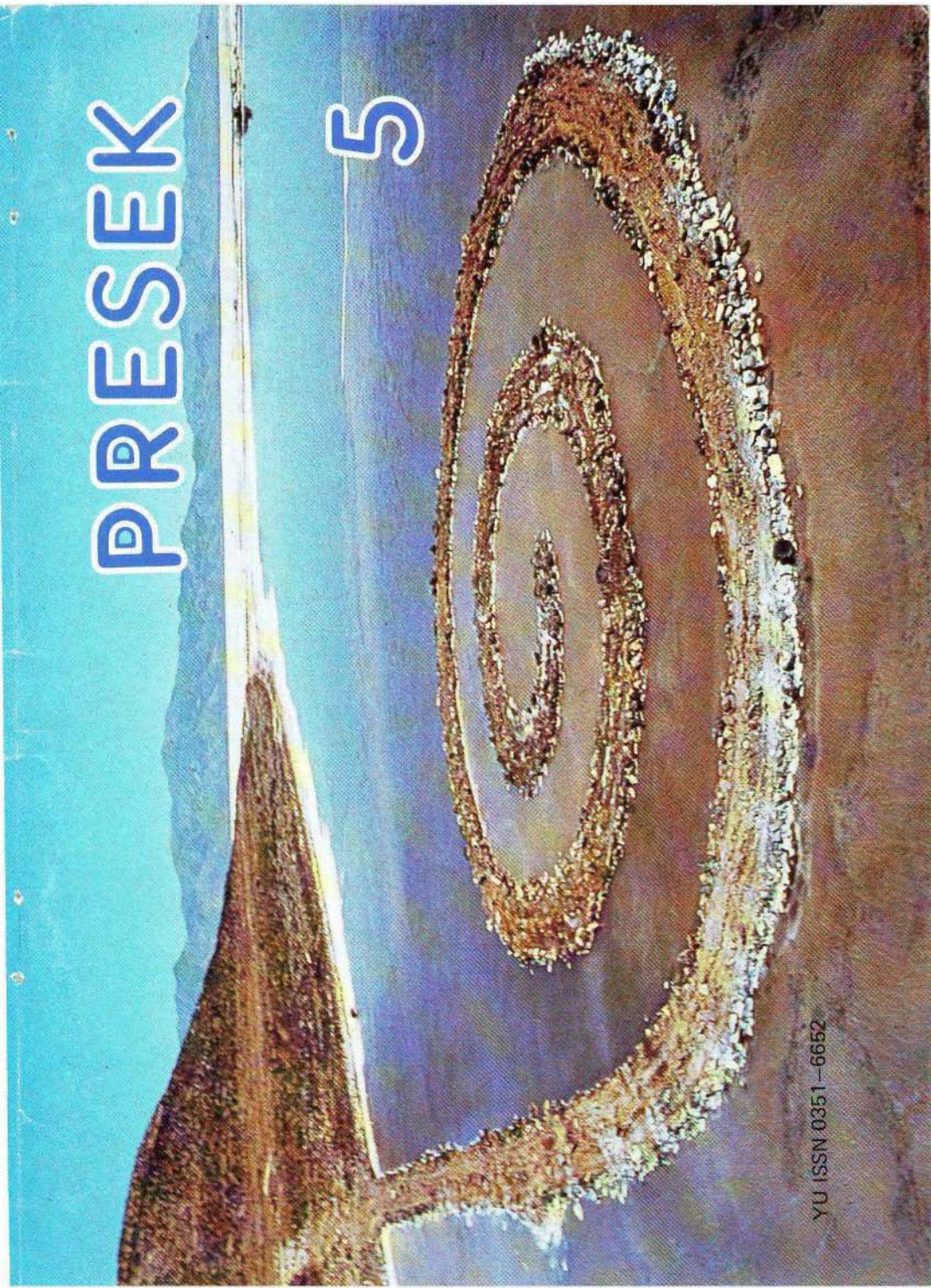


PRESEK

5

YU ISSN 0351-6652

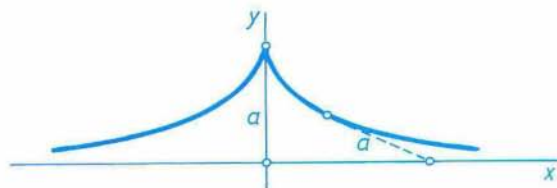


TRAKTRISA

Pariški zdravnik Perrault je sredi druge polovice sedemnajstega stoletja zaposlil matematike z naslednjo nalogo.

Priveži točkasto telo na vodoravni ravnini z enim koncem neraztegljive vrvice, drugega pa vleci naravnost vzdolž premice na isti ravnini. Kakšno sled pri tem pusti telo?

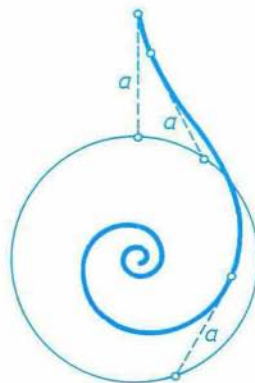
Naloga seveda terja enačbo krivulje, ki jo zariše telo-točka pri opisani vleki. Ime iskane krivulje je primerno njenemu nastanku — rečemo ji namreč *traktrisa*, koren te besede pa je latinski; *trahere* (vleči).



$$x = a \ln \frac{a - \sqrt{a^2 - y^2}}{y} + \sqrt{a^2 - y^2}$$

Graf traktrise in njena enačba v sistemu (x, y)

Perrault je s problemom seznanil Leibniza¹, ta pa Huygensa². Slednji je nalogo posplošil. Namesto premice je za pot prostega konca vrvice predlagal poljubno (ravninsko) krivuljo, imenu traktrisa pa dodal še njeno ime. Tako govorimo na primer o traktrisah krožnice, elipse, parabole itd. S traktriso krožnice se je ukvarjal tudi matematik Roger Cotes, ki ji je nadel ime *traktrix complicata*. Zakaj tako, najbrž ni težko ugotoviti, iz istega razloga pa tudi sklenimo našo zgodbo.



traktrisa krožnice

Boris Lavrič

¹Gottfried Wilhelm LEIBNIZ (1646-1716) veliki nemški filozof, matematik, fizik in zgodovinar.

²Christiaan HUYGENS (1629-1695) veliki holandski matematik, fizik in astronom.

PRESEK - list za mlade matematike, fizike, astronome in računalnikarje
17 (1989/90) številka 5, strani 257 - 320

VSEBINA

MATEMATIKA	Traktrisa (Boris Lavrič) - Glej sliko na naslovn strani	II
	Rešitev enačbe $x^2 + y^2 + 1 = xyz$ v naravnih številih (Ivan Vidav)	258
	Neenakost (Šefket Arslanagić, prev. in pril. Damjan Kobal)	262
FIZIKA	Še o obratnem brizgalniku (Janez Strnad)	264
ASTRONOMIJA	Kako še določajo oddaljenost zvezd (Marljan Prosén)	268
RAČUNALNIŠTVO	Novi tipi v turbo pascalu (Matija Lokar)	272
TEKMOVANJA	33. republiško tekmovanje srednješolcev iz matematike (Agata Tiegel) - Rešitve nalog str. 306 (Darjo Felda)	278
	6. balkanska matematična olimpiada (Andrej Vilfan)	282
	30. zvezno tekmovanje srednješolcev iz matematike - Rešitve str. 312 (Matjaž Željko)	284
	30. mednarodna matematična olimpiada (Jaka Cimprich)	286
RAZVEDRILO	Ena vesoljska (Sandi Klavžar)	277
	Posrečen ali ponesrečen dokaz? (Vilko Domajnko)	316
	Silkovna križanka - Matematični pojmi (Marko Bokalič)	288
	V visoki družbi - Rešitev str. 311 (Vilko Domajnko)	283
NALOGE	Naloge o dveh krajih na istem vzporedniku - Rešitve str. III (Marljan Prosén)	271
	Kvadrat - Rešitev str. 311 (Darjo Felda)	281
	Ena naloga rodi drugo (Marljan Prosén)	290
	Naloge iz knjige Veselje ob igri števil - Rešitve str. 318 (Vilko Domajnko)	292
	Naloga iz obrestno obrestnega računa (Dušan Modic)	294
	Bomboni - Rešitev str. 305 (Darjo Felda)	301
NOVICE	Nesreča radioteleskopa (Janez Strnad)	296
	Presekove značke	297
	Breztežno stanje (Janez Strnad)	298
NOVE KNJIGE	Moser S., Veselje ob igri s števili (Vilko Domajnko)	295
	Smullyan R., Dekle ali tiger? (Neža Mramor-Kosta)	300
REŠITVE NALOG	20. zvezno tekmovanje osnovnošolcev iz matematike - Rešitve nalog s str. 232 (Aleksander Potočnik)	302
	Silkovna križanka - Matematični pojmi - Rešitev iz P-4 (Marko Bokalič)	282
	Nagradne kocke - Rešitev iz P-1, str. IV (Boris Lavrič)	320
NA OVITKU	R.Smithson, Spiralasti pomol, 1970, Veliko slano jezero, Utah, ZDA (Glej članek na str. 257)	I

REŠITVE ENAČBE $x^3 + y^3 + 1 = xyz$ V NARAVNIH ŠTEVILIH

Zastavimo si tole vprašanje: Za katere pare naravnih števil x in y je vsota $x^2 + y^2 + 1$ deljiva s produktom xy ? Če zaznamujemo kvocient med vsoto in produktom z , zadoščajo x, y, z enačbi

$$x^2 + y^2 + 1 = xyz \quad (1)$$

Poiščimo vse njene rešitve v naravnih številih!

Ali obstaja rešitev, pri kateri sta x in y enaka? Če je $x = y$, se enačba (1) glasi $2x^2 + 1 = x^2z$. Od tod je $x^2(z - 2) = 1$. Produkt naravnih števil pa je enak 1 le, če so vsi faktorji enaki 1. Torej je $x = 1$ in $z - 2 = 1$. Tako dobimo rešitev $x = y = 1, z = 3$, ki ji bomo rekli **trivialna rešitev enačbe (1)**. V vsaki nevtralni rešitvi pa je $x \neq y$.

Naj bodo x, y, z naravna števila, ki zadoščajo enačbi (1). Če prenesemo člen x^2 z leve na desno in nato delimo z x , dobimo

$$\frac{y^2 + 1}{x} = yz - x \quad (2)$$

Vidimo, da je kvocient $(y^2 + 1)/x$ celo število $yz - x$. Prav tako ugotovimo, da je kvocient $(x^2 + 1)/y$ celo število, in sicer enako $xz - y$.

Postavimo

$$x' = y, \quad y' = \frac{y^2 + 1}{x}, \quad z' = z \quad (3)$$

x', y', z' so naravna števila. Izračunajmo

$$x'^2 + y'^2 + 1 = \frac{y^2 + 1}{x^2} (x^2 + y^2 + 1)$$

Upoštevajmo, da x, y, z zadoščajo enačbi (1), pa dobimo

$$x'^2 + y'^2 + 1 = x'y'z'$$

Torej je tudi trojka x', y', z' rešitev enačbe (1) v naravnih številih.

Če izhajamo iz trivialne rešitve $x = y = 1, z = 3$, dobimo po formulah (3) rešitev $x = 1, y = 2, z = 3$, iz te rešitev $x = 2, y = 5, z = 3$ itd.

Enačba (1) se ne spremeni, če v njej zamenjamo x in y . Zato je tudi trojka

$$x' = \frac{x^2 + 1}{y}, \quad y' = x, \quad z' = z \quad (4)$$

rešitev v naravnih številih, če je x, y, z taka rešitev. Trojko (4) smo namreč dobili tako, da smo v formulah (3) zamenjali x in y , x' pa y' .

Denimo, da je x manjši kakor y , tedaj $y - x > 0$. Potem velja za rešitev (3)

$$y' - x' = \frac{y^2 + 1}{x} - y = \frac{y(y - x) + 1}{x} > 0$$

Torej je tudi $x' < y'$. Ker je $x < y = x'$, je x' večji od x , y' pa večji od y .

Kako je pri rešitvi (4)? Tu imamo

$$y' - x' = x - \frac{x^2 + 1}{y} = \frac{x(y - x) - 1}{y}$$

Produkt $x(y - x)$ naravnih števil x in $y - x$ je najmanj 1, enak 1 pa je le v primeru, ko je $x = 1$ in $y - x = 1$, tedaj $y = 2$. Iz rešitve $x = 1$, $y = 2$ dobimo trivialno rešitev $x' = 1$, $y' = 1$. V vseh drugih primerih pa je $x' < y'$. To namreč pove zgornja enakost. Ker je $y' = x < y$, je nova rešitev manjša od prejšnje.

Imejmo rešitev, pri kateri je $x < y$. Formule (3) ji priredijo večjo rešitev x' , y' , tej pa še večjo x'' , y'' . Če tako nadaljujemo, dobimo neskončno zaporedje rešitev, v katerem je vsaka naslednja večja od prejšnje. Če pa računamo po formulah (4), se zaporedne rešitve nekaj časa manjšajo. Ker so naravna števila, se mora manjšanje po nekaj korakih končati. V prejšnjem odstavku smo videli, da se konča tedaj, ko pridemo do trivialne rešitve. Od tam naprej se rešitve spet večajo.

Če je $x > y$, dajo naraščajoče zaporedje rešitev formule (4), rešitve dobljene s formulami (3) pa se manjšajo toliko časa, dokler ne pridemo do trivialne rešitve.

Vse rešitve, ki jih dobimo iz začetne rešitve po formulah (3) ali po formulah (4), imajo isti z . Pri trivialni rešitvi pa je $z = 3$. Ker nas formule (4) po nekaj korakih vselej privedejo do trivialne rešitve, kadar je $x < y$, formule (3) pa, kadar je $x > y$, je torej $z = 3$ v vsaki rešitvi enačbe (1) v naravnih številih. Tako smo dokazali trditev:

Če sta x in y taki naravni števili, da je vsota $x^2 + y^2 + 1$ deljiva s produktom xy , je kvocient enak 3.

Ker je vselej $z = 3$, je dovolj, če v rešitvi enačbe (1) v naravnih številih navedemo le x in y .

Formule (3) priredijo rešitvi x , y rešitev x' , y' . Poiščimo zdaj rešitev x'' , y'' , ki pripada rešitvi x' , y' po formulah (4). Dobimo

$$x'' = \frac{x'^2 + 1}{y'} = (y^2 + 1) \cdot \frac{x}{y^2 + 1} = x, \quad y'' = x' = y$$

Torej nas formule (4) privedejo nazaj na prvotno rešitev x , y . Prav tako dobimo prvotno rešitev, če poiščemo najprej novo rešitev po formulah (4), tej pa potem rešitev po formulah (3).

Naj bo dana poljubna rešitev x , y enačbe (1), kjer je $x < y$. Videli smo,

da pridemo z uporabo formul (4) po nekaj korakih do trivialne rešitve $x = 1$, $y = 1$. V prejšnjem odstavku smo ugotovili, da delujejo formule (3) v nasprotni smeri kakor (4). Zato nas po istem številu korakov privedejo od trivialne rešitve nazaj na dano rešitev x , y . Kadar pa je $x > y$, pridemo do trivialne rešitve s formulami (3), od trivialne rešitve do dane rešitve pa nas privedejo formule (4). Tako smo ugotovili, da dobimo iz trivialne rešitve katerokoli rešitev enačbe (1) z uporabo formul (3) ali pa (4).

Izračunali smo, da je kvocient $(y^2 + 1)/x$ enak $yz - x$. Ker je $z = 3$ v vsaki rešitvi enačbe (1) v naravnih številih, lahko zapišemo formule (3) tudi takole

$$x' = y, \quad y' = 3y - x, \quad z' = z \quad (3\star)$$

Novi x' je enak prejšnjemu y . Zato se dajo dobiti vse rešitve enačbe (1) iz enega samega zaporedja števil. Oglejmo si namreč zaporedje

$$u_0, u_1, u_2, \dots \quad (5)$$

pri katerem sta prva člena

$$u_0 = 1 \quad \text{in} \quad u_1 = 1$$

trije poljubni zaporedni členi u_{n-1} , u_n , u_{n+1} pa so med seboj povezani z enačbo

$$u_{n+1} = 3u_n - u_{n-1} \quad (6)$$

S tem je zaporedje (5) določeno. Tako je po formuli (6)

$$u_2 = 3u_1 - u_0 = 2, \quad u_3 = 3u_2 - u_1 = 5, \text{ itd.}$$

Očitno so vsi členi u_n naravna števila.

Velja tale trditev: Poljubna sosedna člena $u_{n-1} = x$ in $u_n = y$ zaporedja (5) dasta rešitev enačbe (1) v naravnih številih. Res, začetna člena $u_0 = 1$ in $u_1 = 1$ določata trivialno rešitev. Denimo, da za neki indeks n velja naša trditev, da je torej $x = u_{n-1}$, $y = u_n$ rešitev. Po formulah (3 $\star$) dobimo iz nje rešitev $x' = y = u_n$ in $y' = 3y - x = 3u_n - u_{n-1}$. Ker velja zveza (6), je $y' = u_{n+1}$. Zato tudi naslednji par zaporednih členov $u_n = x'$ in $u_{n+1} = y'$ zadošča enačbi. Po indukciji sklepamo, da je vsak par sosednih členov rešitev enačbe (1). Ker določata začetna člena trivialno rešitev in dobimo iz rešitve $x = u_{n-1}$, $y = u_n$ rešitev $x' = u_n$, $y' = u_{n+1}$ po formulah (3 $\star$), te formule pa nas privedejo do vsake rešitve, pri kateri je $x < y$, so v zaporedju (5) zajete vse take rešitve.

Iz (6) dobimo

$$u_{n-1} = 3u_n - u_{n+1} \quad (6\star)$$

Ta formula omogoča računanje členov zaporedja (5) z desne proti levi. Z njo

lahko opredelimo tudi člene u_n z negativnimi indeksi n . Tako je

$$u_{-1} = 3u_0 - u_1 = 2, \quad u_{-2} = 3u_{-1} - u_0 = 5 \text{ itd.}$$

Členi so ista števila kakor pri pozitivnih indeksih, sledijo pa si v nasprotnem vrstnem redu.

Zaporedje u_n se zdaj razteza v obe smeri v neskončnost. Glasi se

$$\dots, 89, 34, 13, 5, 2, 1, 1, 2, 5, 13, 34, 89, \dots \quad (7)$$

V sredi sta člena $u_0 = 1, u_1 = 1$, ki določata trivialno rešitev. Zaporedna člena $u_{n-1} = x$ in $u_n = y$ na desni strani dasta rešitev, pri kateri je $x < y$, na levi strani pa rešitev, kjer je $x > y$. V zaporedju (7) so tako zajete prav vse rešitve enačbe (1) v naravnih številih. Nadaljnje člene na desni računamo po formuli (6), na levi pa po formuli (6★).

Na koncu si oglejmo še podobno enačbo

$$x^3 + y^3 + 1 = xyz \quad (8)$$

Tudi tu nas zanimajo rešitve v naravnih številih x, y, z . Trivialna rešitev je spet $x = y = 1, z = 3$. Iz dane rešitve x, y, z pridemo do novih rešitev s podobnimi formulami, kakor so (3) in (4). Če prenesemo člen x^3 z leve na desno in nato delimo enačbo z x , ugotovimo, da je kvocient $(y^3 + 1)/x$ enak celemu številu $yz - x^2$. Zato so

$$x' = y, \quad y' = \frac{y^3 + 1}{x}, \quad z' = yz^2 - xy^2 - x^2z \quad (9)$$

cela števila. Nekoliko dolgovezen račun pokaže, da zadoščajo enačbi (8), torej dajo novo rešitev v naravnih številih. Prav tako dobimo novo rešitev, če v (9) zamenjamo x in y , torej postavimo

$$x' = \frac{x^3 + 1}{y}, \quad y' = x, \quad z' = xz^2 - x^2y - y^2z \quad (9\star)$$

Iz trivialne rešitve pridemo po formulah (9) najprej do rešitve $x = 1, y = 2, z = 5$, nato do rešitve $x = 2, y = 9, z = 41$ itd. Formule (9★) pa dajo iz trivialne rešitve enake rešitve kakor (9), le da sta v njih zamenjana x in y .

Ker je tudi tu novi x enak prejšnjemu y , lahko sestavimo zaporedje

$$\dots, 365, 9, 2, 1, 1, 2, 9, 365, \dots \quad (10)$$

Dva poljubna sosedna člena $x = u_{n-1}$ in $y = u_n$ dasta rešitev enačbe (8) v naravnih številih. S pikami označene člene na desni računamo po formulah (9), na levi po formulah (9★). Zato velja med tremi zaporednimi členi zveza

$$u_{n-1} u_{n+1} = u_n^3 + 1 \quad (11)$$

Ker izhajamo iz trivialne rešitve, postavimo $u_0 = 1$ in $u_1 = 1$. S tem je zaporedje (10) v obe smeri natanko določeno.

V zaporedju (10) pa niso zajete vse rešitve. Na primer rešitve $x = 2, y = 3, z = 6$ v njem ni. Iz te rešitve dobimo po formulah (9) in (9*) zaporedje

$$\dots, 915, 14, 3, 2, 3, 14, 915, \dots \quad (12)$$

Tu vzamemo začetna člena $u_0 = 2, u_1 = 3$, nadaljnje člene pa sept računamo po formuli (11).

Še vedno nismo dobili vseh rešitev enačbe (8). Rešitve $x = 5, y = 9, z = 19$ ni ne v zaporedju (10) ne v (12). Iz te rešitve dobimo, podobno kakor prej, verigo

$$\dots, 549, 14, 5, 9, 146, \dots \quad (13)$$

Bravec, ki ima računalnik, naj izračuna še nekaj nadaljnjih členov zaporedij (10), (12) in (13) in poskuša najti kakšno rešitev, ki je ni v nobenem od teh zaporedij.

Ivan Vidav

NEENAKOST

V matematiki pogosto srečamo in uporabljamo razne neenakosti in ocene. Te ocene so lahko "zelo grobe" ali "zelo natančne".

Oglejmo si primer neenakosti, ki jo bomo dvakrat "izboljšali".

Dokažimo, da velja neenakost

$$a^4 - a^2 - 3a + 5 > 0 \quad (1)$$

Dokaz 1: Zapišimo dano neenakost v obliki $a^4 + 5a > a^2 + 3a$. Ker je za vsak x, y $(x - y)^2 \geq 0$, je $x^2 + y^2 \geq 2xy$ in $(x + y)^2 \geq 4xy$ ter $x + y \geq 2\sqrt{xy}$. (To je znana neenakost med aritmetično in geometrično sredino.) Če vstavimo $x = a^4$ in $y = 5$, dobimo $a^4 + 5 \geq 2a^2\sqrt{5}$. Ločimo dva primera: Prvič, če je $a \geq 1$, je $a(2\sqrt{5} - 1) > 3$ in zato tudi $2a^2\sqrt{5} > a^2 + 3a$, od koder sledi, da je neenakost (1) v tem primeru izpolnjena. Drugič, če je $0 \leq a \leq 1$, je $a^4 + 5 \geq 5 > 4 \geq a^2 + 3a$ in neenakost (1) zato velja za vsak $a \geq 0$.

Dokaz 2: Zapišimo

$$\begin{aligned} a^4 - a^2 - 3a + 5 &= a^4 - 2a^2 + 1 + a^2 - 3a + \frac{9}{4} + \frac{7}{4} = \\ &= (a^2 - 1)^2 + (a - \frac{3}{2})^2 + \frac{7}{4} > \frac{7}{4} > 0 \end{aligned} \quad (2)$$

Očitno smo z manj truda kot v dokazu 1 dobili celo strožjo neenakost, ki je veljavna ne samo za $a \geq 0$, ampak za vsako število a . Dani izraz $a^4 - a^2 - 3a + 5$ je večji od $\frac{7}{4}$, saj števili $(a^2 - 1)$ in $(a - \frac{3}{2})$ ne moreta biti obe 0 za isti a .

Ali bi lahko oceno še izboljšali? Poskusimo!

Dokaz 3: Iz veljavnosti neenačbe $(x - y)^2 \geq 0$ dobimo neenakost $x^2 + y^2 \geq \frac{1}{2}(x + y)^2$ za vsaki števili x, y . Postavimo $x = a^2 - 1$ in $y = \frac{3}{2} - a$ in izračunajmo

$$\begin{aligned} (a^2 - 1)^2 + (\frac{3}{2} - a)^2 &> \frac{1}{2}(a^2 - 1 - \frac{3}{2} + a)^2 = \frac{1}{2}(a^2 - a + \frac{1}{4} + \frac{1}{4})^2 = \\ &= \frac{1}{2} \left[(a - \frac{1}{2})^2 + \frac{1}{4} \right]^2 = \\ &= \frac{1}{2}(a - \frac{1}{2})^4 + \frac{1}{4}(a - \frac{1}{2})^2 + \frac{1}{32} \geq \frac{1}{32} \end{aligned}$$

Če upoštevamo oceno (2), dobimo neenakost

$$a^4 - a^2 - 3a + 5 > \frac{1}{32} + \frac{7}{4} > \frac{7}{4} > 0$$

ki je še strožja od ocene (2).

Ozrimo se nazaj, na pravkar končano razmišljanje! Najprej smo "priručnali" prvi zaključek, potem smo z malo več zvitosti in veliko manj truda prišli do boljšega in nato smo slednjega še izboljšali. Ali bi lahko nadaljevali?

Če poskušamo biti šaljivi, nam ta primer dokazuje vsaj dve splošni, lahko pa tudi vprašljivi in nevarni pravili:

- Zvitost je pomembnejša od požrtvovalnosti.
- Nič ni tako dobro, da ne bi moglo biti boljše!

Šefket Arslanagić
prir. in prev. Damjan Kobal

ŠE O OBRATNEM BRIZGALNIKU

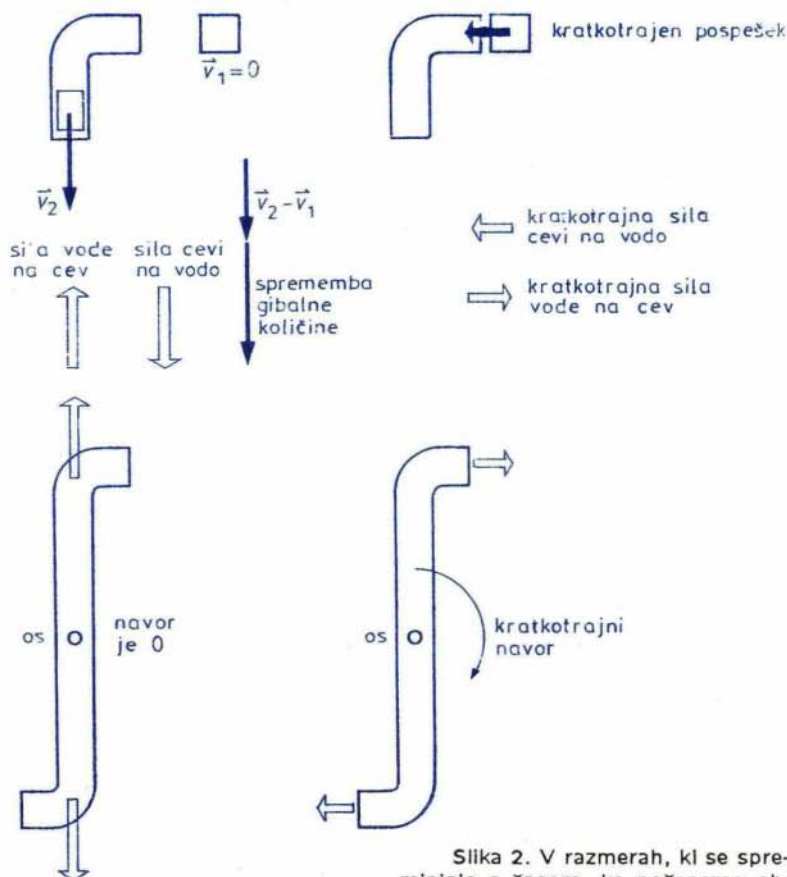
Do odgovora na vprašanje o obratnem brizgalniku se je najpreprosteje dokopati po poti, ki smo jo uporabili pri brizgalniku (Presek 16 (1988/89) str. 197). Iz neznanih razlogov ta pot ni priljubljena ne pri obravnavanju leta letal ne brizgalnika in sploh ne pri razpravljanju o obratnem brizgalniku.

Zakaj leti letalo, težje od zraka? Za opazovalca na zemlji zrak pred letalom miruje, krilo pa ga požene navpično navzdol. Sprememba hitrosti zraka kaže navpično navzdol in to smer imata tudi sprememba gibalne količine in sila krila na zrak. Sila zraka na krilo ima nasprotno smer, kaže navpično navzgor. Tako preprosto je mogoče pojasniti *dinamični vzgon*. (Izračunati ga je težje. Vsi deli zraka nimajo enake navpične komponente hitrosti: ob krilu je največja, z naraščajočo razdaljo pa hitro pojema. V računu je treba upoštevati efektivno maso zraka, ki ga zajame krilo na sekundo, in povprečno vrednost njegove navpične komponente hitrosti. Glej Presek 6 (1978/79) str. 241).

Na hitro se sprehodimo po njej pri obratnem brizgalniku, čeprav privede do enakega končnega izida. Mislimo si obratni brizgalnik v zelo veliki posodi z mirujočo vodo v razmerah, ki se ne spreminjajo s časom. Del vode v posodi pred vstopom v cev miruje, se giblje v cevi proti osi in ob osi steče na prosto (slika 1). Zanimamo se le za sile v ravnini, ki je pravokotna na os. Sprememba hitrosti dela vode ima smer radialno proti osi in to smer imata tudi sprememba njegove gibalne količine in sila cevi na vodo. Voda deluje na cev v nasprotni smeri, torej radialno od osi. Navor te sile glede na os je enak nič. Obratni brizgalnik miruje.

To ne velja, če voda v posodi ne miruje ali če se razmere spreminjajo s časom. Priznati moramo, da za ta primer opisana preprosta pot ni uporabna. V razmerah, ki se s časom ne spreminjajo, je dovolj, če se zanimamo le za gibanje dela vode precej daleč od vstopa v cev in za gibanje tega dela ob izstopu iz cevi. Ni pomembno, kaj se z delom vode dogaja med obema točkama. Toda ko poženemo obratni brizgalnik, to ne zadostuje. Del vode neposredno pred vstopom v cev spočetka miruje. Kratkotrajna sila zaradi tlačne razlike — v cevi je tlak manjši kot zunaj nje — pa ga pospeši, ko brizgalnik poženemo s tem, da priključimo tlačno razliko. Na del vode deluje tedaj cev s kratkotrajno silo tangентno v notranjost cevi (slika 2). Voda deluje tedaj s kratkotrajno silo v nasprotni smeri, se pravi tangентno iz cevi navzven.

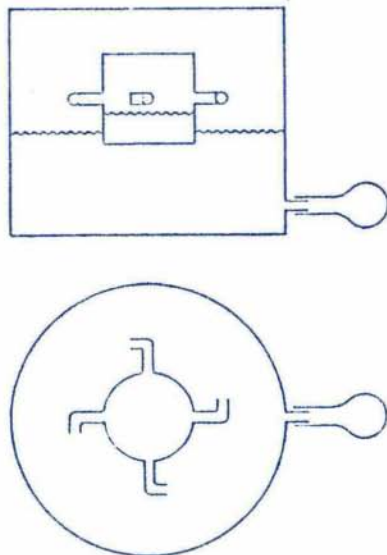
S kratkotrajno silo je povezan kratkotrajni navor, ki deluje pri obratnem brizgalniku nasprotno kot pri brizgalniku. Zaradi njega se prožno pritrjena cev za kratek čas odkloni, ko priključimo tlačno razliko. Nepritrjena cev se



Slika 1. Obravnavamo obratni brizgalnik v razmerah, ki se ne spreminjajo s časom. Opazovani del vode v posodi miruje, v cevi pa se globlje proti osi s hitrostjo v_2 . Razlika hitrosti določa smer sile cevi na vodo, sila vode na cev ima nasprotno smer. Navor dvojice takih sil je enak nič, obratni brizgalnik miruje. Odločilna je le velikost hitrosti v_2 , zato pri obratnem zbiralniku ne govorimo o šobi, ampak o ustju cevi ali kar o cevi.

Slika 2. V razmerah, ki se spreminjajo s časom, ko poženemo obratni brizgalnik, moramo postopati drugače. Ko poženemo obratni brizgalnik, se del vode ob ustju cevi pospeši v smeri tangentno proti notranjosti cevi. Kratkotrajna sila cevi na vodo ima to smer, kratkotrajna sila vode na cev pa nasprotno. Zaradi kratkotrajnega navora, ki je povezan z dvojico takih sil, se začne obratni brizgalnik vrteti v nasprotni smeri, kot se vrtil brizgalnik. Vendar se to vrtenje zaradi trenja v ležajih kmalu zaduši. Ko zaustavimo obratni brizgalnik, nastopi kratkotrajna sila in kratkotrajni navor v nasprotni smeri.

Slika 3. Naprava brez ležajev, ki deluje pri poskusih kot obratni brizgalnik ali brizgalnik (pogled od zgoraj (a) in pogled od strani (b)). Slika je vzeta iz članka R.E.Berg, M.R.Collier, *The Feynman inverse sprinkler problem: A demonstration and quantitative analysis*, American Journal of Physics 37 (1989) 654. Posodica meri v premeru 12 centimetrov in razdalja med nasprotnima ustjema cevi 17 centimetrov.



začne zelo počasi vrteti v nasprotni smeri kot pri brizgalniku, ko poženemo obratni brizgalnik, in se zaustavi, ko prekinemo tok vode. Tedaj se namreč del vode ob ustju cevi zaustavi zaradi kratkotrajne sile cevi tangentno iz cevi navzven. Na cev deluje voda s kratkotrajno silo v tangentni smeri v notranjost. Tega pojava zaradi trenja v ležajih pri nepritrjenem obratnem brizgalniku ni mogoče opazovati.

S posebno napravo brez ležajev pa sta ga R. E. Berg in M. R. Collier lahko zasledovala. V steklopihaški delavnici so jima izdelali valjasto posodico s štirimi pod pravim kotom zasukanimi cevmi (slika 3). Posodico sta dala v večjo posodo z vodo, v kateri sta zračni tlak nad vodo uravnavala z gumijastim balonom. Ko balon stisnemo, voda teče v posodico, dokler se zračni tlak v posodici ne izenači z zračnim tlakom v posodi. Tedaj deluje naprava kot obratni brizgalnik. Trenja ni, upor vode na posodico pa je tako majhen, da bi jo zaustavil šele po sto sekundah. Posodica se začne ob stiskanju vrteti s frekvenco okoli 7 na uro in se vrti tako šest sekund, dokler balon stiskamo. Ko vodni tok preneha, se zaustavi.

Nato balon popustimo. Zdaj je v posodi manjši tlak kot v posodici, voda teče iz posodice, dokler se zračni tlak v posodi ne izenači z zračnim tlakom v posodici. To traja šest sekund in tedaj deluje naprava kot brizgalnik. Posodica se vrti enakomerno pospešeno v nasprotni smeri kot prej in doseže največjo frekvenco okoli 1 na minuto. Ko vodni tok preneha, se zaradi upora

enakomerno pojemajoče ustavlja.

Poskus Američanov je vreden pozornosti. Vendar je treba posebej poudariti vlogo prehodnih pojavov in razlikovati od njih delovanje obratnega brizgalnika in brizgalnika v razmerah, ki se ne spreminjajo s časom. V tem primeru pa je daleč najpreprostejša naša razlaga.

Janez Strnad

WHEELER O OBRATNEM BRIZGALNIKU

"Ali naju je naloga iz uvodnega predavanja mehanike napeljala na to, da sva razmišljala o znanem brizgalniku za zalivanje trate? Oblikovan kot svastika brizga štiri vodne curke. Nasprotna sila curkov poganja krake brizgalnika, da se vrtijo. Toda kje prijema ta sila? Ali v točki, v kateri vodni curek nenadoma spremeni smer iz radialne v prečno? Pa vzemimo, da kraki srkajo vodo, namesto da bi jo brizgali. Zagotovo, sva rekla, je sila enaka, če je enaka sprememba smeri. Zagotovo se brizgalnik vrti, če srka vodo, namesto da bi jo brizgal. Ne, ne vrti se! Da, vrti se! Zabavala sva se, ko sva vprašanje zastavljala kolegom. S časom se je vse več kolegov s hodnikov odločilo za eno ali drugo stališče. Razprava je postala vse živahnejša. Noben teorijski razlog ni zadostoval, da bi zgladil nasprotja. Položaj je terjal poskus.

Feynman je naredil miniaturni 15-centimetrski brizgalnik iz steklenih cevi in ga obesil na gibko gumijasto cev. Preskusil ga je, da deluje kot brizgalnik. Nato je zvijajočo se zadevo zvito spravil skozi vrat velike steklenice z vodo. Svojo napravo je odnesel v ciklotronski laboratorij, v katerem je bil priročen priključek za stisnjen zrak. Tega je priključil skozi drugo luknjo v plutovinastem zamašku na steklenico. Ha! Malo se je zatreslo, ko je priključil tlak in je voda začela teči v nasprotni smeri skozi miniaturni brizgalnik. Toda ob mirnem toku ni bilo nasprotnih sil. Potem je povečal zračni tlak, da se je povečal tok vode. Zopet kratkotrajno tresenje ob spremembi, toda nobenega trajnega zasuka. Dobro, še večji tlak. In več! Bum! Steklenica se je razletela. Voda in stekleni drobci so frčali po vsem ciklotronskem laboratoriju. Odtlej Feynman ni smel več v laboratorij."

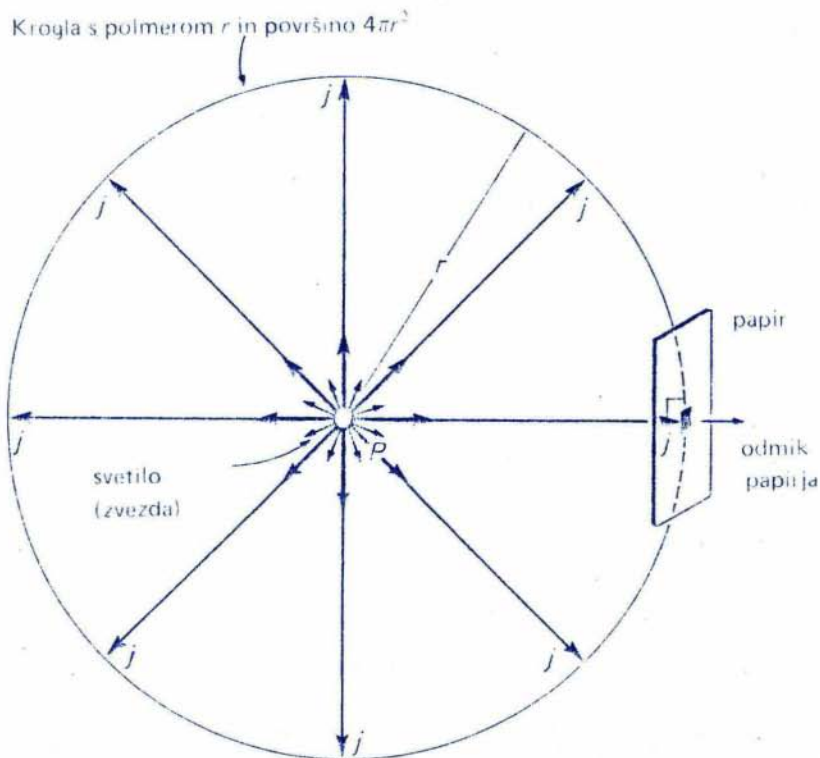
J.A.Wheeler, *The young Feynman*, Physics Today **42** (1989) 24 (2)

V 4. številki (1988/89) je Presek objavil odlomek iz spominov znanega ameriškega fizika Richarda Feynmana o poskusih z "obratnim brizgalnikom". V zapisu iz posebne številke revije Physics Today, ki so jo izdali po Feynmanovi smrti, povzemamo spomin njegovega mentorja Johna Wheelerja na isti poskus. Iz le- tega jasno izhaja odgovor, ki ga Feynman v svojih spominih ni izdal: obratni brizgalnik se ne vrti.

Janez Strnad

KAKO ŠE DOLOČAJO ODDALJENOST ZVEZD

V temi prižgi žarnico. Vzemi bel papir in ga odmikaj od žarnice v radialni smeri (slika 1). Papir je vse manj osvetljen, nanj pada vse manj svetlobnega toka z žarnice. Pa izračunajmo gostoto tega toka, ki pade na majčkeno ravno (osenčeno) ploskvico na sredini papirja v oddaljenosti (razdalji) r od žarnice s svetlobno močjo (oddanim svetlobnim tokom) P . Žarnica naj sveti v vse smeri enakomerno, ravna ploskvica pa naj bo tako majhna, da se kar prilega krogli s polmerom r , v središču katere je žarnica. V oddaljenosti r od žarnice se tok P porazdeli po površini krogle $4\pi r^2$. Na ploskovno enoto pade



Slika 1. K izračunu gostote svetlobnega toka v oddaljenosti r od svetila s svetlobno močjo (oddanim svetlobnim tokom) P ; $J = P/(4\pi r^2)$. Enačba pove, da gostota svetlobnega toka pada s kvadratom oddaljenosti.

$j = P/(4\pi r^2)$. Količino j , ki pove, koliko W/m^2 svetlobnega toka sprejme ali pade na ploskvico, imenujemo *gostota svetlobnega toka*.

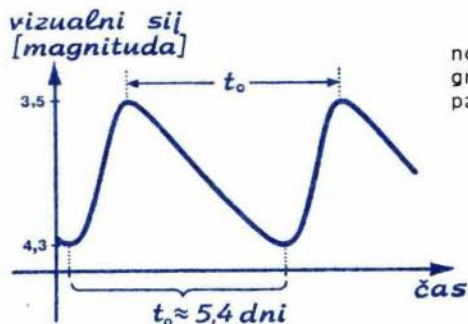
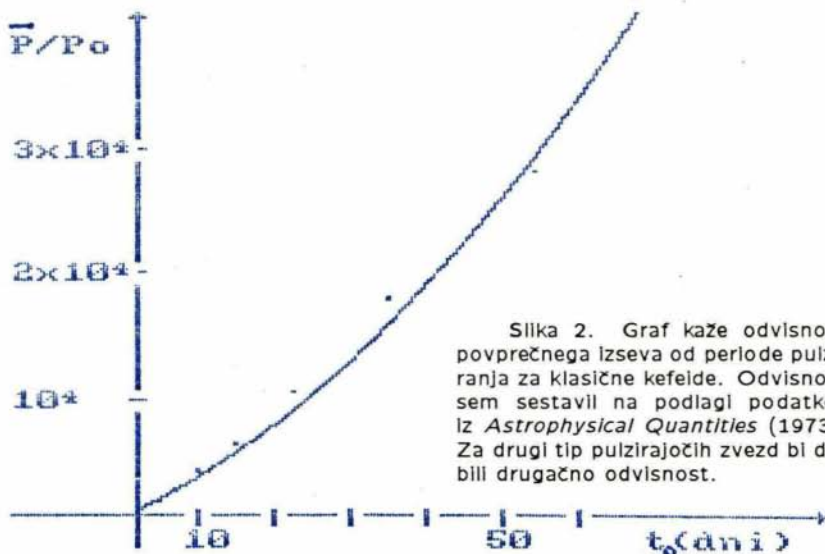
Namesto ploskvice na sredini papirja si mislimo človeško oko ali pa kak svetlobni merilnik (svetlometer, fotocelico, počrnjeni termometer). Z očesom lahko ocenimo sprejeto svetlobo, s svetlobnim merilnikom pa izmerimo. Sicer pa gostoto toka pri znanih P in r lahko izračunamo. Naj ima žarnica $P = 60$ W. V razdalji $r = 2$ m je gostota toka $j = 60 \text{ W}/(4 \cdot 3,14 \cdot 4 \text{ m}^2) = 1 \text{ W/m}^2$.

Znanje iz te naloge pa lahko uporabimo tudi takole. Vzemimo, da svetilo oddaja tok P , da izmerimo gostoto svetlobnega toka j in da ne vemo, v kateri razdalji od nas sveti. Razdaljo izračunamo kar iz gornje enačbe $r = \sqrt{P/(4\pi j)}$. Če za 60 W žarnico izmerimo $j = 10^{-3} \text{ W/m}^2$, je $r = \sqrt{60 \text{ W}/(4 \cdot 3,14 \cdot 10^{-3} \text{ Wm}^{-2})} = 69 \text{ m}$. Ta način, da iz izmerjene gostote svetlobnega toka in znanega oddanega svetlobnega toka izračunamo oddaljenost svetila, uporabljajo v astronomiji za določanje oddaljenosti zvezd. Namesto žarnice si predstavljajmo zvezdo, namesto ravne ploskvice na sredini papirja pa Zemljo v določeni razdalji od zvezde. Predno opišemo omenjeni način določevanja oddaljenosti zvezd, pa se za hipec ustavimo pri Soncu.

Sonce je najmočnejše svetilo, ki ga vidimo na nebu. Kaj lahko izmerimo pri Soncu? Izmerimo gostoto svetlobnega toka, ki ga prestrežemo s Sonca na Zemlji $j_0 = 1350 \text{ W/m}^2$ (*solarna konstanta*), oddaljenost Sonca od Zemlje pa poznamo $r_0 = 1,5 \cdot 10^{11} \text{ m}$. Iz teh podatkov sledi, da ima Sonce svetlobno moč ali da oddaja svetlobni tok $P_0 = j_0 \cdot 4\pi r_0^2 = 1350 \text{ W/m}^2 \cdot 4 \cdot 3,14 \cdot (1,5 \cdot 10^{11})^2 \text{ m}^2 = 3,8 \cdot 10^{26} \text{ W}$ ali okroglo $4 \cdot 10^{26} \text{ W}$. Temu ogromnemu svetlobnemu toku, ki ga oddaja (izseva) Sonce enakomerno na vse strani, rečemo v astronomiji *izsev Sonca*. Podobno govorimo o *izsevu zvezd*. Če torej poznamo izsev Sonca ali kake zvezde in izmerimo gostoto svetlobnega toka, ki prihaja z njih, lahko izračunamo njihovo oddaljenost od nas.

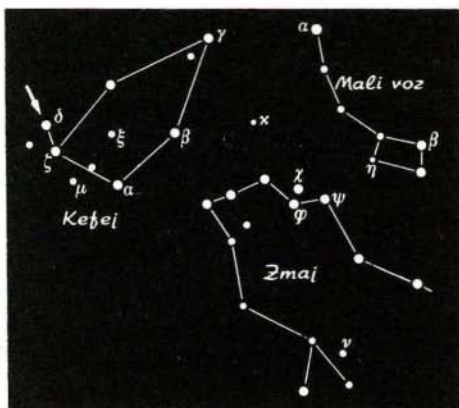
No, gostote svetlobnega toka z zvezd sicer ni težko izmeriti (razen, če je zvezda skrajno šibka), a za večino zvezd ne poznamo izseva. Ugotoviti izsev zvezd pa ni niti najmanj preprosto. Vendar nekaterim zvezdam lahko izsev ocenimo. Take so na primer *kefeide*. To so zvezde, ki *pulzirajo*, se širijo in krčijo. Ko spreminjajo velikost (polmer), se jim pri tem spreminja površinska temperatura in tako tudi izsev. Za *kefeide* so ugotovili, da je *perioda njihovega pulziranja odvisna od povprečnega izseva zvezde*. Če je perioda daljša, je povprečni izsev večji, vendar med njima ne velja premo sorazmernost (slika 2). Spreminjanje izseva kefeide zabeležimo na Zemlji kot spreminjanje sprejete gostote svetlobnega toka z zvezde oziroma spreminjanje sija zvezde*. V jasni noči ali več zaporednih nočeh večkrat merimo sij pulzirajoče zvezde in narišemo graf, ki kaže, kako se sij zvezde

spreminja s časom. Tak graf - *krivuljo sija* prikazuje slika 3. Iz grafa razberemo periodo spreminjanja sija, po tem pa ocenimo povprečni izsev $\bar{P}$ zvezde (slika 2). Pri izmerjeni povprečni sprejeti gostoti svetlobnega toka* $\bar{j}$ končno izračunamo približno oddaljenost kefeide $r = \sqrt{\bar{P}/(4\pi\bar{j})}$.



* Astronom pravzaprav meri sij zvezde. Iz izmerjenega sija pa nato računa sprejeto gostoto svetlobnega toka z zvezde. Za sij dveh zvezd m in m_0 in gostoti svetlobnega toka j in j_0 , ki ga od teh zvezd sprejmemo na Zemlji, velja enačba $j/j_0 = 10^{-0,4(m-m_0)}$. Če $m_0 = 1$, je $j_0 = 10^{-8} \text{ W/m}^2$. Več o siju glej v: F.Avsec - M.Prosen, *Astronomija*, DMFA SRS, Ljubljana 1989, str.21.

Slika 4. Lege kefeide δ Kefeja. Te zvezde ni težko izslediti. Spremembo njenega sija zasledimo že s prostim očesom. Precej truda in spretnosti pa je že treba, da iz neposrednih opazovanj s prostim očesom ugotovimo periodo spreminjanja sija (pulziranja). *Opomba:* Zvezda δ Kefeja je okoli petdesetkrat večja od Sonca. Pri pulziranju spreminja polmer kar za dva polmera Sonca, to je za približno $1,4 \cdot 10^6$ km.



Med kefeidami je najbolj znana δ Kefeja. Sij se ji spreminja s periodo 5,4 dneva (slika 3). Izmerjena povprečna gostota svetlobnega toka s te zvezde je okoli $\bar{j} = 7 \cdot 10^{-10} \text{ W/m}^2$. S slike 2 ocenjeni povprečni izsev je $\bar{P} = 2000P_0$. Približna oddaljenost te zvezde od nas je $r = \sqrt{2000 \cdot 3,8 \cdot 10^{26} \text{ W} / (4 \cdot 3,14 \cdot 7 \cdot 10^{-10} \text{ Wm}^{-2})} = 980$ svetlobnih let.

Kefeide so orjaške zvezde. Imajo ogromne izseve. Zato jih vidimo z velikih oddaljenosti. Zasledimo jih v zvezdnih kopicah in bližnjih galaksijah. Iz opazovanja kefeid tako lahko določimo razdaljo do teh sistemov.

Marijan Prosén

NALOGE O DVEH KRAJIH NA ISTEM VZPOREDNIKU

Dva kraja ležita na istem zemeljskem vzporedniku z zemljepisno širino $\varphi = 45^\circ$. Prvi kraj ima zemljepisno dolžino $\lambda_1 = 25^\circ$, drugi pa $\lambda_2 = 77,5^\circ$ (pozitivno zemljepisno dolžino imajo kraji vzhodno od Greenwicha). Polmer Zemlje je $r_0 = 6370$ km. Izračunaj:

- medsebojno razdaljo obeh krajev;
- hitrost teh dveh krajev zaradi vrtenja Zemlje;
- čas vzida Sonca v enem kraju glede na čas vzida Sonca v drugem kraju.

Marijan Prosén

NOVI TIPI V TURBO PASCALU

V prejšnji številki smo spoznali, kako uporabljamo okolje Turbo pascala. V tem članku pa si oglejmo Turbo pascal kot jezik. Ima več lastnosti, ki razširjajo standardni pascal. Spoznali bomo dodatne tipe in delo z njimi. Nove številске tipe lahko zasledimo v verzijah 4 in 5, medtem ko so bili nizi vpeljeni že v verziji 3. Omenimo še, da je najnovejša verzija Turbo pascala, verzija 5.5, prinesla še nekaj novosti prav na to področje. Tako je bil vpeljan nov podatkovni tip **object**, s pomočjo katerega lahko Turbo pascal uporabljamo kot objektno usmerjeni jezik. Vendar o objektnem programiranju kdaj drugič.

1. Dodatni vgrajeni številski tipi

Poleg standardnih tipov **real** in **integer** za delo s števili, pozna Turbo pascal še več drugih tipov. Oglejmo si najprej celoštevilске tipe.

Ime	Območje	Format
shortint	-128..127	predznačeni 8-bitni
integer	-32768..32767	predznačeni 16-bitni
longint	-2147483648..2147483647	predznačeni 32-bitni
byte	0..255	nepredznačeni 8-bitni
word	0..65535	nepredznačeni 16-bitni

Vseh pet tipov lahko mirno mešamo med sabo. Rezultat je vedno tistega najmanjšega tipa, ki vključuje vse uporabljene tipe. Seveda pa moramo paziti pri prirejanju vrednosti spremenljivkam, da ne prekoračimo obsega. Prednost teh novih celoštevilskih tipov je v tem, da lahko natančneje določimo, s kakšnimi števili želimo delati. Še posebej je koristen tip **longint**, saj se hitro zgodi, da moramo računati s celimi števili, večjimi od 32767 oz. 65535. Npr. radi bi izračunali zmnožek vseh naravnih števil do 9.

```

program produkt;
var i,p : integer;
begin
  p := 1;
  for i := 2 to 9 do p := p * i;
  writeln('9! = ',p);
end.
```

Program nam izračuna, da je produkt -30336 , kar je očitno narobe. Če pa spremenljivko `p` deklariramo kot `longint`, bomo dobili pravilni rezultat 362880.

Omeniti velja še, da je bil tip `byte` vpeljan že v verziji 3.

Turbo pascalu lahko cela števila posredujemo tudi kot šestnajstiške konstante. To storimo tako, da kot prvi znak števila uporabimo `$`. Tako npr. `$A1` pomeni število 161, `$F4` je 244 ipd. Šestnajstiške konstante so lahko med `$00000000` in `$FFFFFFFF`.

Poleg standardnega tipa za realna števila pozna Turbo pascal še štiri.

Ime	Območje	Točnih cifer
real	$2.9 \times 10^{-39} \dots 1.7 \times 10^{38}$	11-12
single	$1.5 \times 10^{-45} \dots 3.4 \times 10^{38}$	7-8
double	$5.0 \times 10^{-324} \dots 1.7 \times 10^{308}$	15-16
extended	$3.4 \times 10^{-4932} \dots 1.1 \times 10^{4932}$	19-20
comp	$-2^{63} + 1 \dots 2^{63} - 1$	19-20

Zadnji tip `comp` lahko vsebuje le cela števila v navedenem obsegu, ki je približno $-9.2 \times 10^{18} \dots 9.2 \times 10^{18}$ in ga uporabljamo, če potrebujemo res ogromna cela števila.

Medtem ko so nam celoštevilski tipi vedno na voljo, dodatnih štirih realnih tipov ne moremo uporabiti, če ne vključimo izračunavanja preko matematičnega koprocesorja. To najenostavneje storimo v samem programu, tako da v prvo vrstico datoteke napišemo `{ $N+, E+ }`. Na ta način bomo v verziji 5 poskrbeli, da se bo naš program lahko izvajal na vseh računalnikih, tudi tistih, ki niso opremljeni z matematičnim koprocesorjem.

Z uporabo dodatnih tipov lahko delamo z bistveno večjimi števili, lahko pa tudi povečamo natančnost računanja.

2. Nizi

Delo z nizi je prava Ahilova peta standardnega pascala. Ker pascal ne pozna standardnega tipa za niz, si moramo pomagati s poljem znakov. To samo po sebi ne bi bilo nič slabega, če bi imeli na voljo ustrezne funkcije za delo s tako definiranimi tipi. Vendar jih v standardnem pascalu ni, čeprav jih v praksi mnogokrat potrebujemo. Zato so avtorji različnih pascalskih prevajalnikov poskrbeli za ustrezne razširitve. Žal jih je večina prikojila nekoliko po svoje, tako tudi avtorji Turbo pascala.

Turbo pascal pozna poseben tip **string**. Pri deklaraciji spremenljivk navedemo tudi maksimalno dolžino niza, ki mora biti med 1 in 255. Če le-ta ni navedena, privzamemo maksimalno dolžino 255.

```
type vrstica = string[80];
var dolga_vrstica : string;
    vrs1 : vrstica;
```

Nizi so spremenljivih dolžin. Deklarirana je *maksimalna* dolžina niza, dolžina, ki je niz tega tipa ne more preseči. Turbo pascal si za vsak niz zapomni njegovo dejansko dolžino. Torej nam ni potrebno uvajati posebnih spremenljivk - računalnik bo vedno vedel, kateri del maksimalno deklariranega prostora je zavzet. Pri branju spremenljivk tipa **string** uporabljamo stavek **readln**. Narekovajev pri tem ne pišemo. Če pa jih boste napisali, bodo del niza.

```
write('Ali naj nadaljujem (da/ne) ? ');
readln(odg);
if odg = 'ne' then ...
```

Vsi tipi nizov so med seboj enakovredni in jih lahko mešamo. Če tako navedemo, da je na nekem mestu potrebna spremenljivka tipa **string[23]**, lahko uporabljamo tudi spremenljivke, deklarirane kot krajši in daljši nizi. Seveda pa bodo predolgi nizi avtomatično odrezani (krajši pa ohranijo svojo vsebino, saj je 23 maksimalna in ne dejanska dolžina).

2.1. Operacije nad nizi

Oglejmo si sedaj, kaj lahko počnemo z nizi.

- Posamezne znake iz niza dobimo kot posamezne komponente polja. Tako je npr. **vrs1[1]** prvi, **vrs1[10]** pa deseti znak niza **vrs1**. Na ta način lahko tudi spremenimo posamezni znak v nizu npr. **vrs1[5] := 'e'**. Pri tem pa lahko uporabljamo le indekse med 1 in trenutno dolžino niza. Na ta način torej lahko le spreminjamo obstoječe znake v nizu, ne moremo pa niza podaljševati. Nize lahko torej jemljemo kot polja znakov ali pa kot celoto.
- Nize lahko primerjamo po velikosti. Le-ta je določena glede na kodo ASCII istoležnih znakov. Tako je npr. niz **'Pascal'** manjši od niza **'pascal'**, ker je v tabeli znakov črka P pred črko p. Če istoležnega

znaka ni (en niz je daljši od drugega), ima obstoječi znak večjo vrednost. Tako je niz 'Da' večji od niza 'D'. Znaki se primerjajo od leve proti desni. Primerjanje se zaključi pri prvem paru neenakih znakov. Tako je 'dinar' manjši od 'dolar'. Pri primerjanju lahko uporabljamo naslednje relacijske operatorje z znanim pomenom: =, <>, <, >, <=, >=.

- nize lahko stikamo s pomočjo operatorja '+'.

```
a := 'Turbo';
b := 'pascal';
c := 'Programski jezik ' + a + ' ' + b;
```

Če je dobljeni niz predolg, se presežek odreže.

2.2. Procedure in funkcije

- **function concat(s1, ..., sn) : string;**
 Spajanje nizov s1, ..., sn. Funkcija je nekaj posebnega, saj ima spremljivo število argumentov. Primer:

```
a := concat('Programski ', 'jezik ', 'pascal');
```

- **function copy(s: string; i, j: integer): string;**
 Prepis podniza. Iz niza s vzamemo j znakov in sicer od i-tega dalje. Če je i večji od dolžine niza s, dobimo prazen niz. Če je j prevelik, dobimo segment niza s od i-tega znaka do konca. Primer:

```
a := 'pascal';
b := copy(a, 5, 3);
writeln(b);          ----->      al
```

- **procedure delete(var s:string; i,j:integer);**
 Brisanje podniza iz niza. Iz niza s odstrani j znakov in sicer od i-tega dalje. Če je i večji od dolžine niza s, ni zbrisan noben znak. Če je $i + j - 1$ večje od dolžine niza, je rezultat prvih $i - 1$ znakov niza s (zbriše se toliko znakov, kot se pač lahko). Primer:

```

a := 'pascal';
delete(a,2,4);
writeln(a);          ---->      P1

```

- procedure insert(s1:string; var s2:string; i:integer);
Vrivanje niza v niz. V niz s2 na i-to mesto vstavimo niz s1. Primer:

```

a := 'Programski jezik pascal';
insert ('Turbo ', a, 18);

```

- function length(s: string): integer;
Dolžina niza. Vrne dolžino niza s. Če je niz s prazen, je dolžina 0.
Primer:

```

var a : string[100];
begin
  a := 'Programski jezik pascal ';
  writeln('dolzina = ';length(a));

```

- function pos(s1,s2: string): integer;
Začetek podniza v nizu. Poišče prvo pojavitev podniza s1 v nizu s2.
Če ga ni, vrne 0. Primer:

```

var s : string;
begin
  s := '      123.5';
  { spremeni vodilne presledke v nicle }
  while pos(' ',s) > 0 do
    s[pos(' ',s)] := '0';

```

- procedure str(r: real; var s: string); ali
 procedure str(r: integer; var s: string);
Spremeni število v niz. Spremeni realno ali celo število v niz. Pri tem spremembo lahko nadzorujemo kot pri uporabi write, z določanjem širine izpisnega polja in (pri realnih številih) z določanjem števila decimalk. Učinek je enak kot pri ukazu write, le-da se tukaj rezultat pač izpiše v spremenljivko tipa string. Primer:

```

str(25.3232:10:2,s);
writeln('Niz =',s);  ---->   Niz =      25.32

```

- `procedure val(s:string; var v:real; var i:integer);` ali `procedure val(s:string; var v:integer; var i:integer);`
Pretvori niz v število. Če je v nizu zapisana realna ali celoštevilčna konstanta, dobi parameter `i` vrednost 0 in `v` vrednost te konstante. Če pa je pri pretvorbi prišlo do napake, torej če v `s` ni smiselni številski niz, nam `i` vrne mesto prvega znaka v nizu, pri katerem so nastopile težave. Tako kot se prejšnja procedura obnaša podobno kot `write`, je ta podobna podprogramu `read`.

Za konec pa še nekaj nalog z nizi

1. Izračunaj kvocient dveh števil na 200 decimalk natančno.
2. Ugotovi, če je beseda palindrom.
3. V danem aritmetičnem izrazu ugotovi, če so oklepaji pravilno postavljeni.
4. Preberi niz in ugotovi, če ustreza imenu datoteke v operacijskem sistemu MS-DOS.

Matija Lokar

ENA VESOLJSKA

Oni dan sem v knjigi "Restavracija ob koncu Vesolja" avtorja Douglasa Adamsa prebral naslednji zanimivi "dokaz":

Ve se, da obstaja neskončno svetov, čisto preprosto že zato, ker je neskončno prostora zanje. Seveda pa niso vsi naseljeni. Torej mora biti naseljenih samo končno mnogo svetov. Sleherno končno število, deljeno z neskončnim, pa je tako blizu ničle, da se sploh ne splača govoriti, torej lahko rečemo, da je povprečje prebivalstva vseh planetov v Vesolju enako nič. Odtod sledi, da je nič tudi skupno število prebivalcev v Vesolju in da so pač ljudje, ki jih od časa do časa srečate, samo proizvod izrojene domišljije.

Hecen dokaz, mar ne. Nekoliko spominja na tiste dokaze, ki pokažejo, da velja $1 = 2$. Kaj pa je narobe z gornjim dokazom?

Sandi Klavžar

33. REPUBLIŠKO TEKMOVANJE SREDNJEŠOLCEV IZ MATEMATIKE

Letos je tekmovanje organizirala Srednja elektrotehniška šola iz Ljubljane, glavni pokrovitelj pa je bil Slovenijales trgovina, Ljubljana. Tekmovanje se je začelo v soboto, 8. aprila ob 9. uri.

Učenci so s svojimi mentorji prihajali v šolo od 7. ure dalje. Tremo so si lahko preganjali ob sendvičih in kokti, ogledali pa so si lahko tudi šolske laboratorije. Ob 8.30 je bila otvoritev tekmovanja s pozdravnima govoroma ravnatelja šole dipl. ing. Miloša Mulha in predsednika Republiškega komiteja za vzgojo in izobraževanje ter telesno kulturo dr. Ludvika Horvata.

Tekmovalci so bili iz 42 srednjih šol iz Slovenije. Prvošolcev je bilo 43, drugošolcev 39, tretješolcev 39 in četrtošolcev 44, skupaj torej 165. Reševali so naslednje naloge:

Prvi letnik

1. Ulomek $37/13$ lahko zapišemo v obliki

$$2 + \frac{1}{x + \frac{1}{y + \frac{1}{z}}}$$

Kolikšna so naravna števila x , y in z ?

2. Dokaži trditev: izraz $2x + 3y$ je deljiv s 17 pri natanko istih parih celih števil (x, y) kot izraz $9x + 5y$.
3. Skupina prijateljev je med šolskim letom pridno varčevala. Pred odhodom na počitnice so si denar razdelili. Najprej so najstarejšemu dali 100000 din in desetino ostanka, drugemu 200000 din in desetino novega ostanka, tretjemu 300000 din in desetino novega ostanka ... Na ta način je vsak izmed njih dobil enak znesek. Koliko prijateljev je bilo v skupini?
4. Nad stranicami pravokotnega trikotnika ABC (s pravim kotom pri C) načrtamo polkroge na zunanjo stran. Na polkroga nad katetama postavimo po eno tangento, vzporedno s kateto, nad katero je polkrog narisana, na polkrog nad hipotenuzo pa postavimo dve tangenti, vzporedni s katetama. Kolikšna je ploščina pravokotnika, ki ga omejujejo tangente, če merita kateti trikotnika 6 in 8 cm?

$$+f\left(\frac{1}{n}\right) + f\left(\frac{2}{n}\right) + f\left(\frac{3}{n}\right) + \dots + f\left(\frac{n}{n}\right)$$

3. Naj bo G gorišče elipse $x^2/a^2 + y^2/b^2 = 1$, ($a > b > 0$). Določi množico središč vseh tetiv skozi G (krivuljo, na kateri ležijo središča).
4. Biljardna miza dimenzije $m \times n$, kjer sta m in n tuji naravni števili, ima luknje samo v ogliščih. Iz enega oglišča pošljemo kroglo pod kotom 45° proti nasprotnemu robu. V katero oglišče bo padla in po koliko odbojih?

Po prestanih naporih so učenci odšli na kosilo v Dom učencev tehniških šol Tabor na Vidovdanski ulici, kjer so nekateri prespali že s petka na soboto. Z mislimi pri nalogah so si tekmovalci popoldne ogledali Cankarjev dom in ob 15. uri prisostvovali koncertu, ki so ga v Mali dvorani izvajali učenci Srednje glasbene in baletne šole iz Ljubljane. Vsi nastopajoči so bili prvonagrajenci 18. republiškega tekmovanja učencev in študentov glasbe Slovenije.

Ob 17. uri je bila uradna razglasitev rezultatov. Prof. dr. Anton Suhadolc je v pozdravu povedal nekaj misli o študiju matematike in o možnosti zaposlitve ter pozval tekmovalce, da bi bili gotovo zelo primerni za ta študij. Nato je razdelil nagrade in pohvale, ravnatelj pa še darila, ki so jih za nagrajence namenile delovne organizacije.

Ob tekmovanju je izšlo skrbno pripravljeno glasilo s prispevki priznanih strokovnjakov in učencev šole - gostiteljice.

Tokrat so se najbolj izkazali:

- v prvem letniku:

1. nagrada: Tomaž CEDILNIK in Mojca VILFAN (oba SNŠ Ljubljana)
 2. nagrada: Urška KOREN (NSC Nova Gorica)
 3. nagrada: Robi MOHORČIČ (SŠPTNU Novo mesto), Marko SLAPAR (SŠPRNMU Kranj) in Gregor ŠEGA (SNŠ Ljubljana)
- Pohvala: Damjan DEMŠAR (CSUI Jesenice), Hiacinta PINTAR (SŠ PRNMU Kranj), Matjaž KOTNIK in Andrej KRAJNC (SNŠ MZ Maribor), Andrej GORIŠEK, Jernej STARE, Marko KUKRIKA, Klemen JERINA in Andrej STROJNIK (SNŠ Ljubljana), Borut DRETAR (ŽG ŽŠŠ Maribor), Vladka ŠETINA (SŠFZ Ljubljana), Peter LUŽEVIČ (STŠ MT Celje), Dejan LIPOVEC (SCTPU Murska Sobota), Gregor IRT (SŠR Ljubljana), Janez VIHER (SERŠ Maribor), Dean VELDIN (SMSM Piran), Roman VERHOVŠEK (SŠ FLL Ljubljana), Mišo VUKADINOVIČ (SEŠ Ljubljana), Robert MIKELJ (SGŠ IK Ljubljana), Jure KNEZ (SŠKSU Trbovlje), Mateja ANTOLIČ (SŠC Ptuj), Denis PAVLINAC (SŠPTNU Novo mesto), Predrag ŠKRINJAR (SDENMŠ SK Sežana), Mihael JURIČ (SŠTUD Kočevje).

- v drugem letniku:

3. nagrada: Dušanka KOCIĆ (STŠ MT Celje)

Pohvala: Marko PETRUŠIČ, Matjaž KOBAL in Primož ŠKULJ (vsi SNŠ Ljubljana), Žiga KROFL in Nataša RAVNIK (CSUI Jesenice), Leon ZORNADA (SPNMŠ Koper), Jurij VELKAVRH (SŠEN Ljubljana), Roberto COBALTI (SMSM Piran), Janez ŠTRANCAR (NSC Nova Gorica), Borut HORVAT (SNŠ MZ Maribor).

- v tretjem letniku:

2. nagrada: Borut NOVAK (CSUI Jesenice) in Andrej BAUER (SNŠ Ljubljana)

Pohvala: Franci KRAMER (SŠPTNU Novo mesto), Gašper FIJAVŽ, Primož POTOČNIK, Roman MODIC, Anamarija BORŠTNIK, Martin RAIČ in Renata NOVAK (vsi SNŠ Ljubljana), Damjan GOROPEVŠEK (SKSMŠ Maribor), Marko TRETJAK (SŠTNPU Ravne na Koroškem), Alenka KAVKLER in Jure DOBNIKAR (SNŠ Maribor), Aleš ČASAR (SCTPU Murska Sobota).

- v četrtem letniku:

1. nagrada: Andrej VILFAN (SNŠ Ljubljana)

2. nagrada: Jaka CIMPRIČ (SNŠ Ljubljana)

3. nagrada: Aleš VAVPETIČ (SENŠ RM Kamnik), Timotej EČIMOVIČ (SNŠ Ljubljana) in Boris TOPLAK (SŠR Ljubljana)

Pohvala: Iztok FELICIJAN in Jelko KOVAČIČ (SEŠ Ljubljana), Peter HOLOZAN (SENŠ RM Kamnik), Marjan JERMAN (SŠNMEU Trbovlje), Damir SRPAK (SŠE Ljubljana), Mihael MESARIČ in Aleš ŠTEVANEC (SCTPU Murska Sobota), Samo ZABOVNIK (CSŠ Titovo Velenje), Tatjana OZBIČ (STNŠ Postojna), Sandi BERK (SGŠ IK Ljubljana).

Vsem, ki so osvojili priznanja, čestitamo, za tiste z malo manj sreče pa znana misel: ... važno je sodelovati, ...

Agata Tiegl

KVADRATA

Dana sta kvadrata $ABCD$ in $PQRS$ s ploščinama po 100 cm^2 . Ogljišče P drugega kvadrata leži v središču prvega. Stranici AB in PQ se sekata v X , BC in PS pa v Y . Kolikšna je ploščina štirikotnika $PXBY$, če je daljica CY dolga 4 cm ?

Darjo Felda

6. BALKANSKA MATEMATIČNA OLIMPIADA

Letošnja Balkanska matematična olimpiada ali kratko Balkaniada je potekala od 29. aprila do 6. maja v Splitu. Organizacija je bila res odlična, saj smo stanovali v enem najboljših Splitskih hotelov, pa tudi izletov in drugega programa ni manjkalo. Tako smo si ogledali stari del mesta Split z Dioklecianovo palačo, otok Brač, Trogir in še veliko drugih okoliških znamenitosti. Balkaniade smo se udeležili predstavniki petih balkanskih držav: Bolgarije, Cipra, Grčije, Jugoslavije in Romunije. Našo državo smo zastopali najbolje uvrščeni z zveznega tekmovanja v Skopju: Rade TODOROVIĆ iz Pirota, Andrej VILFAN iz Ljubljane ter Milena RADNOVIĆ, Predrag GRKOVIĆ, Rastko MARINKOVIĆ in Nebojša NIKOLIĆ, vsi iz Beograda.

V štirih urah in pol smo morali rešiti štiri naloge. Odrezali smo se zelo dobro, saj nihče iz naše ekipe ni odšel domov "praznih rok". Prvo nagrado so dobili Rade Todorović, Rastko Marinković in Milena Radnović, drugo Predrag Grković in Andrej Vilfan ter tretjo Nebojša Nikolić. Kot ekipa smo bili tretji, za Bolgarijo in Romunijo ter pred Grčijo in Ciprom.

Andrej Vilfan



PRESEKOVA KRIŽANKA – Rešitev iz P-4

OTVOR KARTE BOLGARIJE	ISTOČNI SLOVENIJA	—	ALBA	GRČIJA	ROMUNIJA ROMUNIJA	HRVATSKA	Σ	KOLIKO POČETNO SLOVA
SMUČ SLOVA	S	M	U	K	HAJDER DARJA KONČEN	E	S	S
HAJDER DARJA KONČEN	V	I	N	O	HAJDER DARJA KONČEN	P	L	U
HAJDER DARJA KONČEN	A	N	I	T	HAJDER DARJA KONČEN	I	M	E
HAJDER DARJA KONČEN	K	U	J	O	HAJDER DARJA KONČEN	K	A	L
HAJDER DARJA KONČEN	S	A	M	A	HAJDER DARJA KONČEN	R	A	A
HAJDER DARJA KONČEN	Š	R	E	L	HAJDER DARJA KONČEN	A	L	A
HAJDER DARJA KONČEN	R	E	D	Z	HAJDER DARJA KONČEN	A	L	I
HAJDER DARJA KONČEN	E	G	I	D	HAJDER DARJA KONČEN	A	Z	I
HAJDER DARJA KONČEN	S	A	S	I	HAJDER DARJA KONČEN	S	R	T
HAJDER DARJA KONČEN	E	T	O	N	HAJDER DARJA KONČEN	A	K	E
HAJDER DARJA KONČEN	K	A	N	A	HAJDER DARJA KONČEN	P	A	K

V VISOKI DRUŽBI

Zgodilo se je na kongresu, kjer so se zbrali številni najimenitnejši matematiki iz mnogih dežel. Potem, ko so zjutraj končali z zajtrkom, je francoski matematik **Eduard Lucas** (1842 – 1891) zbranim za omizjem zastavil naslednjo nalogo:



"Vzemimo, da slehernega dne opoldne iz Le Havra * odpelje ladja čez Atlantski ocean proti New Yorku, istočasno pa tudi iz New Yorka krene ladja v nasprotni smeri proti Le Havru. V vsako smer traja vožnja natanko sedem dni.

Koliko teh ladij bo tedaj na svoji poti v New York srečala ladja, ki bo danes opoldne odrinila iz Le Havra?"

No, se boste preizkusili? V pomoč vam tedaj ponujamo kar dva namiga. Prvi pravi, da si praviloma dobri matematiki med seboj ne zastavljajo (pretirano) lahkkih problemov, drugi pa, da vam bo zelo koristilo, če se boste naloge lotili s svinčnikom v rokah.

Vilko Domajnko

* Le Havre – francosko pristanišče na atlantski obali

30. ZVEZNO TEKMOVANJE IZ MATEMATIKE ZA SREDNJEŠOLCE

Tekmovanje je letos organiziralo Društvo matematikov SR Makedonije v Skopju od 20. do 23. aprila 1989. Sodelovalo je 132 učencev iz vseh republik in pokrajin. Slovenijo je zastopalo 18 tekmovalcev in sicer:

- iz prvega letnika Tomaž Cedilnik, Mojca Vilfan, Urška Koren, Gregor Šega, Robi Mohorčič in Marko Slapar;
- iz drugega letnika Dušanka Kocič in Marko Petrušič;
- iz tretjega letnika Andrej Bauer, Borut Novak in Renata Novak;
- iz četrtega letnika Andrej Vilfan, Jaka Cimprič, Timotej Ečimovič, Aleš Vavpetič, Boris Toplak, Marjan Jerman in Tatjana Ozbič.

Vodila sta jih študenta matematike Peter Anastasov in Matjaž Željko, član zvezne tekmovalne komisije iz Slovenije pa je bil asistent Darjo Felda. Tekmovalci so prispeli v Skopje v četrtek popoldne. Prebivali so v hotelskem naselju "Olimpijska vas", zgrajenem za čas mednarodne šahovske olimpiade leta 1972.

Na matematični gimnaziji "Rade Jovčeski Korčagin" so v soboto dopoldne učenci štiri ure reševali naslednje naloge:

Prvi letnik

1. Za pozitivna števila x , y in z velja $x + y + z = 1$. Dokaži, da je $(1 + 1/x)(1 + 1/y)(1 + 1/z) \geq 64$. Kdaj velja enakost?
2. Naj za naravna števila $x_1, x_2, \dots, x_{1990}$ velja $x_1^2 + x_2^2 + \dots + x_{1989}^2 = x_{1990}^2$. Dokaži, da sta vsaj dve izmed njih sodi.
3. Načrtaj trikotnik ABC , katerega stranica BC je dolga a , stranica CA dolga b (a in b sta dani pozitivni realni števili) ter $\angle CAB = 3 \cdot \angle ABC$.
4. Poišči vsa naravna števila n , za katera velja

$$\left[\sqrt[3]{1} \right] + \left[\sqrt[3]{2} \right] + \dots + \left[\sqrt[3]{n} \right] = 2n.$$

($[x]$ je oznaka za največje celo število, ki ni večje od x .)

Drugi letnik

1. Dana je polkrožnica nad premerom AB in na njej točki C in D , da velja:
 - a) točka C pripada loku $\widehat{AD}$;

- b) $\angle CSD$ je pravi, če z S označimo središče daljice AB .
 Naj bo E presek nosilk daljic AC in BD , F pa presek daljic AD in BC . Dokaži, da je vektor $\overrightarrow{EF}$ neodvisen od izbire točk C in D .
2. Dokaži: če za števila a , b in c velja $a \geq 1$, $b \geq 1$ in $c \geq 1$, potem velja tudi $\sqrt{a-1} + \sqrt{b-1} + \sqrt{c-1} \leq \sqrt{c(ab+1)}$. Kdaj velja enačaja?
3. Poišči vse trojke (x, y, z) celih števil, za katere velja $x^y - 2^z = 1$.
4. Dani sta tuji si naravni števili m in n . V vsakem polju neskončne šahovske table je zapisano po eno realno število, da velja: vsota števil v vsakem pravokotniku dimenzije $m \times n$ je enaka nič. Dokaži, da sta vsaj dve od zapisanih števil med seboj enaki.

Tretji in četrti letnik

1. Poišči vse četvorke (x_1, x_2, x_3, x_4) pozitivnih števil, da velja

$$x_1 + x_2^2 + x_3^3 = 3$$

$$x_2 + x_3^2 + x_4^3 = 3$$

$$x_3 + x_4^2 + x_1^3 = 3$$

$$x_4 + x_1^2 + x_2^3 = 3$$

2. Za polinom $p(x)$ z realnimi koeficienti velja $p(x) \geq 0$ za vsak realen x . Dokaži: obstajata polinoma $q(x)$ in $r(x)$ z realnimi koeficienti, da lahko zapišemo $p(x) = q^2(x) + r^2(x)$ za vsak realen x .
3. Koliko je urejenih trojk (A, B, C) , za katere velja:
- $A \cup B \cup C = \{1, 2, \dots, n\}$,
 - $A \cap B \cap C = \emptyset$,
 - $A \cap B \neq \emptyset$.
4. Dana je kocka $ABCD A_1 B_1 C_1 D_1$. Ali obstaja premica, ki seka vsako od nosilk daljic AB , CC_1 , $A_1 D_1$ in DB_1 ?

Popoldne so si ogledali nekaj kulturno - zgodovinskih znamenitosti Skopja in okolice. Medtem so člani komisije in spremljevalci ekip pregledali naloge. Posebej težka je bila četrta naloga za drugi letnik, saj je ni nihče rešil niti polovico.

V nedeljo dopoldne je bila slavnostna podelitev nagrad. Naši tekmovalci so bili tokrat uspešni. Andrej Vilfan iz četrtega letnika je osvojil drugo nagrado, tretješolec Andrej Bauer pa tretjo. Pohvaljeni so bili Tomaž Cedilnik iz prvega letnika ter Jaka Cimprič in Marjan Jerman iz četrtega letnika. Razen Marjana Jermana, ki obiskuje SŠNMEU iz Trbovelj, so vsi tu naštetih učenci SNŠ iz Ljubljane.

Na podlagi rezultatov tekmovanja je zvezna tekmovalna komisija izbrala šestčlansko zvezno ekipo za nastop na balkaniadi (konec aprila v Splitu) in olimpiadi (julija v Braunschweigu /ZRN/, rojstnem mestu Carla Friedricha Gaussa), vanjo je bil iz Slovenije izbran Andrej Vilfan.

Iz Skopja smo se odpravili domov v ponedeljek v ranih jutranjih urah.

Matjaž Željko

30. MEDNARODNA MATEMATIČNA OLIMPIADA

Letošnja mednarodna matematična olimpiada je potekala od 16. do 24. julija v Braunschweigu (ZRN), rojstnem mestu Karla Friedricha Gaussa. V jugoslovanski ekipi smo bili: Rade Todorović iz Pirota, Milena Radnović, Predrag Grković, Rastko Marinković in Nebojša Nikolić iz Beograda ter Jaka Cimprič iz Ljubljane.

Gospodarska kriza je tako prizadela finančno stanje inštitucij, ki naj bi dajale denar, da je Hamid Kulosman, vodja ekipe, komaj nabral dovolj denarja za tridnevne priprave v Sarajevu in za karte za vlak. Nizek standard je tako užalil Beograjčane, da so hoteli demonstrativno bojkotirati olimpiado, kot so rekli "radi nepoštovanja prema olimpijskoj ekipi". No, zadnji hip so si premislili in še pravočasno prišli na železniško postajo.

Vožnja je bila dolga in naporna. Najprej smo se peljali s kušejem do Münchna, nato pa smo presedli za Hannover. Hamid je z nekaj dopisovanja na vozovnice dosegel, da smo se peljali v prvem razredu. V Hannovru smo še enkrat presedli in se nato v nabito polnem vlaku vozili še kakšno uro. Na postaji so nas že čakali organizatorji. Nastanili so nas v mladinski hotel, precej oddaljen od središča mesta.

Program je bil izredno nabit s političnimi govori in ekskurzijami. Nekaj podrobnosti: ponedeljek: otvoritev, ogled mesta; torek, sredo: tekmovanje - vsak dan tri naloge ter štiri ure in pol časa za razmišljanje; četrtek, petek, sobota: čez dan ekskurzije, zvečer pa zabavne prireditve; nedelja: zaključna prireditve; ponedeljek: vrnitev (trik z dopisovanjem na karte tokrat ni uspel). Kot se spodobi za Jugoslovane smo špricali znaten del programa in se posvetili nakupovanju.

Rezultati: Rade je osvojil vse točke in dobil prvo nagrado, Predrag, Rastko in Nebojša so osvojili drugo nagrado, Milena tretjo, Jaka pa pohvalo. Kot ekipa smo zasedli enajsto mesto, takoj za Madžari. Najboljši so bili Kitajci, Romuni in Rusi.

Organizacijo naslednje olimpiade so zaupali Kitajski. Kandidati naj se psihično pripravijo za dolgo pot s transsibirsko železnico.

Jaka Cimprič



SLIKOVNA KRIŽANKA – MA

297 – 108 = 189 ↖			TRAK ZA ODLIKO- VANJA	OGLAS V CASOPISU	KROG- LASTA BAKTERI- JA	ELIPSAST KROZNIK	VALJEVO	NEGA- TIVNO NAELEK- TREN DELEC	VRSTA HRASTA	12 + 8 = 20 ↖
SESTAVIL MARKO BOKALIC	LUMP, FALOT IGRALKA KRA- VANJA									PAS, OBMOČJE
4 – 5+										LOGI PRO SLO
NEMŠKA SEVERNA SOSEDA							JUNAK GOTOV- CEVE OPERE KONICA			LUK ARA AND HIE
PREDSE- DNİK ZIS MARKO- VIC					DEL KROŽ- NICE DEL ROKE				NANOS GEO- LOŠKIH PLASTI RIS.FILM	
ANG.DOLŽ.MERA						BOJAZEN				
NAUK O FUNKCIJAH V MATEMATIKI						KRAJ NA POHORJU				
AUGUST ŠENOVA			MESTO VZH.OD RIMA POSODA ZA MLEKO							DC ZE G SO
SLADEK SOK RASTLIN							KOSTNICA SILA KI, POV- ZROČI SUKANJE			
IGRALKA GARDNER				NEČIS- TOČA INSTINKT						
NEMŠKI FILMSKI REŽISER					HENRIK TUMA KRAD- LJIVEC			UPANJE ITAL. PISATELJ		
ULIT KOVINSKI BLOK						VOJAK NOVINEC GRŠKA CRKA				
VRH NAD DOLINO TRIGLAV, JEZER										ANG.FIZIK (ZAKON O RAZ- TEZKU)
SRBSKO MOŠKO IME				DRŽAVA V AFRIKI						GOROV JE NA JUGU SZ

TEMATIČNI POJMI

	REKA V ZRN	ZIMSKA SOLATA	3← 2	HRVAŠKI PESNIK UJEVIČ	EMIL NAVINŠEK	REKA V SZ	RIMSKI BOG LJUBEZNI	FRNIKOLA	PRED- SEDNIK TOGA	SREDIŠČE VENE- ZUELE
ČNO TI- VJE										
A V BIJI					JMRLI SL. PISATELJ					
PREJ NG					SAMOZA- DOVOLJE- VANJE					
				KAMNITA OGRAJA						
				HROŠČ GOVNAČ						
	STAREJŠI SLOV. FILM						2·3=6 ↑	ENRICO CARUSO		
	MILANO							ODPAD- NIK		
MAČE N.JME						TRIGLAV- SKA DOLINA				
JORA NAD LČAVO						DRAGICA ČADEZ				
			SMUČAR WENZEL							
			TOLMIN- SKA JED							
	PREBIVA- LEC ČRNE CELINE								NEPRI- JETNE SANJE	POLET
	KORALNI OTOK									
		PARADIŽ				VRH KRIVULJE				
						STIK DVEH PLOSKEV				
		REKA V SRBIJI					ZADETEK PRI NO- GOMETU			
		OLIVER TWIST					BUGOJNO			
					MESNA JUHA					
					GOSPO- DINJSKI PLIN					

ENA NALOGA RODI DRUGO

Prispevek *Triktrat o neki nalogi* (Presek 16, 351) me je spodbudil, da tudi sam pristavim lonček in posredujem še eno zanimivo nalogo o dveh ladjah. Do nje sem prišel po naključju.

V tretjem letniku smo pri sinusnem izreku reševali tole nalogo: Ladji A in B sta v razdalji r . Vsaka zase se giblje s stalno hitrostjo, prva pod ostrim kotom α , druga pa pod ostrim kotom β glede na r (slika 1). Srečata se po času t . Izračunaj hitrost posamezne ladje.

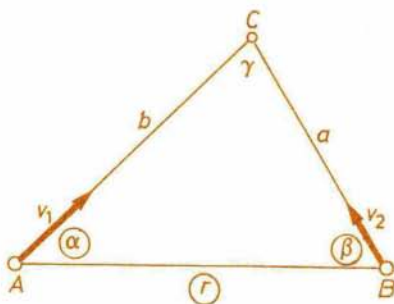
Rešitev te naloge je preprosta:

$$v_1 = r \sin \beta / t \sin(\alpha + \beta) \text{ in } v_2 = r \sin \alpha / t \sin(\alpha + \beta)$$

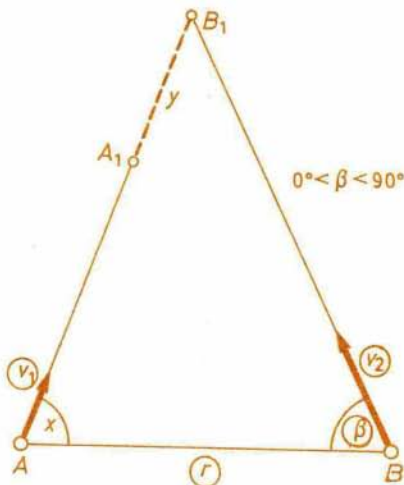
Iz nagajive, a hkrati domiselne pripombe v razredu, ali sinusni izrek "odpove", če je $v_2 > v_1$ (ladja B uide ladji A), pa je nastala naslednja naloga, ki je v razredu nismo reševali.

Ladji A in B sta v medsebojni razdalji r . Prva se giblje s hitrostjo v_1 , druga pa z v_2 ($v_2 > v_1$). Koliko časa in pod kolikšnim kotom glede na r naj plove ladja A , da se ladji B , ki plove pod ostrim kotom β glede na r , najbolj približa?

Slika 1. Ladji se srečata v točki C . Iz sinusnega izreka $a/\sin \alpha = b/\sin \beta = r/\sin \gamma$ ni težko iz danih podatkov izračunati hitrost v_1 in v_2 .



Slika 2. K računanju najmanjše razdalje ladje A od ladje B . V času t pride ladja iz A v A_1 , prepluje razdaljo $|AA_1| = v_1 t$, ladja B pa prepluje $|BB_1| = v_2 t$; y - razdalja med ladjama po času t .



Kot, pod katerim naj plove ladja A, označimo z x ($0^\circ < x < 180^\circ$), razdaljo med ladjama z y , čas pa s t (slika 2). S slike 2 z uporabo sinusnega izreka izpeljemo enačbi:

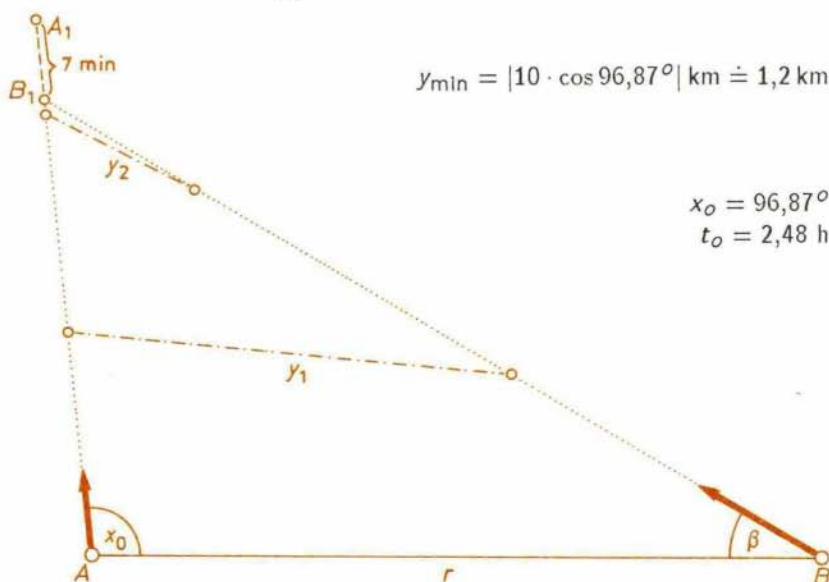
$$(v_1 t + y)/r = \sin \beta / \sin(\beta + x) \quad \text{in} \quad v_2 t / r = \sin x / \sin(\beta + x)$$

Iz obeh enačb sestavimo zvezo med y in x :

$$y = r \left(\sin \beta - \frac{v_1}{v_2} \sin x \right) / \sin(\beta + x)$$

Da dobimo najmanjšo vrednost razdalje y , mora biti prvi odvod gornje funkcije enak nič, torej $y' = 0$. Iz

$$\begin{aligned} \frac{dy}{dx} &= -r \left(\frac{v_1}{v_2} \cos x \sin(\beta + x) + \left(\sin \beta - \frac{v_1}{v_2} \sin x \right) \cos(\beta + x) \right) / \sin^2(\beta + x) = \\ &= -r \sin \beta \left(\frac{v_1}{v_2} + \cos(\beta + x) \right) / \sin^2(\beta + x) = 0 \end{aligned}$$



Slika 3. Najmanjša razdalja med ladjama za primer $r = 10 \text{ km}$, $v_1 = 3 \text{ km/h}$, $v_2 = 5 \text{ km/h}$ in $\beta = 30^\circ$. S slike razbereš še medsebojno razdaljo med ladjama po prvi uri (y_1) in po drugi uri (y_2).

sledi, da nastopi ekstrem za tak kot x_0 , za katerega velja enačba

$$\cos(\beta + x_0) = -\frac{v_1}{v_2} \rightarrow x_0 \quad (1)$$

Izračunajmo še drugi odvod. Za vrednost kota x_0 je drugi odvod enak $r \sin \beta / \sin(\beta + x_0)$ in je pozitiven (prepričaj se o tem; še enkrat odvajaj prvi odvod in upoštevaj (1)), kar pomeni, da gre za minimum.

Torej mora ladja A pluti pod takim kotom x_0 , ki ustreza enačbi (1), da se približa ladji B na najmanjšo razdaljo

$$\begin{aligned} y_{min} &= r(\sin \beta - \frac{v_1}{v_2} \sin x_0) / \sin(\beta + x_0) = \\ &= r(\sin \beta + \cos(\beta + x_0) \sin x_0) / \sin(\beta + x_0) = r \cos x_0 \end{aligned}$$

Iskani čas je $t_0 = r \sin x_0 / v_2 \sin(\beta + x_0)$.

Naredimo še numerični zgled. Naj bo $r = 10$ km, $v_1 = 3$ km/h, $v_2 = 5$ km/h, $\beta = 60^\circ$. Vstavimo podatke in dobimo:

$$\begin{aligned} \cos(60^\circ + x_0) &= -\frac{3}{5} \rightarrow x_0 = 66,87^\circ \\ y_{min} &= 10 \cos 66,87^\circ = 3,928 \text{ km} \\ t_0 &= 10 \sin 66,87^\circ / 5 \sin 126,87^\circ = 2,3 \text{ h} \end{aligned}$$

Ladja A mora pluti pod kotom $66^\circ 52'$ glede na začetno medsebojno razdaljo, da se po 2 h in 18 min najbolj približa ladji B na razdaljo 3 km in 928 m.

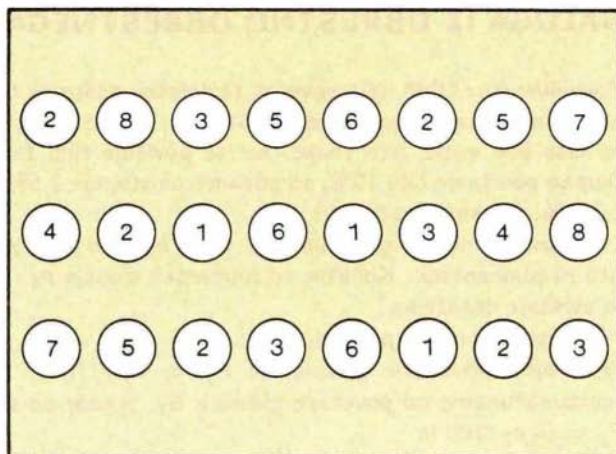
Naloga skriva v sebi še mnogo zanimivosti. Poskušaj jih odkriti. Eno kaže slika 3. Morda bi za Presek še kdo poslal kako raziskovalno nalogo o dveh ladjah?

Marijan Prosén

NALOGE IZ KNJIGE VESELJE OB IGRI S ŠTEVILI

1. Pet uteži ti je na voljo — za 1 gram, za 3 grame, za 9 gramov, za 27 gramov in za 81 gramov. Ali lahko le z njihovo pomočjo stehtaš kamen, ki zagotovo ni težji od 100 gramov?
2. Razdeli dani kvadrat na štiri ploščinsko enake like tako, da bodo vsote vseh števil v posameznih likih med seboj enake.

Slika 1



3. Volumen in ploščina kvadra se zapišeta s številom 450. Veš, da so kvadrom robovi le celoštevilskih dolžin. Poišči jih.
4. Ura porabi 6 sekund za 6 udarcev. Koliko časa porabi za 12 udarcev?
5. Jack dolguje Jimu 200 dolarjev. Nekega dne mu prinese bankovec za 500 dolarjev. Žal pa Jim ni imel pri sebi nobenega drobiža, da bi mu lahko vrnil preostanek. Vzel je Jackov 500—dolarski bankovec, odšel z njim k sosеду in ga tam zamenjal za pet 100—dolarskih bankovcev. Jacku je zatem izplačal 300 dolarjev. Kmalu pa je prišel k njemu sosed in ga opozoril, da je bil oni 500—dolarski bankovec ponarejen. Jim mu je seveda brez besed takoj povrnil škodo. In za koliko dolarjev je bil sedaj oškodovan nesrečni Jim?
6. Nini je 24 let. Pa pravi Tini: "Dvakrat toliko si stara, kot sem bila jaz, ko si bila ti toliko stara, kolikor sem jaz sedaj." Koliko je stara Tina?
7. Ali sta lahko oče mojih vnukov in pa zet staršev moje snahe ena in ista oseba?
8. Pet škatel je in v njih leži zapovrstjo 4, 5, 6, 7 in 10 krogel. Število krogel v katerikoli izmed teh petih škatel lahko spremeniš le ob pogoju, da jih s teh v eni izmed preostalih škatel hkrati podvojiš. Izkaži se in v petih potezah postavi v vsako izmed prvih štirih škatel po 8 krogel.
9. V trinadstropni hiši stanuje 20 ljudi nad nekaterimi, 22 jih stanuje pod nekaterimi iz te hiše, v srednjem nadstropju pa jih stanuje toliko, kolikor jih je v preostalih dveh nadstropjih skupaj. Koliko ljudi stanuje v posameznih nadstropjih?

prev. Vilko Domajnko

NALOGA IZ OBRESTNO OBRESTNEGA RAČUNA

Pokojnine so v štirih letih povečali za določen odstotek tako, da so vsako leto pokojnino zvišali za enak znesek. Stopnje, s katerimi so pokojnine naraščale, pa niso bile vsako leto enake, ker se povišuje tudi že povišani del. Če bi skupno povišanje bilo 10%, so posamezne stopnje 2,5%, 2,439%, 2,381% in 2,326%. Poskusi izračunati!

Posplošimo nalogo! Glavnica G se naj v n letih poveča za $p\%$, vsako leto za enak znesek. Kolikšne so zaporedne stopnje $p_1, p_2, \dots, p_n$, s katerimi to zvišanje dosežemo?

Prva stopnja je $p_1 = p/n$.

Prvo letno povečanje glavnice je $P_1 = Gp_1/100$. Naslednje, ki mu je enako, računamo od povečane glavnice G_1 , vendar po stopnji p_2 , tako da je $P_2 = G_1p_2/100$ in

$$P_k = G_{k-1}p_k/100 \quad (1)$$

Vrednost glavnice po $(k+1)$ -tem povišanju, G_{k+1} , lahko izračunamo iz k -te glavnice, G_k , ki ji prištejemo $(k+1)$ -to povečanje

$$G_{k+1} = G_k(1 + p_{k+1}/100) \quad (2)$$

ali pa iz začetne vrednosti glavnice, ki ji prištejemo $(k+1)$ povečanj

$$G_{k+1} = G(1 + (k+1)p_1/100) \quad (3)$$

Letna povečanja so si enaka: $P_{k+1} = P_k$. Z upoštevanjem (1) in (2) sledi:

$$G_{k-1}(1 + p_k/100) \cdot p_{k+1}/100 = G_{k-1} \cdot p_k/100$$

Enačbo delimo z $G_{k-1}/100$ in izračunamo p_{k+1} . Dobimo rekurijsko formulo za zaporedne stopnje:

$$p_{k+1} = \frac{p_k}{1 + p_k/100}, \quad p_1 = p/n, \quad k = 1, 2, \dots, n-1 \quad (4)$$

Zaporedne stopnje povišanj lahko izračunamo tudi direktno iz prve, p_1 . Iz (2) in (3) sledi

$$G_k(1 + p_{k+1}/100) = G(1 + (k+1)p_1/100)$$

Na levi izrazimo G_k z G in enačbo delimo z G

$$(1 + kp_1/100)(1 + p_{k+1}/100) = (1 + (k+1)p_1/100)$$

Preuredimo takole:

$$(1 + kp_1/100) + (1 + kp_1/100) \cdot p_{k+1}/100 = 1 + kp_1/100 + p_1/100$$

Skrčimo, pomnožimo s 100 in izračunamo p_{k+1} . Zaporedne stopnje povišanj se s prvo izražajo takole:

$$p_{k+1} = \frac{p_1}{1 + kp_1/100} \quad (5)$$

Preveri uvodoma podane stopnje za $p = 10\%$, $n = 4$ z obrazcema (4) in (5)!

Dušan Modic

MOSER S., Spass mit Zahlenspielen (Veselite ob igri s števili)

V Oxford Centru pri Cankarjevi založbi (v Ljubljani najdete njihovo prodajalno na Kopitarjevi 2, v Mariboru pa na Gospejini 8) je ta trenutek najhrž še zmeraj mogoče kupiti knjigo z zgornjim naslovom. Dolgčasa bralec ob njej zares ne čuti, prej ali slej ga pač zamika vsaj eden izmed dvesto šestih matematičnih problemov, ki so zbrani v tej knjigi. In tiste igre s števili, ki jo avtor obeta v naslovu, tudi ne gre jemati preveč dobesedno. Med problemi je namreč tudi precej geometrijskih, pa nekaj takšnih, ki so precej po fizikalno zaviti, tudi zanimivih problemov s sorodstvenimi relacijami ne manjka, ...

Seveda, knjiga vsebuje tudi poglavje z rešitvami nalog. Te pa so v nekaterih primerih izdelane zelo "po domače", precejkrat kar z logičnim sklepanjem ali pa celo z ugibanjem. Očitno je, da se avtor pač namerno izogiba uporabi enačb povsod, kjer je to le mogoče. Pa tudi sicer ni v knjigi skorajda nikjer zaslediti prehude matematične teorije. Knjiga je pač očitno pisana zelo poljudno in je namenjena bralcu, ki mu je bližje duhovito matematično razmišljanje kot pa podkovanost v teoriji. Zaradi tega je ta zbirka nalog v celoti dostopna že tudi starejšim osnovnošolcem.

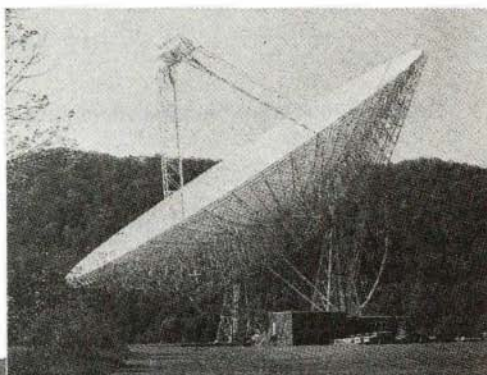
Knjiga je pisana seveda v nemškem jeziku, kar pa ne bi smel biti razlog, da je ne bi vzeli v roke. Navsezadnje — mar ni naravnost izvrstna poteza, če uspeš združiti učenje tujega jezika in pa matematični užitek v eno! Problemi, ki jih boste našli v tej številki Preseka na strani 292 so iz Veselja ob igri s števili.

Vilko Domajnko

NESREČA RADIOTELESKOPA

V Green Banku v Zahodni Virginiji v ZDA je v okviru Državnega radioastronomskega laboratorija od leta 1963 deloval stometrski radioteleskop. Radioteleskop je bil zelo uporaben za opazovanje po vsem nebu, čeprav so ga lahko nagibali le v smeri sever-jug, v smeri vzhod-zahod pa so bili navezani na vrtenje Zemlje. S teleskopom so astronomi odkrili četrtno znanih pulzarjev, tudi znameniti pulzar v Rakovci, z njim so raziskovali oblake plina v odda

Stometrski radioteleskop v Green Banku pred nesrečo in po njej



ljenih galaksijah, naredili obsežne preglede rdečega premika spektralnih črt za oddaljene galaksije. Nasploh so z njim odkrili več vesoljskih radijskih izvirov kot z vsemi drugimi teleskopi skupaj. Teleskop je imel jekleno ogrodje, paraboloidno zrcalo pa je sestavljala aluminijasta mreža. Mreža je bila dovolj drobna, da so z njim lahko opazovali radijske valove z valovno dolžino 6 centimetrov. To mrežo je dobil teleskop pozneje, spočetka je bil namenjen za opazovanje sevanja z valovno dolžino 21 centimetrov, ki ga oddaja vodik.

15. novembra se je teleskop nenadoma sesedel v kup kovine. Tisto noč so opazovali kot navadno, ni snežilo ali deževalo. Stavba je bila le malo poškodovana, ljudje pa na srečo sploh niso bili poškodovani. Operaterja ob nesreči ni bilo v stavbi, ko pa je zaslišal hrup, je bil tako priseben, da je odhitel h glavnemu stikalu in izključil elektriko. Kup kovine, zrel za odpad, se še naprej počasi seseda.

Medtem so raziskali, kaj bi utegnilo povzročiti nesrečo. Ugotovili so, da je najbrž kriva velika vezavna plošča, ki je popustila, ker je nastala v njej razpoka. To bi utegnil povzročiti eden izmed obeh velikih ležajev, ki ni bil več popolnoma neoporečen.

Ameriški radioastronomi že močno pogrešajo greenbauški radioteleskop in si želijo nadomestila zanj. Najbolje bi bilo zgraditi napravo na istem mestu, saj je okoli teleskopa bilo območje 34 tisoč kvadratnih kilometrov, na katerem ni bilo dovoljeno postavljati radijskih oddajnih postaj. Zaradi visoke cene, računajo, da bi stal nov teleskop kakih deset milijonov dolarjev, pa bodo morali na nadomestilo še nekaj časa počakati.

Janez Strnad

PRESEKOVE ZNAČKE

Društvo matematikov, fizikov in astronomov SR Slovenije priporoča organizatorjem šolskih, občinskih in republiških tekmovanj, da vsem udeležencem podelijo spominsko značko iz programa Presekovih značk. Simboli na značkah so različni. Po večini so portreti slovenskih matematikov in fizikov, ki so predvsem na šolskem področju prispevali velik delež. S tem bomo med mladino na najbolj enostaven način popularizirali njihova imena, ob posebnih prilikah pa bi učencem posredovali tudi dela iz življenja in ustvarjanja naših slavnih prednikov. Poudariti želimo, da so simboli prirejeni za vsak razred posebej in za vsako stopnjo tekmovanja natisnjeni v različni barvi. Zato prosimo vse, ki značke naročajo, da pri naročilu pazijo na te podrobnosti. Značke z vsakim od dvanajstih simbolov, natisnjenih v nevtralni barvi pa lahko dobite tudi v prosti prodaji. Točen pregled vseh razpoložljivih značk je bil objavljen v Preseku, letnik 12, številka 3, leto 1984-85, na strani 160.

"BREZTEŽNO STANJE"

Kamen, ki ga spustimo z okna, prosto pada. Ni težko izračunati, kolikšen čas pada, če poznamo višino okna nad tlemi in zanemarimo zračni upor. Uporabimo pač enačbo za *enakomerno pospešeno gibanje*. Tudi drugi kamen, ki ga spustimo z okna, prosto pada, enako kot pada prvi. Ko spustimo z okna oba kamna, oba enako padata in oba hkrati zadeneta tla, če smo ju spustili sočasno. Kamen glede na drugi kamen med padanjem miruje. Če bi človek, ki prosto pada, iz rok spustil kamen, bi oba, človek in kamen, padala enako hitro. Če bi bila tedaj človek in kamen v zaprtem prostoru, bi človek lahko mislil, da mirujeta (ali se gibljeta premo enakomerno) daleč od vseh drugih teles. Na to ugotovitev se opira *Einsteinova splošna teorija relativnosti*.

Ta teorija gravitacije, v kateri lahko vidimo izpopolnitev Newtonovega gravitacijskega zakona, je sicer zelo zapletena. Kot vidimo, pa enega od njenih dveh osnovnih načel ni težko razumeti. To načelo povemo lahko na več načinov. *Načelo o univerzalnosti prostega padanja* pravi, da padajo v določeni točki vsa telesa z enakim pospeškom, ki ni odvisen od njihove sestave. *Načelo o ekvivalentnosti* pravi, da se težka masa, ki meri odziv telesa na gravitacijo drugih teles, na primer na težo na površju zemlje, ujema z vztrajnostno maso, ki meri upor telesa proti pospeševanju. Za prosto padajočo skupino teles veljajo enaki zakoni fizike kot za skupino teles, ki je tako daleč od vseh drugih teles, da ni treba upoštevati njihovega delovanja. Učinek gravitacije in učinek pospešenega gibanja se izravnata.

Albert Einstein je pripovedoval, da je leta 1907 sedel v stolu v bernskem patentnem uradu, ko se mu je nenadoma utrnila misel: "Če nekdo prosto pada, ne čuti svoje teže." Pozneje jo je imenoval "najsrečnejšo misel svojega življenja". Za opazovalca, ki prosto pada, v njegovi neposredni okolici ni učinkov gravitacije. Če vrže nekaj teles, ta glede nanj mirujejo ali se gibljejo premo enakomerno. Opazovalec ima pravico reči, da miruje.

Gravitacijsko polje obstaja samo relativno, podobno kot obstaja pri indukciji električno polje samo za opazovalca, ki se giblje glede na magnet.

V Preseku ne moremo dalje zasledovati splošne teorije relativnosti. Lahko pa nekaj povemo o gibanju teles v prosto padajočem laboratoriju. V tem laboratoriju, pa naj prosto pada kot dvigalo, ki se je pokvarilo, kot letalo, ki so mu prenehali delovati motorji (glej Presek 15 (1987/88) 369), ali kot umetni satelit, prosta telesa mirujejo, ker padajo z enakim pospeškom kot laboratorij. Navado imamo reči, da so telesa v tem laboratoriju v *breztežnem stanju*. Pri tem moramo biti previdni: ne smemo trditi, da je pospešek teles glede na laboratorij natančno enak nič. Zaradi upora in trenja padajočega

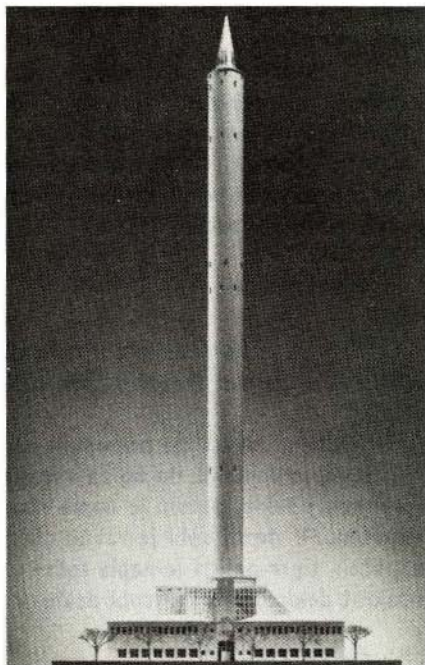
dvigala, zaradi upora letala ali zaradi gravitacije med telesi laboratorija, lahko dosežemo milijonino ali nekaj milijonin zemeljskega težnega pospeška. Zato raje govorimo o *mikrogravitaciji*.

Umetnih satelitov si ne more privoščiti vsakdo. Prosto padajoči laboratorij "kot pokvarjeno dvigalo" je dosti cenejši. Toda laboratorij je treba prej ali slej zavreti in čas izvajanja poskusov je omejen (kot na letalu z ugasnjenimi motorji).

Zanimiva raziskovalna ustanova Center za uporabno vesoljsko tehnologijo in mikrogravitacijo deluje od leta 1985 v Bremnu v ZR Nemčiji. Njegov del je 144 metrov visoki stolp. V stolpu je 110 metrov visoka cev s premerom 3,5 metra, iz katere močne črpalke v poldrugi uri izsesajo zrak do tlaka stotisočine milibara. Tako bo mogoče v cevi narediti na dan tri poskuse, pri katerih bo posebej oblikovana posoda okoli 4,7 sekund prosto padala. Telesa v njej se bodo glede na posodo gibala nepospešeno, po domače – dosegla bodo breztežno stanje. Natančneje moramo reči, da bo njihov pospešek glede na posodo manjši od milijonine do stotisočine pospeška prostega padanja. V posodi so nameščeni računalniki in naprave za merjenje in zapisovanje podatkov.

Poskusom je namenjena notranjost posode s premerom 40 centimetrov in višino 2 metra, ki lahko sprejme naprave z maso do 200 kilogramov. Potem, ko posodo na vrhu sprožijo, prosto pada. Na dnu stolpa se zaustavi v 8 metrov visokem prostoru z drobnim polistirenskim prahom.

Med padanjem posode nameravajo proučevati vprašanja hidrodinamike, fizike zgorevanja in materiale v breztežnem stanju. To je povezano z izbiro najugodnejših možnosti pri vesoljskih poletih. Naprava naj bi začela delovati ob koncu prejšnjega leta. Pozneje mislijo podvojiti čas trajanja poskusov tako, da bodo posodo z napravami izstrelili z dna stolpa do vrha, od koder bo prosto padala do dna.



Smullyan R., DEKLE ALI TIGER?, Državna založba Slovenije, Ljubljana, 1989, 179 str. (Z logiko v leto 2000)

Pri Državni založbi Slovenije je v zbirki Z LOGIKO V LETO 2000 izšla nova knjiga, ki bo zagotovo razveselila vse ljubitelje zabavnih logičnih ugank, pa tudi zahtevnejše logike. Avtorja knjige Raymonda Smullyana ne bomo posebej predstavljali, saj so v tej zbirki izšli že trije prevodi njegovih knjig: *Alica v deželi ugank*, *Šahovske skrivnosti Sherlocka Holmesa* in *Poznate naslov te knjige?*.

V prvih dveh delih knjige nas Smullyan popelje v čudne dežele z nenavadnimi prebivalci, kjer se človek res težko znajde, če ne zna logično razmišljati. V eni od Smullyanovih dežel živi kralj, ki svojim zapornikom zastavlja uganke. Če je zaporniku logično razmišljanje bolj tuje, ga požre tiger, če pa je dober logik in uganko reši, dobi za nagrado prostost, pa še čedno dekle za nevesto.

ODLOMEK

"Včeraj je bil neuspeh," je dejal kralj ministru. "Vsi trije zaporniki so rešili svoje uganke! Danes imamo pet procesov in mislim, da jih bom nekako otežil."

"Odlična ideja!" je pripomnil minister.

Kralj je pojasnil, da bo za vse primere tega dne veljalo: če je v levi sobi (prvi sobi) dekle, potem je napis resničen, če je v njej tiger, potem je napis napačen. V desni sobi je ravno obratno: dekle v njej pomeni, da je napis napačen, tiger pa, da je napis točen. Spet je možno, da sta obakrat tигра ali obakrat dekleti ali v eni sobi dekle, v drugi tiger.

Četrti proces

Potem, ko je kralj pojasnil zgornja pravila, je pokazal napisa:

Katero sobo naj
zapornik izbere?

I.
V OBEH SOBAH
STA DEKLETI

II.
V OBEH SOBAH
STA DEKLETI

V tretjem in v četrtem delu knjige gre pa bolj zares. Glavni junak knjige, Inšpektor Craig, mora poiskati kombinacijo, ki odpre ključavnico trezorja v Monte Carlu. Pri delu mu pomagata dva prijatelja — malce čudaški matematik, ki za zabavo sestavlja in proučuje številske stroje, in logik, ki konstruira logične stroje, povrh pa se spozna na vsa mogoča matematična področja. Njihova skupna razmišljanja seveda pripeljejo do rešitve problema ključavnice v Monte Carlu, ob tem pa bralca postopno vpeljejo v teorijo formalnih sistemov in ga na koncu pripeljejo do osrednjih matematičnih odkritij, celo do znamenitega Gödelovega izreka o neodločljivosti.

ŠE EN ODLOMEK

Nekaj mesecev po proslavljeni rešitvi skrivnosti ključavnice iz Monte Carla sta Craig in McCulloch obiskala Fergussona, da bi več izvedela o njegovem logičnem stroju. Ni dolgo trajalo, ko se je pogovor preobrnil k naravi dokazljivosti.

"Moram vama povedati o zanimivem in poučnem dogodku," je dejal Fergusson. Študent je bil na izpitu iz geometrije vprašan, naj dokaže Pitagorov izrek. Oddal je svoj izdelek, profesor matematike pa mu je vrnil list z oceno 0 in pripombo — *'To ni dokaz!'*. Pozneje je fant odšel k profesorju in mu dejal, "Gospod, kako morete reči, da tisto, kar sem oddal ni dokaz? Na predavanjih niste nikoli definirali, kaj je dokaz! Bili ste čudovito precizni v svojih definicijah reči, kot so trikotniki, kvadrati, krogi, paralelnost, pravokotnost in drugi geometrijski pojmi, toda nikoli niste natančno definirali, kaj mislite z besedo dokaz. Kako tedaj morete s takšno zanesljivostjo trditi, da tisto, kar sem oddal, ni dokaz? Kako boste dokazali, da tisto ni dokaz?"

"Briljantno!" je vzkliknil Craig in zaploskal. "Ta fant bo še daleč prišel. Kako je odgovoril profesor?"

No, v knjigi lahko poleg profesorjevega odgovora in cele kopice dokazov preberete tudi marsikaj o dokazih in dokazljivosti trditev.

Neža Mramor-Kosta

BOMBONI

Mama je kupila 1664 bombonov. Začuden prodajalki je povedala, da je tolikšen produkt starosti njenih otrok (v letih). Dodala je še: "Najstarejši sin ni več kot dvakrat starejši od najmlajšega. Vsi praznujejo rojstni dan danes, jutri bom pa jaz dopolnila petdeset let." Koliko otrok ima?

Darjo Felda

20. ZVEZNO TEKMOVANJE OSNOVNOŠOLCEV IZ MATEMATIKE – Rešitve nalog s str. 232

7. razred

1. Označimo z x količino blaga v kg, z y načrtovano ceno v dinarjih in s p iskani odstotek. Iz pogojev naloge dobimo enačbo

$$\frac{x}{3} \cdot 1,1y + \frac{x}{2} \cdot 0,85y + \frac{x}{6} \cdot \dots y = xy$$

Rešitev enačbe je $p = 1,25$, kar pomeni, da so ostanek blaga prodali po 25% višji ceni od načrtovane.

2. $100a + 10b + c = 7(14a + b) + (2a + 3b + c)$. Očitno je $2a + 3b + c$ deljivo s 7. Ker je $a + b + c$ deljivo s 7, je tudi razlika $2a + 3b + c - 2(a + b + c) = b - c$ deljiva s 7. Ker so a, b in c različne cifre, velja $c \neq 0$ in $b \neq 0$. Tabela

b	11	8	2	9
c	8	1	9	2

nam da iskane rešitve 518, 581, 329 in 392.

3. V enakokrakem trikotniku $\triangle BCE$ je $\angle BCE + \angle CEB + \angle EBC = 2 \cdot 20^\circ + 2x + \beta = 180^\circ$. Odtod

$$2(x + 20^\circ) = 180^\circ - \beta \quad (1)$$

V enakokrakem trikotniku $\triangle ACD$ je $\angle ADC = \angle DCA + \angle DAC = 2 \cdot 20^\circ + 2y + \alpha = 180^\circ$. Odtod

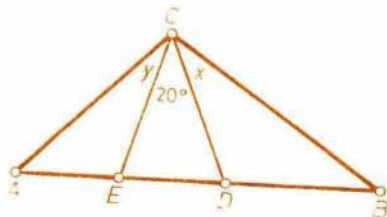
$$2(y + 20^\circ) = 180^\circ - \alpha \quad (2)$$

Ko seštejemo enačbi (1) in (2), dobimo

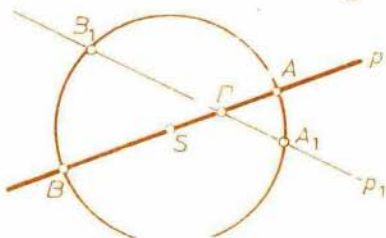
$$2(x + y + 20^\circ + 20^\circ) = 360^\circ - \alpha - \beta$$

$$x + y + 20^\circ = \gamma = \angle ACB$$

zato je $2\gamma + 40^\circ = 360^\circ - \alpha - \beta$ in odtod $\gamma = 140^\circ$.

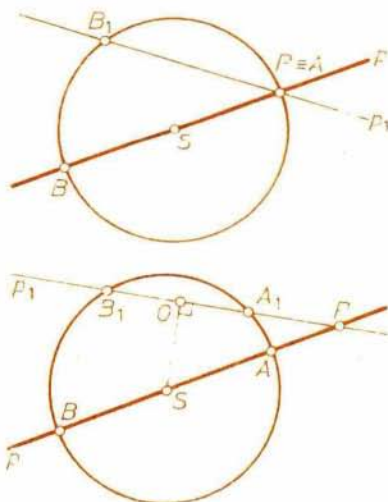
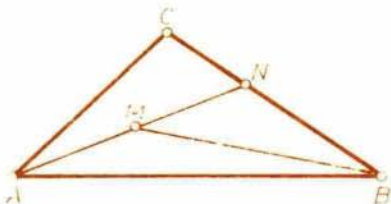


- 4a. Če P leži v krogu, je $PA_1 + PB_1 = A_1B_1$, torej je to tetiva kroga. Iskana premica p gre skozi središče, ker je premer najdaljša tetiva.



4b. Če P leži na krožnici, je $P \equiv A$ in tedaj je rešitev enaka kot v primeru a.

4c. Če P leži zunaj kroga in je p_1 poljubna sekanta, je $\overline{PA_1} + \overline{PB_1} = \overline{PA_1} + (\overline{PA_1} + \overline{A_1O} + \overline{OB_1})$, kjer je O središče daljice A_1B_1 . Prav tako je $\overline{PA_1} + \overline{PB_1} = 2\overline{PA_1} + 2\overline{A_1O} = 2\overline{PO}$. Če gre sekanta skozi središče kroga, je $\overline{PA} + \overline{PB} = 2\overline{PS}$, zato je rešitev ponovno premica p , ki gre skozi središče kroga. (Trikotnik $\triangle PSO$ je pravokotni s hipotenuzo PS , hipotenuza pa je daljša od katete.)



5a. Naj nosilka AM seče stranico BC v točki N . Ker je zunanji kot trikotnika enak vsoti nepriležnih notranjih kotov, dobimo $\angle AMB > \angle MNB$ in $\angle MNB > \angle ACB$, odtod pa $\angle AMB > \angle ACB$.

5b. Ker je vsota dolžin dveh stranic trikotnika večja od tretje stranice, iz zgornje slike sledi

$$\overline{AB} + \overline{NB} > \overline{MB} \Rightarrow \overline{AM} + \overline{MN} + \overline{NB} > \overline{AM} + \overline{MB}$$

zato

$$\overline{AN} + \overline{NB} > \overline{AM} + \overline{MB}$$

Iz $\overline{AC} + \overline{CN} > \overline{AN}$ dobimo

$$\overline{AC} + \overline{CN} + \overline{NB} > \overline{AN} + \overline{NB} \text{ in } \overline{AC} + \overline{CB} > \overline{AN} + \overline{NB}$$

nato pa zaradi tranzitivnosti neenakosti $\overline{AC} + \overline{CB} > \overline{AM} + \overline{MB}$ ali $\overline{AM} + \overline{MB} < \overline{AC} + \overline{CB}$, kar je bilo treba dokazati.

8. razred

1. Označimo z A, B, C in D količine papirja, ki so jih zbrali Amir, Boris, Cvetko in Darko. Če je A x kg, je B $x - 36$ kg. Zato je

$$A = \frac{3}{4}(B + C) \text{ in } 4A - 3B = 3C, C = \frac{1}{3}(4x - 3(x - 36))$$

$$\text{in } D = 2C = \frac{2}{3}(4x - 3(x - 36))$$

Dobimo enačbo:

$$x + x - 36 + \frac{1}{3}(4x - 3(x - 36)) + \frac{2}{3}(4x - 3(x - 36)) = 288$$

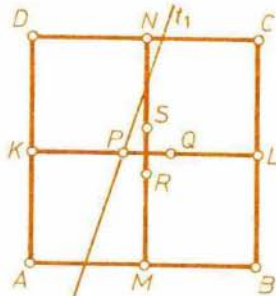
ki ima rešitev $x = 72$. Tako je Amir zbral 72 kg, Boris 36 kg, Cvetko 60 kg in Darko 120 kg.

2. $1 + 2 + 3 + \dots + p = \frac{p(p+1)}{2}$

Če se vsota konča s 1989, tedaj se produkt $p(p+1)$ konča z 8. Zadnja številka produkta dveh zaporednih naravnih števil je enaka zadnji številki produkta zadnjih števil teh dveh števil, ta pa ne more biti 8, zato sklepamo, da se omenjena vsota ne more končati s 1989.

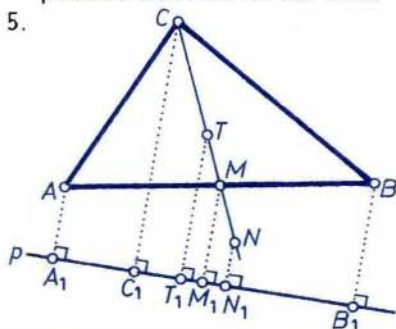
3. X ni enomestno število, ker bi bilo sicer $X + Y + Z = 3X < 60$. Naj bo $X = 10a + b$, $a, b \in \{0, 1, 2, \dots, 9\}$. Tedaj je $Y = a + b$ in $Z = Y = a + b$, če je $a + b \leq 9$, ali $Z = a + b - 9$, če je $a + b > 9$. Naj bo $Z = a + b$. Tedaj je $X + Y + Z = 10a + b + a + b + a + b = 60, 4a + b = 20$. Odtod je $a = 4, b = 4$ ali $a = 5, b = 0$ in iskano število X je 44 ali 50. (Zaradi $3 + 8 > 9$, število 38 ni rešitev.) Naj bo sedaj $Z = a + b - 9$. $X + Y + Z = 10a + b + a + b + a + b - 9 = 60$ in $4a + b = 23$, odtod pa je $a = 4, b = 7$ in iskano število $X = 47$. (Zaradi $5 + 3 < 9$ število 53 ni rešitev.) Iskano število X je torej 44, 47 ali 50.

4. Naj bo $ABCD$ dani kvadrat in t_1 ena od danih premic. Ker je ploščina trapeza $p = sv$, pri čemer je s srednjica, bosta ploščini p_1 in p_2 , določeni s premico t_1 , v razmerju $p_1 : p_2 = 2 : 3$, zato $s_1 v : s_2 v = 2 : 3$, odtod pa $s_1 : s_2 = 2 : 3$ ali $KP : PL = 2 : 3$. Sklepamo, da morajo iti iskane



premice skozi točko P , za katero velja $KP : PL = 2 : 3$ (K in L sta središči kvadratovih stranic), ali skozi točko Q , za katero velja $LQ : QK = 2 : 3$, ali skozi točki R in S , za kateri velja $MR : RN = 2 : 3$ oziroma $NS : SM = 2 : 3$. Toda če 9 premic poteka skozi štiri točke, morajo najmanj tri potekati skozi eno od teh točk.

5.



5. Vsota dolžin osnovnic trapeza je enaka dvojni dolžini srednjice. Naj bo CM težiščnica trikotnika $\triangle ABC$, T težišče in N točka na nosilki CM , tako da je $TM = MN$. Tedaj je tudi $TN = CT$. Sedaj iz trapeza CC_1N_1N dobimo $NN_1 + CC_1 = 2TT_1$ in $TT_1 + NN_1 + CC_1 = 3TT_1$. Iz trapeza TT_1N_1N dobimo $TT_1 + NN_1 = 2MM_1$, iz trapeza AA_1B_1B pa $AA_1 + BB_1 = 2MM_1$. Torej $TT_1 + NN_1 = 2MM_1 = AA_1 + BB_1$ in če vstavimo v $TT_1 + NN_1 + CC_1 = 3TT_1$ dobimo $AA_1 + BB_1 + CC_1 = 3TT_1$.

Aleksander Potočnik

BOMBONI - Rešitev s strani 301

Najprej ugotovimo, da je $1664 = 2^7 \cdot 13$. V tabeli si zapišimo možni starosti najstarejšega in najmlajšega ter produkt starosti drugih:

najstarejši	najmlajši	produkt drugih
13	8	16
16	13	8
16	8	13
26	16	4
32	26	2

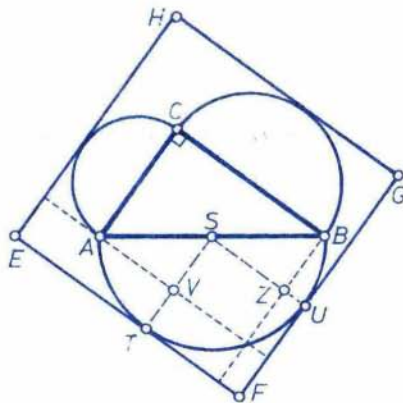
S premislekom pridemo do zaključka, da samo srednja možnost ustreza pogojem naloge. Bombone si bodo porazdelili trije otroci stari 16, 13 in 8 let.

Darjo Felda

33. REPUBLIŠKO TEKMOVANJE IZ MATEMATIKE ZA SREDNJEŠOLCE - Rešitve s str.278

Prvi letnik

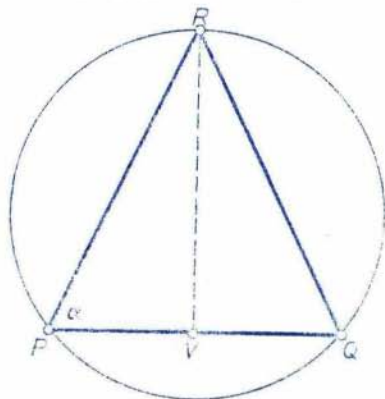
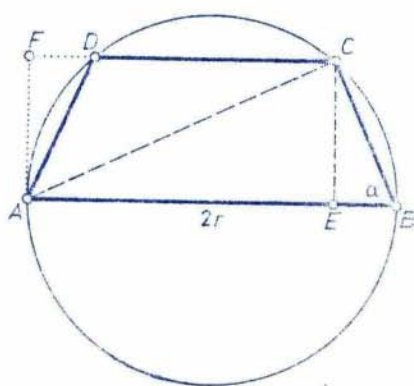
1. Iz zapisa $37/13 = 2 + 11/13 = 2 + 1/(13/11) = 2 + 1/(1 + 2/11) = 2 + 1/(1 + 1/(5 + 1/2))$ vidimo, da je $x = 1$, $y = 5$ in $z = 2$.
2. Če od trikratnika izraza $9x + 5y$ odštejemo petkratnik izraza $2x + 3y$, dobimo $17x$. Ker je razlika deljiva s 17, bo eden od izrazov deljiv s 17 natanko tedaj, ko bo tudi drugi.
3. Naj bo z skupni privarčevani znesek. Zapišimo najprej, da sta na primer najstarejša dva dobila enako: $100 + (z - 100)/10 = 200 + (z - 200 - 100 - (z - 100)/10)/10$. Odtod izračunamo $z = 8100$ din. Potem ni težko ugotoviti, da je najstarejši (in zato tudi vsi drugi) dobil $100 + 800 = 900$ din, skupina je štela torej 9 prijateljev.
4. Ko narišemo sliko po navodilih naloge, potegnemo še polmera ST in SU največjega polkroga in vzporednici s katetama skozi A in B , ki sekata polmera ST in SU v V oziroma Z . Trikotnika SAV in BSZ sta skladna, njuni kateti sta dolgi 3 in 4 cm. Iz $ST = SU = 5$ cm dobimo $VT = 2$ cm in $ZU = 1$ cm, potem pa $EF = 3 + 8 + 1 = 12$ in $FG = 2 + 6 + 4 = 12$. Pravokotnik $EFGH$ je zato kvadrat s ploščino 144cm^2 .



Drugi letnik

1. Če je $x = a/b$ okrajšani ulomek, mora biti $8a^2 - 2ab - 3b^2$ popolni kvadrat. Izraz razstavimo $(4a - 3b)(2a + b)$ in iz $4a - 3b = ku^2$ ter $2a + b = kv^2$ dobimo $a = k(u^2 + 3v^2)/10$ oziroma $b = k(2v^2 - u^2)/5$. Zato je $x = (u^2 + 3v^2)/(2(2v^2 - u^2))$, $u, v \in \mathcal{N}$.

2. Če je $c = 0$, neenaka očitno drži, zato si oglejmo primer, ko je $c > 0$. Zaradi $a \geq c$ in $b \geq c$ lahko pišemo $a = \alpha c$ in $b = \beta c$, kjer sta α in β realni števili, večji ali enaki 1. Neenakost prepišemo: $\sqrt{c^2(\alpha - 1) + \sqrt{c^2(\beta - 1)}} \leq \sqrt{\alpha\beta c^2}$. Po deljenju enačbe s c in kvadriranju dobimo $\alpha - 1 + \beta - 1 + 2\sqrt{\alpha\beta} - \alpha - \beta + 1 \leq \alpha\beta$ oziroma $\alpha\beta - \alpha - \beta + 1 - 2\sqrt{\alpha\beta} - \alpha - \beta + 1 + 1 \geq 0$ ali $(\sqrt{\alpha\beta} - \alpha - \beta + 1 - 1)^2 \geq 0$, kar je očitno res.
3. Narišimo kroga z enakima polmeroma in v enega včrtajmo enakokraki trapez, v drugega enakokraki trikotnik. Najprej ugotovimo, da je trikot-



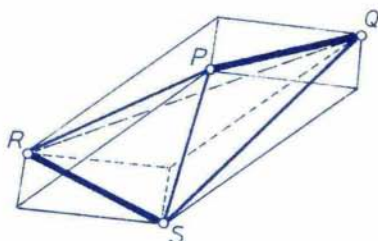
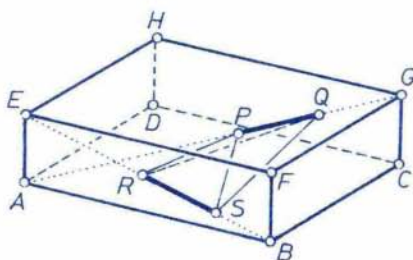
nik ABC pravokoten, nato pa, da je $\angle ACE = \alpha$ (kota $\angle ACE$ in $\angle CBA$ imata pravokotne krake). Tetivi AC in PR sta enako dolgi (pripadata enakemu obodnemu kotu). Iz ugotovljenega sledi, da sta $\triangle AEC$ in $\triangle RVP$ skladna. Če $\triangle EBC$ prenesemo k AD , dobimo še trikotnik $\triangle ACF$, ki je skladen s $\triangle CAE$. Enakokraki trapez in enakokraki trikotnik sta ploščinsko enaka.

4. Problem si oglejmo nekoliko splošneje. Skozi mimobežni premici postavimo vzporedni ravnini. Daljci PQ in RS , izbrani poljubno na mimobežnicah, naj bosta diagonali vzporednih mejnih ploskev paralelepipeda. Če daljci premaknemo po mimobežnicah, se prostornina paralelepipeda ne spremeni, saj ostaneta mejni ploskvi in višina (razdalja med vzporednima ravninama) enaki ter je $V = O \cdot v = (1/2)d_1 d_2 \sin \varphi \cdot v$, če sta d_1 in d_2 dolžini diagonal, φ kot med njima (smerema mimobežnic) ter v razdalja med mimobežnicama. Piramida zavzame tretjino te prostornine in prav tako ni odvisna od položaja

daljic PQ in RS .

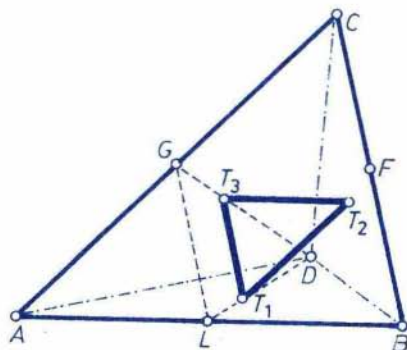
V konkretnem primeru si postavimo izhodišče koordinatnega sistema v oglišče D , A , C in H pa naj ležijo zaporedoma na pozitivnih poltrakah osi x , y in z . Potem imamo $\vec{AG} = (-2, 3, 1)$ in $\vec{EB} = (0, 3, -1)$ ter $\cos \varphi = (\vec{AG} \cdot \vec{EB}) / (AG \cdot EB) = 4 / \sqrt{35}$ in $\sin \varphi = \sqrt{19/35}$. Vzporedni ravnini, v katerih ležita $\vec{AG}$ in $\vec{EB}$, sta $(\vec{r} - \vec{r}_A) \cdot \vec{n} = 0$ in $(\vec{r} - \vec{r}_E) \cdot \vec{n} = 0$, kjer lahko vzamemo $\vec{n} = -(\vec{AG} \times \vec{EB})/2 = (3, 1, 3)$. Iz točke A na prvi ravnini pridemo po najkrajši poti do druge ravnine z $\vec{r}_X = \vec{r}_A + k \vec{n} = (2 + 3k, k, 3k)$, kjer mora biti $k = 3/19$. Zato je razdalja med ravninama $|3\vec{n}/19| = 3\sqrt{19}/19$. Prostornina piramide je

$$\frac{1}{3} \cdot \frac{1}{2} \cdot \sqrt{\frac{19}{35}} \cdot \frac{3\sqrt{19}}{19} = \frac{\sqrt{35}}{70}$$



Tretji letnik

1. Naj bodo E , F in G razpolovišča stranic trikotnika. Potem je $\triangle AEG$ podoben $\triangle ABC$. Težišče trikotnika je na tretjini dolžine težiščnice od stranice, zato $ET_1 = ED/3$, $GT_3 = GD/3$ in $\triangle T_1DT_3 \sim \triangle EDG$ ter $T_1T_3 = 2 \cdot EG/3 = BC/3$. Analogno pokažemo še za T_1T_2 in T_2T_3 . Trikotnik $T_1T_2T_3$ pokrije devetino ploščine trikotnika ABC .



2. Najprej je $tg(\vartheta - \varphi) = (tg\vartheta - tg\varphi) / (1 + tg\vartheta tg\varphi) = ((n-1)tg\varphi) / (1 + n tg^2\varphi) = (n-1) / (1/tg\varphi + n tg\varphi)$, nato pa $tg^2(\vartheta - \varphi) =$

$$= (n-1)^2 / (1/tg\varphi + n\,tg\varphi)^2 = (n-1)^2 / (2n + 1/tg^2\varphi + n^2\,tg^2\varphi) = \\ = (n-1)^2 / (4n + (n\,tg\varphi - 1/tg\varphi)^2) \leq (n-1)^2 / (4n).$$

3. Naj bodo r, s in t koreni enačbe. Po Vietovem pravilu veljajo med njimi zveze $r + s + t = 0$, $rs + st + tr = -p$ in $rst = -q$. Ker je produkt korenov negativen, sta dva izmed njih pozitivna, po absolutni vrednosti pa je največji negativen koren (saj je vsota enaka 0), naj bo to $t = -(r + s)$. Iz prve enačbe izrazimo $s + t = -r$, to vstavimo v drugo in dobimo $st - r^2 = -p$, odtod pa še $st = r^2 - p$. To upoštevamo v tretji, pa imamo $q = r(p - r^2)$ ali $q/p = r(1 - r^2/p)$. Ker je $1 - r^2/p < 1$, velja leva neenakost $q/p < r$.

Kvadrirajmo prvo enakost, ki smo jo dobili po Vietovem pravilu, in upoštevajmo drugo, pa imamo $2p = r^2 + s^2 + t^2$. Ker je r koren z najmanjšo absolutno vrednostjo in ker je $t = -(r + s)$, je najprej $|t| \geq 2r$, nato pa $2p \geq 6r^2$ oziroma $r^2/p \leq 1/3$ ali $1 - r^2/p \geq 2/3$. Iz že prej dobljene zveze $q/p = r(1 - r^2/p)$ sledi še desna neenakost $r \leq (3q)/(2p)$.

4. Zaradi $p(x) + p(-x) = -2$ ima $p(x)$ le člene z lihimi potencami spremenljivke x in stalni člen -1 . Če $(p(x))^2 = p(x^2) - 2p(x)$ zapišemo v obliki $(p(x) + 1)^2 = p(x^2) + 1$, brž ugotovimo, da je polinom bodisi konstanta -1 ali pa binom oblike $x^{2k+1} - 1$.

Recimo, da bi imeli v polinomu še kak drug člen in da ima za vodilnim člen $a_{2m+1}x^{2m+1}$ najvišjo stopnjo. Polinom $(p(x) + 1)^2$ bi se začel z $x^{4k+2} + 2a_{2m+1}x^{2k+2m+2} + \dots$, polinom $p(x^2) + 1$ pa z $x^{4k+2} + a_{2m+1}x^{4m+2} + \dots$, kar gotovo ni enako že zaradi $k \geq m + 1$. Ugotovili smo torej, da je $p(x)$ lahko binom poljubne lihe stopnje z natanko eno realno ničlo ali pa stopnje 0 brez ničel.

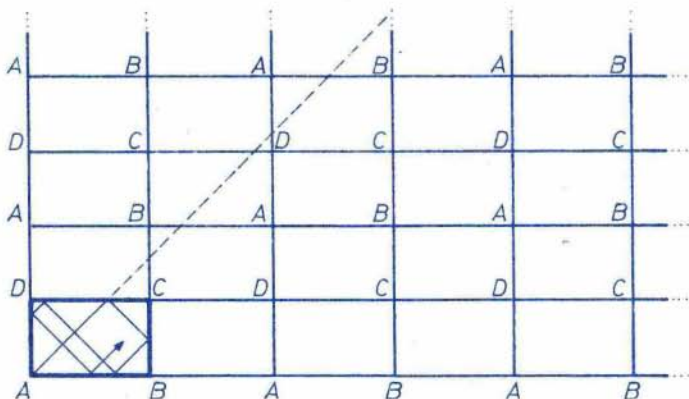
Četrty letnik

1. a) Naj bo a začetni člen aritmetičnega zaporedja, d pa diferenca. Potem je $P = a + (p-1)d$, $R = a + (r-1)d$ in $S = a + (s-1)d$. Nato $P(r-s) + R(s-p) + S(p-r) = (a + (p-1)d)(r-s) + (a + (r-1)d)(s-p) + (a + (s-1)d)(p-r) = a(r-s+s-p+p-r) + d(pr-ps-r+s+rs-pr-s+p+ps-rs-p+r) = 0$.

b) Označimo tokrat z a začetni člen geometrijskega zaporedja in s q kvocient: $P = aq^{p-1}$, $R = aq^{r-1}$ in $S = aq^{s-1}$. Tako je $P^{r-s} \cdot R^{s-p} \cdot S^{p-r} =$

$$= a^{r-s+s-p+p-r} \cdot q^{pr-ps-r+s+rs-rp-s+p+ps-rs-p+r} = 1.$$

2. Najprej ugotovimo, da je $f(1/x) = 1/(1+x^2)$, $f(x) + f(1/x) = 1$ in $f(1) = 1/2$. Vsota diagonalnih členov je zato $n/2$, vsota vseh drugih pa $n(n-1)/2$ (vsota po dveh simetrično ležečih glede na diagonalno je namreč 1). Skupna vsota je zato $n^2/2$.
3. Premica skozi gorišče $G(e, 0)$ ima enačbo $y = k(x - e)$. Abscisi presečišč z elipso sta $x_{1,2} = (2a^2k^2e \pm \sqrt{D})/(2(a^2k^2 + b^2))$, kjer je $D = 4a^2b^2(a^2k^2 - k^2e^2 + b^2)$, abscisa središča tetive $x_S = a^2k^2e/(a^2k^2 + b^2)$, ordinata pa $y_S = -b^2ke/(a^2k^2 + b^2)$. Iz $x_S = a^2k^2e/(a^2k^2 + b^2)$ izrazimo $k = \pm(b/a)\sqrt{x_S/(e - x_S)}$, ga vstavimo v y_S (upoštevajmo le pozitivni predznak), pa dobimo po kratki računski igri $(x_S - e/2)^2/(e/2)^2 + y_S^2/(b^2e^2/(2a)^2) = 1$, kar pomeni, da središča tetiv določajo elipso.
4. Pot kroglice predstavlja lomljena črta, ki jo lahko raztegnemo v ravno, če ravnino tlakujemo z biljardnimi mizami. Vsako prečkanje mreže pomeni v resnici odboj. Kroglica prispe do oglišča, ko je prvič izpolnjen pogoj $x \cdot m = y \cdot n$ (za naravni števili x in y). Ker sta m in n tuji, je $x = n$ in $y = m$.
- a) Če sta števili m in n lihi, pade kroglica v C , če je n sod, pade v D , če je pa m sod, pade v B . Števili nista hkrati sodi, zato kroglica ne pade v A .
- b) Število odbojev je enako številu prečkanj mreže: navpičnih je $n - 1$, vodoravnih $m - 1$, skupaj torej $n + m - 2$.

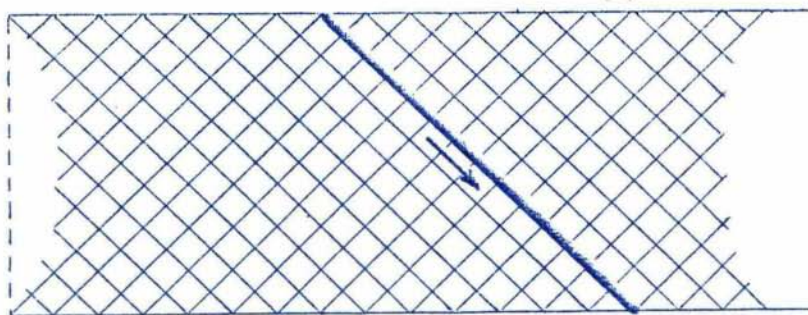


V VISOKI DRUŽBI – Rešitev s str. 283

Prav nič se ne hudujte nase, če ste morebiti tudi vi mislili, da bo ladja iz Le Havra na svoji poti proti New Yorku srečala sedem ladij iz nasprotnne smeri. V prvem hipu tako namreč odgovori večina reševalcev te naloge. Seveda pa vsi ti pri tem spregledajo, da bo ladja srečevala tudi tiste ladje iz nasprotnne smeri, ki so odrinile na pot proti Evropi že pred njo. Na spodnji sliki se jasno vidi, da bo ladja iz Le Havra srečala **petnajst** obravnavanih ladij. Brez besed smo privzeli, da ladja, ki opoldne prispe v pristanišče, v istem trenutku ne odpluje nazaj.

Le Havre

0 1 2 3 4 5 6 7 8 9 10 11 12 13 14 15 16



0 1 2 3 4 5 6 7 8 9 10 11 12 13 14 15 16 17

New York

Žal avtorju tega zapisa ni znano, ali je tudi Lucasu uspelo prelisičiti katerega izmed za omizjem prisotnih matematičnih veljakov.

Vilko Domajnko

KVADRATA - rešitev s strani 281

Potegnimo pravokotnici iz P na AB in BC , nožišči naj bosta M oziroma N . Trikotnika MPX in NPY sta skladna (oba pravokotna, $\angle MPX = \angle NPY$ in $PM = PN$). Štirikotnik $PXBY$ ima zato enako ploščino kot kvadrat $PMBN$, to je 25 cm^2 .

Darjo Felda

30. ZVEZNO TEKMOVANJE IZ MATEMATIKE ZA SREDNJEŠOLCE — Rešitve nalog s strani 284

Prvi letnik

1. S pomočjo neenakosti med aritmetično in geometrično sredino $\frac{x+y+z+t}{4} \geq \sqrt[4]{xyzt}$, pri kateri velja enačaja natančno tedaj, ko $x = y = z = t$, izpeljemo $1 + \frac{1}{x} = 1 + \frac{x+y+z}{x} = 1 + 1 + \frac{y}{x} + \frac{z}{x} \geq 4\sqrt[4]{\frac{y}{x} \frac{z}{x}}$ in njej analogne neenakosti $1 + \frac{1}{y} \geq 4\sqrt[4]{\frac{x}{y} \frac{z}{y}}$ in $1 + \frac{1}{z} \geq 4\sqrt[4]{\frac{x}{z} \frac{y}{z}}$. Neenakosti še zmnožimo.

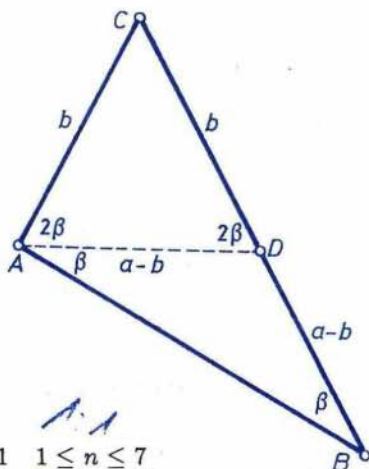
Enakost velja, ko $\frac{y}{x} = \frac{z}{x} = 1$ oziroma $x = y = z = 1/3$.

2. Predpostavimo najprej, da so vsa števila $x_1, x_2, \dots, x_{1990}$ liha. Pišimo $x_i = 2k_i + 1$, pa imamo $k_1(k_1 + 1) + k_2(k_2 + 1) + \dots + k_{1989}(k_{1989} + 1) + 497 = k_{1990}(k_{1990} + 1)$. Število na levi strani je liho, na desni pa sodo, kar ni mogoče.

Če bi bilo natanko eno izmed števil sodo, bi bila tista stran enačbe, na kateri bi le-to bilo, sodo, druga pa liha, kar spet ni mogoče.

Torej sta res vsaj dve števili sodi.

3. Privzemimo običajne oznake in $\angle CAB = 3\beta$. Na stranici a izberimo točko D tako, da $\angle CAD = 2\beta$. $\angle CDA = \pi - (\gamma + 2\beta) = 2\beta$ oziroma $\overline{CA} = \overline{CD}$ in $\overline{DB} = \overline{CB} - \overline{CD} = a - b$. Zaradi $\angle BAD = \beta$, je $\overline{AD} = \overline{DB} = a - b$. Trikotnik $\triangle ADC$ s stranicami $a - b, b, b$ lahko načrtamo natanko tedaj, ko $b < a < 3b$. Pri istem pogoju lahko načrtamo tudi $\triangle ABC$, ker leži točka B na nosilki CD in je za $a - b$ oddaljena od točke D .



4. Opazimo, da je

$$[\sqrt[3]{n}] = \begin{cases} 1 & 1 \leq n \leq 7 \\ 2 & 8 \leq n \leq 26 \\ 3 & 27 \leq n \leq 63 \\ \vdots & \vdots \end{cases}$$

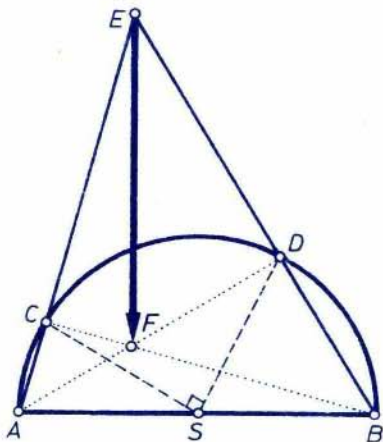
Pišimo $f(n) = [\sqrt[3]{1}] + [\sqrt[3]{2}] + \dots + [\sqrt[3]{n}]$ in dobimo

$$f(n) = \begin{cases} n & 1 \leq n \leq 7 \\ f(7) + 2(n-7) = 2n-7 & 8 \leq n \leq 26 \\ f(26) + 3(n-26) = 3n-33 & 27 \leq n \leq 63 \\ \vdots & \vdots \end{cases}$$

Za $n \leq 26$ enačba $f(n) = 2n$ nima rešitve, za $27 \leq n \leq 63$ pa ima enačba $f(n) = 3n - 33 = 2n$ rešitev $n = 33$. Za $n \geq 64$ se vrednost funkcije f poveča za vsaj 4, če n povečamo za 1, $2n$ pa se pri tem konstantno veča za 2. Torej je $n = 33$ edina rešitev.

Drugi letnik

- Po Talesovem izreku je $\angle ADB = \angle ACB = \pi/2$ oziroma $AD \perp BE$ in $BC \perp AE$. Vektor $\vec{EF}$ ima konstantno smer, saj je F višinska točka v $\triangle ABE$. Obodni kot je polovica središčnega kota nad istim lokom oziroma $\angle CAD = \angle CBD = \pi/4 = \angle FBD$. Torej je $\overline{FD} = \overline{BD}$ in $\overline{DA} = \overline{DE}$. Spomnimo se še, da je $AD \perp BE$ in dobimo $\triangle FDE \cong \triangle BDA$. Dolžina vektorja $\vec{FE}$ je konstantna in enaka $\overline{AB}$.



- Pri istih predpostavkah dokažimo najprej $\sqrt{a-1} + \sqrt{b-1} \leq \sqrt{ab}$. Obe strani neenačbe sta pozitivni; zato neenačbo kvadriramo in poenostavimo. Dobljena neenakost $(\sqrt{(a-1)(b-1)} - 1)^2 \geq 0$ prav gotovo drži. Enakost velja, ko $ab = a + b$.

Z že dobljeno neenakostjo izpeljemo verigo neenakosti $\sqrt{a-1} + \sqrt{b-1} + \sqrt{c-1} \leq \sqrt{ab} + \sqrt{c-1} = \sqrt{(ab+1)-1} + \sqrt{c-1} \leq \sqrt{c(ab+1)}$. Enačaji veljajo, ko $ab = a + b$ in $c(ab+1) = c + ab + 1$ oziroma $b = \frac{a}{a-1}$ ($a \neq 1$) in $c = \frac{a^2 + a - 1}{a^2}$.

- Pri $y \leq 0$ enačba ni rešljiva. Pri $y = 1$ reši enačbo vsaka trojica $(2^z + 1, 1, z)$, kjer je z nenegativno celo število. Naj bo $y > 1$. Enačbo preoblikujemo $(x-1)(x^{y-1} + x^{y-2} + \dots + x + 1) = 2^z$ in opazimo, da mora biti x liho, y sodo število in da je mož izpostaviti faktor $(x+1)$. Iz enačbe $(x-1)(x+1)(x^{y-2} + x^{y-4} + \dots + x^2 + 1) = 2^z$

vidimo, da mora biti $x^2 - 1$ potenca števila 2, torej $x = \pm 3$. Pišimo $y = 2k + 2$, seštejmo in razcepimo. Dobljena enačba $(3^{k+1} - 1)(3^{k+1} + 1) = 2^z$ ima edino rešitev $k = 0, z = 3$, kar nam da še preostali dve rešitvi $(3, 2, 3), (-3, 2, 3)$.

4. Ker sta m in n tuji naravni števili, obstajata taki celi števili a in b , da $ma + nb = 1$. Od tod sledi, da obstaja tak $y \in \{0, 1, \dots, m-1\}$, da $m|ny + 1$. Naj bo $x = n - \frac{ny+1}{m}$ oziroma $mx + ny = mn - 1$. Po privzetku je vsota števil v vsakem kvadratu $mn \times mn$ enaka nič. Iz enakosti $mx + ny = mn - 1$ pa vidimo, da je tudi vsota števil v vsakem pravokotniku $mn \times (mn - 1)$ enaka nič. Torej je v vsakem pravokotniku $mn \times 1$ vsota števil enaka nič. Izberimo nek pravokotnik $(mn + 1) \times 1$ in označimo števila v njem po vrsti z $a_1, a_2, \dots, a_{mn+1}$. Iz predhodnega sledi, da $\sum_{i=1}^{mn} a_i = \sum_{i=2}^{mn+1} a_i = 0$ oziroma $a_1 = a_{mn+1}$. Iskani števili sta a_1 in a_{mn+1} .

Tretji in četrti letnik

1. Če so tri od neznank x_1, x_2, x_3, x_4 vsaj 1 ali kvečjemu 1, je edina rešitev $x_1 = x_2 = x_3 = x_4 = 1$. Zaradi cikličnosti sistema zadošča, da si ogledamo naslednji dve možnosti:

1. možnost $0 \leq x_3, x_4 \leq 1 \leq x_1, x_2$

Iz enačb dobimo $x_1 + x_2^2 + x_3^3 - x_2 - x_3^2 - x_4^3 - x_3 - x_4^2 - x_1^3 + x_4 + x_1^2 + x_2^3 = 3 - 3 - 3 + 3$ oziroma $(x_2^2 - x_2) + (x_4 - x_4^2) + (x_1 - x_3) + (x_1^2 - x_3^2) + (x_3^3 - x_1^3) + (x_3^3 - x_4^3) = 0$. Izrazi v prvih štirih oklepajih so nenegativni. Če dokažemo še, da je $x_1^3 \leq x_2$ in $x_4 \leq x_3^3$, sta tudi izrazi v zadnjih dveh oklepajih nenegativna.

Iz prve in četrte enačbe sistema dobimo $x_3^3 = 3 - (x_1 + x_2^2) \geq 3 - (x_1^2 + x_3^3) = x_4$, iz druge in tretje pa $x_2 = 3 - (x_3^2 + x_4^3) \geq 3 - (x_3 + x_4^2) = x_1^3$. Vsak člen posebej je torej enak nič, oziroma $x_1 = x_2 = x_3 = x_4 = 1$.

2. možnost $0 \leq x_2, x_4 \leq 1 \leq x_1, x_3$

Iz enačb dobimo $x_1 + x_2^2 + x_3^3 - x_2 - x_3^2 - x_4^3 + x_3 + x_4^2 + x_1^3 - x_4 - x_1^2 - x_2^3 = 3 - 3 + 3 - 3$ oziroma $(x_1 - x_2) + (x_3 - x_4) + (x_2^2 - x_3^2) + (x_3^3 - x_2^3) + (x_1^3 - x_1^2) + (x_4^2 - x_4^3) = 0$. Ker so vsi izrazi v oklepajih nenegativni, sledi $x_1 = x_2 = x_3 = x_4 = 1$.

2. Za konstanten polinom P trditev drži. Iz pogojev naloge vidimo, da je njegova ničla x_0 bodisi realna in sode stopnje ali pa je hkrati z njo tudi število $\overline{x_0}$ ničla polinoma P .

Razcepimo P na faktorja A in B tako, da ima A le realne ničle, B pa konjugirane pare kompleksnih ničel in vodilni koeficient enak 1. Ker je $A = (\sqrt{A})^2$ in $\sqrt{A}$ polinom z realnimi koeficienti, bo dovolj, da trditev dokažemo za B .

Polinom B je produkt binomov oblike

$$(x - x_0)(x - \overline{x_0}) = \left(x - \frac{x_0 + \overline{x_0}}{2}\right)^2 + \left(i \frac{x_0 - \overline{x_0}}{2}\right)^2$$

Produkt polinomov $U = K^2 + L^2$ in $V = M^2 + N^2$ pa lahko zapišemo v enaki obliki $UV = (KM + LN)^2 + (KN - ML)^2$ in je zato B tudi take oblike. Trditev je s tem dokazana.

3. Privzemimo oznako A^C za komplement množice A glede na množico $\{1, 2, \dots, n\}$.

Naj bo N_1 število urejenih trojic (A, B, C) , za katere sta izpolnjeni prvi dve zahtevi. Opazimo, da je vsako število $i \in \{1, 2, \dots, n\}$ vsebovano v natanko eni izmed naslednjih šestih množic: $A \cap B^C \cap C^C$, $A^C \cap B \cap C^C$, $A^C \cap B^C \cap C$, $A \cap B \cap C^C$, $A \cap B^C \cap C$, $A^C \cap B \cap C$. Torej je N_1 enako številu variacij s ponavljanjem 6 elementov razreda n , $N_1 = 6^n$.

Naj bo N_2 število urejenih trojic (A, B, C) , za katere prva dva pogoja izpolnjena, tretji pa ne. Opazimo, da je vsako število $i \in \{1, 2, \dots, n\}$ vsebovano v natanko eni izmed naslednjih petih množic: $A \cap B^C \cap C^C$, $A^C \cap B \cap C^C$, $A^C \cap B^C \cap C$, $A \cap B^C \cap C$, $A^C \cap B \cap C$. Torej je N_2 enako številu variacij s ponavljanjem 5 elementov razreda n , $N_2 = 5^n$. Očitno je, da lahko vse tri pogoje zadovoljimo na $N_1 - N_2 = 6^n - 5^n$ načinov.

4. Označmo z n_{AB} premico, ki vsebuje točki A in B . Postavimo izhodišče koordinatnega sistema v oglišče D . Enačbe premic n_{AB} , n_{CC_1} , $n_{A_1D_1}$ in n_{DB_1} se vektorsko izražajo takole: $\vec{r}_1 = (1, t, 0)$, $\vec{r}_2 = (0, 1, u)$, $\vec{r}_3 = (v, 0, 1)$, $\vec{r}_4 = (w, w, w)$.

Predpostavimo, da iskana premica p obstaja in da ima enačbo $\vec{r} = (a_1 + \tau b_1, a_2 + \tau b_2, a_3 + \tau b_3)$. Ker obstaja $p \cap n_{AB}$ sledi $a_1 + \tau b_1 = 1$ in $a_3 + \tau b_3 = 0$ oziroma

$$a_1 = 1 + a_3 \frac{b_1}{b_3} \quad (1)$$

Ob tem je $b_3 \neq 0$, ker sicer ne bi obstajalo presečišče $p \cap n_{A_1D_1}$. Podobno dobimo še $b_2 \neq 0 \neq b_3$ in

$$a_2 = 1 + a_1 \frac{b_2}{b_1} \quad (2)$$

$$a_3 = 1 + a_2 \frac{b_3}{b_2} \quad (3)$$

Uporabimo te tri enačbe, pa dobimo $a_1 = 1 + \frac{b_1}{b_3} \left(1 + \frac{b_3}{b_2} \left(1 + a_1 \frac{b_2}{b_1} \right) \right) =$
 $1 + \frac{b_1}{b_3} + \frac{b_1}{b_2} + a_1$ oziroma

$$b_1 b_2 + b_2 b_3 + b_3 b_1 = 0 \quad (4)$$

Če naj p seka n_{DB_1} , mora veljati $a_1 + \tau b_1 = a_2 + \tau b_2 = a_3 + \tau b_3$,
 odtod pa sledi

$$\frac{a_1 - a_2}{b_2 - b_1} = \frac{a_1 - a_3}{b_3 - b_1} \quad (5)$$

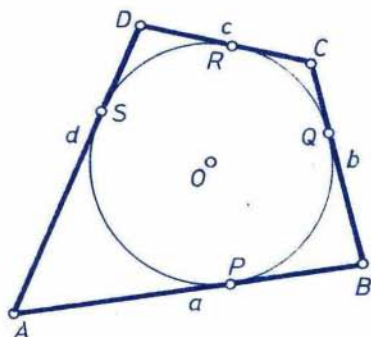
Gotovo je namreč $b_i \neq b_j$ za $i, j \in \{1, 2, 3\}$, $i \neq j$, v nasprotnem primeru pridemo v protislovje z enačbami (1), (2) in (3). V enačbo (5) vstavimo a_2 iz (2) in a_1 iz (1). Po krajšanju nam ostane $b_1^2 = b_2 b_3$. Dobljeno zvezo upoštevamo v enačbi (4) in dobimo $b_1 + b_2 + b_3 = 0$. Ker

$$b_1^2 + b_2^2 + b_3^2 = b_1^2 + b_2^2 + b_3^2 + 2(b_1 b_2 + b_2 b_3 + b_3 b_1) = (b_1 + b_2 + b_3)^2 = 0,$$

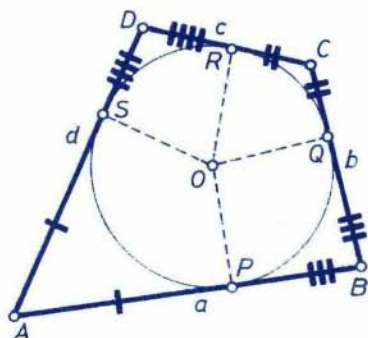
bi moralo biti $b_1 = b_2 = b_3 = 0$. Protislovje dokazuje, da iskana premica ne obstaja.

Matjaž Željko

POSREČEN ALI PONESREČEN DOKAZ?



Slika 1



Slika 2

Definicija. Štirikotnik je *tangenten*, če vse njegove stranice ležijo na tangentah nekega kroga.

Izrek. V tangentnem štirikotniku je vsota dolžin para nasprotnih stranic enaka vsoti dolžin drugega para nasprotnih stranic.

Dokaz. Krog, ki ga včrtam štirikotniku $ABCD$, se naj dotika stranic a , b , c in d v točkah P , Q , R in S . Skladnosti stranic

$$AP \cong AS \text{ in } CQ \cong CR$$

zatem pa še

$$BP \cong BQ \text{ in } DR \cong DS$$

menda ja ni treba posebej dokazovati.

Da bo bolj pregledno, označim na risbi prvi par skladnih stranic s po eno črtico, drugi par s po dvema, tretji par s po tremi in četrti par s po štirimi črticami (glej sliko 2).

Sedaj pa le še seštejmo črtice na prvih mestih:

$$a + c = | \text{ plus } ||| \text{ plus } || \text{ plus } |||| = 10 \text{ črtic}$$

$$b + d = ||| \text{ plus } || \text{ plus } |||| \text{ plus } | = 10 \text{ črtic}$$

Število črtic v obeh vsotah se ujema in izrek je torej dokazan!

Komentar. Seveda verjamem, da ste zgodbo prebrali zgolj kot šalo. In ker bi težko rekel, da šal v matematiki kar mrgoli, nam seveda skorajda sleherna presneto prav pride. Pa vendarle – vsak zase naj poskusi premisliti, kje vse tičijo vzroki za tisti po(ne)srečen sklep v dokazu. Sam se precej nagibam k misli, da matematiku močna zaverovanost v geometrijsko risbo lahko povzroči v logičnem sklepanju včasih prav katastrofalne napake. V našem primeru se je na srečo še vse dobro izteklo; lahko bi jo precej huje odnesli.

Vaja bralcem. Štirikotnik je *tetiven*, če mu lahko očrtamo krog. V njem je vsota nasprotnih kotov enaka iztegnjenemu kotu. Ali znate tudi ta izrek dokazati na podoben norčev način?

Vilko Domajnko

NALOGE IZ KNJIGE VESELJE OB IGRI S ŠTEVILI – Rešitve iz 292

1. Sleherno naravno število, manjše od 100, se da zapisati v obliki

$$a_1 \cdot 1 + a_2 \cdot 3 + a_3 \cdot 9 + a_4 \cdot 27 + a_5 \cdot 81$$

ali

$$a_1 \cdot 3^0 + a_2 \cdot 3^1 + a_3 \cdot 3^2 + a_4 \cdot 3^3 + a_5 \cdot 3^4$$

pri čemer je $a_i \in \{0, 1, 2\}$ za $1 \leq i \leq 5$. Če se teža kamna, ki ga tehtam, zapiše le s koeficienti, ki so 0 ali pa 1, je rešitev že na dlani. Trik, ki ga uporabimo pri tehtanju tistih količin, ki imajo v zgornjem zapisu kak koeficient enak 2, pa si oglejmo kar na primeru:

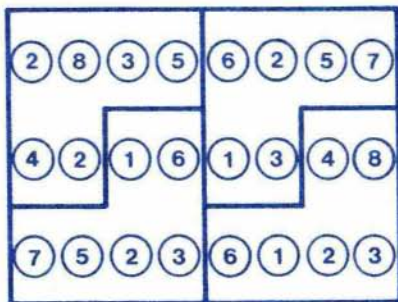
$$65 = 2 \cdot 1 + 0 \cdot 3 + 1 \cdot 9 + 2 \cdot 27 + 0 \cdot 81$$

$$65 = (-1) \cdot 1 + 1 \cdot 3 + 1 \cdot 9 + (-1) \cdot 27 + 1 \cdot 81$$

Tak kamen bi torej takole stehtal:

$$1 + 27 + x = 3 + 9 + 81$$

2.

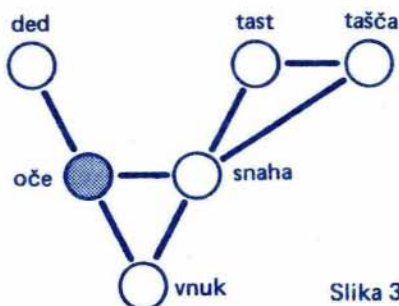


Slika 2

- 450 se da na več načinov razstaviti v produkt treh faktorjev. Poiščimo le tiste tri, pri katerih je vsota produktov poljubnih dveh iz te trojice enaka 225. Temu pogoju zadoščajo le števila 3, 10 in 15.
- Za 6 udarcev je potrebnih 5 vmesnih odmorov, za 12 udarcev pa 11 odmorov. In ker 5 odmorov traja 6 sekund, traja 11 odmorov 13,2 sekunde.
- Le 500 dolarjev in prav nič več.
- Reši enačbo $24 + x = 2 \cdot (24 - x)$
Na njeni levi in desni strani vidiš zapisano število Tininih let.
- Seveda, če je mož snahe hkrati tudi oče vnukov.

8.

poteza	1.	2.	3.	4.	5.
	4	5	6	7	10
1	4	5	12	7	4
2	8	5	8	7	4
3	8	10	8	2	4
4	8	8	8	4	4
5	8	8	8	8	0



Slika 3

9. V drugem nadstropju stanujejo vsi tisti izmed dvajsetih, ki ne stanujejo v prvem nadstropju. Oziroma vsi tisti izmed dvaindvajsetih, ki jih ni v tretjem nadstropju. Toliko torej, kolikor znaša vsota omenjenih dveh razlik

$$x = (20 - x) + (22 - x)$$

$$x = 14$$

Števili stanovalcev v prvem in tretjem nadstropju pa prebereš spet kar iz enačbe.

Vilko Domajnko

PRESEK

list za mlade matematike, fizike, astronome in računalnikarje
17.letnik, šolsko leto 1989/90, številka 5, strani 257-320

UREDNIŠKI ODBOR: Vladimir Batagelj, Tanja Bečan (jezikovni pregled), Dušica Boben (pisma bralcev, stavljenje teksta), Vilko Domajnko, Darjo Felda (tekmovanja), Bojan Golli, Marjan Hribar, Sandi Klavžar (računalništvo), Damjan Kobal, Jože Kotnik, Edvard Kramar (Presekova knjižnica), Peter Križan, Boris Lavrič (matematika, odgovorni urednik), Matija Lokar, Bojan Mohar (galvni urednik), Franci Oblak, Peter Petek, Pavla Ranzinger (astronomija), Marjan Smerke (svetovalec za fotografijo), Miha Štalec (risbe), Ciril Velkovich (urednik, nove knjige, novice), Marija Vencelj.

Dopise pošiljajte in list naročajte na naslov: Društvo matematikov, fizikov in astronomov SR Slovenije - Podružnica Ljubljana - Komisija za tisk, Presek, Jadranska c. 19, 61111 Ljubljana, p.p. 64, tel (061) 2665-061/53, št. žiro računa 50101-678-47233. Naročnina za šolsko leto 1989/90 vplačana do izida pete številke, je za posamezne naročnike 50.-din, za skupinska naročila šol 40.- din, posamezna številka 10.- din (8.- din).

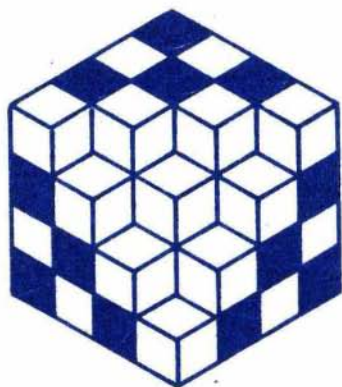
List sofinancirata Izobraževalna in Raziskovalna skupnost Slovenije

Ofset tisk Časopisno in grafično podjetje DELO, Ljubljana

© 1990 Društvo matematikov, fizikov in astronomov SRS - 1001

NAGRADNE KOCKE – Rešitev iz P1

O nagradnih kockah iz prve številke letošnjega Preseka nam je pisal le Vladimir Bensa iz Nove Gorice. Njegov odgovor je nepopoln, vendar pravilen, zato smo mu za nagrado poslali knjigo J. Grassellija *Diofantske enačbe* iz zbirke Sigma. Tu bomo odgovore na postavljena vprašanja tudi utemeljili.



Slika 1

Najprej bomo dokazali, da z zidaki oblike $1 \times 1 \times 2$ ni mogoče sestaviti nobenega telesa na sliki 1. Za dokaz uporabimo naslednjo zvijačo. Telesa s slike sestavimo iz belih in iz črnih kockic razsežnosti $1 \times 1 \times 1$, tako da nobeni sosedi (torej kocki s skupno stično stransko ploskvijo) nista enake barve (glej sliko 1 - za levo telo). Če bi se telo dalo zgraditi iz zidakov oblike $1 \times 1 \times 2$, bi moralo biti sestavljeno iz enakega števila belih in črnih kockic (zakaj?), kar pa za nobeno od treh teles ni res (preveri).

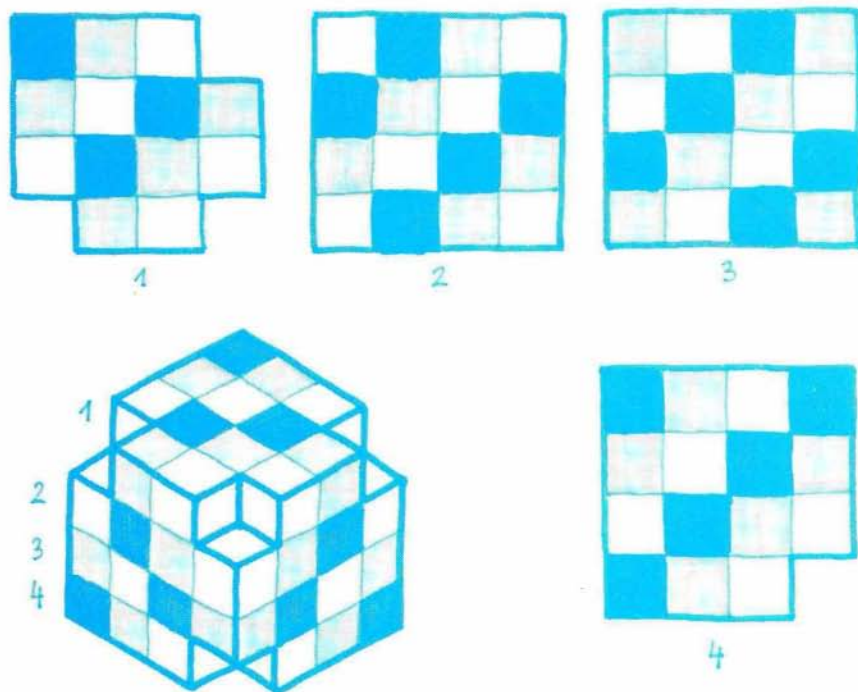
Na enak način vidimo, da z zidaki oblike $1 \times 1 \times 2$ nobenega obravnavanega telesa ni mogoče dopolniti do najmanjše možne kocke.

Podobno se lotimo sestavljanja z zidaki oblike $1 \times 1 \times 3$. Spet zgradimo telesa s slike iz kockic razsežnosti $1 \times 1 \times 1$, le da poleg belih in črnih kockic uporabimo še sive. Način gradnje (za srednje telo) je upodobljen na sliki 2. Nadomestimo katerekoli tri sosednje kockice z zidkom oblike $1 \times 1 \times 3$ in opazili bomo, da so nadomeščene kockice različnih barv. Če bi telo lahko sestavili iz zidakov oblike $1 \times 1 \times 3$, bi torej moralo biti v njem enako kock vsake barve, kar pa ne drži za nobeno telo s slike v P1.

Na enak način ugotovimo, da tudi z dopolnjevanjem s pomočjo zidakov oblike $1 \times 1 \times 3$ ne gre do konca.

Zidaki oblike L so precej bolj uporabni za našo gradnjo. Iz njih lahko sestavimo levo in srednje telo s slike (poskusi!), desnega telesa pa ne, ker vsebuje točno 22 kockic razsežnosti $1 \times 1 \times 1$. Desno telo lahko dopolnimo do kocke le z L -zidaki (preveri). Levega telesa pa ne moremo (do kocke manjka namreč 10 kockic $1 \times 1 \times 1$).

Odgovorimo še na zadnje vprašanje. Levega telesa ni mogoče dopolniti



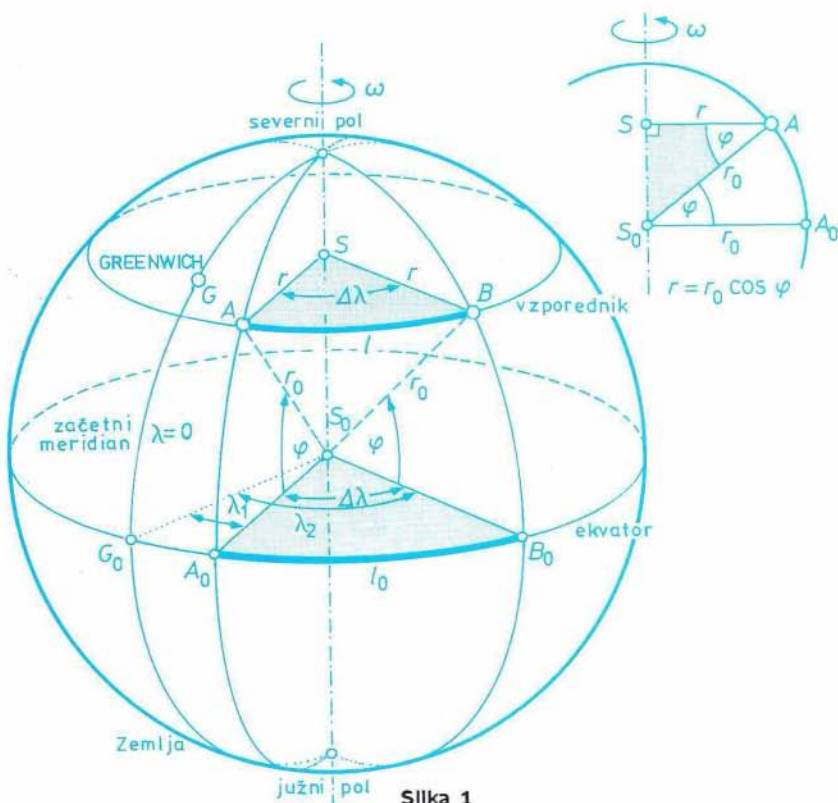
Slika 2

do najmanjše možne kocke, čeprav imamo na voljo zidake vseh treh oblik. Hitro lahko doženemo, da za dopolnjevanje ne moremo uporabiti zidakov oblike $1 \times 1 \times 3$ in da bi šlo morda le z dvema zidakoma oblike $1 \times 1 \times 2$ in z dvema L-zidakoma. Toda, s poskušanjem se lahko prepričamo, da tudi tako ne gre.

Boris Lavrič

NALOGE O DVEH KRAJIH NA ISTEM VZPOREDNIKU – Rešitev s str. 271

Označimo medsebojno razdaljo krajev A in B na istem vzporedniku (malem krogu) z $l = \widehat{AB}$ (slika 1). S slike izpelješ, da je polmer r vzporednika, na katerem ležita oba kraja z zemljepisno širino φ , enak $r = r_0 \cos \varphi$, če je r_0 polmer Zemlje. Razlika zemljepisnih dolžin krajev $\Delta\varphi = \varphi_2 - \varphi_1$ ($\varphi_2 > \varphi_1$) predstavlja središčni kot, ki mu pripada lok l na vzporedniku ali pa lok $l_0 = \widehat{A_0B_0}$ na ekvatorju.



Slika 1

a. Razdalja med krajema A in B je $l = r \Delta\lambda = r_0 \Delta\varphi$ ali $l = l_0 \cos \varphi$. Če označimo $l_0 = r_0 \Delta\lambda$. Vstavimo podatke in dobimo $l = 6370 \text{ km}$. $(52,5^\circ/57,3^\circ) \cos 45^\circ = 4130 \text{ km}$.

b. Zemlja se vrti s kotno hitrostjo $\omega = 2\pi/24\text{h} = 2\pi/86400\text{s} = 7,3 \cdot 10^{-5} \text{ rd/s}$ (ali tudi $360^\circ/24\text{h} = 15^\circ/\text{h} = 15''/\text{s}$). Hitrost krajev na zemeljskem ekvatorju je $v_0 = \omega r_0 = 7,3 \cdot 10^{-5} \cdot 6370 \cdot 10^3 \text{ m/s} = 465 \text{ m/s}$. Hitrost krajev A in B z zemljepisno širino φ pa je $v = \omega r = \omega r_0 \cos \varphi = v_0 \cos \varphi$, torej $v = 465 \text{ m/s} \cdot \cos 45^\circ = 329 \text{ m/s}$.

c. V enem dnevu se Zemlja enkrat zavrti. Kotu 360° tako ustreza čas 24 h. Eni kotni stopinji 1° ustreza čas $24 \text{ h}/360 = 4 \text{ minute}$. Razlika zemljepisnih dolžin je $\Delta\lambda = 77,5^\circ - 25^\circ = 52,5^\circ$, kar ustreza času $52,5 \cdot 4 \text{ min} = 210 \text{ min} = 3,5 \text{ h}$. V kraju B vzide Sonce 3,5 ure prej glede na krajevni čas kraja A.