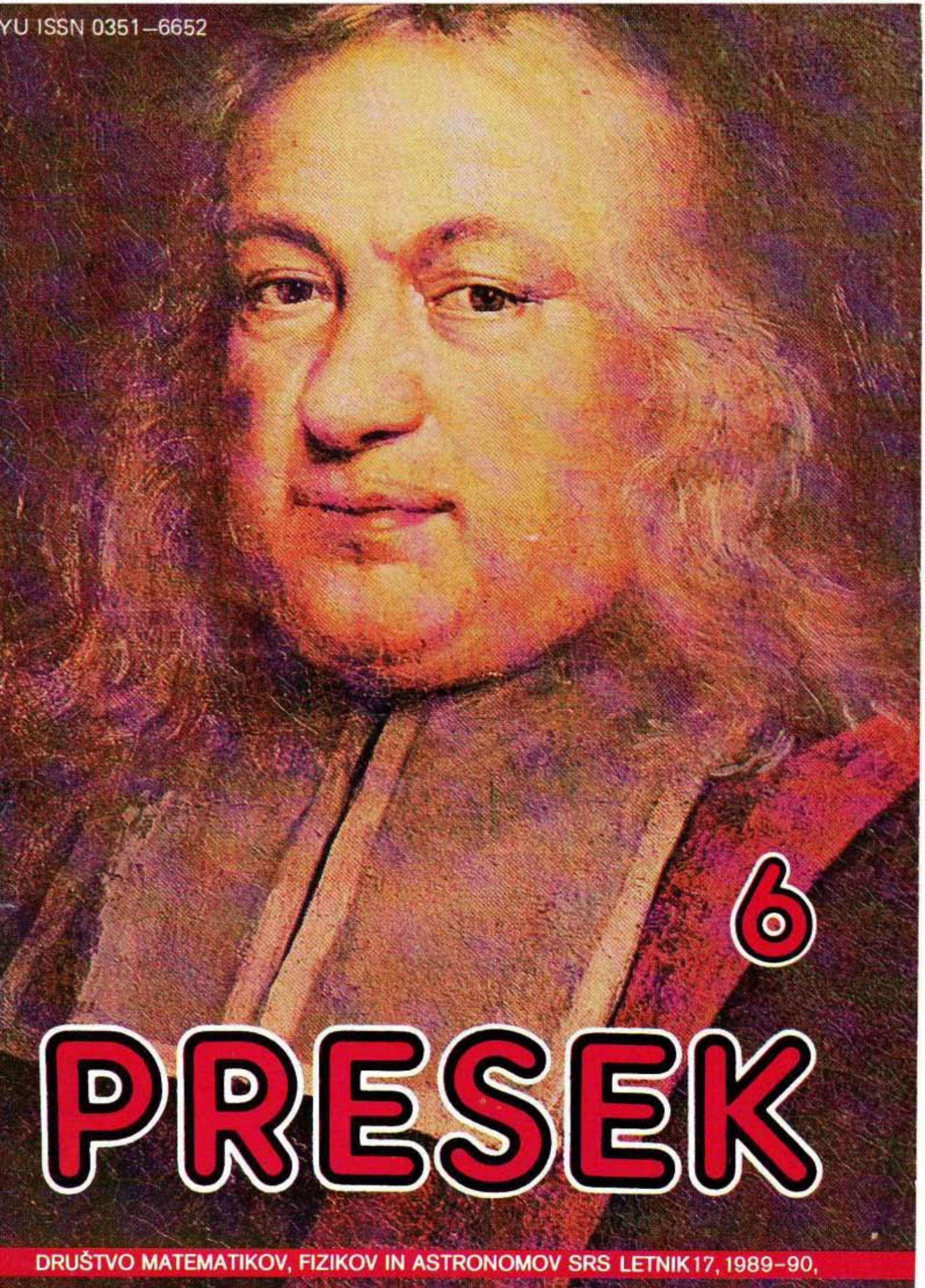
YU ISSN 0351–6652



PRESEK

6

DRUŠTVO MATEMATIKOV, FIZIKOV IN ASTRONOMOV SRS LETNIK 17, 1989–90,

PRESEK - list za mlade matematike, fizike, astronome in računalnikarje
17.letnik, šolsko leto 1989/90, št.6, str.321-384

VSEBINA

RAZVEDRILO

"ČIGAV ZADNJI KAJ?" JE VPRAŠAL VRAG

"Dobro!" reče Simon in globoko vdihne. "Tole sprašujem: Ali Fermatov zadnji izrek velja?"

Vrag požre slino. Prvič je njegova samozavest splahnela. "Čigav zadnji kaj?" vpraša s prestrašenim glasom.

Simon, junak kratke zgodbe Arthurja Porgersa Vrag in Simon Flagg (1954), je uspel zvabiti vraga v boj z modrostjo. Simon je izbral vprašanje in vrag je imel 24 ur časa za pravilen odgovor, s katerim bi si pridobil človekovo dušo. Če pri tem ne bi uspel, bi moral Simonu zagotoviti dolgo življenje, zdravje, srečo in denar.

Vprašanje, ki ga je Simon postavil vragu - dokaz zadnjega Fermatovega izreka - je ena največjih draži v matematiki.

Grški matematik DIOFANT Aleksandrijski (250 let pred našim štetjem) je bil med prvimi, ki so se ukvarjali z vprašanji, kdaj je kaka enačba rešljiva s celimi števili. O teh problemih je napisal knjigo, ki jo je rad prebiral FERMAT, ter pri tem odkril vrsto novih izrekov. Pri nalogi, kako razstaviti kvadrat v vsoto dveh kvadratov, je Fermat na robu pripisal opazko:

DIOFANTSKE ENAČBE: Enačbe z več neznankami, pri katerih zahtevamo, da so rešitve cela števila.

"Ni pa mogoče razstaviti kuba v vsoto dveh kubov ali bikvadrata v v soto dveh bikvadratov. Sploh ni mogoče razstaviti nobene potence, večje od kvadrata, v vsoto dveh potenc iste stopnje. Za to sem našel zares čudovit dokaz. Zaradi pomanjkanja prostora pa ga ne morem tu zapisati."

BIKVADRAT: $a^4=(a^2)^2$

PIERRE FERMAT (1601 - 1665) je postavil trditev, da enačba

$$x^n + y^n = z^n$$

pri eksponentu $n>2$ ne premore nobene rešitve s celimi števili, razen seveda trivialnih rešitev

$$x=0,\ y=z$$
$$y=0,\ x=z$$
$$x=-y,\ z=0;\ n \text{ lih}$$

Dokazati ali ovreči to trditev, je slavni FERMATOV PROBLEM.

Fermatovo opazko v knjigi so našli šele 30 let po njegovi smrti. Fermat pa svojega čudovitega dokaza tudi nikjer drugje ni objavil, niti ga ni omenil v nobenem izmed svojih pisem. Našli pa so zvezek, v katerem je dokazal trditev za $n = 4$. Od takrat so se s tem problemom ukvarjali mnogi, še danes pa privlači največje matematike.

PITAGORA iz Samosa (okr. 580-500) antični filozof in matematik

Trditev pravzaprav izhaja iz Pitagorovega izreka o pravokotnih trikotnikih. Pitagora, še pred njim pa so to vedeli že na Kitajskem in v Babilonu, je ugotovil, da je v vsakem pravokotnem trikotniku kvadrat najdaljše stranice enak vsoti kvadratov ostalih dveh stranic. Na primer, če sta krajši stranici dolgi 3 in 4 enote, mora biti najdaljša stranica dolga 5 enot, saj je $5^2 = 4^2 + 3^2$.

$c^2 = a^2 + b^2$

Pitagorov zaključek o odnosu med stranicami v pravokotnem trikotniku lahko prenesemo na števila: obstaja trojica celih števil (npr. 5, 4, 3), pri katerih je kvadrat največjega števila enak vsoti kvadratov drugih dveh.

← Pitagorejska števila

O pitagorejskih trojicah je pisal tudi Diofant. Fermat je opazil, da omenjena lastnost ne velja za kube ali katere druge višje potence. Torej ne obstaja taka trojica celih števil, kjer je kub največjega števila iz trojice enak vsoti kubov drugih dveh števil. To je samo ideja, trditev, katere dokaza Fermat ni mogel stisniti na rob knjige.

Celo stoletje je minilo, preden je veliki švicarski matematik LEONHARD EULER (1707 - 1783), ki je večino svojega življenja deloval v tedanjem glavnem mestu carske Rusije Petrogradu (danes Leningradu), uspel dokazati trditev vsaj za tretjo in četrto potenco.

Za pete potence je to prvemu uspelo L. DIRICHLET-u (1805 - 1859). Niti za tretje niti za pete potence dokaz ni tako preprost kakor za četrte potence. Dirichletov dokaz za pete je bil še posebno zapleten.

DIRICHLET nemški matematik, pomemben s svojimi dosežki v teoriji vrst in v teoriji števil

Poenostavil ga je profesor JOSIP PLEMELJ (1873 - 1967) leta 1912.

SLOVENSKI MATEMATIK svetovnega slovesa in izvrsten pedagog
~
Ne pozabi naslednji naravoslovni dan ogled njegove spominske sobe na Bledu!

Korak naprej v dokazovanju Fermatove trditve je uspel nemškemu matematiku ERNESTU KUMMERJU (1810 - 1893).

Leta 1847 je dokazal Fermatovo trditev za zvrst praštevil, ki jih imenujemo regularna praštevila. Med praštevili do 100 edino 37, 59 in 67 niso regularna praštevila, vendar je Kummer dokazal, da tudi za ta praštevila enačba $x^p + y^p = z^p$ ni rešljiva s celimi števili.

Kummerjev dokaz je, četudi se sliši neverjetno, rešil življenje PAULU WOLFSKEHL-u, nemškemu matematiku na prehodu stoletja. O tem piše Philip Davis v knjigi "3,1415 and All That".

Wolfskehl je bil razočaran nad svojim neuspehom pri dokazovanju Fermatove trditve in nad ljubljeno osebo. Določil je način in uro, ko se bo poslovil od življenja. Ker je imel še nekaj časa, je odšel v svojo knjižnico ter razmišljal, kaj naj počne. S police je vzel matematične zvezke in brez volje listal po njih. Slučajno je odprl zvezek, v katerem je bil zapisan Kummerjev dokaz. Bral ga je in zazdelo se mu je, da je odkril napako. Poglobil se je v delo in ni odnehal, dokler ni preveril dokaza. Priznati je sicer moral Kummerjevo točnost, a ob tem je minila ura določena za smrt, pa tudi volja do življenja in zanimanje za matematiko sta se vrnila.

Leta 1908 je Wolfskehl umrl naravne smrti in v oporoki zapustil 100000 mark tistemu, ki bi do leta 2007 dokazal Fermatovo trditev. Vrednost njegove nagrade je z leti pobrala inflacija, zanimanje za dokaz pa je še vedno naraščalo.

Fermatova trditev ni privabljala le profesionalnih matematikov. Tudi mnogi amaterji so se poskusili v dokazovanju in napačni dokazi niso bili redki. Zaradi velikega števila pisem je nemški matematik Edmund

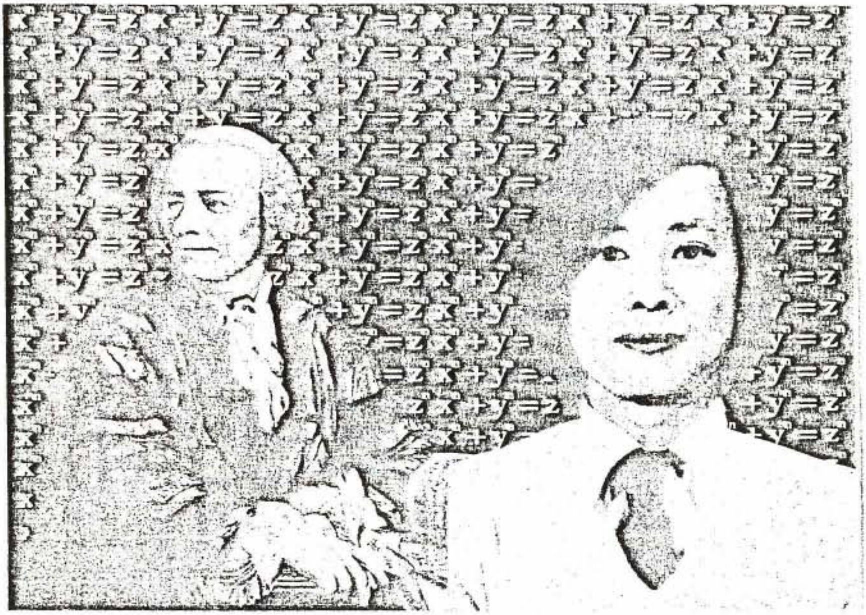
LANDAU odgovarjal nanje z že vnaprej pripravljenim dopisom:

Dragi gospod/gospa,
prejeli smo Vaš dokaz Fermatovega zadnjega izreka. Prva napaka je na strani .... vrstica ....

Do leta 1960 je bila Fermatova trditev dokazana za vse stopnje do 125000. Pri dokazovanju so si pomagali tudi z računalniki.

Leta 1983 je GERD FALTINGS, sedaj profesor na Princetonu, dokazal, da je za vsako stopnjo lahko samo končno mnogo izjem. Torej: če bi pokazali, da je končno mnogo izjem enako nič, bi bila trditev dokazana.

Februarja 1988 je med matematiki završalo. 38-letna matematičarka YOICHI MIYAOKA iz tokijske Metropolitanske univerze, je v Bonnu predstavila svoj dokaz Fermatove trditve. Zbrani matematiki so bili prevzeti in kmalu se je novica razširila po celem svetu. O tem sta pisala tudi časopisa Economist in New York Times. Toda dva tedna kasneje, ko so eksperti preverili na petih listih napisan dokaz, je navdušenje splahnelo. Odkrili so napako.



Leonhard Euler in Yoichi Miyaoka

Kaj je torej s Fermatovim čudovitim dokazom?

Danes prevladuje mnenje, da je Fermat ob branju knjige le mislil, da ima dokaz. Kasneje o tem ni nikoli več pisal, kar verjetno pomeni, da je odkril svojo napako. Poleg tega matematiki verjamejo, da če bi bil dokaz resnično genialen, to je kratek in eleganten, bi ga verjetno do danes že kdo odkril.

Zanimanje za Fermatov problem pa kljub temu obstaja. To kaže tudi grafitni napis neznanega avtorja v newyorški podzemni železnici, ki je ob Fermatov izrek zapisal: "Odkril sem resnično čudovit dokaz, a ga sedaj ne morem napisati, ker moj vlak že prihaja."

Dušica Boben

LITERATURA

[1] P. Hoffman, *Fermat still has the last laugh*, Discover, Januar (1989) 48-50.

[2] I. Vidav, *Rešeni in nerešeni problemi matematike*, Knjižnica Sigma 1b, DMFA SR Slovenija, Ljubljana, 1975

[3] Matematika, Leksikoni CZ, Cankarjeva založba, Ljubljana, 1980

KRIŽANKA "PLANETI NAŠEGA OSONČJA" - Rešitev s str. 375

O	N	T	A	K	E		P	L	U	T	O	N	
M	E	R	K	U	R		J	U	P	I	T	E	R
S	A	T	U	R	N			P	O	L	I	P	I
K	L	A	S	J	E		P	A	R	■	A	T	A
			T	A	S	S	O	■	■	■	T	U	L
		V	I	K	T	O	R	■	■	Z	E	N	
	P	E	K	■	■	L	A	S	K	E	R		
	E	N	A	Č	B	A	■	K	U	M	■	Š	S
E	T	E	■	D	U	R	■	O	B	L	E	K	A
M	A	R	S		N	I	M	B		J	O	A	N
U	R	A	N		A	J	D	A		A	L	F	A

PRAŠTEVILA NEKOČ IN DANES
"Kar so osnovni delci v fiziki in elementi v kemiji, so praštevila v teoriji števil"

Na vprašanje "Kaj so *praštevila*?" zna odgovoriti vsak učenec, ki je končal peti razred osnovne šole: "To so tista naravna števila, ki so večja od 1 in deljiva le z 1 in s samim seboj." Našteti nekaj manjših praštevil tudi ni težko: 2, 3, 5, 7, 11, 13, 17, 19,... Marsikdo bi še dodal, da se da vsako naravno število, ki ni praštevilo, razcepiti na produkt samih praštevil - *prafaktorjev*. Zato imenujemo ta števila *sestavljena števila*. Tak racep je mogoč le na en način, če se ne menimo za vrstni red prafaktorjev, na primer: $12 = 2 \cdot 2 \cdot 3$, $15 = 3 \cdot 5$, $16 = 2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 2 = 2^4$, $120 = 2^3 \cdot 3 \cdot 5$.

Manj učencev najbrž ve, da je na to vprašanje znal odgovoriti Grk *Evklid* že 350 let pred našim štetjem. Dokazal je tudi, da je praštevil neskončno mnogo. Dokaz in še marsikaj zanimivega o praštevilih, tudi drugačno, a enakovredno definicijo praštevila, najdete v članku B. Lavriča v lanski 2. številki Preseka.

Matematiki ne bi bili matematiki, če si ne bi postavili še več vprašanj, na primer:

1. Kako naj praštevila ločimo od vseh naravnih števil 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, ... $N-1$, N ?
2. Ali obstaja aritmetična formula, ki zajame vsa, skoraj vsa ali le nekatera praštevila?
3. S kakšno metodo zanesljivo ugotovimo, ali je neko naravno število praštevilo ali ni?

Na prvo vprašanje je odgovoril že Grk *Eratosten* v drugem stoletju pred našim štetjem. O *Eratostenovem situ* je pisal Presek dvakrat, v omenjenem članku in v 1. številki leta 1973/74. Ta metoda je uporabna le pri dovolj majhnih številih. Pri številih z več kot osmimi ciframi namreč tudi ob pomoči velikih računalnikov z njo ni preprosto ugotoviti, ali gre za praštevilo ali ne.

Drugo vprašanje ima več delnih odgovorov. Omenimo le najznamenitejšega, ki ga je v obliki hipoteze zapisal eden izmed največjih francoskih matematikov *Pierre de Fermat* (slika 1). O njegovem življenju in delu je pisal Presek v 1. številki leta 1975/76.

Fermat je v pismu rojaku *Marinu Mersennu* zatrdil, da so vsa števila - dandanes jim pravimo *Fermatova števila* - z obliko $F_n = 2^{2^n} + 1$ za $n \in \mathrm{N}$ praštevila. Hitro ugotovimo, da Fermatova trditev za $n = 1$, 2 in 3 zares velja: $F_1 = 5$, $F_2 = 17$, $F_3 = 257$, z $F_4 = 65537$ za $n = 4$ pa je nekaj več dela. Resne težave se začnejo že pri $n = 5$ in se z vsakim naslednjim

Slika 1. Pierre de Fermat (1601 do 1665)

Slika 2. Carl Friedrich Gauss (1777 do 1855)

naravnim številom hitro večajo, saj zaporedje Fermatovih števil izredno hitro narašča.

Zato ni čudno, da je Fermatovo hipotezo ovrgel šele leta 1732 znameniti matematik *Leonhard Euler*, ki je dokazal, da število $F_5 = 2^{32} + 1 = 4294967297$ ni praštevilo, ker je deljivo s 641.

Fermatova hipoteza je napeljala druge matematike na pomembna odkritja. Tako je *Karl Friedrich Gauss* (slika 2) po proučevanju Fermatovih števil napisal leta 1801 znamenito delo *Disquisitiones arithmeticae*, ki je temelj moderne teorije števil. V zadnjem, sedemnajstem razdelku knjige je dokazal tesno povezavo med Fermatovimi praštevili in konstrukcijo pravilnih mnogokotnikov *z ravnilom in šestilom*. Pri tem smemo uporabljati ravnilo le za risanje črt, ne pa za merjenje, in šestilo le za risanje krožnic, ne pa za prenašanje dolžin. Pokazal je, da je na ta način mogoče konstruirati vse pravilne mnogokotnike, katerih število stranic se da zapisati v obliki $2^k p_1 p_2 ... p_r$, če je k naravno število ali 0 in so p_1, p_2 ,..., p_r Fermatova praštevila. To, da je mogoče z ravnilom in šestilom konstruirati pravilni sedemnajstkotnik ($F_2 = 17$), je Gauss imel za svoje največje matematično odkritje. Želel je celo, da mu mnogokotnik narišejo na nagrobnik. Želje mu niso izpolnili, pač pa je narisan pravilni sedemnajstkotnik na Gaussovem spomeniku v njegovem rojstnem kraju Braunschweigu.

Na tretje vprašanje poznamo pravilen teoretičen odgovor že iz starih grških časov. Njegovo uporabo pa odkrivajo šele sedaj. Metodo, ki temelji na definiciji praštevila, imenujemo *deljenje s preizkušanjem*. Število N kar po vrsti delimo s števili 2, 3, 4, 5, 6, 7, ... , $(N-1)$. Kakor hitro je eno izmed njih delitelj števila N, vemo, da je to število sestavljeno. Tako ugotovimo tudi najmanjši delitelj števila N in njegov prvi prafaktor. Po deljenju števila N s tem prafaktorjem dobimo količnik, ki ga zopet delimo s preizkušanjem. Teoretično lahko tako ugotovimo vse prafaktorje sestavljenega števila. V praksi pa je metoda uspešna le, če število N ni preveliko, na primer $150 = 2 \cdot 75 = 2 \cdot 3 \cdot 25 = 2 \cdot 3 \cdot 5^2$.

Metodo deljenja s preizkušanjem izboljšamo tako, da se opremo na Eratostenovo ugotovitev in iz množice vseh možnih deliteljev števila N izločimo vsa tista števila, ki niso praštevila in niso večja od števila $\sqrt{N}$. Zakaj je tako, lahko preberete v knjigi I.Vidava *Rešeni in nerešeni problemi matematike*, DMFA Slovenije. Tak način je ob pomoči dobrega računalnika uporaben pri številih z največ desetimi ciframi. Pri številih z dvajset in več ciframi pa odpove, kot razberemo iz tabele.

Za ugotovitev, ali je dano število z dvajset do tisoč ciframi praštevilo, obstaja več dobrih *računalniških metod*. Ena izmed njih sloni na primer na *Wilsonovem izreku*: p je praštevilo tedaj in samo tedaj, če je število $(p-1)! + 1$ deljivo s p. Pri tem je $N! = 1.2.3.\ldots(N-1)N$. Toda s temi metodami v splošnem ne moremo velikega sestavljenega števila razstaviti na prafaktorje.

Število cifer	deljenje s preizkušanjem	računalniška metoda
20	2 uri	10 sekund
50	10 let	15 sekund
100	10^{36} let	40 sekund
200	10^{86} let	10 minut
1000	10^{486} let	1 teden

Tabela 1: Čas, ki je potreben, da z računalnikom preverimo, ali je kako število praštevilo

Obstajajo pa metode, s katerimi je mogoče razcepiti Fermatova števila, ki imajo do osemdeset cifer. Tako je *Landry* leta 1880 dokazal, da je število F_6 deljivo z 274177. Leta 1905 sta *Morehead* in *Westeren* pokazala, da je število F_7 z 39 ciframi sestavljeno število. Štiri leta zatem sta to pokazala tudi za število F_8 z 78 ciframi. Dokončen razcep števila F_7, ki velja za doslej najtežjega, sta šele leta 1971 našla *Brilhart* in *Morrison*. Za ta razcep je računalnik IBM 360-91 porabil poldrugo uro. Število F_8 sta leta 1981 razcepila z računalnikom UNIVAC 1100/42. Prvi prafaktor s 16 ciframi je računalnik izračunal po dveh urah. Nista pa ugotovila, ali je drugi faktor z 62 ciframi praštevilo ali ne. Da gre za praštevilo, je kmalu zatem ugotovil Williams.

Pokazalo se je, da vsebujejo Fermatova števila od F_9 do F_{13} razmeroma majhne najmanjše prafaktorje, največjega s 13 ciframi vsebuje število F_{13}. Kljub temu, da ta števila niso zelo velika, pa jih doslej še niso uspeli razcepiti. Prav tako še ni znan razcep sestavljenega števila s 148 ciframi, ki pomnoženo s praštevilom 24148333 tvori število F_9.

Praštevila in šifriranje

Praštevila je mogoče uporabiti pri šifriranju sporočil. Zelo zanesljivo šifro *RSA Public Key System* so si izmislili matematiki *Rivest*, *Shamir* in *Adleman* na osnovi spoznanja, da ni splošne metode, po kateri bi razcepili število z dvesto ciframi na prafaktorja s , denimo, po sto ciframi. Površno rečeno, ustreza šifriranje množenju z dvema velikima prašteviloma, dešifriranje pa razcepu na praštevila. Način je še posebno uporaben zato, ker pri šifriranju ni treba poznati obeh prafaktorjev, ampak samo njun produkt. Pri dešifriranju pa je treba poznati oba prafaktorja. Tako pošiljatelju sporočila ni treba poznati šifre, dovolj je, da jo pozna prejemnik. Zato ta način šifriranja uporabljajo v javnih informacijskih omrežjih, na primer telefonu.

Rekordi

Zelo zanimive podatke o praštevilih vsebuje knjiga P.Ribenboima, *The Book of Prime Number Records*, Springer 1989.

- V Evklidovem dokazu nastopa produkt vseh praštevil, manjših od p, povečan za 1, torej $2 \cdot 3 \cdot 5 \ldots p+1$. V nekaterih primerih je to praštevilo. Sedanji rekorder je za $p = 13649$ praštevilo, ki ima 5862 cifer.
- p in $p+2$ je dvojček praštevil. Za zdaj je rekorder dvojček $107570463 \cdot 10^{2250} \pm 1$.
- Nekatera izmed števil, ki jih sestavljajo same enice, 111...1, so praštevila. Sedanji rekorder je praštevilo s 1031 enicami.
- Mersennova števila imajo obliko $2^n - 1$. Mersennovo število $2^{216091} - 1$ s 65050 ciframi je bilo največje znano praštevilo med letoma 1985 in 1989. Ribenboim je v uvodu svoje knjige, ki obravnava resna vprašanja matematike ponekod na zabaven način, zapisal: "Naravnost rečeno, bi se mi zdelo visoko civilizirano, če bi bral, da se je v eni naših krčem razvilo pretepanje iz razgrete razprave o največjem dvojčku praštevil.

Zdaj že vemo, da za vse vrednosti n od 5 do 16 (in še za nekatere druge) Fermatova števila F_n niso praštevila. Domnevajo celo, da so le prva štiri Fermatova števila praštevila, vendar ta hipoteza ni nič trdnejša, kakor je bila Fermatova.

Število cifer največjega znanega praštevila je začelo hitro naraščati, ko so se razvili računalniki. Leta 1952 je imelo največje znano praštevilo 157 cifer, a leta 1978 že 6533 cifer. Leta 1985 je D. Slowinski s sodelavci ugotovil, da je Mersennovo število 2^{216091} - 1 s 65050 ciframi praštevilo. To praštevilo navaja Ribenboim kot rekordno. Toda poleti 1989 so J.Brown in njegovi sodelavci povečali rekord za 37 cifer. Zdaj ima rekordno praštevilo

$$391581 \cdot 2^{216193} - 1$$

že 65087 cifer. Kdo ve, kako dolgo bo "držalo" rekord?

Dobili so ga takole. Najprej so izbrali 350000 kandidatov. S preizkušanjem so jih delili z nekaj milijardami najmanjših praštevil. Preizkus je prestalo samo 7000 kandidatov. Te so nato obdelali z računalniškimi metodami. Obdelava enega števila z računalnikom je trajala kar osemdeset minut. Ko se je število kandidatov še močneje razredčilo, so za eno število porabili le še pol ure. Tako so se naposled prepričali, da je zapisano število praštevilo. Take račune delajo računalniške družbe, češ da lahko uporabijo pridobljene izkušnje pri izboljšanju računalnikov. Najbrž pa gre pri tem tudi za tekmovanje.

Milena Strnad

TRI NEENAKOSTI

1. Dokaži, da za poljubna x, $y \in \mathbb{R}$ velja

$$x^2 + y^2 - xy - x - y + 1 \geq 0$$

2. Dokaži, da za poljubne x, y, $z \in \mathbb{R}$ velja

$$x^2 + 199y^2 + 6z^2 - 8xy - 4xz + 12yz \geq 0$$

in ugotovi, kdaj velja enakost.

3. Dokaži, da je za vsak $x \in \mathbb{R}$

$$x^8 - x^5 + x^2 - x + 1 > 0$$

Šef ket Arslanagić
prev. in prir. *Boris Lavrič*

NALOGE

ERFURT 1989

Kljub obilici nalog z domačih matematičnih tekmovanj si spet (glej *Vzorec iz Moskve* – P3) privoščimo pogled v tujino. Izbrali smo pet nalog, ki so jih desetošolci iz Nemške demokratične republike reševali maja 1989 na zveznem tekmovanju v Erfurtu.

1. Dokaži, da je število $2^8 + 2^{11} + 2^n$ popolni kvadrat le za en $n \in \mathbb{N}$ in določi ta n.

2. Utemelji, da enačba $x^4 - 6x^3 + 14x^2 - 24x + 40 = 0$ nima nobene realne rešitve.

3. Poišči realni funkciji f, $g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ (definirani za vsak $x \in \mathbb{R}$), ki izpolnjujeta pogoja
   a. $f(0) = 7$,
   b. $g(x) \cdot f(x+1)/f(x) = g(2x) + 1$ za vsak $x \in \mathbb{R}$

4. Trinajst točk ravnine tvori množico M, ki ustreza naslednjemu pogoju: Če vzamemo poljubne tri točke iz M, sta vsaj dve (od teh) med seboj oddaljeni manj kot 1 cm.
   a. Dokaži, da obstaja tak krog s polmerom 1 cm, da v njem leži vsaj sedem točk iz M.
   b. Ali je mogoče dokazati, da obstaja tak krog s polmerom 1 cm, ki vsebuje osem točk iz M ?

5. Dokaži, da za vsako četvorko (a,b,c,d) pozitivnih realnih števil, ki ustrezajo pogoju
$$a + b + c = d\sqrt{3}/2$$
obstaja taka trojka (x,y,z) realnih števil, ki reši sistem enačb
$$\sqrt{y^2 - a^2} + \sqrt{z^2 - a^2} = d$$
$$\sqrt{z^2 - b^2} + \sqrt{x^2 - b^2} = d$$
$$\sqrt{x^2 - c^2} + \sqrt{y^2 - c^2} = d$$

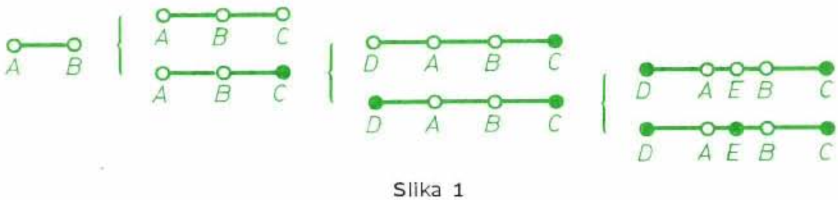
Boris Lavrič

KOMBINATORNA GEOMETRIJA

Namen tega zapisa je bralce seznaniti s kombinatorno geometrijo, eno mlajših vej matematike. Danes je še težko zadovoljivo odgovoriti na vprašanje, kaj je kombinatorna geometrija. Med drugim kombinatorna geometrija raziskuje odnose med točkami, premicami, deli ravnine in deli prostora. Najbolje jo bomo predstavili z nekaj primeri.

Primer 1. Bela ravnina je poljubno popackana s črno barvo. Pokaži, da na ravnini obstaja daljica, katere končni točki in središče so enake barve.

Izberimo točki A in B, ki sta enake barve (denimo bele). Točko C izberimo tako, da je B središče daljice AC (slika 1). Ločimo dve možnosti:



Slika 1

točka C je bela ali točka C je črna. V primeru, ko je C bele barve, je dokaz končan (daljica AC ima središče v točki B). Če je točka črna, poiščimo še točko D, ki leži tako, da je točka A sredšče daljice DB. Če je točka D bele barve, je iskana daljica DB s središčem v A. V primeru, ko je D črne barve, pa poglejmo, kakšne barve je središče E daljice AB. V obeh primerih lahko najdemo daljico z iskano lastnostjo. Če je točka E bele barve, daljica AB ustreza pogojem trditve, v nasprotnem primeru pa je to daljica DB.

Primer 2. Pokaži, da v vsakem konveksnem enajstkotniku obstajata vsaj dve taki diagonali, da manjši kot med premicama, na katerih ležita, ni večji od 5°.

Če obstajata vzporedni diagonali, trditev velja (saj je kot med nosilnima premicama 0°). Predpostavimo, da nobeni dve diagonali nista vzporedni. Vseh diagonal je $(11 \cdot (11-3)) : 2 = 44$. Skozi izbrano točko v ravnini potegnimo 44 premic vzporednih z diagonalami. Premice tako delijo cel kot na 88 delov. Vsaj eden od teh je manjši od 5°, ker je $360 : 88 = 4.09\ldots$

Primer 3. Na kvadrat s stranico 1 dm vržemo 76 točk. Pokaži, da med temi točkami obstajajo najmanj 4, ki jih lahko prekrijemo s krogom s polmerom $\frac{1}{7}$.

Najprej razdelimo kvadrat na manjše kvadrat(k)e s stranico 0,2 dm. (Nariši sliko!) Takih kvadratkov je 25. Ker je točk 76, obstaja kvadratek, ki vsebuje vsaj 4 točke. Temu kvadratku očrtajmo krog. Njegov polmer je $r = \frac{1}{5}\left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right)$. Ker je $r^2 = \frac{1}{50}$ manj od $\left(\frac{1}{7}\right)^2 = \frac{1}{49}$, lahko očrtani krog prekrijemo s krogom z istim središčem in polmerom $\frac{1}{7}$.

NALOGE

1. Vsaka točka ravnine je obarvana z eno od treh barv. Pokaži, da obstajata dve točki, ki sta enake barve in je razdalja med njima 1 cm.
2. V ravnini izberemo 6 točk, od katerih nobene tri ne ležijo na isti premici. Poljubni dve točki zvežemo z modro ali rdečo daljico. Pokaži, da obstaja trikotnik, ki ima vse 3 stranice enake barve.
3. V ravnini izberemo 1990 točk. Pokaži, da obstaja premica p, ki ne vsebuje nobene dane točke in deli ravnino na dve polravnini, ki vsebujeta vsaka po 995 točk.
4. V krogu s premerom 29 izberemo 1990 točk. Pokaži, da med njimi obstajajo vsaj 4 točke, ki določajo štirikotnik s ploščino manjšo od 1.
5. Pokaži, da lahko kvadrat razrežemo na 1990 manjših kvadratov (ki pa niso nujno enako veliki).
6. Največ koliko ostrih kotov ima lahko konveksen 1990-kotnik ?

Dragoljub M. Milošević
prevedel in priredil *Tomaž Košir*

TRIKOTNIKI – Rešitev s str. 350

Brez škode za splošnost smemo predpostaviti, da je $a \geq b$ in $a \geq c$ (Premisli zakaj!). Od tod sledi, da velja

$$a^3 < b + c^2 \leq a + a^2$$

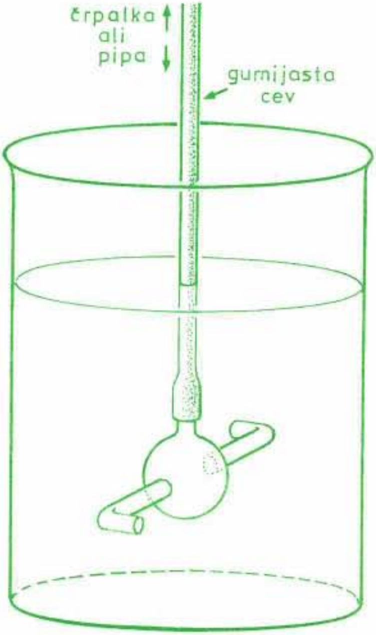
torej $a^2 < 1 + a$, zaradi pogoja $a \in \mathbb{N}$ in predpostavke pa je tedaj $a = b = c = 1$.

Boris Lavrič

ŠE ENKRAT O OBRATNEM BRIZGALNIKU

Obratni brizgalnik je požel precej pozornosti med bralci in sodelavci Preseka. Naj dam še sam pobudo za eksperiment, ki ga lahko naredimo v šoli z običajno šolsko opremo.

Feynman je imel težave, ker je potiskal vodo v cev tako, da je povečal tlak v posodi. Enak učinek dosežemo, če vodo srkamo iz posode. Uporabimo Segnerjevo kolo, pripravo, ki jo najdemo v skoraj vsaki fizikalni zbirki. Obesimo ga na cev, ki jo priključimo na črpalko na vodni curek in ga spustimo v posodo z vodo (slika). Ko odpremo pipo, priprava srka vodo iz posode. Če cev priključimo na samo vodovodno pipo, bo tekla voda v posodo tako kot pri brizgalniku. Obratni brizgalnik in brizgalnik sta nam tako dosegljiva z isto pripravo. Različico tega poskusa najdemo opisano tudi v kaki starejši knjigi o poskusih iz fizike, na primer v knjigi Leksionnye demonstracii po fizike (Nauka, Moskva 1965).



Kaj pokaže poskus? Ko vključimo črpako na vodni curek, opazimo, da se kolo za hip zasuče. Zasuče se v nasprotni smeri, kot se začne gibati voda v tangentnih delih krakov, nato se vrne v prvotno ravnovesno lego. Predstavljamo si lahko, da bi sunek pognal napravo, ki bi bila gibljiva brez trenja, v stalno vrtenje. Ko zapremo črpalko, doživi naprava nasproten sunek. Ta bi ustavil napravo, ki bi se vrtela brez trenja.

Ko napeljemo vodo iz pipe, da teče v posodo, je naprava ves čas zasukana stran od smeri iztekajoče vode za kot, ki je odvisen od hitrosti vode. To opozarja na stalen navor, ki ga povzroča iztekajoča voda in ki ga pričakujemo pri brizgalniku.

Poskusa potrjujeta, kar ste lahko prebrali že v drugih prispevkih. Brizgalnik se vrti v nasprotni smeri kot izteka voda, nasprotni brizgalnik pa se ne vrti, saj gibanje, ki nastane ob vključitvi, hitro zamre.

Kljub temu lahko trdimo, da se tudi obratni brizgalniki veselo vrtijo. Turbine v hidroelektrarnah in v termoelektrarnah so nekakšni obratni brizgalniki. Poganjajo jih curki vode ali pare. Njihovo delovanje še dodatno pojasnjuje zakaj se Feynmanov obratni brizgalnik ne vrti. V brizgalnik vstopa voda ob osi in ga zapušča v tangentni smeri. V turbino vstopa voda v tangentni smeri in izstopa iz nje brez tangentne komponente hitrosti. Stalni navor vode poganja brizgalnik in obratni brizgalnik - turbino v istem smislu. V Feynmanov obratni brizgalnik vstopa voda brez začetne hitrosti in izstopa iz njega vzdolž osi. Navor deluje nanj le v začetku, med stacionarnim delovanjem pa ne.

Marjan Hribar

NEKAJ PRIPOMB K ENI VESOLJSKI s str. 277

Ni naš namen, da bi se spuščali v razpravo, ali je vesolje končno ali ne. Konec koncev lahko dejstvo, da je vesolje neskončno, privzamemo kot aksiom. Toda nikjer ni rečeno, da je naseljeno samo končno planetov, če niso vsi naseljeni. To bi namreč pomenilo, da je končna vsaka prava podmnožica neskončne množice, kar seveda ne velja. Vzemite množico naravnih števil in njeno pravo podmnožico, množico vseh sodih števil, in imate protiprimer. V zvezi s tem protiprimerom bi lahko rekli, da je lahko vsak drugi planet neposeljen, pa je še vedno poseljenih neskončno svetov.

No, pa recimo, da je vseh prebivalcev vesolja končno mnogo. Gotovo se strinjamo, da jih je vsaj nekaj, če drugi ne, potem ti in jaz. Ker je planetov neskončno, velja, da je povprečje prebivalcev na planet enako nič, saj je rezultat deljenja končnega števila z neskončno enak nič. Ampak zakaj bi moralo odtod slediti, da je skupno število prebivalcev nič, saj smo konec koncev rekli, da jih je vsaj nekaj. Zadnji sklep pač potrjuje, da lahko dober statistik dokaže karkoli, samo vnaprej mora vedeti, kaj mora dokazati.

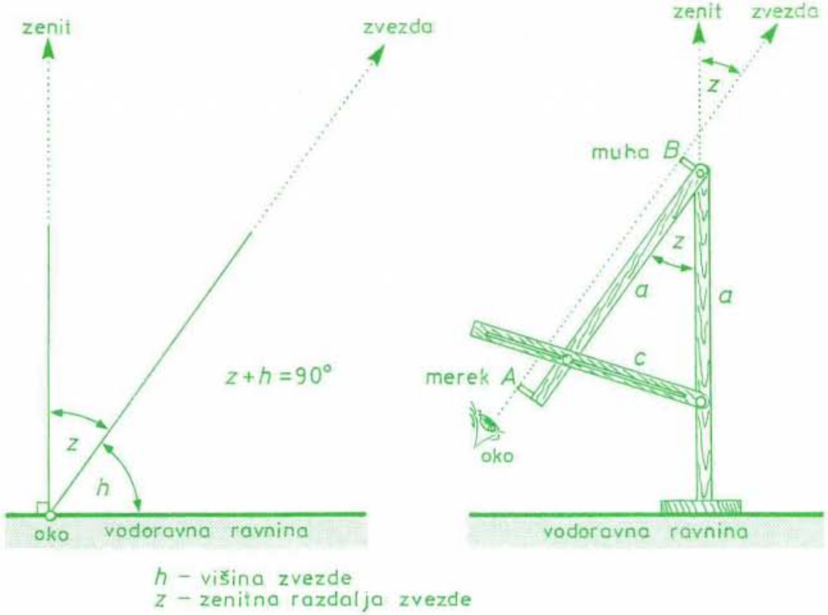
To seveda ni vse, kar bi lahko očitali "dokazu". Še nekatere netočnosti poiščite sami, razrešiti tega vozla pa tako ali tako ne moremo.

Sandi Klavžar

IZDELAJ TRIKVETER

Pomembni slovenski astronom preteklosti Andrej Perlah (1490 –1551) je izdelal tudi nekaj astronomskih instrumentov. Eden med njimi je bil *Ptolemejev instrument (paralaktično ravnilo)*, imenovan tudi *trikveter*. Gre za kotomerno napravo, ki so jo uporabljali v starem in srednjem veku (celo Nikolaj Kopernik) za merjenje *višine vesoljskih teles*, to je kota med vodoravno ravnino in smerjo proti izbranemu vesoljskemu telesu (zvezdi, planetu, Luni). Gre torej za vrsto višinomera.

Trikveter je bil sestavljen iz navpičnega nepremičnega droga (stebra, palice), na katerem sta viseli vrtljivi ročici (ravnili) a in c. Na prvi sta bila muha in merek, na drugi pa dolžinska skala (slika). Opazovalec je na primer



Trikveter (latinsko triquetrum, trikotno merilo) - princip merjenja višine vesoljskega telesa. Opazuješ s prostim očesom, tako kot so opazovali astronomi starega in srednjega veka. Če vzameš npr. $a = 1\ \mathrm{m} = 1000\ \mathrm{mm}$ in izmeriš $c = 42{,}5\ \mathrm{cm} = 425\ \mathrm{mm}$, je $\sin\frac{z}{2} = \frac{425}{2000}$. Sledi $z = 24{,}5°$ in $h = 90° - z = 65{,}5°$.

Levo: Zveza med višino in zenitno razdaljo vesoljskega telesa.

Več o starinskih astronomskih instrumentih glej v F. Hoyle, *Astronomija*, MK, Ljubljana 1971, stran 30.

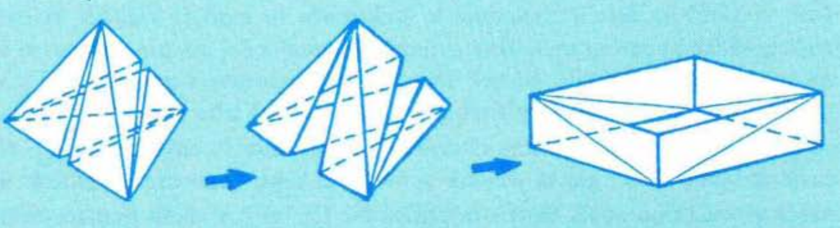
usmeril prvo ročico proti zvezdi tako, da je videl zvezdo prek muhe in merka, kot namerimo na tarčo pri streljanju s puško. Nato je to ročico zadržal in nanjo pritrdil drugo ročico tako, da so ročici in razdalja a na drogu sestavljale enakokraki trikotnik. Izmeril je razdaljo (dolžino) c in po zelo zamotanem geometrijskem načinu (kotnih funkcij še niso poznali v starem veku) določil višino zvezde.

Z znanjem kotnih funkcij pa je vse to preprosto. Med krakoma a, osnovnico c in kotom z ob vrhu enakokrakega trikotnika velja enačba: $\sin\frac{z}{2} = \frac{c}{2a}$. Kot z imenujemo tudi *zenitna razdalja vesoljskega telesa*, to je kot med smerema proti zenitu in proti opazovanemu vesoljskemu telesu. Pri konstantni vrednosti a dobimo neposredno zvezo med kotom z in stranico c. Če torej c izmerimo, lahko izračunamo z in nato višino $h = 90° - z$. Tako lahko na drugi ročici namesto dolžinskih oznak zarišemo kar ustrezno preračunane kotne oznake za zenitno razdaljo z ali celo višino h vesoljskega telesa.

Predlagam, da na svoj način sestaviš trikveter in ga praktično uporabiš na primer pri merjenju višin vesoljskih teles. Seveda lahko meriš tudi višino (elevacijo) predmetov na zemljišču, npr. višino dimnika, cerkvenega stolpa, gore ali pa višino letala, oblaka, jate ptic. Natančnost merjenja kotov s trikvetrom je bila okoli 1° (ena stopinja). Z današnjimi sredstvi pa najbrž lahko izdelaš trikveter z večjo natančnostjo. Poskusi.

Marijan Prosén

PREREZ IN ZATEM ŠE PRESENEČENJE – Reš. s str. IV



Vilko Domajnko

GRAFIKA IN DELO Z ZASLONOM V TURBO PASCALU

Proizvajalka Turbo pascala, firma Borland, je s Turbo pascalom, verziji 4 in 5, vpeljala poleg obstoječih razširitev standardnega pascala, še vrsto novih posebnosti. Najpomembnejša je vpeljava modula, ali kot ga imenuje Turbo pascal, UNIT, nekakšne knjižnice podprogramov. Module lahko pišemo tudi sami. Vendar se bomo tu omejili na to, kako uporabljamo obstoječe.

Skupaj s Turbo pascalom dobimo osem standardnih modulov. To so *System*, *Overlay*, *Graph*, *Dos*, *Crt*, *Turbo3*, *Graph3* in *Printer*. Če želimo kak modul uporabljati, moramo to v programu tudi povedati. To storimo tako, da še pred vsemi ostalimi deklaracijami uporabimo novo rezervirano besedo **uses** in nato naštejemo uporabljene module. Kakor hitro je v našem programu ta deklaracija, že lahko uporabimo vse podprograme in funkcije, ki so napisani v posameznem modulu, kot bi bili del standardnega pascala.

```
program  izpis;
uses Crt;
begin
  GotoXY(10,10);
  writeln(' Izpis na mestu 10,10 ')
end.
```

Podprograma `GotoXY` standardni Turbo pascal ne pozna. Če ne bi navedli **uses Crt**, bi prevajalnik javil, da procedure ne pozna. Z navedenim stavkom pa smo si omogočili uporabo vseh podprogramov, ki so v modulu *Crt*. Seveda pa mora imeti Turbo pascal dostop do datotek, kjer ti moduli so. Če bo prevajalnik protestiral, češ., da določenega modula ne najde, povprašajte kakega izkušenejšega kolega, kako pokažemo Turbo pascalu, kje moduli so.

V nadaljevanju si bomo ogledali uporabo dveh modulov in sicer modula *Crt*, ki skrbi za delo z zaslonom in tipkovnico in modula *Graph*, ki nam nudi grafične podprograme. Našteli bomo le manjši del podprogramov, ki so na voljo v obeh modulih. Spisek vseh si lahko ogledate s pomočjo v Turbo pascal vgrajene pomoči. Poglejmo, kako. Kjerkoli v Turbo pascalu pritisnimo na F1. Ne glede na izpisano informacijo pritisnimo še enkrat na F1. Na zaslonu bomo dobili glavni jedilnik pomoči. Z nekaj zaporednimi pritiski na puščice osvetlimo napis `Units` in pritisnimo Enter. V oknu pomoči bomo dobili izpisan seznam vseh osmih modulov. Osvetlimo ime modula o katerem želimo informacije in pritisnemo Enter. S tipkama PgDn in PgUp se premikamo po dobljenem besedilu gor in dol. Tekst je seveda v angleščini.

pa bo že šlo. Več o načinu uporabe pomoči si lahko ogledate v članku *Turbo pascal na hitro* v četrti številki Preseka.

1. Modul Crt

S pomočjo tega modula opravljamo številne akcije v povezavi s tipkovnico in zaslonom. Lahko npr. zbrišemo zaslon, čakamo določen čas, se postavimo z utripačem na poljubno mesto na zaslonu, ... Vsebuje številne podprograme, ki so bili standardni v verziji 3.0. Navedimo nekaj najpogosteje uporabljanih. Pri vsakem podprogramu bomo navedli kako je deklarira, tako da bomo videli, koliko in kakšne parametre potrebuje. Namesto tipov `word` in `byte` si mirno lahko mislite parameter tipa `integer`, le v pravih mejah mora biti. Več o tem si preberite v prejšnji številki Preseka, v članku *Novi tipi v Turbo pascalu.*

ClrScr zbriše zaslon.

```
procedure ClrScr;
```

Delay `procedure Delay(ms : word);`

Prekine izvajanje programa za približno `ms` milisekund.

GotoXY `procedure GotoXY(X,Y : byte);`

Utripač postavi v vrstico `Y` in stolpec `X`. Zgornji levi kot zaslona ima koordinati (1,1), koordinati spodnjega desnega kota pa sta odvisni od zaslona. Največkrat sta (80,25). Če sta kordinati napačni, utripač ostane na svojem mestu, program pa teče dalje.

KeyPressed vrne vrednost true, če je bila na tipkovnici pritisnjena tipka, sicer false.

```
function KeyPressed : Boolean;
```

Pritisnjena tipka ostane v vmesnem pomnilniku tipkovnice. Na to moramo paziti, saj če s tipkovnico ne počnemo ničesar, ostane vrednost funkcije resnično. Npr. pogosto srečamo zanko oblike `repeat until KeyPressed`. Z zanko želimo doseči, da se izvajanje programa nadaljuje šele po pritisku na poljubno tipko. Vendar, če je ta zanka del neke druge zanke, v kateri ne beremo s tipkovnice, se bo izvajanje prekinilo le pri prvem prehodu zunanje zanke. Pri ostalih bo `KeyPressed` ostalo `true` in navedena zanka se bo takoj iztekla. Npr.

```
program a;
uses crt;
begin
  repeat
    writeln('==============');
    repeat until KeyPressed
  until false
end.
```

Program bo na pritisk na tipko čakal le po prvem izpisu, kasneje pa ne več. Zato je varneje take prekinitve izpeljati s funkcijo ReadKey.

ReadKey prebere znak s tipkovnice.

```
function ReadKey : char;
```

Pritisnjena tipka se ne pozna na zaslonu. Čakanje na uporabnika izpeljemo takole

```
program a;
uses crt;
var c : char;
begin
  repeat
    writeln('==============');
    c := ReadKey
  until false
end.
```

2. Modul Graph

Modul *Graph* vsebuje konstante, tipe in podprograme za delo z grafiko. Omogoča delo z večino najbolj razširjenih grafičnih standardov za PC. Skupaj s Turbo pascalom dobimo gonilnike za naslednje grafične adapterje: CGA, EGA, Hercules, MCGA, VGA, AT&T 400, 3270 PC in IBM-8514. Ti so na datotekah s podaljškom BGI. Če bomo program izvajali na računalniku z grafično kartico Hercules, moramo imeti datoteko HERC.BGI.

Pa poglejmo, kaj moramo storiti, če želimo uporabljati grafiko. Način, ki bo opisan, morda res ni najelegentnejši, vendar je dokaj zanesljiv ne glede na organizacijo našega diska. Okostje vsakega našega grafičnega programa bo približno takšno

```
program grafika;
uses Graph;
const Pot = 'C:\TP';          { kje so datoteke *.BGI }
var GD,GM : integer;
    ...
begin
  .
  { zacetek dela v graficnem nacinu }
  DetectGraph(GD,GM);
  InitGraph(GD,GM,Pot);
  .
  .            { delo v graficnem nacinu }
  .
  Readln;
  CloseGraph;  { konec dela v graficnem nacinu }
  ...
```

Kot vidimo, smo uporabili konstanto Pot, s katero smo opisali, kje na disku so ustrezni gonilniki in dve spremenljivki, s katerima se opiše grafična kartica in način dela. Nato smo s proceduro `DetectGraph` ugotovili, katera grafična kartica je v našem računalniku in z `InitGraph` prešli v grafični način. Le-tega smo zapustili s pomočjo podprograma `CloseGraph`. Še prej pa smo uporabili trik s stavkom `readln`, ki prepreči, da bi rezultati prehitro izginili iz zaslona, saj `CloseGraph` preklopi spet nazaj na tekstovni način in s tem grafična slika izgine z zaslona. Tako pa bo program čakal, dokler ne pritisnemo na Enter.

Koordinatno izhodišče (točka (0,0)) je v zgornjem levem kotu. Koordinata x narašča proti desni. Vrednosti koordinate y naraščajo navzdol. Koordinati spodnjega desnega kota sta odvisni od grafične kartice, ki jo uporabljamo. Pri nas je najbolj razširjena kartica Hercules. Pri tej sta koordinati spodnjega desnega kota (719,347).

Omeniti velja še to, da v grafičnem načinu ne moremo uporabljati standardnih podprogramov `write` in `writeln`, ampak si moramo pomagati s posebnimi podprogrami za izpis, ki so na voljo v modulu *Graph*.

Navedimo sedaj nekatere izmed več kot 50 podprogramov in funkcij.

Circle `procedure Circle(x,y: integer; Radius: word);`

Nariše krog s središčem v točki (x, y) in polmerom `Radius`.

Line `procedure Line(x1,y1,x2,y2: integer);`

Nariše daljico z začetkom v točki $(x1, y1)$ in koncem v točki $(x2, y2)$.

LineRel `procedure LineRel(Dx,Dy: integer);`

Nariše daljico z začetkom v točki, kjer je trenutno grafični kazalec (recimo (x, y)) in koncem v točki $(x + Dx, y + Dy)$. Grafični kazalec je po tem podprogramu v končni točki.

LineTo `procedure LineTo(X,Y: integer);`

Nariše daljico z začetkom v točki, kjer je trenutno grafični kazalec, in koncem v točki (x, y). Grafični kazalec je potem v končni točki.

MoveTo premik grafičnega kazalca v določeno točko

```
procedure MoveTo(X,Y: integer);
```

Premakne grafični kazalec v točko (X, Y). Grafični kazalec na zaslonu ni viden.

OutTextXY na določenem mestu izpiše niz

```
procedure OutTextXY(X,Y: integer;
                    TextString: string);
```

Izpiše niz `TextString` z začetkom na mestu (X, Y). Če je niz predolg, se ne izpiše (pri standardni nastavitvi). Če želimo izpisati števila, jih moramo prej spremeniti v niz (npr. s podprogramom `Str` - glej članek v prejšnjem Preseku).

PutPixel na določenem mestu nariše točko

```
procedure PutPixel(X,Y: integer; Color: word);
```

Na mestu (X, Y) nariše točko v barvi `Color` (črna = 0, bela = 15).

Naštete niso številne procedure za razne nastavitve, izpopolnjevanje likov, itd. Zelo pogosto vprašanje je tudi to, kako sliko z zaslona spraviti na papir. Žal ustreznega podprograma v modulu *Graph* ni. Če bo za to več zanimanja, bomo v Preseku objavili ustrezen program, ki ga najdete tudi v knjigi *Matija Lokar, Turbo pascal.* Tam si lahko preberete več o uporabi modulov in Turbo pascalu nasploh.

Matija Lokar

TRI NEENAKOSTI - Rešitev s str. 330

1. Levo stran neenakosti pomnožimo z 2 in zapišemo v naslednji obliki:

$$2x^2 + 2y^2 - 2xy - 2x - 2y + 2 = (x - y)^2 + (x - 1)^2 + (y - 1)^2$$

Odtod že vidimo, da neenakost velja, enakost pa je dosežena le pri $x = y = 1$.

2. Spet preoblikujemo levo stran neenakosti

$$\begin{aligned} &x^2 + 19y^2 + 6z^2 - 8xy - 4xz + 12yz = \\ &= (x - 4y - 2z)^2 + y^2 + 2y^2 + 2z^2 - 4yz = \\ &= (x - 4y - 2z)^2 + y^2 + 2(y - z)^2 \end{aligned}$$

od koder sledi trditev. Enakost velja le za $x = y = z = 0$.

3. Označimo $p(x) = x^8 - x^5 + x^2 - x + 1$ in ločimo tri možnosti. Če je $x \leq 0$, je očitno $p(x) \geq 1$, saj so ostali sumandi v $p(x)$ nenegativni. Za $0 < x < 1$ velja

$$p(x) = x^8 + x^2(1 - x^3) + (1 - x) > 0$$

pri $x \geq 1$ pa je

$$p(x) = x^5(x^3 - 1) + x(x - 1) + 1 \geq 1$$

Šef ket Arslanagić
prev. in prir. *Boris Lavrič*

9. REPUBLIŠKO IN PODROČNO TEKMOVANJE IZ FIZIKE ZA OSNOVNOŠOLCE

Republiška tekmovanja iz fizike za osnovnošolce potekajo izmenoma na Pedagoški akademiji v Ljubljani in na Pedagoški fakulteti v Mariboru. Organizatorja letošnjega tekmovanja, devetega po vrsti, sta bila Katedra za fiziko Pedagoške fakultete v Mariboru in Društvo matematikov, fizikov in astronomov Slovenije. Tekmovanje je bilo 6. maja 1989.

Na republiško tekmovanje so se uvrstili najboljši učenci iz področnih tekmovanj. Področna tekmovanja, ki so bila 8. aprila 1989, so organizirali in vodili: Jožica Dolenšek (Celje), Franc Pogorelčnik (Dravograd), Mirko Cvahte in Zlatko Bradač (Maribor), Eda Okretič (Koper), Anita Fakin (Nova Gorica), Jože Stare (Kranj), Edo Dečko (Murska Sobota), Danijel Brezovar (Novo Mesto) in Joži Okorn (Ljubljana).

Na področnih tekmovanjih je sodelovalo 205 ekip iz 7. razredov in 275 ekip iz 8. razredov, skupaj 960 učencev.

Na republiško tekmovanje se je uvrstilo 31 ekip iz 7. razredov in 34 ekip iz 8. razredov.

Rezultati republiškega tekmovanja

7. razred

1. mesto: Alen FATUR, Matjaž VENCELJ, 19,5 točk, OŠ C. Močnika, Vič Rudnik, mentor Tatjana Ponikvar;
2. mesto: Tomaž ŠILEC, Simon RUČIGAJ, 19 točk, OŠ Lenart, Lenart, mentor Dani Divjak;
3. mesto: Primož PIRIH, Marko BOC, 18,5 točk, OŠ Heroja V. Vlahoviča, Ljubljana, mentor Ivana M. Celič;

Pohvale: Gregor ŠAVLI, Uroš MEDVEŠČEK, 17,5 točk, OŠ B. Kidriča, Ajdovščina, mentorja Medvešček, Marc; Mitja LEVSTEK, Uroš PAUNOVIČ, 16,5 točk, OŠ M. Vrhovnik, Ljubljana, mentor Pavle Zajc; Urban MRAK, Boštjan JARC, 15,5 točk, OŠ I.Groharja, Šk. Loka, mentor Majda Jeraj; Andrej OCEPEK, Uroš MAJCENOVIČ, 15 točk, OŠ J. Glazerja, Ruše, mentor Adolf Navršnik; Jure ŽITNIK, Aleš URANJEK, 14,5 točk, OŠ Prešernovih brigad, Železniki, mentor Franc Rant; Živa PEČAN, Boštjan ŠTRASNER, 14,5 točk, OŠ V. Šmuc, Izola, mentor Leopold Šuler; Borut GAJZER, Cveto GAŠPERUT, 14,5 točk, OŠ S. Šlandra, Maribor, mentor Irena Pernat.

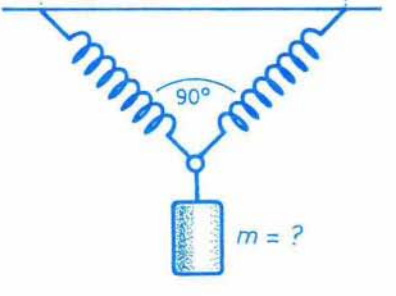
8. razred

1. mesto: Mitja MASTNAK, Petra DEBELAK, 19 točk, OŠ F. Malgaja, Šentjur, mentor Mateja Šumej;
2. mesto: Janko SPASOVSKI, Gregor VEBLE, 18,5 točk, OŠ Bratov Polančičev, Maribor, mentor Mladen Tancer;
3. mesto: Miha PETERNEL, Anton BAJŽELJ, 18 točk, OŠ L. Seljaka, Kranj, metnor Alenka Dolenc;
Pohvale: Erik KERŠEVAN, Borut KERŠEVAN, 17,5 točk, OŠ V. Vodnika, Ljubljana, mentor Branko Cedilnik; Uroš MIDIČ, Martin KOVIČ, 17 točk, OŠ D. Kumar, Ljubljana, mentor Marko Brumen; Daniel SVENŠEK, Matej LESKOVAR, 15,5 točk, OŠ B. Ilicha, Maribor, mentor Martin Knuplež; Tomaž PROHINAR, Marko JAZBINŠEK, 15 točk, OŠ Log - Dragomer, Brezovica, metnor Marko Gerbec; Uroš INDIHAR, Aleš ZUPANČIČ, 15 točk, OŠ F.R. Staneta, Maribor, mentor Matjaž Krump; Jaka MEDVEŠČEK, Boris BRECELJ, 14,5 točk, OŠ P. Voranca, Ljubljana, mentor Boris Kham; Bojan GORNIK, Petra TOMC, 14,5 točk, OŠ 15. SNOUB, Metlika, mentor Jože Kočevar; Blaž VALIČ, Tina PAVLIN, 14,5 točk, OŠ 9. korpusa NOVJ, N. Gorica, mentor Anita Fakin.

Naloge s področnih tekmovanj

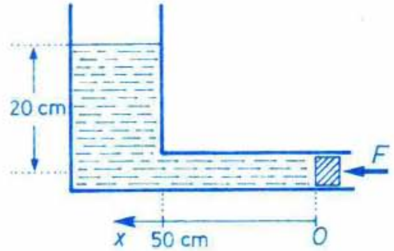
7. razred

1. Imaš dve enako veliki kocki z robom 0,5 dm. Prva je lesena, druga aluminijasta. Kocki imata enaki masi in obe sta votli.
   a) V kateri kocki je večja prostornina votline?
   b) Prostornina večje votline je 0,10 dm^3. Kolikšna je prostornina manjše votline?
   c) Kocki vržemo v vodo. Ali obe kocki plavata? Odgovor utemelji. Gostota lesa je 0,6 kg/dm^3, aluminija pa 2,7 kg/dm^3.
2. Dve enaki vzmeti na spodnjih koncih spnemo z obročkom in nanj obesimo klado, kot kaže slika.
   a) Nariši vse sile, ki delujejo na obroček!
   b) Kolikšna je masa klade, če je kot med vzmetema pravi? Neraztegnjena vzmet je dolga 20 cm. Če nanjo obesimo utež



z maso 1,0 kg, se dolžina vzmeti poveča na 25 cm. Dolžine vzmeti določi z načrtovanjem trikotnika v primernem merilu.

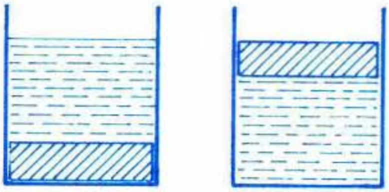
3. Z batom, ki ima presek 6,0 cm^2, potiskamo vodo v posodo, kot kaže slika 2. Presek posode je 24 cm^2, začetna višina vode v posodi je 20 cm, dolžina cevi je 50 cm. Trenje med batom in steno cevi smeš zanemariti.



a) S kolikšno začetno silo moramo potisniti bat?
b) Nariši diagram: sila v odvisnosti od lege bata! Diagram opremi z enotami.

4. V vas s 1000 gospodinjstvi bi radi napeljali vodovod. Kolikšen povprečen prostorninski tok mora dajati izvir vode? Povprečne ocene so: vsako gospodinjstvo ima 3 pipe, pralni stroj in kotliček. Pipa je odprta 20 minut na dan, prostorninski tok je 0,5 dl/s, pralni stroj je priključen vsak drugi dan, za eno pranje porabi 100 l vode, kotliček s prostornino 10 l se sprazni 12-krat na dan. Ob izviru bo vodni zbiralnik, tako da bo večja dnevna poraba vode pokrita s 24-urnim pritokom vode iz izvira.

5. Opeko, ki sprva leži na dnu posode z vodo, dvignemo iz vode. Kolikšno delo opravi sila vzgona med dvigovanjem? Kolikšna je sprememba potencialne energije vode? Presek opeke je 200 cm^2, višina 8,0 cm, višina vode nad opeko je 30 cm. Presek posode je le toliko večji od preseka opeke, da se voda neovirano pretaka med opeko in steno. Pri računu smeš oba preseka izenačiti.



8. razred

1. Iz točke A poženemo kroglico v vodoravni smeri. Po 0,50 sekunde gre kroglica skozi točko B, po 1,00 sekunde skozi točko C in pride po 3,00

sekundah v točko D. Vsi časi so merjeni glede na začetek gibanja. Trenje je tako majhno, da je gibanje po vodoravnih delih enakomerno.

a) Nariši diagram hitrosti v odvisnosti od časa $v = v(t)$!
b) Izračunaj dolžino strmine (razdaljo BC) !

2. Vesoljska ladja z maso 1000 kg se spušča navpično proti površini Lune in zavira z motorji, da bo mehko pristala ($v = 0$). Na višini 2000 m je hitrost ladje 50 m/s. Težni pospešek na Luni je 1/6 zemeljskega težnega pospeška.

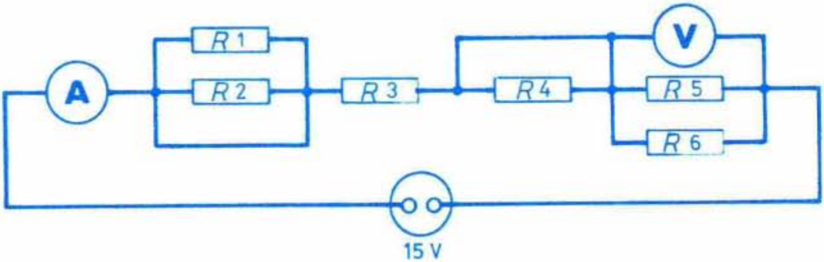
a) Nariši vse sile, ki delujejo na vesoljsko ladjo med pristajanjem !
b) Izračunaj silo, s katero mora ladja zavirati !

3. Opiši in skiciraj poskus, s katerim bi približno izmeril polmer Lune. Razdalja Zemlja - Luna je 380 000 km.

4. Miha je kupil štiri žarnice s podatki: $Z1$ (1,5 V, 0,3 A); $Z2$ (6,0 V, 0,1 A); $Z3$ (4,5 V, 0,3 A); $Z4$ (3,0 V, 0,4 A). Kupil je še baterijo z napetostjo 9 V in za vsako žarnico po eno varovalko. Doma je iz vseh žarnic sestavil vezje, tako da so vse žarnice svetile normalno, vsako žarnico pa je zavaroval z varovalko. Žarnica sveti normalno, če sta napetost na njej in tok skozi njo enaka podatkoma na žarnici.

a) Nariši vezje, po katerem je Miha povezal elemente ! Označi vrednosti varovalk !
b) Žarnice bi lahko zavaroval tudi z manj varovalkami. Katere varovalke so odveč ?

5. Osmošolec Jože je iz samih 1000 ohmskih upornikov napravil naslednje vezje:

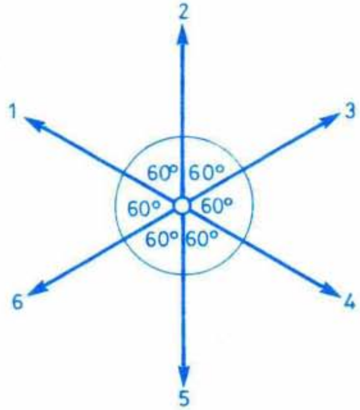


Kolikšni vrednosti sta pokazala ampermeter in voltmeter ?

Naloge z republiškega tekmovanja

7. razred

1. Strugar je pri sobni temperaturi iz jekla natančno izdelal kvader z robovi 300 mm x 200 mm x 100 mm. Za koliko se poveča prostornina takega kvadra, če ga segrejemo na temperaturo 570°C? Manjkajoče podatke poišči v učbeniku.
2. Z gumijasto cevjo bi rad iz vodovodne pipe natočil vodo v bazen, ki ima obliko kvadra. Napiši, kaj vse bi moral izmeriti, če želiš izračunati čas polnjenja bazena. Merilne postopke opiši kratko in razumljivo. Pri meritvah lahko uporabiš pripomočke, ki jih imamo navadno doma.
3. Na obroček privežemo šest vrvic, kot kaže slika. Vrvice 1,2,3 vlečemo z enako velikimi silami, vsaka meri 10 N. S kolikšnimi silami moramo vleči vrvice 4,5 in 6, da bo obroček miroval ? Izračunaj vsaj tri rešitve (tri trojice sil) !



Eksperimentalni nalogi

4. Določi razdaljo do palice z dvema lučkama, če veš, da je razdalja med lučkama 1,5 m. Nariši tudi skico poskusa. Potrebščine: ravnilo 50 cm, trikotnik.
5. Izdelaj areometer in na priložen milimetrski papir nariši skalo areometra za gostote od 0,8 do 1,3 kg/dm^3 v korakih po 0,1 kg/dm^3.

a) Iz slamice z zamaškom in šiber izdelaj areometer in napiši, koliko šiber si uporabil.

b) Na priloženi milimetrski papir nariši oznako za gostoto 1 kg/dm^3.

c) Z razmislekom in računom ugotovi, kakšna je skala areometra in jo nariši.

d) Izmeri gostoto raztopine soli v vodi.

Potrebščine: slamica z milimetrsko skalo in zamaškom, svinčene šibre, čaša z vodo, čaša z raztopino, visoka čaša, milimetrski papir (z enako dolžino kot slamica).

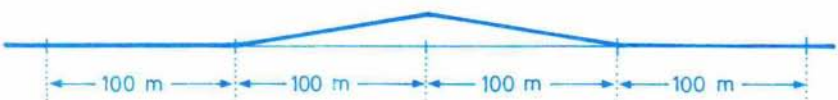
8. razred

1. Pri vožnji s kolesom po ravnem s hitrostjo 5,0 m/s poganja Jure pedala z močjo 150 W. Ko se pripelje do 200 m dolge in na sredini 5 m visoke vzpetine (glej sliko), spremeni moč tako, da hrib prevozi navzgor in navzdol s konstantno hitrostjo 5,0 m/s.

a) S kolikšno močjo poganja Jure kolo pri vožnji po hribu navzgor in s kolikšno močjo na drugi strani po hribu navzdol?

b) Nariši diagram Juretove moči v odvisnosti od časa za razdaljo od 100 m pred začetkom hriba do 100 m po koncu hriba!

Jure tehta skupaj s kolesom 60 kg, sili trenja in upora se pri vožnji po hribu zanemarljivo malo spremenita glede na vožnjo po ravnem.

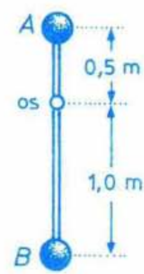


2. Na konca 1,5 m dolge in lahke palice pritrdimo dve enaki uteži z oznakama A in B. Vsaka utež ima maso 2,5 kg. Palica je vrtljiva okoli vodoravne osi, kot kaže slika.

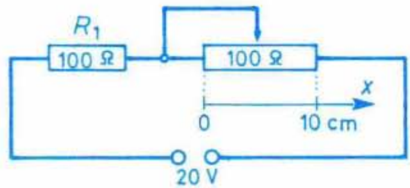
a) Koliko dela opravimo, ko palico počasi zavrtimo za 180^o, da pride utež B v zgornjo lego?

b) Ko je utež B v zgornji legi, palico spustimo, da se zavrti. Kolikšno je razmerje krožilnih hitrosti uteži pri vrtenju palice?

c) S kolikšnima hitrostima se gibljeta uteži A in B, ko gre utež B skozi spodnjo lego?

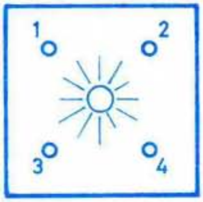


3. Nariši diagram $I = I(x)$, ki kaže, kako se spreminja tok I skozi upornik R_1, če premikamo drsnik na drsnem uporniku iz skrajne leve v skrajno desno lego (glej sliko).



Eksperimentalni nalogi!

4. V "črni" škatli so med vtičnicami povezani dva enaka upornika in sveteča dioda, ki normalno sveti pri napetosti 4,5 V. Vezje lahko preizkušaš tako, da med poljubni vtičnici priključiš baterijo 4,5 V. Po preizkušanju in razmisleku nariši vezje, ki je v škatli.



Sveteča dioda sveti pri tako priključeni napetosti:

če pa priključka baterije zamenjamo, dioda ne sveti. Med vtičnicami ni kratkih stikov.
Potrebščine: "črna" škatla, baterija 4,5 V, tri vezne žice.

Za bralce Preseka dodajamo rezultate eksperimentalnega dela tekmovalcev: baterijo priključimo zaporedoma med dve vtičnici, označimo polariteto napetosti in opazujemo svetečo diodo: 3+, 2-: sveti, 3+, 4-: sveti manj, 3+, 1-: sveti manj. Pri ostalih vezavah baterije z vtičnicama dioda ne sveti.

5. Izmeri specifični upor priložene žice! Specifični upor pove, kolikšen je upor žice z dolžino 1 m in s presekom 1 mm^2. Nariši shemo poskusa. Premer žice izmeri tako, da več ovojev tesno naviješ na svinčnik. Potrebščine: žica z dolžino 70 cm, napetostni izvir, voltmeter, ampermeter, vezne žice, smirkov papir, svinčnik, merilni trak.

Zlatko Bradač, Mirko Cvahte

TRIKOTNIKI

Prvi trikotnik ima stranice z dolžinami a, b^2, c^3, stranice drugega merijo a^2, b^3, c, tretji pa ima stranice dolge a^3, b in c^2. Določi jih, če so a, b in c naravna števila.

Boris Lavrič

ZBIRKE NALOG Z REPUBLIŠKIH TEKMOVANJ

Tekmovanja naj ne bodo sama sebi namen. Pomembneje je samostojno reševati naloge, dobljene rezultate primerjati z rezultati drugih ali pa s pravilnimi rešitvami. Primerno vzpodbudo in pomoč za tako delo boste našli v knjigah Knjižice Sigma, kjer so zbrane naloge in rešitve z dosedanjih republiških tekmovanj matematikov, fizikov in računalnikarjev. Reševalce vabimo, da nam pošljejo svoje originalne in elegantne rešitve, ki jih bomo v Preseku z veseljem objavili. Navedene knjige po enotni ceni 100,00 din (80,00 din) lahko dobijo člani društva in naročniki Preseka pri skupinskem naročilu šol z 20% popustom.

Matematika

24. Batagelj V., Pisanski T., Rešene naloge iz matematike z republiških tekmovanj, 1. del, 1950-1966, 180 str.
25. Batagelj V., Pisanski T., Rešene naloge iz matematike z republiških tekmovanj, 2. del, 1967-1975, 188 str.
43. Lavrič B., Rešene naloge iz matematike z republiških tekmovanj, 3. del, 1976-1987, 116 str.
46. Jurišić A., Rešene naloge z mednarodnih matematičnih olimpiad, 1. del, 1978-1988, 92 str.

Fizika

21. Hribar M., Rešene naloge iz fizike z republiških tekmovanj, 1. del, 1951-1970, 168 str.
37. Golli B., Žitnik J., Rešene naloge iz fizike z republiških tekmovanj, 2. del, 1971-1983, 112 str.

Računalništvo

44 Batagelj V., Dolenc T., Martinec M., Mohar B., Reinhardt R., Tvrdy I., Vitek A., Enajsta šola računalništva. Rešene naloge z republiških tekmovanj 1977-1987, 396 str.

Ciril Velkovrh

KOLIKO JE STAR ANDREJ – Rešitev s str. 361

Andrej je star 11 let.

Janez Aleš

27. SREDNJEŠOLSKO REPUBLIŠKO TEKMOVANJE IZ FIZIKE

Republiško tekmovanje srednješolcev iz fizike je bilo 13. maja na Srednji šoli družboslovne in tehničnih usmeritev v Črnomlju. Udeležilo se ga je 171 tekmovalcev iz 22 srednjih šol.

Naloge je sestavila komisija za popularizacijo fizike v srednji šoli. Za reševanje so imeli učenci na voljo dve uri in pol. V skupini A (mehanika) je tekmovalo 66 učencev, v skupini B (energija) 52, v skupini C (elektrika) 40 in v skupini D (delci in valovanja) 13 učencev. Medtem ko so učenci reševali naloge, so imeli mentorji in spremljevalci tekmovalcev posvet, na katerem so spregovorili o problemih pri pouku fizike in pri tekmovanjih iz fizike ter se seznanili z novostmi pri organizaciji mednarodnih fizikalnih olimpiad.

Ob zaključku tekmovanja je komisija razglasila rezultate ter podelila priznanja in nagrade najboljšim učencem. Lepe nagrade so prispevali organizatorji ter delovne organizacije in družbeno politične skupnosti iz Bele krajine. Prizadevni učitelji in učenci Srednje šole v Črnomlju so na tekmovanju ustvarili prijetno vzdušje, ki je ostalo udeležencem v lepem spominu.

Skupina A:

2. nagrada: Roni Leban (SNŠ, Ljubljana)

3. nagrada: Klemen Kočevar, Tomaž Kobal, Katarina Kurent (SNŠ, Ljubljana), Gregor Skačej (SNŠ, Maribor), Sašo Blažič, Marko Pavlišič (SŠ, Črnomelj), Dominik Roblek (SŠPRNMU, Kranj)

pohvale: Mojca Jazbinšek (STŠ, Celje), Damjan Otoničar (SŠ za elektrotehniko, Ljubljana), Matej Černigoj (SPNMŠ, Koper)

Skupina B:

2. nagrada: Martin Rajič (SNŠ, Ljubljana), Alenka Čok (SPNMŠ, Koper)

3. nagrada: Andrej Rakar (SNŠ, Ljubljana), Marko Kern (SŠPRNMU, Kranj), Aleš Česar (SCTPU, Murska Sobota)

pohvale: Janko Smolar (SŠTNPU, Ravne na Koroškem), Marko Škala (SŠ, Črnomelj), Toni Bračič, Arso Savanovič (SŠPRNMU, Kranj), Matej Šikovc (SNŠ, Ljubljana), Mitja Zelenc (SŠ J. Vega, Idrija)

Skupina C:

1. nagrada: Andrej Vilfan, Jaka Cimprič, Andrej Pangeršič (SNŠ, Ljubljana)

3. nagrada: Timotej Ečimovič (SNŠ, Ljubljana), Peter Holozan (SŠ, Kamnik), Matjaž Pavlišič (SŠ, Črnomelj), Gregor Černe (SŠPRNMU, Kranj)

pohvale: Denis Donlagič (SNŠ, Maribor), Albert Kleva (SPNMŠ, Koper), Matej Valič (NSC, Nova Gorica), Klemen Vidic (Iskra SŠ, Kranj)

Skupina D

2. nagrada: Mihec Mesarič (SCTPU, Murska Sobota)

3. nagrada: Borut Oblak, Matej Komelj, Andraž Oblak (SNŠ, Ljubljana)

pohvala: Igor Zrinski (SCTPU, Murska Sobota)

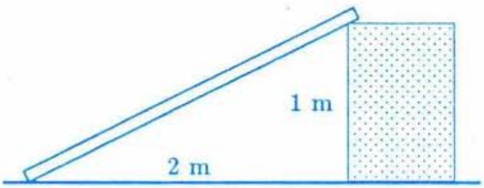
Komisija je določila ekipo za zvezno tekmovanje iz fizike v Črni gori. Tekmovanja naj bi se udeležili: Roni Leban, Martin Rajič, Alenka Čok, Andrej Vilfan, Jaka Cimprič, Andrej Pangeršič, Timotej Ečimovič, Matjaž Pavlišič, Gregor Černe, Mihec Mesarič, Borut Oblak in Andraž Oblak.

Iztok Kukman

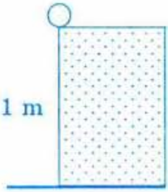
Naloge:

Skupina A – mehanika

1. Kolikšen naj bo koeficient trenja med podstavkom in palico na sliki, da palica ne zdrsne? Med palico in tlemi ni trenja. Kako pa je z ravnovesjem, če med podstavkom in tlemi tudi ni trenja?
2. Obroč z radijem 0,5 cm stoji na robu 1 m visoke mize tako, da je njegovo težišče natančno nad robom. Rahlo ga sunemo, da začne brez drsenja padati. V kolikšni razdalji od mize pade na tla?



nal. 1



nal. 2

3. Valj z maso m in z radijem osnovne ploskve r zakotalimo navzgor po klancu z naklonskim kotom α proti vodoravni ravnini. V trenutku, ko je valj oddaljen 1 m od vznožja klanca in ima hitrost v_0, zakotalimo za njim kroglo z začetno hitrostjo $2v_0$ tako, da se obe telesi gibljeta po vzporednih premicah. Masa krogle je enaka masi valja, radij krogle pa radiju osnovne ploskve valja. Krogla in valj sta enako oddaljena od vznožja 1,02 s ter 48,19 s od trenutka, ko smo zakotalili kroglo. Kolikšen je naklonski kot klanca α ? Kolikšna je hitrost v_0?

4. Na hribu stojita dva dečka. Prvi se s sanmi spusti po 50 m dolgem klancu z nagibom 60 °, ki se nadaljuje v ravnino. S kolikšno začetno hitrostjo in pod kolikšnim kotom proti vodoravnici mora drugi v istem trenutku vreči kepo, da bo zadela prvega v hipu, ko se bo zaustavil? Koeficient trenja med sanmi in snegom je 0,05.

Skupina B – energija

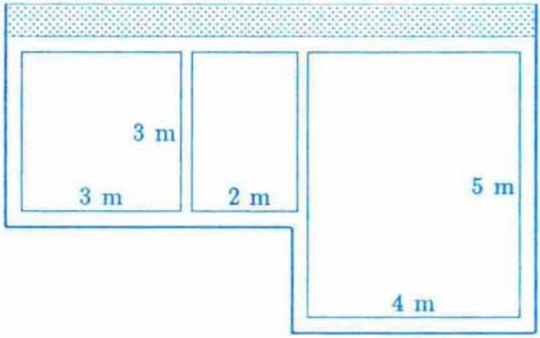
1. Kompot konzerviramo v stekleni posodi z osnovno ploskvijo 100 cm^2 in z višino 13 cm. Posodo napolnimo do višine 10 cm, jo segrejemo na 75 °C in nanjo položimo lahek steklen pokrov. Med pokrovom in robom posode je guma, ki dobro tesni. S kolikšno silo pritiska pokrov na rob posode, ko se ohladi na 17 °C? Delni tlak vodne pare pri 75 °C je 40 kPa, pri 17 °C pa 2 kPa. Zrak nad kompotom je ves čas nasičeno vlažen.

2. Na vrtiljaku se vrtijo zaprti avtomobilčki. Na enega od njih je fizik privezal balonček napolnjen s helijem na 1 m dolgi lahki vrvici. Izračunaj kotno hitrost vrtiljaka, če je pritrdišče vrvice oddaljeno 5 m od osi vrtiljaka in vrvica oklepa kot 45 ° z navpičnico. S kolikšno silo je napeta vrvica? Radij balončka je 10 cm, kilomol zraka je 29,3 kg, kilomol helija 4 kg, temperatura pa 20 °C. Nariši!

3. Zmešamo 1 kg ledu s temperaturo −10 °C in 2 kg vode pri 80 °C in počakamo, da se temperatura ustali. Za koliko se spremeni prostornina vode in ledu? Specifična toplota ledu je 2100 J/kgK, spec. toplota vode 4200 J/kgK, talilna toplota ledu pa 336 kJ/kg. Pri taljenju se prostornina ledu zmanjša za 8,3 %. Gostota vode pri 4 °C je 1 kg/dm^3, prostorninski raztezki vode in ledu pa so podani v tabeli.

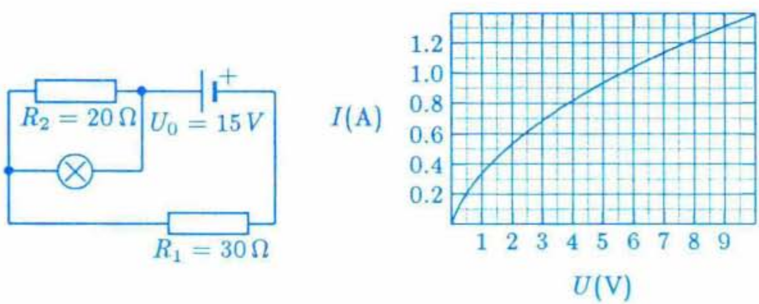
T [°C]	−5	2	7	15	25	35	45	55	65	75	85
$\beta\,[10^{-5}/K]$	−17	−3	4,5	15	26	35	42	49	56	61	67

4. Tri sobe s tlorisom na sliki ogrevamo z dvema pečema. Močnejša v desni sobi ima moč 2,5 kW. Tla, strop in najdaljša zunanja stena so dobro izolirani. Sobe so visoke 3 m, debeline notranjih sten so 20 cm, debeline zunanjih pa 30 cm. Toplotna prevodnost sten je 0,6 W/mK. Kolikšna naj bo moč peči v levi sobi, da bo temperatura srednje sobe enaka temperaturi v levi sobi? Kolikšne so tedaj temperature v sobah, če je zunanja temperatura −10 °C?



Skupina C – elektrika

1. Izračunaj moč, ki jo porablja žarnica v vezju na sliki. Graf kaže odvisnost toka po žarnici od napetosti med priključkoma.

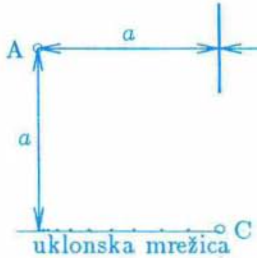


2. Tuljava s 1000 ovoji in presekom 1 dm^2 je vrtljiva okrog osi, ki gre skozi središče tuljave in je pravokotna na njeno geometrijsko os. Vztrajnostni moment tuljave okrog te osi je 0,5 kgm^2. Na os je pritrjena polžasta vzmet s koeficientom 50 Nm. V ravnovesni legi je geometrijska os tuljave vzporedna z magnetnim poljem z gostoto 0,5 T. Tuljavo zasučemo za kot 5 ° iz ravnovesne lege in spustimo, da zaniha. Zapiši časovni potek inducirane napetosti med priključkoma tuljave! Kolikšna je amplituda napetosti?
3. Na vzmeti s koeficientom 2 N/cm visi utež iz mehkega železa z maso 10 dag. Pod utežjo je tuljava z induktivnostjo 2 H, vezana s kondenzatorjem v električni nihajni krog, v katerem vzdržujemo lastno električno nihanje. Kolikšna naj bo kapaciteta kondenzatorja, da bo magnetno polje tuljave povzročilo lastno nihanje uteži?

4. Sistem enakih kondenzatorjev na sliki je naelektren tako, da je na kondenzatorju C_x naboj 1 nC. Kolikšen pa je naboj na tem kondenzatorju, če med plošči počasi potisnemo snov z dielektričnostjo 9? Kolikšen naboj se pretoči po vodniku Y? Kolikšno delo opravimo pri potiskanju dielektrika, če je kapaciteta C enaka 1 nF?

Skupina D – delci in valovanja

1. Potapljač nosi očala z dioptrijo –2. Med potapljanjem ko nima svojih očal bi rad dobro videl predmete oddaljene do 5 m, zato pred masko pritrdi nova očala tako, da je med masko in očali plast vode. Kolikšna naj bo dioptrija teh očal? Lomni količnik vode je 1,33, stekla pa 1,5.
2. V točki A na sliki se nahaja svetilo, ki seva koherentno svetlobo z valovno dolžino 600 nm. Med točkama A in B je zaslon, zato točko B doseže le svetloba, ki se siplje na uklonski mrežici (glej sliko). Razdalja a je enaka 10 cm. Kako se naj spreminjajo razdalje med režami na mrežici, začenši od točke C, da bo jakost svetlobe v točki B največja? Kolikšna je razdalja med deveto in šestnajsto zarezo? *Matematični poduk:* $\sqrt{1 \pm x} = 1 \pm \frac{1}{2}x - \frac{1}{8}x^2 \pm \ldots$



3. Dve enaki sonci z radijema $R = 15 \cdot 10^6$ km krožita okrog skupnega težišča, tako da je razdalja med njima 40 R. Počrnjen satelit z majhno toplotno kapaciteto in dobro toplotno prevodnostjo se giblje po krožnici z radijem $r = 10\,R$ okrog enega od obeh sonc v isti ravnini kot krožita sonci. Obhodni čas satelita je 1 leto in je veliko manjši od obhodnega časa obeh sonc. Zapiši, kako se spreminja temperatura satelita s časom! Gostota svetlobnega toka v razdalji r od središča vsakega od sonc je $j = 1\ \mathrm{kW/m^2}$. Kolikšna je največja in kolikšna najmanjša temperatura satelita?
4. Rentgensko svetlobo z dobro določeno valovno dolžino dobimo pri prehodu elektrona z notranje lupine $n = 2$ na nezasedeno stanje v lupini $n = 1$ pri atomih z večjim vrstnim številom Z.

a) Oceni energijo fotona in valovno dolžino svetlobe, ki nastane pri takšnem prehodu v atomu Na ($Z = 11$) ob predpostavki, da elektron na lupini $n = 2$ „čuti" naboj jedra zmanjšan za naboj preostalega elektrona na lupini $n = 1$. Če pa je lupina $n = 1$ zasedena z dvema elektronoma, pa vsak od njiju „čuti" le polovico naboja drugega.

b) Svetloba, ki nastane pri tem prehodu, lahko ionizira drug atom. Kolikšno sme biti največ vrstno število drugega atoma, da bo lahko prišlo do ionizacije z notranje lupine z $n = 1$?

Fizikalni poduk: Če okoli jedra z nabojem Ze_0 kroži le en elektron, so energijski nivoji atoma podani z $E_n = E_0 Z^2/n^2$, $E_0 = 13{,}6$ eV, $n = 1, 2, 3, \ldots$. $hc_0 = 1240$ eV·nm.

SLIKOVNA KRIŽANKA - MATEMATIČNI POJMI
Rešitev iz P-5

NALOGE Z IZBIRNEGA TEKMOVANJA ZA 4. REPUBLIŠKO TEKMOVANJE IZ LOGIKE

7. in 8. razred osnovne šole

1. **Rop.**

   Tri ženske so zasliševali zaradi ropa zlatarne. Ena je oropala zlatarno, druga ji je pomagala, tretja pa je bila nedolžna. Vsako od naslednjih treh izjav je dala ena od teh žensk:

   1. Ana ni pomagala pri ropu.
   2. Breda ni roparka.
   3. Cilka ni nedolžna.

   * Nobena od trditev se ne nanaša na žensko, ki jo je povedala.
   * Nedolžna ženska je dala vsaj eno izjavo.
   * Samo nedolžna ženska je govorila resnico.

   Katera od treh žensk je oropala zlatarno?

2. **Drevo.**

   Ob praznovanju občinskega praznika so izbrali pet brhkih deklet: Hildo Hrastnik, Lenko Lipovec, Bojano Breznik, Janjo Javornik in Sonjo Smrekar, ki naj bi posadila deset mladih dreves: dva hrasta, dve lipi, dve brezi, dva javora in dve smreki. Vsako dekle naj bi zasadilo dve drevesi različne vrste, tako da ime nobega od teh dreves ni vsebovano v njenem priimku.

   * Dekleti, ki imata v priimkih skriti imeni dreves, ki jih je zasadila Janja Javornik, sta posadili smreki.
   * Dekleti, ki imata v priimkih skriti imeni dreves, ki jih je posadila Lenka Lipovec, sta posadili brezi.
   * Bojana je posadila en hrast in eno smreko. Kateri drevesi je posadila Hilda Hrastnik?

3. **Hokejski turnir.**

   Na turnirju je vsaka od petih ekip A, B, C, D, E igrala z vsako drugo natanko enkrat. Naslednja razpredelnica kaže nekatere podatke o izidih.

	število tekem	zmage	porazi	dani goli	dobljeni goli
A	3	2	0	7	0
B	2	2	0	4	1
C	3	0	1	2	4
D	3	1	1	4	4
E	3	0		0	

   Povej rezultate odigranih tekem!

1. in 2. letnik srednjih šol

1. **Ropar.**
   Eden od treh osumljenih, Andrej, Boris ali Ciril je izvršil rop. Na zaslišanju je vsak dal po eno izjavo, ki se ne nanaša nanj. Prva izjava je bila:
   * Andrej je nedolžen.

   Sledili sta še dve izjavi, vendar ne nujno v tem vrstnem redu:
   * Boris je povedal resnico.
   * Ciril je lagal.

   Kdo je ropar, če vemo, da je dal prav on lažno izjavo?
2. **Hazarderji.**
   Štirje prijatelji, navdušeni hazarderji, vsako nedeljo stavijo na konjskih dirkah. To nedeljo so Andrej, Boris, Dare in Izidor stavili na vrstni red štirih najhitrejših konj.
   Boris je zadel uvrstitvi dveh konj, njegova napoved pa je bila: 1. Strela, 2. Blisk, 3. Orkan, 4. Nevidni.
   Daretova razvrstitev je bila: 1. Nevidni, 2. Strela, 3. Blisk, 4. Orkan. Posrečilo pa se mu je uganiti le uvrsitev enega konja.
   Andrej je mislil, da se bosta Blisk in Nevidni uvrstila drug za drugim, pa se je motil.
   Izidor pa je na dirki obogatel, saj je uganil vrstni red. Kakšen?
3. **Šest moštev.**
   Šest moštev, A, B, C, D, E in F je igralo vsako z vsakim drugim po eno tekmo. Ko je bilo nekaj tekem že odigranih, je bila razpredelnica takale:

	število tekem	zmage	porazi	dani goli	dobljeni goli	točke
A	2	1		4	2	
B	4			1	4	3
C			1		7	7
D	3			1	5	3
E					7	
F	5			2		7

Za zmago dobi moštvo dve točki, za poraz nič in za neodločen izid eno točko.

Ugotovi, katere tekme so že odigrane in kako so se končale?

3. in 4. letnik srednjih šol

1. **Idealen fant za Marijo.**

   Marijin idealen fant je visok, temen in prijazen. Marija pozna štiri fante: Andreja, Borisa, Cirila in Davida. Samo eden od četverice ima vse značilnosti, ki jih Marija ceni.

   * Natančno trije iz četverice fantov so visoki, dva sta temna in samo eden je prijazen.
   * Vsak od fantov ima vsaj eno potrebno značilnost.
   * Andrej in Boris imata podobno barvo polti.
   * Boris in Ciril sta enako visoka.
   * Ciril in David nista oba visoka.

   Kateri fant ima vse potrebne značilnosti?

2. **Karte na mizi.**

   Osem kart je položenih z licem navzdol, tako kot je prikazano na diagramu.

		1	
2	3	4	
	5	6	7
		8	

   Za te karte velja:

   * Vsaj ena od kart je kraljica.
   * Vsaka kraljica leži med dvema kraljema.
   * Vsaj en kralj leži med dvema fantoma.
   * Noben fant ne meji na kraljico.
   * Natanko ena karta je as.
   * Noben kralj ne meji na asa.
   * Vsaj en kralj meji na kralja.
   * Vsaka karta je kralj, kraljica, fant ali as.

   Katera od oštevilčenih osmih kart je as?

* Karta je med dvema kartama, če se vsake od njiju dotika vzdolž ene starnice in vse tri ležijo v isti vrstici ali stolpcu.

** Dve karti mejita, če se dotikata vzdolž ene stranice.

3. **Pet ekip.**

   V naslednji razpredelnici so podana nekatera dejstva s turnirja petih

	število tekem	zmage	porazi	neodločeno	dani goli	dobljeni goli
A	3	0		2	3	4
B	2		1	0	3	0
C	2		1		1	5
D				2		2
E	2		1		0	

ekip, v katerem naj bi vsaka ekipa igrala z vsako drugo točno enkrat potem, ko je odigranih nekaj tekem. Pri tem je ena številka napačna. Poišči napačno številko in rezultate odigranih tekem!

Aleša Mižigoj, Nežka Mramor-Kosta

KOLIKO JE STAR ANDREJ?

Če bi bil Andrej dve leti mlajši, kot bi bila stara Andreja, če bi bila Andreja dve leti starejša, kot bi znašala polovica Andrejevih let, če bi bil Andrej dve leti mlajši od dvakratne Andrejine starosti, če bi bila Andreja dvakrat toliko stara, kot je Andrej, potem bi bil on deset let starejši, kot je sedaj.

Ugotovite Andrejevo starost?

Janez Aleš

ZGODOVINA ZNANOSTI V KNJIGAH SIGMA

Matematika

27. Struik D.J., Kratka zgodovina matematike (predvsem kratka zgodovina matematikov) 260 str.
36. Devide V., Matematika skozi kulture in epohe, (prevod hrvaškega originala), 182 str.

Fizika

34. Laue M., Kratka zgodovina fizike (prevedel in priredil Janez Strnad), 148 str.

Astronomija

32. Weinberg S., Prve tri minute (opis novejših teorij o nastanku vesolja), 184 str.
35. Milanković M., Kratka zgodivina astronomije, 1. del Od njenih prvih začetkov do leta 1727, 180 str.
42. Ševarlić B.M., Kratka zgodovina astronomije, 2. del Od Newtona do današnjih dni, 180 str.

Cena knjig je 100.00 din (80.00 din).

4. REPUBLIŠKO TEKMOVANJE IZ LOGIKE

Četrto republiško tekmovanje iz logike je bilo 21. oktobra 1989 na Pedagoški akademiji v Ljubljani. Udeležilo se ga je skupaj 139 učencev sedmega in osmega razredav osnovne šole in 179 dijakov srednjih šol, ki so se najbolje odrezali med več kot 3000 udeleženci izbirnih tekmovanj. Med njimi je bilo tudi 70 dijakov Znanstvenega liceja F. Prešerna v Trstu.

Tekmovalce je v imenu prof. Raymonda Smullyana, po katerem se tekmovanje imenuje, pozdravila gospa Judith Buncher, direktorica Ameriškega kulturnega centra v Ljubljani, poleg nje pa še dekan Pedagoške akademije in predstavniki delovne organizacije Metalka (ta je generalni pokrovitelj tekmovanj iz logike), Skupnosti za zaposlovanje in Zavoda za šolstvo.

Medtem ko so tekmovalci reševali naloge, so imeli mentorji razgovor o tekmovanju in predstavitev knjige *Dekle ali tiger?*. Trideset mentorjev je dobilo knjižne nagrade za dosedanje delo. Dogovorili smo se, da v prihodnje organiziramo tekmovanje tudi za študente, na osnovnošolskem nivoju pa tudi za 5. in 6. razrede.

Komisije, ki so jih vodili dr. Peter Legiša, dr. Neža Mramor- Kosta, Jasna Bratinič, Marija Božnar, Sašo Strle, Anton Biazzico, Alenka Kavčič in Edi Vovk, so sestavljali študentje elektrotehnike, računalništva in matematike.

Najbolje uvrščeni učenci so bili:

V sedmem razredu:
Peter TRKMAN, OŠ D. Kumar Ljubljana, Denis GODEŠA, OŠ A. Jakhla, Ljubljana, Tomaž RAČIČ, OŠ F. Bevka, Ljubljana, Matjaž ŠMALC, OŠ D. Jereba, Slovenske Konjice, Alenka STEPIŠNIK, I.O.šola, Celje, Manca CIRK, OŠ F. Prešerna, Kranj, Saša ZAMAN, OŠ S. Kosca, Ljubljana, Sašo ŽIVANOVIČ, OŠ V. Šlander, Polzela, Erik RENKO, OŠ D. Ketteja, Ilirska Bistrica, Grega ČURČIJA, OŠ J. Kersnika Brdo, Lukovica.

V osmem razredu:
Iztok KAVKLER, OŠ F. Roša, Celje, Petra IPAVEC, OŠ Komenda-Moste, Teja TAMŠE, OŠ F. Roša, Celje, Urban MRAK, OŠ I. Groharja, Škofja Loka, Metka DEMŠAR, OŠ V. Vodnika, Ljubljana, Maja POHAR, OŠ X. SNOUB Ljubljanske, Ljubljana, Nika NOVAK, OŠ E. Kardelja, Ljubljana, Simona SEMENIČ, OŠ Ajdovščina, Dobravlje, Vesna ZADNIK, OŠ I. Novaka - Očka, Ljubljana, Andrej ERHARTIČ, OŠ I. Cankarja, Maribor.

V prvem letniku srednjih šol:
Urša DRČAR, SENŠRM Kamnik, Aleš KEBER, SŠTNPU Ravne, Matej SO-

TLAR, STNŠ Postojna, Barbara REBEC, STNŠ Postojna, Benjamin PEZDIR, SŠR Ljubljana, Aljoša OCEPEK, SŠTNPU Ravne, Gordana WOZNIAK, SNŠ M. Zidanška, Maribor, Andrej PIRC, SNŠ M. Zidanška, Maribor, Miha ROMIH, SŠNMEU Trbovlje, Boštjan SIRNIK, SPNMŠ Koper.

V drugem letniku srednjih šol:
Hiacinta PINTAR, SŠPRNMU Kranj, Tomaž SEŠEK, SNŠ Ljubljana, Janja KRISTANC, SŠPRNMU Kranj, Krešimir MACAN, SŠEK Črnomelj, Marko KUKRIKA, SNŠ Ljubljana, Matjaž KOTNIK, SNŠMZ Maribor, Borut JANŠA, SŠPRNMU, Kranj, Nina MILAČ, SNŠ Ljubljana, Neven GRŽANIČ, SPNMŠ Koper, Edi ŠUC, TSC B. Brelih, Nova Gorica.

V tretjem letniku srednjih šol:
Mirjana TODOROVIČ, SŠPRNMU, Kranj Bojan KVERH, ŠC Vojvodina, Tolmin, Marko PAVLIŠIČ, SŠEK, Črnomelj, KRAMAR MARJETA, SNŠ Ljubljana, Sašo BALŠIČ, SŠEK Črnomelj, Matjaž KAVAR, CSUI Jesenice, Vladimir BENSA, NSC Nova Gorica, Vladimir BAN, SŠEN Ljubljana, Jana JELENC, SŠ J. VEGE, Idrija, Jana MAPOŠEK, SŠTNPU Ravne.

V četrtem letniku srednjih šol:
Aleš ČASAR, SCTPU Murska Sobota, Marko KERN, SŠPRNMU Kranj, Gregor DOLINAR, SŠPRNMU Kranj, Mitja ŠVAB, Licej F. Prešerna, Trst, Aleš GORNJEC, SŠTNPU Ravne, Boris PETKOVIČ, SŠTZU Novo mesto, Erazem POLUTNIK, STŠMT Celje, Nevenka VELIKONJA, NSC Nova Gorica, Jure DOBNIKAR, SNŠ M. Zidanška, Maribor, Sašo REBOLJ, SENŠRM Kamnik.

Naloge za 7. in 8. razred OŠ

1. **Pretep v družini.** V štiričlanski družini, kjer sta razen staršev še sin in hči, je ena oseba natepla drugo osebo, en član je to opazoval, četrti pa ni bil prisoten.
   1. Odsotni in priča sta različnega spola.
   2. Najstarejši član in priča sta različnega spola.
   3. Najmlajši in žrtev sta različnega spola.
   4. Odsotni je starejši od žrtve.
   5. Oče je najstarejši v družini.
   6. Pretepač ni najmlajši član.

   Kdo je bil tepen?
2. **Tekmovanje.** Andrej, Borut, Cene in Drago so tekmovali med seboj. Na tekmovanju ni bilo delitev mest. Po tekmovanju so kot znani šaljivci dali naslednje izjave:
   Andrej:

1. Bil sem neposredno pred Borutom.
2. Nisem bil prvi.

Borut:
1. Bil sem neposredno pred Cenetom.
2. Nisem bil drugi.

Cene:
1. Bil sem neposredno pred Dragom.
2. Nisem bil tretji.

Drago:
1. Bil sem neposredno pred Andrejem.
2. Nisem bil zadnji.

* Samo dve od zgornjih izjav sta resnični.
* Fant, ki je zmagal, je dal vsaj eno resnično izjavo.

Kdo je zmagal?

3. **Šahovski turnir.** "Kako si se kaj odrezal na šahovskem tekmovanju?" je vprašal Boštjan Primoža, ko sta se po dolgem času spet srečala. "Ah, ah, zelo slabo," je nejevoljno odvrnil Primož, "bil sem zadnji v svoji skupini." "Ha, ha! To pa res ni preveč dobro," se je nasmejal Boštjan. "Tekmovanje je poteklo takole: igralci smo bili razdeljeni v dve skupini. Vsak igralec je igral z vsakim iz svoje skupine tri igre. Vsak dan je bilo odigranih skupno 9 iger, tako da smo turnir končali v 9 dneh. No, seveda imam zate - pametnjakovič - vprašanje: Koliko tekmovalcev se je udeležilo turnirja?" Boštjanu je nasmeh precej zamrl, zanj je bil to pretrd oreh. Ga boš strl ti?

Naloge za 1. in 2. letnik srednjih šol

1. **Dva vohuna.** Imamo dva vohuna: eden je zanesljiv in so vsa njegova obvestila točna, drugi pa včasih javi kaj napačnega. Nekoč sta poslala naslednji poročili:

Sporočilo vohuna A:
* Natanko ena od trditev W, X in Y je resnična.
* Natanko ena od trditev X, Y in Z je resnična.
* Natanko ena od trditev W in Z je napačna.

Sporočilo vohuna B:
* Natanko ena od trditev W, X in Y je resnična.
* Natanko ena od trditev X, Y in Z je resnična.
* Natanko ena od trditev W, Y in Z je resnična.

Ali lahko ugotovimo, kateri vohun ni zanesljiv?
Katere trditve izmed W, X, Y in Z so resnične?

2. **Sorodniki.** Osebe A, B, C, D in E so v medsebojnem sorodstvu. Štiri od njih so dale štiri resnične izjave:
   1. B je mojega očeta brat.
   2. E je moja tašča.
   3. C je brat mojega zeta.
   4. A je mojega brata žena.

   Vsaka omenjena oseba, na primer "moj oče", "mojega očeta brat", itd., je ena od oseb A, B, C, D oz. E.
   Kdo je dal posamezne izjave?
3. **Poznanstva.** Sedem ljudi A, B, C, D, E, F in G je o medsebojnih poznanstvih menilo tole:
   * A je trdil, da se pozna z ostalimi šestimi,
   * B, da se pozna s petimi
   * C, da se pozna s štirimi,
   * D, da se pozna s tremi,
   * E in F, da se poznata z dvema in
   * G, da se pozna z enim.

   Če je kvečjemu eden lagal, in to ne oseba F, z navedbo manjšega števila poznanstev od dejanskega, katere osebe so gotovo govorile resnico?

Naloge za 3. in 4. letnik srednjih šol

1. **Ali si dober detektiv?** Alica, njen mož, njun sin, njuna hči in Aličin brat so vpleteni v umor. Eden od teh petih je ubil enega od ostalih štirih. Naslednja dejstva se nanašajo na omenjenih pet oseb:
   1. Ženska in moški sta bila skupaj v baru v času umora.
   2. Žrtev in morilec sta bila v času umora na obali.
   3. Eden od otrok je bil sam v času umora.
   4. Alica in njen mož nista bila skupaj v času umora.
   5. Žrtvin dvojček je nedolžen.
   6. Morilec je mlajši od žrtve.

   Kdo je žrtev?
2. **Družinsko drevo in resnica.** Janez, Jože, Nada, Lucija in Petra so dali naslednje izjave:

   Janez: Nada je moja žena. Jože je moj sin. Petra je moja teta.
   Jože: Lucija je moja sestra. Petra je moja mati. Petra je Janezova sestra.
   Nada: Nimam ne brata ne sestre. Janez je moj sin. Janez ima sina.
   Lucija: Nimam otrok. Nada je moja sestra. Janez je moj brat.

Petra: Janez je moj nečak. Lucija je moja nečakinja. Nada je moja hči.

Predpostavi še:

1. Vsak, ki ima vsaj enega brata ali sestro in ima vsaj enega otroka, vedno govori resnico.
2. Vsak, ki ima ali vsaj enega brata ali sestro ali vsaj enega otroka, govori izmenoma resnico in laž.
3. Tisti, ki nima ne bratov ne sestra in ne otrok, vedno govori laž.

Poišči resnične izjave in sorodstvene zveze teh petih ljudi!

3. **Hišne številke.**

Franci: "Tako kot midva, Peter, tudi tisti trije živijo v naši ulici, vsak v svoji družinski hiši. Vsota njihovih hišnih številk je ravno dvakratna tvoja hišna številka. Če pomnožimo njihove številke, pa dobimo 1260."
Peter: "To mi še ne omogoča, da bi ugotovil njihove hišne številke."
Franci: "Res je. Toda če bi vedel mojo številko, ki je mimogrede večja od vseh vaših, bi lahko uganil tudi njihove tri."
Poišči hišne številke vseh petih ljudi, če se oštevilčenje njihove ulice začne z 2 (in ne z 1) in Peter to ve.

Izidor Hafner in Neža Mramor

BEG IZ LABIRINTA – Rešitev s P-3, str. 176

V tretji številki letošnjega Preseka smo bralce povabili k programiranju bega iz labirinta. Dobili smo le eno rešitev, ki jo je poslal **Ivan Lisec** s SŠR iz Ljubljane.

Avtor je vhodni graf predstavil z matriko sosednjosti A, v kateri ima element A_{ij} vrednost -1, če točki i in j nista povezani, sicer pa vrednost 0. Nato med sprehodom po labirintu vrednost elementa A_{ij} povečamo za ena, brž ko prehodimo povezavo ij.

Avtorjev program, ki je napisan v turbo pascalu 4.0, smo preiskusili in nimamo večjih pripomb. Pripomniti bi veljalo le, da program ni pretirano prijazen z uporabnikom, saj moramo vnašati velike črke, ne smemo imeti večjega grafa kot 26 točk, pa tudi vnos preko zaslona je za večje grafe neprimeren.

Ivanu Liscu se za sodelovanje lepo zahvaljujejo.

Sandi Klavžar

Astronomski pozdrav nam je poslala naša redna bralka Tina Barbič. Pa ne samo to! Za vse, ki jih zanima astronomija in si morda želijo sodelovati na katerem od naslednjih astronomskih taborov, je prispevala naslednje poročilo. Objavljamo ga v celoti.

Dušica Boben

Sedmi mali astronomski tabor je letos potekal od 20. do 23. septembra v astronomskem observatoriju na Javorniku (nad Idrijo). Organiziral ga je profesor Kham, ki na naši šoli poučuje fiziko, poleg tega pa vodi astronomski krožek. Zelo sem bila vesela, da se mi je ponudila priložnost za moje prvo srečanje z astronomijo. Težko sem dočakala dan odhoda. Mladi astronomi smo se zbrali v sredo 20. septembra pred OŠ Prežihov Voranc v Ljubljani. Medkrajevni avtobus nas je odpeljal do Cola, od tam pa smo jo peš mahnili proti Pirnatovi koči na Javorniku. Cilj smo dosegli okoli 13. ure in kmalu začeli z našim delom, ki ga bom na kratko opisala.

Začeli smo z enostavnimi vajami: uporaba vrtljive zvezdne karte, Presekove zvezdne karte, uporaba astronomskih efemerid. Ko se je stemnilo, smo se odpravili proti bližnjemu observatoriju. Opazovalni pogoji so bili kar dobri, le veter je premočno pihal. Na jasi pred observatorijem nas je čakalo pet daljnogledov. Prvi večer smo opazovali planet Saturn. Marsikdo od nas je tisti večer prvič pogledal proti skrivnostnim zvezdam. Nameravali smo opazovati tudi Luno, vendar nas je okoli polnoči presenetila megla, zato smo svoja opazovanja zaključili. Opravili smo še nekaj meritev (približno izračunali, koliko zvezd vidimo na nebu brez daljnogleda) in okoli druge ure odšli spat.

Naslednjega dne smo dopoldne računali maso Zemlje in merili višino Sonca. Po kosilu nas je obiskal astronom Marijan Prosén in nam povedal nekaj o paralaksi. Drugi večer smo imeli v načrtu merjenje zornega polja daljnogleda, ker pa so bile vremenske razmere preslabe, smo v observatoriju risali graf vzhoda, kulminacije in zahoda Sonca ter kasneje HR diagram za zvezde.

Zadnji dan astronomskega tabora smo gledali in risali sončne pege, popoldne pa smo imeli predavanje o optiki. Predaval je Jože Kotnik. Zvečer nam vreme spet ni bilo naklonjeno, tako da smo z opazovanji začeli zelo pozno. Najprej smo daljnoglede usmerili proti Luni, potem pa smo opazovali še Plejade in planet Jupiter z njegovimi lunami.

Naslednje jutro smo vsi zaspani in utrujeni zapustili kočo in se z večjim zanimanjem za astronomijo vrnili v Ljubljano že kot pravi astronomski navdušenci.

12. MLADINSKI ASTRONOMSKI RAZISKOVALNI TABOR - JAVORNIK 89

Letos je bil na Javorniku nad Črnim vrhom nad Idrijo že dvanajsti Mladinski astronomski raziskovalni tabor. Organiziralo ga je Astronomsko društvo Javornik (ADJ), financiralo pa v veliki meri gibanje Znanost mladini, ki deluje v okviru Zveze organizacij za tehnično kulturo Slovenije (ZOTKS).

V času od 28. julija do 5. avgusta smo prebivali v Pirnatovi koči na Javorniku. Astronomske dejavnosti so potekale pretežno na Slovenskem ljudskem astronomskem observatoriju (SLAO), ki se nahaja na nadmorski višini 1150m, od Pirnatove koče pa je oddaljen okrogle četrt ure hoda.

Kočo smo astronomi popolnoma zasedli, saj se je tabora udeležilo 24 osmošolcev, srednješolcev in študentov, ki so jih vodili štirje izkušeni mentorji: Sonja Jejčič, Mirjana Galičič, Rado Klemenčič in Alen Varšek. Mnogi udeleženci so za tabor izvedeli prav iz Preseka. Tudi če bi bila koča večja, bi jo lahko napolnili, saj smo morali zaradi prostorskih omejitev zavrniti več kot trideset prijavljenih.

V svojih vrstah smo v okviru mednarodne izmenjave imeli tri goste iz ZRN. Tako da smo imeli odlično priložnost izpopolnjevanja tudi v nemščini in angleščini. Daleč najpomembnejša oseba na taboru pa je bila nedvomno kuharica Nada Rupnik, ki se je znala odlično prilagoditi našemu okusu in urniku. Astronomija namreč zahteva nočna opazovanja in temu primerno pozne zajtrke in kosila ter obilne večerje.

Za razliko od prejšnjih taborov je bil na tem poudarek na dobro pripravljenih skupnih predavanjih, za katera so udeleženci prejeli tudi skripta. Teme predavanj so bile: koordinatni sistem in časi v astronomiji, Sonce, Sončev sistem, meteorji, spremenljivke, galaksije, kozmologija, astrofotografija in digitalna obdelava posnetkov.

Predavanja smo imeli dopoldne, popoldne pa je bilo na vrsti delo v štirih skupinah: v skupini za astrofiziko, za astrofotografijo, Sončev sistem ter v skupini, ki je obravnavala osnove amaterske astronomije. Zvečer in ponoči pa – opazovanja. Seveda nam jo je večkrat zagodlo vreme, pa smo si popestrili večere z družabnimi igrami.

Udeleženci so se naučili ravnanja z daljnogledom, osnove orientacije na nebu in spoznali večino takrat vidnih ozvezdij. Opazovali so planet Saturn, galaksijo M31 v Andromedi, planetno meglico M57 v Liri, kroglasto kopico M13 v Herkulu in še mnoga manj znana nebesna telesa.

Opazovati pa je bilo mogoče tudi podnevi. Tako so mladi astronomi spremljali Sončevo aktivnost v času tabora. Opazili so, da je Sonce polno peg, ki se spreminjajo od dne do dne. Vsak se je tudi na lastne oči prepričal, da se Sonce vrti.

Ob slabem vremenu so imeli mentorji poleg družabnih iger pripravljene tudi številne teoretične naloge, tako da je vsak lahko našel nekaj zase. Naj naštejem le nekaj naslovov teoretičnih nalog: Gravitacijski zakon, Keplerjevi zakoni, Planckov zakon, Stefanov zakon, Rocheov zakon in Rocheov polmer, Navidezni in absolutni sij zvezd, Zvezdna paralaksa, Izsev zvezd, Dvozvezdja in spremenljivke, Teoretični modeli zvezd, Končne stopnje v razvoju zvezd (bele pritlikavke, nevtrosnkse zvezde, črne luknje), Dopplerjev pojav, Hubblov zakon.

Koliko je za koga tabor bil delovno srečanje, koliko pa počitnice na svežem gorskem zraku, smo preverili s kvizom, ki je zaključil tabor. Da pa obremenitev posameznikov ni bi bila prehuda, so v kvizu sodelovale skupine, ki so zvito odgovarjale na še bolj zvito postavljena vprašanja.

Namen tabora je bil omogočiti zainteresiranim prvi stik z astronomijo in jih vzpodbuditi k nadaljnjem ukvarjanju s to čudovito vedo. Menim, da je bil dosežen, saj se je mnogo udeležencev včlanilo v Astronomsko društvo Javornik. Danes so še vneti opazovalci, ki so že skrbno izdelujejo raziskovalne naloge, nekateri pa že prav resno razmišljajo o študiju astronomije ...

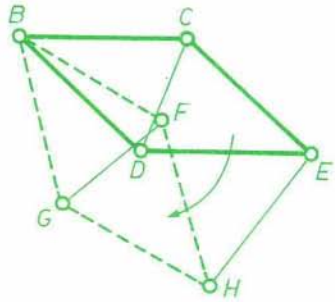
Odslej bodo podobni tabori le vsako drugo leto. Vmes pa bomo prirejali mednarodne astronomske tabore, na katerih bo le manjše število udeležencev iz Slovenije.

Aram Karalič

Galaksija M31 v ozvezdju Andromede (Foto skupina za astrofotografijo na astronomskem taboru l. 1987; f = 100 mm, čas osvetlitve 30 min, film Ilford HP-5, zaslonka 2.8)

REŠITVE NALOG

KOMBINATORNA GEOMETRIJA – Reš. nalog s str. 332



1. Pobarvajmo ravnino z belo, črno in modro barvo. Izberimo daljico BC dolžine 1 cm in privzemimo, da je točka B bele barve in točka C črne barve. Postavimo sedaj romb s stranico 1 cm tako, da bodo njegova oglišča B, C, D in E (slika 2). Zavrtimo romb okoli točke B, tako da se oglišče E premakne za 1 cm. Če sta dve izmed točk B, C in D ali B, F in G enake barve, smo našli rešitev. V nasprotnem primeru je ena izmed točk C in D ter F in G črne druga pa modre barve. Če je sedaj katerakoli izmed točk E ali H črna ali modra, smo našli rešitev. V nasprotnem primeru pa sta točki E in H beli in razdalja med njima je 1 cm.

2. Izberimo eno izmed 6 točk in jo imenujmo A. Vsaj tri izmed pet povezav z ostalimi točkami so enake barve, denimo modre. Označimo druga krajišča teh povezav z B, C in D. Če je vsaj ena izmed daljic BC, BD ali CD modre barve, smo že našli iskani trikotnik. Če pa so vse tri rdeče, je iskani trikotnik BCD.

3. Narišimo vse premice, ki jih določata 2 (ali več, če so kolinearne) točki izmed 1990 izbranih. Skozi izbrano točko T potegnimo vzporednice z vsemi premicami. Skozi točko T lahko potegnemo še premico p, ki je reazlična od vseh prejšnih. Premica p ima lastnost, da na poljubni njeni vzporednici leži največ ena izmed izbranih točk. Tako za vsako število $0 \leq k \leq 1990$ obstaja taka vzporednica q premici p, da na eni polravnini določeni s premico q leži k točk in na drugi $1990 - k$ točk. To velja tudi za $k = 995$.

4. Ploščina kroga je 660,52. Krog razdelimo na 661 enakih krožnih izsekov. Ploščina vsakega izseka je manj kot 1. Ker je vseh točk $1990 = 661 \cdot 3 + 7$, vsaj eden od izsekov vsebuje vsaj štiri točke. Ploščina četverokotnika, ki ga določajo te štiri točke je manj kot 1.

5. Kvadrat razrežemo na štiri enake kvadrate, nato enega izmed manjših kvadratov zopet razrežemo na štiri enake kvadrate. Postopek nadaljujemo.

Število kvadratov se na vsakem koraku poveča za 3. Tako lahko dani kvadrat razrežemo na $3k+1$ delov. Če vzamemo $k=663$ dobimo 1990.

6. Konveksen n–kotnik ($n \geq 3$) ima lahko največ 3 ostre kote. Vsota notranjih kotov je $\pi(n-2)$. Če bi imeli 4 ostre kote, bi bila njihova vsota manj kot 2π in vsaj eden od ostalih $n-4$ kotov bi moral biti večji od π.

Tomaž Košir

UČBENIKI IN PRIROČNIKI ZA OSNOVNO IN SREDNJO ŠOLO V LETU 1990/91

1. **ZBIRKE VAJ IZ ARITMETIKE IN ANALIZE ZA SREDNJE ŠOLE** (Ivan Štalec)
    1. razred, 100 str., 100.00 din (80.00 din)
    2. razred, 88 str., 100.00 din (80.00 din)
    3. razred, 204 str., 150.00 din (120.00 din)
    4. razred, 120 str., 100.00 din (80.00 din)
2. **MATEMATIČNE TABELE IN FORMULE** (Stanko Uršič) 96 str., 100.00 din (80.00 din)
3. **GEOMETRIJA ZA SREDNJE ŠOLE, 2. del** (Ivan Pucelj, Ivan Štalec) 176 str., 100.00 din (80.00 din)
4. **MALI PRIROČNIK OPERACIJSKEGA SISTEMA MS DOS** (Sandi Klavžar) 50 str., 75.00 din (60.00 din)
5. **PROGRAMSKI JEZIK PASCAL** (Bojan Mohar, Egon Zakrajšek) 196 str. 100.00 din (80.00 din)
6. **TURBO PASCAL** (Matija Lokar) 100 str., 125.- din (100.- din)
7. **ASTRONOMIJA ZA SREDNJE ŠOLE** (France Avsec, Marijan Prosén) 176 str., 100.00 din (80.00 din)
8. **KARTI SEVERNEGA IN JUŽNEGA NEBA 2,000 s katalogom** 28 str., 125.- din (100.- din)
9. **NAŠE NEBO IN ZEMLJA** (Pavla Ranzinger) 80 str., 50.00 din (40.00 din)
10. **KAKO REŠUJEMO MATEMATIČNE PROBLEME** (George Polya) 272 str., 100.00 din (80.00 din)

IZBIRNO TEKMOVANJE IZ LOGIKE – Reš. s str. 358

7. in 8. razred osnovnih šol

1. Recimo, da je prva izjava lažna, torej je Ana pri ropu pomagala. Ena od izjav mora biti resnična, na primer druga. Potem Breda ni roparka, torej mora biti nedolžna. Ampak druge izjave ni povedala Breda, torej mora ta izjava biti lažna in zašli smo v protislovje. Če pa je druga izjava lažna, so vse izjave lažne in spet smo v protislovju.
   To pomeni, da je prva izjava resnična: Ana ni pomočnica, pa tudi nedolžna ni (ker ni dala te izjave). Zato je Ana roparka. Cilka (ki je dala prvo in drugo izjavo) je nedolžna, Breda pa je pri ropu pomagala.
2. Nalogo najlaže rešimo s pomočjo razpredelnice. Na podlagi podatkov, lahko vanjo vnesemo:

	Hrast	Lipa	Breza	Javor	Smreka
Hilda	NE				
Lenka		NE	NE	DA	
Bojana	DA	NE	NE	NE	DA
Janja			DA	NE	NE
Sonja					NE

   Pravilno izpolnjena tabela pa izgleda takole:

	Hrast	Lipa	Breza	Javor	Smreka
Hilda	NE	DA	NE	DA	NE
Lenka	NE	NE	NE	DA	DA
Bojana	DA	NE	NE	NE	DA
Janja	NE	DA	DA	NE	NE
Sonja	DA	NE	DA	NE	NE

3. Rezultate vnesemo v tabelo. Pri tem bomo z Z označevali zmago, s P poraz, z N pa neodločen izid.

	A	B	C	D	E
A			0:0	3:0 (Z)	4:0 (Z)
B			3:1 (Z)		1:0 (Z)
C				1:1 (N)	
D					3:0 (Z)
E					

1. in 2. letnik srednjih šol

1. Nalogo najlaže rešimo tako, da pregledamo vse možnosti. Tako dobimo odgovor: ropar je Boris.
2. Če upoštevamo to, da se Blisk in Nevidni nista uvrstila skupaj, je možnih 6 različnih razvrstitev:

	1	2	3	4	5	6
prvi	N	N		B	B	
drugi			N			B
tretji	B			N		
četrti		B	B		N	N

Razvrstitev 1 odpade, ker je Dare pravilno uganil le eno uvrsti tev. Razvrstitvi 3 in 6 odpadeta zato, ker bi Dare ne imel nobene pravilne napovedi. Četrta razvrstitev zato odpade, saj bi v tem pri meru Dare pravilno napovedal dve uvrstitvi, ali pa nobene, ne pa ene. Od preostalih dveh razvrstitev lahko

le peto pravilno dopolnimo, vrstni red, ki ga dobimo, pa je: 1. Blisk, 2. Strela, 3. Orkan, 4. Nevidni

3. Rezultati odigranih tekem so:

	A	B	C	D	E	F
A			4:1			0:1
B			0:3	0:1	1:0	0:0
C				5:0	5:3	0:0
D						0:0
E						0:1
F						

3. in 4. letnik srednjih šol

1. Edini fant, ki ustrez vsem Marijinim željam, je Ciril.
2. Iz prve in druge trditve sledi, da je natanko ena od naslednjih trditev pravilna:

a) Tretja karta je kraljica in šesta karta je kraljica.
b) Samo tretja karta je kraljica.
c) Samo šesta karta je kraljica.
d) Samo četrta karta je kraljica.

V okviru a) ne moremo zadostiti tretjemu pogoju;

b) odpade, ker ne moremo zagotoviti, da sta hkrati izpolnjena tretji in sedmi pogoj;

pri c) mora nujno nastopiti ena od razporeditev:

		X	
K	D	K	
	K	D	K
		X	

		X	
K	D	K	
	X	D	X
		K	

Pri desni razporeditvi ne moremo zadostiti tretjemu pogoju, pri levi pa ne moremo hkrati zadostiti tretjemu in četrtemu pogoju.

Preostane torej d), pravilna razporeditev pa je:

		K	
F	A	D	
	F	K	F
		K	

3.* Ni mogoče, da bi moštvo B izgubilo in ne prejelo nobenega gola. Napaka je torej v B-jevi koloni "porazi" ali "dobljeni goli".

* Moštvo D je moralo odigrati 1 ali 3 tekme, da bo skupno število vseh odigranih tekem sodo. Ker pa je D dve tekmi igralo neodločeno, je moralo odigrati 3 tekme.
* Moštvo A je od treh odigranih tekem eno izgubilo. Moštvi A in D sta lahko igrali neodločeno, vendar sta morali igrati neodločeno tudi s C in E, zato C in E nimata nobene zmage. Skupaj imamo torej 4 poraze in največ tri zmage (dve pri B in eno pri D). Toda število zmag mora biti enako številu porazov. Napaka je torej v B-jevi koloni "porazi".
* Popravljena razpredelnica mora izgledati takole:

	število tekem	zmage	porazi	neodločeno	dani goli	dobljeni goli
A	3	0	1	2	3	4
B	2	2	0	0	3	0
C	2	0	1	1	1	5
D	3	1	0	2		2
E	2	0	1	1	0	

* Rezultate posameznih tekem so v tabeli:

	A	B	C	D	E
A		0:1 (P)	1:1 (N)	2:2 (N)	
B					2:0 (Z)
C				0:4 (P)	
D					0:0
E					

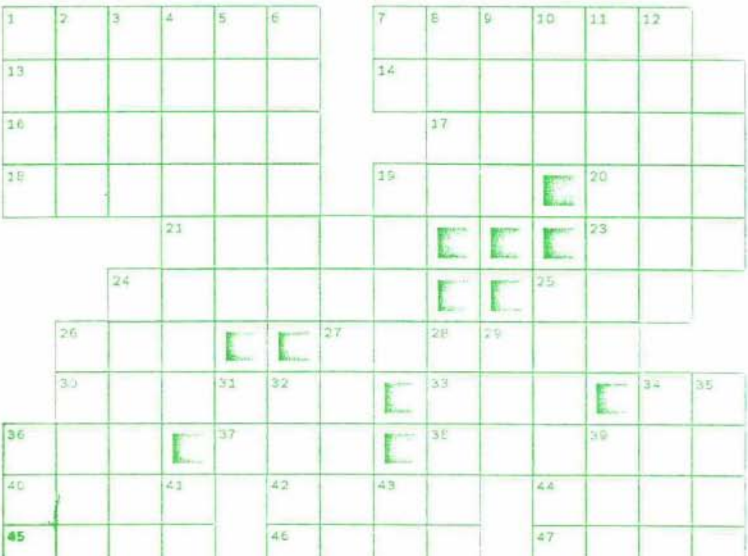
Aleša Mižigoj, Nežka Mramor-Kosta

KRIŽANKA "PLANETI NAŠEGA OSONČJA"

VODORAVNO: 1. prek 3000 m visok ugasli ognjenik na Japonskem, 7. *od Sonca najbolj oddaljen znani planet,* 13. *Soncu najbližji planet,* 14. *največji planet Osončja,* 16. *drugi največji planet Osončja z značilnimi kolobarji,* 17. na podlago prirasli morski ožigalkarji, 18. socvetje pri žitaricah, 19. dvojica, 20. oče, 21. eden največjih italijanskih pesnikov, 23. etui, tok, 24. ime šahista Korčnoja, 25. japonska oblika budizma, 26. poklic v proizvodnji kruha, 27. nemški matematik in svetovni šahovski prvak v letih 1894 do 1921, 30. zapis enakosti dveh matematičnih izrazov, 33. najvišji vrh v Zasavju, 24. sosedni črki abecede, 36. plesna figura pri četvorki, 37. veder tonski način v glasbi, 38. oblačilo, 40. *planet značilne rdečkaste barve,* 42. težak dežni oblak, 44. ime pevke Baez, 45. *sedmi planet po oddaljenosti od Sonca,* 46. jesenska žitarica, 47. prva črka grške abecede.

NAVPIČNO: 1. kulturno središče Sibirije, 2. ameriška filmska igralka (Patricia), 3. rastline, ki obrodi grozdje, 4. veda o zvoku, 5. kurji iztrebek, 6. ime pisatelja Hemingwaya, 7. različna soglasnika, 8. povečevalno steklo, 9. sila, ki zavira gibanje, 10. lahka mrežasta tkanina za zavese, 11. zdravnik, specialist za ušesne bolezni, 12. *s prostim očesom neviden, po oddaljenosti osmi planet,* 15. iranska denarna enota, 19. luknjica v koži, 22. prostor za sončenje v zdravilišču, 24. *sosedni planet, za Soncem in Luno najsvetlejši objekt na nebu,* 25. *edini planet našega osončja z živimi bitji,* 26. hrvaška oblika imena Peter, 28. železna priprava za spenjanje lesenih delov, 29. tretja potenca v matematiki, 31. zaporedni črki, 32. rečica v Hercegovini z zelo močnim izvirom, 34. večja lesena posoda, čebrica, 35. najdaljši pritok Une, 36. avstralski noj, 39. grški bog vetrov, 41. simbol za kositer, 43. avtomobilska oznaka Modriče.

Marko Bokalič



4. REPUBLIŠKO TEKMOVANJE IZ LOGIKE – Rešitve s str. 362

7. in 8. razred OŠ

1. Mati je natepla porednega sina.
2. Pravilen vrstni red je: 1. Cene, 2. Borut, 3. Andrej, 4. Drago.
3. Poglejmo razpredelnico:

Št. igralcev	2	3	4	5	6	7	8	n
Št. tekem	3	9	18	30	45	63	84	$\frac{n\times(n-1)\times 3}{2}$

Skupno je bilo odigranih $9 \times 9 = 81$ tekem. Ker so bili tekmovalci razdeljeni v dve skupini, dobimo $81 = 18 + 63$, torej je bilo v eni skupini 7 tekmovalcev, v drugi pa 4. Na turnirju je sodelovalo $4 + 7 = 11$ tekmovalcev.

1. in 2. letnik srednjih šol

1. Prvi dve izjavi vohunov sta enaki. Ker eden govori resnico, sta obe resnični. Torej mora veljati
   * Izjavi W in Z sta obe resnični, izjavi X in Y pa obe neresnični, ali
   * Izjavi W in Z sta obe neresnični, ena od izjav X in Y pa je resnična.

   In vendar vohun A trdi, da je natanko ena izmed izjav W in Z neresnična. To ne more biti res, torej je A nezanesljiv. Vohun B pa nam pove, da je resnična samo izjava Y.
2. Prvo izjavo je dal D, drugo B, tretjo E in četrto C.
3. Ena oseba mora lagati, kajti število vseh poznanstev mora biti sodo - vsako srečanje da dve poznanstvi. Ena oseba je torej navedla premalo znancev. Oseba A je gotovo govorila resnico, ker več kot 6 poznanstev ne more imeti. Če bi lagala oseba B, bi morala lagati tudi oseba G, to pa nam da preveč lažnivcev. Torej tudi B govori resnico. Ker F ni lažnivec, pozna samo osebi A in B. Oseba C pozna vsaj štiri druge osebe, med katerimi ni osebe F, sta pa osebi A in B. Torej C pozna dva izmed D, E in G. Če C pozna E, laže E, če C pozna G, pa laže G. Če bi C poznala G in E, bi bila oba lažnivca, kar ni res. Torej C pozna enega od njiju, ki je tudi edini lažnivec. Oseba D torej govori resnico.

3. in 4. letnik srednjih šol

1. Ker Alica v času umora ni bila skupaj z možem in je bil eden od otrok sam, imamo dve možnosti: Aličin mož je bil v baru in Alica na obali ali pa obratno. Če je bil v baru Aličin mož, je bila z njim njegova hči. Otrok, ki je bil sam, je sin, na obali pa sta bila Alica in njen brat. Torej je eden od teh dveh žrtev, drugi pa morilec. Toda po 5. podatku ima žrtev dvojčka, ki je nedolžen. To pa je nemogoče. Torej je bil Aličin mož na obali, Alica pa v baru z bratom ali sinom. Če je bila z bratom, potem je bil njen mož na obali z enim od otrok. Mož ni mogel biti žrtev, ker med naštetimi osebami nima dvojčka, torej bi moral biti morilec, žrtev pa otrok. Toda to ni mogoče, ker je morilec mlajši od žrtve. Alica je bila torej v baru s sinom. Na obali sta bila Aličin mož in brat. Ker ima žrtev dvojčka, je to Aličin brat, morilec pa Aličin mož.
2. Resnične izjave so:
   * Vse Janezove izjave.
   * Prva in tretja Nadina izjava.
   * Prva in tretja Lucijina izjava.
   * Vse Petrine izjave.

   Sorodstvene vezi pa so takele: Nada je Janezova žena, Jože je njegov sin, Petra pa njegova teta. Lucija je Janezova sestra in Nada je Petrina hči.
3. Število 1260 razstavimo na prafaktorje:

   $$1260 = 2 \times 2 \times 3 \times 3 \times 5 \times 7$$

   Ker je vsota tistih treh števil soda, mora biti ena številka soda, dve pa lihi. Med vsemi takimi možnimi vsotami je prava tista, do katere pridemo na več načinov, kajti Peter ve, kolikšna je vsota, saj pozna svojo hišno številko, pa pravi, da številk ne more ugotoviti. Med vsemi možnimi vsotami, je taka le 48. Petrova hišna številka je 24, za druge tri pa imamo naslednje možnosti:

   $$4, 9, 35 \quad \text{ali} \quad 5, 7, 36$$

   Peter bi lahko iz Francijeve hišne številke sklepal, katera možnost je prava le, če ta številka izključi eno od obeh možnosti, torej samo takrat, kadar nastopa v spisku. Ker je Francijeva številka največja, mora biti 36. Hišne številke preostalih treh so 4, 9 in 35.

Izidor Hafner in Neža Mramor

9. REPUBLIŠKO IN PODROČNO TEKMOVANJE IZ FIZIKE ZA OSNOVNOŠOLCE - Rešitve nalog s str. 344

Področno tekmovanje

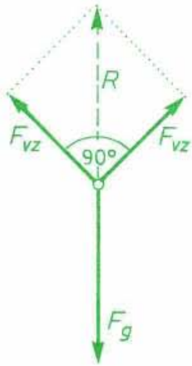
7. razred

1.a) Ker je gostota aluminija večja, je pri enakih masah prostornina aluminija manjša in prostornina votline v tej kocki večja.

b) $V_{Al} = a^3 - V_{vot} = 0{,}025\ \mathrm{dm}^3$. $m_{Al} = \rho_{Al} \cdot V_{Al} = 0{,}067$ kg. Masa lesene kocke je enaka, odtod sledi prostornina lesa: $V_{les} = \frac{m}{\rho_{les}} = 0{,}11$ dm^3. Prostornina manjše votline je razlika med prostorninama kocke in lesa: $V = a^3 - V_{les} = 0{,}01\ \mathrm{dm}^3$.

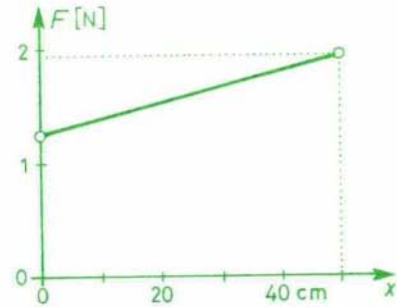
c) Ker sta povprečni gostoti kock manjši od gostote vode, obe kocki plavata.

2.a) Na obroček delujeta sili obeh vzmeti F_{vz} in sila vrvice, ki je enaka teži klade F_g.



b) Ker obroček miruje, je vsota vseh sil nanj enaka nič. Zato mora biti rezultanta obeh sil vzmeti enako velika kot teža klade. Silo vzmeti izračunamo iz dolžine vzmeti. Pravokotni trikotnik, ki ga tvorita obe vzmeti in vodoravnica (glej sliko pri nalogi), narišemo v primernem merilu, npr. 1 cm narišemo kot 1mm. Na skici potem izmerimo dolžino vzmeti in dobimo 28 cm. Vidimo, da se je vzmet raztegnila za 8 cm. Ker je za raztezek 5 cm potrebna sila 10 N, je za raztezek 8 cm potrebna sila 16 N. Sila vzmeti je torej 16 N. Z načrtovanjem sil v primernem merilu (glej rešitev 2 a), dobimo rezultanto obeh sil vzmeti, $R = 23$ N. Torej je tudi teža klade 23 N, masa klade pa 2,3 kg. Tisti, ki že poznajo Pitagorov izrek, lahko izračunajo dolžino vzmeti in rezultanto obeh sil vzmeti brez načrtovanja.

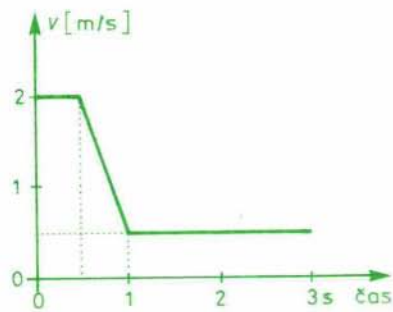
3.a) $F = \sigma h S_b = 10\ \mathrm{N/dm^3} \cdot 2{,}0\ \mathrm{dm} \cdot 6\ \mathrm{cm^2} = 1{,}2\ \mathrm{N}$. Izračunamo še končno višino vode v posodi: $h' = h + S_b l / S_p = 20\ \mathrm{cm} + 12.5\ \mathrm{cm} = 32.5\ \mathrm{cm}$ in končno silo: $F' = \sigma h' S_b = 1{,}95\ \mathrm{N}$. Sila se med premikanjem bata linearno spremeni od začetne do končne vrednosti.



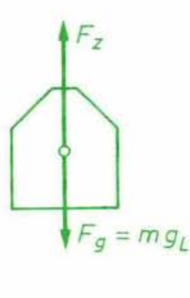
4. Skupni prostorninski tok za eno gospodinjstvo je: $\Phi = 0{,}5\ \mathrm{dl/s} \cdot 20\ \mathrm{min/dan} \cdot 3 + 100\ \mathrm{l}/2\ \mathrm{dni} + 10\ \mathrm{l} \cdot 12/\mathrm{dan} = 180\ \mathrm{l/dan} + 50\ \mathrm{l/dan} + 120\ \mathrm{l/dan} = 350\ \mathrm{l/dan}$. Ker je gospodinjstev 1000, je skupni tok $350\ \mathrm{m^3/dan} = 4\ \mathrm{l/s}$.
5. Da dvignemo opeko iz vode, jo moramo dvigniti za h = 30 cm, pri čemer je sila vzgona $F_V = \sigma S a$ in opravljeno delo $A = \sigma S a h = 4{,}8\ \mathrm{J}$. Na koncu je lega težišča vode za višino opeke nižja. $\Delta W_p = -mga = -\rho S h g a = -4{,}8\ \mathrm{J}$.

8. razred

1.a) Gibanje na odsekih AB in CD je enakomerno, zato je hitrost $v_{AB} = 1\ \mathrm{m}/0.50\ \mathrm{s} = 2.0\ \mathrm{m/s}$ in $v_{CD} = 1\ \mathrm{m}/2.0\ \mathrm{s} = 0.5\ \mathrm{m/s}$. Na odseku BC je gibanje enakomerno pojemajoče, zato se hitrost enakomerno zmanjša od 2.0 m/s na 0.5 m/s, kot kaže diagram na sliki.



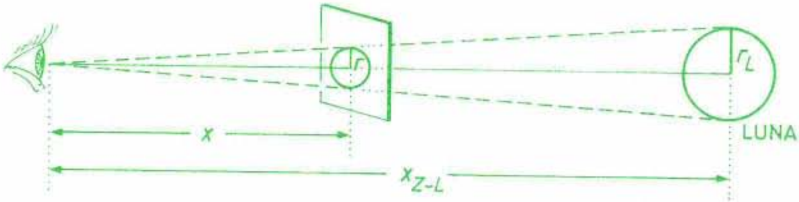
b) Gibanje na odseku BC je enakomerno pojemajoče, zato je razdalja BC enaka: $s_{BC} = v_{sr} \cdot t = 1{,}25\ \mathrm{m/s} \cdot 0.5\ \mathrm{s} = 0.63\ \mathrm{m}$.



2.a F_z zaviralna sila
$F_g = mg_L$ teža na Luni

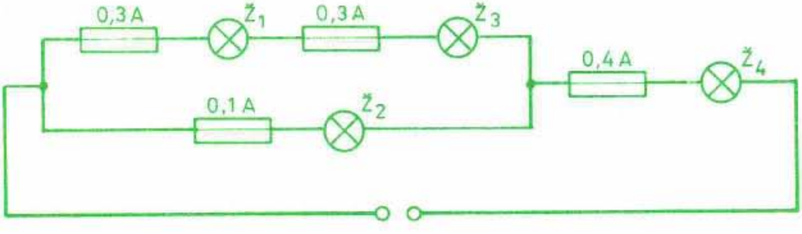
b) Gibanje je enakomerno pojemajoče. Hitrost se enakomerno spreminja od $v_1 = 50$ m/s do $v_2 = 0$. Pot izračunamo iz enačbe: $s = v_{sr} \cdot t = (v_1/2) \cdot t$, odtod sledi $t = 2s/v_1 = 80$ s. Pojemek je $a = \Delta v/t = (50$ m/s)/80 s $= 0{,}63$ m/s^2. Vsota vseh zunanjih sil na vesoljsko ladjo je $F_Z - F_g$. Iz Newtonovega zakona $F_Z - F_g = ma$ dobimo zaviralno silo $F_Z = F_g + ma = mg/6 + ma = 2300$ N. Nalogo lahko rešimo tudi z izrekom o kinetični in potencialni energiji.

3. Ena od možnih rešitev: Luno opazujemo skozi okroglo odprtino. Z luknjačem lahko napravimo luknjo v papirju ali pa uporabimo kar enega od krogov na posebnem trikotniku. Zaradi podobnosti trikotnikov velja (glej sliko):



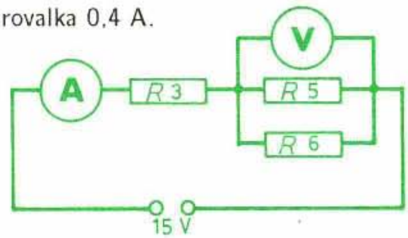
$r/x = r_L/x_{Z-L}$. Sledi $r_L = r.x_{Z-L}/x$. Izmerimo x in r ter izračunamo polmer Lune r_L.

4.a)



b) Odveč je ena varovalka 0.3 A in varovalka 0.4 A.

5. Zaradi dveh kratkih stikov tok ne teče skozi upornike R_1, R_2, R_4. Vezje je torej sestavljeno iz vzporedno vezanih upornikov R_5 in R_6 in k njima zaporedno vezanega upornika R_3.



Ker je upor vsakega upornika 1000Ω , je skupni upor upornikov R_5 in R_6 500Ω , skupni upor vseh treh upornikov pa 1500Ω . Ampermeter kaže tok $I = U/R = 15\ \mathrm{V}/1500\Omega = 10$ mA. Skozi upornika R_5 in R_6 tečeta enaka tokova, skozi vsakega 5 mA. Voltmeter kaže napetost $U = I_{R_5} \cdot R_5 = 5\ \mathrm{mA} \cdot 1000\Omega = 5$ V.

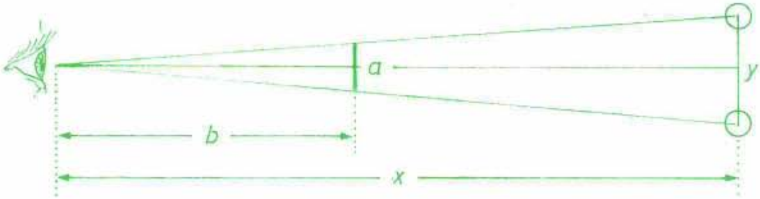
Republiško tekmovanje

7. razred

1. V učbeniku najdemo podatek, da se meter dolga jeklena palica podaljša za 0,012 mm, če jo segrejemo za 1 K. Stranice se podaljšajo za: $\Delta a = 0{,}012\ \mathrm{mm} \cdot 0{,}3.550 = 2{,}0$ mm. Enako izračunamo podaljška ostalih dveh stranic: $\Delta b = 1{,}3$ mm in $\Delta c = 0{,}66$ mm. Prostornina kvadra se poveča za: $\Delta V = 302{,}0 \cdot 201{,}3 \cdot 100{,}7\ \mathrm{mm}^3 - 300 \cdot 200 \cdot 100\ \mathrm{mm}^3 = 120\ \mathrm{cm}^3$.
2. Z uro, ki kaže sekunde, izmerimo čas t_1, v katerem se napolni npr. deset litrska posoda. Izmeriti moramo še vse tri stranice bazena in izračunati prostornino bazena. Nato s sklepanjem izračunamo čas polnjenja bazena: če priteče 10 l vode v času t_1, priteče prostornina V v času $t = (V/10\ \mathrm{l}) \cdot t_1$.
3. Prvo rešitev uganemo. Sile F_4,F_5 in F_6 so paroma nasprotno enake silam F_1,F_2 in F_3. Sledi: $F_4 = F_5 = F_6 = 10$ N. Pri računanju naslednjih rešitev najprej izračunamo rezultanto sil F_1,F_2 in F_3. Seštejemo sili F_1 in F_3. Obe sili in delna rezultanta tvorijo enakostranični trikotnik. Delna rezultanta je velika 10 N, kaže pa v smeri F_2. Skupna rezultanta sil F_1,F_2 in F_3 je torej velika 20 N, kaže pa navpično navzgor. Vsota sil F_4,F_5 in F_6 je torej velika 20 N, kaže pa navpično navzdol.
   Druga rešitev: Izberemo $F_4 = F_6 = 0$. Sila F_5 ima že pravo smer, velikost je 20 N.
   Tretja rešitev: Izberemo $F_5 = 0$. Rezultanta sil F_4 in F_6 mora biti velika 20 N, smer navpično navzdol. Pri razstavljanju rezultante na dani smeri sil F_4 in F_6 dobimo paralelogram, ki ga rezultanta razdeli na dva enakostranična trikotnika. Sledi: $F_4 = F_6 = 20$ N.

   Možnih je še več drugih rešitev, ko so vse tri sile različne od 0. Za vse rešitve velja: $F_4 = F_6 = 20\ \mathrm{N} - F_5$. Velikost ene sile si izberemo, nakar lahko preostali dve izračunamo, pri čemer mora biti velikost izbrane sile manjša od 20 N.

4. Z viziranjem določimo stranici a in b manjšega trikotnika (glej sliko). Ker je trikotnik, ki ga določata obe lučki in naše oko, podoben manjšemu trikotniku, lahko napišemo razmerje: $x/y = b/a$. Sledi: $x = by/a = \ldots$

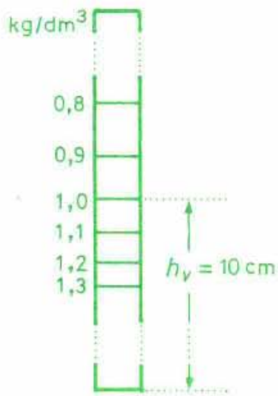


5.a) Na eni strani zaprto slamico damo v visoko čašo, v katero smo poprej nalili vodo. V slamico spuščamo šibre tako dolgo, da približno polovica slamice potone.

b) Na slamici preberemo, kolikšna je globina potopljenega dela slamice v vodi (h_v) in na milimetrskem papirju narišemo črtico z oznako 1 kg/dm^3.

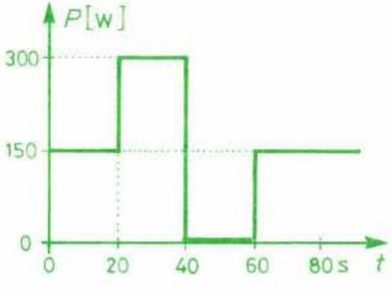
c) Ker slamica v tekočini miruje, sta teža in vzgon v ravnovesju: $\sigma Sh = T$; σ je specifična teža tekočine, S presek slamice, h višina potopljenega dela in T teža obtežene slamice. Iz enačbe sledi, da je višina potopljenega dela slamice obratno sorazmerna s specifično težo: $h = T/S\sigma$. Zato je višina obratno sorazmerna tudi z gostoto.
Če je gostota tekočine npr. 1,3 krat večja od gostote vode, je višina potopljenega dela slamice (h) 1,3 krat manjša kot višina potopljenega dela slamice v vodi (h_v): $h = h_v/1{,}3$. Tako izračunamo višine potopljenega dela slamice za gostote od 0,8 do 1,3 kg/dm^3 in narišemo skalo areometra.
Če smo slamico obtežili tako, da je bila višina potopljenega dela slamice v vodi 10 cm, dobimo naslednjo skalo areometra:

gostota (kg/dm^3)	0,8	0,9	1,0	1,1	1,2	1,3
višina potopljenega dela h (cm)	12,5	11,1	10,0	9,1	8,3	7,7



d) Izmerimo višino potopljenega dela slamice v slani vodi in na skali odčitamo gostoto raztopine.

8. razred



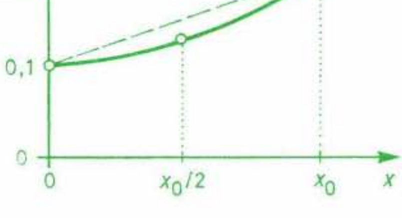
1. Jure prevozi 100 m dolg klanec v 20 s. V tem času opravi dodatno delo, ki je enako spremembi potencialne energije: $A = mgh = 60$ kg.10 m/s$^2 \cdot 5$ m $= 3000$ J. Moč poveča za $P' = A/t = 3000$ J$/20$ s $= 150$ W. Pri vožnji po klancu navzgor je skupna moč 150 W + + 150 W = 300 W. Pri vožnji navzdol pa je delo teže nasprotno enako delu trenja, skupno delo je 0 in Juretova moč je enaka 0.

2.a) Opravljeno delo je enako spremembi potencialne energije: $mg4l/3 - -mg2l/3 = 50$ J - 25 J $= 25$ J.

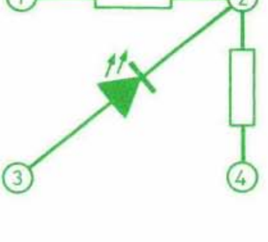
b) Ker je razmerje dolžin od osi do uteži 2:1, je tudi razmerje hitrosti $v_B/v_A = 2$.

c) Potencialna energija se pretvori v kinetično, pri čemer upoštevamo, da je hitrost uteži B dvakrat večja: $mv^2/2 + m(2v)^2/2 = 25$ J. Iz enačbe izračunamo hitrost uteži $A: v_A^2 = 50$ J$/12{,}5$ kg, $v_A = 2{,}0$ m/s. Hitrost uteži B je dvakrat večja: $v_B = 4{,}0$ m/s.

3. Najprej izračunamo tokova za skrajni legi drsnika: $I(x = 0) = 20$ V$/200 = 0{,}1$ A, $I(x - x_o) = 20$ V$/100\ \Omega = 0{,}2$ A. Kako poteka krivulja med izračunanima točkama, ugotovimo z računom, ko je drsnik v srednji legi: $I = 20$ V$/150\Omega = 0{,}13$ A. Krivulja poteka pod zveznico, ki povezuje skrajni točki.

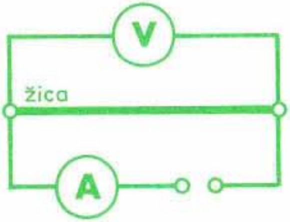


4. Baterijo priključimo zaporedoma med dve vtičnici, označimo polariteto in opazujemo svetečo diodo: 3+, 2-: sveti, 3+, 1-: manj sveti, 3+, 4-: manj sveti, v ostalih primerih dioda ne sveti. Dioda je torej priklju-



čena med 3 in 2, upornika pa med 2 in 1 in med 2 in 4, kot kaže slika.

5. Sestavimo vezje (glej sliko) in izmerimo upor naprimer 50 cm dolgega kosa žice. Pri napetosti 0.5 V teče skozi žico tok 1,2 A. Torej je upor $R = U/I = 0{,}50\ \mathrm{V}/1{,}2\ \mathrm{A} = 0{,}42\ \Omega$. Ko na svinčnik tesno navijemo več ovojev žice, izmerimo, da je na



dolžini 10 mm navitih 22 ovojev. Premer žice je torej 0,45 mm, presek žice pa $S = \pi \cdot r^2 = 0{,}16\ \mathrm{mm}^2$. S sklepanjem ugotovimo, kolikšen upor bi imela žica z dolžino 1 m in presekom 1 mm^2: $R = 0{,}42\Omega \cdot (1\ \mathrm{m}/0{,}5\ \mathrm{m}).(0{,}16\ \mathrm{mm}^2/1\ \mathrm{mm}^2) = 0{,}13\ \Omega$. Žica z dolžino 1m in presekom 1 mm^2 bi imela upor $0{,}13\Omega$.

Mirko Cvahte, Zlatko Bradač

PRESEK
list za mlade matematike, fizike, astronome in računalnikarje
17.letnik, šolsko leto 1989/90, številka 6, strani 321–384

Dopise pošiljajte in list naročajte na naslov: Društvo matematikov, fizikov in astronomov Slovenije - Podružnica Ljubljana - Komisija za tisk, Presek, Jadranska c. 19, 61111 Ljubljana, p.p. 64, tel (061) 265-061/53, št. žiro računa 50101-678-47233. Naročnina za šolsko leto 1989/90 vplačana do izida pete številke, je za posamezne naročnike 50.-din, za skupinska naročila šol 40.- din, posamezna številka 10.- din (8.- din).

List sofinancirajo RKRDT, RKVITK in RKK
Ofset tisk Časopisno in grafično podjetje DELO, Ljubljana

ERFURT 1989 – Rešitve nalog s str. 331

1. Označimo število $2^8 + 2^{11} + 2^n$ z m in vzemimo najprej $n \leq 8$. Potem je

$$m = 2^n(2^{8-n} + 2^{11-n} + 1) = 2^n(9 \cdot 2^{8-n} + 1)$$

od koder preberemo, da za lihi n število m ne more biti popolni kvadrat (faktor 2^n), za sodi n (torej za $n \in 2,4,6,8$) pa m tudi ni kvadrat naravnega števila.

Naj bo zdaj $n>8$. Potem je $m = 2^8(9+2n-8)$ popolni kvadrat natanko takrat, kadar obstaja tako naravno število p, da velja

$$2^k + 9 = p^2,\ k = n - 8 \in \mathbb{N}$$

Potem pa je $(p-3)(p+3) = 2^k$ in zato

$$p = 2^{k_1} + 3 = 2^{k_2} - 3,\ k_1, k_2 \in 0 \cup \mathbb{N}$$

Od tod sledi enakost

$$6 = 2^{k_2} - 2^{k_1} = 2^{k_1}(2^{k_2-k_1} - 1),\ k_1<k_2$$

ki nam da $k_1 \in \{0,1\}$ ter navsezadnje edino dobro možnost $k_1 = 1$, $k_2 = 3$. Tedaj je $p = 5$, $k = 4$, torej je m popolni kvadrat le za $n = 12$.

2. Razčlenimo levo stran enačbe pa bo dokaz pred nami:

$$x^4 - 6x^3 + 14x^2 - 24x + 40 = x^2(x-3)^2 + x^2 + 4((x-3)^2 + 1) =$$
$$= x^2((x-3)^2 + 1) + 4((x-3)^2 + 1) = (x^2 + 4)((x-3)^2 + 1)>4$$

3. Vzemimo za g konstantno funkcijo $g(x) = 1$ za vsak $x \in \mathbb{R}$. Potem mora f izpolnjevati pogoja

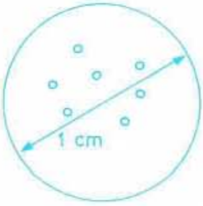
$$f(0) = 7 \text{ in } \frac{f(x+1)}{f(x)} = 2 \text{ za vsak } x \in \mathbb{R}$$

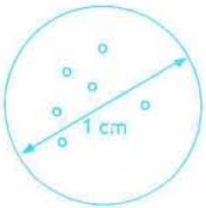
Tvegajmo z nastavkom za eksponentno funkcijo

$$f(x) = c \cdot a^x,\ c \in \mathbb{R},\ a>0$$

ki nam takoj da rešitev $c = 7$, $a = 2$, torej $f(x) = 7 \cdot 2^x$.

4. Denimo, da sta poljubni dve točki iz M oddaljeni manj kot 1 cm. Potem v vsakem krogu s središčem v eni izmed teh točk in s polmerom 1 cm ležijo vse točke množice M. Ostane nam še primer, ko sta dve točki iz M oddaljeni vsaj 1 cm. Označimo ti dve točki z A in B. Potem je zaradi pogoja naloge vsaka druga točka iz M oddaljena manj kot 1 cm bodisi od A bodisi od B, torej vsaj eden od krogov s središčem v A ali B in s polmerom 1 cm vsebuje vsaj sedem točk množice M. S tem smo dokazali a), odgovor na b) pa je negativen, kar pokaže slika na naslednji strani.

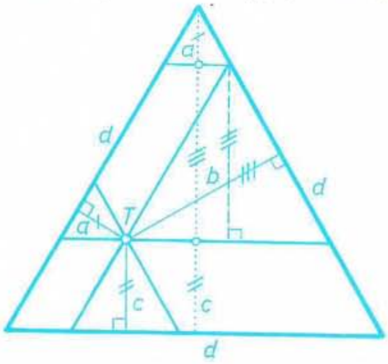


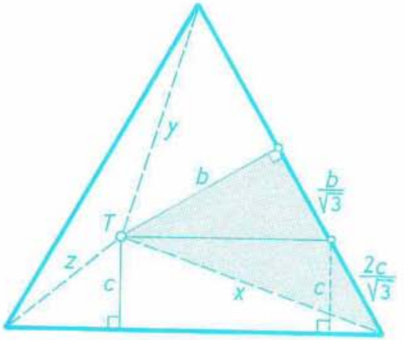


5. Načrtajmo enakostranični trikotnik z osnovnico dolžine d in v njem poiščimo točko T, ki je od osnovnic oddaljena a, b, oziroma c. Da to lahko storimo, nam pove slika na levi, desna slika pa pokaže, da iskano trojko (x,y,z) sestavljajo razdalje od T do oglišč trikotnika. Za nameček nam ta slika da rešitve. Po Pitagorovem izreku je namreč

$$x^2 = b^2 + (\frac{b}{\sqrt{3}} + \frac{2c}{\sqrt{3}})^2$$

in zato $x = 2\sqrt{(b^2 + bc + c^2)/3}$. Podobno dobimo še $y = 2\sqrt{(a^2 + ac + c^2)/3}$, $z = 2\sqrt{(a^2 + ab + b^2)/3}$.





Boris Lavrič

PREREZ IN ZATEM ŠE PRESENEČENJE

Iz papirja izdelaj model tetraedra in ga prereži tako, kakor kaže slika. Kaj dobiš?

Vilko Domajnko