

PRESEK 3

YLTSSN 0351-6652



VSEBINA

MATEMATIKA	Dvajset tisoč decimalk števila II (Samo Stanič)	129
	Trisektor (Branislav Čabrić, prev. in pril. Marija Vencelj)	132
	Še o šahovskem kralju (Marko Razpet)	134
	Alikvotna zaporedja (Jože Grasselli)	138
	Arhimedova spirala, 1. del (Vilko Domajnko)	142
	Abrakadabra ali štetje najkrajših poti v mreži (Marija Vencelj)	148
	Hoja po labirintu (Marija Vencelj)	154
RAZVEDRILO	Zvezda se dopolni (Vilko Domajnko)	141
	Strip (Vilko Domajnko)	152
	Kaj početi, če dežuje — Polži in žabe (Matija Lokar)	159
	Slikovna križanka — Knjižnica Sigma — Fizika (Marko Bokalič)	160
	Presekova nadloga — Vozli (Vilko Domajnko)	162
	Pisma bralcev (Damjan Kobal)	171
	Številke in števila (Marija Vencelj)	173
	Beg iz labirinta (Sandi Klavžar)	176
	Naloge o deljivosti števil (Dragoljub M. Milošević, prev. Peter Petek)	189
	Slikovna križanka — Presekova knjižnica (Marko Bokalič)	IV
FIZIKA	Tokovni top (Janez Strnad)	168
TEKMOVANJA	Vzorec iz Moskve (Boris Lavrič)	172
	25. republiško tekmovanje osnovnošolcev iz matematike (Aleksander Potočnik)	174
RAČUNALNIŠTVO	Nevronske mreže, 1. del (Veselko Gustin)	177
	Iščemo ničlo (Matija Lokar)	182
REŠITVE NALOG	5. šolsko tekmovanje iz matematike za srednješolce — Rešitve nalog s str. 122 (Darjo Felda)	190
NOVE KNJIGE	Zgodovina znanosti v Knjižnici Sigma (Ciril Velkovrh)	147
NA OVITKU	N. Taylor, <i>Vozel iz zidakov</i> , 1978	I

3.141592653589793238462643383279502884197169
39937510582097494459230781640628620889986280
34825342117067982148086513282306647093844609
55058223172535940812848111745502841027019385
21105559644622948954930381964428810975665933
44612847564823378678311652712019091456485669
23460348610454326648213393607260249141273724
58700660631558881748815209209628292540917153
64367892590360011330530548820466521384146951
94151160094330572703657595919530921861173819
32611793105118548074462379962749567351885752
77248912279381830119491298336733624406566430
86021394946395224737190702179860943702277053
92171762931767523846748184676694051320005681
27145263560827785771342757789600917363717872
14684409012249534301465495853710507922796892
58923542019956112129021996086403441815981362
97747713099605187072113499999983729780499510
59731732816096318859502445945534690830264252
23082533446850352619311881710100031378387528
86587533200838142061717766914730359825349042
87554687311595628638823537875937519577818577
80553217122680661300192787661119590921642019
89380952572010654858632788659361533818277968
23030195203530185296899577362259941389124972
17752834791315155748572424541506995950829533
11686172785588907509838175463746493931925506
04009277016711390098488240012858361603563707
66010471018194295559619894676783744944825537
97747268471040475344646208046684259069491293
31367702898915210475216205696602405803815019
35112533824330035587640247496473263914199272
60426992279678235478163600934172164121992458
63150030286182974555706749838505494588586926
99569092721079750930295532116534498720275559
60236480665499119881834797753566369807426542
52786255181841757467289097777279380000816470
60016145249192173217214772350141441973568548
16136115735255213347574184944684385233239073

DVAJSET TISOČ DECIMALK ŠTEVILA π

Krog je ena najpogostejših geometrijskih oblik v naravi in že stari Egipčani so opazili, da obstaja med polmerom in površino kroga povezava. Antični misleci so pokazali, da je ploščina sorazmerna s kvadratom polmera, sorazmernostni koeficient pa danes poznamo kot π . Določanja te konstante se je prvi sistematično lotil Arhimed (225 pr.n.št.). Z izračunom ploščine krogu vrtanega in očrtanega 96 - kotnika je določil zgornjo in spodnjo mejo intervala, na katerem leži π . Njegova metoda je ostala v uporabi naslednjih 1800 let, zgornja meja $22/7$ pa je še danes uporabljan približek. Največjo natančnost je z njo dosegel Ludolph Van Ceulen, ki je

leta 1610 z uporabo 2^{62} - kotnikov uspel izračunati π na 35 mest natančno; nekateri viri navajajo, da je po tem zaradi izčrpanosti umrl. Odkritje Jamesa Gregoryja leta 1671 je omogočilo mnogo večjo natančnost. Skoraj vsi postopki za računanje π do leta 1983 temeljijo na njegovi potenčni vrsti za arkus tangens (inverzna funkcija tangensu):

$$\operatorname{arctg} x = x - \frac{x^3}{3} + \frac{x^5}{5} - \frac{x^7}{7} + \dots \quad (1)$$

Za vsak x se lahko z izračunom ustrezno mnogo členov vrste dobimo arkus tangens x na željeno število decimalk natančno. Naš cilj je izračunati π , torej bomo izbrali tak x , katerega arkus tangens bo mnogokratnik π .

Poznana je zveza $\operatorname{arctg} 1 = \frac{\pi}{4}$; torej lahko zapišemo:

$$\frac{\pi}{4} = 1 - \frac{1}{3} + \frac{1}{5} - \frac{1}{7} + \dots \quad \text{Leibnizova formula} \quad (2)$$

Težava je v tem, da moramo pri uporabi vrste (2) izračunati izredno veliko členov za vsako naslednje decimalno mesto: vrsta konvergira zelo počasi. Z uporabo raznih matematičnih trikov so matematiki za računanje π izpeljali formule, ki vsebujejo vsote in razlike arkus tangensov števil dosti manjših od 1. Tako vrste za vsak posamezen arkus tangens konvergirajo dosti hitreje in enako natančnost dosežemo z izračunom bistveno manj členov. Čim hitreje konvergira vrsta, tem hitrejši bo tudi izračun. Nekatere izmed bolj znanih formul so:

$$\frac{\pi}{4} = 5 \operatorname{arctg} \frac{1}{7} + 2 \operatorname{arctg} \frac{3}{79} \quad (3)$$

po kateri je Jurij Vega leta 1794 izračunal π na 126 mest natančno;

$$\frac{\pi}{4} = 4 \operatorname{arctg} \frac{1}{5} - \operatorname{arctg} \frac{1}{239} \quad \text{John Machin l.1706} \quad (4)$$

$$\frac{\pi}{4} = 8 \operatorname{arctg} \frac{1}{10} - \operatorname{arctg} \frac{1}{239} - 4 \operatorname{arctg} \frac{1}{515} \quad \text{Klingstierna} \quad (5)$$

$$\frac{\pi}{4} = 12 \operatorname{arctg} \frac{1}{18} + 8 \operatorname{arctg} \frac{1}{57} - 5 \operatorname{arctg} \frac{1}{239} \quad \text{Gauss} \quad (6)$$

Hitrost izračuna najlepše prikaže natančnost rezultata glede na število izračunanih členov:

n	Leibnizova formula	Machinova formula
1	4.00000	3.1832635
2	2.66666	3.1405970
3	3.46666	3.1416210
4	2.89523	3.1415917
5	3.33968	3.1415926
10	3.04138	
100	3.13593	

Po teh formulah z osebnim računalnikom v relativno kratkem času dobimo približek π natančen na nekaj 1000 decimalk. Objavljenih 20.000 mest je rezultat enournega računanja na računalniku VAX 8650. Rezultat je bil preverjen tako, da je bil izračunan po treh različnih formulah (4, 5 in 6). Rezultati se ujemajo v 19.995 mestih. Na žalost se kmalu pokažejo tudi omejitve te metode. Čas računanja se veča s kvadratom decimalnih mest, tako da je metoda uporabna le do nekaj 100.000 mest, potem pa se čas računanja poveča preko vsake smiselne meje. Šele po letu 1983 so odkrili nove postopke, ki pa so dosti bolj zapleteni. Z njihovo pomočjo je letos profesor Yasuma Kaneda s Tokijske univerze na superračunalniku NEC SX - 2 izračunal 536.870.912 (2^{29}) decimalnih mest π , kar je najnovejši dosežek na tem področju.

Literatura:

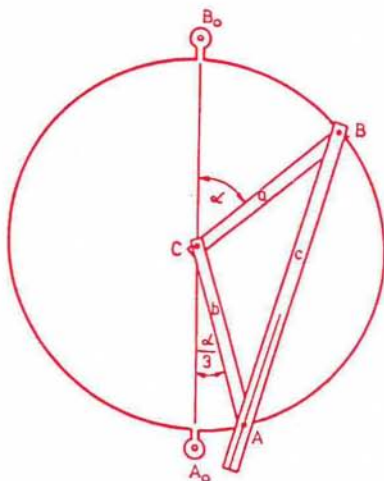
- [1] Ivan Vidav, *Višja matematika I*, DMFA SRS, Ljubljana (1987) 399
- [2] Tomaž Pisanski, *Razmerje med polmerom in obsegom kroga*, Obzornik za matematiko in fiziko 31 (1984) 44 - 48
- [3] Jurg Nievergelt, *Computer approaches to mathematical problems*, Prentice Hall, Englewood Cliffs (1974) 198 - 202

Samo Stanič

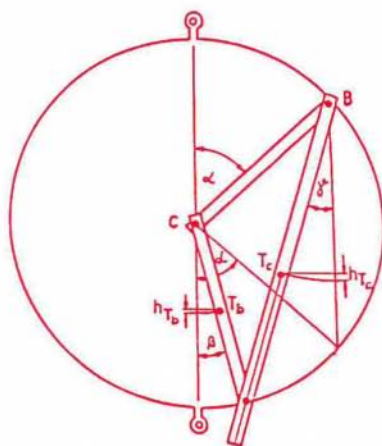
TRISEKTOR

Pod običajno uporabo ravnila in šestila razumemo v matematiki risanje premic skozi dve točki, risanje krožnic in prenašanje razdalj. Znano je, da s tako uporabo šestila in ravnila ni mogoče razdeliti poljubnega danega kota na tri enake dele [1]. Seveda trditev ne velja za nekatere posebne primere, kot so npr. pravi kot, kot 45° , itd ... Tako se pojavi vprašanje, ali je moč v ta namen konstruirati kakšen drug primeren inštrument. Znanih je več takih priprav; imenujemo jih trisektorji [1], [2].

Na sliki 1 je narisana originalen trisektor, ki sem ga napravil sam. Sestavlja ga krožna plošča s polmerom R , ki jo obesimo na zid, tako da je premi-



Slika 1



Slika 2

ca A_0B_0 navpična. Ročica a je vrtljiva okrog točke C , v točki B pa jo je moč pritrditi, tako da oklepa dani kot α z navpičnico A_0B_0 . Ročica b dolžine R je brez trenja vrtljiva okrog točke C , ročica c dolžine $2R$ pa je vrtljiva okrog točke B prav tako brez trenja. Ročici b in c imata enaki masi, recimo m . Ker sta različno dolgi, lahko to dosežemo pri istem materialu npr. z različnimi debelinama. Ročica b ima na oddaljenosti R od točke C pritrjeno še drsno vodilo A , ki lahko brez trenja drsi v vzdolžnem prerezu ročice c .

Če ročico a pritrdimo pod kotom α glede na navpičnico A_0B_0 kot na sliki 1 in pustimo, da drsno vodilo A drsi po prerezu ročice c , bo sistem ročic b in c zavzel ravnotežni položaj, to je položaj minimalne potencialne energije.

Trditev. Če kot α ni večji od pravega kota, potem oklepa ročica b z vertikalno A_0B_0 v ravnotežnem položaju kot $\alpha/3$ (slika 1).

Dokaz. Težišče T_b ročice b je za $R/2$ oddaljeno od točke C , težišče T_c ročice c pa za R od točke B . Naj bosta h_{T_b} in h_{T_c} vertikalni komponenti odmikov težišč T_b in T_c pri odmiku ročice b za kot β in ročice c za kot γ od njunih vertikalnih leg (slika 2). Potencialna energija sistema ročic b in c je zaradi zemeljske težnosti glede na položaj, v katerem obe ročici visita navpično, tedaj enaka

$$U_{bc} = mgh_{T_b} + mgh_{T_c} \quad (1)$$

kjer je

$$\begin{aligned} h_{T_b} &= \frac{R}{2}(1 - \cos \beta) \\ h_{T_c} &= R(1 - \cos \gamma) \end{aligned} \quad (2)$$

Če upoštevamo, da je obodni kot enak polovici središčnega kota nad istim lokom, lahko s slike 2 razberemo, da je

$$\gamma = \frac{\alpha - \beta}{2} \quad (3)$$

Vstavimo (2) in (3) v (1) in dobimo

$$U_{bc} = mg \frac{R}{2}(1 - \cos \beta) + mgR(1 - \cos \frac{\alpha - \beta}{2}) \quad (4)$$

kjer je g zemeljski pospešek in α kot, ki ga želimo razdeliti na tri enake dele.

Ravnotežni položaj sistema ročic b in c , to je minimum potencialne energije U_{bc} , dobimo pri pogoju $dU_{bc}/d\beta = 0$, kar da

$$\sin \beta - \sin \frac{\alpha - \beta}{2} = 0 \quad (5)$$

Fizikalno je očitno, da bosta za kote α med 0° in 90° kota β in $\gamma = (\alpha - \beta)/2$ ostra kota. Za take kote pa iz enačbe (5) sledi $\beta = \alpha/3$, kar pomeni, da ročica b in navpičnica A_0B_0 v ravnotežnem položaju res oklepata tretjino danega kota.

Branislav Čabrić

prev. in prir. Marija Vencelj

Literatura

- [1] O. V. Maturnov i dr., *Rečnik matematičkih termina sa tumačenjima*, Izd. Naučna knjiga, Beograd 1969, str. 477.
- [2] E. Callandreu, *Célébrès Problèmes Mathématiques*, Izd. Albin Michel, Paris 1949, str. 299.

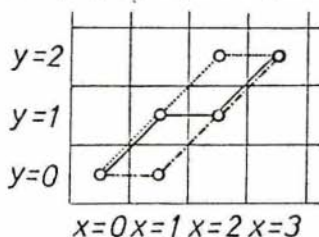
ŠE O ŠAHOVSKEM KRALJU

O šahovskem kralju, ki pa se sme sprehajati po polovični šahovnici le v treh predpisanih smereh, smo v Preseku že precej izvedeli. Odgovorili smo na vprašanje, na koliko različnih načinov lahko pride na poljubno polje z začetnega polja. Ta števila so nam pričarala lepe vzorce, če smo polja barvali z barvami, ki so jih narekovali ostanki pri deljenju z danim številom p . Tudi tokrat bomo prehodili približno tako pot, le da kralju šahovnice ne bomo odvezemali.

Mislimo si torej šahovskega kralja na poljubno veliki šahovnici. Polja zaznamujemo tako kot doslej z $0, 1, 2, \dots$ v vodoravni in navpični smeri. Pozicijo na šahovnici bomo seveda podajali z urejenim parom (x, y) nenegativnih celih števil. Kralju pa dovolimo le poteze

$$(x, y) \rightarrow (x+1, y), \quad (x, y) \rightarrow (x, y+1), \quad (x, y) \rightarrow (x+1, y+1)$$

Začetno polje, s katerega gre kralj po šahovnici, bo vselej polje $(0, 0)$. Označimo z $M(x, y, k)$ število poti, po katerih lahko pride kralj iz izhodišča na polje (x, y) po k korakih. Pri tem je k tudi nenegativno celo število. Zaradi lažjega računanja bomo definirali: $M(x, y, k) = 0$, če je vsaj eno od števil x, y manjše kot 0 in $M(0, 0, 0) = 1$. Vse tabele in slike so urejene tako, kot smo označili šahovnico: od leve proti desni in od spodaj navzgor. Števila $M(x, y, k)$ imajo očitno lastnost simetričnosti za x in y : $M(x, y, k) = M(y, x, k)$ za vsa nenegativna cela števila x, y, k . Oglejmo si vse tiste poti, po katerih prispe kralj s polja $(0, 0)$ na polje $(3, 2)$ po treh potezih. Te so:



Slika 1

Prerejena tabela števil $M(x, y, 3)$ je takale:

1	3	3	1
0	3	6	3
0	0	3	3
0	0	0	1

Izven te kvadratne tabele števil so same ničle, ki pa jih ni smiselno pisati in z njimi tratiti prostora. Bralec sam bo po naslednjem premisleku zlahka sestavil take tabele tudi za drugačno število korakov k . Obstaja namreč zelo preprosta povezava med števili $M(x, y, k)$. Po k korakih pride kralj na polje (x, y) tako, da pride po $k-1$ korakih na polja $(x-1, y)$ ali $(x, y-1)$ ali $(x-1, y-1)$, s teh pa na končno polje po enem samcatem koraku. Z enačbami to takole zapišemo:

$$M(x, y, k) = M(x-1, y, k-1) + M(x, y-1, k-1) + M(x-1, y-1, k-1) \quad (1)$$

Ni težko videti, da je $M(x, 0, k) = 1$, če je $x = k$ in 0 sicer. Na polje $(x, 0)$ lahko pride kralj le vodoravno, torej na en sam način, toda le, če je $x = k$, sicer pa tega polja ne doseže. Če je polje (x, y) predaletč, ga po premajhnem številu korakov k kralj spet ne doseže. Če je število k preveliko, pa na polja, ki so preblizu ne more. Zato so v naši tabeli nekatera števila, ki tvorijo zase trikotno shemo tik ob izhodišču, enaka nič. Hitro lahko ugotovimo naslednje:

$M(x, y, k) = 0$, če je $x > k$ ali $y > k$ ali $x + y < k$.

V nadaljevanju bomo označevali z $m(x, y)$ manjšega, z $M(x, y)$ pa večjega od števil x, y . Potemtakem velja:

$$M(x, y) \leq k \leq x + y \Leftrightarrow M(x, y, k) \neq 0 \quad (2)$$

Na prvi pogled ugotovimo, da ležijo na diagonali in dveh stranicah prejšnje tabele ravno binomski koeficienti $\binom{n}{i}$. Ponovimo:

$$\binom{n}{k} = \frac{n!}{k!(n-k)!}, \quad \binom{n}{k} = \binom{n}{n-k}$$

$$\binom{n}{k-1} + \binom{n}{k} = \binom{n+1}{k} \quad (\text{Pascalova identiteta})$$

O binomskih koeficientih je bilo v Preseku že veliko napisanega, zato o njih tu ne bi razpravljali.

Z relacijo (1) so števila $M(x, y, k)$ natanko določena. Dokažimo:

$$M(x, y, k) = \binom{k}{y} \binom{y}{k-x} = \binom{k}{x} \binom{x}{k-y} \quad (3)$$

Na prvi pogled izraz za $M(x, y, k)$ ni simetričen v številih x in y . Toda

$$\begin{aligned} \binom{k}{y} \binom{y}{k-x} &= \frac{k!y!}{y!(k-y)!(k-x)!(y-k+x)!} = \frac{k!}{(k-x)!(k-y)!(x+y-k)!} = \\ &= \frac{k!x!}{x!(k-x)!(k-y)!(x-k+y)!} = \binom{k}{x} \binom{x}{k-y} \end{aligned}$$

S Pascalovo identiteto pa se prepričamo, da zadoščajo števila $M(x, y, k)$ relaciji (1):

$$\begin{aligned} M(x, y, k) - M(x-1, y, k-1) - M(x, y-1, k-1) - M(x-1, y-1, k-1) &= \\ = \binom{k}{y} \binom{y}{k-x} - \binom{k-1}{y} \binom{y}{k-x} - \binom{k-1}{y-1} \binom{y-1}{k-1-x} - \binom{k-1}{y-1} \binom{y-1}{k-x} &= \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 &= \binom{y}{k-x} \left[\binom{k}{y} - \binom{k-1}{y} \right] - \binom{k-1}{y-1} \left[\binom{y-1}{k-x-1} + \binom{y-1}{k-x} \right] = \\
 &= \binom{y}{k-x} \binom{k-1}{y-1} - \binom{k-1}{y-1} \binom{y}{k-x} = 0
 \end{aligned}$$

Bralec, ki je že bolj vešč kombinatorike, bo morda preveril (3) s preprostim sklepanjem.

Za $x = 0$ dobimo iz (3): $M(0, y, k) = \binom{k}{y} \binom{y}{k}$. Če je $k < y$, potem je prvi faktor nič, če pa je $k > y$ pa drugi. Če je $k = y$, dobimo $M(0, k, k) = 1$. Torej $M(0, y, k) = 1$, če je $k = y$, in 0 sicer.

Za $k = x$ ali za $k = y$ dobimo čiste binomske koeficiente:

$$M(x, y, x) = \binom{x}{y} \quad \text{in} \quad M(x, y, y) = \binom{y}{x}$$

Tudi za $k = x + y$ dobimo lep rezultat:

$$M(x, y, x + y) = \binom{x+y}{x} = \binom{x+y}{y}$$

Sedaj ni več težko prešteti število vseh poti, ki kralja pri dovoljenih potezah pripeljejo v dano točko (x, y) . To število označimo z $r(x, y)$. Očitno velja zaradi omejitve (2):

$$r(x, y) = \sum_{k=M(x,y)}^{x+y} M(x, y, k) \quad (5)$$

in odtod zaradi (3):

$$r(x, y) = \sum_{k=M(x,y)}^{x+y} \binom{k}{y} \binom{y}{k-x} \quad (6)$$

Števil $r(x, y)$ nam ni treba računati po tej komplicirani formuli, kot nam ni treba računati binomskih koeficientov s fakultetami, saj imamo na razpolago Pascalov trikotnik, kjer shajamo samo s seštevanjem. S podobnim razmislekom kot smo dobili zvezo (1), dobimo relacijo

$$r(x, y) = r(x-1, y) + r(x, y-1) + r(x-1, y-1) \quad (7)$$

Ker je $r(x, y) = r(y, x)$ in $r(x, 0) = r(0, y) = 1$ za $x, y \geq 0$, lahko dobimo poljubno veliko tabelo števil $r(x, y)$:

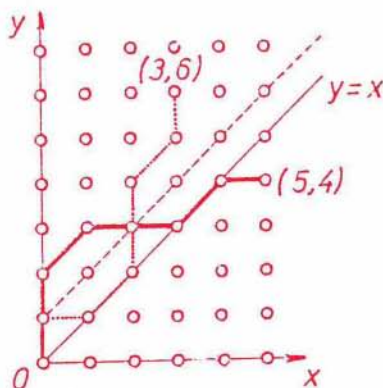
1	7	25	63	129	...
1	5	13	25	41	...
1	3	5	7	9	...
1	1	1	1	1	...

Tabelo začnemo izpolnjevati levo spodaj, vsako naslednje število je vsota treh, recimo $41 = 25 + 7 + 9$, števila 41, 25, 7, 9 tvorijo v tabeli kvadrat števil. Preden preidemo na morda najzanimivejši del tega razglabljanja, še neobvezna naloga za bralce: dokaži, da velja za poljubni nenegativni celi števili x, y identiteta

$$r(x, y) = \sum_{k=0}^{m(x,y)} \binom{x}{k} \binom{x+y-k}{x} = \sum_{k=M(x,y)}^{x+y} \binom{k}{x} \binom{x}{x+y-k}$$

Števila $r(x, y)$ z rastočima x in y hitro naraščajo in vsa so liha. Izberimo si naravno število p večje od 2 in opazujemo tabelo ostankov števil $r(x, y)$ pri deljenju s številom p . Učeno rečeno, študirajmo števila $r(x, y)$ po modulu p , označimo jih z $r(x, y) \pmod{p}$. Za $p = 3$ dobimo tako tabelo, sestavljeno iz števil 0, 1, 2 za $0 \leq x, y \leq 15$ (glej tabelo)

Tabelo dobimo po formuli (7), pri čemer računamo po modulu $p = 3$, se pravi, čim vsota na desni prekorači število p , odštejemo od nje tolikokrat p , da dobimo število med 0 in $p-1$ vključno. V tabeli so zanimive ničle. Te tvorijo pravilno razporejene kvadrate, katerih stranice štejejo 1, 3, 9, ... ničel. Z računalnikom lahko sestavimo zelo obsežne tabele na opisani način. Za $p = 5$ dobimo tako sliko:



1112221110000000
1210002120000000
1020002010000000
1110002220000000
1211211210000000
1022011021022011
1112221111112221
1021021020000000
1111111110000000
1212121212121212
1210002121210002
1020002011020002
1110002221110002
1211211211211211
1021021021021021
1111111111111111

Točka (x, y) je pobarvana temno, če je število $r(x, y)$ deljivo s številom p . Opazimo mali križec v večjem, ta je kasneje zopet v večjem itd. Zaporedje stranic temnih kvadratov raste po zaporedju 1, 5, 25, ...

Slika 2. $p = 5$

Marko Razpet

ALIKVOTNA ZAPOREDJA

Če izberemo naravno število a , lahko z njim kot prvim členom še na razne načine naredimo neskončno zaporedje naravnih števil

$$a_1 = a, a_2, a_3, \dots, a_n, a_{n+1}, \dots \quad (1)$$

Oglejmo si dve pravili, ki povesta, kako iz a pridemo do zaporedja (1).

Pravilo večkratnikov: Iz člena a_n dobimo člen a_{n+1} tako, da členu a_n prištejemo a . Torej za vsak indeks $n \geq 1$ velja

$$a_{n+1} = a_n + a$$

Zato je $a_2 = a_1 + a = a + a = 2a$. Nato $a_3 = a_2 + a = 2a + a = 3a$ itd. Zaporedje (1) je tukaj

$$a, 2a, 3a, \dots, na, (n+1)a, \dots$$

sestavljajo pa ga vsi pozitivni večkratniki števila a . Pravilo večkratnikov je preprosto, saj zaporedje (1) takoj lahko zapišemo. Vidimo tudi, da so členi vsi med sabo različni in presežejo vsako še tako veliko vrednost.

Pravilo deliteljev (aliquotno pravilo): Če je pri indeksu $n \geq 1$ člen $a_n = 1$, je $a_{n+1} = 1$. Če pa je $a_n > 1$, je člen a_{n+1} vsota vseh pozitivnih deliteljev za a_n , ki so manjši od a_n . Ker ima a_n le končno mnogo deliteljev, je a_{n+1} natančno določeno naravno število. Zaporedje (1), ki ga dobimo iz a po pravilu deliteljev, imenujemo **aliquotno** zaporedje števila a .

Napravimo nekaj zgledov.

Zgled 1. Naj bo a praštevilo p . Edina pozitivna delitelja za p sta 1 in p . Po pravilu deliteljev je $a_2 = 1$ in potem $a_n = 1$ za indeks $n \geq 3$. Praštevilo p pripada torej aliquotno zaporedje

$$p, 1, 1, \dots, 1, 1, \dots \quad (2)$$

Vsi členi od drugega naprej so 1. Ker je praštevil neskončno, je neskončno aliquotnih zaporedij oblike (2).

Zgled 2. Naj bo $a = 6$. Števila 1, 2, 3, 6 dajejo vse pozitivne delitelje za 6. Zato je po pravilu deliteljev $a_2 = 1 + 2 + 3 = 6$. Ker je $a_1 = a_2 = 6$, je $a_n = 6$ za vse indekse n . Številu 6 pripadajoče aliquotno zaporedje je

$$6, 6, 6, \dots, 6, 6, \dots$$

Število 6 ima tole lastnost: ko zanj uporabimo pravilo deliteljev, dobimo nazaj število 6. Naravno število c , večje od 1, je **popolno**, če pravilo deliteljev iz c napravi c . Poleg 6 so popolna števila še npr. 28, 496, 8128. Aliquotno zaporedje za popolno število c ima vse člene enake

$$c, c, c, \dots, c, c, \dots \quad (3)$$

Doslej so našli okrog trideset popolnih števil. Ni še znano, ali je popolnih števil le končno ali pa morda neskončno mnogo. Zato tudi ne vemo, koliko je alikvotnih zaporedij oblike (3).

Zgled 3. Naj bo $a = 220$. Iz $220 = 2^2 \cdot 5 \cdot 11$ vidimo, da so 1, 2, 4, 5, 10, 20, 11, 22, 44, 55, 110, 220 vsi pozitivni delitelji za 220. Ko ta števila, razen zadnjega, seštejemo, dobimo $a_2 = 284$. Ker je $284 = 2^2 \cdot 71$, so vsi pozitivni delitelji za 284 zajeti v številih 1, 2, 4, 71, 142, 284. Od tod je po pravilu deliteljev $a_3 = 1 + 2 + 4 + 71 + 142 = 220$. Alikvotno zaporedje za 220 je tako

$$220, 284, 220, 284, \dots, 220, 284, \dots$$

Števili 220 in 284 sestavljata prijateljski par. Naravni števili a, b imenujemo namreč **prijateljski**, če pravilo deliteljev iz a napravi b , iz b pa a . Alikvotno zaporedje za tak prijateljski par je

$$a, b, a, b, \dots, a, b, \dots \quad (4)$$

Odkrili so že več tisoč prijateljskih parov. Ne vemo pa, ali je prijateljskih parov končno ali neskončno mnogo.

Zgled 4. Vzemimo $a = 12$. Določanje členov alikvotnega zaporedja za 12 razberemo iz preglednice

indeks n	člen a_n	pozitivni delitelji za a_n
1	12	<u>1</u> , <u>2</u> , <u>3</u> , <u>4</u> , <u>6</u> , 12
2	16	<u>1</u> , <u>2</u> , <u>4</u> , <u>8</u> , 16
3	15	<u>1</u> , <u>3</u> , <u>5</u> , 15
4	9	<u>1</u> , <u>3</u> , 9
5	4	<u>1</u> , <u>2</u> , 4
6	3	<u>1</u> , 3
7	1	1

Podčrtana so vsakič števila, ki jih je treba sešteti, da iz a_n dobimo a_{n+1} . Ker je $a_7 = 1$, je seveda $a_n = 1$ za $n \geq 7$. Alikvotno zaporedje za 12 je tako

$$12, 16, 15, 9, 4, 3, 1, \dots, 1, 1, \dots \quad (5)$$

Naj bo zgledov dovolj.

Zgoraj smo videli, da v zaporedju večkratnikov takoj poznamo vse člene, ko izberemo začetni člen. Pri alikvotnih zaporedjih ni tako. Res je z izbiro začetnega člena a alikvotno zaporedje za a natančno določeno. Vendar pa v zaporedju posamezen člen poznamo šele, ko ga dejansko izračunamo. To pa

že pri majhnih a ni zmeraj izvedljivo. More se namreč zgoditi tole: ko določamo člene a_2, a_3 in naprej, pridemo do člena a_n , ki je tako velik, da je zanj v razpoložljivem času nemogoče poiskati vse delitelje. V takem primeru člena a_{n+1} ne moremo izračunati in tudi o poznejših členih ničesar ne vemo.

Ali lahko kljub temu o alikvotnem zaporedju kaj splošnega izrečemo? Gotovo je, da pri vsakem a drži ravno ena od obeh možnosti:

1) Obstaja tako naravno število m , da so vsi členi alikvotnega zaporedja za a manjši od m .

2) Za vsako naravno število m so v alikvotnem zaporedju za a členi, ki so večji od m .

Vzemimo, da je izpolnjena možnost 1. Potem je $a_n < m$ za vsak indeks n in členi

$$a_1, a_2, \dots, a_m \quad (6)$$

so neka izmed števil $1, 2, \dots, m-1$. Ker je v (6) členov m in zanje na razpolago kvečjemu $m-1$ vrednosti, morata vsaj dva člena biti enaka. Obstajata torej indeksa j, k , $1 \leq j < k \leq m$, ko je $a_j = a_k$. Naj bosta j, k najmanjša takšna indeksa in naj bo $k-j = t$. Enakost $a_j = a_k$ potem lahko zapišemo $a_j = a_{j+t}$. Če se člena ujemata, se ujemajo tudi njuni delitelji. Po pravilu deliteljev je zato $a_{j+1} = a_{j+t+1}$. Ker je $j+t+1 = j+1+t$, imamo dalje $a_{j+1} = a_{j+1+t}$. Iz te enakosti po istem sklepu izhaja $a_{j+2} = a_{j+2+t}$. Ko tako nadaljujemo, najdemo

$$\begin{aligned} a_j &= a_{j+t} \\ a_{j+1} &= a_{j+1+t} \\ a_{j+2} &= a_{j+2+t} \\ &\dots\dots\dots \\ a_{j+(t-1)} &= a_{j+(t-1)+t} \end{aligned} \quad (7)$$

Enakosti (7) kažejo: skupina t členov

$$a_j, a_{j+1}, \dots, a_{j+(t-1)} \quad (8)$$

se ponovi, ko teče indeks členov od $j+t$ do $j+2t-1$. Iz zadnje enakosti v (7) sledi $a_{j+t} = a_{j+2t}$. Torej smo spet na začetku tabele (7) in členi (8) se še enkrat ponovijo, ko teče indeks od $j+2t$ do $j+3t-1$. To ponavljanje se nadaljuje. Alikvotno zaporedje je torej od člena a_j naprej **periodično**, periodo sestavljajo členi (8), dolžina periode je t .

Alikvotna zaporedja, ki smo jih obravnavali zgoraj med zgledi, so vsa periodična. V (2) in (5) se ponavlja 1, v (3) pa c , dolžina periode je ena. V (4) se

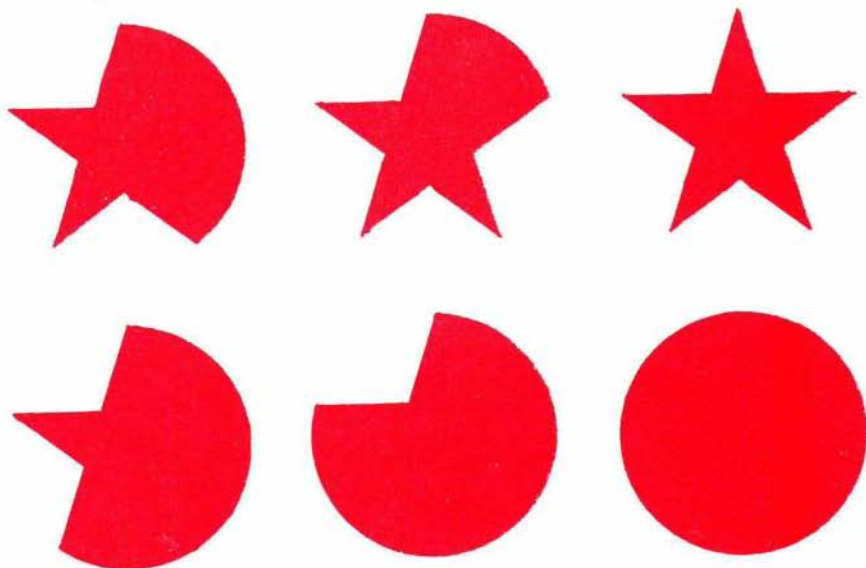
ponavljata a , b , perioda ima dolžino dve. Naj omenimo, da je znanih nekaj alikvotnih zaporedij, ki imajo dolžine period 4, 5 in 28. Na dolžine period, različne od 1, 2, 4, 5, 28, doslej še niso naleteli.

Še nekaj besed o možnosti 2. Matematika E. C. Catalan (1814–1894) in L. E. Dickson (1874–1954) sta menila, da možnost 2 sploh ne more nastopiti. Seveda bi potem zmeraj držala možnost 1 in bi vsako alikvotno zaporedje bilo periodično. Vendar ta domneva doslej ni bila dokazana, pa tudi ne ovržena. Vprašanje, ali obstaja kakšno alikvotno zaporedje, za katero velja možnost 2, je še brez odgovora.

Jože Grasselli

ZVEZDA SE DOPOLNI

Ljubljanski ŠKUC – FORUM (Študentski kulturno umetniški center) ima takle zanimiv grafični emblem:



V njem se petokraka zvezda postopoma dopolnjuje v krog. Izračunaj, kolikšen delež ploščine celotnega kroga znaša ploščina tistega dela kroga, ki na vsakem novem koraku zapolni prostor med krakoma zvezde.

Vilko Domajnko

ARHIMEDOVA SPIRALA, 1. del

Stari Grk Arhimed (287? - 212 pr.n.št.) velja za najpomembnejšega antičnega naravoslovca. Bil pa je tudi izredno plodovit pisec. Napisal je kar okrog petnajst knjig ali daljših razprav s področja matematike in fizike. Večina izmed njegovih del je v takšni ali pa drugačni obliki dostopna še danes, za nekaterimi pa je žal že izgubljena sleherna sled.

Arhimedova knjiga O spiralah je med njegovimi sodobniki menda žela največ slave in občudovanja. Vendar pa naj bi bila to ena izmed najmanj branih Arhimedovih knjig, kajti stopnja zahtevnosti je bila za ogromno večino bralcev le previsoka. Pa čeprav nejasnost v razlagi in zapletenost pri razpostavljanju misli nikdar nista bili "odlitki" Arhimedovega pisanja.

Torej - bodimo "pristni" Arhimedovi občudovalci, spoznajmo ga, do koder ni prezahteven.

Knjiga se začne z Arhimedovim nagovorom Dositeju.

"Arhimedov pozdrav Dositeju"

Že večkrat si me prosil za dokaze izrekov, ki sem jih nekoč poslal Kononu in katerih večji del si si lahko tudi ti ogledal v knjigi, ki ti jo je dal Heraklej. V tej knjigi, ki ti jo pošiljam sedaj, pa so zbrani prav vsi omenjeni izreki, skupaj z dokazi. In naj te nikar ne preseneča, kako da sem potreboval toliko časa, preden sem naposled uspel objaviti tudi te dokaze. Želel sem jih pač najprej dobro preveriti v pogovoru z ljudmi, ki se ukvarjajo z matematiko in ki jim skrbnost pri tem ni v nadlego. Resnično, koliko izrekov, ki so se mi spočetka zdeli celo komajda verjetni, sem uspel izdelati na tak način! Žal pa je Konon umrl prej, preden bi sam izdelal teorijo, ki jo je vzpodbudil. Zagotovo bi že njemu samemu uspelo odkriti in objaviti vse te reči in mislim celo, da bi obogatil geometrijo s še kakšnimi novimi izreki, ki jih ni našel v tej moji knjigi. Kajti njegove sposobnosti v matematiki so bile sijajne, pa tudi pri delu je bil izjemno marljiv. In čeprav je minilo že mnogo let od njegove smrti, mi še zmeraj ni uspelo opaziti, da bi se kdorkoli ukvarjal s problemi, ki nam jih je zapustil. Zatorej ti pošiljam na vpogled svoj prispevek".

Trojica Arhimed, Dositej in Konon zagotovo ni zgolj po naključju prisotna na uvodni strani te znamenite knjige. S Kononom s Samosa se je Arhimed seznanil v Aleksandriji, kjer sta skupaj študirala matematiko. Do konca življenja sta ostala tesna prijatelja, čeprav sta kasneje živela daleč narazen, in drug drugemu sta pomenila veliko oporo pri snovanju svojih teorij v geometriji. Dositej pa je bil Kononov učenec in z njim si je Arhimed dopisoval kasneje, ko je Konon že umrl.

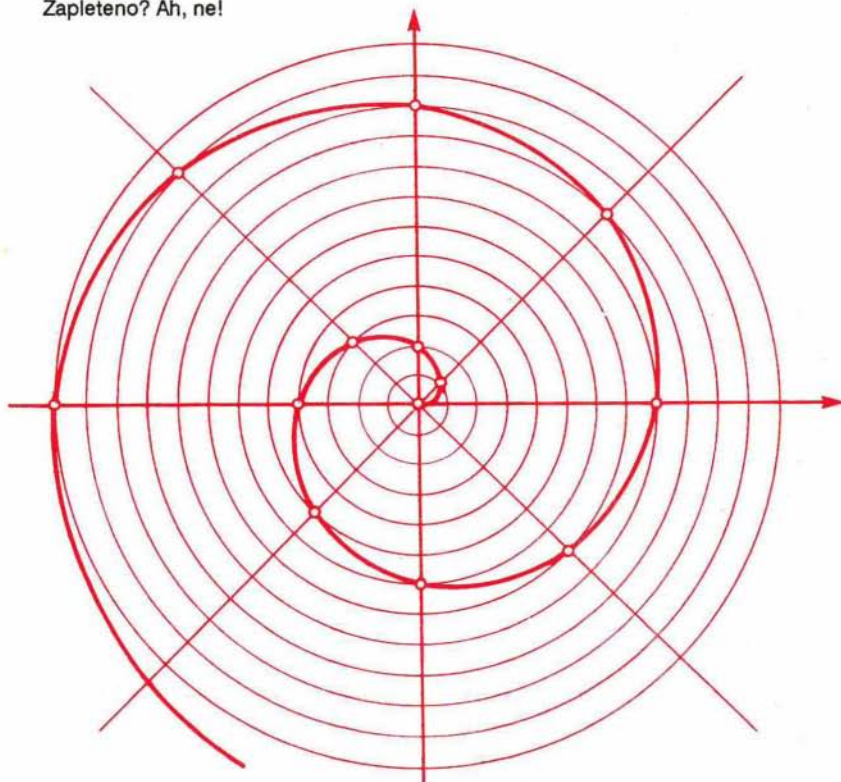
Poglejmo, kako Arhimed kasneje v knjigi definira spiralo: Zamislimo si, da se v ravnini nek poltrak vrti okrog svojega izhodišča, pritrjenega v izbrani točki. Ves čas se naj vrti s konstantno kotno hitrostjo ω . Iz izhodišča pa naj potuje po poltraku točka, tudi ta ves čas s konstantno hitrostjo v v smeri poltraka. Spirala je sled, ki jo zariše ta točka na svoji poti.

Seveda, kasneje se je te krivulje oprijelo ime Arhimedova spirala. Kar pa Arhimedu zagotovo ne bi bilo pogodu, saj je kot njenega odkritelja ves čas vztrajno omenjal prijatelja Konona.

Arhimedovo spiralo konstruiramo tako, da najprej narišemo koncentrične kroge z enakomerno naraščajočimi polmeri, hkrati pa kar na isto risbo tudi mnogokotnike nekega izbranega kota (recimo 45°), ki predstavljajo lego vrtečega se poltraka ob

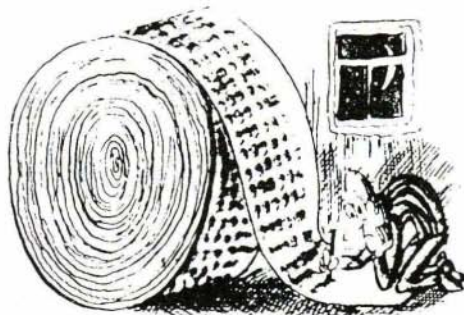
konstantnih časovnih intervalih; nato s pikami označimo presečišča slehernega izmed poltrakov s pripadajočo krožnico. Naposled označene točke le še elegantno spojimo s krivuljo.

Zapleteno? Ah, ne!

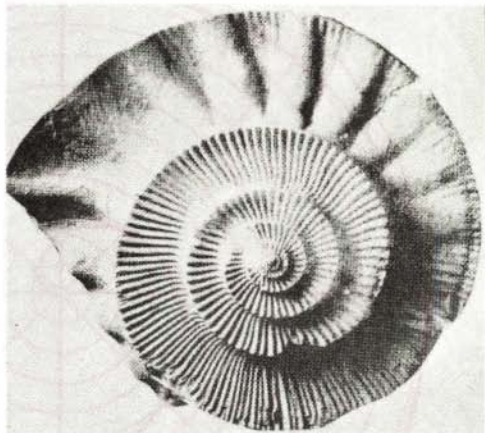


Slika 1

Slika 1 + 1/3. Bralcem seveda toplo priporočamo, naj takšnega modela Arhimedove spirale ne jemljejo niti povsem zares niti ne povsem za šalo.



Ne vem, ali se tudi bralcu zdi ta krivulja zapletena in nenavadna. Sam moram reči, da se mi je v srednješolskih letih izmed vseh krivulj v knjižici z zbranimi grafi elementarnih funkcij zdela prav Arhimedova spirala morda najbolj nenavadna. Tuja in čisto drugačna od vseh, kar smo jih takrat spoznali pri pouku matematike. Neujemljiva, nespoznavna. Morda bi jo imel celo za eno najpopolnejših krivulj, če me ne bi nenehno spominjala na polža in na njegovo hiško. Hm, kako sem se nasmejal kasneje ob spominu na to miselno povezavo, ko sem spoznal, da je polževa hiša pravzaprav mnogo bliže logaritemski kakor pa Arhimedovi spirali.



Slika 2 Nekateri polži imajo narejene svoje hišice v obliki logaritemske spirale. Na sliki je hišica amonita, že davno izumrle živali iz mezozoika.

Da bi tudi vam ta navihana krivulja ne burila preveč domišljije, morda ne bo odveč, če pokažem, da je prav Arhimedova spirala ena izmed najbolj normalnih in običajnih krivulj. Potrebno si jo je ogledati pač tudi z drugega zornega kota.

V definiciji spirale izvemo, da sta kot zasuka poltraka (imenujmo ga ϕ), po katerem potuje točka, in pa oddaljenost te točke (imenujmo jo r) od izhodišča v linearni zvezi. Seveda, saj točka v enakih časovnih intervalih, torej pri enako velikih zaporednih kotnih zasukih, opravi zmeraj enako dolgo pot po poltraku.

Torej $r = a \cdot \phi$

pri čemer je: ϕ - kot zasuka

r - oddaljenost točke od izhodišča

a - koeficient v razmerju (Če je σ kotna hitrost vrtenja poltraka okrog izhodišča, v pa hitrost točke na poltraku, je $a = v/\sigma$. In enačbo Arhimedove spirale sedaj takole preberem - če se spremeni za enoto velikosti, se r spremeni za a enot dolžine.)

Gornja enačba seveda prav sumljivo spominja na nam vsem dobro poznano enačbo premice

$$y = k \cdot x$$

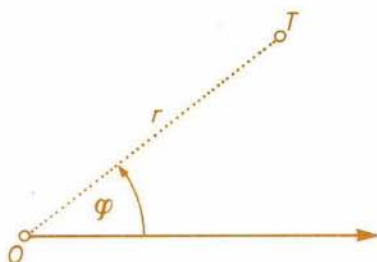
kjer je pač natanko ista pesem - ob enakih spremembah spremenljivke x se tudi spremenljivka y spremeni za zmeraj enako vrednost. Pri tem k odigra vlogo koeficienta v sorazmerju (če se x spremeni za enoto, se y spremeni za k enot).

Tako. Sedaj bi bilo pa nemara dobro razčistiti z vprašanjem - le kako torej, da imata enačbi, ki vsaka zase opisujeta pravzaprav povsem enako vrsto odvisnosti med dvema spremenljivkama (linearna odvisnost je očitna tako v $r = a \cdot \phi$ kakor tudi v $y = k \cdot x$), tako zelo različni krivulji za svojo ponazoritev?

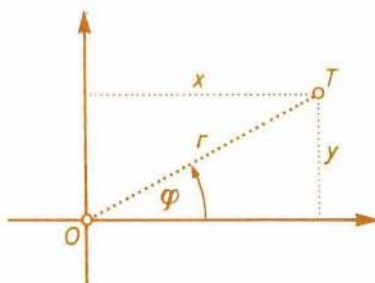
Pa pri tem ne bo šlo drugače, kakor da hočeš-nočeš napravimo majhen zamik in se na hitro poučimo o raznovrstnosti koordinatnih sistemov v ravnini.

Omenili bomo dva: pravokotni koordinatni sistem (odslej PRKS) in polarni koordinatni sistem (odslej POKS).

PRKS ali pa tudi kartezični koordinatni sistem (na čast njegovemu iznajditelju) je v matematiko uvedel Rene Descartes (1596 - 1650). Dandanašnji ga učenci matematike srečamo že v osnovnošolskih klopih in nam je zaradi tega zagotovo najbolj domač. Le dobrega pol stoletja za uvedbo PRKS-a pa so si matematiki (med njimi omenimo vsaj Isaaca Newtona (1643 - 1727) in Jacoba Bernoullija (1654 - 1705)) izmislili še POKS. Opazili so namreč (o, tudi mi bomo!), da PRKS za obravnavo nekaterih krivulj preprosto pač ni najbolj primeren.



Slika 3



Slika 4

V POKS je položaj točke v ravnini določen z oddaljenostjo r te točke od središča sistema in pa s kotom ϕ , pod katerim vidimo točko iz središča sistema glede na izbrani poltrak skozi izhodišče.

Položaj vsake točke v ravnini je torej določen z urejenim parom (r, ϕ) .

Izberimo sedaj v ravnini točko O in ta naj bo izhodišče obema sistemoma hkrati v tej ravnini. Nadalje izberimo še poljubno točko T. Ta je v PRKS-u določena z urejenim parom koordinat (x, y) v POKS-u pa z urejenim parom (r, ϕ) .

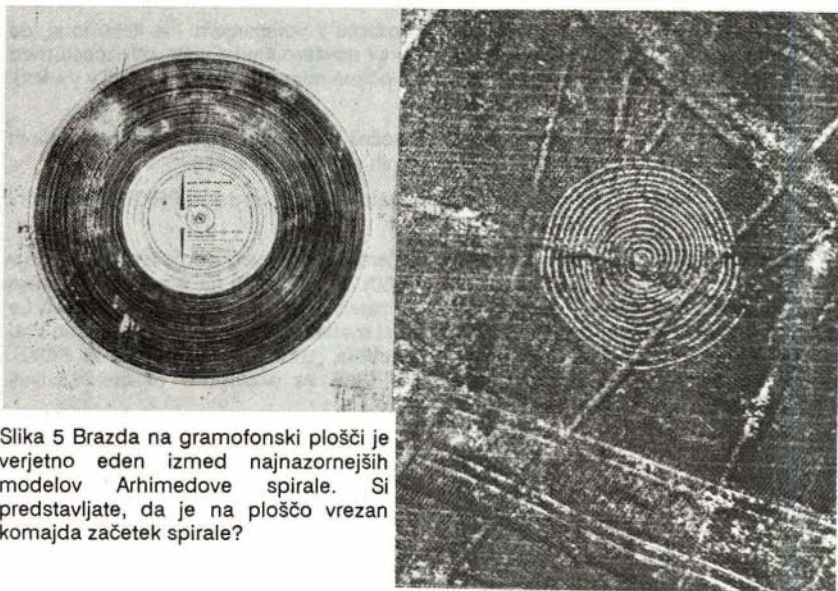
Recimo, da poznamo vrednosti koordinat x in y točke T v PRKS-u. Potem sta polarni koordinati r in ϕ z njima takole določeni

$$r = \sqrt{x^2 + y^2} \quad \text{in} \quad \phi = \arctan y/x$$

Če pa izmerimo najprej razdaljo r do točke T in kot ϕ v POKS-u, sta s tema dvema podatkomata tudi koordinati x in y iz PRKS-a natanko določeni

$$x = r \cdot \cos \phi \quad \text{in} \quad y = r \cdot \sin \phi$$

Oba koordinatna sistema sta torej vsaj načelno povsem enakovredna med seboj. Vendar pa se v praksi izkaže, da so enačbe nekaterih krivulj v enem izmed teh dveh



Slika 5 Brazda na gramofonski plošči je verjetno eden izmed najnazornejših modelov Arhimedove spirale. Si predstavljate, da je na ploščo vrezan komajda začetek spirale?

Slika 6. Pogled iz zraka na ogromno "risbo" na zemlji v obliki dvojne Arhimedove spirale, zgrajeno iz nanošenega kamenja. Območje v Peruju, od koder je posnetek, je tudi sicer znano po ogromnih reliefnih figurah na zemlji.

sistemov manj "divje" kakor v drugem. Tako je recimo enotsko krožnico, ki ima v PRKS-u enačbo $x^2 + y^2 = 1$, precej ugodneje zapisati v POKS-u, kjer se njena enačba glasi kar $r = 1$. S premicami pa je ravno nasprotno. V POKS-u je njihov zapis (in torej tudi njih študij) veliko okornejši od zapisa v PRKS-u.

Vrnimo se sedaj znova k Arhimedovi spirali.

Zapišimo njeno enačbo v POKS-u

$$r = a \cdot \phi$$

in v PRKS-u

$$x^2 + y^2 = a \cdot \arctan y/x$$

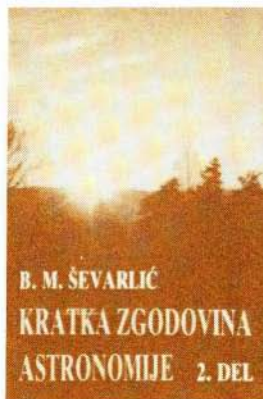
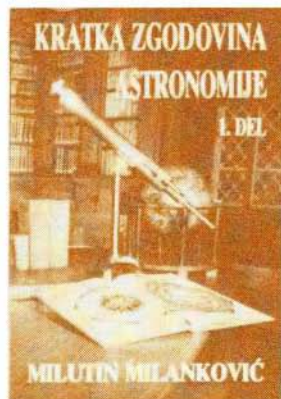
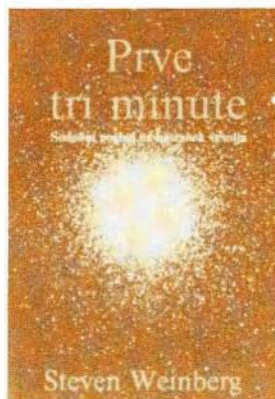
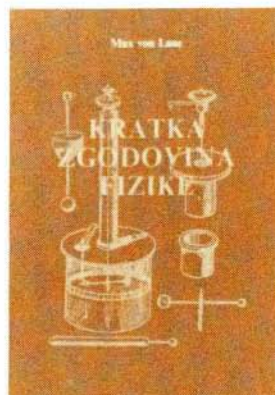
Pojasnilo za dejstvo, da nam je prvi zapis Arhimedove spirale toliko simpatičnejši od drugega, lahko najdemo kar v sami definiciji spirale. Ta je postavljena namreč povsem v duhu POKS-a (pa čeprav je Arhimed definicijo zapisal skoraj dve tisočletji pred rojstvom tega koordinatnega sistema - kar je seveda prav tako povsem svojevrsten hec).

Za konec pa razburimo domišljijo še z naslednjo enačbo
premica proti PRKS = Arhimedova spirala proti POKS

Ja, saj smo o tem pravzaprav skorajda ves čas pripovedovali. Mar ne?

Vilko Domajnko

ZGODOVINA ZNANOSTI V KNJIGAH SIGMA



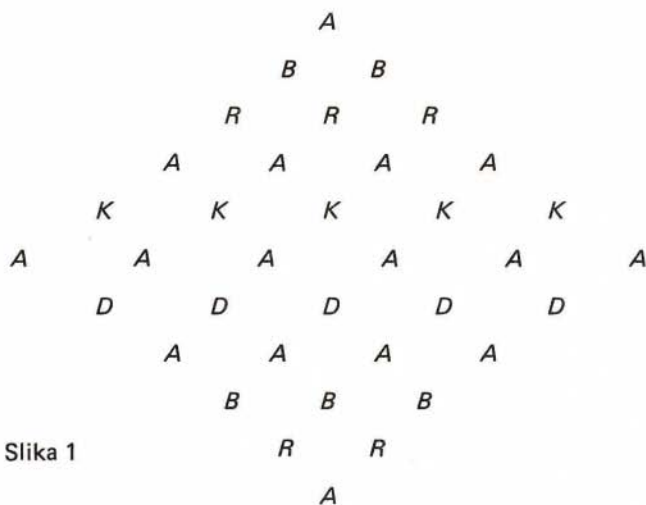
V zbirki Knjižnica Sigma, ki je namenjena predvsem popularizaciji matematike, fizike, astronomije in računalništva med dijaki v srednjih šolah, je izšlo že 45 različnih naslovov. Med njimi najdemo skupino knjig, ki popisujejo zgodovino matematike, fizike in astronomije. Ljubiteljem dobrih strokovnih knjig, predvsem pa mladim, priporočamo, da preberejo, morda pa tudi kupijo, naslednje knjige (cene veljajo le za tekoče tromesečje: 250.000.— din/200.000.— din).

Ciril Velkovrh

ABRAKADABRA ali štetje najkrajših poti v mreži

Dandanes besedo *ABRAKADABRA* največkrat uporabljamo kot sinonim za "zapleten nesmisel". V davnih časih pa je bila to čarobna beseda, ki so jo imeli navado v skrivnostnih oblikah vrezovati v amulete, ki naj bi lastnika obvarovali pred boleznijo in drugimi nesrečami.

Primer takega čarobnega zapisa je na sliki 1. Nekaj je gotovo: pred radovednostjo ne zavaruje! Nasprotno! Ob pogledu nanj se kar samo ponuja vprašanje, na koliko načinov lahko v njem preberemo besedo *ABRAKADABRA*. Poglejmo! Pri tem se domenimo, da veljajo le "povezane" besede. To pomeni, da bomo začeli brati pri črki *A* v zgornjem (severnem) vogalu in na posameznem koraku nadaljevali s sosednjo spodnjo črko (jugovzhodno ali jugozahodno), dokler ne bomo dosegli zadnjega *A* na spodnjem (južnem) vogalu.

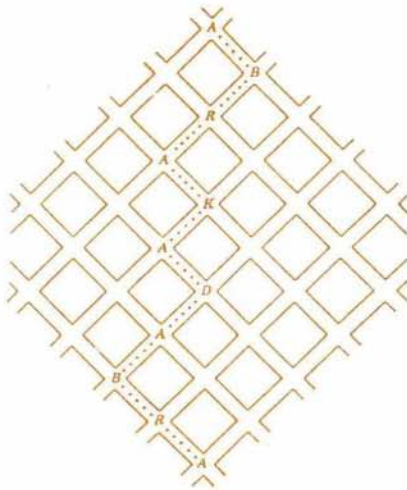


Slika 1

Ste poskušali besede prešteti? In obupali?

Poglejmo, kako lahko nalogo posplošimo in hkrati dobimo za reševanje idejo, boljšo od štetja. Problem spominja na hojo ali vožnjo po mestu, v katerem so ulice razvrščene kot na sliki 2. V mreži ulic lahko izbiramo različne poti, ki vodijo od *A* na severu do *A* na jugu. Poti so različnih dolžin; na sliki označena je dolga deset blokov. Očitno ni nobene poti, ki bi bila od nje krajša, je pa več takih, ki so dolge deset blokov. Prav te najkrajše poti ustrezajo branju čarobne besede na sliki 1. Besedo *ABRAKADABRA* torej lahko preberemo na

toliko načinov, kolikor je različnih najkrajših povezav med skrajno severno in skrajno južno točko cestne mreže s slike 2.

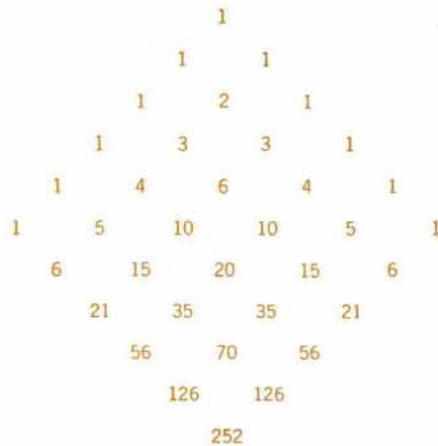


Slika 2

Ob tem si lahko postavimo tudi vprašanje, koliko je različnih najkrajših povezav severne točke A s poljubno točko mreže. Za točke blizu A poti ni težko prešteti. Nekaj rezultatov je vpisanih na sliki 3.



Slika 3



Slika 4

Naj bo sedaj Z poljubno križišče mreže, križišče X njegov severozahodni in Y njegov severovzhodni sosed kot na sliki 3. Najkrajša pot, ki vodi od A do Z , mora iti ali skozi X ali skozi Y . Če gremo skozi X , je nadaljevanje od X do Z eno samo. Isto velja za vsako pot, ki vodi skozi Y . Od tod sledi:

Število vseh najkrajših poti od A do Z je enako vsoti števila vseh najkrajših poti od A do X in števila vseh najkrajših poti od A do Y .

Na osnovi te ugotovitve ni težko sestaviti tabele za število najkrajših poti od zgornje točke A do dane točke (slika 4). Iz nje razberemo, da poteka od točke A na severu do točke A na jugu 252 najkrajših poti oziroma, da je na sliki 1 čarobna beseda *ABRAKADABRA* zapisana na 252 različnih načinov.

Nekateri ste števila s tabele 4 že prepoznali. Prav imate — to so *binomski koeficienti*. Njihovo trikotno razporeditev, katere začetek je na zgornjem delu slike 3, običajno imenujemo *Pascalov trikotnik*. Načeloma lahko Pascalov trikotnik nadaljujemo v nedogled. Prvo in zadnje število v posamezni vodoravni vrsti sta enaki ena, ostala števila so zaporedne vsote po dveh sosednjih števil iz prejšnje vrste. Tabela na sliki 4 ni nič drugega kot iz večjega Pascalovega trikotnika izrezan kvadraten kos.

Že v 17. stoletju je francoski matematik in filozof Blaise Pascal našel in tudi dokazal eksplisitno formulo za računanje binomskih koeficientov le iz njihove lege v Pascalovem trikotniku (ki ga je sam imenoval aritmetični trikotnik), brez računanja števil v prejšnjih vrsticah. Lego števila lahko opišemo tako, da npr. navedemo, v kateri vodoravni vrsti in na katerem mestu z leve v tej vrsti se nahaja. Drugi podatek nam pove, v kateri poševni vrsti smeri JZ–SV se število nahaja. Pri tem vrste in mesta numeriramo od nič dalje. Če z $\begin{bmatrix} n \\ r \end{bmatrix}$ označimo število v n -ti vodoravni vrsti na r -tem mestu, je Pascalov trikotnik takle

$$\begin{array}{ccccccc}
 & & & & & & \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix} \\
 & & & & & \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix} & \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix} \\
 & & & & \begin{bmatrix} 2 \\ 0 \end{bmatrix} & \begin{bmatrix} 2 \\ 1 \end{bmatrix} & \begin{bmatrix} 2 \\ 2 \end{bmatrix} \\
 & & \begin{bmatrix} 3 \\ 0 \end{bmatrix} & \begin{bmatrix} 3 \\ 1 \end{bmatrix} & \begin{bmatrix} 3 \\ 2 \end{bmatrix} & \begin{bmatrix} 3 \\ 3 \end{bmatrix} \\
 & \begin{bmatrix} 4 \\ 0 \end{bmatrix} & \begin{bmatrix} 4 \\ 1 \end{bmatrix} & \begin{bmatrix} 4 \\ 2 \end{bmatrix} & \begin{bmatrix} 4 \\ 3 \end{bmatrix} & \begin{bmatrix} 4 \\ 4 \end{bmatrix} \\
 & & & \dots & & & \\
 & & & & \begin{bmatrix} n \\ r-1 \end{bmatrix} & \begin{bmatrix} n \\ r \end{bmatrix} \\
 & & & & & \begin{bmatrix} n+1 \\ r \end{bmatrix}
 \end{array}$$

Zveza, ki velja za števila iz notranjosti sheme, se v teh oznakah zapiše:

$$\begin{bmatrix} n+1 \\ r \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} n \\ r-1 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} n \\ r \end{bmatrix} \quad \text{za } r = 1, 2, \dots, n \quad (1)$$

Očitno je še, da sta med seboj enaki števili, ki ležita v isti vrsti simetrično na navpičnico skozi vrh sheme, saj je število najkrajših poti od vrha sheme do simetrično ležečih točk enako. To zapišemo:

$$\begin{bmatrix} n \\ r \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} n \\ n-r \end{bmatrix} \quad (2)$$

Pascal je dokazal, da je

$$\begin{bmatrix} n \\ r \end{bmatrix} = \frac{n(n-1)(n-2)\dots(n-r+1)}{1.2.3\dots r} \quad (3)$$

in dodatno

$$\begin{bmatrix} n \\ 0 \end{bmatrix} = 1 \quad (4)$$

V našem primeru je $n = 10$ in $r = 5$, torej je število besed ABRAKADABRA enako

$$\begin{bmatrix} 10 \\ 5 \end{bmatrix} = \frac{10.9.8.7.6}{1.2.3.4.5} = 252$$

kar smo prej izračunali na rekurziven način.

Pascal nam v svojih delih ne zaupa, kako je prišel do eksplicitne formule – morda jo je enostavno uganil. Zato bomo tudi mi pustili to vprašanje ob strani in si ogledali le dokaz formule.

Vemo, da so števila ob robovih sheme enaka 1, torej

$$\begin{bmatrix} n \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} n \\ n \end{bmatrix} = 1 \quad (5)$$

kar se ujema s (3) za $r = n$ in s (4). Formulo (3) moramo torej dokazati le še za notranjost sheme, to je za $0 < r < n$. Dokaz bomo napravili s popolno indukcijo po vrstičnem indeksu n .

1^0 Za $n = 1$ sledi pravilnost formule iz (5).

2^0 Naj formula velja za n – to vrsto, to je za neki n in vse ustrezne r . V posebnem je torej

$$\begin{bmatrix} n \\ r \end{bmatrix} = \frac{n(n-1)\dots(n-r+2)(n-r+1)}{1.2\dots(r-1)r}$$

in

$$\begin{bmatrix} n \\ r-1 \end{bmatrix} = \frac{n(n-1)\dots(n-r+2)}{1.2\dots(r-1)}$$

Če ti dve enačbi seštejemo in uporabimo zvezo (1), dobimo

$$\begin{aligned} \begin{bmatrix} n+1 \\ r \end{bmatrix} &= \frac{n(n-1)\dots(n-r+2)}{1.2\dots(r-1)} \left[\frac{n-r+1}{r} + 1 \right] = \\ &= \frac{n(n-1)\dots(n-r+2)}{1.2\dots(r-1)} \cdot \frac{n+1}{r} = \frac{(n+1)n(n-1)\dots(n-r+2)}{1.2.3\dots r} \end{aligned}$$

Iz veljavnosti formule v n -ti vrsti torej sledi veljavnost formule v $(n+1)$ -ti vrsti, kar potrjuje njeno pravilnost. (Opomba: V dokazu nastopijo navidezno težave za $r = 1$. Tedaj si v skladu z (2) pomagamo s simetrično ležečimi členi.)

Za zaključek si oglejmo še zanimivo lastnost binomskih koeficientov. Pogledjmo na Pascalov trikotnik spet z vidika štetja najkrajših poti v mreži. Sedaj že vemo, da vodi od vrha trikotnika do srednjega števila v $2n$ -ti vrsti, to je do števila, ki stoji v tej vrsti na n -tem mestu, $\binom{2n}{n}$ najkrajših poti. Te poti vodijo skozi različne točke n -te vrste. Očitno je, da je število tistih izmed teh poti, ki gredo skozi r -to točko n -te vrste, enako produktu dveh števil: števila najkrajših poti od vrha sheme do r -te točke n -te vrste in števila najkrajših poti od te točke do točke, ki leži n vrst niže in v poševni vrsti, ki ima za $n-r$ večji indeks. Ta produkt je torej enak $\binom{n}{r} \cdot \binom{n}{n-r}$. Če seštejemo število prehodov skozi vse točke n -te vrste in upoštevamo (2), dobimo

$$\binom{n}{0}^2 + \binom{n}{1}^2 + \binom{n}{2}^2 + \dots + \binom{n}{n}^2 = \binom{2n}{n}$$

kar je gotovo zanimiva formula.

Zgled: Za $n = 5$ je spodnje število na sliki 4 enako vsoti kvadratov števil v vodoravni diagonalni:

$$252 = 1^2 + 5^2 + 10^2 + 10^2 + 5^2 + 1^2$$

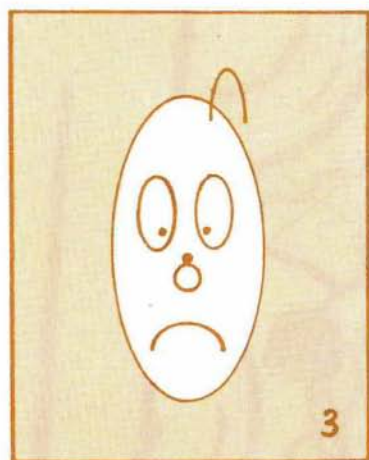
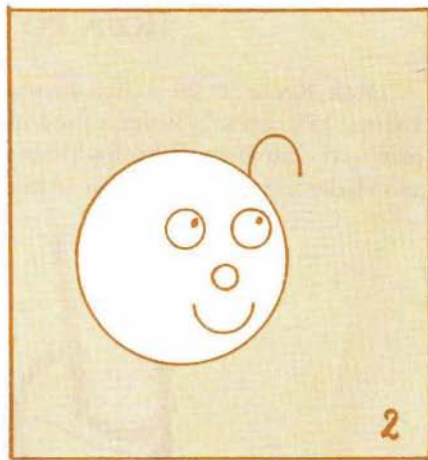
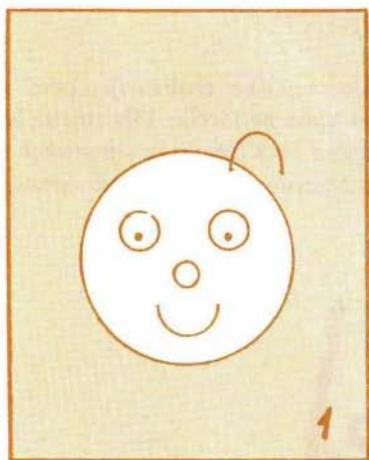
Marija Vencelj

Literatura:

G. Polya, *Vom lösen mathematischer Aufgaben*, Birkhäuser Verlag, Basel, 1966

STRIP

Pred teboj je kratek strip, sestavljen iz štirih sličic. Podobe na njih so seveda zelo matematizirane. Tako je obraz spočetka, ko se nasmejano predstavi, še pravilno okrogel, kasneje, ko pa se začne tako ali drugače vznemirjati zaradi nenavadnega gosta na svojem nosu, pa se skrči oziroma razširi v elipso. Ustnice, ki hočeš—nočeš pač ubogljivo sledijo razpoloženju, so narisane s pomočjo spodnje oziroma zgornje polovice krožnic ali elips. In poredna čebelica, ki je priletela posedet tja naravnost na nos, ta je na risbica označena kar s točko.



Čez katerokoli izmed teh štirih risbic položi koordinatni sistem in z *eno samo algebrsko enačbo* zapiše množico točk, ki sestavljajo to risbico. Podobno nadaljuj tudi z ostalimi tremi risbicami.

Izmisliš pa si lahko tudi povsem svoj strip. Le narisati ga moraš zgolj s tistimi krivuljami, ki jih (vsaj načelno) znaš obdelati z matematičnim znanjem. Če nam strip še pošlješ na Presekov naslov, ti ga bomo po vsej verjetnosti celo nagradili in še objavili.

Vilko Domajnko

HOJA PO LABIRINTU

Otok Kreta je bil v sivi davnini središče egejske civilizacije, prve v Evropi, ki je cvetela stoletja pred obdobjem klasične Grčije. Ohranjena je pripoved o mogočnem kralju Minosu s Knososa na Kreti, ki je s pomorsko silo vladal v Egeju. Zdi se, da so bile kralju Minosu podrejene tudi Atene,



saj je od njih zahteval letno dajatev sedem deklet in fantov za hrano Minotavru, pošasti z bikovo glavo, ki je živela v globinah labirinta pod kraljevo palačo.

Krožile so govorice, da ima kralj grdo navado zapreti v labirint Minotavru na voljo tudi vsakega nepovabljenega tujca, ki se je pojavil na otoku. Če natančneje pomislimo, je bila to bržčas samoobramba otočanov pred potujočimi junaki in drugimi morskimi roparji.

Mit iz zgodnjega junaškega obdobja pripoveduje, da te govorice niso prav nič ganile atenskega junaka Tezeja. Kot se za junaka spodobi, se je nemudoma podal v nevarnosti na Kreto. Tam mu je šlo sprva vse narobe. Ujeli so ga in postal naj bi Minotavrova žrtev.

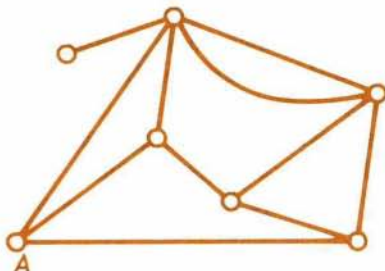
Toda lepa Minosova hči Ariadna – v vseh pripovedkah so kraljične lepe – se je vanj zaljubila in ga sklenila rešiti. Mogoče je bila sama tako zvita, ali pa ji je dala njena dovilja dober nasvet – vsekakor je našla rešitev. Svojemu Tezeju je dala klobčič preje. Junak je en konec niti privezal ob vhodu v labirint in se z odvijajočo se klobko v eni in z mečem v drugi roki poglaval junaštvu nasproti v podzemlje. Tam je našel in ubil Minotavra. Nato je moral samo še na klobčič navijati nit, ki ga je vodila k srečnemu koncu.

Prav lahko bi se zgodilo, da Tezej Minotavra sploh ne bi srečal in ga tako ne bi mogel ubiti. In nič ne bi bilo ne z junaštvom ne z zgodbo!

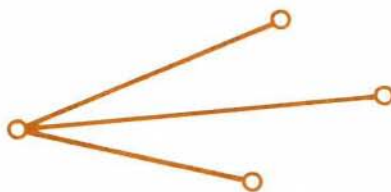
Zato Tezeju pri iskanju raje pomagajmo! Najprej moramo seveda predpostaviti, da je labirint končen in da je mesto, kjer tiči Minotaver, res dosegljivo z vhoda v labirint. Razen tega bomo našega kandidata za junaka, namesto s klobčičem preje, opremili s kosom snovi, ki se v temi sveti. V skrajni sili bo dober tudi trhel les, ki se je svetil že v tistih davnih časih. Z njim bo moral Tezej zaznamovati začetek in konec vsake prehojene poti med dvema križiščema in to vsakokrat, ko bo šel po njej. Po prihodu v posamezno križišče – z izjemo začetnega – bo imel v križišču liho mnogo oznak, po odhodu iz njega pa sodo mnogo. Za začetno križišče velja ravno obratno. Razen tega bo lahko v vsakem križišču med seboj ločil neprehojene poti, enkrat, dvakrat prehojene poti itd. Seveda mu to razlikovanje samo po sebi še ne bo jamčilo, da bo preiskal res ves labirint in na koncu tudi našel izhod iz njega. Za to potrebuje še zanesljiva in čimbolj preprosta navodila.

Labirint lahko preprosto skiciramo tako, da vsako križišče predstavimo s točko, posamezni hodniki pa so povezave med temi točkami. Tako skico imenujemo graf (slika 1).¹⁾ V grafu moramo zaznamovati vhod, to je začetno križišče. Na skici je označeno s črko *A*. Pogoji, naj bo Minotavrov neznani položaj dosegljiv iz vhoda v labirint, pomeni, da mora biti graf

povezan. Tezej mora začeti v točki A , prehoditi vse povezave grafa in se vrniti v točko A . Rekli bomo, da mora napraviti popoln obhod grafa. Le tako bo Minotavra zanesljivo našel in se vrnil iz podzemlja.



Slika 1



Slika 2

Načelno je to prav gotovo mogoče. Če Tezeja zamenjamo s konico svinčnika, ki drsi od točke A po povezavah grafa, se sicer lahko vrnemo v A prej, kot konica svinčnika opiše ves graf. Toda to ni nič hudega. Gremo pač ponovno na pot, le da tokrat v tisti del grafa, ki ga še nismo obšli. To počnemo tako dolgo, dokler ne izčrpamo vseh povezav grafa. Pri tem bomo sicer morda kakšno povezavo prehodili večkrat, a to za nalogo ni bistveno.

Toda Tezejeva naloga je težja. On labirinta oziroma grafa ne pozna. Ob povratku v A ne more vedeti, ali je še kaj labirinta neprehojenega, niti ne ve, v katero smer naj ponovno krene, da bo naletel na tak predel. Navodila, ki mu jih bomo dali, morajo biti taka, da bodo razrešila te dileme in da bo napravil popoln obhod.

V teoriji grafov so zanimivi tako imenovani *Eulerjevi obhodi*. Pri njih začnemo in končamo v isti točki in preidemo vse povezave grafa natanko enkrat. Seveda bi bilo najbolj gospodarno, če bi lahko sestavili taka navodila, ki bi Tezeja vodila po vsaki povezavi samo enkrat. Toda obstajajo grafi, ki ne premorejo Eulerjevega obhoda. Preprost primer takega grafa imamo na sliki 2.

Torej s takimi navodili ne bo nič. Velja pa naslednja trditev:

Dani povezani graf premore Eulerjev obhod natanko takrat, ko se v vsaki njegovi točki steka sodo mnogo povezav.²⁾

¹⁾ Študij grafov je v matematiki posebna veja. Nekaj osnov sta za bralce Preseka zbrala Drago Bajc in Tomaž Pisanski v knjižici Najnужnejše o grafih, ki je pred 4 leti izšla pri Presekovi knjižnici. Še vedno jo je moč kupiti pri Komisiji za tisk DMFA.

Od tod sledi naslednja ugotovitev:

Vsak povezan graf premore obhod, pri katerem gremo po vsaki povezavi natanko dvakrat.

Res. Mislimo si, da v grafu vsako povezavo podvojimo. Potem se v vsaki točki tako popravljenega grafa steka sodo mnogo povezav in torej zanj obstaja Eulerjev obhod. Ta obhod pa ni nič drugega kot obhod prvotnega grafa, pri katerem gremo po vsaki povezavi natanko dvakrat.

Ker labirinta oziroma grafa ne poznamo, bomo torej morali biti zadovoljni z navodili, ki bodo usmerjala našega junaka tako, da bo prehodil vsako povezavo labirinta natanko dvakrat in pri tem zaključil pohod v začetni točki. Možnih načinov je več. Mi si bomo ogledali le enega, ki je v teoriji grafov znan pod imenom *Trémauxov* algoritem. Poglejmo njegovo vsebino:

Ko pridemo v dano točko grafa, ravnamo takole:

I: Če v točki še nismo bili, jo zapustimo po še neprehojeni povezavi, če taka povezava obstaja. Sicer se vrnemo po isti povezavi.

II: Če smo v točki že bili, potem gremo

IIa: nazaj po zadnji povezavi, če smo jo uporabili prvič

IIb: v neprehojeno povezavo, če taka povezava obstaja in smo zadnjo povezavo prehodili že dvakrat

IIc: v enkrat prehojeno povezavo v ostalih primerih

Pravila so ilustrišana na sliki 3. Številka pri posamezni povezavi pomeni, kolikokrat je bila povezava prehojena pred obravnavanim prihodom v križišče.

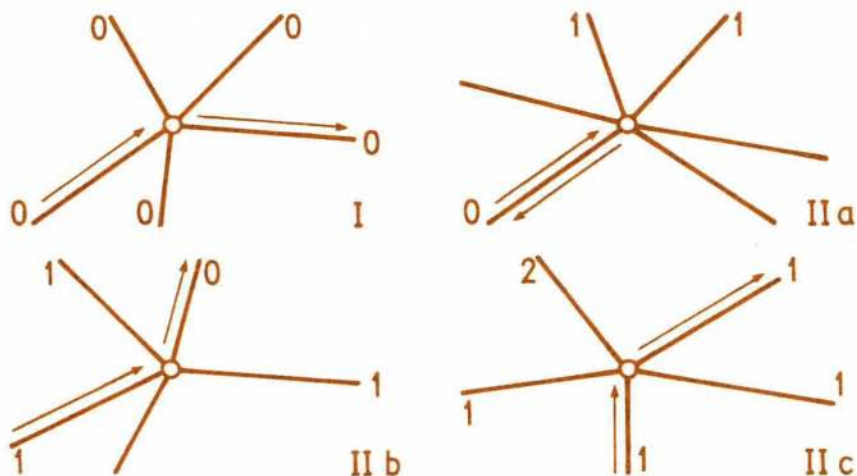
V vsaki od A različni točki pride vsakokrat v poštev natanko eno od zgornjih štirih navodil. Ne more se zgoditi, da bi v kakšni taki točki obtičali, to je, da bi vanjo prišli in je ne bi mogli zapustiti. Morda je to še najmanj jasno pri zadnjem navodilu. Toda po prihodu v tako od A različno točko, kjer naj bi uporabili zadnje pravilo, je število oznak povezav liho. Ker smo prišli po drugič uporabljene povezavi, ki ima tedaj dve oznaki, mora biti na razpolago vsaj ena povezava z eno oznako, torej vsaj ena samo enkrat prehojena povezava.

Potovanje nadaljujemo tako dolgo, dokler je mogoče. Ker je labirint končen in so pravila taka, da nobene povezave ne prehodimo več kot dvakrat, se pot zanesljivo konča. To se lahko zgodi le v začetni točki A , ker smo ugotovili, da ne moremo obtičati v nobeni drugi točki.

Sedaj pa hitro svinčnike v roke, narišite poljuben povezan graf in

²⁾ Tudi dokaz te trditve najdemo v knjižici Najnужnejše o grafih.

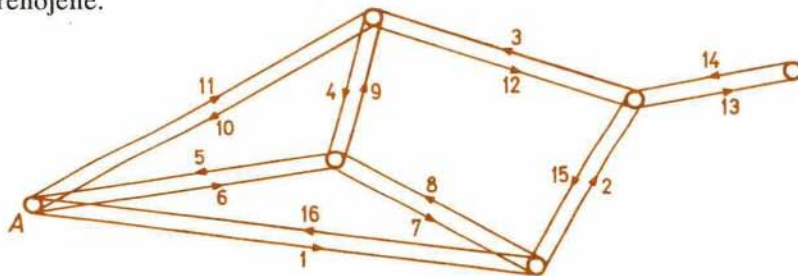
preskusite pravila! Slika 4. – Vam je uspelo prehoditi vse povezave grafa natanko dvakrat in zaključiti v začetni točki?



Slika 3

Po tem oddihu še dokažimo, da se to res mora zgoditi. Dokazati moramo le še, da ob uporabi pravil I – II c izčrpamo vse povezave grafa, vsako natanko dvakrat.

Dokaz: Denimo, da poti ne moremo več nadaljevati. Torej smo po zgornji ugotovitvi v začetni točki A . Vrnimo se korak za korakom po že opravljeni poti v obratni smeri. Pri tem se domenimo, da bomo na tej poti preskočili vse slepe povezave in vse povezave, ki smo jih v skladu s pravilom IIa prehodili dvakrat zapored. Zanje ni kaj dokazovati, saj so dvakrat prehojene.



Slika 4

Označimo z X točko, ki je na tej povratni poti prva. Na prvotni poti je morala biti povezava XA ob prihodu v A dvakrat prehojena, ker bi se sicer lahko po njej vrnili v skladu s pravilom IIa. To pomeni, da smo iz X v A krenili po že enkrat prehojeni povezavi, torej tedaj v X nismo bili prvič. Razen tega se ob tem prehodu točke X ni mogla v X stekati nobena še neprehojena povezava, ker bi sicer morali iti v skladu s pravilom IIb po njej namesto po XA .

Pojdimo še korak nazaj. Denimo, da smo prišli v točko X iz točke Y . Potem je morala biti pred tem povezava YX že enkrat prehojena, ker bi se sicer morali zaradi IIa vrniti po XY , namesto da smo nadaljevali po XA . To spet pomeni, da je bila točka Y prehojena tudi že nekoč pred tem zadnjim pohodom proti točki A . Enako, kakor prej za X , tudi za Y ugotovimo, da se v njej ne izteka več nobena še neprehojena povezava.

Če se tako vračamo točko za točko po prehojeni poti, korak za korakom ugotovimo, da se v nobeni obravnavani točki ne izteka nobena neprehojena povezava in da so vse poti XA , XY itd. dvakrat prehojene.

Dokazati moramo le še, da smo prešli vse točke grafa. To sledi iz povezanosti grafa. – Pa denimo, da neka točka grafa, recimo B , ne bi bila prehojena. Ker je graf povezan, obstaja neko zaporedje različnih povezav med točkami, ki vodi od točke A do točke B . Pojdimo po tej poti od točke B proti točki A in naj bo C na tej poti prva točka, ki smo jo pri našem obhodu grafa prešli. Pri tem je seveda lahko $A = C$. V točko C se mora tedaj očitno stekati neka neprehojena pot, kar je v protislovju s prvim delom dokaza.

Marija Vencelj

KAJ POČETI, ČE DEŽUJE POLŽI IN ŽABE

Pravokotna tabla je razdeljena na kvadratna polja. Na njih je nekaj rdečih in nekaj modrih žab. Igralca izmenično premikata eno od svojih žab. Rdeča žaba se lahko premakne za poljubno število mest v levo, modra v desno. Če skoči izven mreže, je iz igre izločena. Pri premikih mora ostati v isti vrsti, le če je v istem stolpcu takoj pod njo nasprotna žaba ali polž, pod le – tem pa prazen prostor, lahko skoči na to mesto. Od kje pa sedaj polži? Žabe, ki so preskočene, se tega tako sramujejo, da se spremene v polže. Polži ne morejo skakati, premikajo se lahko le naprej v vrsti. Tisti igralec, katerega polži in žabe zadnji ostanejo na tabli, zmaga.

Matija Lokar

KNJIŽNICA SIGMA – FIZIKA

IBRAHIMOV SIN		SLOV. DRAMATIK (PRIMOŽ)	IGRALKA VALLI	LOČILO NA KONCU STAVKA	IGRALKA ZUPANČIČEVA	LITIJ	ANDREJ NOVAK	ŠVEDSKA TELOVADNA LESTEV	NIZEK ŽENSKI GLAS
I	DROBNA ŽILICA	K	A	P	'	L	A	R	A
	UMETNA SNOV ENOTA ZA EL. KAPACIT.	P	L	I	V	I	N	I	L
I	F	Z	I	K	A	VRSTA GLINENCA	BITOLJ KANTON V ŠVICI	B	T
	A	P	A	A	NEKDANJA FRANC. TERORIST. ORGANIZA	O		S	DESNÍ PRITOK VOLGE
PRI M RŽ. IBA	R	A	K		RISBA: MIHA ŠTALEC	KOŠARKAR TVRDIČ HUDA JEZA	E	T	O
	A	LUNINO ŠTEVILO V ASTRON.	KRAJ V BOHINJU		FIŽOLOV PLOD BRUŠENA STEKLENKA	S	T	R	O
	D		N	MAKED. PISATELJ		O		L	A
	EKIPA, KI UPRAVLJA VOZILO	V	O	L	N			MATEMATIK PRIJATELJ	NORVEŠKI MATEMATIK
	RIM. BOG LJUBEZNI ANCONA		H		ZEMLJIN SATELIT BUKOV PLOD		V	N	A
		E				A	ISAAC BARROW IVAN PUCELJ	I	B
	N	T	N	T	F		Z	I	K
	KANTNA TEŠANA OLATA	J					ZEMELJSKI TEČAJ	O	L

VOZLI



udi s tremi krajšimi vrvicami se lahko prav imenitno zabavamo. Položimo prvo izmed njih kar na mizo, drugo zavozlajmo na "tisti" najbolj preprosti in vsem dobro znani način, na tretji vrvi pa napravimo vozel v obliki osmice — tak, kakršnega vidimo na desni strani slike 1.

Vsaki izmed teh treh vrvic zatem staknimo oba njena prosta konca in jih naposled še lepo poravnajmo. Dobili bomo troje vozlov, ki nam jih kaže slika 2.



Slika 1



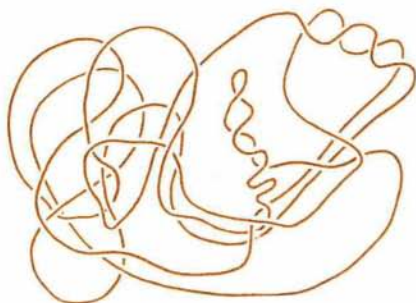
Slika 2

Tako, uvodna igra je za nami. Najbrž smo se v njej naučili dovolj, da se lahko sedaj lotimo zadeve že nekoliko bolj matematično. Definirajmo torej: **vozel** je sleherna sklenjena krivulja v tridimenzionalnem prostoru, ki v nobeni svoji točki ne seče same sebe.

Zgornja trojica je v smislu te definicije torej le fizična ponazoritev pravih matematičnih vozlov. Vendar pa takšni modeli kljub temu (ali pa predvsem zaradi tega) naravnost izvrstno služijo kot pomagalo pri obvladovanju teorije. In prav to njihovo lepo in atraktivno lastnost kanimo izkoristiti v tem članku.

Bralcem bo najbrž všeč navada, da imajo v teoriji vozlov nekateri izmed enostavnejših vozlov zaradi svojih nenavadnih in asociacijsko živahnih oblik tudi posebna opisna imena. Tako pravimo vozlu s slike 2 na levi *trivialni vozel* (marsikdo bi zanj namreč pripomnil, da pravzaprav sploh ni "zavozlan"), sredinskemu pravimo *detelja*, desnemu pa *osmica*.

Lotimo se sedaj zadeve še z njene nasprotni strani. Najprej narišimo sliko vozla in šele zatem poskusimo po njeni predlogi napraviti model tega vozla iz vrvice. Pri tem poskusu "vozljajmo" črte po papirju "kar tako" — križemkraj in sklenjeno vsepočez. Recimo, da pri tem nastane, kar je narisano na sliki 3.



Slika 4 križemkraž



Slika 3

Zdi se, da se ta vozel pač v marsičem loči od prejšnjih treh. Na njegovi risbi je veliko več križnih točk — to je morebiti prvo, kar pade v oči. Na risbi *trivialnega vozla* jih namreč sploh ni, risba *detelje* ima le tri križne točke, *osmica* le štiri, na risbi *križemkraža* pa jih je moč prešteti kar petdeset!

Poglej, poglej — našo prvo pogruntavščino lahko že zapišemo: vozel razlikujemo glede na število **križnih točk**, ki jih je opaziti na njihovih risbah.

Vendar pa na risbi slehernega vozla preštejemo zmeraj le najmanjše možno število križnih točk. In za *križemkraža* je že na prvi pogled očitno, da se ga da vsaj nekoliko razplesti, ne da bi ga bili pri tem prisiljeni razkleniti. Na njegovi risbi bi potemtakem smeli narisati tudi precej manj kakor petdeset križnih točk.

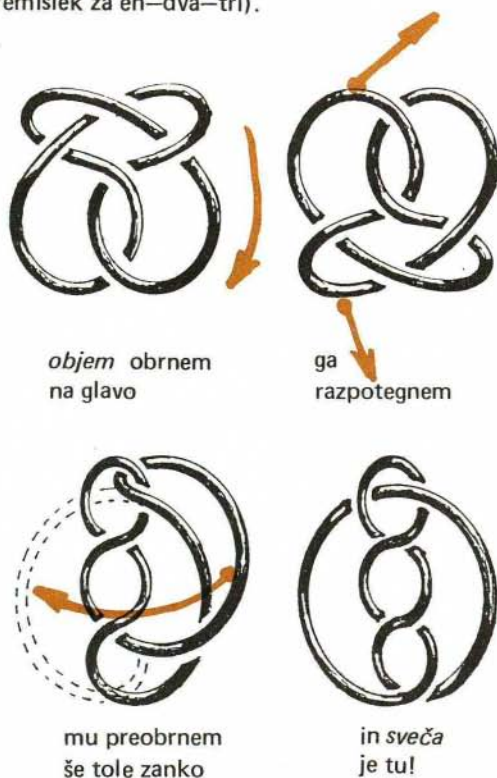
S tem spoznanjem pa smo povsem nevede trčili v eno izmed temeljnih vprašanj teorije vozlov — ali je dani vozel (v našem primeru je to *križemkraž*) tak, da ga je moč razplesti v *trivialen* vozel ali ni? Ali je torej ves ta *križemkražev* pošasten preplet le ena sama grda potegavščina in ga torej morebiti v bistvu sploh "nič ni"?

Bralec bo zlahka spoznal, če se bo odločil narediti model *križemkraža* iz vrvi, da se ta vozel sicer ne razplete v *trivialen vozel*, pač pa se ga da poenostaviti v *deteljo*. In njegova "prava" risba ima torej le tri križne točke, nikakor pa ne petdeset, kolikor smo jih sprva nekoliko lahkomiiselno našteali.

Na primeru *križemkraža* smo zagotovo že vsaj intuitivno zaznali, kako lahko preoblikujemo vozle. Takole gre ta reč: dovoljeno je sleherni premikanje njihovih krivulj sem ter tja, lahko jih zvijamo tako ali drugače, tudi prevračanje in celo preobračanje vozlov je dovoljeno, le razkleniti jih pri tem nikakor ne smemo. In vsem tistim vozlom, ki jih med seboj loči zgolj postopek pravkar opisanega preoblikovanja, pravimo **izotopni vozli**.

Sedaj torej že vemo, da sta *križemkraž* in *trivialni vozel* izotopna. Da pa se udomačimo pri novem pojmu, pokažimo, da sta tudi *objem* in *sveča* s slike 5 izotopna vozla.

Bralcu najbrž ne bo težko premisliti, da imajo na risbah vsi med seboj izotopni vozli po enako število križnih točk. Obratno pa ne velja zmeraj — poglej, *petica* in *sveča* imata na svojih risbah po pet križnih točk, pa vendarle nista izotopna. Naj bralec sam premisli, zakaj ne (to pa seveda že ne bo več nezahteven premislek za en—dva—tri).

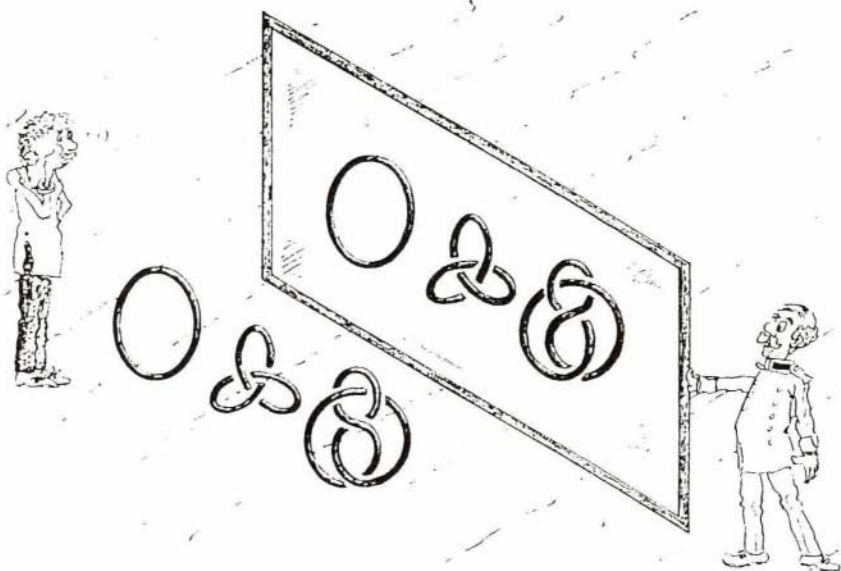


Slika 5

Postavimo sedaj trojico vozlov s slike 2 pred ogledalo.

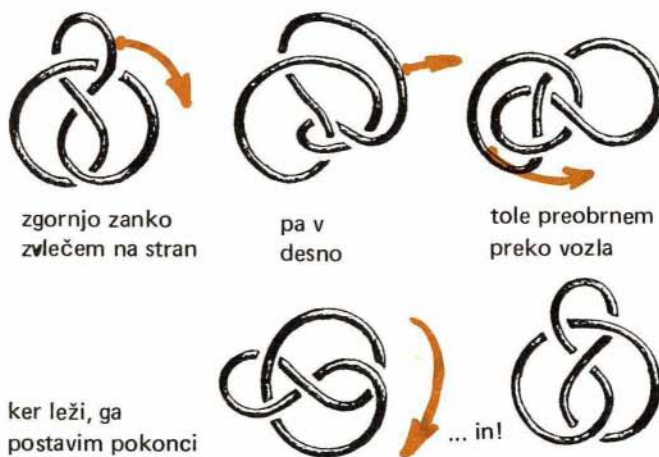
Recimo, da je vsakemu vozlu **zrcalni voz** tisti, ki ga prikazuje njegova zrcalna slika. Tako lahko sedaj opazimo, da so zrcalne slike *osmice*, *detelje* in *trivialnega* vozla skorajda identično enake originalnim slikam, le "podhode" in "nadhode" v križnih točkah imajo zamenjane med seboj.

Toda videti se da še precej več. Trdim, da sta *trivialni voz* in *osmica* celo izotopna vsak svojemu zrcalnemu vozlu! Za *trivialni voz* je to seveda



Slika 6

nadvse očitno, nikakor pa ne za *osmico*. A "hokus-pokus" z naslednje slike nam brž in prepričljivo prežene vsak tovrsten dvom.



Slika 7

Z zrcalno *deteljo* pa je žal čisto drugače. Nikakor ga ne bomo uspeli prevozlati nazaj v njegov original, pa naj si še tako vztrajno prizadevamo. Pomislimo, koliko trdovratno upajočih je samo odrešil nemški matematik *Dehn*, ki je že leta 1914 dokazal (po teoretični poti, seveda), da tega zares ni mogoče in da torej obstajata pač dve neizotopni *detelji*.

Najbrž pa se ljubi bralec še spominja, da smo le maloprej zapisali, da je *križemkraž* izotopen *detelji*! In po vsej priliki sedaj že čuti mučno zadrego, da smo z našo teorijo najbrž zašli. Saj nenadoma ne vemo več, kateri izmed obeh *detelj* je *križemkraž* izotopen.



mumija



ornament



Miško



mornarski vozle



Mehikanec



zrcalo



riba



sladoled

Slika 8

Iz te navidez silno neprijetne situacije se bomo premeteno izvlekli kar s pomočjo nove definicije. V teoriji vozlov namreč velja, da sta dva vozla **ekvivalentna**, če sta izotopna ali pa če je en vozle izotopen zrcalnemu vozlu drugega.

Dovolj bodi štrene za to pot. In dovolj jo je že tudi za naša vprašanja. Takole gredo:

1. Dokaži, da ni vozla z eno ali z dvema križnima točkama.
2. Med vozli s po šestimi križnimi točkami na sliki 8 poišči tistega, ki je izotopen svojemu zrcalnemu vozlu.
3. Poišči vse štiri skupine med seboj ekvivalentnih vozlov s slike 8.
4. Poišči kar največ med seboj neekvivalentnih vozlov s po sedmimi križnimi točkami.
5. Poskušaj utemeljiti dejstvo, da *petica* in *sveča* nista med seboj ekvivalentni.
6. Postavi kakršnokoli zanimivo vprašanje v zvezi z vozli.

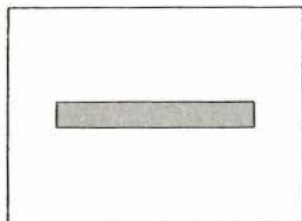
Še enkrat naj opogumim neodločne reševalce, da nikakor ni nujno, da bi nam v pismih pošiljali odgovore na prav vseh šest zastavljenih vprašanj v rubriki. Nekatera med njimi so namreč tudi nekoliko težja in še čas za reševanje je kar precej na kratko odmerjen. Zatorej se naj vsak poskusi pač le s tistimi vprašanji, ki mu najbolj leže.

Tokrat pošljite svoje odgovore do 15. 2. 1990 s pripisom: **Za Preseko-vo nadlogo.**

Vilko Domajnko

Na sliki je kos kartona pravokotne oblike s pravokotno špranjo. Stranici zunanega pravokotnika sta 9 in 12 enot, notranjega pa 1 in 8 enot. Pravokotnika imata skupno središče, ustrezne stranice so vzporedne. Razreži karton na dva dela tako, da boš iz njiju lahko sestavil kvadrat!

RAZREŽI NA DVA KOSA IN SESTAVI KVADRAT



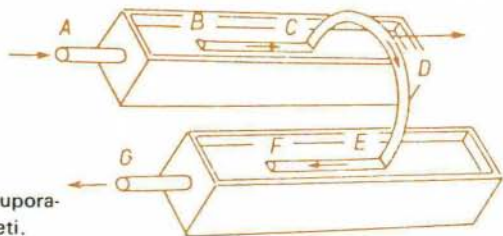
Marija Vencelj

TOKOVNI TOP

Kmalu bo minilo sto sedemdeset let, kar je Hans Christian Oersted opazil, da deluje vodnik s tokom na magnetnico. Samo dober teden zatem, ko je slišal za Oerstedovo odkritje, je André Marie Ampère spoznal, da delujeta vodnika s tokom drug na drugega. Med vzporednima vodnikoma s tokovoma v isti smeri deluje privlačna sila, med vodnikoma s tokovoma v nasprotnih smereh pa odbojna sila. V naslednjih letih je Ampère zavzeto delal poskuse in marsikaj odkril. Med napravami, ki jih je pri tem uporabljal, je bil tudi *tokovni top*. Kovinska prečka, ki je pravokotna na vzporedna vodnika in z njima sestavlja sklenjen električni krog, se pospešeno giblje proč od izvira. Za poskuse je pripraven podkvast bakren vodnik, ki se giblje po žlebovih z živim srebrom (slika 1). Tako dosežemo, da se prečka giblje brez velikega upora in je stik med deli kroga dober. Poskuse s tokovnim topom so delali in opisovali tudi drugi fiziki, med njimi James Clerk Maxwell, ki je leta 1873 objavil temeljno delo o električnem in magnetnem polju - *Razpravo o elektriki in magnetizmu*.

Delovanja tokovnega topa v osnovi ni težko razumeti. Okoli vodnika s tokom nastane magnetno polje s krožnimi silnicami. Njihovo smer določa s svojim vrtenjem desni vijak, ki leze v smer toka (slika 2). To magnetno polje deluje na prečko med vodnikoma, po kateri teče tok, s silo navzven. Smer sile magnetnega polja na vodnik s tokom določimo lahko takole: palec desne roke postavimo v smer toka, kazalec v smer magnetnega polja, sredinec pa kaže v smeri sile. Sila na prečko deluje v enaki smeri, tudi ko obrnemo smer toka.

Podrobno pa sile na prečko v tokovnem topu v splošnem ni mogoče izračunati. Prečka leži v ravnini, v kateri se konča tok po vzporednih vodnikih in v kateri je polje precej zapleteno. Gibanje prečke je še težje izračunati, ker se nenehno spreminja električni upor kroga in je treba upoštevati tudi inducirano napetost na prečki pri gibanju po magnetnem polju. Geometrijsko je položaj tako nepregleden, da je zelo težko zapisati osnovno enačbo, ki podaja tok po krogu, in enačbo za gibanje prečke. Poleg tega sta obe enačbi tesno povezani. Samo za zelo preprosto obliko kroga, ko nadomestimo žice z zelo širokimi tra-

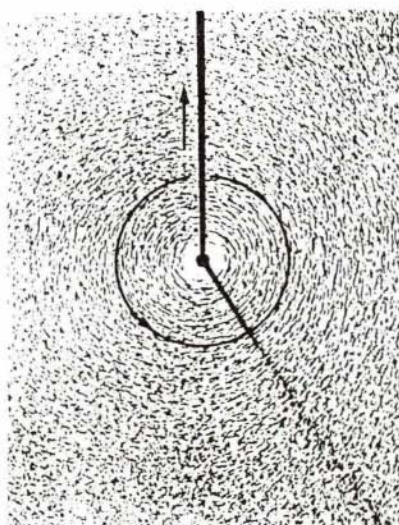


Slika 1. Tokovni top, kakršnega je uporabljal A.M. Ampère pred skoraj 170 leti.

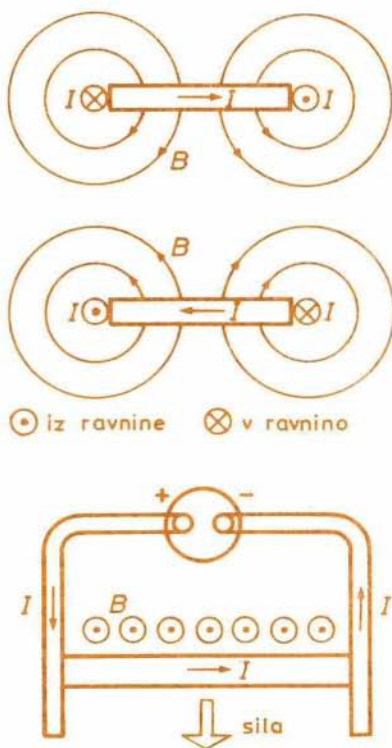
kovi, je mogoče najti za posebne primere razmeroma preproste rešitve.

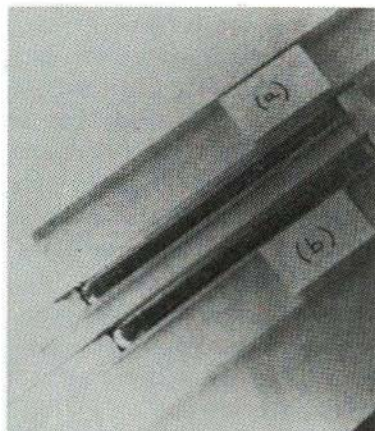
Tokovni top je zanimiv za fizike, ki se ukvarjajo s teorijo električnega in magnetnega polja, in za tiste, ki delajo poskuse. Z vprašanjem, kako izračunamo silo togega električnega kroga na drug tak krog ali na del drugega kroga ali na del istega kroga, so se ukvarjali fiziki od Ampèra preko Maxwella do današnjih fizikov. Pomemben delež je prispeval leta 1869 tudi Jožef Stefan z razpravo *O osnovnih enačbah elektrodinamike*. Vprašanje imamo lahko za rešeno za primer, ko so vsi deli kroga in krogi popolnoma togi in mirujejo drug glede na drugega. Vprašanje, kako je pri krogu z gibljivimi deli, pa vznemirja fizike še dandanes: pri tem vsi niso enakega mnenja. Na težave, ki jih pri tem srečujejo, smo že namignili pri tokovnem toku, saj sodi ta med kroge z gibljivimi deli.

Opišimo nekaj poskusov s tokovnimi topovi. Te poskuse delajo nekateri zato, da bi boljše razumeli teorijske osnove, druge pa zanima uporaba tokovnih topov. Pri poskusih uporabljajo kot nekaj živosrebrni stik (slika 3) ali pa ko-



Slika 2. Silnice v polju ravnega vodnika s tokom (železni opilki) in polje dveh ravnih vodnikov, ki v tokovnem toku deluje s silo na prečko; če obrnemo smer toka, se smer sile ne spremeni.



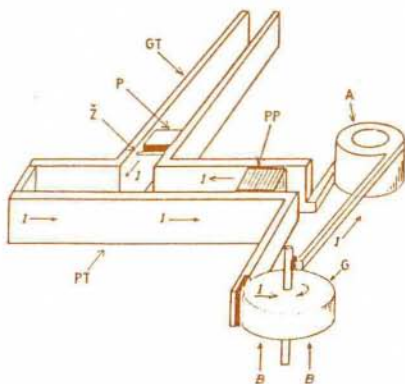


Slika 3. Tokovni top z živim srebrom, kakršnega uporablja P. Graneau na tehnični visoki šoli Massachusettsa.

vinsko prečko položijo med ploščata vodnika. Poskuse delajo tudi s prečko iz plastične snovi, na katero položijo na zadnji strani kovinski žičko. Žička izpari, ko vključijo tok, in v nastali kovinski pari nastane električni lok. Ta poganja prečko pred seboj kot morski val poganja deskarja. Najteže je doseči v zelo kratkem času dovolj velik tok in ga nato še kratek čas vzdrževati.

Že pred slabimi dvajsetimi leti so zgradili tokovni top na univerzi v avstralski Canberri. Kot dinamostroj z majhnim uporom so uporabili tako imenovani unipolarni generator. Ploščat kovinski valj so hitro zavrteli okoli geometrijske osi v magnetnem polju, ki je vzporedno s to osjo. Dinamostroj je pognal velik tok po krogu, brž ko je bil ta sklenjen. Sklenil ga je pomožni tokovni top. Velik aluminijasti induktor je deloval kot kratkotrajno skladišče magnetne energije in kot posrednik toka velikemu tokovnemu topu. Energija je dosegla 500 milijono

Slika 4. Veliki tokovni top z univerze v Canberri: glavni tokovni top GT, prečka iz plastične snovi — izstrek P, žička, pogosto iz tantala, Ž, pomožni tokovni top, PT in prečka tega topa kot stikalo PP, magnetno polje B, vrteča se plošča unipolarnega generatorja G, aluminijasti induktor za prenos toka A. Generator doseže največ 1.6 milijona amperov, induktor v povprečju čez kratek čas 0,5 milijona amperov.



nov joulov, tok pa je presegel milijon amperov. S 5 metrov dolgim topom so dosegli za 6 gramske prečke povprečni pospešek 3 milijone metrov na sekundo na kvadrat in hitrost več kot 5 kilometrov na sekundo (slika 4).

Pri velikem številu poskusov lahko naprave porabijo samo enkrat, ker velika odbojna sila med vzporednima vodnikoma zverži vodnike. Z izpopolnjenim tokovnim topom z majhnim razmikom med vzporednima vodnikoma so dosegli že hitrost okoli 11 kilometrov na sekundo. Ta hitrost bi zadostovala, da bi izstrelek zapustil Zemljo, če ne bi bilo zračnega upora. Menda so v Sovjetski zvezi dosegli pri izpopolnjenem tokovnem topu pospešek milijardo metrov na sekundo na kvadrat. Zdaj na veliko delajo poskuse s tokovnimi topovi predvsem na ameriških univerzah in v laboratorijih industrijskih družb ter preskušajo številne nove zamisli. Omenimo samo tokovne topove z vzporednima vodnikoma v obliki vijačnic in večstopenjske tokovne topove. Načrt za 8 kilometrski tokovni top, s katerim bi bilo mogoče vesoljsko ladjo pospešiti do hitrosti nad 11 kilometrov na sekundo, se zdi za zdaj še kot znanstvena fantastika. Tak top bi v približno dveh minutah porabil vso energijo precej velike elektrarne.

Tokovni top, ki so ga uporabljali že pred skoraj stosedemdesetimi leti, je za fizike in tehnike še danes zanimiv.

Janez Strnad

PISMA BRALCEV

Pisala nam je Katarina Kurent. Precej natančno nam je opisala, kako je sama razumela "paradoks" gospodične Samčeve iz knjige Martina Gardnerja Aha, pa te imam (str. 178). Katarini smo odgovorili v pismu, da pa našim bralcem ne povemo preveč, naj omenimo le, da gre za zanimiv navidezni paradoks: Gospodična Samčeva išče fanta svojih sanj. Ker je vesele narave, si želi veseljaka, toda ... v prvi skupini ugotovi, da je več veseljakov med brkatimi kot med nebrkatimi, prav tako v drugi skupini ..., zelo čudno pa je, da ko se obe skupini združita, gospodična Samčeva ugotovi, da bo lažje našla veselega človeka med nebrkatimi kot med brkatimi moškimi ...

Katarina nas opozarja tudi, da ne objavljamo rešitev fizikalnih nalog. Najbrž je glavni problem sploh pomanjkanje nalog. Lahko obljubimo, da se bomo poboljšali!

Vse bralce torej vabim, da si sami ogledajo "paradoks gospodične Samčeve", Katarini pa se lepo zahvaljujem za pismo.

Damjan Kobal

VZOREC IZ MOSKVE *

Redno seznanjanje s tekmovanji naših mladih matematikov bomo tokrat popestrili s pogledom na tuje. Postregli bomo s prgiščem nalog, ki so jih letos reševali osnovnošolci na tekmovanju v Moskvi. Za ilustracijo smo iz kopice nalog izbrali po tri (od vsaj desetih) za vsak razred. In zdaj z nalogami na dan:

7. razred

1. Kvadrat je razdeljen na šestnajst enakih kvadratkov. Vpiši v vsakega od njih eno od črk A, B, C ali D tako, da v nobeni vrstici, stolpcu in na nobeni glavni diagonalni ne bo nobena črka zapisana več kot enkrat.
2. Naj bodo točke M, N, K zaporedoma središča tetiv AB, BC in CD dane krožnice. Dokaži, da sta kota BMN in NKC enaka.
3. Poišči vse pare celih števil a in b , za katere sta oba korena trinoma $x^2 + ax + b$ strogo pozitivna in ne presegata $\sqrt{2}$.

8. razred

1. Podmnožica M množice $\{00, 01, \dots, 98, 99\}$ vseh "dvomestnih" števil ima naslednjo lastnost: V vsakem neskončnem zaporedju nenegativnih celih števil najdemo dve zaporedni cifri, ki tvorita element množice M . Vsaj koliko elementov ima množica M ?
2. Za vsak $x \in [0, 1]$ velja $|ax^2 + bx + c| \leq 1$. Kolikšna je lahko največ vrednost izraza $|a| + |b| + |c|$?
3. Tri posode, ki drže 1 l, 2 l oziroma 3 l so do vrha napolnjene s kislino, a v vsaki je njena koncentracija drugačna in ni znana. Kako bi prelili kislino v druge tri posode s prostorninami 1 l, 2 l in 3 l, tako da bo potem v vseh treh kislina z enako koncentracijo, pri tem pa nimamo na voljo nobene druge posode.

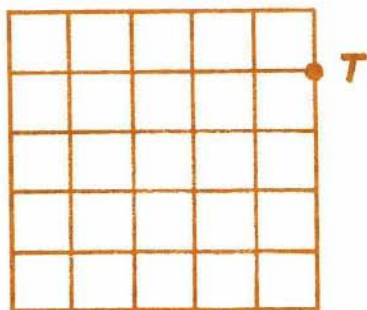
9. razred

1. V prostoru so štiri različne premice — dve rdeči in dve modri. Vsaka modra je pravokotna na obe rdeči. Dokaži, da sta bodisi rdeči bodisi modri

* Še svežega je Sergej Konjagin posredoval Dušanu Repovšu, ki ga je dobrodušno prepustil uredništvu.

premici med seboj vzporedni.

2. S strojem, ki stoji v točki T , moramo splužiti vse označene ulice mesta na sliki (te tvorijo 25 kvadratov s stranicami dolžine 1) in se ob koncu dela vrniti v točko T . Koliko je dolga najkrajša mogoča pot, ki jo pri tem prevozimo?



3. Ali je število $\cos \frac{\pi}{11} \cdot \cos \frac{2\pi}{11} \cdot \cos \frac{3\pi}{11} \cdot \cos \frac{4\pi}{11} \cdot \cos \frac{5\pi}{11}$ racionalno?

10. razred

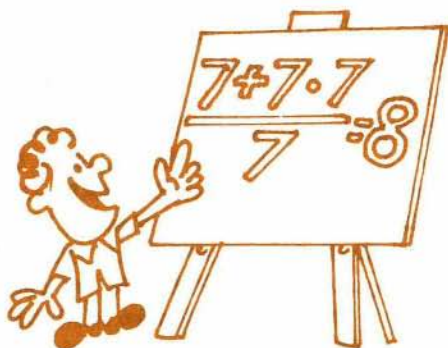
1. Ali obstaja taka funkcija, da njen graf v ravnini $\mathbb{R}^2$ seka vsaka premica te ravnine?
2. V trikotniku ABC s kotoma $\sphericalangle B = 70^\circ$, $\sphericalangle C = 80^\circ$ je točka M vrh enakostraničnega trikotnika CMB . Koliko meri kot MAB ?
3. Zaporedje števil $a_1, a_2, a_3, \dots, a_n, \dots$ pri vsakem $n \in \mathbb{N}$ zadošča pogoju $a_{n+1} = |a_n - 1|$. Dokaži, da je od nekega člena naprej periodično.

Rešitve ali nasvete boste našli v prihodnji številki Preseka.

Boris Lavrič

ŠTEVILKE IN ŠTEVILA

Sestavi števila 1, 2, 3, ..., 8, 9, 10 tako, da boš za vsako uporabil štirikrat številko 7! Na primer:



Marija Vencelj

25. REPUBLIŠKO TEKMOVANJE OSNOVNOŠOLCEV IZ MATEMATIKE

Letošnja republiška tekmovanja za zlato Vegovo priznanje so potekala v soboto, 20. maja 1989 hkrati v Ljubljani, Celju, Kopru, Mariboru, Novi Gorici in Novem mestu. Tekmovalo je 230 sedmošolcev in 226 osmošolcev.

Trinajstčlanska komisija pod predsedstvom mag. Jožeta Malešiča je pripravila naloge, pregledala rešitve, določila kriterije za podelitev zlatih Vegovih priznanj in izbrala ekipo za zvezno tekmovanje, ki je bilo letos v Banja Luki. Vsi tekmovalci so prejeli Presekove značke.

Zlato Vegovo priznanje so si prislužili sedmošolci, ki so dosegli vsaj 13 od 25 možnih točk, in osmošolci, ki so dosegli vsaj 16 od 25 možnih točk.

Nagrade so osvojili:

7. razred

I. nagrada: Urban MRAK, OŠ Ivan Grohar, Škofja Loka, Damijan KUJAR, OŠ France Prešeren, Kranj in Tomaž KATRAŠNIK, OŠ Bojan Ilich, Maribor;

II. nagrada: Djurica POPLAŠEN, OŠ Katja Rupena, Novo mesto, Petra IPAVEC, OŠ Komenda – Moste in Narvika BAVCON, OŠ IX. korpusa NOVJ, Nova Gorica;

III. nagrada: Sašo TASIČ, OŠ Majde Vrhovnik, Ljubljana in Klemen KOZMUS, OŠ Jurij Dalmatin, Krško.

8. razred

I. nagrada: Blaž MIHELJAK, OŠ Franjo Vrnč, Slovenj Gradec, Aleš KEBER, OŠ Prežihov Voranc, Ravne na Koroškem, Aleš HAJNŠEK, OŠ Katja Rupena, Novo mesto in Bojan GORNIK, OŠ XV. SNOUB Belokranjska, Metlika;

II. nagrada: Mirjam KOTAR, OŠ Ivan Grohar, Škofja Loka, Mitja ŠTRUKELJ, OŠ IX. korpus NOVJ, Nova Gorica, Branko KAVŠEK, OŠ Edvard Kardelj, Lucija, Andrej SRAKAR, OŠ Valentin Vodnik, Ljubljana, Borut KERŠEVAN, OŠ Valentin Vodnik, Ljubljana, Janez KUŠAR, OŠ Cvetko GOLAR, Škofja Loka, Jure ZUPAN, OŠ Edvard Kardelj, Trzin;

III. nagrada: Erik KERŠEVAN, OŠ Valentin Vodnik, Ljubljana, Zoran BAJC, OŠ Jože Mihevc, Idrija, Stanko HORJAK, OŠ Anton Aškerc, Rimske Toplice in Mitja MASTNAK, OŠ Franjo Malgaj, Šentjur.

NALOGE

7. razred

1. Šestmestno naravno število ima v desetiškem zapisu paroma enaki prvo in četrto cifro, drugo in peto cifro ter tretjo in šesto cifro. Ugotovi, ali je to število deljivo s 13. Odgovor utemelji.

2. Za katero vrednost spremenljivke x ima izraz

$$13 - \frac{5}{2 + (x + 0,3)^2}$$

najmanjšo vrednost?

3. Izračunaj vrednost izraza

$$-\frac{1}{0,25} \cdot \left(\left(-\frac{1}{0,25}\right)^2 \cdot \left(\frac{1}{2}\right)^3 - \left(-\frac{1}{0,5}\right)^3 \cdot \left(-\frac{1}{2}\right)^3 - \left(-\frac{1}{0,8}\right)^2 : \left(2 - \frac{2}{2^2}\right)^2\right) =$$

4. Nad stranico AB kvadrata $ABCD$ je narisana romba $ABEF$, ki ima dvakrat manjšo ploščino kot kvadrat. Notranji kot $\sphericalangle BAF$ romba $ABEF$ je oster. Kolik kot oklepata diagonali AC in AE ?

5. a) Načrtaj polkrog, ki ima premer EF dolg 8 cm. Polkrogu očrtaj enakokrak pravokotni trikotnik tako, da bo njegova hipotenuza ležala na premici EF .
b) Izračunaj razliko ploščin obeh likov ($\pi = 3,14$).

8. razred

1. Teža kosa zlitine bakra in cinka je 24 N, potopljenega v vodi pa le še $21 \frac{2}{9}$ N. Kolikšna je teža bakra v tem kosu in kolikšna teža cinka, če vemo, da je vzgon bakra v vodi $11 \frac{1}{9}$ % teže, vzgon cinka v vodi pa $14 \frac{2}{7}$ % teže?

2. Ali velja

$$\left(\frac{5}{8}\right)^2 + \frac{3}{8} = -\frac{5}{8} + \left(\frac{3}{8}\right)^2$$

Pri katerih ulomkih tudi smeš namesto prvega ulomka kvadrirati drugega, a se njuna vsota ne spremeni? Odgovor utemelji.

3. Število 3 izrazi kot razliko večkratnikov števil 2000 in 1989. Pomagaj si z

naslednjimi podatki:

- število 3 se da izraziti kot razlika večkratnikov števil 123 in 105

$$3 = 6 \cdot 123 - 7 \cdot 105$$

- število 105 se nadalje izraža kot razlika večkratnikov števil 123 in 1989

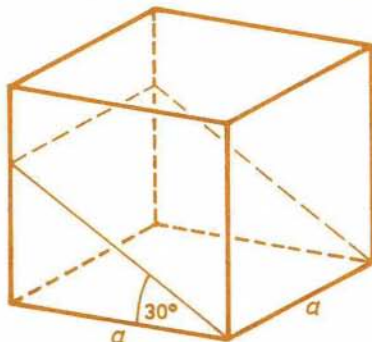
$$105 = 5 \cdot 1989 - 80 \cdot 123$$

- število 123 pa se da izraziti kot razlika večkratnikov števil 2000 in 1989

$$123 = 192 \cdot 2000 - 193 \cdot 1989$$

4. Obseg romba je 10 cm, vsota dolžin obeh diagonal pa 7 cm. Izračunaj ploščino romba.

5. Pravilna štiristrana prizma ima za osnovno ploskev kvadrat s stranico a . Če položimo skozi enega od osnovnih robov ravnino, ki z osnovno ploskvijo oklepa kot 30° , razdelimo prizmo na dve telesi, katerih prostornini sta v razmerju 2 : 3. Izračunaj višino prizme.



Aleksander Potočnik

BEG IZ LABIRINTA

V članku "Hoja po labirintu" ste spoznali natančen postopek, kako lahko vsak povezan graf prehodimo tako, da gremo po vsaki povezavi natanko dvakrat. Če je labirint kolikor toliko spodoben, potem je zagotovo presneto velik in tedaj preizkušanje postopka s svinčnikom postane dolgočasno. Kaj naredimo v takem primeru? Napišemo program! Preden pa se lotite pisanja, premislite najprej, kako boste predstavili graf v računalniku. Omenimo le, da običajno predstavimo graf z matriko sosednosti ali pa s seznamom sosedov. Nič hudega, če teh predstavitev ne poznate, pričakujemo, da jih izumite sami. Kdor pa bi rad kaj več izvedel o tem, naj pogleda v knjigo Jerneja Kozaka Podatkovne strukture in algoritmi. Torej na delo! Pošljite nam svoje rešitve, najboljšo bomo objavili!

Sandi Klavžar

RAČUNALNIŠTVO

NEVRONSKE MREŽE

I. del.

Uvod

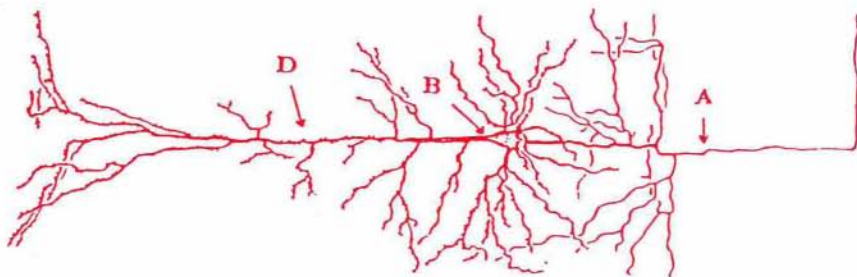
Nekateri računalnikarji so prepričani, da bo računalnik prihodnosti deloval kar se da paralelno, sestavljen iz množice podobnih elementov, ki bodo med seboj vsepovprek povezani. Znal bo sam odpravljati manjše napake, oziroma tudi ob delno pokvarjenih podatkih bo dal še vedno dobre rezultate. Skratka, deloval bo podobno kot možgani živih bitij. Izdelava takega računalnika je še zelo odmaknjena, vendar nekateri rezultati v elektronski tehnologiji kažejo, da je to možna pot. Do kemijskega ali biološkega računalnika pa je še zelo daleč.

Zaradi obsežnosti smo prispevek razbili v dva dela. V prvem delu smo opisali teoretično ozadje nevronske mreže, v drugem pa nekaj izkušenj in spoznanj, ki smo jih dobili s programiranjem mreže.

Možgani živih bitij lahko hkrati izvajajo več opravil: hojo na primer spremlja opazovanje okolice, reagiranje na njo, sporazumevanje s podobnimi bitji, ipd. Najboljši in najhitrejši računalnik komaj zmore eno od navedenih opravil. Izredna sposobnost procesiranja možganov je že od nekdaj porajala vprašanje kako narediti model, ki bi bil čimbolj podoben živim možganskim celicam. Kaj omogoča množici preprostih celic, da so sposobne tolikšne procesne moči?

Biološko procesiranje

Skušajmo na preprost idealiziran način prikazati delovanje nevrona, možganske celice, kot jo vidimo na sliki 1.



Slika 1. Nevron sestavljajo: A - akson,
B - telo nevrit in D - dendrit.

Možganska celica dobiva dražljaje od drugih sorodnih celic preko vhodov, **dendritov**. **Aksoni** so njeni izhodi, preko katerih potujejo dražljaji k drugim sorodnim celicam. Nevroni prevajajo in ustvarjajo nova vznburjenja, potem ko se signali s primerjanjem z drugimi krepijo ali slabijo. Vznburjenje iz aksona ene celice k dendritom druge celice potuje preko **sinaps**. Poznamo več vrst sinaps. Nekatere so **stimulatorne**. Te naj bi delovale vznburjajoče, druge **inhibitorne**, pa naj bi zavirale vznburjanje nevrona.

Povprečni možgani človeka vsebujejo nekje med 10^{10} in 10^{12} nevronov. Nekateri od teh nevronov imajo samo nekaj sinaps, medtem ko je le-teh pri drugih nekaj sto tisoč. Lahko rečemo, da je v možganih okrog 10^{15} sinaps. Vsaka sinapsa se lahko nahaja v vsaj dveh različnih stanjih (vznburjajočem ali zaviralnem), Zato obstaja $(2^{10})^{15}$ na različne načine povezanih nevronov ali topologij nevronov. Ker se z učenjem ustvarjajo nove sinapse, ali pa se jačajo oziroma slabijo obstoječe povezave, se topologija sinaptičnih povezav neprestano spreminja.

Omenimo še nekaj značilnosti nevronov:

- Nevroni so počasni; najhitreje se odzovejo šele v nekaj milisekundah.
- Trošijo zelo malo energije, celotni človeški možgani samo okrog 100 wattov.
- So neobčutljivi na točnost podatkov in okvare. Vemo namreč, da vsak dan odmre veliko možganskih celic. Ne glede na to pa možgani delujejo brez prekinitev.

Zgradba računalnika

Zelo zanimiva je primerjava računalnika z možganskim modelom. Moderni super računalnik ima tja do 10^9 zlogov pomnilnika, kar bi pomenilo približno 10^{10} tranzistorjev, medtem ko v centralnem procesorju ni niti 10^8 tranzistorjev. Hitrost delovanja je okrog 10^{-9} sekunde. Za delovanje porabi računalnik 10^5 wattov energije. Če želimo natančne rezultate, moramo imeti tudi točne podatke. Kar se popravljanja napak tiče, smo omejeni le na odkrivanje ali popravljanje napak pri prenašanju informacij iz pomnilnika v centralno procesno enoto in nazaj.

Tipičen računalnik vsebuje še precej manj elementov. Kaj hitro spoznamo, da je možganskih celic neprimerno več, a so veliko počasnejša

od tranzistorjev računalnika.

Za elektronski računalnik tudi velja, da ima iz polprevodnikov zgrajene preproste gradnike kot so logična vrata IN oziroma ALI, iz teh pomnilne celice, iz skupine pomnilnih celic registre itd. Na vrhu piramide sestavljanja pa imamo že kar procesorje, ki jih sestavljamo v večprocesorske sisteme, na primer paralelne procesorje. Res je računalnik zamotana naprava, vendar lahko v vsakem trenutku natančno ugotovimo, v kakšnem logičnem stanju so vezja in katero bo njihovo naslednje stanje. Tega vsekakor ne moremo reči za možgane.

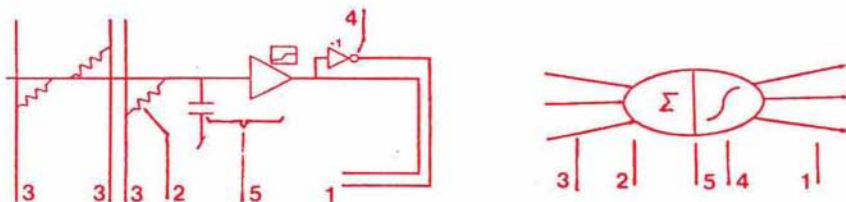
Poglejmo še enkrat večprocesorske sisteme: čeprav vsak procesor zase ne predstavlja neke posebne procesne moči, pa naletimo na silno zanimivo obnašanje, če so povezani med seboj v mreže. Pokaže se, da se tudi nevroni, povezani v mreže, obnašajo na podoben način. En sam nevron ne pomeni veliko, mreža le-teh pa je sposobna zelo zamotanih operacij.

Načelo povezanosti srečamo še drugod v naravi: ena sama mravlja ni nevarna, pa tudi ni sposobna zgraditi mravljišča. Zgradijo ga le organizirane mravlje v skupnosti.

V nadaljevanju bomo opisali izbrani (elektronski) model nevronske celice, s katerim skušamo ponazoriti (zelo poenostavljeno) delovanje posameznega nevrona. Želimo pokazati nekaj zanimivih spoznanj, ko tovrstne celice povezujemo v mrežo.

Model nevrona

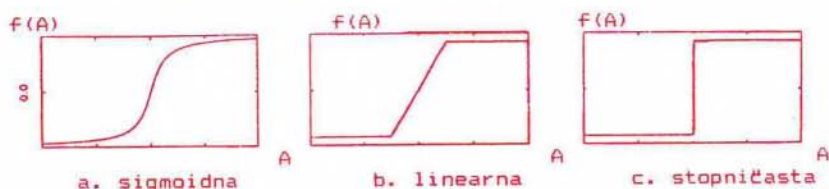
Povejmo še enkrat, da je model nevrona zelo **poenostavljen**. Kot vidimo na sliki 2, nam vhodne povezave pomenijo dendrite, ki prenašajo signale preko pozitivne (stimulatorne) ali negativne (inhibitorne) upornosti (sinapse) k vhodu nevrona, ki je v našem primeru ojačevalnik.



1: akson, 2: sinapsa, 3: dendrit, 4: odziv in 5: stanje nevrona.

Slika 2. a. Model (elektronskega) nevrona, b. Shematični prikaz nevrona.

Odziv nevrona nam v modelu ponazarja izhod ojačevalnika z različnimi prenosnimi funkcijami. (Glej sliko 3).



Slika 3. Prenosne funkcije nevrona.

Nevroni pošiljajo izhodne dražljaje k drugim nevronom po aksonih. V modelu izhod nevrona ponazorimo s prenosno funkcijo f ojačevalnika:

$$O = f(A), \quad (1)$$

kjer je O izhod ojačevalnika in A vpliv sinaps.

Povezave se v modelu ne spreminjajo, prav tako se informacija prenaša samo v eno smer. Sinapsa pomeni v modelu spremenljivo upornost, ki je na eni strani povezana z nevronom, na drugi pa z aksonom. Vzbujaajoče in zaviralne sinapse bomo v modelu ponazorili s pozitivno in negativno utežjo W_{ij} . Rezultirajoč vpliv sinaps bomo poenostavljeno zajeli v enačbi (2). V našem modelu pomeni j sprejemajoči nevron, i pa oddajajoči nevron. Izhodna vrednost (oddajajočega) nevrona pride do sinapse, se primerja oziroma množi z jakostjo povezave (utežjo) ter vstopi v nevron. Tako dobimo za j -ti nevron vsoto zmnožkov uteži in vrednosti i -tega vhoda. Simbolično to zapišemo:

$$A_j = \sum_i W_{ji} O_i \quad (2)$$

kjer so: A_j skupni vpliv sinaps j -te celice,
 O_i izhod i -te (predhodne) celice in
 W_{ji} utež povezave med nevronoma iz različnih nivojev.

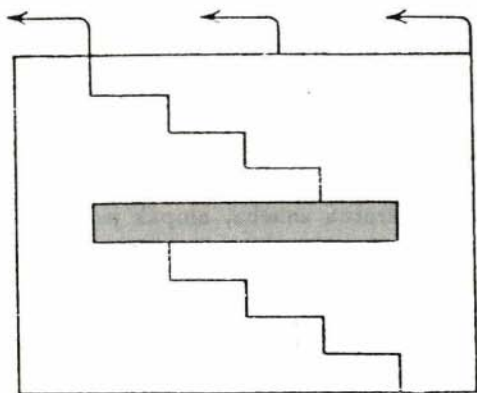
Vloga sigmoidne funkcije je izhodne vrednosti postaviti med vnaprej določene vrednosti. Jakost povezave je pozitivna (vzbujajoča) ali negativna (zaviralna) ali nič (ni povezave). Njena vrednost se s časom lahko spreminja. Navadno uteži niso vnaprej znane, pač pa se spreminjajo z **učnjenjem**.

Večnivojske nevronske mreže

Ker en sam nevron ne pomeni veliko, jih povezujemo v nivoje. Tako vodijo izhodi predhodnega nivoja kot vhod v naslednji nivo, izhodi le-tega zopet v naslednjega itd. Na izhodih zadnjega nivoja dobimo rezultat (glej sliko 4). Vmesnih nivojev, torej tistih med prvim in zadnjim nivojem, je lahko več. Tudi število nevronov v nivoju je poljubno. Večnivojski način povezovanja nevronov je samo eden od načinov povezovanja nevronov v mreže. Ko so izhodi nevronov povezani z nevroni v različnih nivojih ali sami s seboj, govorimo o poljubno povezanih nevronih. Zaradi velikega števila topologij se omejimo na nekatere značilne povezave: vsak nevron z vsakim, vsak samo s svojimi sosedi, naključno povezani nevroni ipd.

V splošnem velja, da je funkcija (1) stopničasta (glej sliko 3c). Tedaj imamo opraviti z **linearnimi** modeli nevronov. Le-ti so običajno povezani v eno nivojsko mrežo. Uporabljamo jo za asociativno pomnjenje ali kot asociativne pomnilnike. Druga skrajnost nastopi, ko imamo več nivojev, tedaj govorimo o več nivojskih linernih mrežah. Vsekakor so bolj zanimivi tisti modeli nevronske mreže, ki uporabljajo sigmoidne in linearne prenosne funkcije na izhodih (glej sliko 3a,b). Tovrstnim modelom zato tudi rečemo **sigmoidni**, mreži takih celic pa sigmoidna mreža. Skico dvo nivojske mreže vidimo na sliki 4.

Kakor je mrež več vrst, tako je tudi postopkov učenja več. Omejili se bomo na tistega, ki je najbolj primeren za (več) nivojske mreže. Spoznali bomo, da nam učenje ne predstavlja nič drugega kot način, kako poiskati take uteži, da bo nevronska mreža dala želeno preslikavo vhoda na izhod.



Veselko Guštin

**RAZREŽI NA DVA
KOSA IN SESTAVI
KVADRAT — Rešitev**

Lik razrežemo kot na sliki in nato premaknemo desni del za 1 enoto navzgor in za 2 enoti v levo.

Marija Vencelj

IŠČEMO NIČLO

Eno od zelo pogostih opravil v matematiki je iskanje ničel določene funkcije. Iščemo točko x , za katero velja

$$f(x) = 0$$

Točki x , ki zadošča gornjemu pogoju, pogosto rečemo tudi *koren enačbe*. Pred takim opraviom ste se znašli (ali pa se še boste), ko ste iskali rešitve kvadratne enačbe

$$ax^2 + bx + c = 0$$

No, že od tam veste, da lahko take točke sploh ni, ali pa jih je lahko več. Na primer: enačba

$$x^2 - 5x + 6 = 0$$

ima dve rešitvi in sicer $x = 3$ in $x = 2$, enačbi

$$x^2 + 1 = 0$$

ne zadošča nobeno realno število, enačbi

$$x^2 - 4x + 4 = 0$$

pa ustreza le $x = 2$. Vemo tudi, da kvadratno enačbo brez težav uženemo. Izračunamo

$$D = b^2 - 4ac$$

in če je D pozitiven ($D > 0$), sta dve rešitvi, če je D negativen, rešitve v realnem ni, če pa je D enak nič, je natanko ena rešitev. Z iskanjem rešitve ni težav, saj dobro poznamo obrazec

$$\begin{aligned} x_1 &= \frac{-b + \sqrt{D}}{2a} \\ x_2 &= \frac{-b - \sqrt{D}}{2a} \end{aligned}$$

Zaplete se le, če enačba ni prava kvadratna enačba, ampak je $a = 0$. Enačba je potem še enostavnejša, linearna

$$bx + c = 0$$

Ta ima le eno rešitev in sicer $x = -c/b$, če le b ni enak nič. Če pa je, potem imamo dve možnosti. Kadar je tudi c enak nič nam enačbo reši

vsak x , saj bomo na levi vedno dobili 0. Če pa c ni nič, pač rešitve ni.

Rešitve kvadratne enačbe					
$ax^2 + bx + c = 0$					
$a = 0$			$a \neq 0$		
$b = 0$		$b \neq 0$	$D = b^2 - 4ac$		
$c = 0$	$c \neq 0$		$D < 0$	$D = 0$	$D > 0$
vsa realna os	ni rešitve	ena rešitev	ni rešitve v realnem	ena rešitev	dve rešitvi

Napišimo program, ki nam bo rešil poljubno kvadratno enačbo. Zapišimo ga kar v BASICU.

```

10 REM
20 REM RESEVANJE KVADRATNE ENACBE
30 REM
40 INPUT 'Vnesi koeficiente A, B in C', A, B, C
50 IF A = 0 THEN GOTO 110 : REM linearna enacba
60 D = B*B - 4*A*C
70 IF D < 0 THEN PRINT 'Ni realne resitve' : STOP
80 IF D = 0 THEN PRINT 'Resitev je ' ; -B/(2*A) : STOP
90 X1 = (-B + SQR(D))/(2*A) : X2 = (-B - SQR(D))/(2*A)
100 PRINT 'Resitvi sta ' ; X1 ; ' in ' ; X2 : STOP
110 REM linearna enacba
120 IF B <> 0 THEN PRINT 'Resitev je ' ; -C/B : STOP
130 IF C = 0 THEN PRINT 'Resitev so vsi x' : STOP
140 PRINT 'Ni resitve'

```

Brž preiskusimo program. Deluje prav! No pa vtiskajmo za koeficiente še 1, -5000.002, 10. Brž se lahko prepričamo, da sta rešitvi 5000 in 0.002. Kaj pa naš program? Glej ga šmenta! Rešitvi, ki ju je izračunal sta 5000 in 0.001953. Napaka res ni velika, ampak le zakaj je prišlo do nje? In zakaj je ena rešitev točna, druga pa ne? Težava je v tem, ker računalnik ne more računati povsem natančno, ampak vedno na določeno število mest. Ponavadi napaka ni velika, ampak napake imajo ponavadi mlade. In tako lahko le majhna napaka na začetku povzroči, da je končni rezultat povsem napačen. In kje se je vtihotapila napaka? Poglejmo. $\sqrt{(-5000.002)^2 - 4 \cdot 10 \cdot 1} \approx -5000.002$ In ko odštevamo dve približno enaki številki, pride končno število mest, ki jih upošteva računalnik, še posebej do veljave. Mogoče bo vaš računalnik gornji problem izračunal

pravilno. Vendar ne bo potrebno veliko poskušanja, da boste našli primer, ko rešitvi ne bosta povsem pravi.

Na srečo se pri reševanju kvadratne enačbe tovrstnim napakam lahko izognemo. Kot smo videli, je bila ena rešitev točna. Je to vedno X_1 ? No, če je b negativen, da. Če pa je b pozitivno število, bo do odštevanja približno enakih števil lahko prišlo prav pri računanju X_1 in bo X_2 pravilen. Kako pa točno izračunati drugi koren. Pomagamo si z Vietovimi obrazci. Eden med njimi pravi, da je produkt rešitev kvadratne enačbe enak c/a

$$x_1 \cdot x_2 = c/a$$

V programu vrstico 90 nadomestimo z

```
85 IF B > 0 THEN X1 = (-B - SQR(D)) / (2*A) : GOTO 95
90 X1 = (-B + SQR(D)) / (2*A)
95 X2 = C/(A*X1)
```

Vse lepo in prav. Kaj pa če bi radi našli rešitev za poljubno funkcijo in ne le kvadratno? Npr.

$$x^4 - \frac{2}{\sqrt{x^2 - 1}} + 4 = 0$$

Ali pa še kakšno zapletenejšo funkcijo? Saj ni treba, da bi znali poiskati vse rešitve. Ampak vsaj kakšno bi pa že radi našli.

Najenostavnejša metoda je verjetno poizkušanje. Izberemo si točko, izračunamo vrednost funkcije in postopek ponavljamo toliko časa, dokler ne naletimo na točko, kjer je funkcijska vrednost res enaka nič. Vendar s tako metodo ne bomo zadovoljni. Preveč je odvisna od naše sreče pri izbiri točk. In kaj če slučajno take točke sploh ni? Kdaj se ustaviti?

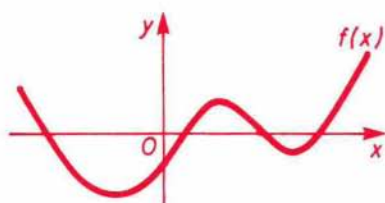
No, če je funkcija dovolj 'lepa', obstaja postopek, ki nas vedno pripelje do rešitve. Postopku rečemo **bisekcija** ali **metoda razpolavljanja**. S pomočjo nje poiščemo rešitev enačbe

$$f(x) = 0$$

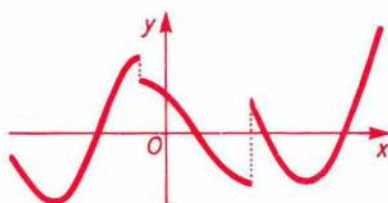
za poljubno zvezno funkcijo f . Kaj pa sploh je to zvezna funkcija? Enostavno. To je funkcija, katere slika ni nikjer strgana, nikjer prekinjena. Npr. na sliki 1 je zvezna funkcija, funkcija na sliki 2 pa ni zvezna.

Iščemo točke, kjer slika funkcije **zadene** koordinatno os x .

Pa še nekaj potrebujemo za začetek postopka. Levo in desno mejo intervala, kjer iščemo ničlo funkcije. Meji moramo postaviti tako, da je



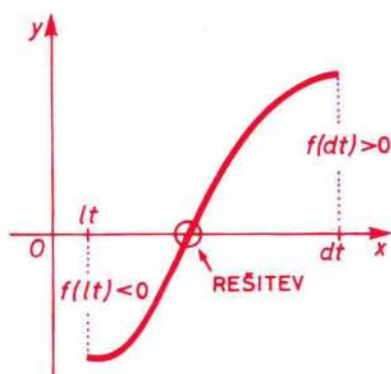
Slika 1: Zvezna funkcija



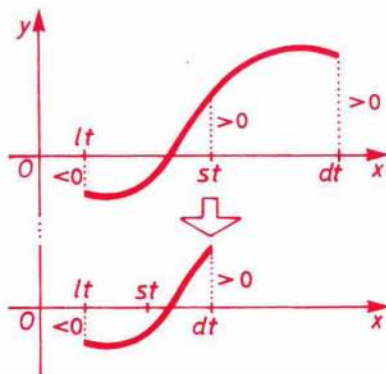
Slika 2: Nezvezna funkcija

funkcija v mejnih točkah nasprotnega predznaka. Torej, če je na levem krajišču pozitivna, mora biti na desnem negativna ali obratno. Na ta način zagotovimo, da x , ki reši gornjo enačbo res obstaja. Kratek razmislek nas prepriča o tem. Če smo na negativni strani koordinatne osi x in moramo priti na pozitivno stran, pri tem pa se moramo gibati po neprekinjeni poti, je očitno, da bomo morali vsaj enkrat prečkati koordinatno os. Tista točka pa je že iskana rešitev (slika 3)

Kako pa bomo prišli do točke, kjer prečkamo os? Vzemimo srednjo točko in pogledjmo vrednost funkcije le tam. Če je enaka nič, smo jo že našli. Drugače ima pozitivno ali negativno vrednost. Sedaj glede na predznak spremenimo bodisi levo, bodisi desno mejo, tako da je ima funkcija na krajiščih še vedno nasprotni predznak. Postopek ponavljamo, dokler ne najdemo rešitve. Slika 4 bo verjetno dovolj zgovorna



Slika 3



Slika 4: Bisekcija

Zapišimo še program, tokrat v pascalu

```

program test_bisek;

var  a,b : real;   { interval }
     nat : real;   { natancnost}
     n : integer; { iteracij }
     ok : integer;
     nicla : real;

{ ----- }
function f(x:real) : real;
{ funkcija, katere niclo iscemo }
begin
    f := x*x - sqrt(x) - 1
end;
{ ----- }

procedure bisek (lt,dt,nat : real; var n : integer;
                 var nic : real;
                 var ok : integer );

{ z metodo bisekcije poisce niclo funkcije f(x).
  lt : leva tocka intervala
  dt : desna tocka intervala
  nat : natancnost
  n : maksimalno stevilo iteracij
      v rezultatu dejansko stevilo

  nic : izracunana nicla, ce ok = 0
  ok = 1 : f(lt) * f(dt) >= 0
      = 2 : n premajhen
}

var
    st : real;      {srednja tocka}
    it : integer;   { stevec iteracij }
    nad : Boolean;

begin
    if f(lt) * f(dt) > 0 then ok := 1 {napacno izbran interval}
    else begin
        { pravilno predznacena funkcija }
        it := 1; nad := true;
        while (it <= n) and nad do begin
            st := lt + (dt - lt)/2;      { izbira naslednje tocke }

```

```

if (f(st) = 0) or ((dt - lt)/2 < nat) then begin
  { našli smo ničlo }
  ok := 0;
  nic := st;
  nad := false;
end {if}
else begin
  it := it + 1;
  if f(lt)*f(st) > 0 then lt := st { spremenimo levo }
  else dt := st { ali desno mejo }
end {else}
end; {while}
if it > n then ok := 2 { prevec iteracij }
end; {if}
n := it;
end; { bisek }

begin
  write(' levo krajisce '); readln(a);
  write(' desno '); readln(b);
  write(' maks. iteracij '); readln(n);
  write(' natančnost '); readln(nat);
  writeln;
  bisek(a,b,nat,n,nicla,ok);
  case ok of
    0 : begin writeln(' ničla je ',nicla);
              writeln('iteracij : ',n)
          end;
    1 : writeln(' napacen interval ',f(a),f(b));
    2 : writeln(' premalo iteracij ');
  end; { case }
end.

```

Če gledamo postopek s strogo matematičnega stališča, moramo s postopkom prenehati, ko pridemo do točke, kjer velja $f(x) = 0$. V programu pa prenehamo, ko je izpolnjen pogoj

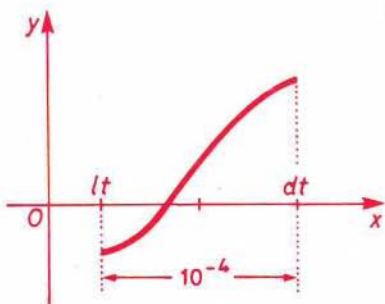
$$(f(st) = 0) \text{ or } ((dt - lt)/2 < nat)$$

kjer je nat željena natančnost. Na sliki namreč vidimo, da se lahko zgodi, da sta leva in desna meja že povsem blizu skupaj, funkcija pa v srednji točki še vedno ni enaka nič. Vendar ne bi imelo smisla, da s postopkom

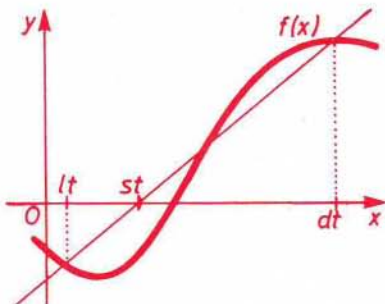
nadaljujemo, saj se izračunana rešitev od prave razlikuje za kvečjemu toliko, kot je konstanta *nat*.

Bisekcija ima to ugodno lastnost, da nas, brž ko smo si izbrali ustrezen začetni interval, vedno pripelje do rešitve (seveda, če je funkcija na izbranem intervalu res zvezna). Njena slaba lastnost je edino v tem, da do rešitve pridemo dokaj počasi, še posebej, če je začetni interval velik. Na vsakem koraku ga namreč le razpolovimo. Od tod izvira tudi ime postopka, **bi-sekcija**. Zato so se mnogi trudili, da bi našli postopek, ki bi tudi vedno pripeljal do rešitve, a hitreje. No žal takega postopka ni. Obstajajo sicer metode, ki so hitrejša, a mora imeti funkcija na izbranem intervalu še druge lastnosti. Taka postopka sta npr. Newtonova in sekantna metoda, ki si ju bomo ogledali kdaj drugič. Danes pa pogledajmo še postopek, ki je podoben bisekciji in nas lahko hitreje pripelje do rešitve. Obstajajo pa žal primeri, kjer se obnaša slabše kot bisekcija. To je **metoda lažnega mesta** ali **metoda regula falsi**.

Ta metoda se od bisekcije razlikuje le v izbiri točke, kjer poskusimo najti ničlo. Pri bisekciji je to razplovišče intervala, pri metodi regula falsi pa točka, kjer premica skozi točki $(lt, f(lt))$ in $(dt, f(dt))$ seka x os.



Slika 5



Slika 6: Izbira točke pri metodi Regula falsi

V programu moramo zato le spremeniti mesto, kjer si izbiramo naslednjo točko. Namesto

```
st := lt + (dt - lt)/2;    { izbira naslednje točke }
```

moramo uporabiti

```
st := dt - f(dt)*(dt - lt)/(f(dt) - f(lt));
```

Smiselno je spremeniti tudi pogoj za ustavitev. Pri metodi Regula falsi namesto testa dolžine intervala raje primerjamo, koliko se je spremenila 'srednja' točka. Zato si moramo staro točko zapomniti. Program boste popravili kar sami. Zapišimo le novi pogoj za ustavitev.

$$(f(st) = 0) \text{ or } (abs(pst - st) < nat)$$

Primerjajmo obe metodi

Regula falsi			Bisekcija		
$f(x) = x^2 - \sqrt{x} - 1$					
nat = 0.001, lt = 1.0, dt = 2.0					
n	st	f(st)	n	st	f(st)
1	1.3867	-0.2546	1	1.5000	0.02525
1	1.4716	-0.04758	2	1.2500	-0.5555
3	1.4870	-0.008367	3	1.3750	-0.2819
4	1.4896	-0.001455	4	1.4375	-0.1325
5	1.4901	-0.000253	5	1.4687	-0.05269
6	1.4902	-0.000044	6	1.4843	-0.01498
			7	1.4921	0.005072
			8	1.4882	-0.004970
			9	1.4902	0.00004693
			10	1.4892	-0.002462
			11	1.4897	-0.001208
			12	1.4899	-0.0005806
			13	1.4901	-0.0002668
			14	1.4902	-0.0001099

Kot vidimo, smo z istimi podatki pri bisekciji potrebovali 14 korakov, z metodo regulo falsi pa 6. Žal pa ni vedno tako. Včasih z bisekcijo hitreje najdemo ničlo, npr. že če si v zgornjem primeru izberemo drugačen začetni interval, tako da ne moremo reči, da je Regula falsi v splošnem boljša metoda kot bisekcija.

Matija Lokar

NALOGE O DELJIVOSTI ŠTEVIL

Če sta x in y taki celi števili, da je $8x + 15y$ deljivo z 29, je tudi število $5x + 13y$ deljivo z 29. Dokaži!

Dragoljub M. Milošević, prev. Peter Petek

5. ŠOLSKO TEKMOVANJE IZ MATEMATIKE ZA SREDNJEŠOLCE - Rešitve s strani 122

Prvi letnik

- Če dvakrat zaporedoma razstavimo razliko kvadratov, imamo:

$$(2n+1)^4 - (2n-1)^4 = ((2n+1)^2 - (2n-1)^2)((2n+1)^2 + (2n-1)^2) =$$

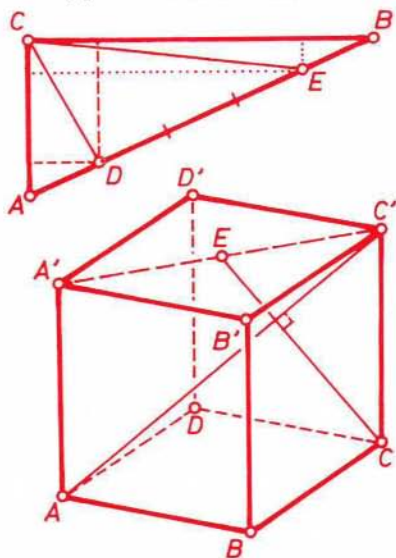
$$= 4n \cdot 2 \cdot (4n^2 + 4n + 1 + 4n^2 - 4n + 1) = 16n(4n^2 + 1), \text{ kar je deljivo s } 16.$$
- Nastavimo enačbo $(a-1)/(b-1) = a/b+1$ in izrazimo $a = b^2, b \neq 1$.
- Če seštejemo elemente v prvem stolpcu, ugotovimo, da mora biti srednji element v drugi vrstici 13, zato je desni element v prvi vrstici 14 in končno $N = 9$.
- Pravokotnik $ABCD$ ima ploščino 80cm^2 , izrezani trikotnik EBG pa ima stranico $EB = 5\text{cm}$ in višino na to stranico 4cm , zato ploščino 10cm^2 . Iskana ploščina lika je torej 70cm^2 .

Drugi letnik

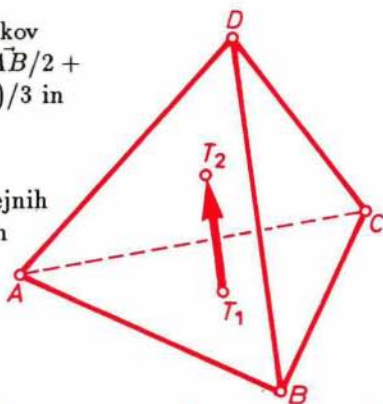
- Nastavimo enačbo $(20 \cdot 62 + x)/21 = 63$, pa dobimo $x = 83$.
- Iz $CD^2 = (4 \cdot AC/5)^2 + (BC/5)^2$ in $CE^2 = (AC/5)^2 + (4 \cdot BC/5)^2$ sledi $CD^2 + CE^2 =$

$$= 17 \cdot (AC^2 + BC^2)/25 =$$

$$= 17 \cdot AB^2/25.$$
- Izrazimo $\vec{CE} = \vec{CC'} - k \cdot \vec{AC}$ in $\vec{AC'} = \vec{AC} + \vec{CC'}$, upoštevajmo, da sta $\vec{CE}$ in $\vec{AC'}$ med seboj pravokotna, pa imamo $|\vec{CC'}|^2 - k \cdot |\vec{AC}|^2 = 0$, saj sta tudi $\vec{AC}$ in $\vec{CC'}$ med seboj pravokotna. Odtod je $k = 1/2$, zato tudi $A'E/A'C' = 1/2$.



4. Naj bosta T_1 in T_2 težišči trikotnikov ABC in ACD . Potem je $A\vec{T}_1 = \vec{AB}/2 + (-\vec{AB}/2 + \vec{AC})/3 = (\vec{AB} + \vec{AC})/3$ in $A\vec{T}_2 = (\vec{AC} + \vec{AD})/3$ ter $T_1\vec{T}_2 = A\vec{T}_2 - A\vec{T}_1 = (\vec{AD} - \vec{AB})/3 = \vec{BD}/3$. Zveznica težišč dveh mejnih ploskev je torej vzporedna s tistim robom tetraedra, ki ni stranica teh dveh mejnih ploskev.

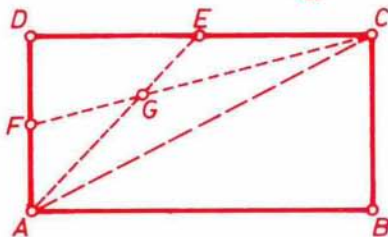


Tretji letnik

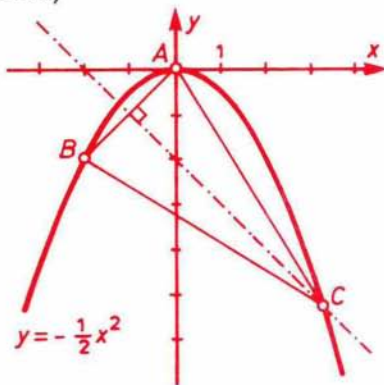
1. G je težišče trikotnika ACD , zato je $GC/FC = 2/3$. Iskano razmerje je

$$\begin{aligned} S(ABCG)/S(FCD) &= \\ &= S(ABC)/S(FCD) + \\ &+ S(ACG)/S(FCD) = \\ &= 2 + S(ACG)/S(ACF) = \\ &= 2 + 2/3 = 8/3. \end{aligned}$$

(Tu S pomeni ploščino.)



2. Naj ima oglišče B koordinati (b, b) . Iz $b = -1/2 b^2$ in $b \neq 0$ sledi $b = -2$. Če naj bo trikotnik pozitivno orientiran, mora biti A v temenu (izhodišču koordinatnega sistema). Simetrala osnovnice AB ima zato enačbo $y = -x - 2$ in seka parabolo v točkah $C_1(1 + \sqrt{5}, -3 - \sqrt{5})$ in $C_2(1 - \sqrt{5}, -3 + \sqrt{5})$, toda zaradi orientacije je vrh trikotnika lahko le C_1 . Višina na



osnovnico (razdalja med točkama $(-1, -1)$ in C_1) je $\sqrt{18 + 8\sqrt{5}}$, ploščina trikotnika ABC pa $S = 2\sqrt{9 + 4\sqrt{5}}$. Če opazimo, da je $9 + 4\sqrt{5} = (2 + \sqrt{5})^2$, lahko enostavneje zapišemo $S = 2(2 + \sqrt{5})$.

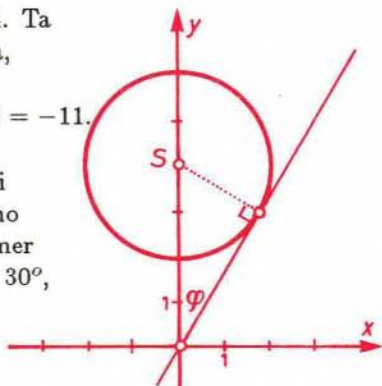
3. Enačbo preuredimo v $\log_3(x^3 \cdot \sqrt{x}/x) = 5$, odtod $3^5 = \sqrt{x^5}$ in $x = 9$.

4. Iz enačbe preberemo $7^{1+x} = 6 + 7^{-x}$, pomnožimo s 7^x in preuredimo v $7 \cdot 7^{2x} - 6 \cdot 7^x - 1 = 0$ ter razstavimo $(7 \cdot 7^x + 1)(7^x - 1) = 0$. Ker 7^x ni nikoli negativno, je edina rešitev $x = 0$, ki jo dobimo iz $7^x = 1$.
5. Če bi izbrali šolo na daljci med krajema A in B na razdalji x od kraja A , bi imeli skupno dolžino poti učencev v šolo $100x + 50(3 - x)$ oziroma $50x + 150$, kar bo najmanj, če bo $x = 0$. Šolo naj bi zgradili v kraju A .

Četrty letnik

1. Vzemimo funkcijo $f(x) = p(x) + 4$. Ta gre skozi točko $T_1(-7, 7)$ in je liha, zato gre tudi skozi $T_2(7, -7)$. Iz $-7 = f(7) = p(7) + 4$ dobimo $p(7) = -11$.

2. Enačbo krožnice zapišemo v obliki $x^2 + (y - 4)^2 = 4$, od koder dobimo koordinate središča $S(0, 4)$ in polmer $r = 2$. Tako je $\sin \varphi = 1/2$ in $\varphi = 30^\circ$, kot med tangentama pa 60° .

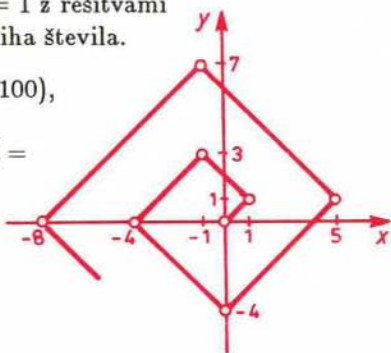


3. Dano enačbo kvadriramo:

$$\cos^2 x + 1/2 + \sin^2 x + 1/2 + 2 \sqrt{\sin^2 x \cos^2 x + 3/4} = 4.$$

Uredimo $\sqrt{\sin^2 2x + 3} = 2$ ter ponovno kvadriramo in skrčimo v $\sin^2 2x = 1$ z rešitvami $x_k = k \cdot \pi/4$, kjer za k jemljemo liha števila.

4. Miha se je stotič ustavil v $T(0, -100)$, do tedaj je prehodil pot dolžine $\sqrt{2} + 2\sqrt{2} + 3\sqrt{2} + \dots + 100\sqrt{2} = \sqrt{2}(1 + 2 + 3 + \dots + 100) = 5050\sqrt{2}$.



SLIKOVNA KRIŽANKA – KNJIŽNICA SIGMA – FIZIKA – Rešitev iz P–2



PRESEK - list za mlade matematike, fizike, astronome in računalnikarje
17. letnik, šolsko leto 1989/90, številka 3, strani 129 - 192

UREDNIŠKI ODBOR: Vladimir Batagelj, Tanja Bečan (jezikovni pregled), Dušica Boben (pisma bralcev, stavljenje teksta), Vilko Domajnko, Darjo Felda (tekmovanja iz matematike), Bojan Golli (tekmovanja iz fizike), Marjan Hribar, Sandi Klavžar (računalništvo), Damjan Kobal (razvedrilo), Jože Kotnik, Edvard Kramar (Presekova knjižnica), Peter Križan, Boris Lavrič (matematika, odgovorni urednik), Matija Lokar, Bojan Mohar (glavni urednik), Franci Oblak, Peter Petek, Pavla Razinger (astronomija), Marjan Smerke (svetovalec za fotografijo), Miha Štalc (risbe), Ciril Velkovrh (urednik, nove knjige, novice), Marija Vencelj.

Dopise pošiljajte in list naročajte na naslov: Društvo matematikov, fizikov in astronomov SRS - Podružnica Ljubljana - Komisija za tisk, Presek, Jadranska c. 19, 61111 Ljubljana, p.p. 64, tel. (061) 265-061/53, št. žiro računa 50101-678-47233. Naročnina za šolsko leto 1989/90 vplačana do 15.1.1990, je za posamezne naročnike 200.000.- din, za skupinska naročila šol 160.000.- din, posamezna številka 50.000.- din (40.000.- din)

List sofinancirata Izobraževalna in Raziskovalna skupnost Slovenije
Ofset tisk Časopisno in graficno podjetje DELO, Ljubljana
©1989 Društvo matematikov, fizikov in astronomov SRS - 982

ISSN 0351-6652

[illegible]