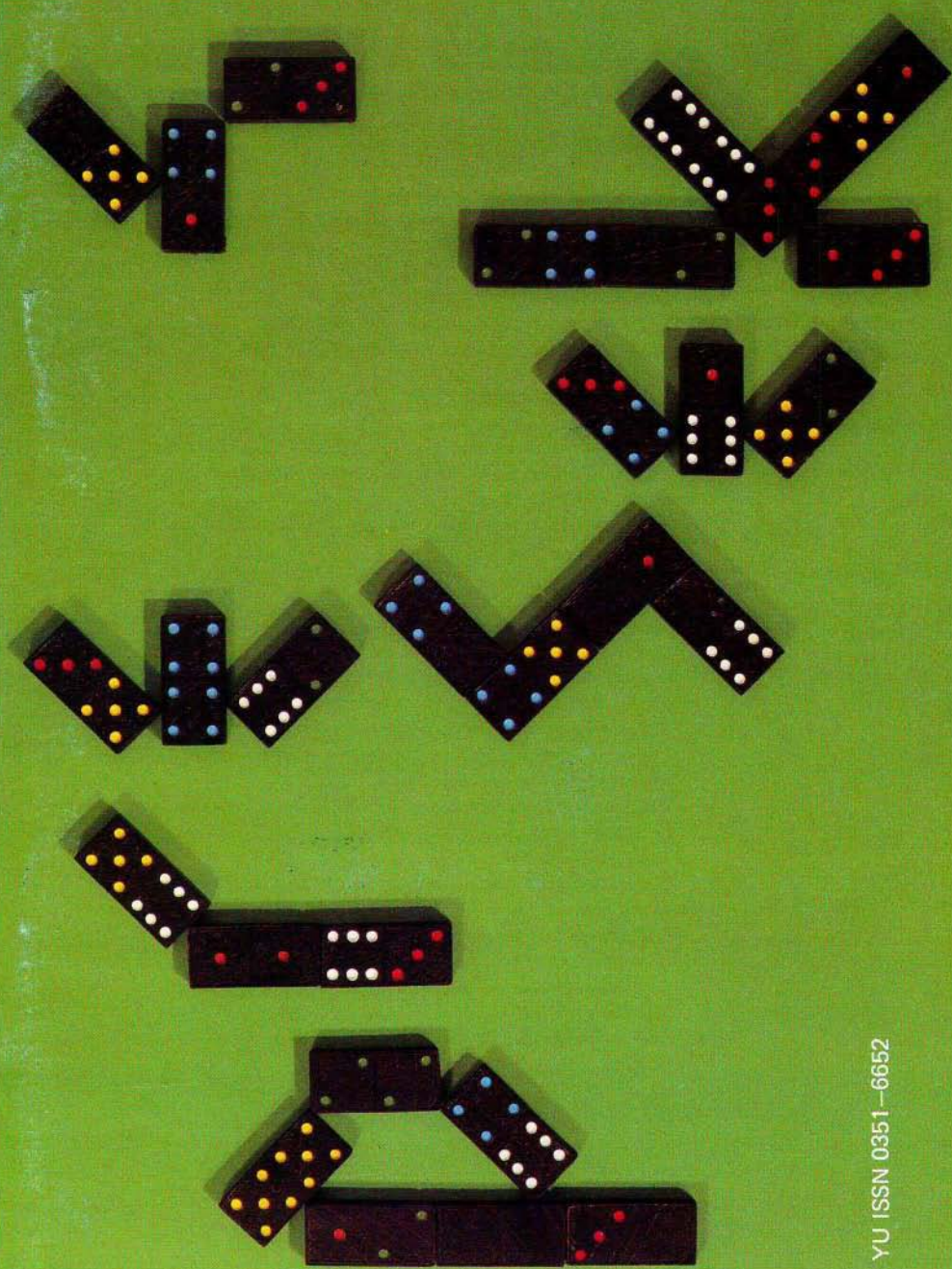




YU ISSN 0351-6652

VSEBINA

TEKMOVANJA	13. republiško tekmovanje srednješolcev iz računalništva in srečanje mladih raziskovalcev (prir. Sandi Klavžar)	198
	8. republiško tekmovanje iz SVIO — fizika (Stane Pirnat)	200
MATEMATIKA	Arhimedova spirala, 2. del (Vilko Domajnko)	203
FIZIKA	Brizgalnik in obratni brizgalnik (Franc Plevnik)	208
ASTRONOMIJA	Astronom iz Ljubljane (Marijan Prosen)	214
NOVE KNJIGE	Karti severnega in južnega neba (Marijan Prosen)	216
	Zbirka rešenih nalog z mednarodnih matematičnih olimpiad (Boris Lavrič)	217
RAČUNALNIŠTVO	Turbo pascal na hitro (Matija Lokar)	218
	Nevronske mreže, 2. del (Veselko Guštin)	226
TEKMOVANJA	20. zvezno tekmovanje osnovnošolcev iz matematike (Aleksander Potočnik)	232
	4. republiško tekmovanje iz računalništva za osnovnošolce (Ivan Gerlič)	234
NOVICE	Petstoletnica rojstva našega astronoma (Marijan Prosen)	239
	Urniki tekmovanj v letu 1990 (Darjo Felda)	242
REŠITVE	Naloga o deljivosti števil — Rešitev s str. 189 (D.M.Milošević, prev. Peter Petek)	245
	Vzorec iz Moskve — Rešitev s str. 172 (Boris Lavrič)	246
	25. republiško tekmovanje osnovnošolcev iz matematike — Rešitve s str. 174 (Aleksander Potočnik)	250
	15. izbirno tekmovanje iz matematike za srednješolce — Rešitve s str. 112 (Darjo Felda)	252
	Zvezda se dopolni — Rešitev s str. 141 (Vilko Domajnko)	III
NALOGE	Deljivost — Rešitev str. III (D.M.Milošević, prev. Boris Lavrič)	197
	Zadnja naloga in rešitev z republiškega tekmovanja iz fizike za sedmošolce v letu 1988 (Franc Plevnik)	213
	Enakostraničen trikotnik — Rešitev str. 241 (Boštjan Hostnik)	231
	Vsi krogi so enaki — Rešitev str. 202 (Vilko Domajnko)	IV
RAZVEDRILO	PRESEKOVA NADLOGA — Domino (Vilko Domajnko)	193
	Slikovna križanka (Marko Bokalič)	224
	Še o šahovskem kralju (Presekovi škrat)	233
NA OVITKU	Domino malo drugače — Ali opazite kakšno zakonitost števila pik pri postavitvi domin? (Boris Lavrič) (Foto Marjan Smerke)	I

PRESEKOVA NADLOGA

DOMINO

V igri domino, še bolj pa v nekaterih njenih izpeljankah, lahko matematika igra pomembno vlogo. V tem članku si bomo peščico takih iger tudi ogledali.

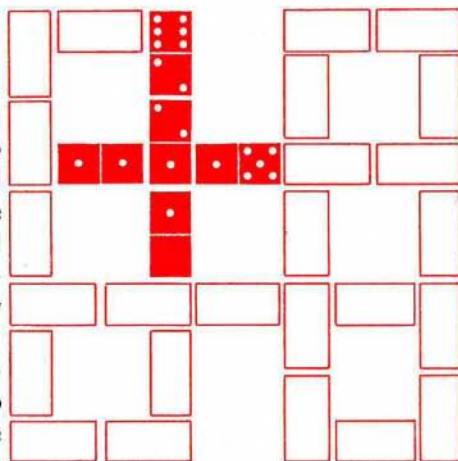


Slika 1

1. V ornament

Iz običajnega kompleta domin 0-0, 0-1, ..., 6-6 lahko sestavimo zanimiv geometrijski ornament, ki ga prikazuje slika 1. Ornament je treba sestaviti tako, da se sleherni dve sosednji polji na različnih dominah ujemata med seboj, kot je v navadi pri običajni igri domino.

Ornament na sliki 2 pa naj ostane za vabo reševalcu. Da mu bo izpolnjevanje tega ornamenta lažje steklo, je nekaj domin v njem že postavljenih na pravilna mesta.



Slika 2

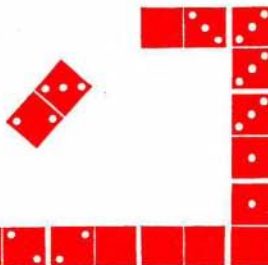
2. Le kam bi del?

Vzemimo sedaj komplet domin 0-0, 0-1, 0-2, 1-1, 1-2 in 2-2. Zlahka jih bomo uspeli postaviti v verigo. Slika 3 nam kaže eno izmed takšnih razvrstitev.

Pa storimo še korak naprej in si zastavimo vprašanje – koliko je vseh različnih verig iz teh šestih domin? Denimo, da začnemo graditi verigo z domino 1-2. Očitno je, da sme desno od nje stati le domina 2-2, levo od nje pa edino domina 1-1. Če bi desno od nje postavili domino 2-0, bi namreč domina 2-2 s tem že dokončno izpadla iz verige, in če bi levo od nje postavili domino 0-1, bi enaka usoda doletela tudi domino 1-1. Kratek premislek sedaj pokaže, da dobimo vse možne razvrstitve že zgolj s tem, da v verigi s slike 3 eno za drugo prestavljamo domine z njenega začetka na konec. In ker je vseh domin šest, je torej toliko tudi vseh različnih verig. Če pa upoštevamo še obraten vrstni red (zasukanih) domin, je vseh različnih verig pravzaprav dvanajst.



Slika 3



Slika 4

Začuda pa desetih domin iz kompleta 0-0, 0-1, 0-2, ..., 2-3, 3-3 nikakor ni moč razvrstiti v eno samo verigo. In bistri reševalec naj v svojem odgovoru pojasni, zakaj se zadnji domini veriga zmeraj upre.

3. Ulomki

Le kanček domišljije je potreben za to, da se domine naučimo uporabljati kot ulomke. Iz običajnega kompleta 0-0, ..., 6-6 izločimo najprej vse tiste domine, ki imajo na obeh svojih poljih po enako število pik, ter še vse tiste, na katerih je vsaj eno polje prazno. Tako nam ostane 15 domin, pri katerih lahko eno izmed obeh polj vzamemo za števec ulomka, drugo pa za njegov imenovalec.

Razdelimo domine sedaj v tri skupine po pet tako, kakor kaže slika 5. Presenetljivo - če jih seštevamo kakor ulomke, opazimo, da je vsota vsake izmed treh vrstic natanko $5/2$.

Seveda je potrebno precej spretnosti za takšno umetelno razvrstitev domin. Kljub temu pa bo tudi Presekov nepopustljivi reševalec morebiti že po krajšem razmisleku uspel sestaviti podobne tri skupine po pet domin z vsoto 10 v vsaki vrstici. Za lažji začetek pri reševanju je v vsaki vrstici po ena izmed domin že postavljena. In v vseh treh primerih je to tista domina, ki v svoji vrstici predstavlja ulomek, po vrednosti večji od natančno dveh preostalih ulomkov iz te vrstice.

4. Magični kvadrat 4. reda

Magični kvadrat je zagotovo ena izmed najpopularnejših tem na področju rekreacijske matematike. Tudi mi mu bomo namenili lep kos prostora.

Na sliki 7 vidimo magični kvadrat 4. reda s konstanto 5 (vsote vseh

$$\begin{array}{|c|c|c|c|c|} \hline \text{1-0} & \text{2-0} & \text{3-0} & \text{4-0} & \text{5-0} \\ \hline \end{array} = \frac{5}{2} \quad \begin{array}{|c|c|c|c|c|} \hline \square & \square & \text{1-2} & \square & \square \\ \hline \end{array} = 10$$

$$\begin{array}{|c|c|c|c|c|} \hline \text{1-1} & \text{2-1} & \text{3-1} & \text{4-1} & \text{5-1} \\ \hline \end{array} = \frac{5}{2} \quad \begin{array}{|c|c|c|c|c|} \hline \square & \square & \text{2-3} & \square & \square \\ \hline \end{array} = 10$$

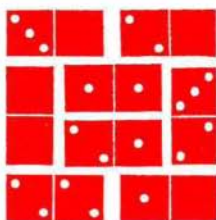
$$\begin{array}{|c|c|c|c|c|} \hline \text{1-2} & \text{2-2} & \text{3-2} & \text{4-2} & \text{5-2} \\ \hline \end{array} = \frac{5}{2} \quad \begin{array}{|c|c|c|c|c|} \hline \square & \square & \text{3-4} & \square & \square \\ \hline \end{array} = 10$$

Slika 5

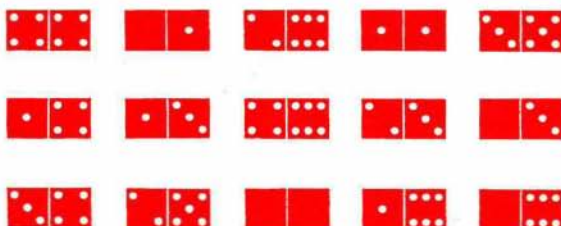
Slika 6

pik na štirih poljih v vsaki vrstici, v vsakem stolpcu in na obeh diagonalah so vselej 5). Če število pik na slehernem izmed polj nadomestimo s tistim številom pik, ki temu polju manjka do 6, dobimo še en magični kvadrat. Zgornjo desno domino 2-0 na sliki 7 bi torej nadomestili z domino 4-6 itd... Pravimo, da sta si oba tako dobljena magična kvadrata komplementarna.

Znano je, da je mogoče z običajnim kompletom domin 0-0, ..., 6-6 sestaviti magični kvadrat 4. reda s poljubno izbrano konstanto med 5 in 19 (vključno z mejnima vrednostima). Zato vabimo reševalca, da z dominami sestavi vsaj še kak magični kvadrat 4. reda. Za ohrabritev naj povem, da se skorajda vsak tak poskus prej ali slej uspešno konča.



Slika 7



Slika 8

5. Magični kvadrat 5. reda

S tem kvadratom je pa križ, saj ga na način, kakršnega smo opisali v prejšnji točki, ni moč sestaviti (bralec, ali že veš, zakaj ne?). Vendar pa nas slika 8 tolaži, da tudi v tem primeru gre – le zadeve se je treba drugače lotiti. Če vsoto vseh pik na dominah vzamemo za število v magičnem kvadratu, lahko na tej sliki občudujemo prav imeniten magični kvadrat 5. reda s konstanto 27. In naloga, ki jo zastavljamo ob tej sliki – poskusimo sestaviti podoben magični kvadrat 5. reda s konstanto 33.

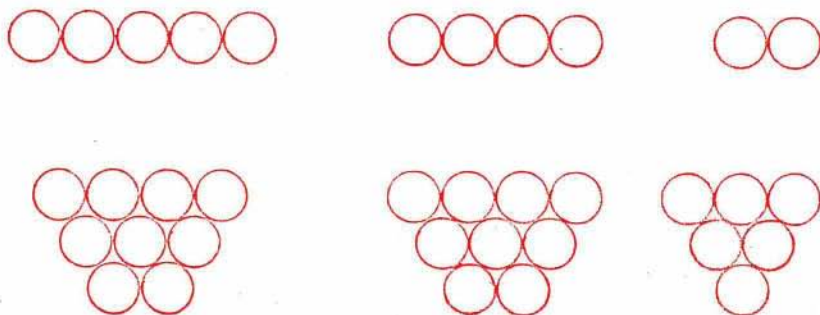
6. ?

Reševalec Presekove nadloge naj tudi tokrat postavi ob koncu kakršnokoli zanimivo vprašanje (tokrat seveda v zvezi z dominami).

Namenimo sedaj nekaj pozornosti še odgovorom na vprašanje s Presekove nadloge iz letošnje prve številke. Žal smo prejeli le troje odgovorov. Poslali so nam jih *Tanja Rudolf* iz Ljubljane, *Žiga Krof* iz Kranjske gore in *Luka Štravs* iz Ljubljane. Vsi trije zaslužijo vsaj pohvalo za korajžo ter priznanje za dobre rešitve.

Najbrž se bralci še spominjajo, da je bilo treba takrat sestaviti faraonov tetraeder (mimogrede – lepo izdelano sestavljanke za tak tetraeder lahko kupite tudi v nekaterih trgovinah; sestavljenka se imenuje Tristranična piramida). Rešitve najbrž nima pomena objavljati, saj je brez večjih težav tetraeder sestavil najbrž vsak, ki je vsaj poskušal.

Omeniti pa vsekakor velja izvrstno *Lukovo* sestavljanke za tetraeder s po petimi kroglicami na vsakem izmed robov. Čisto drugačna je od "običajne", ki sta jo sicer odkrila tudi ostala dva reševalca. Mislim, da zasluži objavo, v zabavo in kratkočasje pa bo služila najbrž tudi kakšnemu izmed bralcev.



Žiga sprašuje v svojem pismu med drugim tudi po formuli za izračun števila kroglic v tetraedru z n kroglicami na vsakem robu. Takole gre ta reč:

število kroglic na robvih tetraedra	1	2	3	4	5	6	n
število vseh kroglic v tetraedru	1	4	10	20	35	56	$\frac{n(n+1)(n+2)}{6}$

Števila v spodnji vrstici imenujemo tetraedrska števila. Poznali pa so jih že Pitagorejci.

Tanji hvala za lepe ilustracije.

Za svoj najpopolnejši in najobsežnejši odgovor bo knjižno nagrado tokrat dobil *Luka Štravs*. Čestitamo!

Vilko Domajnko

13. REPUBLIŠKO TEKMOVANJE SREDNJEŠOLCEV IZ RAČUNALNIŠTVA IN SREČANJE MLADIH RAZISKOVALCEV

Na fakulteti za elektrotehniko in računalništvo v Ljubljani je 19.5.1989 potekalo srečanje mladih raziskovalcev iz računalništva. Na srečanju je sodelovalo 75 mladih raziskovalcev, ki so zagovarjali 31 raziskovalnih nalog. Raziskovalne naloge so bile uvrščene v tri skupine: uporaba računalnika v naravoslovju in matematiki, programska oprema in strojna oprema.

S področja uporabe računalnika v naravoslovju in matematike so bile predstavljene štiri teme. Po kvaliteti so izstopale tri naloge – dve s področja meteorologije in ena s področja grafičnega prikaza matematičnih funkcij.

Komisija se je odločila podeliti najvišje priznanje nalogi "Simulacija vremenskih pojavov" avtorja Mateja Trampuža iz Titovega Velenja. Pri tem je upoštevala originalnost teme, nazornost predstavitve in možnost uporabe pri pouku geografije in fizike. S programom je možno simulirati nastanek oblaka, dežja in podobnih vremenskih pojavov. Avtor bo nalogo predstavil na zveznem srečanju na Ohridu in ima plačano udeležbo na Poletni šoli računalništva.

V skupini za programsko opremo je izstopal izdelek "Uporaba računalnika pri besedni in skladenjski analizi v slovenščini", avtorja Petra Holozana, Marka Šimunoviča in Iztoka Grilca. Izdelek odlikujejo tako aktualnost, izvirnost in celovitost obravnavane problematike kakor dokumentacije ter sama predstavitev. Za dva avtorja je organiziran obisk seminarja v Tehniškem muzeju v Münchnu, eden se bo udeležil zveznega srečanja na Ohridu in za enega je plačana udeležba na Poletni šoli računalništva v Ljubljani.

Ostali izdelki povečini obravnavajo zanimive probleme z različnih področij uporabe računalnika in kažejo solidno znanje in prizadevnost avtorjev. V posameznih vidikih je posebej zanimiv še program "Knjižničar", ki ima skrbno izdelan uporabniški vmesnik, zato je komisija predlagala, da avtor predstavi nalogo na zveznem srečanju na Ohridu in se udeleži Poletne šole računalništva v Ljubljani.

Posebej se nam zdi potrebno omeniti in pozdraviti tudi izdelek dijakin srednje ekonomske šole "Namenska datoteka uspeha", ki kaže, da se uporaba računalnika širi tudi izven "računalniških" šol. Zato je komisija predlagala, da se ena avtorica udeleži Poletne šole računalništva v Ljubljani.

V tretji skupini so izstopale naslednje naloge:

"Video digitalizator ter prepoznavanje 2D likov": V nalogi so kandidati Damjan Markovič, Dimitrij Mlekuž in Robi Molnar obravnavali moderno pro-

blematiko. Pohvaliti je treba teamski pristop in suvereno obvladovanje interdisciplinarnih področij. Dva avtorja se lahko udeležita zveznega srečanja na Ohridu in en avtor bo obiskal seminar v Tehniškem muzeju v Münchnu.

"Mobilni robot z ultrazvočnima senzorjema": V nalogi se je kandidat Tomaž Klopčič lotil problema, ki ga lahko uvrstimo v robotiko prihajajoče generacije. Poudarimo naj suvereno obvladovanje vseh aparaturnih in programskih problemov računalništva kakor tudi ostalih področij fizike in tehnike (akustike, senzorjev ...). Avtor se bo udeležil Zimske šole računalništva v Wrocławu.

"Programski paket za računalniški emulator programatorja pralnega stroja – REPPS": Kandidat Jurica Šafarič se je v tej nalogi, ki ni njegova edina, lotil problema, ki ima precejšen pomen za ekologijo in varčevanje z energijo. Posebej moramo pohvaliti neposredno uporabnost rezultatov, dobro obvladovanje vseh elementov programiranja. Avtor se bo udeležil Poletne šole računalništva v Ljubljani in Zimske šole računalništva v Wrocławu.

Naslednji dan, 20.5.1989, je bilo na Fakulteti za elektrotehniko in računalništvo v Ljubljani 13. republiško tekmovanje iz računalništva. Na njem so bili doseženi naslednji rezultati.

1. skupina

1. mesto Boštjan LESJAK, Srednja računalniška šola, Ljubljana; Matej KURENT, Gradbeži, SNS Ljubljana; Milan HRIBERNIK, CSŠTUD, Titovo Velenje;
2. mesto Gregor BREČKO, Srednja elektrotehniška šola, Ljubljana; Boštjan GOMILŠEK, SENMPŠ, Brežice; Jure DERGANČ, Srednja naravoslovna šola, Ljubljana;
3. mesto Matjaž PAVLIŠIČ, SŠDTU, Črnomelj; Vili JAKOB, CSŠTUD, Titovo Velenje; Borut HOČEVAR, SŠTUD, Kočevje.

2. skupina

1. mesto Tomislav KACIN, SŠ Jurija Vege, Idrija; Iztok SITAR, Računalniški krožek gimnazije, Kranj;
2. mesto Andrej MRSEK, SŠC Dušana Kvedra, Ptuj
3. mesto Miha ZNIDARŠIČ, Srednja računalniška šola, Ljubljana; Dalibor CERAR, Srednja računalniška šola, Ljubljana.

3. skupina

1. mesto Božo DRAGOJEVIČ, Srednja naravoslovna šola, Ljubljana;
2. mesto Toni BRACIČ, SŠPRNMU, Kranj;
3. mesto Gorup SAVIN, SŠ za elektrotehniko in naravoslovje, Ljubljana.

Po biltenu srečanja povzel
Sandi Klavžar

8. REPUBLIŠKO TEKMOVANJE IZ SVIO - FIZIKE

Po ustaljenem sporedu tekmovanj iz fizike in matematike za srednješolce je bilo 8. republiško tekmovanje iz fizike za 1. letnik srednjih šol za šolsko leto 1988/89 v soboto, 3. junija v Celju. Tekmovalo je 121 prvošolcev v 61 ekipah iz 31 srednjih šol SR Slovenije. Izbirni del tekmovanja je bil na Srednji družboslovni šoli - gimnaziji Celje. Treba je bilo odgovoriti na 20 vprašanj izbirnega tipa in izvesti mersko vajo s sklopljenima težnima nihaloma.

Vprašanja – nekoliko skrajšana – so bila tale:

1. Okvir, na katerem visi več vzmetnih nihal (navedene so mase uteži, prožnostni koeficienti vzmeti), zanihajo s konstantno frekvenco in amplitudo. Katero od nihal zaniha z največjo amplitudo?
2. Kako je z velikostjo kotov med odbitim in lomnim žarkom ter med vpadnim in lomnim žarkom pri vpadu curka valovanja na mejo dveh sredstev?
3. Kako pri interferenci iz dveh točkastih izvirih dosežemo, da se razdalja med interferenčnima ojačitvama zveča na štirikratno prvotno razdaljo?
4. Pri kateri višji frekvenci ν_2 zazvenita struna in zračni stolpec v polzaprti cevi, če oba zazvenita pri nižji frekvenci ν_1 ?
5. Zakaj pri gledanju skozi trikotno stekleno prizmo vidimo mavrico?
6. Kako so razvrščene razdalje interferenčnih maksimov za različne barve pri mavrici, ki jo dobimo z optično mrežico?
7. Kako izgledajo spektri različnih svetil?
8. Kolikšna je valovna dolžina, kolikšna frekvenca in kolikšna energija fotonov pri različnih elektromagnetnih valovih?
9. Katera svetloba lahko povzroči fotoefekt, katera pa ga ne more?
10. Kako se spremenita kinetična energija elektronov in valovna dolžina, ki jim jo pripišemo, če se poveča hitrost elektronov za faktor 10?
11. Kako sta oblikovani napetosti na odklonskih kondenzatorjih osciloskopa, ko je na ekranu graf žagaste napetosti s 3 vrhovi?
12. Po masi razvrsti: atom H, elektron, delec α , atom He in ion He^+ !
13. V kakšni zvezi sta masa jedra in vsota mas nukleonov, iz katerih je jedro?
14. Kaj se zgodi z nestabilnim atomskim jedrom pri razpadu β^- ?
15. Zakaj pri žarnici izmerimo upor, ki se precej razlikuje od tistega, ki ga izračunamo iz napetosti 220 V in moči 100 W?
16. Sanke drsijo v dolino in nato v nasprotni breg. Kolikšno višino nad dolino dosežejo in katere so na posameznih delih poti zunanje sile, ki

delujejo na sanke?

17. Na kateri od kovinskih krogel, ki se dotikajo Van de Graafovega generatorja, je največji električni naboj in na kateri največja gostota naboja?
18. Koliko atomov je v 5 dag papirja?
19. Koliko časa bi potoval curek laserske svetlobe do Marsa in nazaj?

Za odgovore na ta vprašanja so imeli tekmovalci na voljo 60 minut, 30 minut pa je bilo namenjeno merski vaji s sklopljenima nihaloma. Izmeriti je bilo treba nihalni čas in frekvenco posameznega nihala, nihalni čas in frekvenco nasprotno nihajočih nihal, čas in frekvenco utripanja ter narisati časovni potek odmika nihal in časovni potek vsote kinetične in potencialne energije za obe nihali.

Rezultati izbirnega dela tekmovanja so bili imenitni. 20 najboljših ekip je pri 17 obveznih vprašanjih doseglo v povprečju 73% možnih točk, pri merski vaji pa v povprečju 74% možnih točk. Po običajnem šolskem ocenjevanju bi bila torej tretjina ekip odlična ali prav dobra. Čestitati je treba tako dobro pripravljenim tekmovalcem in njihovim mentorjem. Nekatera poročila o merski vaji so bila tako vzorna, da smo jih člani tekmovalne komisije kar občudovali.

Po ogledu Grafike Aero in po kosilu so se tekmovalci zbrali v Narodnem domu na finalnem tekmovanju štirih najboljših ekip: Srednje naravoslovne šole Maribor, Naravoslovnega šolskega centra Nova Gorica, Srednje šole pedagoške in tehniško-naravoslovne usmeritve Novo mesto in Šolskega centra Črnomelj.

Vprašanja iz finalnega dela tekmovanja navedimo le na kratko:

1. Načini določanja razdalj v vesolju.
2. Krajevna jata in superjata.
3. Primerjava velikosti in zgradbe Zemlje in Sonca.
4. Dopplerjev premik in razdalje v vesolju.
5. Veljavnost poznanih fizikalnih zakonov v vesolju.
6. Elektromagnetno valovanje pri spoznavanju vesolja.
7. O vrtenju nebesnih teles.
8. Prasevanje.
9. Energija pri termonuklearnih reakcijah.
10. Termonuklearne reakcije v zvezdah.
11. Anihilacija in nastajanje parov.
12. Osnovne sile med delci.
13. Veliki pok in "veliko škrtanje".

14. Razvoj zvezd.
15. Galaksije.
16. Bela pritlikavka. Supernova.

Tekmovalci so bili enakovredni, tako da je bilo potrebno za razvrstitev na 2. in 3. mesto dodatno vprašanje o Hubblovi konstanti.

Končna razvrstitev:

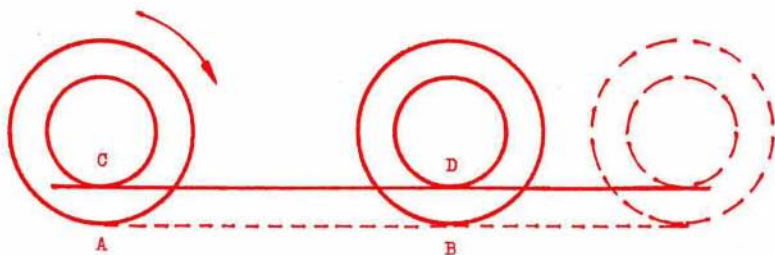
1. Uroš DOBNIKAR, Matjaž KOTNIK, SNŠ Maribor.
2. Janez ZALETELJ, Gregor ŽUNIČ, SŠPTNU Novo mesto.
3. Krešimir MACAN, Boštjan VRVIŠČAR, CSŠ Črnomelj.

Tekmovanje sta organizirala Društvo matematikov, fizikov in astronomov SR Slovenije in Zavod SR Slovenije za šolstvo, vodili pa člani podružnice DMFA iz Celja. Materialno je pomagalo več podjetij, za kar se jim najlepše zahvaljujemo.

Stane Pirnat

VSI KROGI SO ENAKI, KAJNE? – Rešitev s str. IV

Če napravimo podlago manjšemu krogu namesto večjemu in tedaj tega zakotalimo za poln obrat, opazimo, da celotna kompozicija obeh krogov opravi krajšo pot kakor v primeru, ko se je kotalila po podlagi večjega kroga.



Če bi torej napravili podlago obema krogoma hkrati, se kompozicija krogov sploh ne bi premaknila z mesta - razen v primeru, ko bi manjši krog pač spodrsaval po svoji podlagi (ali obratno - ko bi ...). Pri takšnem spodrsavajočem gibanju pa dolžina daljice CD že ne bi več ustrezala obsegu manjšega kroga. Prav na podlagi tega dejstva temelji sklep, s katerim nas je zabaval Galileo.

Vilko Domajnko

ARHIMEDOVA SPIRALA, 2. del



Slika 7. D. Fetti, *Archimed*, Umetnostna galerija, Dresden

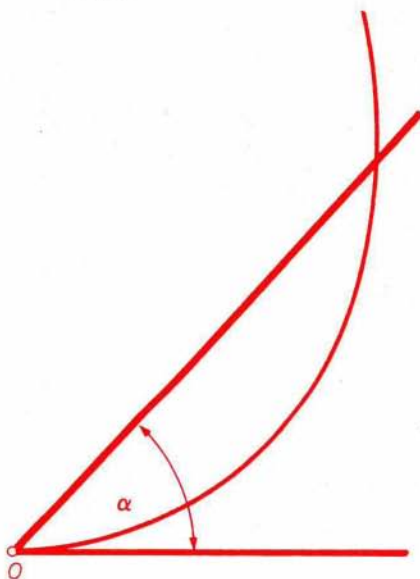
V prejšnjem članku o **Arhimedovi spirali** smo si, resnici na ljubo, krivuljo zgolj ogledovali. Dlje od prve, uvodne definicije v **Arhimedovi** knjigi *O spiralah* nismo prišli. Zato nas tokrat čaka preostanek knjige. Seveda pa bi ga bilo preveč za naenkrat — le kak drobec ali tri si privoščimo.

Bistrec **Arhimed** je precej opazil, da je njegova **spiral**a kakor nalašč za reševanje tistih prav najtežjih in najbolj žgočih starogrških problemov. Namreč z njeno pomočjo je uspel razrešiti problem trisekcije (tretinjenja) kota in kvadrature kroga; torej kar dva iz znamenite trojice "nerešljivih" problemov. Poglejmo, kako zlahka je ugnal s svojo **spiral**o problem trisekcije kota.

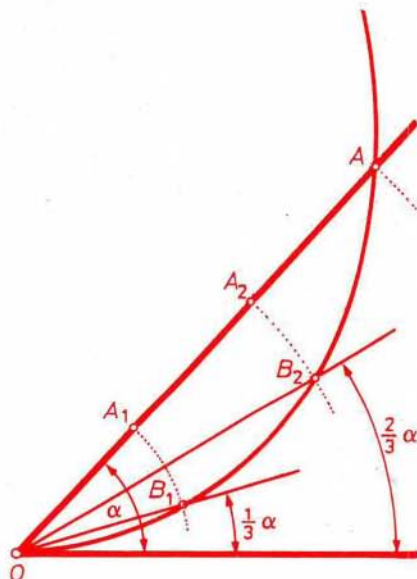
Naj bo dan kot α z vrhom v točki O . Narišimo katerokoli izmed **Arhimedovih spiral** $r = a \cdot \varphi$ ($a \in \mathbb{R}^+$) (slika 8).

Spirala seka zgornji krak v točki A . Po definiciji **spirale** bo točka s krivulje trikrat bližje izhodišču O pri trikrat manjšem kotu, pri $\alpha/3$ torej. No, nič lažjega kot razdeliti daljico OA na tri enake dele! Tako dobim na daljici OA točki A_1 in A_2 . Tretinski in dvotretinski oddaljenosti točke A od točke O poiščem le še ustrezni točki B_1 in B_2 na spirali. S šestilom, kakopak! In še enkrat se spomnimo — oddaljenosti $\overline{OA}/3$ pripada kot $\alpha/3$, oddaljenosti $2 \cdot \overline{OA}/3$ pripada kot $2\alpha/3$, oddaljenosti $\overline{OA}$ pa kot α .

Hura!



Slika 8



Slika 9

A nekaj je le treba pripomniti. Spretni **Arhimed** naloge vendarle ni opravil v duhu Platonovih in Evklidovih zahtev. Očitno je ignoriral zahtevo, da se sme pri geometrijskih konstrukcijah uporabljati le šestilo in (neumerjeno) ravnilo. **Arhimedova** konstrukcija **spirale** pa seveda zahteva umerjeno ravnilo.

Pa poglejmo še, kakšnih vse čudovitih domislic se **Arhimed** nikakor ni in ni mogel ubraniti, zroč v svojo mično krivuljo.

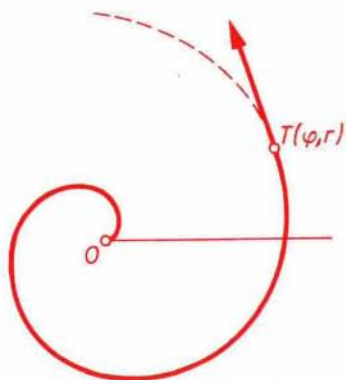
Takole se je vprašal: Na **spirali** si izberem točko T . Če gledam na **spiralo** kot na sled tiste točke, ki se giblje enakomerno po poltraku, medtem ko se ta vrti z enakomerno kotno hitrostjo okrog izhodišča, potem me mika zvedeti, kakšna je smer gibanja izbrane točke T v pripadajočem času t ; oziroma v kateri smeri bi točka, ki se je doslej povsem ubogljivo gibala po **spirali** okrog izhodišča, odfrčala naprej po ravnini, če bi v tistem "usodnem" času t (na mestu izbrane točke T torej) nenadoma iz kakršnihkoli vzrokov zapustila spiralo (slika 10).

Predpostaviti seveda smemo, da je točka neskončno drobena (čisto po **Evklidovem**) in že kar nemasni delec, brez teže torej, ter da bi potemtakem odfrčala kar po ravni črti naprej svojo pot.

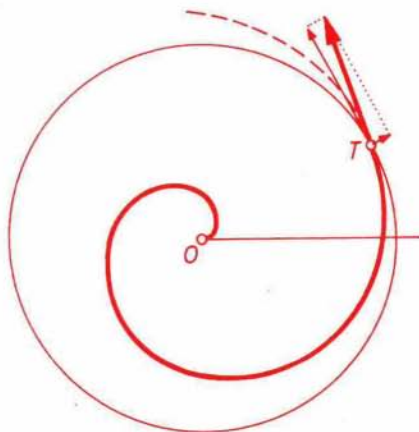
Arhimed je sklepal takole:

V tistem odločilnem trenutku t je točki (označeni s T) podeljeno dvoje hitrosti – konstantna hitrost, ki kaže v "smeri" od točke O do točke T , in pa kotna hitrost, ki ima "smer" tangente na krožnico, pritrjene v točki T .

Velikosti obeh hitrosti sta seveda dani kot začetna podatka pri risanju **spirale**. Potemtakem ju lahko zarišemo na obeh omenjenih poltrakih z izhodiščem v točki T . Hitrost točke, ki v času t v točki T postane "prosta" in ne-



Slika 10



Slika 11

odvisna od dotedanjega gibanja po krivulji, je (vektorski) seštevek obeh (vektorskih) hitrostnih komponent, ki se ga da prav zlahka odčitati na risbi. Smer gibanja točke je smer premice, ki je določena z vsoto obeh komponent hitrosti.

Dvoje je sedaj treba dodati.

Prvič. **Arhimed** takrat zagotovo še ni poznal vektorjev, kakor jih poznamo danes, torej tudi vektorske vsote ne. Danes pa je ob pomoči vektorjev naloga seveda smešno lahka za slehernega srednješolca.

In drugič. Očitno je tista premica, ki mi kaže nadaljno pot točke T , kar tangenta na **Arhimedovo spiralo** v izbrani točki T .

In reči je treba, da je bil **Arhimed** prvi v zgodovini, ki se je ukvarjal s problemom, kako poiskati tangento na krivuljo (ki ni ravno pretirano enostavne oblike) v njeni poljubni točki. No, še več — očitno je, da ga je celo uspešno rešil.

Pa še z eno izmed precejšnjega števila lepih lastnosti te krivulje se približe seznanimo.

Naj bo P_1 ploščina območja, ki ga **Arhimedova spirala** oklepa s polarno osjo pri svojem prvem zasuku za polni kot, P_2 ploščina območja, ki ga spirala skupaj s polarno osjo zagrajuje med prvim in drugim zasukom, $P_3, P_4, P_5, \dots$ pa so nasledniki te zgodbe.

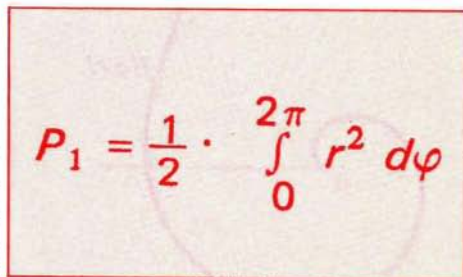
Arhimed je ugotovil tole:

1. Ploščina P_1 je enaka tretini ploščine prvega kroga, to je tistega, ki ima za svoj polmer oddaljenost točke po koncu "prvega obhoda" po spirali.
2. Zaporedje ploščin P_i ($i = 1, 2, 3, \dots$) se razvrsti po naslednjem pravilu

$$P_1, 6P_1, \frac{2}{1}P_2, \frac{3}{2}P_3, \frac{4}{3}P_4, \dots$$

$$\dots, \frac{n}{n-1}P_n, \dots$$

Dokaz prve trditve je v originalni **Arhimedovi** obliki za bralca precej zahteven. Toda danes, ko poznamo integralni račun, ga z lahkoto opravi vsak študent, ki je le količkaj pazljiv pri predavanjih višješolske matematike. Namreč



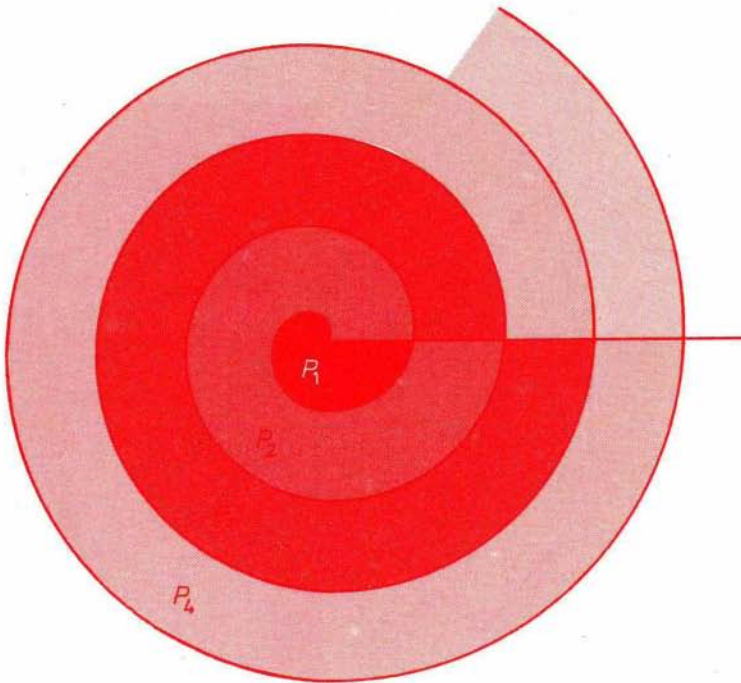
The image shows a handwritten formula in red ink on a light-colored background. The formula is:
$$P_1 = \frac{1}{2} \cdot \int_0^{2\pi} r^2 d\varphi$$

Slika 12

Podobno težaško branje bi bralec srečal tudi v dokazu druge **Arhimedove** trditve. **Arhimed** je namreč tudi tukaj pokazal prav izjemno mero znanja in spretnosti pri dokazovanju izrekov, ki v okviru današnjega znanja o matematiki sodijo že v področje integralnega računa. Nam ostane pač le to, da vsaj poskušamo v zapisu vrste ploščin

$$P_1, P_2, P_3, P_4, P_5, \dots$$

opaziti enako mero lepote kakor v lepi risbici pod njo.



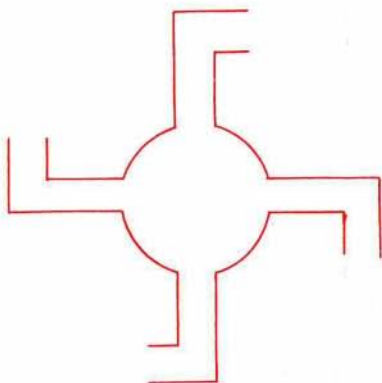
Slika 13

Vilko Domajnko

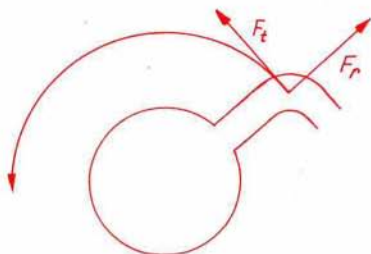
BRIZGALNIK IN OBRATNI BRIZGALNIK

Članek Obratni brizgalnik iz 4. številke Preseka, letnik 1988/89, me je pritegnil, ker sem na vprašanje, kam se vrti obratni brizgalnik, po občutku takoj odgovoril: "Seveda se vrti v obratni smeri kot brizgalnik!" Da odgovor ni tako preprost, kažejo živahne razprave, o katerih piše Presek. Zelo pozoren bralec pa je že iz Feynmanovega opisa njegovega poskusa v imenovanem članku utegnil zaslutiti pravi odgovor. Le zakaj je bilo treba tlak v posodi povečevati preko vsake razumne meje, če ne zato, ker se cev S ni nikamor zasukala.

V fizikalnih zbirkah se še najde učilo, imenovano Segnerjevo kolo. Vrtljiva valjasta posoda ima pri dnu štiri iztočne cevi s pravokotnimi koleni na koncu

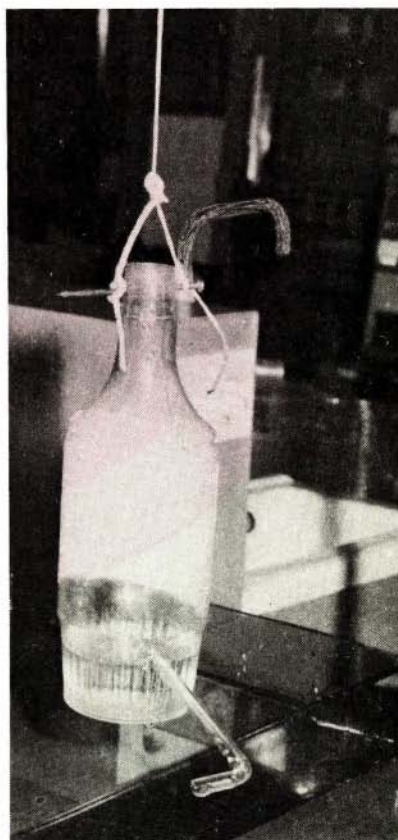


Slika 1. Segnerjevo kolo.



Slika 3. Tangentna in radialna komponenta sile vode na koleno.

Slika 2. Poenostavljeno Segnerjevo kolo.

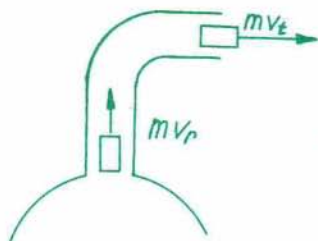


in je nekoliko podobna znanemu nacističnemu simbolu (slika 1). Kasnejše izvedbe imajo le dva kraka. Če še niste videli tega poskusa, vam predlagam, da na vrstico privežete plastenko, pri dnu zvrtae luknjo in vanjo vtaknete cevko s pravokotnim kolonom (slika 2). Ko v plastenko nalijete vode, se bo veselo zavrtela. Kam se vrta taka plastenka in zakaj, je pojasnjeno že v članku o obratnem brizgalniku v Preseku.

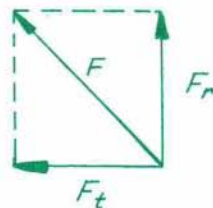
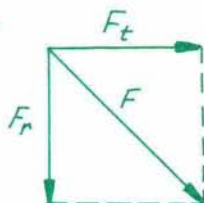
Za razlago je treba poznati drugi Newtonov zakon, ki pove, kako sta povezani sila in sprememba gibalne količine telesa. Ker mlajši bralci še niso vajeni zapisa tega zakona z vektorji, se mi je zdelo smotrno silo, ki deluje na vodo ali silo, ki deluje na koleno, razstaviti na dve komponenti: eno v smeri proti osi vrtenja, drugo v smeri tangente na krog, po katerem koleno kroži (slika 3). Tako razstavljanje je še toliko bolj utemeljeno, ker se hitro vidi, da k vrtenju brizgalnika ali obratnega brizgalnika prispevajo le komponente sil v tangentni smeri, radialne komponente sil pa ne. Podobno kot sile, tudi gibalne količine izrazimo s komponentami v tangentni in komponentami v radialni smeri.

Ker vrtenje brizgalnika ni sporno, ga bomo razložili zato, da se navadimo na uporabo drugega Newtonovega zakona. Ko v mirujočem brizgalniku steče nekaj vode z maso m iz osrednje posode preko kolena, se ji zmanjša radialna komponenta gibalne količine od vrednosti mv_r na nič. To spremembo povzroči radialna komponenta sile kolena na vodo (slika 4 in slika 5). Po zakonu o vzajemnem učinku deluje voda na koleno z nasprotno enako radialno komponento sile, ki pa ne vpliva na vrtenje naprave, ker je njen navor glede na os enak nič.

Ko voda v kolenu zavije, se ji poveča tangentna komponenta gibalne količine od nič na mv_t . To spremembo povzroči tangentna komponenta sile kolena na vodo. Po zakonu o vzajemnem učinku deluje voda na koleno z



Slika 4. Gibalna količina delca vode pred vstopom v koleno in po izstopu iz kolena.



Slika 5. Levo: Sila kolena na vodo in njeni komponenti. Desno: Sila vode na koleno in njeni komponenti.

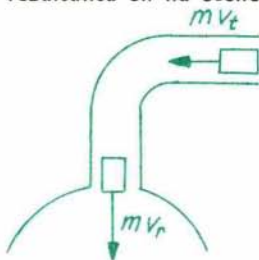
nasprotno enako tangентno komponento sile, ki jo lahko tudi zapišemo: $F_t = (m/v)v_t$ (F_t je tangентna komponenta sile, v_t je tangентna komponenta hitrosti, m pa je masa vode, ki steče v času t iz cevi.) Zaradi navora te sile se platenka vrти v znani smeri.

Ko nam je uspela sorazmerno enostavna razlaga brizgalnika, se kar sama od sebe ponuja tudi podobna razlaga obratnega brizgalnika. V njega voda vstopa v tangентni smeri, nato pa v kolenu zavije radialno proti osi (slika 6). Tangентna gibalna količina se zmanjša od vrednosti mv_t na nič, od tu pa sledi sklep, da tudi v obratnem brizgalniku voda deluje na koleno z **enako** tangентno komponento sile kot pri brizgalniku (slika 7). Tu je Feynman s svojo, v obeh primerih enako "centrifugalno silo" mnoge speljal na led, mi pa s sklepanjem o vrtenju obratnega brizgalnika raje še nekoliko počakajmo.

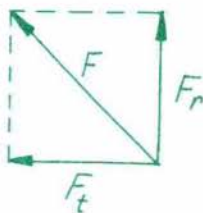
Najprej pripravimo tak poskus za brizgalnik in obratni brizgalnik, pri katerem ni nevarnosti, da bi kaj razneslo. Ker smo ugotovili, da radialne spremembe gibalne količine in radialne komponente sil ne vplivajo na to, kam se brizgalnik zasuče, naredimo poskus, pri katerem te komponente sploh ne nastopajo.

Vzemimo kar platenko od prejšnjega poskusa, ki že ima spodaj luknjico, le cevko s kolonom odstranimo. Za začetek zadelamo luknjico s kepo plastelina, v platenko pa nalijemo vode. Dobro je, če platenko obešimo na dve vrvi, da se ne bi vrtela (slika 8). Počakajmo, da se platenka povsem umiri. Tedaj jo podržimo z eno roko, z drugo odluščimo plastelinski zamašek in jo nato spustimo. Platenka se odmakne v nasprotno smer od smeri, v kateri izteka voda. Poskus se izteče po pričakovanju, razlaga je preprosta.

Ko je platenka zaprta, delujejo z notranje strani na stranske stene sile zaradi tlaka mirujoče vode. Rezultanta teh sil je nič. Ko luknjico odpremo, delujejo na stene vse prejšnje sile, razen ploskovne sile na luknjico. Tako rezultanta sil na stene ni enaka nič, zato se platenka odmakne iz začetne



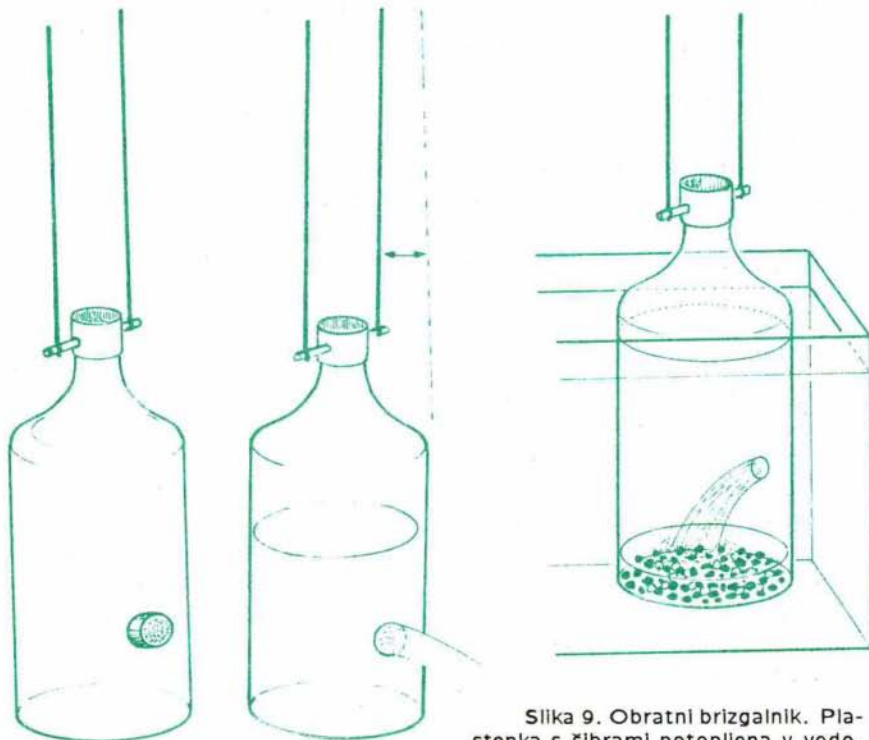
Slika 6. K spremembi gibalne količine delca vode pri obratnem brizgalniku.



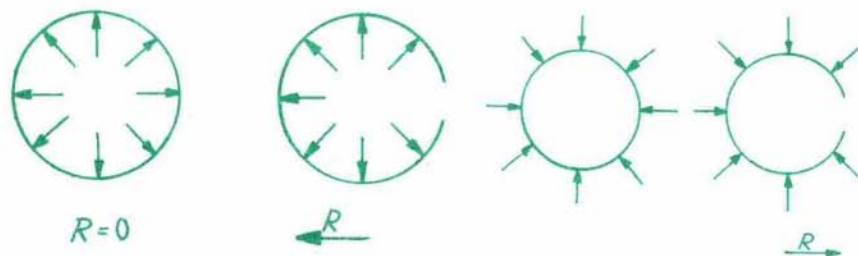
Slika 7. Sila vode na koleno in njeni komponenti pri obratnem brizgalniku.

leže v nasprotno stran od smeri, v kateri voda izteka.

Naša plastenka pa je imenitna tudi za izdelavo obratnega brizgalnika. Prazni plastenki zatesnimo luknjico s plastelinom. Spet jo obesimo na dve vrvici in jo postavimo v večjo posodo z vodo. Da ne splava, nasujemo vanjo



Slika 9. Obratni brizgalnik. Plastenka s šibrami potopljena v vodo.



Slika 8. Plastenka kot brizgalnik in razlaga odklona s silami tekočine na stene.

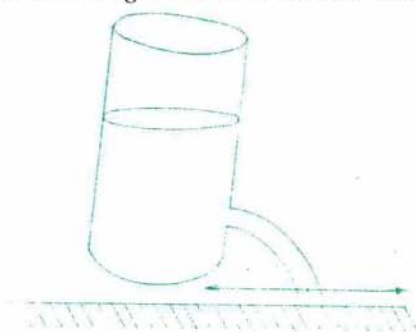
Slika 10. Sile na zunanje stene plastenke pri obratnem brizgalniku.

toliko svinčenih šiber, da je teža malo večja od vzgona in plastenka vselej sama zleze v stabilno ravnovesno lego. Na njene stranske stene delujejo z zunanje strani sile zaradi tlaka v vodi. Ko je luknjica zaprta, je rezultanta teh sil enaka nič in plastenka miruje. Njeno lego skrbno zaznamujemo na steni kadi. Nato z žično zanko previdno sežemo pod vodo in odstranimo zamašek. Voda začne teči v posodo (slika 9).

Če zdaj iščemo rezultanto sil z zunanje strani na stene plastenke, mednje ne moremo šteti ploskovne sile na luknjico (slika 10), zato je rezultanta usmerjena nasprotno od smeri, v kateri priteka voda v posodo. Pričakujemo premik plastenke v smeri tako dobljene rezultante. Toda če še tako skrbno naredimo poskus, ne opazimo nikakršnega premika.

Ko pa pri zadnjem poskusu pazljivo opazujemo brizganje vode v posodo, se nam posveti. Vodi se pri vstopu v plastenko poveča gibalna količina, toda voda se nato v plastenki tudi ustavi. Vstopanje vode v plastenko povzroči silo, zaradi katere smo v zgornjem poskusu pričakovali premik plastenke, ustavljanje vode znotraj plastenke pa povzroči nasprotno enako silo na plastenko z notranje strani. Ker pri poskusu nastopita dve nasprotno enaki sili na plastenko, se le-ta nikamor ne odkloni.

Po vsem, kar smo se naučili v prejšnjih poskusih, zlahka odgovorimo na vprašanje, kam se vrti obratni brizgalnik. Zdaj lahko razložimo, kaj se dogaja v izvirni napravi, taki z obliko S, za katero je bilo gornje vprašanje zastavljeno. Kot vidimo, niso dovolj le sile na koleno, temveč tudi sile, ki nastopijo pri vstopu vode v šobo. Pri vstopu v šobo se vodi tangentna gibalna količina poveča, pri zavijanju v kolenu pa spet zmanjša na nič. Iz obeh nasprotno enakih sprememb gibalnih količin pridemo do obeh nasprotno enakih tangentnih sil na koleno. Zato se opisani obratni brizgalnik **ne vrti**.



Slika 11. Vodoravni komponenti sile vode na tla in sile tal na vodo pri iztekanju.

Opomba: Iz redakcijskih razlogov je v knjižnici Naloge s tekmovanj iz fizike z osnovni šoli izpadla zadnja naloga, ki jo objavljamo na naslednji strani. V Nalogah je tiskarski škrat na straneh 25, 26, 43 in 72 prevrnil slike. Napako popravite, če slike opazujete v ravnem zrcalu. To je ne le opravičilo, temveč tudi rešitev nehotе zastavljene naloge.

Drugače je pri brizgalniku, kjer voda izteka v okolico (slika 11). V kolenu nastopi le zvečanje tangentne gibalne količine in ustrezna tangentna sila vode na koleno. Curek nato zapusti brizgalnik, voda pa se ustavi nekje v okolici in sila, ki zmanjša gibalno količino vode v curku, izvira iz okolice. Tako sila vode pri ustavljanju deluje na okolico in ne vpliva na brizgalnik.

Na koncu vam predlagam, da naredite še en poskus. K plastenki na vrvi, iz katere izteka voda, pritrđite kozarček za jogurt tako, da bo ujel iztekajočo vodo. Kam se sedaj odkloni plastenka s kozarčkom?

Franč Plevnik

ZADNJA NALOGA Z REPUBLIŠKEGA TEKMOVANJA IZ FIZIKE ZA SEDMOŠOLCE V LETU 1988

62. V toplotno izolirani posodi imamo 0.50 litra vode, ki jo s potopnim grelnikom v 5 minutah segrejemo od 20°C na 30°C. Ko s segrevanjem prenehamo, stresemo v posodo 1/4 kg ledenih kock, ki smo jih vzeli iz termovke in dobro osušili s krpo. Ko nekaj časa mešamo, ostane v posodi še nekaj ledu. Da se ves led stali, moramo potopni grelnik vključiti še za pet minut.

- Izračunaj, koliko toplote oddaja vključeni grelnik na minuto.
- Kolikšna je končna temperatura vode v posodi?
- Izračunaj talilno toploto ledu.

Rešitev

Vključeni grelnik odda na minuto toploto $\frac{mc\Delta T}{t} =$

$$= \frac{0.50 \text{ kg} \cdot 4200 \text{ J} \cdot 10 \text{ K}}{5 \text{ min} \cdot \text{kg} \cdot \text{K}} = 4200 \text{ J/min}.$$

b) Končna temperatura vode v posodi je 0°C.

c) Led prejme od vode toploto $\frac{0.5 \text{ kg} \cdot 4200 \text{ J} \cdot 30 \text{ K}}{\text{kg} \cdot \text{K}} = 63.000 \text{ J}$. Od grelnika prejme $4200 \text{ J/min} \cdot 5 \text{ min} = 21.000 \text{ J}$. Za taljenje 1/4 kg ledu smo porabili 84.000 J. Za taljenje 1 kg ledu je treba 4-krat toliko toplote, to je 336.000 J.

Franč Plevnik

ASTRONOMIA

ASTRONOM IZ LJUBLJANE

Slovenci se lahko pohvalimo, da smo imeli pred Kopernikom (+ 1543) vsaj tri, pred Keplerjem (+ 1630) pa vsaj pet astronomov, ki so se s svojimi deli bolj ali manj uveljavili v tedanji zahodni in srednji kulturni Evropi. O štirih astronomih, posebej o razumniku in polihistoru (vsevedu) Andreju Perlahu, pišemo v rubriki *Novice* v tem *Preseku*, o petem, katerega štiristoletnica smrti poteka prav letos, pa bomo tudi spregovorili v tej številki. To je Jakob Strauss, po izobrazbi sicer filozof, fizik in zdravnik, ki pa je postal najbolj znan po astronomskih delih.

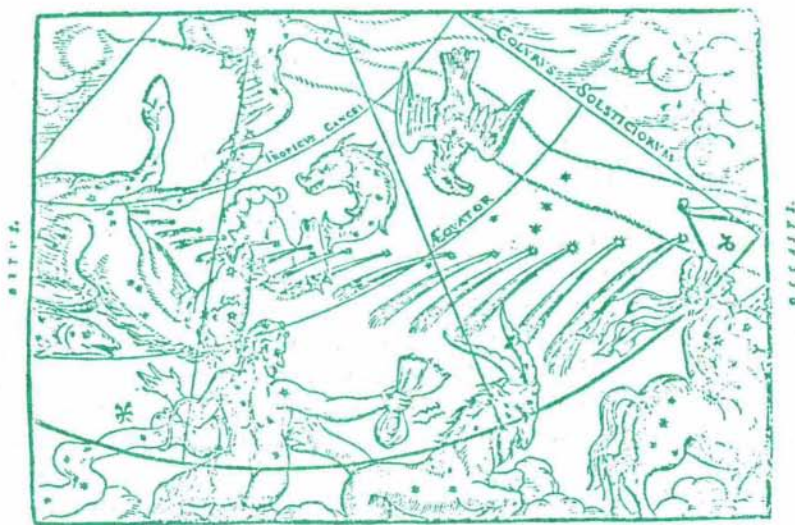
J. Strauss se je rodil 1533 v Ljubljani. Bil je meščanskega stanu. Na Dunaju je končal filozofsko fakulteto in 1558 postal magister filozofije. Že naslednje leto je kot redni profesor začel predavati fiziko na dunajski univerzi. Ni znano, kdaj in zakaj je prenehal s predavanji. Najbrž ga je zanimanje za naravoslovje usmerilo v študij medicine, ki ga je zaključil v Padovi, kjer je 1565 iz medicine tudi doktoriral. Spet ne vemo, kje se je doktor in magister J.-S.-Labacensis Carniolanus (Ljubljanski Kranjec) zadrževal do svoje nastanitve v Celju, kjer je živel od 1571 do svoje smrti 1590 in deloval kot štajerski deželni zdravnik.

Ze kot študent se je Strauss močno posvečal astronomiji, ki so jo na Dunaju marljivo gojili, med njimi tudi naš rojak Perlah. Z astronomijo pa se je Strauss ukvarjal tudi pozneje, ko je bil zdravnik, vse do svoje smrti.



Silka 1. Naslovnica Straussove knjižlice z opisom opazovanja velikega kometa 1577. Edini izvod knjižlice hrani dunajska univerzitetna knjižnica.

Glavno in tudi najzanimivejše Straussovo astronomsko delo je latinsko napisana knjižica *Opis novega in čudežnega kometa, ki je začel svetiti v tem 1577. letu, četrtega dne pred novemberskimi nonami* (to je 2. novembra). Ta komet je bil najsvetlejši komet 16. stoletja. Knjižico so natisnili v ljubljanski tiskarni Janža Mandelca še istega leta, ko se je pojavil komet (slika 1 in slika 2). Kljub astrološkemu gledanju na pojav kometov (to je, da so kometi zlovešča znamenja, znanilci vsega slabega – prinašalci bolezni, vojn, potresov in drugih naravnih nesreč in nadlog, kar vodi v splošno uničenje sveta), moramo o vsebini knjižice povedati, da se je Strauss lotil raziskovanja tega kometa na povsem znanstven način. Določil je lege kometa med zvezdami in ocenil njegovo relativno oddaljenost od Zemlje (v primeri z oddaljenostjo Lune od Zemlje). Ugotovil je, da gre za vesoljsko telo, ki se giblje v večji oddaljenosti, kot je od nas oddaljena Luna. To je bila za tedanji čas izredno napredna misel, saj je bilo med znanstveniki še vedno trdno vsidrano prastaro mišljenje iz antičnih časov, da so kometi optični pojavi v zemeljskem ozračju (kot je npr. mavrica). Tudi danski astronom Tycho Brahe je iz opazovanj ugotovil, da se veliki komet 1577 giblje v večji



Slika 2. Navidezno gibanje kometa 1577 med zvezdami; po Thadduesu Hageciusu, Praga 1578. Komet se je pojavil na severnem nebu. Bil je eden največjih kometov vseh časov. Opazovali so ga od novembra 1577 do januarja 1578. Razvil je več kot 20° dolg rep, ki je segal od ozvezdja Strelca do Kozoroga.

oddaljenosti od nas kot Luna, da je samostojno vesoljsko telo in ne zemeljski pojav. Toda te misli si ni upal javno izreči, saj bi rušila ustaljeno predstavo o geocentričnem gledanju na zgradbo vesolja.

Strauss je zapustil še mnogo drugih tiskanih del z astronomsko-astrološko vsebino. Skoraj nepretrgano, od 1559 pa do svoje smrti, je izdajal razne koledarje, pratike, almanahe. V njih so bila razen astronomskih podatkov dodana še prerokovanja (ugodne in pogubne napovedi) iz medsebojnih leg vesoljskih teles, dolgoročne vremenske napovedi, napovedi letine, svarila pred potresi, boleznimi, nesrečami, vojskami in drugimi človeškimi tegobami, a tudi hvalnice kraljevski umetnosti – astronomiji. Zato so bile te knjižice zelo priljubljene.

Marijan Prosén

KARTI SEVERNEGA IN JUŽNEGA NEBA (s katalogom), DMFA SR Slovenije, Presekova knjižnica 31, Ljubljana 1990. Iz nemščine prevedla Pavla Ranzinger.

V *Presekovi knjižnici* je pred kratkim izšlo sodobno, kakovostno, uporabno, vsebinsko bogato in natančno učilo, ki ga v tako celoviti obliki na slovenskih tleh še nismo imeli in smo ga zato sedaj toliko bolj veseli. Dobili smo karti severnega in južnega neba (za epoho 2000,0) s priloženim katalogom zvezd (do 5,25 magnitude) in drugih vesoljskih teles (spremenljivk, nov in supernov, zvezdnih kopic, meglic, galaksij in radijskih virov). Vsega skupaj vsebuje katalog podatke za okoli 3000 teles, ki so vrisana v kartah.

Karti s katalogom predstavljata zelo primeren učni pripomoček npr. za spoznavanje ozvezdij, značilnosti zvezd, identifikacijo vesoljskih teles, spoznavanje koordinatne mreže na nebu, sestavljanje raznih teoretičnih in praktičnih nalog. Karti lahko kaširamo in taki obesimo za okras v fizikalnico ali pa doma v otroško ali dnevno sobo. Pri opazovanju nočnega neba sta karti in katalog sploh nepogrešljivi, tako v šoli (pri rednem pouku, krožku, naravoslovni dejavnosti) kakor tudi doma, ko navdušenec astronomije z daljnogledom ali pa s prostim očesom opazuje zanimivosti na nebu.

Karti severnega in južnega neba sta skupaj s katalogom res široko uporabni: od osnovne do visoke šole pri rednem pouku in samostojnem raziskovanju. Zato ju priporočam vsem, ki se zanimajo za astronomijo, posebno pa krožkarjem in ljubiteljem astronomije. S pridom ju boste lahko uporabljali kar četrto stoletja.

Marijan Prosén

Na vse osnovne in srednje šole v Sloveniji bomo v kratkem poslali na ogled **NOVE KNJIGE DRUŠTVA MATEMATIKOV, FIZIKOV IN ASTRONOMOV SR SLOVENIJE**. Pri skupinskem naročilu šol imajo bralci Preseka 20% popust.

A. Jurišič, Rešene naloge z mednarodnih matematičnih olimpiad, 1. del, 1979-1988 (Knjižnica Sigma ; 46) – Cena: 75.00 (60.00)

Karti severnega in južnega neba za epoko 2.000.0 s katalogom (Presekova knjižnica ; 31) – Cena: 125.00 (100.00)

Naše nebo in Zemlja 1990. Astronomske efemeride. Umetni sateliti. Potresi. (Presekova knjižnica ; 32) – Cena: 50.00 (40.00)

Ciril Velkovrh

Jurišič A., ZBIRKA REŠENIH NALOG Z MATEMATIČNIH OLIMPIAD 1978 – 1988, DMFA SRS, Ljubljana 1989, 92 str. (Knjižnica Sigma ; 46)

Naslov knjižice nam razkriva, da gre za zbirko ne prav preprostih nalog iz matematike. Seveda naj to ne odvrne ljubiteljev elementarne matematike, saj je knjižica namenjena predvsem njim. A ni pisala le zanje. V svet matematičnih problemov vabi vsakogar, ki obvlada nekaj osnovnih pojmov s tega področja. Za uspešno branje (bolje - reševanje) najpogosteje zadošča že znanje, ki ga nabere dijak do polovice srednje šole, vedno pa tisto, ki naj bi ga imel ob njenem koncu. Naloge so nestandardne (nešolske) in zato osvežitev in izziv vsem, ki se radi lotijo tudi trših matematičnih orehov. Zbrane so z mednarodnih matematičnih olimpiad od leta 1978 do leta 1988 in z izbranih tekmovanj za jugoslovansko olimpijsko ekipo v teh letih.

V tujini (predvsem na vzhodu, od koder izvira ideja o matematični olimpiadi ★) tovrstne zbirke redno prihajajo, v našem jeziku pa je ta prva. Naloge, ki predstavljajo njen začetni del, naj bi bile bralcu vir samostojenga dela (hkrati so tudi dokumentarne vrednosti), rešitve pa pomoč ali morda nov vidik pri tem.

Zbirka je napisana v jasnem matematičnem slogu, zato je s primerno pozornostjo tekoče berljiva. Veseli je bodo zlasti ljubitelji elementarne matematike in mentorji, ki jim je lahko knjižica dobrodošel pripomoček pri delu.

Boris Lavrič

★ Prva mednarodna matematična olimpiada je bila leta 1959 v Romuniji (7 držav udeleženk), 1988 (49 držav udeleženk) pa v Avstraliji.

TURBO PASCAL NA HITRO

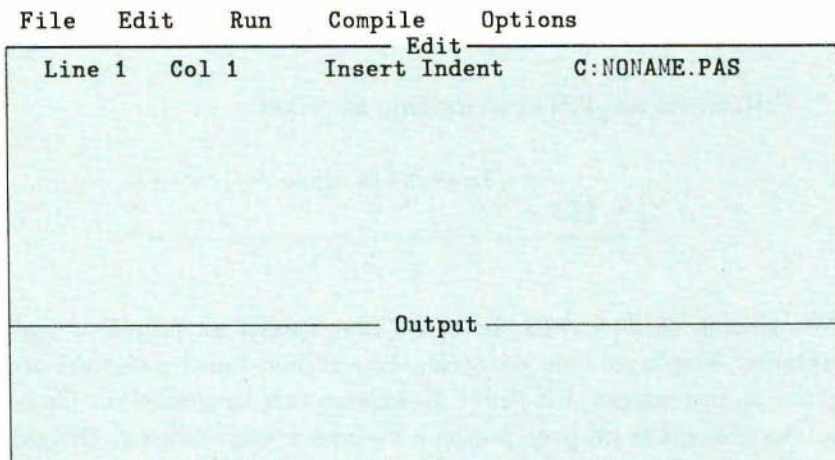
Turbo pascal je verjetno najbolj razširjen prevajalnik za programski jezik pascal na računalnikih, ki uporabljajo operacijski sistem MS-DOS. Doživel je že številne spremembe. Trenutno je na tržišču verzija 5. Le-ta in njena predhodnica, verzija 4, se zelo razlikujeta od verzije 3, ki je pri nas še vedno zelo razširjena. Ker začetnika pri delu s Turbo pascalom večkrat zmede obilica možnosti, ki jih delovno okolje za Turbo pascal nudi, bomo v članku predstavili tisto najnujnejše znanje, ki ga potrebujemo, če želimo Turbo pascal uporabljati. Prav tako so nad novim izgledom pascala presenečeni vsi, ki so do sedaj delali le z verzijami 3.* in starejšimi, saj je izgled delovnega okolja povsem spremenjen. Namen članka je opisati le delovno okolje Turbo pascala. O posebnostih Turbo pascala kot programskega jezika pa kdaj drugič.

Turbo pascal ni le prevajalnik za programski jezik pascal, marveč je to celotno programsko okolje, ki zajema urejevalnik, v katerem pišemo program, prevajalnik, s katerim program prevedemo in požemo, in v verziji 5 tudi razhroščevalnik, s pomočjo katerega iščemo napake in spremljamo tok programa. Vse operacije lahko izvajamo preko sistema izbir (menujev). Ker pa je možnih izbir za začetek kar precej, si oglejmo, kako Turbo pascal uporabljamo brez njih, s pomočjo tako imenovanih bližnjic.

Najprej Turbo pascal naložimo v pomnilnik z ukazom `TURBO`. Pri tem moramo imeti (preko ukaza `PATH`) dostop do datotek `TURBO.EXE` in `TURBO.TPL`.

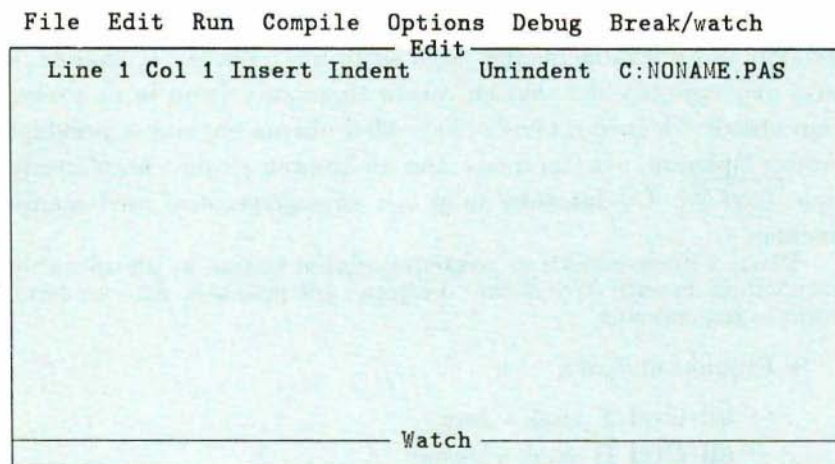
Znajdemo se pred glavnim zaslonom, ki je razdeljen na štiri dele. Na sliki 1 vidimo delovno okolje verzije 4, na sliki 2 pa delovno okolje verzije 5.

V zgornji vrsti so našteje glavne izbire, pod njim okno urejevalnika {Edit}, nato v verziji 5 spremljevalno okno {Watch}, v verziji 4 pa izhodno okno {Output} in še spodnja vrsta, ki označuje nekatere pomembne trenutno aktivne funkcijske tipke. Za nas je pomembno le okno urejevalnika.



F1-Help F2-Save F3-Load F5-Zoom F6-Edit F9-Make F10-Menu

Slika 1: Delovno okolje - verzija 4



F1-Help F5-Zoom F6-Switch F7-Trace F8-Step F9-Make F10-Menu

Slika 2: Delovno okolje - verzija 5

Pritisnemo na **F3** in na zaslonu se prikaže

Load File Name *.PAS

Ne oziramo se na *.PAS. Le-to bo ob pritisku na poljubno tipko izginilo. Vtipkamo ime datoteke, kjer želimo imeti pascalski program, in pritisnemo **ENTER**. Znajdemo se v urejevalniku. Če datoteka obstaja že od prej, je njena vsebina v urejevalniku. Drugače pa Turbo pascal odpre novo, prazno datoteko, kamor vtipkamo program. Zgornja vrstica urejevalnika je vrstica s podatki o stanju. Oglejmo si jo

Line 1 Col 1 Insert Indent

C:IME.PAS

Pove nam ime datoteke, ki jo urejamo, mesto v datoteki, kjer se nahajamo, in urejevalne načine. Med slednjimi omenimo le Insert, ki nam označuje, da se znaki na mestu tipkanja vrivajo in ne prekrivajo obstoječih (način Overwrite). Med obema načinoma preklapljamo s tipkama, označenima z Ins ali Insert ali pa s kombinacijo tipk **Ctrl-V**. Če datoteka še ni bila shranjena, stoji pred njenim imenom *.

Ukazi v urejevalniku so povsem podobni tistim, ki jih uporablja urejevalnik besedil WordStar. Verjetno jih poznate, zato tu navedimo le res osnovne.

- Premiki utripača

← ali **Ctrl S** znak v levo

→ ali **Ctrl D** znak v desno

↑ ali **Ctrl E** vrstico gor

↓ ali **Ctrl X** vrstico dol

Ctrl R ali **PgUp** stran gor

Ctrl C ali **PgDn** stran dol

- **Brisanje in vrivanje**

Ctrl Y zbrši vrstico, v kateri je utripač

Ctrl N vrini vrstico na mestu utripača

Ctrl G ali **Del** zbrši znak pod utripačem

Ctrl QY zbrši od utripača do konca vrstice

Ctrl V ali **Ins** preklp med načinoma vrivanje in prekrivanje

Urejevalnik se v Turbo pascalu razlikuje od tistega v programu WordStar le v nekaj malenkostih. Morda najpomembnejša za izgled vaših programov je ta, da urejevalnik v Turbo pascalu podpira zamikanje. Ko zaključimo vrstico z **Enter**, se utripač v novi vrstici postavi v stolpec, kjer se je začela prejšnja vrstica. Če pritisnemo sedaj na tipko **Backspace**, se ne bomo premaknili le za znak v levo, ampak v stolpec, kjer se je začel prejšnji zamik.

Ko je program natipkan, ga s pritiskom na **F2** shranimo. Nato ga prevedemo ter hkrati poženemo s **Ctrl-F9** oziroma z **Alt-R** v verziji 4. Če je program brez napak, bo stekel. Drugače pa se bo na zaslonu izpisalo obvestilo o napaki in sistem nas bo prestavil v urejevalnik na mesto, kjer je opazil napako. Odpravimo napako in ponovimo postopek. To ponavljamo, dokler se program ne prevede brez napak. Takoj nato tudi steče. Po zaključku izvajanja programa, se bo pri verziji 4 v spodnji vrsti pojavil napis

Press any key to return to Turbo pascal

To sporočilo nam pove, da bodo rezultati ostali na zaslonu toliko časa, da bomo pritisnili na poljubno tipko. Po pritisku na tipko se bomo znova znašli v urejevalniku. Verzija 5 pa ima nekoliko neprijetno lastnost, ki je sicer smiselna, ko spoznamo koncept te verzije, vendar večino moti. Takoj, ko se program izteče, se znova znajdemo v urejevalniku. Zato si večkrat rezultatov ne utegnemo niti ogledati. Vendar lahko v vsakem trenutku z **Alt-F5** preklpimo na zaslon, kjer se izpisujejo rezultati. Lahko pa si delovno okolje preuredimo, da bo imelo podoben izgled kot pri verziji 4. Spremljevalno okno namreč lahko nadomestimo z izhodnim oknom. Ko smo v urejevalniku, pritisnemo na **F6**. Osvetli se spremljevalno

okno. Po pritisku na **Alt F6** bomo na zaslon priklicali namesto spremljevalnega izhodno okno. S ponovnim pritiskom na **F6** se znova znajdemo v urejevalniku. V izhodnem oknu vidimo zadnjih 8 vrstic izpisa. Nazaj v prvotno stanje preidemo z enakim postopkom. Ker se pri nastavitvi z izhodnim oknom zmanjša okno urejevalnika, spremenjeno nastavitvev le redko uporabljamo. Običajno si pomagamo rajši tako, da kot zadnji ukaz v našem pascalskem programu uporabimo `readln` in s tem 'prisilimo' program, da teče, dokler ne pritisnemo **Enter**.

```
program cakaj;
var i : integer;
begin
  for i := 1 to 20 do writeln(i);
  readln;
end.
```

Turbo pascal zapustimo z **Alt-X** ali pa z **F3** zahtevamo urejanje nove datoteke. Če datoteke v obliki, kot je trenutno v urejevalniku nismo shranili, na kar nas opozarja zvezdica pred imenom datoteke v zgornji vrsti, nas bo Turbo pascal na to opozoril in omogočil, da s pritiskom na **Y** datoteko shranimo.

Povzemimo:

- TURBO {naložimo Turbo pascal}
- F3
- IME {vtipkamo ime datoteke}
- urejanje
- F2 {shranimo}
- Ctrl-F9 (verzija 5) ali
Alt-R (verzija 4) {poženemo}
- Alt-X {zapustimo Turbo pascal}

Omeniti velja še, da ima Turbo pascal dobro razgrajen sistem pomoči. Le-to lahko dobimo v vsakem trenutku s pritiskom na **F1**. Izpisana informacija je odvisna od okolja, kjer jo pokličemo. Tako npr. klic pomoči, ko je osvetljena ena od izbir glavnega jedilnika,

izpiše osnovno informacijo o tej izbiri. Če smo v oknu urejevalnika, se izpišejo ukazi urejevalnika.

Pomoč zapustimo s pritiskom na **Esc**. Informacije se izpisujejo po straneh, po katerih se premikamo s tipkama **PgUp** in **PgDn**. Posamezne strani vsebujejo tudi poudarjene 'ključne besede'. Le-te lahko osvetlimo s smernimi puščicami. Pritisk na **Enter** nam izpiše podrobnejše informacijo o tej besedi. Če znotraj okna, kjer se izpisuje pomoč, ponovno pritisnemo na tipko **F1**, se bomo znašli v glavnem jedilniku pomoči. Z osvetlitvijo **Help on Help** in s pritiskom na **Enter** bomo dobili informacijo o tem, kako uporabljati pomoč.

Posebej je zanimiva pomoč, ki jo lahko dobimo v urejevalniku. S pritiskom na **Ctrl-F1** dobimo informacijo o ustreznem pascalskem konstruktu, ki se začne na mestu utripača. Npr. če je utripač na začetku ukaza **write**, nam **Ctrl-F1** izpiše namen in uporabo tega pascalskega ukaza. Če Turbo pascal ne more ugotoviti, kakšno pomoč potrebujemo, izpiše glavni jedilnik pomoči.

Uporaba pomoči je hitra, zato ne pomišljajte, če niste gotovi, ali je pri definiciji tipa potrebno uporabiti dvopičje ali enačaj in ali je na koncu stavka **for** besedica **do** ali ne. Poleg pravilne sintakse je precej pomoči o ukazih opremljeno s primeri, ki vam bodo pomagali osvežiti znanje.

Matija Lokar

DELJIVOST

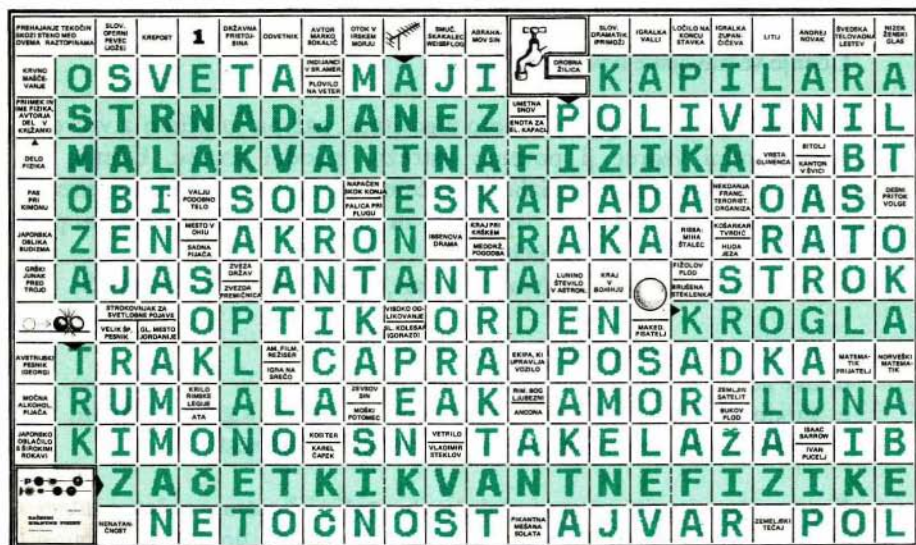
Dokaži da je število $s^{195} + 3^{195}$ deljivo s 7 z 11 in s 25 ne pa s 13

Dragoljub M. Milošević

SLIKOVNA KRIŽANKA - MATEMATIČNE OPERACIJE

AVTOR: MARKO BOKALIČ	SESTRIN MOZ	—	$A \cup B$		PRIPO- VEDNA PEŠNITEV	RISBA	Σ	KONJU PODOBNA ŽIVAL
SMUČ. DISCI- PLINA					NAJVEČJI NAFTNI KONCERN			
NARAVNA ALKO- HOLNA PIJAČA					+			
					VEJA MATE- MATIKE			
SMUČARKA WACHTER						NAZIV		
GRDOBA, POREDNEZ						KLICA		
						LJUDSTVO BREZ PRAVIC		
ST.MESTO OB TIGRISU								
								
		VESLAŠKA TEKMA	PEROCI				NAJVEČJA DRŽAVA V ZDA	
			AMERIŠKI IZUMITELJ					
SEVERNO- AMERIŠKA STEPA								
STEVILO ELEMEN- TOV KONČNE GRUPE				MORSKA ZAJEDA				
				$\frac{1}{10^4} n$				
SIMBOL ZASČIT- NICE GRŠKIH BOGOV						TRI NORDIJSKA BOŽAN- STVA		
STARO GERMAN- SKO PLEME						RIBJA KOŠČICA		
						AUGUSTE PICCARD		
COLLEGE ZAHODNO OD LONDONA					ANGLEŠKA PLOŠČ. MERA			
LEPOTNA RASTLINA					PRITOK SAVINJE			

SLIKOVNA KRIŽANKA - Knjižnica Sigma - Rešitev iz P-3



SLIKOVNA KRIŽANKA - Presekova knjižnica - Rešitev iz P-3



NEVRONSKE MREŽE

(II. del)

Učenje večnivojske nevronske mreže

Nevronski mreži ne posredujemo algoritma, pač pa jo učimo z vzorci. Za nek vhodni vzorec ji povemo ustrezeni izhodni vzorec. Učenju z dvojicami poznanih vhodov in izhodov rečemo **učenje z učiteljem**. Ko mreži predstavljamo samo vhodne vrednosti in jih vezje samo razvršča po podobnosti, se mreža uči **brez učitelja**.

Navedimo nekaj primerov dvojic vzorcev, ki se jih mreža lahko nauči:

- a. točkasti (0, 1) vzorec neke črke – črka;
- b. dve ali več vrednosti – vsota vrednosti;
- c. vhodne logične spremenljivke – poljubna dvojiška logična funkcija;
- d. podobne vhodne vrednosti – razred vhodnih vrednosti.

Ker mreže nimajo vnaprej določenih uteži, izberemo začetne uteži naključno. Z učenjem popravljamo uteži toliko časa, dokler ne dobimo zelene preslikave. Ko pozneje mreži predstavimo nov, delno tudi pokvarjen vhodni vzorec, nam bo mreža dala na izhodu vzorec, ki najbolj ustreza danemu vходу.

Med več učilnimi pravili smo v našem primeru izbrali **delta** pravilo. Kako deluje? Nevronska mreža sprejme vhodni podatek ter izvede začetno (naključno) preslikavo. Dobljeni izhod primerjamo s ciljno (zeleno) vrednostjo, uteži popravimo glede na razliko (napako) med dobljeno in želeno vrednostjo.

Ni vselej res, da pri vseh nevronih vemo za vrednosti na izhodih. Nekateri nevroni so v vmesnih nivojih. Pri teh nevronih ne poznamo ciljnih vrednosti. Delta učilno pravilo zato posplošimo, napaka se upošteva **nazaj** od izhodnih nevronov k vmesnim. V večini modelov se uteži spreminjajo zelo počasi, to pomeni, da je potrebno vzorce učenja večkrat pokazati mreži. Kolikokrat, je odvisno od vzorca. Zgodi se, da je število ponavljanj učenj tudi nekaj tisoč. Kaj vse mrežo naučimo, je prav tako odvisno od vrste (oblike, velikosti, povezanosti) mreže. Število pomnjenj ali asociacij eno nivojskih linearnih mrež je manjše ali enako

$$\min \{N_{vh}, N_{iz}\}$$

kjer so:

N_{vh} – število nevronov vhodnega nivoja in
 N_{iz} – število nevronov na izhodu.

Nelinearne ali sigmoidne mreže tovrstnih omejitev ne poznajo, pač pa se taka mreža ne more naučiti nekaterih (funkcijskih) preslikav. Tej pomanjkljivosti se uspešno izognemo, če uporabimo več nivojske mreže. Omenimo tudi, da je sposobnost učenja odvisna od vrste vzorcev. Ko so si dovolj podobni, tedaj govorimo o **posplošitvi** in se v topologiji povezav med nevroni shrani splošen primer.

Za vhodne kot izhodne vrednosti predpostavimo, da so med 0 ali 1. Če so vrednosti absolutno večje od 1, tedaj jih normiramo, (delimo z največjo pričakovano vrednostjo).

Ko enačbo (2) opremimo z indeksom j za izhodni nivo in h za vmesne nivoje, dobimo:

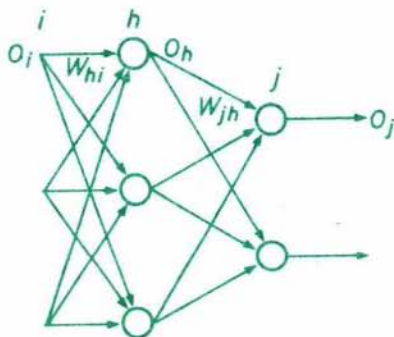
- $O_j = f(A_j) = f\left(\sum_h W_{jh} O_h\right)$ celice izhodnega nivoja in
- $O_h = f(A_h) = f\left(\sum_i W_{hi} O_i\right)$ celice skritega nivoja,

kjer je sigmoidna funkcija lahko:

- $f(x) = 1 / (1 + e^{-x})$ ali
- $f(x) = th(x)$

Izhode nevrona označimo z O_i oziroma O_h . Ko gredo ti izhodi naprej v naslednji h oziroma j nivo nevronov, tedaj jih obravnavamo kot vhode.

Na sliki 4 smo označili uteži povezav z W_{jh} oziroma W_{hi} , vhodne vrednosti z O_i , izhodne z O_j in vmesne z O_h .



Slika 4. Dvo nivojska nevronska mreža.

Kako določimo odziv nevrona? Izberemo (vzorčne) vhodne vrednosti in s pomočjo enačbe 3.b izračunamo vsoto produktov uteži in vhodnih vrednosti. Izhodno vrednost nevronov v vmesnem nivoju dobimo iz enačbe

4.a ali 4.b. Postopek ponovimo še za izhodni nivo. Tu so vhodne vrednosti tiste, ki smo jih ravnokar izračunali iz enačb 4. Ko bi nivojev bilo več, bi postopek ponavljali do končnega (izhodnega) nivoja.

Ker so ob začetku uteži določene naključno, bo tudi izračunana vrednost različna od želene. Zato začnemo postopek učenja. Uporabili bomo posplošeno delta pravilo učenja. Najprej popravimo vrednost uteži W_{jh} izhodnega nivoja. Ker pri učenju (z učiteljem) vselej vemo za želeni rezultat, primerjamo izračunano O_j vrednost z želeno ali ciljno T_j vrednostjo. Razliko med obema vrednostima uporabimo za izračun spremembe W uteži:

$$\delta D_j = (T_j - O_j) * f'(\sum_h W_{jh} O_h) \quad (5)$$

ter

$$\delta W_{jh} = R * \delta D_j * O_h, \quad (6)$$

kjer je f' odvod (izbrane) sigmoidne funkcije, δD_j je doprinos celice j in R je hitrost učenja. Omenimo naj, da odvod f' funkcije f določa nagib funkcije v dani točki. Hitrost R določimo iskustveno (glej Tab.1), v našem primeru bo $R = 0.5$.

Za vmesne nivoje se enačba (5) nekoliko spremeni, saj tu ni moč primerjati izhodov s ciljem. Razliko (napako) nadomestimo z vplivom predhodnega nivoja, torej:

$$\delta D_h = \sum_j (\delta D_j W_{jh}) * f'(\sum_i W_{hi} O_i) \quad (7)$$

ter

$$\delta W_{hi} = R * \delta D_h * O_i. \quad (8)$$

Tu ima R isti pomen, medtem ko je δD_h popravek uteži vmesnega nivoja. Le-ta nima ciljnega izhoda, zato si pomagamo s trenutnimi ciljnimi vrednostmi. Izračunamo jih tako, da popravek iz (6) razširimo nazaj od izhoda k vmesnim nivojem. Za primer z več vmesnimi nivoji bi postopek popravljanja ponavljali do začetnega (vhodnega) nivoja.

Primeri uporabe večnivojske nevronske mreže

Primer 1: Mrežo smo najprej uporabili kot navaden seštevalnik. Učili smo jo s tremi seštevki, zatem smo jo vprašali najprej po naučenih vrednostih, zatem pa še po drugih vrednostih. Mreža nam je presenetljivo dobro odgovarjala. Torej že samo s tremi primeri seštevanja zna mreža seštevati. Uporabili smo različne sigmoidne funkcije. Ker želimo, da bo naša predstava o nevronskih mrežah popolnejša, podajmo tabelo, kjer bomo videli odvisnost med naučenimi vrednostmi in hitrostjo učenja R . V

prvem stolpcu tabele 1 so vpisane pravilne vrednosti vsot:

$0.2 + 0.3 = 0.5$, $0.3 + 0.4 = 0.7$ in $0.1 + 0.2 = 0.3$, v ostalih šestih levih stolpcih pa vsote, ki jih izračuna naučena mreža.

Uporabili smo mrežo z enim nevronom na izhodu in dvema nevronoma v vmesnem (drugem) nivoju. Za razne sigmoidne funkcije smo dobili rezultate v tabeli 1. Poleg seštevkov so dodana tudi potrebna števila prehodov preko učnih primerov, ki so potrebni za učenje mreže.

a. $f(x) = 1 / (1 + e^{-x})$:

vsota / R	0.01	0.1	0.5	1.0	2.0	5.0
0.50	-	0.51	0.51	0.51	0.52	0.52
0.70	-	0.66	-	0.66	0.66	0.69
0.30	-	0.33	-	0.32	0.33	0.29
št.uč.	?	30000	10000	2000	1000	500

b. $f(x) = th(x)$:

vsota / R	0.01	0.1	0.5	1.0	2.0	5.0
0.50	-	0.52	0.52	0.52	0.52	?
0.70	-	0.65	0.66	0.68	0.68	?
0.30	-	0.34	-	0.31	0.30	?
št.uč.	?	500	500	500	250	-

c. $f(x)$ je linearna:

vsota / R	0.01	0.1	0.5	1.0	2.0	5.0
0.50	0.50	0.50	0.50	0.50	0.50	?
0.70	0.70	0.70	0.69	0.70	0.69	?
0.30	0.30	0.30	0.32	0.30	0.31	?
št.uč.	1000	500	250	125	100	-

Tabela 1. Rezultati učenja z različnih funkcijami

Primer 2: Mrežo lahko naučimo ločiti vzorce med seboj in jih razvrstiti v skupine. To pokažimo na primeru:

odgovor: (bolezen)	vročina	vprašanje: kašelj	glavobol
pljučnica	da	ne	ne
pljučnica	da	da	da
prehlad	da	da	ne
prehlad	da	ne	da

Tabela 2. Ugotavljanje bolezni.

Če izberemo številke namesto vprašanj in odgovorov, bomo nevronske mreže po 1000 do 2000 poskusih naučili novega znanja. Zanimivi so odzivi mreže, ko jo sprašujemo z vhodnimi vrednostmi med "da" in "ne" oziroma med 1 in 0. V takih primerih so odgovori mreže posplošeni.

Podobnih primerov si domislimo tudi sami. Prednost uporabe nevronske mreže čutimo predvsem tedaj, ko ne poznamo predpisa preslikave vhoda na izhod, ali pa je le-tega možno zapisati z obsežnimi matematičnimi izrazi. Naš drugi primer je zagotovo tak! Le kako bi zapisali zvezo med boleznijo in (tremi) vzroki?! Pa še nakaj smo spoznali! Ni potrebno, da so vhodne vrednosti 0 ali 1, lahko so tudi kje vmes. Nevronska mreža tudi za take primere najde svoj posplošen odgovor.

Učenje seštevanja nas lahko zavede, da bi poskušali še z množenjem, deljenjem, kvadriranjem ipd. Žal, tako to ne gre. Mreža ne računa, pač pa zna (ko je naučena) zelo dobro ločiti vrednosti med seboj. Pove nam, ali je število (zadnje v tabeli 3) produkt prejšnjih dveh, ali ne:

vprašanje (vhod)			odgovor (izhod)
števíli		produkt?	
0.1	0.1	0.01	da
0.7	0.5	0.8	ne
0.2	0.2	0.04	da, ipd.

Tabela 3. Učenje množenja

Verjetno smo si nevronske mreže zamislili drugače?! Kaj smo torej pridobili? Prvič, za različne primere učenja smo uporabili vedno isto

večnivojsko nevronske mreže. Spremeniti smo morali le podatke o številu nivojev in nevronov (po raznih nivojih). Drugič, ni potrebno, da poznamo funkcijsko zvezo med vhodnimi in izhodnimi vzorci. Tretjič, če mrežo učimo s pravimi parametri (glej tabelo 1), lahko dobimo rezultat že po nekaj predstavitev vzorcev. Kaj pa sploh pomeni 1000 ali 10000 ponavljanj? Ali je to veliko ali malo? Če želimo odgovoriti na to vprašanje, si moramo jasno predstavljati, kaj mreža naredi! Ko smo jo enkrat realizirali, nam ista služi za različne primere. Na poljubne vhodne vzorce ali podatke daje (največkrat) pričakovane rezultate. Le naučiti jo moramo!

Zaključek

Domnevamo, da bodo nevronske mreže v bodočnosti odigrale pomembno vlogo pri razvoju računalnikov šeste ali sedme generacije. Mreže delujejo paralelno, ne potrebujejo točnih podatkov in za delovanje ne potrebujejo zapletenih algoritmov kot današnji računalniki. Njihovo uporabnost zato vidimo predvsem v razpoznavanju govora, pisanega teksta, slike, pa še kje. Prav tako moramo vedeti, da je zamisel o računalniku, ki bo deloval podobno kot človeški možgani, že zelo stara. Von Neumann, oče računalnika, je v svoji knjigi *The Computer and the Brain* že leta 1958 primerjal računalnik z možgani. Prepričani smo, da bomo govorili o res pravih nevronske računalnikih šele takrat, ko bo tudi tehnologija sposobna uspešno realizirati nevronske mreže, kot to danes velja za na primer mikroprocesorje. Res da se na tržišču pojavljajo (komercialna) vezja, ki omogočajo asociativne pomnilnike z na primer 22×22 nevronskimi celicami. Tudi nekateri poizkusi nelinearnih celic kažejo, da razvoj sicer gre v smer izdelave vedno večjih mrež, kar je plod množičnih pionirskih raziskovanj na tem področju. Za enkrat je delovanje nevronske celice omejeno le na simulacijo na obstoječih digitalnih računalnikih. Podoben simulacijski program smo uporabili tudi mi, da smo prišli do podatkov v tabeli 1.

Veselko Guštin

ENAKOSTRANIČNI TRIKOTNIK

Koliko meri stranica enakostraničnega trikotnika, v katerem obstaja točka, ki je od oglišč oddaljena 3 cm, 4 cm oziroma 5 cm?

Boštjan Hostnik

20. ZVEZNO TEKMOVANJE OSNOVNOŠOLCEV IZ MATEMATIKE

Jubilejno zvezno tekmovanje matematikov je bilo v soboto, 3. junija 1989, v osnovni šoli Kasim Hadžić v Banja Luki. Že v petek popoldne so se tu zbrali tekmovalci in mentorji, v soboto pa je bila ob 9. uri najprej svečana otvoritev tekmovanja, nato pa so tekmovalci dve uri in pol reševali precej zahtevne naloge. Medtem so organizatorji za mentorje pripravili demonstracijo rešitev nalog in pogovor o delu z nadarjenimi matematiki. Po kosilu so si tekmovalci in mentorji ogledali mesto, tekmovalna komisija pa je medtem pregledala izdelke.

Tekmovalo je 39 sedmošolcev in 50 osmošolcev. Med njimi so po sklepu republiške tekmovalne komisije Slovenijo zastopali: sedmošolci Urban Mrak (OŠ Ivan Grohar, Škofja Loka), Damijan Kuhar (OŠ France Prešeren, Kranj) in Tomaž Katrašnik (OŠ Bojan Ilich, Maribor) ter osmošolci Blaž Mihelj (OŠ Franjo Vrunč, Slovenj Gradec), Aleš Keber (OŠ Prežihov Voranc, Ravne na Koroškem), Aleš Hajšek (OŠ Katja Rupena, Novo mesto) in Bojan Gornik (OŠ XV. SNOUB Belokranjska, Metlika).

Uspeh naših tekmovalcev ni bil najboljši, saj je le Aleš Keber osvojil pohvalo.

Med predlogi za tekmovalne naloge je komisija izbrala naslednje:

7. razred

1. V trgovini so tretjino blaga prodali po 10 % višji ceni od načrtovane, polovico blaga pa po 15 % nižji ceni od načrtovane. S koliko % večjo od načrtovane cene so morali prodati ostanek blaga, da je bil izkupiček enak, kot če bi vse blago prodali po načrtovani ceni?
2. Poišči vsa trimestna števila, ki imajo v desetiškem zapisu vse tri številke različne, so deljiva s 7 in je tudi vsota njihovih števil deljiva s 7.
3. V trikotniku ABC je AB najdaljša stranica. Na stranici AB izberemo točki D in E , tako da je $\overline{AD} = \overline{AC}$ in $\overline{BE} = \overline{BC}$. Koliko meri kot $\angle ABC$, če meri kot $\angle ECD$ 20° ?
4. Krožnica k in točka P ležita v isti ravnini. Skozi P nariši premico p , ki seče krožnico k v točkah A in B , tako da bo vsota $\overline{PA} + \overline{PB}$ največja. Razloži potek konstrukcije za vsakega od treh primerov: P leži v krogu, P je na krožnici in P je zunaj kroga.
5. V notranjosti poljubnega trikotnika ABC izberi poljubno točko M . Dokazi:
 - a. $\angle AMB > \angle ACB$
 - b. $\overline{AM} + \overline{MB} < \overline{AC} + \overline{CB}$.

8. razred

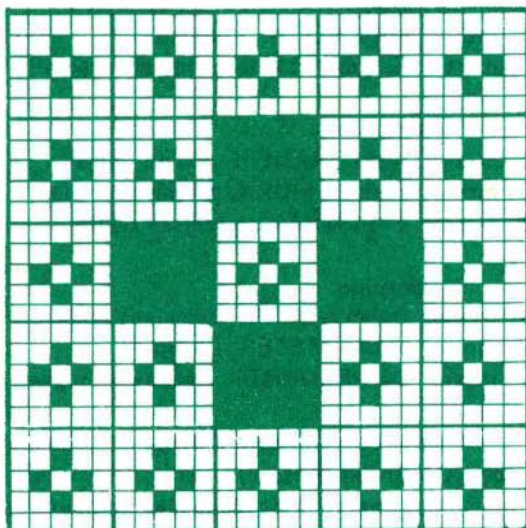
1. Štirje učenci Amir, Boris, Cvetko in Darko so zbirali star papir. Skupaj so zbrali 288 kg papirja. Koliko kg papirja je zbral vsak od njih, če vemo, da je Amir zbral 36 kg več kot Boris, kar je enako $\frac{3}{4}$ količine, ki sta jo zbrala Boris in Cvetko skupaj, Darko pa je zbral dvakrat več papirja kot Cvetko?
2. Ali je mogoče, da se vsota $1 + 2 + 3 + \dots + p$ za katero izmed naravnih števil p konča s številkami 1989? Odgovor utemelji.
3. Vsota številke števila X je Y , vsota številke števila Y pa je Z . Izračunaj število X , če je $X + Y + Z = 60$.
4. V ravnini kvadrata leži devet različnih premic. Vsaka od teh premic deli kvadrat na dva trapeza, katerih ploščini sta v razmerju $2 : 3$. Dokaži, da med danimi devetimi premicami obstajajo tri, ki se sekajo v skupni točki.
5. V ravnini trikotnika ABC leži premica p , ki trikotnika ne seče. Naj bodo A_1, B_1, C_1 in T_1 nožišča pravokotnic iz oglišč A, B in C ter težišča T na premico p . Dokaži, da je

$$\overline{AA_1} + \overline{BB_1} + \overline{CC_1} = 3\overline{TT_1}$$

Aleksander Potočnik

ŠE O ŠAHOVSKEM KRALJU

V tretji številki Preseka je bila pri članku z zgornjim naslovom na strani 137 pomotoma objavljena napačna slika. Pravo sliko objavljamo tu.



4. REPUBLIŠKO TEKMOVANJE IZ RAČUNALNIŠTVA ZA OSNOVNOŠOLCE

Aprila lani so mladi računalnikarji osnovnih šol Slovenije pomerili svoje moči na Srednji naravoslovni šoli v Ljubljani. Organizator - Zveza organizacij za tehnično kulturo Slovenije - je ob pomoči delovnih organizacij Intertrade - TOZD zastopstvo IBM, Iskra - Delta, Institut Jožef Stefan, Vatotehna, Mikrohit, Konim, Mladinska knjiga, Moj MIKRO, Tehniška založba Slovenije in MURA - Murska Sobota tekmovanje uspešno izpeljal.

Tekmovanja se je udeležilo 62 tekmovalcev iz vse Slovenije. Ti so se na republiško tekmovanje uvrstili na podlagi predhodnih izbirnih tekmovanj (šolskih in regijskih). Tekmovali so v treh skupinah, in sicer:

1. skupina: Učenci 1.-4. razreda - reševanje nalog v jeziku logo;
2. skupina: Učenci 5. in 6. razreda - reševanje nalog s področja računalniške tehnike, algoritmov in obvladanja jezika basic ali pascal;
3. skupina: Učenci 7. in 8. razreda - reševanje zahtevnejših nalog s pomočjo osebnih računalnikov.

Ob zaključku je tekmovalna komisija razglasila rezultate in podelila nagrade naslednjim tekmovalcem:

1. skupina:

1. mesto: Igor VERSTOVŠEK, Ljubljana
2. mesto: Mitja ŠLENC, Ljubljana
3. mesto: Gregor HOJNIK, pomurska regija

2. skupina:

1. mesto: Aleks JAKULIN, obalna regija
2. mesto: Damjan MURN, dolenska regija
3. mesto: Tilen MRAK, gorenjska regija

3. skupina:

1. mesto: Bojan GORNIK, dolenska regija
2. mesto: Marko MAČEK, Ljubljana
3. mesto: David GORIŠEK, podravska regija.

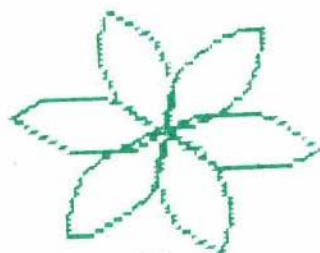
Delovna organizacija KONIM iz Ljubljane je tri najbolj uspešne osnovne šole (OŠ Srečko Kosovel Sežana, OŠ Metlika in OŠ Karel Destovnik Kajuh Ljubljana) nagradila z računalniki Commodore 64.

Oglejmo si naloge!

1. skupina

1. Tekmovanje mladih računalnikarjev poteka pomladi, to je v najlepšem obdobju leta. Za pomlad je značilno prebujanje narave in množica prelepih rož in cvetov. Tudi mi smo se odločili, da skušamo prikazati nekaj teh lepot s pomočjo računalnika in jezika logo. Pa pričniva!

Želiva narisati cvet, ki ga vidiš na sliki 1. Toda spodnji program tega ne naredi. Popravi oziroma dopolni program toda tako, da ga boš lahko še nadalje uporabljal!



Slika 1

TO CVET :R

REPEAT 6 (PERO :R RT 60)

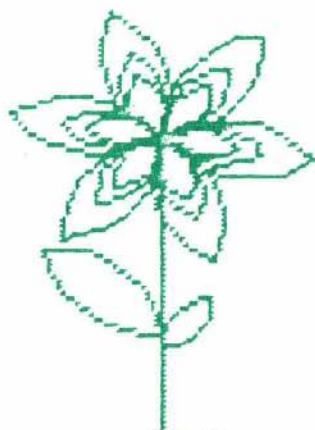
END

2. Gotovo pa znaš narisati mnogo lepše cvetove, zato poskušaj narisati takšnega, kot ga prikazuje slika 2!

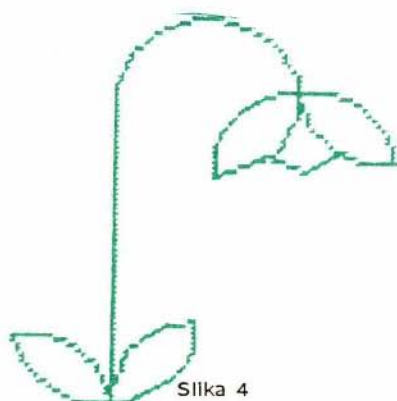


Slika 2

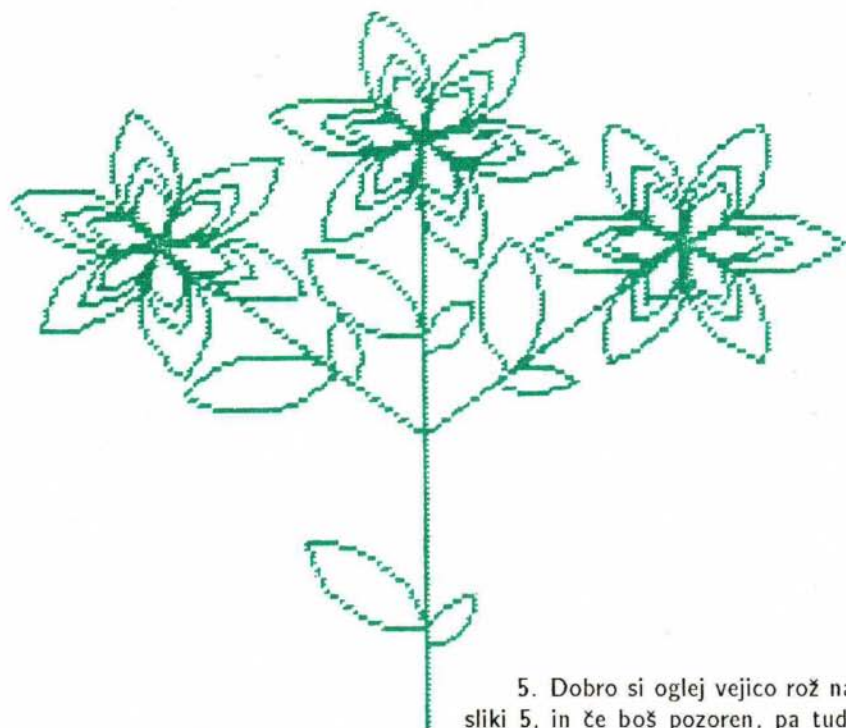
3. Če sva znala narisati cvet, bova znala narisati tudi rožo, kot jo prikazuje slika 3.



Slika 3



Slika 4

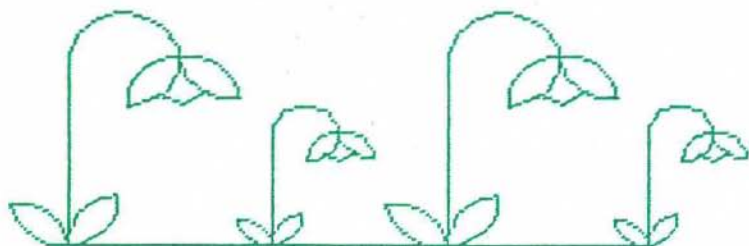


Slika 5

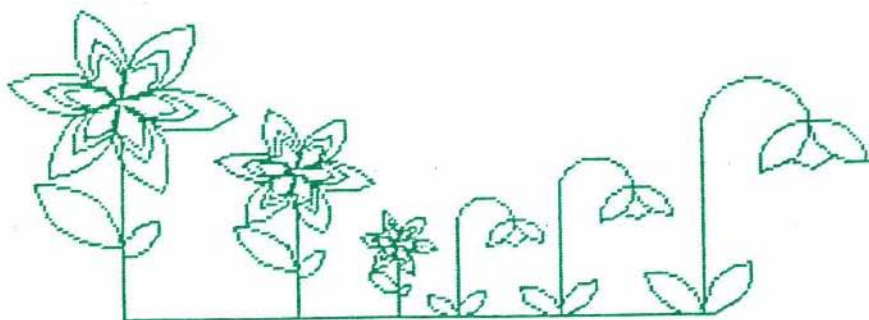
4. Znanilec pomladi je zvonček, zato si zasluži, da ga nariševa! Glej sliko 4!

5. Dobro si oglej vejico rož na sliki 5, in če boš pozoren, pa tudi iznajdljiv, ti ta naloga ne bo delala težav!

6. Kako lepo je pogledati na jaso polno zvončkov! Poskušaj narisati več zvončkov tako, kot prikazuje slika 6!



Slika 6



Slika 7

7. Na jasi pa ne rastejo samo zvončki. Napiši program, ki bo izrisal več rož tako, kot prikazuje slika 7!

8. Za konec pa nekoliko težji nalogi. Najprej nariši podobno sliko kot v vaji 7, le da rožicam dodaj travo. To travo pa moraš narisati s programom, ki uporablja rekurzijo!

9. Tudi rožo s slike 2 nariši s pomočjo rekurzije! Upam, da ti ta postopek ne bo delal težav.

2. skupina

1. Imamo 200 celoštevilčnih podatkov. Napiši program, ki bo izpisal vsoto teh podatkov in zaporedno številko podatka, ko bo trenutna vsota podatkov prvič presegla vrednost 500. Podatki so lahko pozitivni ali negativni!

2. V računalnik vneseš 3 stavke poljubne dolžine. Napiši program, ki bo vnesene stavke izpisoval navpično, enega poleg drugega.

Primer:

M	Š	R
a	o	a
k	i	c
o	j	n
:	e	a
:	:	:

3. Napiši program, ki bo v danem besedilu preštel samoglasnike (a, e, i, o, u) in jih izpisal po pogostnosti (samoglasnik in kolikokrat je v besedilu) v padajočem vrstnem redu.

4. V škatli je 100 enotskih kock (dolžina roba je 1 enota) za sestavljanje kvadrov. Napiši program, ki ti bo pomagal sestaviti vse kvadre, katerih vsi robovi so večji do 1. Izpis naj bo v obliki urejenih trojic (a, b, c) , npr.:

60 kock: $(2, 2, 15)$
 $(2, 3, 10)$
 $(2, 5, 8)$
 $(3, 4, 5)$

Računalnik naj izpiše samo trojice, v katerih so robovi a, b, c urejeni nepadajoče (npr.: trojica $(3, 2, 10)$ se ujema s trojico $(2, 3, 10)$ in je zato ne izpišemo).

3. skupina

1. Napiši podprogram za izračun funkcije $f(x)$, ki je podana z naslednjim zaporedjem:

$$f(x) = x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} - \frac{x^7}{7!} + \frac{x^9}{9!} - \dots + (-1)^{2n} \frac{x^{(2n+1)}}{(2n+1)!}$$

Vsoto naj računa, vse dokler absolutna vrednost zadnjega člena ni manjša od 10^{-6} . Pri tem je:

$$1! = 1$$

$$2! = 1 * 2 = 2$$

$$3! = 1 * 2 * 3 = 6$$

$$4! = 1 * 2 * 3 * 4 = 24$$

$$5! = 1 * 2 * 3 * 4 * 5 = 120$$

2. V koordinatnem sistemu je kvadrat z oglišči $(0,0)$, $(1,0)$, $(1,1)$ in $(0,1)$. Napiši program za izračun razdalje od dane točke $M(x,y)$ do najbližjega oglišča kvadrata.

3. Napiši program, ki bo besede vnesenega stavka izpisal v obratnem vrstnem redu. Med dvema besedama je lahko presledek ali pa vejica, stavek pa se konča s piko.

4. Računalnik računa na 7 decimalnih mest natančno. Napiši program, ki bo prečital dve realni števili (do 20 decimalnih mest) in nato izpisal njuno natančno vsoto in razliko. Predpostavimo, da je prvo podano število večje od drugega!

Primer:

123.456789012345

0.0000000000000001

VSOTA = 123.456789012345001

RAZLIKA = 123.456789012344999

Ivan Gerlič

PETSTOLETNICA ROJSTVA NAŠEGA ASTRONOMA

Novejše raziskave naše kulturne in znanstvene dediščine kažejo, da so se v preteklosti Slovenci številneje in intenzivneje ukvarjali z naravoslovjem, kot si navadno mislimo. Tako so na primer že pred Nikolajem Kopernikom (1473 – 1543), utemeljiteljem heliocentričnega sistema, delovali vsaj trije slovenski astronomi *, s čimer se morejo pohvaliti le redki narodi.

Kopernikov sodobnik je bil veliki slovenski izobraženec *Andrej Perlah*. Rojen je bil 1490 v Svečini pri Mariboru. Na Dunaju je študiral matematiko in medicino. Bil je 34 let profesor dunajske univerze, najprej profesor matematike in astronomije na filozofski fakulteti, po doktoratu iz medicine pa še na medicinski fakulteti. Petkrat je bil dekan, 1549 pa tudi rektor. Bil je med redkimi profesorji medicine, ki so sloveli tudi kot humanistični in matematični pisci. Sploh je dosegel najvišje funkcije medicinske fakultete in univerze. Doktor znanosti in doktor medicine *Andreas Perlachius – Stirus* (Štajerski), kot so mu nadeli naziv ob izvolitvi za dekana medicinske fakultete 1539, pa je bil tudi med najuglednejšimi dunajskimi zdravniki. Posebno zavzeto se je boril proti najhujši nalezljivi bolezni tedanjega časa – kugi, ki je za Perlahovega življenja še vedno močno razsajala. Veliki učenjak je umrl na Dunaju 1551, torej prav v letu, ko smo Slovenci dobili svojo prvo tiskano knjigo.

Kot vsi humanisti je tudi Perlah pisal v latinščini, ki je bila splošno razumniški jezik tistega časa. Perlah je imel enciklopedično znanje. Odlično je obvladal matematiko, fiziko, astronomijo in grščino, latinščino pa še medicino. Napisal je številne krajše in daljše razprave in je avtor več tiskanih del, večinoma z matematično in

Almanach novum s. 120. Dnevi in noči v februarju 1520. Podatki za danes.

Februarius	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	16	17	18	19	20	21	22	23	24	25	26	27	28
1	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	16	17	18	19	20	21	22	23	24	25	26	27	28
2	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	16	17	18	19	20	21	22	23	24	25	26	27	28
3	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	16	17	18	19	20	21	22	23	24	25	26	27	28
4	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	16	17	18	19	20	21	22	23	24	25	26	27	28
5	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	16	17	18	19	20	21	22	23	24	25	26	27	28
6	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	16	17	18	19	20	21	22	23	24	25	26	27	28
7	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	16	17	18	19	20	21	22	23	24	25	26	27	28
8	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	16	17	18	19	20	21	22	23	24	25	26	27	28
9	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	16	17	18	19	20	21	22	23	24	25	26	27	28
10	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	16	17	18	19	20	21	22	23	24	25	26	27	28
11	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	16	17	18	19	20	21	22	23	24	25	26	27	28
12	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	16	17	18	19	20	21	22	23	24	25	26	27	28
13	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	16	17	18	19	20	21	22	23	24	25	26	27	28
14	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	16	17	18	19	20	21	22	23	24	25	26	27	28
15	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	16	17	18	19	20	21	22	23	24	25	26	27	28
16	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	16	17	18	19	20	21	22	23	24	25	26	27	28
17	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	16	17	18	19	20	21	22	23	24	25	26	27	28
18	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	16	17	18	19	20	21	22	23	24	25	26	27	28
19	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	16	17	18	19	20	21	22	23	24	25	26	27	28
20	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	16	17	18	19	20	21	22	23	24	25	26	27	28
21	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	16	17	18	19	20	21	22	23	24	25	26	27	28
22	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	16	17	18	19	20	21	22	23	24	25	26	27	28
23	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	16	17	18	19	20	21	22	23	24	25	26	27	28
24	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	16	17	18	19	20	21	22	23	24	25	26	27	28
25	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	16	17	18	19	20	21	22	23	24	25	26	27	28
26	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	16	17	18	19	20	21	22	23	24	25	26	27	28
27	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	16	17	18	19	20	21	22	23	24	25	26	27	28
28	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	16	17	18	19	20	21	22	23	24	25	26	27	28

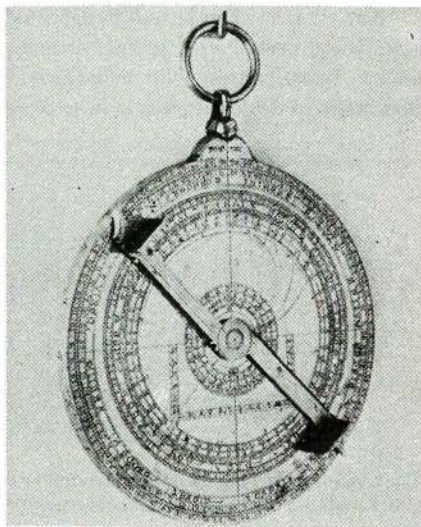
1520	Almanach Lutheri sive doli & planities												Solius & planities															
Februarius	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	16	17	18	19	20	21	22	23	24	25	26	27	28
1																												
2																												
3																												
4																												
5																												
6																												
7																												
8																												
9																												
10																												
11																												
12																												
13																												
14																												
15																												
16																												
17																												
18																												
19																												
20																												

astronomsko vsebino. Eno knjigo pa je napisal z medicinskega področja (navodilo za boj zoper kugo).

Na splošno je Perlah obnavljal in razširjal učbenike svojih predhodnikov, zlasti almanaha, letopise, efemeride in koledarje z astrološko in astronomsko tematiko (slika 1). V astronomskih efemeridah je že obravnaval lege planetov med seboj in lege planetov glede na svetlejšje zvezde. Tako ni obravnaval planetov še nihče pred njim. V tem pogledu je njegovo delo samoniklo in mnogo bolj samostojno od njegovih predhodnikov. Astronomskim napovedim je navadno dodajal še zdravniške nasvete (na primer navodila za puščanje krvi, striženje las, obrezovanje nohtov). Izdelal je tudi več astronomskih instrumentov, med njimi astrolab (slika 2), s katerim je opazoval Soncu najbližji planet Merkur, kar je uspelo le redkim tedanjim astronomom. Ko v efemeridah omenja svoje instrumente, dodaja, da ga sicer nekateri neuki zasmehovalci zbadajo, vendar ga tolaži misel, da so imeli celo največji zvezdoslovci obrekovalce.

Perlah je naš prvi astronom, ki nam je zapustil tiskana dela. Čeprav se je poslovil od svoje prvotne stroke – filozofije in se nato z enako ali pa še večjo vnemo posvetil medicini, si je z izdajanjem almanahov, koledarjev in letopisov, v katerih je objavljal preglednice z astronomskimi podatki, med Slovenci in širše ustvaril velik ugled. Pomen njegovega dela v slovenski kulturni zgodovini še ni v celoti ovrednoten.

Slika 2. Astrolab – starinski astronomski instrument za merjenje višine lege vesoljskega telesa in tudi časa. Morda je Perlah uporabljal astrolab za določevanje inkubacijskega časa pri kugi, saj ur, kot jih imamo danes, seveda tedaj še niso poznali. Več o astrolabu preberi v F. Hoyle, *Astronomija*, MK, Ljubljana 1971, str. 39 do 43.



Morda je celo večji, kot mislimo, saj je v njegovih prikazih astronomskih podatkov (predvsem glede obravnavanja planetnih leg) čutiti nov način posredovanja snovi. Morda se je ob proučevanju planetov že približal spoznanju o heliocentričnem sistemu, ki si je tedaj, po Kopernikovi smrti, že polagoma utiralo pot v znanstveni svet.

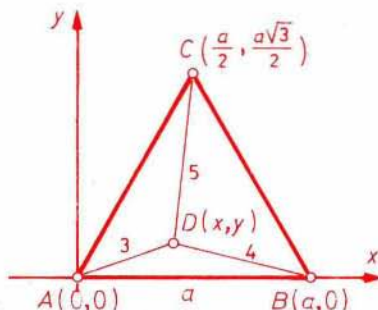
Marijan Prosen

ENAKOSTRANIČNI TRIKOTNIK - Rešitev s str. 231

Označimo z a dolžino iskane stranice in si pomagajmo s pravokotnim koordinatnim sistemom, kot kaže slika. Če je točka D oddaljena od oglišč A , B in C zaporedoma 3, 4 in 5, nam Pitagorov izrek da naslednje zveze

$$\begin{aligned}x^2 + y^2 &= 9 \\(x - a)^2 + y^2 &= 16 \\(x - a/2)^2 + (y - a\sqrt{3}/2)^2 &= 25\end{aligned}$$

Iz prvih dveh enačb izračunamo $x = (a^2 - 7)/(2a)$, nato iz prve enačbe z a izrazimo še y in oboje vstavimo v tretjo enačbo. To uredimo in dobimo enačbo $a^4 - 50a^2 + 193$, ki jo rešimo z uvedbo nove neznanke a^2 . Po kratkem računu najdemo rešitev $a = \sqrt{25 + 12\sqrt{3}}$.

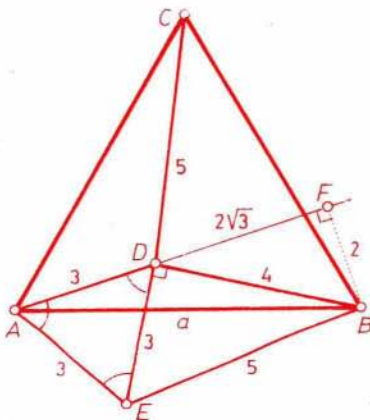


Boštjan Hostnik

Zanimiva je naslednja rešitev iste naloge:

Zavrtimo trikotnik ABC okrog oglišča A za 60° v smeri urinega kazalca (glej sliko). Trikotnik ADC tako preide v $\triangle AEB$, trikotnik AED pa je enakostraničen. Ker ima potem trikotnik BDE stranice dolge 3, 4 in 5, velja

$$\angle BDE = 90^\circ, \angle FDB = 30^\circ$$



Od tod brž dobimo še $\overline{FB} = 2$, $\overline{DF} = 2\sqrt{3}$ in naposled $a^2 = (3 + 2\sqrt{3})^2 + 2^2 = 25 + 12\sqrt{3}$

URNIK TEKMOVANJ V LETU 1990

področje	šola	tekmovanje	datum
matematika	osnovna	šolsko občinsko republiško zvezno	do 7. aprila 21. april 19. maj 2. junij
	srednja	izbirno republiško zvezno balkaniada olimpiada	10. marec 31. marec 13. – 15. april maj julij
fizika	osnovna	področno republiško zvezno	7. april 5. maj 25. – 27. maj
	srednja	izbirno republiško zvezno olimpiada	7. april 12. maj 25. – 27. maj junij
logika	osnovna in srednja	izbirno republiško	22. september 20. oktober
matematika za razvedrilo	osnovna in srednja	republiško	december
računalništvo	osnovna	šolsko področno republiško	9. marec 30. marec 14. april
	srednja	republiško zvezno	18. – 19. maj junij
raziskovanje inovatorstvo	srednja	republiško	1. junij

Nekaj informacij o tekmovanjih

1. Matematika - osnovna šola

Vsa tekmovanja bodo potekala v skladu s Pravilnikom o tekmovanju osnovnošolcev iz matematike za Vegova priznanja. Pojasnila lahko dobite pri tov. A. POTOČNIKU, OŠ K. D. Kajuh, Vlahovičeva 42, Ljubljana, telefon (061)-445-626.

2. Matematika - srednja šola

Razpis izbirnega tekmovanja (za vse učence, ki želijo sodelovati na republiškem tekmovanju) bomo tako kot doslej skupaj s prijavnici poslali na šole. Vsa pojasnila daje tov. D. FELDA, Fakulteta za elektrotehniko in računalništvo, Tržaška 25, Ljubljana, tel. (061)-265-161, int. 233.

3. Fizika - osnovna šola

Republiško tekmovanje bo v Mariboru. Tekmovanje je ekipno, ekipo sestavljata dva učenca. Vsaka šola lahko prijavi po eno ekipo za 7. in 8. razred. Vse ekipe, ki želijo sodelovati na republiškem tekmovanju, se morajo udeležiti področnega tekmovanja v ustrezni organizacijski enoti Zavoda za šolstvo SR Slovenije:

- v Celju na Tehniški srednji šoli, Pot na Lavo 22 (J. Dolenšek);
- v Mariboru na Pedagoški fakulteti, Koroška c. 160 (M. Cvahte in Z. Bradač);
- v Kopru na Srednji pedagoški in naravoslovnomatematični šoli, Cankarjeva 2 (E. Okretič);
- v Ljubljani na Pedagoški akademiji, Kardeljeva ploščad 16 (F. Prijatelj);
- v Radovljici na OŠ A. T. Linhart, Kranjska 27 (J. Stare);
- v Murski Soboti na Srednješolskem centru tehniško pedagoške usmeritve, V. Vlahovića 12 (E. Dečko);
- v Novi Gorici na OŠ IX. korpusa NOVJ, Kidričeva 36 (A. Fakin);
- v Novem mestu na OŠ 15. divizije, Grm, Trdinova 7 (D. Brezovar);
- v Dravogradu na OŠ Rادلje (F. Pogorelnik).

Gradivo za pripravo tekmovalcev je snov iz učbenikov J. Ferbarja in F. Plevnika za 7. in 8. razred, ki ju učenci lahko med tekmovanjem uporabljajo. Predtekmovanje bo sestavljeno iz vprašanj in računskih nalog, na republiškem tekmovanju pa se bodo učenci poleg tega pomerili še v eksperimentalnem delu. Priporočamo, da izvedete šolsko tekmovanje. Prijave za področno tekmovanje pošljite na ustrezno zgoraj navedeno organizacijsko enoto najkasneje do **25. marca**. Informacije dobite pri tov. F. PRIJATELJU, OŠ T. Čufar, Čufarjeva 11, Ljubljana, tel. (061)-313-135 ali (061)-313-156.

4. Fizika - srednja šola

Razpis za tekmovanja bomo skupaj s prijavniciami poslali na šole do konca februarja. Informacije dobite pri tov. I. KUKMANU na Fakulteti za strojništvo, Murnikova 2, Ljubljana, tel. (061)-223-133, int. 275.

5. Logika

Na republiškem tekmovanju tekmujejo učenci, ki bodo v času tekmovanj v 7. in 8. razredu osnovne šole, učenci srednjih šol in študenti. Šole, ki bodo organizirale izbirno tekmovanje, se morajo prijaviti na razpis do **1. junija** na ZOTKS, Komisija za logiko, Lepi pot 6, 61001 Ljubljana. Na ta naslov naj do **5. septembra** tudi sporočijo, koliko nalog za posamezne skupine potrebujejo. Šolam bomo poslali tudi naloge za 5. in 6. razred. Komisija za logiko bo izbrala do 50 tekmovalcev iz posamezne skupine za nastop na republiškem tekmovanju. Učenci šol, ki ne bodo organizirale izbirnega tekmovanja, se lahko prijavijo do 30. avgusta na najbližji šoli, kjer bodo tekmovanje izvedli. Seznam teh šol bo objavljen v dnevnem časopisu julija in avgusta. Druge informacije daje tov. A. JUS na ZOTKS, tel. (061)-263-676.

6. Matematika za razvedrilo

Vse informacije dobite v časopisih MOJ MIKRO, PIONIR in PROTEUS.

7. Računalništvo - osnovna šola

Razpisi za tekmovanje so že na šolah. Informacije dobite pri tov. A. JUSU, ZOTKS - Svet za tehnično vzgojo mladine, Lepi pot 6, Ljubljana, tel. (061)-263-676.

8. Računalništvo - srednja šola

I. Raziskovalne naloge

Strokovna komisija bo pregledala naloge, ki bodo do **1. maja** prispele na naslov Gibanje znanost mladini, Lepi pot 6, Ljubljana. Na osnovi dobljenih ocen bo določila tiste učence, ki bodo svoje naloge ustno zagovarjali.

II. Tekmovanje iz znanja računalništva

Mentorji naj pošljejo prijavo šole s poimenskim seznamom tekmovalcev (ne več kot po 5 učencev za vsako od treh tekmovalnih skupin) do **10. aprila** na Gibanje znanost mladini. Pri tem naj upoštevajo pravila, ki že vrsto let veljajo za to tekmovanje.

Potrditev prijav in natančni razpored tekmovanja bodo šole dobile teden dni pred tekmovanjem. Šolam priporočamo, da izvedejo predtekmovanja in tako izberejo najboljše predstavnike. Učenci šol, ki se ne bodo prijavile na tekmovanje kot organizacije, se lahko sami prijavijo na isti naslov, prav tako

najkasneje do 10. aprila. Informacije dajeta tov. R. DORN in tov. M. ZRIMEC, Fakulteta za elektrotehniko in računalništvo, Tržaška 25, Ljubljana, tel. (061)-273-489.

9. Raziskovanje in inovatorstvo

Razpise za 23. srečanje mladih raziskovalcev in inovatorjev Slovenije so srednje šole že dobile, podrobnejše informacije pa dobite pri tov. B. SOTOŠKU, ZOTKS - Gibanje znanost mladini, Lepi pot 6, Ljubljana, p.p. 99, tel. (061)-263-676 ali (061)-267-380.

Darjo Felda

DOKTRINA

..."Nekoč je živel študent, ki ni nikoli postal matematik, ker je slepo verjel rešitvam, ki jih je našel na zadnjih straneh matematičnega učbenika, in – ironija! – rešitve so bile pravilne!"

Iz knjige *Anthony de Mello, Minuta modrosti velikih verstev*
Izbral *Matija Lokar*

NALOGA O DELJIVOSTI ŠTEVIL – Rešitev s str. 189

Ker je $29x + 29y$ deljivo z 29, je deljivo z 29 tudi število

$$(29x + 29y) - (8x + 15y) = 21x + 14y$$

Toda, ker velja $21x + 14y = 7(3x + 2y)$ in ker sta si števili 7 in 29 tuji, deli 29 tudi $3x + 2y$. Zato je deljivo z 29 tudi

$$(8x + 15y) - (3x + 2y) = 5x + 13y$$

Dragoljub M. Milošević
prev. *Peter Petek*

RESITVE NALOG

VZOREC IZ MOSKVE - Rešitve iz P3

7.1. V zgornjo vrstico lahko poljubno zapišemo vse štiri črke, na primer po vrsti A, B, C, D. Potem v skrajnih dveh kvadratih spodnje vrstice ne smeta biti ne A ne D, torej sta A in D v notranjih dveh kvadratih te vrstice. Vsaka od obeh možnosti nam da eno od rešitev na sliki.

A	B	C	D
C	D	A	B
D	C	B	A
B	A	D	C

A	B	C	D
D	C	B	A
B	A	D	C
C	D	A	B

7.2. Označimo z S središče kroga. Ker sta kota SMB in SNB prava, je štirikotnik $SMBN$ tetiven in velja enakost

$$\angle BMN = \angle BSN$$

Podobno dobimo enakost

$$\angle NKC = \angle NSC$$

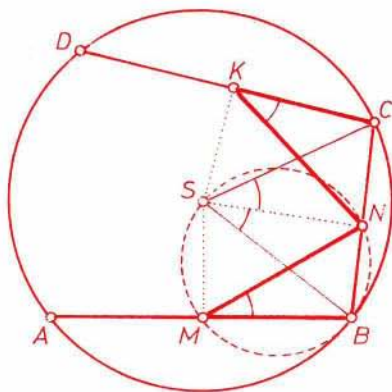
Ker je trikotnik BCS enakokrak in je $SN \perp BC$, velja

$$\angle BSN = \angle NSC$$

torej tudi enakost, ki smo jo želeli dokazati.

7.3. Vietovo pravilo nam za korena x_1 in x_2 trinoma $x^2 + ax + b$ da $a = -(x_1 + x_2)$, $b = x_1 x_2$. Zaradi pogojev naloge je potem

$$0 < b (= x_1 x_2) \leq 2 \text{ in } -2\sqrt{2} \leq a (= -x_1 - x_2) < 0$$



Ker diskriminanta trinoma ni negativna, je še $a^2 \geq 4b$, to pa skupaj s prejšnjimi ocenami (ker iščemo le celoštevilčno rešitev) brž da edino rešitev naloge: $a = -2$, $b = 1$.

8.1. Poglejmo zaporedje $ijij\dots; i, j \in \{0,1,\dots,9\}$ in že vidimo, da mora X vsebovati vsaj enega od elementov ij . ji (če je $i = j$, torej $ii \in X$). Zato je v X vsaj 55 elementov. Množica

$$X = \{ij : i \leq j, i, j \in \{0,1,\dots,9\}\}$$

ima 55 elementov in tudi zahtevano lastnost.

8.2. Vzemimo $x = 0$, $x = 1$ in $x = 1/2$ pa dobimo neenakost

$$|c| \leq 1, |a + b + c| \leq 1, |a + 2b + 4c| \leq 4 \quad (1)$$

Brez škode smemo privzeti, da je $a \geq 0$ (če je $a < 0$ namreč lahko številom a, b in c hkrati spremenimo predznake). Druga in tretja ocena v (1) nam dasta

$$\begin{aligned} -1 - c &\leq a + b \leq 1 - c \\ -4 - 4c &\leq a + 2b \leq 4 - 4c \end{aligned}$$

od koder dobimo

$$\begin{aligned} -6 + 2c &\leq a \leq 6 + 2c \\ -5 - 3c &\leq b \leq 5 - 3c \end{aligned} \quad (2)$$

Naj bo $b \geq 0$. Potem z uporabo prvih dveh ocen v (1) dobimo

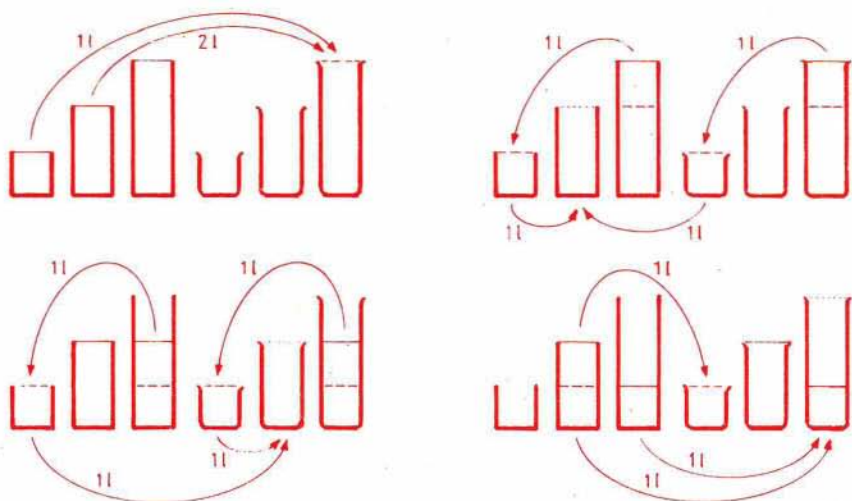
$$|a| + |b| + |c| = a + b + |c| \leq (a + b + c) + |c| - c \leq 3$$

Če pa je $b < 0$, nam (2) in prva ocena v (1) dasta

$$\begin{aligned} a - b + c &\leq 11 + 6c \leq 17 \\ a - b - c &\leq 11 + 4c \leq 15 \end{aligned}$$

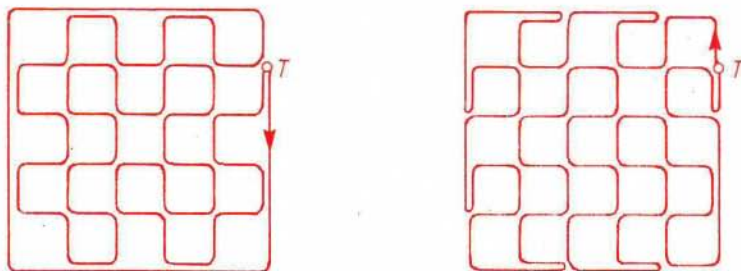
zato velja $|a| + |b| + |c| = a - b + |c| \leq 17$. Lahko se prepričamo, da pri $a = 8$, $b = -8$, $c = 1$ velja za vsak $x \in [0,1]$ neenakost $|ax^2 + bx + c| \leq 1$, torej je največja možna vrednost izraza $|a| + |b| + |c|$ enaka 17.

8.3. Enega od ustreznih načinov prelivanja kaže slika.



9.1. Denimo, da rdeči premici nista vzporedni. Potem sta obe modri premici pravokotni na ravnino, ki je vzporedna obema rdečima premicama, torej sta vzporedni med seboj.

9.2. Poglejmo katerokoli križišče (oblike $\perp$), v katerem ulica z notranjosti kvadrata sreča robno. Če to ni T (kjer je začetek in konec poti), potem moramo vsaj eno od treh poti dolžine 1, ki vodijo iz tega križišča, prevoziti najmanj dvakrat. Ker je takšnih križišč 15, bo treba najmanj 8 poti prevoziti vsaj dvakrat. Najkrajša možna pot je torej dolga vsaj $60 + 8$. Na sliki sta predstavljena dva načina pluženja, oba dolga 68.



9.3. Pomnožimo izraz s $\frac{\sin \pi}{11}$ in nekajkrat zapored uporabimo formulo $\sin x \cos x = (1/2) \sin 2x$:

$$\begin{aligned}
 & \sin \frac{\pi}{11} \cos \frac{\pi}{11} \cos \frac{2\pi}{11} \cos \frac{3\pi}{11} \cos \frac{4\pi}{11} \cos \frac{5\pi}{11} = \\
 &= \frac{1}{4} \sin \frac{4\pi}{11} \cos \frac{3\pi}{11} \cos \frac{4\pi}{11} \cos \frac{5\pi}{11} = \\
 &= \frac{1}{8} \sin \frac{8\pi}{11} \cos \frac{3\pi}{11} \cos \frac{5\pi}{11} = \\
 &= \frac{1}{8} \sin \frac{3\pi}{11} \cos \frac{3\pi}{11} \cos \frac{5\pi}{11} = \\
 &= \frac{1}{16} \sin \frac{6\pi}{11} \cos \frac{5\pi}{11} = \\
 &= \frac{1}{16} \sin \frac{5\pi}{11} \cos \frac{5\pi}{11} = \\
 &= \frac{1}{32} \sin \frac{10\pi}{11} = \frac{1}{32} \sin \frac{\pi}{11}
 \end{aligned}$$

Prvotni izraz je torej enak $\frac{1}{32}$.

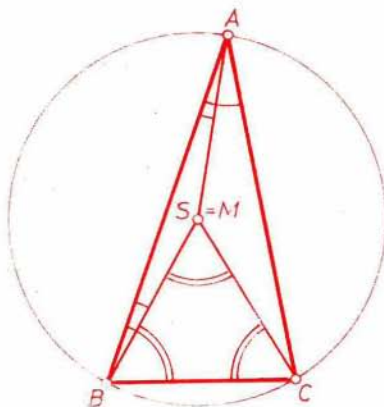
10.1 Graf funkcije $f(x) = x^3$ ustreza pogoju naloge – polinom tretje stopnje (z realnimi koeficienti) ima vsaj eno realno ničlo.

10.2. Trikotniku ABC očrtajmo krog in s S označimo njegovo središče. Središčni kot BSC nad tetivo BC meri dvakrat več kot obojni kot BAC , torej velja

$$\angle BSC = 2\angle BAC = 60^\circ$$

Trikotnik BCS je tedaj enakokraničen, S pa sovpada z M . Zato je

$$\begin{aligned}
 \angle MAB &= \angle SAB = \angle SBA = \\
 &= \beta - 60^\circ = 10^\circ
 \end{aligned}$$



10.3. Očitno je $a_2 \geq 0$, zato obstaja tak $m \in \mathbb{N} \cup \{0\}$, da je $m \leq a_2 < m+1$. Potem pa velja

$$0 \leq a_{m+2} = a_2 - m < 1$$

in zato $a_{m+3} = 1 - a_{m+2}$, odkoder dobimo $a_{m+4} = a_{m+2}, a_{m+5} = a_{m+3}, \dots$

Boris Lavrič

25. REPUBLIŠKO TEKMOVANJE OSNOVNOŠOLCEV IZ MATEMATIKE – Rešitve nalog s str. 174

7. razred

$$\begin{aligned}
 1. \quad \overline{abcabc} &= a \cdot 100000 + b \cdot 10000 + c \cdot 1000 + a \cdot 100 + b \cdot 10 + c = \\
 &= a \cdot 100100 + b \cdot 10010 + c \cdot 1001 = \\
 &= 1001 \cdot (a \cdot 100 + b \cdot 10 + c) = 13 \cdot 77 \cdot (a \cdot 100 + b \cdot 10 + c)
 \end{aligned}$$

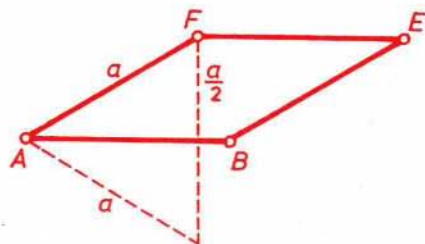
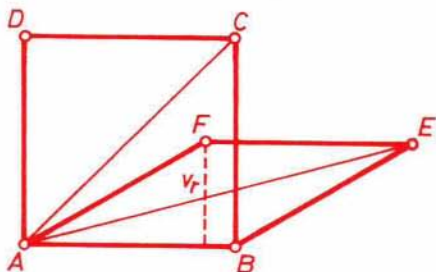
Odg.: Vsako tako število je deljivo s 13.

$$2. \quad 13 - \frac{5}{2 + (x + 0,3)^2} \text{ ima najmanjšo vrednost kadar ima } \frac{5}{2 + (x + 0,3)^2}$$

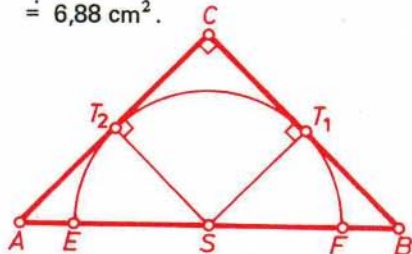
največjo vrednost, to pa je tedaj, ko ima $2 + (x + 0,3)^2$ najmanjšo vrednost, kar je pri $x = -0,3$.

3. Vrednost izraza je enaka 1.

4. Če s p_r označimo ploščino romba s p_k pa ploščino kvadrata, velja $p_r = 1/2 p_k$, zato $v_r = a/2$ in potem $\sphericalangle BAF = 60^\circ/2 = 30^\circ$, $\sphericalangle BAE = 30^\circ/2 = 15^\circ$ in $\sphericalangle BAC = 45^\circ$. Torej je $\sphericalangle CAE = 30^\circ$.



5. Upoštevaj, da kota EST_2 in FST_1 merita 45° . Razlika ploščin obeh likov meri $(8\text{cm})^2/2 - 8\pi\text{cm}^2 \doteq 6,88\text{ cm}^2$.



8. razred

1. baker x N, cink $(24 - x)$ N. Nastavimo enačbo

$$11\frac{1}{9} \cdot \frac{x}{100} + 14\frac{2}{7} \cdot \frac{24-x}{100} =$$

$$= 24 - 21\frac{2}{9}, \text{ jo rešimo in dobimo}$$

$$x = 20,5.$$

Odg.: Teža bakra je 20,5 N, teža cinka pa 3,5 N.

2. Enakost $(\frac{a}{c})^2 + \frac{b}{c} = \frac{a}{c} + (\frac{b}{c})^2$

preoblikujemo v $a^2 + bc = ac + b^2$
 nato v $a^2 - b^2 = ac - bc$ oziroma
 $(a - b)(a + b) = (a - b)c$. Torej
 velja $a + b = c$, če $a \neq b$.

Odg.: Vsota števcov mora biti enaka
 imenovalcu (če ulomka nista enaka).

3. $3 = 6.123 - 7.105$

$3 = 6.123 - 7.(5.1989 - 80.123)$

$3 = 6.123 - 35.1989 + 560.123$

$3 = 566.123 - 35.1989$

$3 = 566.(192.2000 - 193.1989) - 35.1989$

$3 = 108672.2000 - 109238.1989 - 35.1989$

$3 = 108672.2000 - 109273.1989$

4. $o = 10 \text{ cm}, a = 2,5 \text{ cm}$

$e + f = 7 \text{ cm}, e = 7 - f$.

Pitagorov izrek nam da

$(\frac{e}{2})^2 + (\frac{f}{2})^2 = a^2 = 6,25$ odkoder

dobimo $(7-f)^2 + f^2 = 25$.

$f^2 - 7f + 12 = 0$

$(f-3)(f-4) = 0$

$f = 3, e = 4$

$(f = 4, e = 3)$

Ploščina torej meri 6 cm^2 .

5. Prostornina spodnjega dela

prizme meri $V_{sp} = \frac{1}{2} a \cdot \frac{b}{2} \cdot a =$

$= \frac{a^3 \sqrt{3}}{6}$, kjer smo upoštevali, da je

$a = \frac{b \sqrt{3}}{2}$, torej $b = \frac{2a}{\sqrt{3}}$.

Računanje višine:

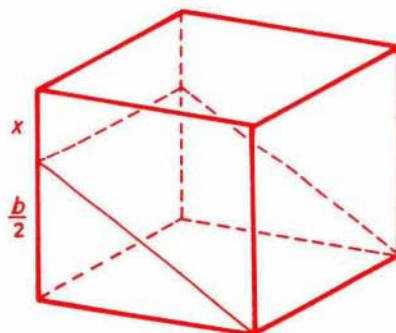
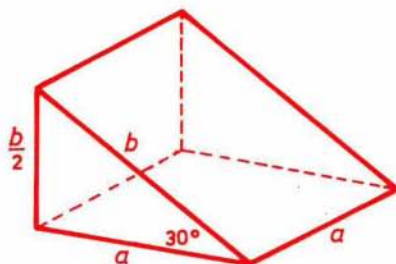
Zaradi podatka $V_{sp} : V_{zg} = 2 : 3$

je $V_{zg} = \frac{a^3 \sqrt{3}}{2 \cdot 2}$, iz enakosti

$V_{zg} = V_{sp} + a^2 x$ pa izračunamo

$x = \frac{a \sqrt{3}}{12}$. Torej meri višina

$v = \frac{b}{2} + x = \frac{5a \sqrt{3}}{12}$.



Aleksander Potočnik

15. IZBIRNO TEKMOVANJE IZ MATEMATIKE ZA SREDNJEŠOLCE - Rešitve s strani 112

Prvi letnik

- Iskano število je 2^{42} . Ker je $2^{10} = 1024$ štirimestno število, ki je malo večje od 10^3 , bo 2^{40} nekaj večje od 10^{12} . Če ga pomnožimo z 2^2 (da dobimo 2^{42}), bo končno število še zmeraj trinajstmestno.
- Če izraz pomnožimo s 4, se glede deljivosti s 121 nič ne spremeni. Oglejmo si torej $n^2 + 12n + 20 = (2n + 3)^2 + 11$. Ta ni deljiv s 121, saj je v vsoti

$$\left(\frac{2n+3}{11}\right)^2 + \frac{1}{11}$$

prvi člen bodisi celo število (če je $2n + 3$ deljiv z 11) ali pa ulomek z imenovalcem 121, (ki se ne da krajšati).

- V trikotnikih je vsota kotov

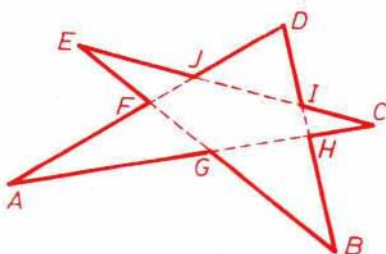
$$ACJ \angle A + \angle C + \angle J = 180^\circ$$

$$BDF \angle B + \angle D + \angle F = 180^\circ$$

$$CEG \angle C + \angle E + \angle G = 180^\circ$$

$$DAH \angle D + \angle A + \angle H = 180^\circ$$

$$EBI \angle E + \angle B + \angle I = 180^\circ$$



Odtod $2(\angle A + \angle B + \angle C + \angle D + \angle E) + \angle F + \angle G + \angle H + \angle I + \angle J = 5 \cdot 180^\circ$. Ker je vsota notranjih kotov v petkotniku enaka $3 \cdot 180^\circ$ (potegnemo diagonali iz enega od oglišč in dobimo tri trikotnike), je vsota kotov z vrhovi v točkah A, B, C, D in E enaka 180° .

- Recimo, da je imel Matjažek n kock. Potem lahko zapišemo $2n = a^2$ in $3n = b^3$, od koder sklepamo, da je a sodo število, b pa deljivo s 3. Potem je a^2 deljiv s 4 in b^3 s 27, pa je n deljiv z 2 in 3 ter ga zapišemo v obliki $n = 2^p 3^q r$ (r ni deljiv ne z 2 ne s 3). Iz $2n = 2^{p+1} 3^q r = a^2$ vidimo, da sta $p+1$ in q sodi števili, iz $3n = 2^p 3^{q+1} r = b^3$ pa, da sta p in $q+1$ deljivi s 3. Preostane nam, da izberemo najmanjšo mogočo rešitev $n = 2^3 3^2 = 72$.

Drugi letnik

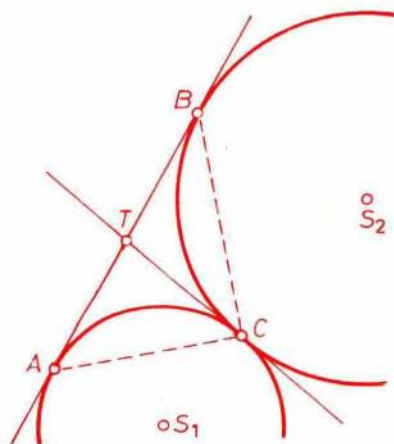
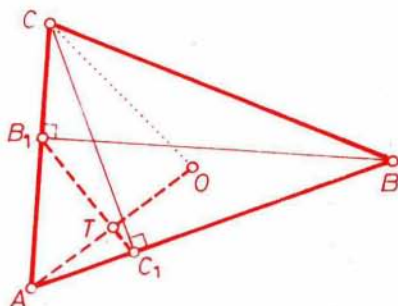
1. Označimo: $A = a/\sqrt{b} - \sqrt{a}$ in $B = \sqrt{b} - b/\sqrt{a}$. Potem je

$$\begin{aligned} A - B &= \frac{a\sqrt{a} - a\sqrt{b} - b\sqrt{a} + b\sqrt{b}}{\sqrt{ab}} = \frac{\sqrt{a}(a-b) - \sqrt{b}(a-b)}{\sqrt{ab}} \\ &= \frac{(a-b)(\sqrt{a} - \sqrt{b})}{\sqrt{ab}} = \frac{(\sqrt{a} + \sqrt{b})(\sqrt{a} - \sqrt{b})^2}{\sqrt{ab}} > 0 \end{aligned}$$

zato je $a/\sqrt{b} - \sqrt{a}$ več kot $\sqrt{b} - b/\sqrt{a}$.

2. Najprej ugotovimo, da sta si trikotnika ABB_1 in ACC_1 podobna (isti kot pri A in oba pravokotna), zato $AB_1/AC_1 = AB/AC$, od tod pa sklepamo, da sta si podobna tudi trikotnika ABC in AB_1C_1 . Trikotnik CAO je enakokrak (O središče očrtega kroga), zato je kot $\angle B_1AO = (\pi - \angle AOC)/2$. Ker je $\angle ABC$ obodni kot nad istim lokom kot središčni $\angle AOC$, je $\angle B_1AO = (\pi - 2 \cdot \angle ABC)/2 = \pi/2 - \angle ABC$, zaradi podobnosti trikotnikov ABC in AB_1C_1 pa je $\angle B_1AO = \pi/2 - \angle AB_1C_1$ oziroma $\angle B_1AO + \angle AB_1C_1 = \pi/2$, kar ravno pomeni, da je trikotnik AB_1T pravokoten s pravim kotom pri T .

3. Poleg skupne tangente skozi A in B potegnimo še skupno tangento skozi C , s T pa označimo točko, kjer se sekata. Zaradi enakosti tangentskih odsekov velja $AT = TC = BT$. Točke A, B in C ležijo torej na krožnici s središčem T , obodni kot $\angle ACB$ je pravi.



4. Označimo z o število zmag in z $\bar{o}$ število porazov ekipe iz Osme dežele na domačem terenu ter analogno še d in $\bar{d}$ za ekipo iz Devete dežele.
- Predpostavimo, da je bilo doslej 5 tekem odigranih v Osmi deželi. Iz podatkov v nalogi je $o + \bar{o} = 5$ in $\bar{o} + \bar{d} = 5$, iz tega pa $\bar{d} = o$. Če to upoštevamo v enačbi $o + \bar{d} = 7$, dobimo $2o = 7$, kar ni mogoče (o , $\bar{o}$, d in $\bar{d}$ so namreč cela števila).
 - Ostane nam možnost, da je bilo doslej 6 tekem odigranih v Osmi deželi. Sedaj dobimo: $o + \bar{o} = 6$, $o + \bar{d} = 7$, $d + \bar{o} = 4$ in $\bar{o} + \bar{d} = 5$. Ta sistem ni protisloven, saj da $o = 4$, $\bar{o} = 2$, $d = 2$ in $\bar{d} = 3$. Dvanajsta tekma bo torej v Deveti deželi.

Tretji letnik

1. Dano enačbo preuredimo v

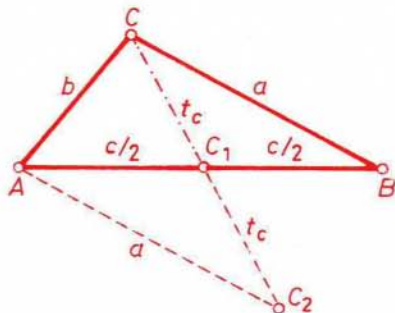
$$\frac{1}{\log_x 2} + \frac{1}{2 \log_x 2} + \cdots + \frac{1}{(n-1) \log_x 2} = \frac{n-1}{n} \left(\frac{1}{\log_x 2} \right)^2$$

nato $\frac{1}{1 \cdot 2} + \frac{1}{2 \cdot 3} + \cdots + \frac{1}{(n-1) \cdot n} = \frac{n-1}{n}$

in končno $\frac{1}{1} - \frac{1}{2} + \frac{1}{2} - \frac{1}{3} + \cdots + \frac{1}{n-1} - \frac{1}{n} = \frac{n-1}{n}$

Slednje očitno drži (na levi strani zadnje enakosti ostaneta le prvi in zadnji člen).

2. Iz $b < t_c + c/2$ in $a < t_c + c/2$ (trikotnika AC_1C in C_1BC) sledi leva neenačba, iz $2t_c < a + b$ (trikotnik AC_2C) pa desna. Drugi del naloge je posledica prvega: iz $(a + b - c)/2 + (b + c - a)/2 + (c + a - b)/2 < t_c + t_a + t_b < (a + b)/2 + (b + c)/2 + (c + a)/2$ namreč dobimo $(a + b + c)/2 < t_a + t_b + t_c < a + b + c$.



3. Najprej je $\tan \alpha = h/a$, $\tan \beta = h/b$ in $\tan \gamma = h/c$. Uporabimo adicijski izrek za funkcijo tangens, pa dobimo $\tan(\alpha + \beta + \gamma) = (\tan \alpha + \tan \beta + \tan \gamma - \tan \alpha \tan \beta \tan \gamma) / (1 - \tan \alpha \tan \beta - \tan \beta \tan \gamma - \tan \alpha \tan \gamma) = h(h^2 - ab - bc - ca) / (h^2(a + b + c) - abc)$. Pri možnosti a) dobimo $h^2(a + b + c) - abc = 0$ oziroma $h = \sqrt{abc / (a + b + c)}$ pri možnosti b) pa $h = 0$ ni smiselna rešitev, pač pa $h = \sqrt{ab + bc + ca}$.
4. Recimo, da bi tak polinom obstajal. Če $p(\cos x) = \sin x$ kvadriramo, dobimo $p^2(\cos x) = \sin^2 x = 1 - \cos^2 x$. Označimo $\cos x = t$, pa imamo $p^2(t) = 1 - t^2$, od koder sklepamo $p(t) = at + b$. Potem iz $a^2 t^2 + 2abt + b^2 = 1 - t^2$ sledi $a^2 = -1$, $2ab = 0$, $b^2 = 1$, kar ni mogoče. Tak polinom torej ne obstaja.

Četrty letnik

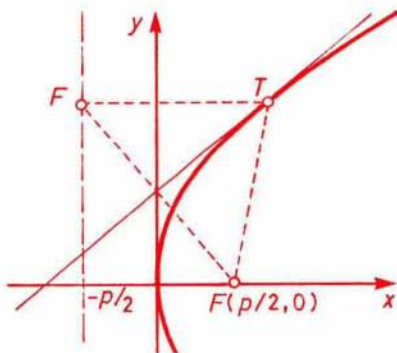
1. Dano enačbo preuredimo v $2x^n - (x + a)^n = 0$. Brez škode privzamemo, da x ni 0, saj $x = 0$ ne reši enačbe. Delimo z x^n pa imamo

$$2 - \left(1 + \frac{a}{x}\right)^n = 0 \quad \text{ali} \quad \left(1 + \frac{a}{x}\right)^n = 2$$

Če je n lih, imamo $1 + a/x = \sqrt[n]{2}$ in rešitev $x = a / (\sqrt[n]{2} - 1)$. Če je n sod pa dve rešitvi: pred $\sqrt[n]{2}$ lahko postavimo oba predznaka.

2. Zaradi konvergence se omejimo na take x , za katere je $|\cos x| < 1$. Označimo $L = 1 + \cos^2 x + \cos^4 x + \dots = 1 / (1 - \cos^2 x)$ in $S = (\cos x)(1 + \cos^2 x + \cos^4 x + \dots) = (\cos x) / (1 - \cos^2 x)$. Nato $L - S = (1 - \cos x) / (1 - \cos^2 x) = 1 / (1 + \cos x) = 2/3$ in $1 + \cos x = 3/2$, od tod pa $x_n = \pi/3 + 2n\pi$ ter $x_m = 5\pi/3 + 2m\pi$.

3. Postavimo tangento skozi poljubno točko T na paraboli. Po definiciji je parabola množica točk, ki so enako oddaljene od premice (vodnica $x = -p/2$) in točke (gorišče $F(p/2, 0)$). Pokažimo, da je postavljena tangenta na parabolo $y^2 = 2px$ nosilka višine na osnovnico enakokrakega trikotnika $F_S FT$.



Naj ima točka T koordinati (x_0, y_0) oziroma $T(y_0^2/2p, y_0)$. Enačba tangente je $y - y_0 = y'(x_0)(x - x_0)$ ali $y = px/y_0 + y_0/2$. To že pove, da seka osnovnico enakokrakega trikotnika na polovici (osnovnica trikotnika, tangenta na parabolo in ordinatna os se sekajo v isti točki). točka F_S je zrcalna slika gorišča.

4. Označimo $q(x) = (x - 1)(x - 2) \dots (x - 1989)$. Odvajajmo $p(x) = x \cdot q(x)$: $p'(x) = q(x) + x \cdot q'(x)$. Postavimo $x = 0$, pa imamo $p'(0) = q(0) = (-1)(-2) \dots (-1989) = -(1989!)$.

Darjo Felda

PRESEK

list za mlade matematike, fizike, astronome in računalnikarje
17.letnik, šolsko leto 1989/90, številka 4, strani 193-256

UREDNIŠKI ODBOR: Vladimir Batagelj, Tanja Bečan (jezikovni pregled), Dušica Boben (pisma bralcev, stavljenje teksta), Vilko Domajnko, Darjo Felda (tekmovanja), Bojan Golli, Marjan Hribar, Sandi Klavžar (računalništvo), Damjan Kobal, Jože Kotnik, Edvard Kramar (Presekova knjižnica), Peter Križan, Boris Lavrič (matematika, odgovorni urednik), Matija Lokar, Bojan Mohar (galvni urednik), Franci Oblak, Peter Petek, Pavla Ranzinger (astronomija), Marjan Smerke (svetovalec za fotografijo), Miha Štalec (risbe), Ciril Velkovich (urednik, nove knjige, novice), Marija Vencelj.

Dopise pošiljajte in list naročajte na naslov: Društvo matematikov, fizikov in astronomov SR Slovenije - Podružnica Ljubljana - Komisija za tisk, Presek, Jadranska c. 19, 61111 Ljubljana, p.p. 64, tel (061) 2665-061/53, št. žiro računa 50101-678-47233. Naročnina za šolsko leto 1989/90 vplačana do izida pete številke, je za posamezne naročnike 50.-din, za skupinska naročila šol 40.- din, posamezna številka 10.- din (8.- din).

List sofinancirata Izobraževalna in Raziskovalna skupnost Slovenije

Ofset tisk Časopisno in grafično podjetje DELO, Ljubljana

© 1990 Društvo matematikov, fizikov in astronomov SRS - 994

ISSN 0351-6652

DELJIVOST – Rešitev s str. 223

Za vsak lih $n \in \mathbb{N}$ vsota $a + b$ ($a, b \in \mathbb{N}$) deli $a^n + b^n$, zato je:

$$2^{195} + 3^{195} = (2^3)^{65} + (3^3)^{65} \text{ deljivo z } 2^3 + 3^3 = 35 = 5 \cdot 7$$

$$2^{195} + 3^{195} = (2^5)^{39} + (3^5)^{39} \text{ deljivo z } 2^5 + 3^5 = 275 = 11 \cdot 25$$

Izračunajmo še ostanek pri deljenju danega števila s 13. Potenca 2^6 da pri deljenju s 13 ostanek 12, zato 2^{12} da pri enakem deljenju ostanek 1. Odtod sledi, da je ostanek pri deljenju števila $2^{195} = 2^{192} \cdot 2^3 = (2^{12})^{16} \cdot 8$ s 13 enak 8. Podobno dobimo, da 3^3 in zato tudi $3^{195} = (3^3)^{65}$ da pri deljenju s 13 ostanek 1. Število $2^{195} + 3^{195}$ torej pri deljenju s 13 da ostanek 9.

Dragoljub M. Milošević
prev. Boris Lavrič

ZVEZDA SE DOPOLNI – Rešitev s str. 141

Nalogo lahko rešimo na več načinov. Objavljamo eno od krajših rešitev.

Kot $\sphericalangle ESF$ je petina polnega kota, kot $\sphericalangle ECF$ pa je obodni kot nad njim, torej $\sphericalangle ECF = 36^\circ$. Označimo $\alpha = \sphericalangle DCB = 18^\circ$, $x = \overline{DB}$, $y = \overline{SD}$, $r = \overline{SC}$. Na risbi preberemo

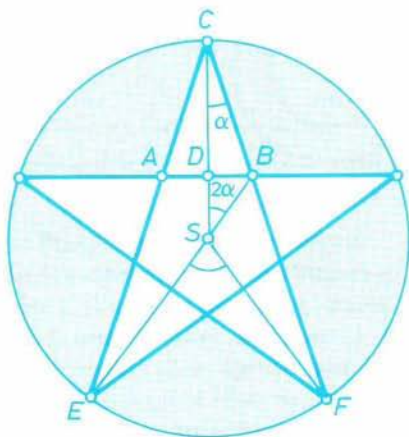
$$x = (r - y) \cdot \operatorname{tg} 18^\circ = y \cdot \operatorname{tg} 36^\circ$$

kar nam da rešitev

$$d = \frac{1}{5} \cdot \frac{\pi r^2}{\pi r^2} - p = 0,1285$$

torej nekoliko manj kakor 13 %.

Vilko Domajnko



VSI KROGI SO ENAKI, KAJNE?

Galileo Galilei (1564 - 1642), pomemben italijanski fizik, astronom in matematik omenja v svojem delu *Discorsi* (1632) tudi naslednji problem, sicer poznan tudi pod imenom *Aristotelovo kolo*:

Vzemimo dva različno velika in toga spojena koncentrična kroga. Večjega zakotalimo po ravni podlagi za natanko en obrat. Daljica med njegovo začetno stično točko *A* s podlago in med končno stično točko *B* po zavrtljaju meri seveda natanko toliko, kolikor znaša obseg večjega kroga.

Naslovna stran ene izmed zgodnejših izdaj Galilejevega dela *Discorsi*.



Gibanju večjega kroga ubogljivo sledi tudi manjši krog. Tako se točka *C* v začetni poziciji po polnem zavrtljaju večjega kroga premakne v točko *D*. In krožnica manjšega kroga je s tem očitno po dolžini enaka dolžini daljice *CD*. In ker je ta, kakor je lepo videti na risbi, enaka dolžini daljice *AB*, sta enaka tudi obsega obeh krogov!

In če so večji krogi enaki manjšim, so seveda sploh vsi krogi na tem svetu enaki med seboj.

A izkustvo nam tukaj le ne da miru. Tiho protestira – nekje v tem razmisleku mora čepeti prav huda in zlobna napaka. Ali jo znate poiskati?

Vilko Domajnko