sekundah, večkrat pa sem moral nanjo počakati tudi po več kot 20 minut. Zadnje pomeni, da je računalnik moral pred tem preizkusiti več kot 120 vektorjev. Zgoraj zapisana rešitev je edina, ki jo poznam. Poskušal sem najti rešitve tudi za stavke drugačne oblike, npr.: **Ta stavek vsebuje x a-jev, y b-jev, ... ali pa samo x a-jev, y b-jev, ...**, pa nisem našel ničesar. Včasih sem pustil program teči tudi več kot uro, ročno sem vnašal začetne vektorje, spreminjal število korakov, grafično opazoval in zvočno poslušal spreminjanje vektorja, toda brez uspeha.

Za konec pa še nekaj primerov, ob katerih boste morda dobili kakšno idejo.

Stavki, ki se opisujejo z rimskimi števili: $1=I$, $5=V$, $10=X$, $50=L$, $100=C$, $500=D$, $1000=M$.

V tem stavku

I nastopa IX-krat,

V nastopa I-krat,

X nastopa II-krat,

L nastopa I-krat,

C nastopa I-krat,

D nastopa I-krat,

M nastopa I-krat.

Stavki, ki se opisujejo z binarnimi števili, pri katerih številko 0 zamenjamo s črko *O* in številko 1 s črko *I*.

V tem stavku I nastopa 100 krat, O nastopa II krat.

TA STAVEK VSEBUJE 110 A-JEV, 10 B-JA, I C, I Č, I D, 1100 E-JEV, I F, I G, I H, 100010 I-JEV, 1100 J-JEV, 10 K-JA, I L, I M, I N, 10010 O-JEV, I P, I R, 11 S-JE, I Š, 11 T-JE, 10 U-JA, 1001 V-JEV, I Z, I Ž.

Za zadnji stavek poznam še eno rešitev, ki pa jo lahko poiščete tudi brez računalnika.

O stavkih, ki opisujejo sami sebe, je zanimivo in obširno pisal **Douglas R. Hofstadter** v rubriki **Metamagical Themas** revije **Scientific American**. Svoje prispevke je objavljajal od januarja 1981 do julija 1983. Zbrani in dodatno opremljeni s komentarji so izšli v knjigi **Metamagical Themas**, ki jo je leta 1985 izdala založba Basic Books.

Ciril Pezdir

SLIKOVNA KRIŽANKA "MATEMATIČNI POJMI"

	MLADENKA	NEOMEJEN OBLASTNIK	IZUMITELJ BENCIN, MOTORJA	DARUVAR	SESTAVIL MARKO BOKALIČ		PRITOK SAVE DOLINKE	NEKDANJI JAPONSKI ORZAVNIK
$f'(x)$					TEKOČINA V ZILAH			
Δ					J/s JADRANSKI OTOK			
ELEKTRIČNA MORSKA RIBA				PISATELJ MURNK FRANČ MATEMATIK				
OBLJUB- LJENA DEZELA								TIROLSKA REKA
VULKAN NA HAVAJIH (MAUNAI)			DLAKE NAD OČESOM 					
	NAUK O SVETLOBI	KOS DEBLA CERKVENI NASLOV			ANGLESKA ANA TEMELJNA RESNICA			
OLOF PALME			MATEMATIK MAGAJNA RIMSKA LJUBLJANA					
						GRSKI BASNOPISEK	PESNIK KLOPCIC	NEKDANJI AVSTRI- JSKA SMUCARKA ISKLJIVAJ
				RAZNOZE- VALNA TVORBA				
KRAJ POD FRUŠKO GORO				DOGODEK PRI VER- JETNOSTI				
MONGOLSKI VLADAR			ANGLESKI MATEMATIK IN LOGIK					
OCE			ENOTA ZA ELEKT. TOK					

VEČKOTNIKI NA KVADRATNI MREŽI - Rešitve s str. 140

1. Kvadrat dolžine vsake daljice s krajišči v $\mathbb{Z}^2$ je po Pitagorovem izreku celo število. Denimo, da ima enakostranični trikotnik s stranico dolžine a vsa oglišča v $\mathbb{Z}^2$. Potem je njegova ploščina $p = a^2\sqrt{3}/4$ iracionalno število, ker velja $a^2 \in \mathbb{Z}$. Toda po formuli (F) je dvakratnik ploščine p celo število. Oboje hkrati ni mogoče, torej trditev velja.

2. Vzporedno premaknimo daljico AB , tako da A preide v $A' = (0, 0)$, B pa v $B' = (m, n)$. Seveda sta m in n celi števili. Razen krajišč na daljici $A'B'$ ni točk iz $\mathbb{Z}^2$, zato sta števili m in n tuji. Res, v nasprotnem primeru bi namreč na $A'B'$ ležala tudi točka $(m/d, n/d)$, kjer je d največja skupna mera števil m in n .

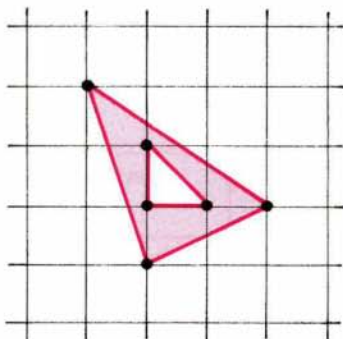
Ker sta števili m in n tuji, obstajata taki celi števili p in q , da velja $pm + qn = 1$. Postavimo $C = (-q, p)$.

Po formuli (F) ploščina trikotnika $A'B'C'$ meri

$$p = (1/2) |pm + qn| = 1/2$$

torej je trikotnik $A'B'C'$ po izreku 1 enostaven. Premaknimo zdaj $A'B'C'$ nazaj, tako da $A'B'C'$ preide v ABC , in iskana točka C je tu.

3.



4. Vsaka luknja ima vsaj tri oglišča, zato ima preluknjani večkotnik na robu vsaj $3l + 3$ točke iz $\mathbb{Z}^2$. Po izreku 2 tedaj za njegovo ploščino velja

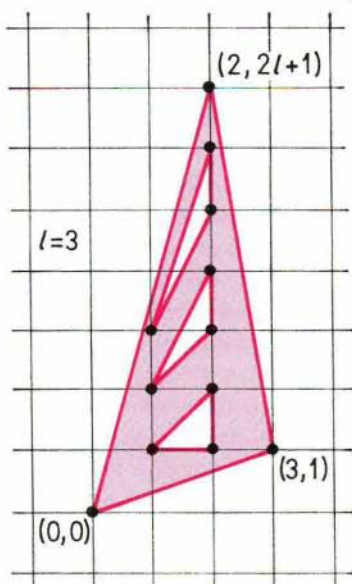
$$\begin{aligned} p &= r/2 + k + l - 1 \geq \\ &\geq (3l + 3)/2 + l - 1 = \\ &= (5l + 1)/2 \end{aligned}$$

Na sliki desno je načrtan trikotnik z l luknjami in s ploščino

$$p = (5l + 1)/2$$

torej se ocene res ne da izboljšati.

Boris Lavrič



DRUŽINSKA — Rešitev s str. 113

Naj bo $19xy$ Simonova rojstna letnica, zapisana v desetiškem številskem sestavu. Potem nam Simonov odgovor na dedovo vprašanje da enačbo

$$(1900 + 10x + y) + (1 + 9 + x + y) = 1990$$

ki jo poenostavimo v $11x + 2y = 80$. Ker velja $1 \leq y \leq 9$ in je poleg tega x sod, je $x = 6$ in tedaj $y = 7$. Simon je torej praznoval 23. rojstni dan.

Označimo zdaj z $19ab$ Jakovo rojstno letnico, zapišimo enačbo

$$(1900 + 10a + b) + 1 \cdot 9 \cdot a \cdot b = 1990$$

ki sledi iz njegovega odgovora, in jo poenostavimo. Dobimo $10a + b + 9ab = 90$, od koder vidimo, da je vsota $a + b$ deljiva z 9 in je pri tem $ab < 10$. Zato velja $a + b = 9$, substitucija $b = 9 - a$ pa nam da razcepno kvadratno enačbo $(a - 1)(a - 9) = 0$ z rešitvama $a_1 = 1$, $a_2 = 9$. Pogojem naloge ustreza le $a = 1$, torej je ded rojen leta 1918. Na podoben način lahko ugotovimo, da ded ne more biti rojen v prejšnjem stoletju.

Boris Lavrič

v naslednji krog volitev gredo kot izrazita večina. Vendar pa modrim njihova premetena razporeditev po trojicah omogoča zanesljive in obenem kar najbolj varčne zmage povsod tam, kjer se sploh pojavijo. To pa ni niti najmanj zanemarljivo! Njihov delež se je namreč iz približno 20% v prvem krogu že povzpел na skorajda 30% v drugem krogu (8 jih je med 27-imi). Kljub temu pa se še zmeraj zdi, da belim zaradi njihove očitne številčne premoči modri ne morejo do živega.

Toda uspeh modrih v volitvah je iz kroga v krog vse bolj in bolj oprazen. In tako v poslednjem krogu volitev modri, ob najbrž močno zaprepaščenih pogledih belih, celo odnesejo zmago!

In kaj je modrim, tem spočetka tako očitnim outsiderjem, omogočilo njihovo presenetljivo zmago? Dvoje: večkrožni volilni postopek (v nadaljnjem bomo rekli raje večstopenjske volitve) in hkrati še njihova modra strategija oziroma optimalna razporeditev v trojicah.

Nadalje je najbrž zanimivo tudi vprašanje - kolikšno je najmanjše število predstavnikov manjšine, ki v k -stopenjskem volilnem postopku še lahko računajo na zmago nad začetno večino? Če so volitve organizirane tako, kakor kaže naš model (po trojicah), potem nam odgovor na to vprašanje ponudi naslednja ugotovitev:

Vseh volilcev v volitvah naj bo 3^k ($k \in \mathbb{N}$). Če manjšina med njimi šteje vsaj 2^k volilcev, ima še zmeraj možnosti za zmago.

Izrek lahko dokažemo s popolno indukcijo.

Pri $k = 1$ je veljavnost trditve povsem očitna (saj v tem primeru manjšina sploh ni to, za kar jo označuje njeno ime).

Predpostavimo, da izrek velja pri poljubno izbranem naravnem številu k .

Poglejmo naposled še primer, ko je vseh volilcev 3^{k+1} , predstavnikov manjšine med njimi pa vsaj 2^{k+1} . Vseh volilcev je torej trikrat po 3^k , predstavnikov manjšine pa je vsaj dvakrat po 2^k . "Manjšinke" zatem razporedimo tako, da jih bo med prvimi 3^k volilci 2^k , med drugimi 3^k volilci spet 2^k , med poslednjimi 3^k volilci pa naj bodo vsi preostali "manjšinski".

3^k volilcev (med njimi je 2^k "manjšinskih")	3^k volilcev (med njimi je 2^k "manjšinskih")	3^k volilcev (med njimi je morebiti tudi kakšen "manjšinski")
---	---	---

Po induksijski predpostavki lahko v prvih dveh skupinah s po 3^k volilci "manjšinskih" zmagajo. Kar pa že pomeni, da lahko zmagajo tudi med vsemi

3^{k+1} volilci, saj bi imeli v primeru, ko bi jim v prvih dveh skupinah šlo vse kot po maslu, v poslednjem krogu volitev med tremi kar dva svoja.

Izrek torej velja pri poljubnem naravnem številu k .

Zaključimo razmislek ob tem nenavadnem volitvenem modelu z naslednjim problemom:

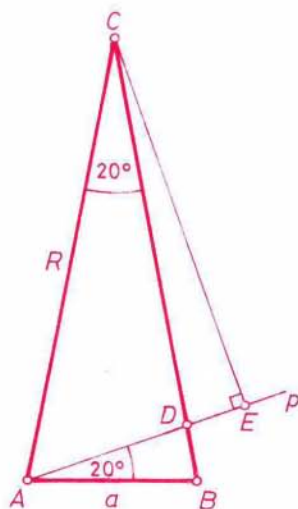
Volitve naj bodo organizirane tako, da so volilci razdeljeni v deseterice in ne v trojice, kakor smo brali doslej. Sicer pa naj bolitve potekajo po enakem principu - iz vsake deseterice se naj v naslednji krog prebije predstavnik večine v tej deseterici.

Kolikšno je potem najmanjše število predstavnikov manjšine, ki imajo ob izbiri optimalne strategije svojega volilnega nastopa še možnosti za **zanesljivo** zmago, če je na začetku vseh volilcev natanko milijon?

Vilko Domajnko

Literatura: *Nauka i žizna*, 1989, No 9

PRAVILNI OSEMNAJSTKOTNIK



Označimo z a dolžino stranice pravičnega osemnajstkotnika, R pa naj bo polmer njemu očrtanega kroga. Dokazali bomo, da a in R povezuje enakost

$$a^3 + R^3 = 3 a R^2 \quad (Z)$$

Oglejmo si enakokraki trikotnik z vrhom C v središču očrtanega kroga in z osnovnico AB , ki se ujeema s stranico osemnajstkotnika. Kot ob vrhu C seveda meri 20° . Iz A zdaj načrtajmo poltrak p , ki seka stranico BC v točki D in oklepa z AB kot 20° , nato pa še pravokotnico CE na p .

Trikotnika ABC in BDA sta podobna, zato je

$$\overline{BD} : \overline{AB} = \overline{AB} : \overline{AC}$$

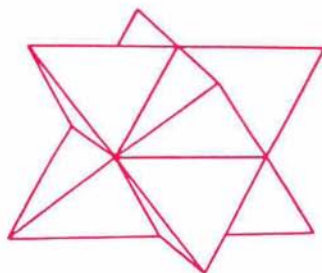
STELLA OCTANGULA



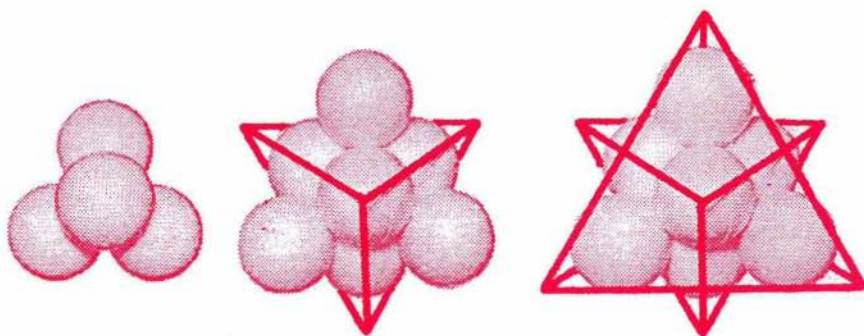
Nemški matematik, fizik in astronom **Johannes Kepler** (1571 - 1630) omenja v svojem znamenitem delu *Harmonices mundi* (1619) tudi zanimiv in nenavaden nekonveksen polieder, ki ga lahko opazujete na desni sliki. Sestavljen je iz dveh med seboj prežemajočih se tetraedrov in **Kepler** mu je nadel ime *stella octangula*.

Naslednja slika pa nam pokaže, kako si lahko s sestavljanjem kroglic v dva tetraedra dokaj učinkovito ponazorimo zgradbo tega telesa.

Johannes Kepler



stella octangula



Toda tak model *stelle octangule* nas najbrž le ne zadovolji povsem, raje bi ga izdelali še iz papirja. Bi vam uspelo zgraditi tak model iz enega samega kosa papirja? In ali znate dokazati, da je *stella octangula* včrtana kocki in da je presek obeh njenih tetraedrov oktaeder?

Vilko Domajnko

SLIKOVNA KRIŽANKA "FIZIKALNE ENOTE" — Rešitev s str. 121

SESTAVA FRANCO BOKAL	POVRN KOLAR	ALUMIN KUP	ČISTILNI KUP	ROBA KUP SLABO KUP	POVRN KUP	POVRN KUP KUP	POVRN KUP KUP	POVRN KUP KUP	POVRN KUP KUP
POVRN KUP KUP	T	A	S	T	POVRN KUP KUP	L	U	K	S
POVRN KUP KUP	E	M	I	R	POVRN KUP KUP	I	S	A	R
POVRN KUP KUP	S	P	E	V	POVRN KUP KUP	T	O	N	A
POVRN KUP KUP	L	E	M	A	POVRN KUP KUP	E	D	A	M
POVRN KUP KUP	A	R	E	U	POVRN KUP KUP	R	A		
POVRN KUP KUP	N	O	Č		POVRN KUP KUP	M	O		
POVRN KUP KUP	K	O	S	T	POVRN KUP KUP	Z	N	A	K
POVRN KUP KUP	E	R	O	B	POVRN KUP KUP	L	E	K	A
POVRN KUP KUP	L	E	S	K	POVRN KUP KUP	W	R		
POVRN KUP KUP	V	A	T	R	POVRN KUP KUP	I	T	E	M
POVRN KUP KUP	I	D	O	L	POVRN KUP KUP	V	O	L	T
POVRN KUP KUP	N	A	T	O	POVRN KUP KUP	E	N	A	

Proizvodnja in prodaja
računalniške opreme

Servis
računalniške opreme

Prodaja tuje
strokovne literature



ALTECH
Alternativne Tehnologije, d.o.o.
Titova 118
61000 Ljubljana
tel.: (+38) 061 347 969
Fax: (+38) 061 347 961

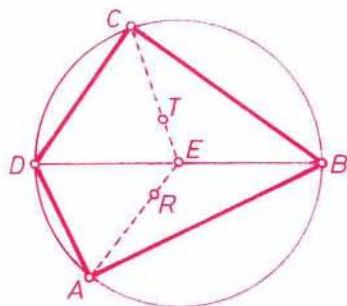
6. ŠOLSKO TEKMOVANJE IZ MATEMATIKE ZA SREDNJEŠOLCE – Rešitve s str. 94

Prvi letnik

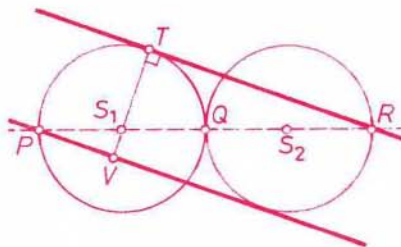
1. Izmed števil oblike $4k+2$ in $4k+3$ ($k \geq 1$) izbiramo najmanjše število, katerega kvadrat je deljiv z 9, število je zato deljivo s 3. Med števili oblike $4k+2$ je to 6, med $4k+3$ pa 15. Iskano število je torej 6.
2. Vsota cifer štirimestnega števila je najmanj 1 in največ 36. Če izberemo 37 števil, bosta zagotovo dve z enako vsoto cifer.
3. Če označimo osnovo številskega sistema z n , velja $2n^2 = 3n + 3 + n^2 + 1$ ali $n^2 - 3n - 4 = 0$, kar lahko razstavimo $(n-4)(n+1) = 0$. Ker osnova ne more biti negativna, je rešitev $n = 4$.
4. Upoštevajmo $(a+s) \cdot v/4 = 2 \cdot (s+c) \cdot v/4$ oziroma $a+s = 2(s+c)$. Ker je $s = (a+c)/2$, dobimo $a = 5c$ ali $a : c = 5 : 1$.

Drugi letnik

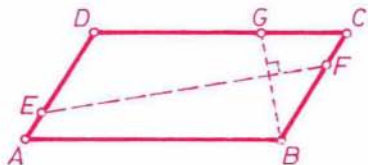
1. Iz podatkov v nalogi sledi, da je štirikotnik tetiven, trikotnika $\triangle ABD$ in $\triangle DBC$ imata isti očrtani krog s središčem E . Odtod je $EC = EA = BD/2$, zato $ER = ET = BD/6$ in končno $RE + ET = BD/3 = 10/3$.



2. Narišimo sliko po navodilih naloge in potegnimo skozi S_1 pravokotnico na tangenti. Trikotnika $\triangle PVS_1$ in $\triangle RTS_1$ sta podobna, zato velja $S_1R : S_1T = S_1P : S_1V$ in odtod $S_1V = 1/3$. Razdalja med tangentama je $4/3$.



3. Če upoštevamo, da sta c in d pravokotna, dobimo $a \cdot b = 1/2$, toda a in b imata dolžino 1, zato oklepata kot 60° .
4. Označimo $a = \overline{AB}$ in $b = \overline{AD}$. Ker sta $EF = (a + 5 \cdot b / 12)$ in $BG = b + k \cdot a$ med seboj pravokotna, je $(a + 5 \cdot b / 12) \cdot (b + k \cdot a) = 0$ oziroma $k \cdot |a|^2 + \frac{5}{12} k \cdot a \cdot b + a \cdot b + \frac{5}{12} |b|^2 = 0$. Upoštevajmo $|a| = 10$, $|b| = 5$ in $a \cdot b = 25$, pa imamo $k = -17/53$ in $DG : GC = 36 : 17$.

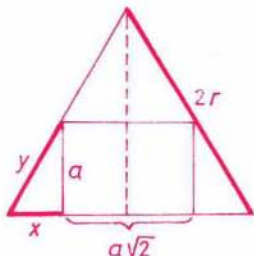


Tretji letnik

1. Izrazimo $y = 3 - 2x$ in vstavimo v izraz $x^2 + y^2 = x^2 + (3 - 2x)^2 = 5x^2 - 12x + 9$, ki ga preoblikujemo v $5(x - \frac{6}{5})^2 + \frac{9}{5}$, od koder je razvidna najmanjša vrednost $9/5$.
2. Označimo $y = \sqrt[3]{x}$ in rešimo enačbo $2y^2 + y - 3 = 0$. Iz rešitev te enačbe $y_1 = 1$ in $y_2 = -3/2$ takoj dobimo še $x_1 = 1$ in $x_2 = -27/8$.
3. Uporabimo formulo za prehod na logaritem z drugo osnovo:

$$\begin{aligned} \log_{\sqrt{pq}}(q/\sqrt{p}) &= \frac{\log_p(q/\sqrt{p})}{\log_p \sqrt{pq}} = \frac{\log_p q - 1/2}{(1 + \log_p q)/2} = \\ &= \frac{2\sqrt{5} - 1}{\sqrt{5} + 1} = \frac{11 - 3\sqrt{5}}{4} \end{aligned}$$

4. Upoštevajmo $y = 2x$ v $y^2 = a^2 + x^2$, pa imamo $a^2 = 3x^2$, zaradi $x = r - (a\sqrt{2})/2$ pa še $a^2 = 3(r - (a\sqrt{2})/2)^2$, kar velja le, če je $a = (r - (a\sqrt{2})/2)\sqrt{3}$ ali $a = -(r - (a\sqrt{2})/2)\sqrt{3}$. Izkaže se, da druga enakost ne pride v poštev, iz prve pa dobimo $a = (3\sqrt{2} - 2\sqrt{3})r = 5(3\sqrt{2} - 2\sqrt{3})$.



Četrty letnik

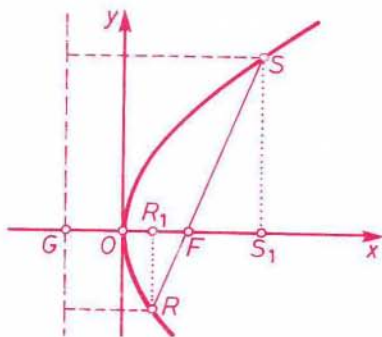
1. Uporabimo Hornerjev algoritem

$$\begin{array}{r}
 4 \qquad 0 \qquad -3 \qquad -k \\
 \qquad 4 \cos \alpha \qquad 4 \cos^2 \alpha \qquad 4 \cos^3 \alpha - 3 \cos \alpha \\
 \hline
 \cos \alpha \quad 4 \quad 4 \cos \alpha \quad 4 \cos^2 \alpha - 3 \quad 0
 \end{array}$$

Rešimo $4x^2 + 4x \cos \alpha + 4 \cos^2 \alpha - 3 = 0$:

$$x_{1,2} = \frac{-4 \cos \alpha \pm \sqrt{48 - 48 \cos^2 \alpha}}{8} = \frac{-4 \cos \alpha \pm 4 \sqrt{3} \sin \alpha}{8} = -\frac{1}{2} \cos \alpha \pm \frac{\sqrt{3}}{2} \sin \alpha = -\cos(\alpha \pm \frac{\pi}{3}), \text{ pa vidimo, da je pravilna možnost (b).}$$

2. Najprej vidimo $FS_1 = GS_1 - GF = FS - p$ in $FR_1 = GF - GR_1 = p - FR$ (točka $G(-p/2, 0)$ je na vodnici, $F(p/2, 0)$ pa je gorišče). Zaradi podobnosti $\triangle R_1FR$ in $\triangle S_1FS$ velja $FS/(FS - p) = FR/(p - FR)$, od tod pa $2 \cdot FS \cdot FR = p(FS + FR)$ in $2/p = 1/FR + 1/FS$.



3. Po Vietovem pravilu je $x_1^2 + x_2^2 = -p$ in $x_1^2 x_2^2 = q$ (bikvadratna enačba). Postavimo ničle po velikosti: $-x_1, -x_2, x_2, x_1$. Ker tvorijo aritmetično zaporedje, velja $2x_2 = x_1 - x_2$ oziroma $x_1 = 3x_2$. Upoštevajmo to v gornjih enakostih, pa imamo $9x_2^4 = q$ in $10x_2^2 = -p$ ter končno $9p^2 = 100q$.
4. Ločimo dva primera, ki ju predstavimo s slikama:

X	-	O	X	-	O	X	-
-	O	X	-	O	X	-	O
O	X	-	O	X	-	O	X
X	-	O					
-	O	X					
O	X	-					
X	-	O					
-	O	X					

X	O	-	X	O	-	X	O
-	X	O	-	X	O	-	X
O	-	X	O	-	X	O	-
X	O	-					
-	X	O					
O	-	X					
X	O	-					
-	X	O					

Če na vsako polje postavimo elemente "x", "-", ali "o", potem vsaka domina 3×1 pokrije tri različno označena polja. Od položaja "zlomljene" domine se odločimo za eno od dveh postavitev elementov, tako da ta domina ne pokrije treh različno označenih polj. Preostanka lika zato ne moremo pokriti z dominami 3×1 .

Darjo Felda

TRI PRAŠTEVILSKE - Rešitev s str. 99

1. V vsakem zaporedju šestih zaporednih naravnih števil so tri soda števila, med ostalimi tremi pa je eno deljivo s tri (zakaj?). Od tod brž sledi, da mora vsako iskano zaporedje vsebovati število 3. Torej so le tri taka zaporedja. Njihovi prvi členi so 1, 2 in 3.

2. Dvajset zaporednih naravnih števil vsebuje točno deset sodih števil, med lihimi pa so vsaj tri deljiva s tri (tri zaporedna liha števila pri deljenju s 3 dajo različne ostanke). Če v takem zaporedju ni trojke, tudi dvojke ni, zato je vsaj $10 + 3 = 13$ števil tega zaporedja sestavljenih. Praštevil je tedaj največ 7, torej 35 odstotkov, kar nam brž da odgovor na prvo vprašanje:
a. Le dve zaporedji sta taki. Začneta se z 1 ali z 2.

Med lihimi števili zaporedja dvajsetih zaporednih naravnih števil sta dve deljivi s 5. Ker se ti dve števili razlikujeta za 10, nista obe deljivi s 3. Torej v zaporedju obstaja število, ki je deljivo s 5 in ni deljivo z 2 ali s 3. Če v zaporedju ni petice, tudi dvojke in trojke ni v njem, zato vsebuje vsaj $10 + 3 + 1 = 14$ sestavljenih števil. Torej je v njem tedaj največ 6 praštevil, kar nam da odgovor na drugo vprašanje:

b. Iskanih zaporedij je pet in se začnejo s števili 1, 2, 3, 4, 5.

3. Ne. Utemeljitev: Na enak način kot pri prejšnji nalogi dobimo v zaporedju stotih zaporednih naravnih števil 50 sodih števil. Vsaj 16 lihih večkratnikov števila 3 in 5 ($100 = 5 \cdot 20$) večkratnikov števila 5, ki niso deljivi ne z 2 ne s 3. Če se torej zaporedje prične s številom, ki je večje od 5, vsebuje največ $100 - (50 + 16 + 5) = 29$ praštevil. Tudi zaporedja, ki se začnejo s členom 1, 2, 3, 4 ali 5, ne vsebujejo 30 praštevil.

Boris Lavrič

16. IZBIRNO TEKMOVANJE IZ MATEMATIKE ZA SREDNJEŠOLCE – Rešitve s str. 94

Prvi letnik

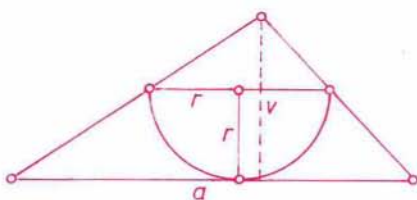
1. Iz prve enakosti sklepamo, da je $a > b$ in $a > c$, zato $2a > b + c$ in $4a > 2(b + c)$, zaradi druge pa $4a > a^2$. Slednje velja le za $a = 2$ (a je namreč sodo število, kar sklepamo iz druge enakosti), b in c sta torej enaka 1.
2. Recimo, da bi se to dalo: $p = a^5 - b^5 = (a - b)(a^4 + a^3b + a^2b^2 + ab^3 + b^4)$. Odtod mora biti $a - b = 1$, saj je drugi faktor vsota petih naravnih števil. Pišimo $a^5 - b^5 = (b + 1)^5 - b^5 = 5b^4 + 10b^3 + 10b^2 + 5b + 1$, pa imamo $5b^4 + 10b^3 + 10b^2 + 5b = 2^{2^n}$, kar je protislovje, saj je leva stran deljiva s 5, desna pa ne.
3. Če je $z = 2$, dobimo zvezo $x^y = 1$, ki v množici praštevil nima rešitev. Naj bo z zato liho praštevilo $z = 2s + 1$. Zaradi zveze $x^y = 2s$ mora biti x sodo praštevilo, torej $x = 2$, kar nas privede do edine rešitve $x = y = 2$ in $z = 5$.
4. Uporabili bomo Pitagorov izrek $a^2 + b^2 = c^2$ in zvezo $ab = cv$ ($= 2P$, kjer je P ploščina tega trikotnika). Očitno je namreč $(a + b)^2 = a^2 + b^2 + 2ab = c^2 + 2cv < c^2 + 2cv + v^2 = (c + v)^2$, po korenjenju pa dobimo iskano neenakost.

Drugi letnik

1. Če je $x > 0$, velja $(x^3 + 1)^2 = x^6 + 2x^3 + 1 < x^6 + 3x^3 + 1 = y^4 < x^6 + 4x^3 + 4 = (x^3 + 2)^2$ in $x^3 + 1 < y^2 < x^3 + 2$, kar pri celih x in y ni mogoče. Podobno ravnamo, če je $x \leq -2$: $(x^3 + 2)^2 = x^6 + 4x^3 + 4 < x^6 + 3x^3 + 1 = y^4 < x^6 + 2x^3 + 1 = (x^3 + 1)^2$, dobimo namreč protislovno neenakost $-(x^3 + 2) < y^2 < -(x^3 + 1)$. Pri $x = -1$ dobimo $y^4 = -1$, kar ne more veljati, tako da imamo le dve rešitvi: $x = 0$, $y = \pm 1$ oziroma para $(0, 1)$ in $(0, -1)$.
2. Vzemimo $x = 0$: iz $f(0) - f^2(0) \geq \frac{1}{4}$ dobimo $(f(0) - \frac{1}{2})^2 \leq 0$, odtod pa $f(0) = \frac{1}{2}$. Poskusimo z $x = 1$: iz $f(1) - f^2(1) \geq \frac{1}{4}$ sledi $(f(1) - \frac{1}{2})^2 \leq 0$ in $f(1) = f(0)$, funkcija ni injektivna.
3. Če upoštevamo, da ima tangenta $y = kx + n$ s parabolo $y = x^2 - 6x + 12$ le eno skupno točko, mora veljati $(6 + k)^2 - 4(12 - n) = 0$, analogno dobimo za drugo parabolo $(8 - k)^2 - 4(17 + n) = 0$. Rešimo sistem teh dveh enačb, pa imamo tangenti $y = 4x - 13$ in $y = -2x + 8$.

4. Iz slike razberemo razmerje v :

$$a = (v - r) : 2r, \text{ od tod pa} \\ \text{dobimo } r = \frac{av}{a + 2v}$$



Tretji letnik

1. Označimo $t = x + \frac{1}{x}$. Potem je $t^3 = x^3 + \frac{1}{x^3} + 3t$ oziroma $x^3 + \frac{1}{x^3} = t^3 - 3t$ in $(x^3 + \frac{1}{x^3})^2 = x^6 + \frac{1}{x^6} + 2$ oziroma $x^6 + \frac{1}{x^6} = (t^3 - 3t)^2 - 2$. Izraz se nam poenostavi

$$\frac{t^6 - ((t^3 - 3t)^2 - 2) - 2}{t^3 + (t^3 - 3t)} = 3t \frac{2t^3 - 3t}{2t^3 - 3t} = 3t$$

Končno pišimo $3(x + \frac{1}{x}) = 3((\sqrt{x} - \frac{1}{\sqrt{x}})^2 + 2)$, pa vidimo, da doseže izraz najmanjšo vrednost 6 pri $x = 1$.

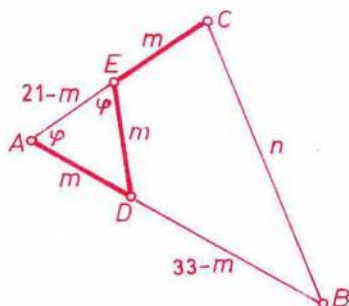
2. Spomnimo se identitete $(x + y)^3 = x^3 + y^3 + 3xy(x + y)$.
- a) Postavimo $x = \sqrt[3]{38 + 17\sqrt{5}}$ in $y = \sqrt[3]{38 - 17\sqrt{5}}$ ter označimo $a = x + y$. Ko opazimo, da je $xy = -1$, lahko zgornjo identiteto zapišemo $a^3 = 76 - 3a$ z edino realno rešitvijo $a = 4$: $\sqrt[3]{38 + 17\sqrt{5}} + \sqrt[3]{38 - 17\sqrt{5}} = 4$.
- b) Vzemimo sedaj $x = \sqrt[9]{38 + 17\sqrt{5}}$ in $y = \sqrt[9]{38 - 17\sqrt{5}}$ ter tako kot prej $a = x + y$. Spet je $xy = -1$, iz a) pa dobimo $x^3 + y^3 = 4$. Gornja identiteta se zapiše $a^3 = 4 - 3a$ z edino realno rešitvijo $a = 1$: $\sqrt[9]{38 + 17\sqrt{5}} + \sqrt[9]{38 - 17\sqrt{5}} = 1$.

3. Najprej ugotovimo, da leva stran enačbe ne more biti večja od 4, desna pa ne manjša od 4. Enakost dosežemo, če velja:

$$\begin{array}{lll} \text{a)} \quad \cos 4x = -1 & \Rightarrow & 4x = \pi + 2k\pi \Rightarrow x = \frac{\pi}{4} + k\frac{\pi}{2} \\ & \cos 2x = 1 & \Rightarrow 2x = 2l\pi \Rightarrow x = l\pi \\ & \sin 3x = -1 & \Rightarrow 3x = \frac{3\pi}{2} + 2m\pi \Rightarrow x = \frac{\pi}{2} + m\frac{2\pi}{3} \\ \text{b)} \quad \cos 4x = 1 & \Rightarrow & 4x = 2k\pi \Rightarrow x = k\frac{\pi}{2} \\ & \cos 2x = -1 & \Rightarrow 2x = \pi + 2l\pi \Rightarrow x = \frac{\pi}{2} + l\pi \\ & \sin 3x = -1 & \Rightarrow 3x = \frac{3\pi}{2} + 2m\pi \Rightarrow x = \frac{\pi}{2} + m\frac{2\pi}{3} \end{array}$$

Možnost a) nima rešitev, b) pa da $x = \frac{\pi}{2} + 2n\pi$, $n \in \mathbb{Z}$.

4. Najprej je $\cos \varphi = \frac{21-m}{2m}$, nato pa po kosinusnem izreku $n^2 = 33^2 + 21^2 - 2 \cdot 33 \cdot 21 \cdot \cos \varphi = 1530 - 1386 \frac{21-m}{2m} = 2223 - \frac{3^3 \cdot 7^2 \cdot 11}{2m}$. Odtod vidimo, da je m lahko le 3, 7, 9 ali 11 (saj je manjši od 21), dobimo pa le dve rešitvi: pri $m = 7$ je $n = 12$, pri $m = 11$ pa $n = 30$.



Četrty letnik

1. Če enačbo kubiramo in uredimo, dobimo $7 + x + 7 - x + 3 \cdot \sqrt[3]{7+x} \cdot \sqrt[3]{7-x} \cdot (\sqrt[3]{7+x} + \sqrt[3]{7-x}) = 8$, odtod pa $6 \cdot \sqrt[3]{49-x^2} = -6$, $49 - x^2 = -1$, $x^2 = 50$ in $x = \pm 5\sqrt{2}$. Enačba ima dve rešitvi.
2. Dokazujemo z indukcijo. Pri $n = 0$ je enakost očitna, pri $n = 1$ pa se hitro vidi, da je $\text{tg}(\arctg 1 + \arctg \frac{1}{3}) = \text{tg}(\arctg 2)$, če uporabimo adicijski izrek za funkcijo tangens. S tem izrekom si pomagamo tudi pri dokazovanju veljavnosti enačbe pri $n + 1$:

$$\begin{aligned} & \text{tg}(\arctg(n+1) + \arctg \frac{1}{(n+1)^2 + (n+1) + 1}) = \\ &= \frac{n+1 + \frac{1}{n^2+3n+3}}{1 - \frac{n+1}{n^2+3n+3}} = \frac{n^3+4n^2+6n+4}{n^2+2n+2} = n+2 \end{aligned}$$

3. Najprej ugotovimo:

$$\begin{aligned} f^1(x) &= \frac{x-1}{x+1}, x \neq -1 \\ f^2(x) &= -\frac{1}{x}, x \notin \{-1, 0\} \\ f^3(x) &= \frac{1+x}{1-x}, x \notin \{-1, 0, 1\} \\ f^4(x) &= x, x \notin \{-1, 0, 1\} \end{aligned}$$

Nato sklepamo za $n > 4$:

25. TEKMOVANJE ZA SREBRNO VEGOVO PRIZNANJE – Rešitve nalog s str. 108

6. razred

- 1990
- Če z x označimo dedkovo starost, potem je $\frac{1}{15}x$ let hodil v šolo, $\frac{11}{18}x$ let pa delal. Sklepamo: število dedkovih let x mora biti deljivo s 15 in z 18. Ker je $15 = 3 \cdot 5$ in $18 = 2 \cdot 3 \cdot 3$, dobimo $v(15, 18) = 2 \cdot 3 \cdot 3 \cdot 5 = 90$ in $\frac{1}{15}$ od 90 = 6 ter $\frac{11}{18}$ od 90 = 55. Dedek je hodil v šolo 6 let, delal je 55 let.
- Najprej sta $a = \frac{1}{4}$ od 120 cm = 30 cm in $b = 40\%$ od 120 cm = 48 cm, nato pa $c = 120 - (30 + 48)$ oziroma $c = 42$ cm in $\frac{42}{120} = \frac{7}{20} = 35\%$.
- Ploščino izračunamo
 $PABCE = PFBCE + PAFED$:
 2 ali $PABCE = PABCD - PAFED$: 2. Ker je
 $PABCD = 8 \cdot 6 = 48$ in
 $PAFED = 5 \cdot 6 = 30$, sledi
 $PABCE = 48 - 15 = 33$. Ploščina štirikotnika $ABCE$ meri 33 cm^2 .

7. razred

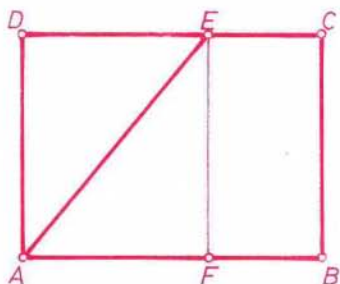
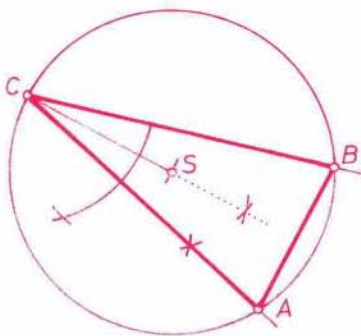
1.

$$\frac{1}{1-x+x^2-x^3} = \frac{1}{1+\frac{1}{2}+\frac{1}{4}+\frac{1}{8}} = \frac{8}{15}$$

$$\frac{1}{1+x+x^2+x^3} = \frac{1}{1-\frac{1}{2}+\frac{1}{4}-\frac{1}{8}} = \frac{8}{5}$$

$$\frac{8}{15} - \frac{8}{5} = -\frac{16}{15}$$

- Načrtamo kot $\angle C = 30^\circ$, nato njegovo simetralo. Središče S leži na simetrali 3 cm od točke C . Kraka kota $\angle C$ sekata očrtano krožnico v točkah A in B , ki ju še povežemo.



Vrednosti izrazov se razlikujeta za $\frac{16}{15}$.

2. Zapišimo $y = \frac{6}{x}$ kot produkt $x \cdot y = 6$ in po vrsti preverimo.

$$A: \left(-\frac{3}{4}\right) \cdot (-8) = 6, \quad \text{leži}$$

$$B: \frac{6}{5} \cdot \frac{5}{6} = 1, \quad \text{ne leži}$$

$$C: 15 \cdot \frac{2}{5} = 6, \quad \text{leži}$$

$$D: \frac{5}{2} \cdot 2 = 5, \quad \text{ne leži}$$

Na grafu funkcije ležita točki A in C.

3.

$$\begin{aligned} & \left(\frac{2}{11 \cdot 13} + \frac{2}{13 \cdot 15} + \frac{2}{15 \cdot 17} + \frac{2}{17 \cdot 19} + \frac{2}{19 \cdot 21} \right) \cdot x = \frac{20}{231} \\ & \left(\left(\frac{1}{11} - \frac{1}{13} \right) + \left(\frac{1}{13} - \frac{1}{15} \right) + \left(\frac{1}{15} - \frac{1}{17} \right) + \left(\frac{1}{17} - \frac{1}{19} \right) + \left(\frac{1}{19} - \frac{1}{21} \right) \right) x = \frac{20}{231} \\ & \left(\frac{1}{11} - \frac{1}{13} + \frac{1}{13} - \frac{1}{15} + \frac{1}{15} - \frac{1}{17} + \frac{1}{17} - \frac{1}{19} + \frac{1}{19} - \frac{1}{21} \right) \cdot x = \frac{20}{231} \\ & \left(\frac{1}{11} - \frac{1}{21} \right) \cdot x = \frac{20}{231} \\ & \frac{10}{231} \cdot x = \frac{20}{231} \\ & 10x = 20 \\ & x = 2 \end{aligned}$$

4.

$$P = P_{SDC} - P_{iz}$$

$$P_{SDC} = 0,5m^2 = 50dm^2$$

$$P_{iz} = \frac{1}{8} \cdot 3,14 \cdot 1 = 0,39m^2$$

$$p = 50 - 39 = 11dm^2$$

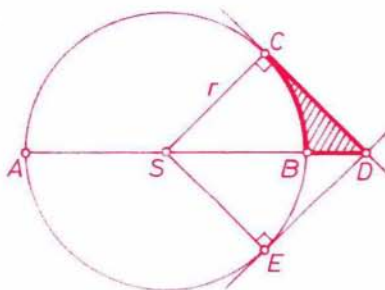
ali

$$p = (P_{SEDC} - 0,25 \cdot \pi \cdot r^2) : 2$$

$$p = (1 - 0,25 \cdot 3,14 \cdot 1) : 2$$

$$p = (1 - 0,78) : 2$$

$$p = 0,11m^2 = 11dm^2$$



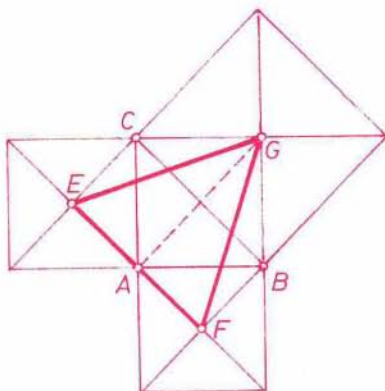
5. Lik EFG je trikotnik

$$\overline{EF} = \overline{CB} = 4\text{ cm}$$

$$\overline{AG} = \overline{CB} = 4\text{ cm}$$

$$PEFG = \frac{\overline{EF} \cdot \overline{AG}}{2}$$

$$PEFG = 8\text{ cm}^2$$



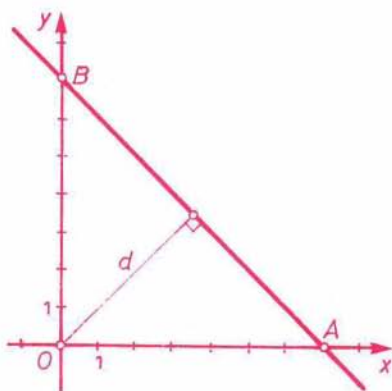
8. razred

1. Enačbo $10 + 3(x - 2) = ax + 3$ uredimo: $10 + 3x - 6 = ax + 3$, $3x - ax = -1$, $x(3 - a) = -1$. Če je $3 - a = 0$ oziroma $a = 3$, je $x \cdot 0 = -1$ in enačba nima rešitve.

2a. $3 = (2m + 1) \cdot 4 + 7$, $m = -1$

b. $y = -x + 7$

c. $\triangle AOB$ je polovica kvadrata s stranico 7; $d = \frac{7}{2}\sqrt{2}$.



3.

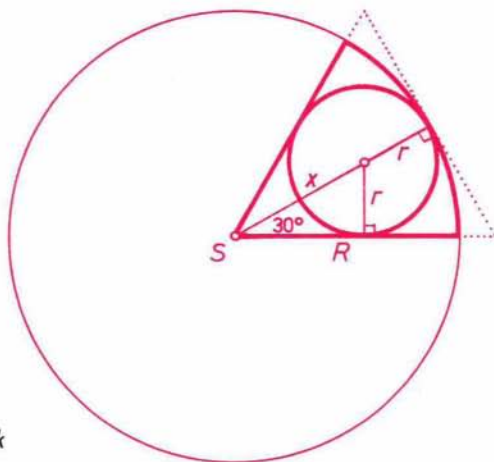
	dolžina	v času t
lisica	1	$9t$
pes	$\frac{7}{3}$	$\frac{7}{3} \cdot 6t (= 14t)$

Če naj pes ujame lisico, mora veljati $9t + 60 = 14t$ in odtod $t = 12$. Narediti mora 72 skokov.

5. Najprej izračunamo prostornino kvadra z višino $v = 2,2\text{ mm}$ in osnovno ploskvijo $O = 1\text{ m}^2 = 10^6\text{ mm}^2$: $V = O \cdot v = 10^6 \cdot 2,2\text{ mm}^3 = 2200\text{ cm}^3$, nato pa $2200 \cdot 12 = 26400$. Padlo je 26400 kapljic dežja na m^2 .

4.

$$\begin{aligned}
 x + r &= R \\
 x : r &= 2 : 1 \\
 r &= R : 3 \\
 \frac{\pi R^2}{6} : \pi r^2 &= 3 : 2
 \end{aligned}$$



Aleksander Potočnik

POVPREČNIK IN NJEGOVI PREBIVALCI – Rešitev s str. 89 (P-2)

Označimo z a iskano povprečno starost in upoštevajmo, da je Povprečničanov, ki so dopolnili k let, a še niso stari $k+1$ let $a_k - a_{k+1}$ ($k = 0, 1, 2, \dots$). Potem veljata oceni

$$(a_1 - a_2) + 2(a_2 - a_3) + 3(a_3 - a_4) + \dots \leq a_0 a$$

$$(a_0 - a_1) + 2(a_1 - a_2) + 3(a_2 - a_3) + \dots > a_0 a$$

Če odpravimo oklepaje, dobimo

$$a_1 + a_2 + a_3 + \dots \leq a_0 a < a_0 + a_1 + a_2 + a_3 + \dots$$

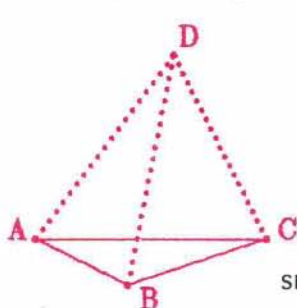
torej se bomo zmotili za manj kot eno leto, če vzamemo za povprečno starost $(a_1 + a_2 + a_3 + \dots) / a_0$.

Boris Lavrič

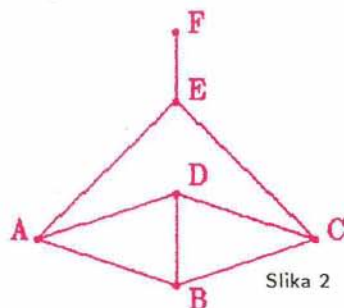
ŠE DVE ECCOVI NALOGI – Rešitev naloge s str. 44

1. ZABAVA

- * Najmanjše možno število ljudi na taki zabavi je 6. Tri ali manj je nemogoče, ker se nihče ne bi mogel rokovati s tremi drugimi. Štiri ni mogoče, kajti če so se tri osebe rokovale s tremi drugimi osebami, se je morala tudi četrta oseba rokovati s tremi drugimi osebami (slika 1). Pet je nemogoče iz podobnega razloga. Šest pa je možno število. Če označimo šest oseb z A , B , C , D , E in F , se lahko rokujejo tako, kot je prikazano na sliki 2: A se rokuje z B , D in E ; B se rokuje še s C in D ; C se rokuje še z D in E ; E se rokuje še z F .

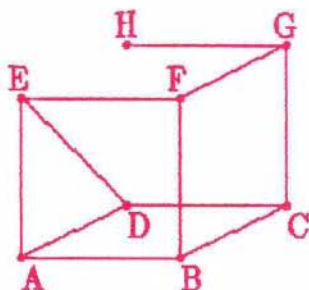


Slika 1



Slika 2

- * Število oseb na taki zabavi ne more biti liho. Vsakič, ko se dva rokujeta, se število rokovanj vseh oseb poveča za dva. Če bi bilo na primer vseh ljudi na zabavi 21, bi bilo skupno število rokovanj $20 \times 3 + 1 = 61$, kar je nemogoče.
- * Katerokoli sodo število, večje ali enako 6, je dobro. Hitro se vidi, da je dobro vsako število oblike $6 + 4k$, $k \in \mathbb{N}$, saj bi lahko za šesterico uporabili rešitev s slike 2, vsaka četverica pa bi se rokovala med seboj tako kot na sliki 1. Če je na zabavi osem oseb, ki jih označimo z A , B , C , D , E , F , G in H , se lahko rokujejo tako, kot je prikazano na sliki 3:



Slika 3

A se rokuje z B , D in E ; B se rokuje še z F in s C ; C se rokuje še z D in G ; D se rokuje š z E ; E se rokuje še z F , F še z G in G še s H . Od tod sledi, da je dobro tudi vsako število oblike $8 + 4k$, $k \in \mathbb{N}$.

2. PONAREJENI KOVANCI

Opišimo, kako s tremi tehtanji določimo, kateri od štirih kovancev so pravi. Očitno bomo potem vedeli tudi, kako s 15 tehtanji določiti vse prave kovance. Označimo štiri kovance z A , B , C in D . Najprej stehtamo A , B in C skupaj. Če so vsi trije ponarejeni, bo teža med 31.8 in 32.1. Če sta dva ponarejena, eden pa je pravi, bo teža med 32.2 in 32.5. Če je en ponarejen, dva pa prava, bo teža med 32.6 in 32.9. Če so vsi trije pravi, pa bo teža med 33 in 33.3. Torej lahko razločimo med posameznimi možnostmi. Če so vsi trije kovanci pravi, ali pa vsi trije ponarejeni, moramo stehtati le še D , torej smo po dveh tehtanjih končali.

Sicer pa stehtamo najprej A in D , potem pa B in D . Vsako od teh dveh tehtanj nam pove, ali sta oba kovanca ponarejena (teža je med 21.2 in 21.4), en ponarejen in en pravi (teža je med 21.6 in 21.8), ali oba prava (teža je med 22 in 22.2).

Če je katerokoli od obeh tehtanj pokazalo, da sta oba kovanca prava ali oba ponarejena, zlahka določimo vse prave kovance. Na primer, če sta B in D oba prava in je med A in D en ponarejen, je ponarejeni kovanec A . Če sta med kovanci A , B in C dva ponarejena, sta to A in C .

V nasprotnem primeru je ponarejen eden od kovancev A in D , pa tudi eden od kovancev B in D . Dvoje je mogoče. Če sta med kovanci A , B in C dva prava, mora biti kovanec D ponarejen, pa tudi C mora biti ponarejen. Če pa sta med kovanci A , B in C dva ponarejena, morata to biti A in B , kovanca C in D pa sta prava.

*Iz knjige Dennis Shasha:
Zagonetne dogodivščine Dr. Ecce
izbrala in prevedla Neža Mramor*

ČETRТА PRAŠTEVILSKA

Videli smo, da med 100 zaporednimi naravnimi števili ne more biti 30 praštevil. Dokaži, da jih je lahko največ 26, in poišči zaporedje, ki temu ustreza.

Boris Lavrič

14. REPUBLIŠKO TEKMOVANJE IZ RAČUNALNIŠTVA — Rešitve s str. 100

Ker bi nam objavljjanje vseh rešitev odvzelo preveč prostora, bomo v vsaki skupini izpustili rešitev 1. naloge, ki je bila mišljena kot lažja naloga (čeprav seveda ne tako lahka, da bi jo morali znati rešiti kar v prvi minuti).

1. skupina

2. Namig nam pove, kako se moramo lotiti reševanja naloge. Najprej preštejemo, koliko oseb je rojenih v posameznem letu, nato izračunamo, kje v urejeni tabeli se začno osebe z danim letom rojstva in nazadnje prepišemo podatke o osebah. Program:

```
const
    letoMin = 1880;           {prvo možno leto rojstva}
    letoMax = 1990;           {zadnje možno leto rojstva}
    maxn = 13000;             {maksimalno število oseb}

type
    osebaT =
        record                {podatki o osebi}
            ime: packed array [1..32] of char;
            leto: letoMin..letoMax;
        end; {osebaT}
    tabelaT = array [1..maxn] of osebaT;

procedure Uredi(var a,b: tabelaT; n: integer);
    {Dejansko število oseb, katerih podatke dobimo v tabeli a, je n.}
    {Urejene podatke o osebah vrnemo v tabeli b.}

var
    so: array [letoMin..letoMax] of integer;           {število oseb, rojenih v}
                                                         {posameznem letu}
    i,j,k: integer;                                     {števcí}
begin {v tabelo so preštejemo, koliko oseb se je rodilo v posameznem letu}
    for i:=letoMin to letoMax do so[i]:=0;              {začetne vrednosti}
    for i:=1 to n do so[a[i].leto]:=so[a[i].leto]+1;    {štetje}
    {podatke v tabeli so preračunamo tako, da nam povedo, kje v pravilno}
    {urejeni tabeli b se začno osebe z danim letom rojstva.}
    j:=so[letoMin]; so[letoMin]:=1;
    for i:=letoMin+1 to letoMax do
        begin k:=so[i]; so[i]:=so[i-1]+j; j:=k end;
    {podatke o osebah prepišemo iz tabele a v tabelo b; upoštevamo, da}
    {nam so[r] pove, na katero mesto v tabeli b pride naslednja oseba}
    { z letom rojstva r}
```

```

    for i:=1 to n do
        begin b[so[a[i].leto]]:=a[i]; so[a[i].leto]:=so[a[i].leto]+1
    end;
end; { Uredi }

```

3. Vsakemu sosedu pošljemo dve celi števili: njegovi koordinati v vzorcu.

```

procedure Pobarvaj;
var
    zveza: integer;           {od kje smo dobili sporočilo}
    mox, moy: integer;        {kje v rastru smo}
    novaBarva: integer;       {ustrezna barva iz vzorca}
begin
    if MojaBarva<>mejnaBarva then begin
        repeat zveza:=JeSporocilo until zveza<>0;    {čakamo na sporočilo}
        mox:=Sprejmi(zveza); moy:=Sprejmi(zveza);    {sprejmemo svoje}
                                                    {koordinate}

        novaBarva:=Vzorec(mox mod xmax, moy mod ymax);
        if novaBarva<>MojaBarva then begin
            PobarvajMe(novaBarva);                    {pobarvamo se}
            if zveza<>1 then begin Poslji(1,mox); Poslji(1,moy-1) end;
                                                    {sporočimo navzgor}
            if zveza<>2 then begin Poslji(2,mox+1); Poslji(2,moy) end;
                                                    {na desno}
            if zveza<>3 then begin Poslji(3,mox); Poslji(3,moy+1) end;
                                                    {navzdol}
            if zveza<>4 then begin Poslji(4,mox-1); Poslji(4,moy) end;
                                                    {in na levo}

        end; {if}
    end; {if}
    repeat {počakamo, če nam bo še kdo ukazal, naj se pobarvamo}
        zveza:=JeSporocilo;
        if zveza<>0 then zveza:=Sprejmi(zveza);        {vržemo sporočilo proč}
    until false;
end; {Pobarvaj}

```

4. Program izpiše tabelo *a* v obratnem vrstnem redu, torej vsa števila od 128 do 1. Kratek program, ki da enak izpis, je:

```

program Marvin(output);
const els = 128;
var d: integer;
begin
    for d:=els downto 1 do writeln(d);
end. {Marvin}

```

Tabeli *a* in *b* program interpretira kot seznam, v katerem je *a[i]* podatek in *b[i]* indeks naslednjega elementa seznama (kazalec na naslednji element). Del programa

```

c:=1; b[els]:=0;
for d:=1 to els do begin a[d]:=d; if d >1 then b[d-1]:=d end;

```

definira tabelo *a* in zgradi seznam. V danem primeru je naslednik *i*-tega elementa *i* + 1. Zadnji element ima indeks 0. Spremenljivka *c* vsebuje indeks prvega elementa seznama. Naslednja zanka v programu

```

d:=0;
while c<>0 do begin e:=b[c]; b[c]:=d; d:=c; c:=e end;

```

se pomika po tabeli indeksov do konca seznama. Pri tem obrne indekse v seznamu tako, da kažejo v nasprotno smer (v našem primeru *i*-ti element kaže na element *i* - 1). Po izhodu iz zanke spremenljivka *d* vsebuje indeks zadnjega elementa v seznamu. Zadnja zanka

```

while d<>0 do begin writeln(a[d]); e:=b[d]; b[d]:=c; c:=d; d:=e end;

```

izpisuje podatkovne elemente seznama, popravlja indekse na začetno stanje in se premika proti začetku seznama. Po izhodu iz zanke je tabela indeksov *b* enaka kot po zgraditvi seznama. Spremenljivka *c* zopet kaže na prvi element seznama.

2. skupina

2. Prva preprosta rešitev je naslednja. Izračunamo indeks srednjega elementa (vseh elementov je $2 * n$, indeks srednjega elementa je n) in simuliramo zlivanje obeh zaporedij, dokler ne pridemo do elementa z ustreznim indeksom. Rešitev je še posebej preprosta, saj nam zaradi enakih dolžin zaporedij ni treba paziti, ali nam bo zmanjkalo kakšnega zaporedja. Vendar pa obstaja bistveno hitrejša rešitev, ki temelji na hkratni bisekciji obeh zaporedij. Prva rešitev ima časovno zahtevnost $O(n)$, druga pa $O(\log n)$.

```

type
  tabelaT = array [1..100] of real;
function Srednji(n: integer; a,b: tabelaT): real;
var
  aLevi,bLevi,aDesni,bDesni,aSrednji,bSrednji: integer;
  zamik: boolean;
begin
  aLevi:=1; aDesni:=n; bLevi:=1; bDesni:=n;
  while aLevi<aDesni do begin
    aSrednji:=(aDesni+aLevi) div 2; bSrednji:=(bDesni+bLevi) div 2;

```

```

zamik:=odd(aDesni-aLevi);
if a[aSrednji]<b[bSrednji] then
  begin
    aLevi:=aSrednji; bDesni:=bSrednji;
    if zamik then aLevi:=aLevi+1;
  end
else
  begin
    aDesni:=aSrednji; bLevi:=bSrednji;
    if zamik then bLevi:=bLevi+1;
  end; {else,if}
end; {while}
if a[aLevi]<b[bLevi] then Srednji:=a[aLevi] else Srednji:=b[bLevi];
end; {Srednji}

```

3. Hladen gorilnik se od gorečega soseda segreje do vžiga v 0.8 sekunde. Po vžigu gori največ eno sekundo, dokler ne porabi vsega goriva. Plamen se more prenesti le na sosednji, z gorivom dovolj napolnjeni gorilnik. Po ugasnitvi traja pet sekund, da se gorilnik dovolj napolni z gorivom in je ponovno pripravljen na vžig. V tem času se ohladi dovolj, da ne more priti do samovžiga. Ker gori plamen največ eno sekundo, se lahko širi le v eno smer (proti polnim gorilnikom), ne more pa se vrniti po poti pravkar ugaslih gorilnikov. Plamen se od netilca širi na obe strani tako, da hkrati gorita eden do dva sosednja gorilnika na vsaki strani. Ker so gorilniki povezani v krog, se oba potujoča plamena srečata po štiridesetih sekundah. Tam plamen ugasne zato, ker se pravkar izgoreli gorilniki v eni sekundi (dokler traja plamen) ne napolnijo z gorivom dovolj za ponoven vžig. Od tedaj se noben gorilnik ne prižge več.

4. Po izteku obeh programov lahko spremenljivka zavzame poljubno vrednost med vključno 2 in 20000. Izberimo si poljuben n med 2 in 20000 in pokažimo enega od načinov, kako dobimo na koncu izvajanja programa vrednost n .

Označimo $p = n \text{ div } 2$ in $q = n - p$. Ker je $2 \leq n \leq 20000$, velja $1 \leq p, q \leq 10000$.

Prvi program prebere 0 in čaka. Drugi program $(10000 - p)$ krat prebere, poveča in zapiše vrednost spremenljivke. Zapisana vrednost je zdaj $10000 - p$, drugemu programu ostane še natanko p ponovitev.

Prvi program poveča svojo prebrano vrednost in zapiše 1. Drugi program prebere 1 in čaka. Prvi program $(10000 - q)$ krat prebere, poveča in zapiše vrednost spremenljivke. Zapisana vrednost je zdaj $10000 - q + 1$, prvemu programu ostane še natanko $q - 1$ ponovitev.

Drugi program poveča svojo prebrano vrednost in zapiše 2; zdaj mu ostane še natanko $p - 1$ ponovitev. Vse svoje preostale ponovitve izvede preden prvi program nadaljuje z delom. Ob njegovem zaključku je vrednost spremenljivke enaka $p + 1$. Po zaključku dela drugega programa nadaljuje z delom prvi program: prebere vrednost $p + 1$ in jo v $q - 1$ ponovitvah poveča do $p + q = n$, ko konča s svojim delom.

Naj bo m število programov. Največja vrednost je enaka $m * 10000$. Za $m = 1$ je najmanjša vrednost spremenljivke enaka največji, medtem ko je za $m \geq 2$ enaka 2.

Kaj pa če je $m > 42$?

3. skupina

1. K prvi nalogi povejmo le, da je najboljša rešitev (in torej uradna rešitev v biltenu), ki smo se jo uspeli domisliti, domine postavljalna s pomočjo sestopanja. To je torej tako, kot rešujemo problem postavitve n kraljic na šahovsko desko, ...

2. Seveda števili 5 in 32 nista izbrani slučajno. 32 je ravno enako 2^5 ! Bi šlo sedaj reševanje nekoliko lažje? Program, ki uredi vagone je naslednji:

```

program ZelezniskaPostaja;
const
  n = 5;                                     {število slepih tirov}
  vhodniTir = 0;                             {indeks vhodnega tira}
  izhodniTir = 6;                            {indeks izhodnega tira (n+1)}

procedure PremakniVagon(odKod,kam: integer); external;
function Prazen(tir: integer): boolean; external;
function Vagon(tir: integer): integer; external;

procedure Preuredi (m: integer; obrni: boolean);
{Prestavi vagone s tirov 1..m-1 na tir m. V pošteve pride tudi prvi vagon.}
{ki čaka na vhodu v postajo. Vrstni red vagonov se pri preurejanju obrne.}
var min,min0,i: integer;
begin
  min0:=0;
  repeat
    min:=min0; while (min<m) and Prazen(min) do min:=min+1;
    if min<m then begin
      for i:=min+1 to m-1 do
        if Prazen(i) then { }
        else if (Vagon(i)<Vagon(min))<>obrnj then min:=i;
      PremakniVagon(min,m);
    end; {if}
  until min=m;
end;

```

```

    if min=0 then min0:=1;
    until min≥m;
end; {Preuredi}

procedure UrediPostajo(m: integer; obrni: boolean);
    {Uredi postajo velikosti m tirov (in 2*m vagonov). }
begin
    if m=1 then PremakniVagon(0,1)    {tako majhno postajo znamo urediti}
    else begin                          {dvakrat uredi pol manjšo postajo}
        UrediPostajo(m-1,not obrni);
        Preuredi(m,obrne);             {izprazni prvih m-1 tirov za drugo urejanje}
        UrediPostajo(m-1,obrne)        {pol manjša postaja ne potrebuje tira m}
    end; {if}
end; {UrediPostajo}

begin {ZelezniskaPostaja}
    UrediPostajo(n,Odd(n));
    Preuredi(izhodniTir,not Odd(n));
end. {ZelezniskaPostaja}

```

3. Podprogram *ShraniPaket* spremlja število prispelih paketov vsake datoteke in podatke o njih hrani v tabeli *paketi*. Ko prispejo vsi zapisi neke datoteke, jih z zaporednimi klici podprograma *Pisi* po vrsti izpiše in sprostí pomnilnik, ki so ga zasedali, da je na voljo novim datotekam.

```

const
    maxPaketov = 1500;           {več kot število datotek × povprečna dolžina}
    maxDatotek = 10;

type
    shranjenZapisT =
        record
            stevilka: integer;    {številka zapisa v datoteki}
            naslednji: integer;   {naslednji element v verigi}
            zapis: zapisT;        {vsebina zapisa}
        end; {shranjenZapisT}
    opisDatotekeT =
        record
            zadnjiZapis: integer; {oblika opisa prihajajoče datoteke}
            sprejetih: integer;    {številka zadnjega zapisa}
            prviZapis: integer;    {število sprejetih zapisov}
            {prvi element v verigi zapisov}
        end; {opisDatotekeT}

var
    prazniZapisi: integer;       {kazalec na prvi element}
    { v verigi prostih zapisov v tabeli zapisi}
    opisi: array [1..maxDatotek] of opisDatotekeT; {opisi datotek}
    zapisi: array [1..maxPaketov] of shranjenZapisT; {seznam zapisov}

procedure Pisi(datoteka: integer; zapis: zapisT); external;

```

```

procedure PripraviPakete;
                                {Pripravi tabeli opisi in zapisi.}
    var i: integer;
    begin
        prazniZapisi:=1;
        for i:=1 to maxPaketov-1 do zapisi[i].naslednji:=i+1;
        zapisi[maxPaketov].naslednji:=-1;
        for i:=1 to maxDatotek do with opisi[i] do
            begin zadnjiZapis:=0; sprejetih:=0; prviZapis:=-1 end;
        end; {PripraviPakete}

procedure SprostiDatoteko(dat: integer);
                                {Sprosti prostor v tabeli zapisi, ki ga je zasedala datoteka dat.}
    var i,j: integer;
    begin
        j:=prazniZapisi;
        with opisi[dat] do begin
            i:=prviZapis; prviZapis:=-1; zadnjiZapis:=0; sprejetih:=0; prazniZapisi:=i;
        end; {with}
        while zapisi[i].naslednji<>-1 do i:=zapisi[i].naslednji;
        zapisi[i].naslednji:=j;
        end; {SprostiDatoteko}

procedure ShraniPaket(p: paketT);
                                {Shrani prispeli paket}
                                { p v tabelo zapisi in izpiše datoteko, če so prišli že vsi zapisi.}
    var i,j: integer;
    begin
        if p.vrstaPaketa=zadnji then
            opisi[p.datoteka].zadnjiZapis:=p.stevilka;
            opisi[p.datoteka].sprejetih:=opisi[p.datoteka].sprejetih+1;
            i:=prazniZapisi; prazniZapis:=zapisi[i].naslednji;
            with zapisi[i] do begin
                naslednji:=opisi[p.datoteka].prviZapis; stevilka:=p.stevilka; zapis:=p.zapis;
            end; {with}
            opisi[p.datoteka].prviZapis:=i;
            with opisi[p.datoteka] do
                if sprejetih=zadnjiZapis then begin
                    for i:=1 to zadnjiZapis do begin
                        j:=prviZapis;
                        while zapisi[j].stevilka<>i do j:=zapisi[j].naslednji;
                        Pisi(p.datoteka,zapisi[j].zapis);
                    end; {for}
                    SprostiDatoteko(p.datoteka);
                end; {if,with}
            end; {ShraniPaket}

```

4. Algoritem ne zagotavlja medsebojnega izključevanja — oba robota se lahko hkrati znajdeta v vesoljski ladji.

Primer:

1. $vLadji$ ima vrednost 0
2. robot 1: preskoči zanko 2 in nastavi $naVrsti:=1$
3. preveri pogoj $vLadji=0$ in vstopi v telo stavka **if**
4. robot 2: preskoči zanko 2 in nastavi $naVrsti:=2$
5. preveri pogoj $vLadji=0$ in vstopi v telo stavka **if**
6. nastavi $vLadji:=2$
7. preveri $(vLadji=2)$ **and** $(naVrsti=2)$ in vstopi v ladjo
8. robot 1: nastavi $vLadji:=1$ in se vrne na začetek zanke 1
9. preskoči zanko 2 in nastavi $naVrsti:=1$
10. testira $(vLadji=1)$ **and** $(naVrsti=1)$ in vstopi v ladjo

Sandi Klavžar

NAŠE NEBO IN ZEMLJA

Astronomske efemeride 1991 — Umetni sateliti 1989/90 —
Potresi 1989

Cena 75,00 din (60,00 din)

JANEZOVA NALOGA

Janez Godec iz SEŠ Boris Kidrič Ljubljana nam je poslal nalogo s hudomušnim namigom za rešitev:

Imamo tri naravna števila: drugo je za 7 večje od prvega in tretje je produkt kvadrata prvega in korena drugega ter hkrati za 1 večje od vsote manjših dveh. Katera števila so to?

Rešitev: !omim mat ojizov ik ,atemorp agekšintop agentsem isubotva inečlivetšo os okak jelgop ni inajlbujL v ojatsop okšzinzelež an idjop ,nečbrif ser is eČ

Verjetno se Janez veliko vozi z avtobusi, da mu je v glavo šinila ta naloga. No, čeprav so v igri avtobusi mestnega potniškega prometa v Ljubljani pa upam, da tudi drugim po Sloveniji naloga ne bo delala težav.

Dušica Boben

PISMA BRALCEV

Pisal nam je Bojan Žižek iz Osnovne šole Ivana Cankarja v Ljutomeru. Sam ni znal razvozlati zanimivega problema. Bralce Preseka vabimo, da si ta problem ogledajo v članku NENAVADNI PREIZKUS, Bojanu pa se za poslano idejo zahvaljujemo in upamo, da mu bo omenjeni članek razjasnil (to) neznanko. Bojan, ker smo veseli pošte naših bralcev, pa tudi zato, ker je takih in drugačnih problemov še mnogo, upamo, da se nam še kdaj oglasiš.

Pa lepo pozdravljen!

Damjan Kobal

ODPRTO PISMO ŠOLJSKI JAVNOSTI!

Spodaj podpisani, Anzenik Ivo iz 2c razreda Sredna strojna šola, v Ljubljani javno protestiram proti mojemu tov. za matematiko Sitarju Antonu, zaradi njegovega zatiranja ustvarjalnega navdiha pri dijakih. Namesto, da bi pustil poleteti našo intoicijo, jo tlači in v kaluplja. Dolgo predolgo smo to prenašali, prekipelo pa je pred nekaj dni, ko se je razgalil kot človek brez kančka genijalnosti. Ki pa zato duši genijalnost pri drugih, v tem konkretnem primeru pri meni. Bil sem namreč vprašan enačbo

$$4^x + 2^x = 6$$

Nalogo sem rešil izredno elegantno:

$$(4 + 2)^x = 6$$

$$6^x = 6^1$$

$$x = 1$$

On je rekel, da to ni dobro, nakar sem naredil preizkus, in bilo je vrede. Ker je še vedno težil, sem ponovno rešil nalogo tako:

$$4^x + 2^x = 6 / : 2$$

$$2^x + 1^x = 3$$

$$2^x + 1 = 3$$

$$2^x = 2$$

$$x = 1$$

Potem je nakladal, da se nalogo tako ne rešuje. Kot da je pomembno

kako nalogo rešiš, važen je rezultat! Zato sem nalogo rešil še enkrat:

$$2 \cdot 2^x + 2^x = 6$$

$$3 \cdot 2^x = 6 / : 3$$

$$2^x = 2$$

$$x = 1$$

Ker je bil čisto tiho (samo s členki je pokal), sem mu pokazal s koreni:

$$\sqrt[x]{4^x + 2^x} = \sqrt[x]{6}$$

$$\sqrt[x]{4^x} + \sqrt[x]{2^x} = \sqrt[x]{6}$$

$$4 + 2 = \sqrt[x]{6}$$

$$6 = \sqrt[x]{6} / ^x$$

$$6^x = \sqrt[x]{6^x} = 6^1$$

$$x = 1$$

On pa je začel ful vpiti, da me on že ni tako učil. Je mar prepovedano, da se učenci tudi sami do kakšne reči dokopljejo?! Če bi čakal, da se bom pri takem tov. naučil misliti z svojo glavo, ne bi bilo nič iz mene.

Ker pa se mi je sedaj šlo zato, da mu dokažem njegovo omejenost, sem uporabil tateške topove - logaritme in sem še enkrat nalogo rešil:

$$4^x + 2^x = 6 / \log$$

$$\log 4^x + \log 2^x = \log 6$$

$$x \cdot \log 4 + x \cdot \log 2 = \log 6$$

$$x(\log 4 + \log 2) = \log 6$$

$$x \cdot \log 6 = \log 6 / : \log 6$$

$$x = 1$$

Postal je rdeč in je zahropel, da ga nekaj nespodobnega delam, potem pa mi je dal zelo slabo oceno. In to kljub temu, da sem rešil nalogo na 5 načinov, vsakič celo z istim rezultatom. Očitno je začutil prožnost mojega duha in mi je zato natihem fovš. Taki tov. ne pašejo na sredno šolo in pozivam ministra za Sredno šolstvo, da ga upokoji ali pa ga da na osnovno šolo, kjer učenci še niso tako genijalni in ne bo naredil veliko škodo.

Pozivam na solidarnost in vse lepo pozdravljam.

Anzenik Ivo, 2.c l.r.

TRIANGULACIJE VEČKOTNIKOV

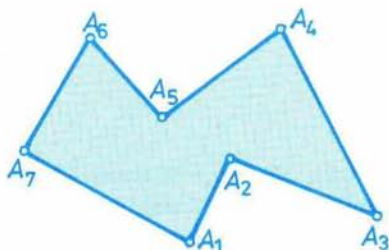
Najprej na kratko opredelimo nekaj pojmov, ki jih bomo rabili v nadaljevanju.

Naj bodo $A_1, A_2, \dots, A_n$ različne točke dane ravnine.

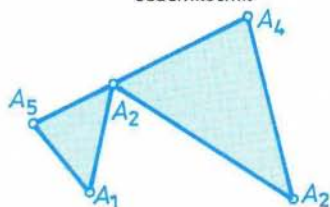
Večkotnik z oglišči $A_1, A_2, \dots, A_n$ je končen del ravnine, ograjen s sklenjeno črto, sestavljeno iz daljic $A_1A_2, A_2A_3, \dots, A_{n-1}A_n, A_nA_1$. Te daljice imenujemo *stranice* večkotnika in morajo ustrezati pogojema:

- Sosednji stranici, torej stranici s skupnim ogliščem, ne ležita na isti premici.
- Nesosednji stranici nimata skupnih točk.

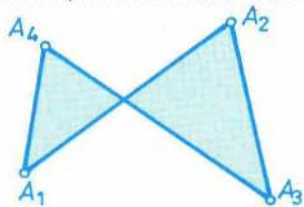
Če ima večkotnik n oglišč, mu rečemo n -kotnik.



sedemkotnik



trikotnik ABC , ki ni štirikotnik $ABCD$



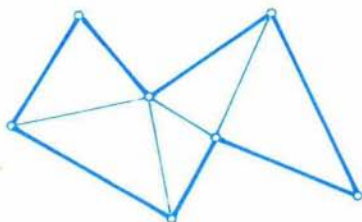
lika na
levi in desni
nista
večkotnika

Navedena definicija je nekoliko prilagojena potrebam tega sestavka. Tako definirani večkotnik se namreč v literaturi pogosto imenuje *enostavni ravninski večkotnik*.

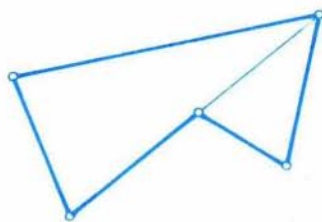
Stranice tvorijo *rob* večkotnika, ostale točke večkotnika pa njegovo *notranjost*. Večkotnik je *konveksen* ali *izbočen*, če so vsi njegovi notranji koti izbočeni, torej manjši od 180° .

Triangulacija večkotnika $A_1A_2\dots A_n$ je tako razkosanje tega večkotnika na trikotnike z oglišči v točkah $A_1, A_2, \dots, A_n$, pri katerem poljubna dva trikotnika bodisi nimata nobene skupne točke bodisi imata skupno le oglišče ali le stranico.

Konveksni večkotnik trianguliramo zelo preprosto. Poljubno izbrano oglišče zvežemo z vsemi ostalimi in konveksni večkotnik tako razdelimo na ustrezne trikotnike. S triangulacijo nekonveksnega večkotnika pa je več dela.



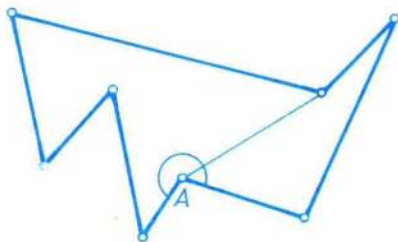
triangulacija sedemkotnika



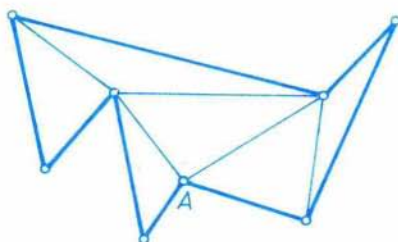
razkosanje petkotnika – ni triangulacija

Izberemo oglišče takega večkotnika, ob katerem je notranji kot večji od 180° (glej definicijo), in ga označimo z A . Poglejmo iz A v notranjost večkotnika proti njegovemu robu. Opazimo vsaj eno oglišče, saj bi v nasprotnem primeru iz A videli le eno stranico, kar pa ni mogoče. Z diagonalo, ki veže A s tem ogliščem, razdelimo večkotnik na dva večkotnika z manjšim številom stranic. Na podoben način se nato lotimo teh dveh večkotnikov in nadaljujemo z razkosavanjem, dokler ne pridemo do triangulacije.

Primer trianguliranja osemkotnika je prikazan na naslednji risbi



prvi korak trianguliranja



ena od (dveh možnih) triangulacij

Večkotnik ima lahko več triangulacij, vse pa imajo enako trikotnikov. Velja namreč tale rezultat.

IZREK 1. Vsaka triangulacija n -kotnika ima natanko $n-2$ trikotnikov.

Dokaz bo s pomočjo matematične indukcije zelo kratek.

Za trikotnik ni kaj dokazovati. Predpostavimo, da pri danem $n > 3$ izrek velja za vsak k -kotnik, kjer je $k < n$.

Ena od stranic poljubnega trikotnika iz triangulacije n -kotnika je njegova diagonalna, ki ga razdeli na p -kotnik in q -kotnik. Pri tem seveda velja

$$3 \leq p < n, \quad 3 \leq q < n \text{ in } p + q = n + 2$$

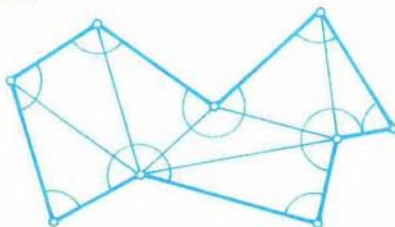
Po predpostavki imata triangulaciji p -kotnika in q -kotnika $p-2$ oziroma $q-2$ trikotnikov, zato je v triangulaciji n -kotnika

$$(p-2) + (q-2) = p + q - 4 = n - 2$$

trikotnikov, prav to pa smo želeli dokazati.

Dobljeni rezultat nam omogoča določiti vsoto notranjih kotov n -kotnika. Ta je namreč enaka vsoti notranjih kotov vseh trikotnikov iz triangulacije n -kotnika, torej je enaka $(n-2)180^\circ$.

Povabimo zdaj bralca k nalogam iz obravnavane snovi.



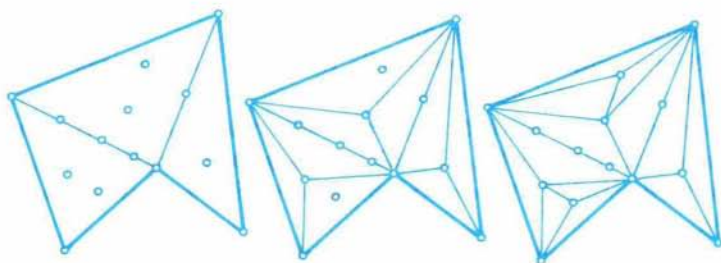
1. Koliko diagonal nastane pri triangulaciji n -kotnika?
2. Dokaži, da v vsaki triangulaciji večkotnika z najmanj petimi stranicami obstaja trikotnik, ki ima kvečjemu eno stranico na robu večkotnika.
3. Dokaži, da v vsaki triangulaciji n -kotnika, $n > 3$, obstajata vsaj dva trikotnika, ki imata dve stranici na njegovem robu.

Pojem triangulacije lahko posplošimo na naslednji način.

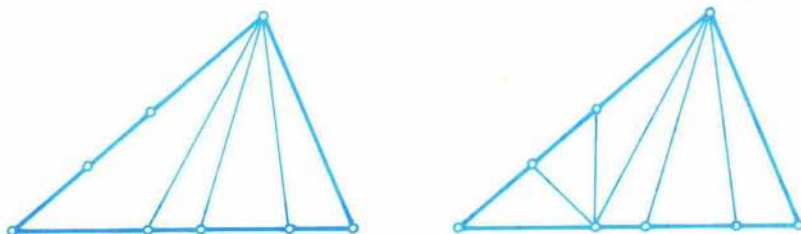
Naj bo $\mathcal{M}$ končna podmnožica točk danega n -kotnika in naj vsebuje vsa njegova oglišča $A_1, A_2, \dots, A_n$. *Triangulacija z oglišči v $\mathcal{M}$* je tako razkosanje večkotnika $A_1 A_2 \dots A_n$ na trikotnike z oglišči v $\mathcal{M}$, da je vsaka točka množice $\mathcal{M}$ oglišče vseh tistih trikotnikov iz razkosanja, ki to točko vsebujejo.

če množice $\mathcal{M}$ ne navedemo, imenujemo pravkar definirano triangulacijo *posplošena triangulacija* večkotnika $A_1 A_2 \dots A_n$.

Oglejmo si zdaj enega od načinov, ki privede do triangulacije z oglišči v $\mathcal{M}$. Najprej trianguliramo večkotnik $A_1 A_2 \dots A_n$, kar že znamo storiti. Vsak dobljeni trikotnik ima lahko točke iz $\mathcal{M}$ še v svoji notranjosti in na stranicah. Če katera leži znotraj trikotnika, jo povežemo z njegovimi oglišči z daljicami. Enako storimo v novem razkosanju in tako nadaljujemo, dokler gre. Znotraj dobljenih trikotnikov ni več točk iz $\mathcal{M}$.



Nastale trikotnike razkosamo takole: Vse točke na eni stranici trikotnika zvežemo z daljicami z nasproti ležečim ogliščem in po potrebi enako storimo še s trikotnikoma, ki sta nastala ob drugih dveh stranicah trikotnika.



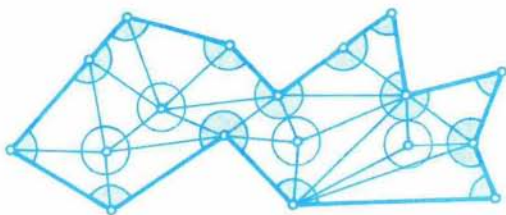
Kaj lahko povemo o številu trikotnikov posplošene triangulacije? Odgovor daje naslednji izrek.

IZREK 2. Če ima množica $\mathcal{M}$ r točk na robu n -kotnika in k točk v njegovi notranjosti, je v poljubni triangulaciji z oglišči v $\mathcal{M}$ natanko $r + 2k - 2$ trikotnikov. Pri tem je seveda $r \geq n$.

Dokaz. Naj ima triangulacija z oglišči v $\mathcal{M}$ m trikotnikov. Potem je vsota vseh njihovih notranjih kotov enaka $m180^\circ$. Enako vsoto dobimo, če seštejemo notranje kote n -kotnika, polne kote ob točkah iz $\mathcal{M}$ v notranjosti n -kotnika in iztegnjene kote ob ostalih točkah iz $\mathcal{M}$ na robu večkotnika. Torej velja

$$m180^\circ = (n - 2)180^\circ + k360^\circ + (r - n)180^\circ$$

od koder sledi iskana enakost $m = r + 2k - 2$.



$$\left. \begin{array}{l} n = 12 \\ r = 14 \\ k = 4 \end{array} \right\} m = 20$$

Sklenimo prispevek z nalogami.

4. Poišči tako posplošeno triangulacijo trikotnika, da se v vsakem njenem vozlišču stikajo štiri daljice triangulacije.
5. Naj ima množica $\mathcal{M}$ r točk na robu danega n -kotnika in k točk v njegovi notranjosti. Koliko daljic, nastalih pri triangulaciji z oglišči v $\mathcal{M}$, ne leži na robu n -kotnika? Pri tem štejemo samo daljice, ki imajo samo krajišča v $\mathcal{M}$.
6. Označimo s p število takih trikotnikov iz triangulacije z oglišči v $\mathcal{M}$, ki imajo dve stranici na robu n -kotnika, $n > 3$. Potem je v tej triangulaciji natanko $p + 2k - 2$ trikotnikov, ki nimajo nobene stranice na robu n -kotnika, če k točk iz $\mathcal{M}$ leži v notranjosti n -kotnika. Dokaži.

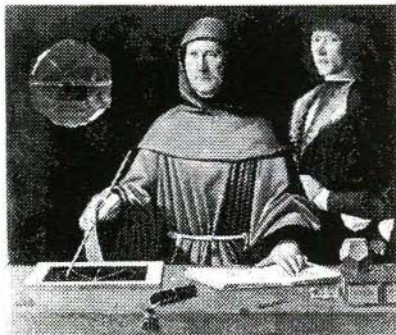
Rešitve nalog bodo v P-4.

Boris Lavrič

KAKO RAZDELITI?

Italijanski renesančni matematik fra Luca Pacioli (1445 - 1514) iz Benetk, sicer tudi dober prijatelj Leonarda da Vincija, je v svoji knjigi *Summa de arithmetica, geometrica, proportioni et proportionalita* zapisal med drugim tudi tale problem:

A in B mečeta kovance. A bo zabeležil točko zase, če bo padel grb, če bo padla cifra, pa bo točko dobil B . Tisti, ki prvi zbere 6 točk dobi 1000 dukatov, ki so najbrž povod za igro s kovancem.



Luca Pacioli z mladim urbinskim vojvodo na desni

Toda, glej - ko je A -ju uspelo zbrati že 5 točk in je B imel le 3, je nekdo tretji prekinil njuno igro. Končala sta, saj ni bilo druge izbire!

Povej, kako naj si zdaj A in B razdelita med seboj onih 1000 dukatov, da bo po pravici.

Dodajmo, da sodi Paciolijsva naloga med prve zapise s področja verjetnostnega računa in s tem namignimo reševalcu.

Vilko Domajnko

NA VELIKEM PAPIRNATEM TRAKU ...

Na velikem papirnatem traku so izpisana vsa naravna števila od 1 do 9999 eno poleg drugega, tako da nastane število

123456789101112 ... 999799989999

Kolikšna je vsota števk dobljenega števila?

Dragoljub M. Milošević

prev. *Peter Petek*

NEKAJ NAVODIL ZA TISTE, KI ŽELIJO OBOGATETI – Rešitve s strani 122

1. Imetnik 'opcije nakupa' lahko dobi od prodajalca največ dolar. Če bi za opcijo plačal več, bi bila to gotova pot do revščine.

2. Za vsako opcijo nakupa, ki jo prodate za 55 centov, kupite unčo zlata in eno opcijo prodaje za 30 centov. Če cena zraste za en dolar, ste en dolar pridobili z zlatom, dolar pa morate plačati kupcu opcije nakupa. Vaš dobiček je razlika med cenama obeh opcij, torej 25 centov. Če se cena zlata ne spremeni, je vaš dobiček spet 25 centov. Če cena za dolar pade, se vaš dobiček na opciji prodaje izenači z vašo izgubo pri zlatu, tako da je vaš skupni dobiček spet 25 centov.

3. Za vsako opcijo prodaje, ki jo prodate za 55 centov, prodajte unčo zlata in kupite opcijo nakupa za 30 centov. Vaš dobiček bo spet 25 centov, ne glede na to, kaj se zgodi.

4. Za vsak par opcij dobite 1.10 dolarja. Plačati pa morate največ en dolar.

5. Vsakdo, ki pri njemu kupuje opcije nakupa in opcije prodaje (v parih) bo od njega dobil dva dolarja devetkrat v desetih dneh. Po desetih dneh bi tak človek Noriatyju plačal 12 dolarjev in bi od Noriatyja dobil 18 dolarjev.

6. Edina resnično varna cena je en dolar. Toda dokler je Noriaty v poslu, je tudi 61 centov varna cena. Stanley lahko pri Noriatyju kupi eno opcijo nakupa vsakič, ko eno proda. Podobno ukrepa v primeru opcije prodaje.

prevedla in pripravila Neža Mramor

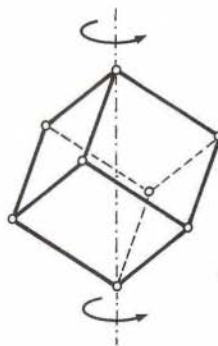
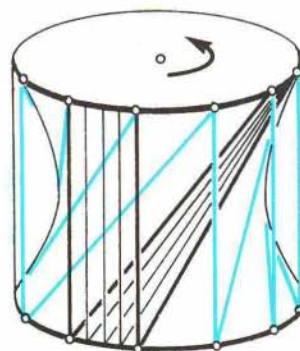
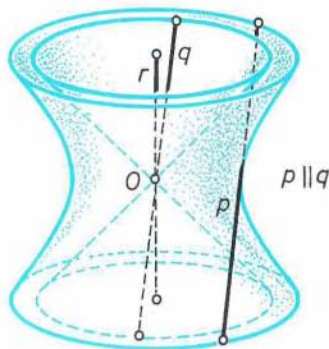
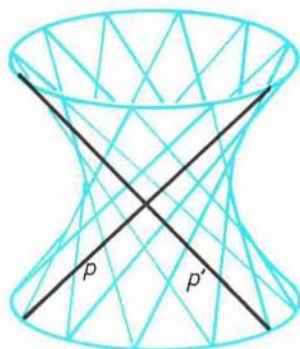
1. Pot, ki naj se pripeljala do rotacijskega hiperboloida, pove, da je le-ta sestavljen iz samih premic (je premonosna ploskev). Poleg premic, ki jih dobimo z vrtenjem p okoli r , ležijo na njem tudi premice, ki jih dobimo z vrtenjem zrcalne slike p' premice p glede na Φ okoli osi r . Glej sliko.

2. Pri izpeljavi enačbe krivulje K smo brez besed privzeli, da premica p ni pravokotna na ravnino Φ . Kakšna je rotacijska ploskev, ki jo opiše p , če je p pravokotna na Φ ?

3. Zadržimo se še nekoliko pri opisani konstrukciji. Naj bo q vzporednica s p in naj vsebuje točko O . Zasukajmo q okrog r , tako da obleži na ravnini Φ . Dokaži, da smo dobili asimptoto hiperbole K . Dvojni stožec, ki ga opiše q pri vrtenju okoli r , imenujemo *asimptotični stožec* rotacijskega hiperboloida.

4. Plašč pokončnega valja z višino v naj sestavljajo napete elastične nitke, vzporedne osi valja in pritrjene na robova osnovnih ploskev valja - krogov s polmerom r . Če zasučemo eno od osnovnih ploskev, torej krog, za pravi kot okrog središča, plašč valja preide v del rotacijskega hiperboloida. Kolikšen je kot ob vrhu osnega preseka njegovega asimptotičnega stožča?

5. Kakšno telo opiše kocka pri vrtenju okoli svoje glavne diagonale?



Boris Lavrič