

YU ISSN 0351-6652

PRESEK²

DRUŠTVO MATEMATIKOV, FIZIKOV IN ASTRONOMOV SRS LETNIK 17, 1989-90,



UREDNIŠKI ODBOR JE PREGLEDAL GRADIVO ZA PRESEK IN SE MORA
LE ŠE DOMENITI ZA OPREMO NASLOVNE STRANI LETOŠNJE DRUGE ŠTEVILKE

ANKETA

V peti številki lanskega letnika je bila objavljena anketa za bralce—učence in njihove učitelje. Čas je, da vam povemo, kakšni so rezultati.

Zvedeti smo hoteli več stvari:

- ★ kaj je bralcem najbolj všeč: katero področje v Preseku, katera rubrika, kakšne vrste nalog in tudi konkretno kateri članek;
- ★ kaj bi si bralci želeli prebrati, kaj jih zanima;
- ★ kaj bi bilo potrebno narediti, da bi k sodelovanju pritegnili tudi učitelje.

Čeprav se že dolgo trudimo in vabimo učitelje in profesorje k sodelovanju, nas ti vedno znova preslišijo (no, so tudi izjeme). In tako se je zgodilo tudi pri anketi. Prosili smo jih, da bi ankete učencev zbrali, izpolnili eno tudi oni in nam jih poslali. Prejeli smo le 23 izpolnjenih anket. In o njih bo govora tudi v tem prispevku.

Tistim, ki so nam anketo vrnili je najbolj pri srcu področje matematike, najraje pa rešujejo naloge s področja logike. Privlačijo jih tudi nagradne naloge, naloge in članki za razvedrilo. V lanskem šolskem letu so jim bili najbolj všeč naslednji članki:

Zakaj vremenska napoved včasih ne drži,
Supernova,
Stari kitajski instrumenti,
Šahovski kralj,
Arhimedovi zakoni ...

Pisali so nam mladi, ki se poleg matematike, fizike, računalništva in astronomije ukvarjajo tudi s športom, glasbo in tako bi radi v Preseku prebrali tudi kaj o tem. Mogoče se bodo starejši bralci spomnili, da smo članke s tako vsebino že objavljali, npr.:

- v 2. letniku je J. Strnad pisal o fiziki na smučeh;
- v 5. letniku je S. Pahor prispeval članek Skok v višino in skok ob palici po fizikalno;
- v 8. letniku je o odboju žoge pisal A. Likar, o skakalnici v Planici pa A. Vadnal;
- v lanskem letniku (že 16.) pa ste lahko prebrali članek Glasbena lestvica M. Vencelj.

Poleg tega si želijo bralci članek o številu π , o znamenitih matematikih, o zgodovini matematike, astronomije itd. Tudi o tem je v Preseku že bilo nekaj člankov, kar pa še ne poemni, da ne bi napisali še kakšnega.

Med pošto so bila tudi pisma, ki niso bila anonimna. Vanji, Petri in Tini je Presek všeč, seveda pa imajo tudi svoje pripombe. Želijo si več zanimivosti,

več člankov o računalnikih, številskih križank.

Eno od bralk zanima, kdo ureja Presek. O tem bo uredniški odbor pripravil daljši zapis v eni prihodnjih števil. Vas pa vabimo, da nam pišete o tem, kaj počnete v krožkih, o vaših sošolcih, ki tekmujejo za Vegovo in druga priznanja, o vaših učiteljih, o smešnih dogodkih pri pouku matematike, fizike, računalništva ali astronomije ...

Lep pozdrav vsem in oglasite se!

Dušica Boben

OBVESTILO NAROČNIKOM

Naročnike Preseka obveščamo, da se je ob izidu 2. številke Preseka celoletna naročnina povečala za posameznike na 200.000.-din, za skupnska naročila pa na 160.000.-din. Vse, ki še niso poravnali svoje obveznosti do lista, lepo prosimo, da to store čimprej in s tem prispevajo svoj delež k rednemu izhajanju lista za mlade matematike, fizike, astronome in računalnikarje.

Ciril Velkovrh

PRESEK - list za mlade matematike, fizike, astronome in računalnikarje
17. letnik, šolsko leto 1989/90, številka 2, strani 65 - 128

UREDNIŠKI ODBOR: Vladimir Batagelj, Tanja Bečan (jezikovni pregled), Dušica Boben (pisma bralcev, stavljenje teksta), Vilko Domajnko, Darjo Felda (tekmovanja iz matematike), Bojan Golli (tekmovanja iz fizike), Marjan Hribar, Sandi Klavžar (računalništvo), Damjan Kobal (razvedrilo), Jože Kotnik, Edvard Kramar (Presekova knjižnica), Peter Križan, Boris Lavrič (matematika, odgovorni urednik), Matija Lokar, Bojan Mohar (glavni urednik), Franci Oblak, Peter Petek, Pavla Razinger (astronomija), Marjan Smerke (svetovalec za fotografijo), Miha Štalec (risbe), Ciril Velkovrh (urednik, nove knjige, novice), Marija Vencelj.

Dopise pošiljajte in list naročajte na naslov: Društvo matematikov, fizikov in astronomov SRS - Podružnica Ljubljana - Komisija za tisk, Presek, Jadranska c. 19, 61111 Ljubljana, p.p. 64, tel. (061) 256-061/53, št. žiro računa 50101-678-47233. Naročnina za šolsko leto 1989/90 vplačana do 15.1.1990, je za posamezne naročnike 200.000.- din, za skupinska naročila šol 160.000.- din, posamezna številka 50.000.- din (40.000.- din)

List sofinancirata Izobraževalna in Raziskovalna skupnost Slovenije
Ofset tisk Časopisno in grafično podjetje DELO, Ljubljana
©1989 Društvo matematikov, fizikov in astronomov SRS - 974

ISSN 0351-6652

P R E S E K — list za mlade matematike, fizike, astronome in računalnikarje
17. letnik, šolsko leto 1989/90, številka 2, strani 65 — 128

VSEBINA

UVODNIK	Anketa (Dušica Boben, ilustrirala Marija Vencelj)	III, 65
MATEMATIKA	Vsote ulomkov s števcem 1 — Rešitev str. 118 (Boris Lavrič)	68
	Nekaj topoloških skrivnosti (Janez Aleš)	72
NALOGE	Koliko cifer? (Matija Lokar)	83
	Koliko je kock v Rubikovi kocki? (Sandi Klavžar)	84
FIZIKA	Glej, Mavrica! 2. del, Kje na nebu iskati mavrico (Marija Vencelj)	86
RAČUNALNIŠTVO	Mreže teles in logo (Tomaž Pisanski)	98
NOVE KNJIGE	Učbeniki in priročniki za osnovno in srednjo šolo	95
	S. Becklake, Vesolje — zvezde, planeti in vesoljske ladje (Marijan Prosen)	109
ASTRONOMIJA	Odkritje pulzarja v ostanku supernove 1987 A (Andrej Čadež)	110
TEKMOVANJA	5. šolsko in 15. izbirno tekmovanje srednješolcev iz matematike (Darjo Felda)	112
NOVICE	Pisma bralcev (Damjan Kobal)	122
	Raziskovalne naloge mladih (Damjan Kobal)	123
RAZVEDRILO	Dinarji konvergirajo (Sandi Klavžar)	82
	Slikovna križanka (Marko Bokalič)	96
	Mavrična uganka — Rešitev str. 127 (Marija Vencelj)	94
	Ploščina trikotnika — Rešitev str. 121 (Dragoljub M. Milošević, prev. Damjan Kobal)	108
	Umetnost v Vesolju. Kaj je to neskončno (Izbral Matija Lokar)	111
	Praznični okrasek — Rešitev str. 119 (Marija Vencelj)	116
	Tetraederski fraktal (France Dacar)	124
	Kvadrat na trikotnike (Vilko Domajnko, ilustriral Sandi Jakončič)	125
	Kaj početi, če dežuje? (Matija Lokar)	128
REŠITVE NALOG	Enakost. Kornet — str. 16 (Boris Lavrič)	117
iz P XVII—1	Zaporedja — str. 51 (Darjo Felda)	117
	Križanka "Slovenski matematiki" — str. 56 Slikovna križanka — str. 32 (Marko Bokalič)	120
	Najbolj kvadratasto leto — Rešitev iz P XVI—1, str. 16 (Tomaž Pisanski)	121
	Uganke — str. 7 (Vilko Domajnko)	127
NA OVITKU	Glorija (glej članek na str. 86)	I

VSOTE ULOMKOV S ŠTEVCEM 1

Najbrž se je marsikak vesten bralec Preseka že ob naslovu prispevka spomnil članka profesorja Ivana Vidava, ki je bil objavljen pred tremi leti v našem listu (PXIV/1). V njem je avtor dokazal, da imajo ulomki s števcem 1 naslednjo presenetljivo in lepo lastnost.

IZREK A. Vsako pozitivno racionalno število se da zapisati kot vsota ulomkov s števcem 1 in med seboj različnimi imenovalci. Še več, za imenovalce smemo zahtevati, da so različni in večji od naprej danega števila.

Prvi del izreka lahko povemo tudi takole: Za vsako racionalno število $r > 0$ obstaja tak $n \in \mathbb{N}$, da ima enačba

$$E_n(r): \quad \frac{1}{a_1} + \frac{1}{a_2} + \dots + \frac{1}{a_n} = r$$

z neznankami $a_1, \dots, a_n$ vsaj eno rešitev, ki ustreza pogoju

$$P: \quad 1 < a_1 < a_2 < \dots < a_n; \quad a_1, \dots, a_n \in \mathbb{N}$$

V tem prispevku nas bodo zanimala predvsem naslednja vprašanja:

- (A) Ali ima enačba $E_n(r)$ pri danem racionalnem $r > 0$ za vsak naraven $n > 1$ rešitev, ki ustreza pogoju P ?
- (B) Je vseh takšnih rešitev pri danih $r > 0$ in $n > 1$ končno mnogo?
- (C) Kako je število rešitev pri danem $r > 0$ odvisno od n ?

Da ne bomo po nepotrebnem izgubljali besed, zaznamujmo z $R_n(r)$ število vseh rešitev enačbe $E_n(r)$, ki izpolnjujejo pogoj P . Dogovorimo se še, da bomo rešitvi, ki zadošča pogoju P , rekli *dobra rešitev*.

Pozabavajmo se zdaj z nalogo (A).

Vzemimo najprej $r = 1$. Brž lahko ugotovimo, da je $R_2(1) = 0$, saj velja ocena

$$\frac{1}{a_1} + \frac{1}{a_2} \leq \frac{1}{2} + \frac{1}{3} < 1$$

Odgovor na vprašanje (A) je torej že pri $r = 1$ negativen, naloga pa je tako rešena za $r = 1$. Vendar bomo ostali še naprej zvedavi: je morda $R_3(1) > 0$? Za razvedrilo naj bralec sam poišče vse rešitve enačb $E_3(1)$ in $E_4(1)$, ki zadoščajo pogoju P . Najde jih tudi na strani 118.

Prav hitro vidimo, da velja $R_n(1) > 0$ celo za vsak $n > 2$. Kasneje bomo do-

kazali, da je podobno tudi pri ostalih racionalnih številih $r > 0$. Pri $r < 1$ se lahko zgodi, da je že $R_2(r) > 0$, pri velikem r pa enačba $E_n(r)$ za naravna števila $n \leq 2r$ nima nobene rešitve. Slednje nam potrди ocena

$$\frac{1}{a_1} + \dots + \frac{1}{a_n} < \frac{1}{2} + \dots + \frac{1}{2} = \frac{n}{2} \leq r$$

Izrek A nam zagotavlja, da je $R_n(r) > 0$ za neskončno mnogo naravnih števil n . Pred podrobnejšo obravnavo odvisnosti števila rešitev $R_n(r)$ od n pa se lotimo še vprašanja (B). Odgovor nanj je pozitiven.

Dokazali bomo, da velja naslednji

IZREK B. Naj bo r pozitivno racionalno število in $n \in \mathbb{N}$. Potem ima enačba $E_n(r)$ ali končno mnogo dobrih rešitev ali pa nobene.

Pri dokazu uporabimo matematično indukcijo glede na število neznank v enačbah.

Za $n = 1$ izrek očitno velja pri vsakem $r > 0$, $r \in \mathbb{Q}$. Tedaj je namreč $R_1(r) = 0$ ali $R_1(r) = 1$.

Predpostavimo zdaj, da izrek velja za $n = k \in \mathbb{N}$ in vsak racionalen $r > 0$. Razmislimo o številu rešitev enačbe $E_{k+1}(r)$, kjer je $r > 0$ dano racionalno število. Za vsako dobro rešitev $a_1, a_2, \dots, a_{k+1}$ enačbe $E_{k+1}(r)$ velja ocena

$$r = \frac{1}{a_1} + \frac{1}{a_2} + \dots + \frac{1}{a_{k+1}} < \frac{k+1}{a_1}$$

Torej je $a_1 < (k+1)/r$, poleg tega pa števila $a_2, a_3, \dots, a_{k+1}$ rešijo enačbo $E_k(r - 1/a_1)$. Po predpostavki ima ta le končno mnogo dobrih rešitev (ali nobene), zato je število dobrih rešitev enačbe $E_{k+1}(r)$ pri izbranem naravnem številu $a_1 > 1$ končno. Za a_1 imamo po oceni $a_1 < (k+1)/r$ na voljo le končno mnogo števil, torej je tudi število vseh rešitev enačbe $E_{k+1}(r)$, ki izpolnjujejo pogoj P, končno.

Indukcijski korak smo dokazali, s tem pa potrdili veljavnost izreka.

Na vrsti je problem (C).

Naj bo r dano pozitivno racionalno število. Splošna formula $R_n(r)$, $n \in \mathbb{N}$, je pretežak zalogaj, zato nas bodo zanimale bolj grobe (a vendar lepe) lastnosti zaporedja

$$R_1(r), R_2(r), R_3(r), \dots$$

Po izreku A ne morejo biti vsi členi tega zaporedja enaki nič. Označimo z m najmanjše naravno število, pri katerem je $R_m(r) > 0$.

Tako na primer za $r = 1$ dobimo $m = 3$, za $r = 5/4$ pa $m = 4$.

Kaj hitro lahko doženemo, da tudi pri vseh $n > m$ velja ocena $R_n(r) > 0$. Če je namreč $R_k(r) > 0, k > 1$,

$$\frac{1}{a_1} + \frac{1}{a_2} + \dots + \frac{1}{a_{k-1}} + \frac{1}{a_k} = r, \quad 1 < a_1 < a_2 < \dots < a_k$$

potem z razdružitvijo ulomka $\frac{1}{a_k}$ dobimo

$$\frac{1}{a_1} + \dots + \frac{1}{a_{k-1}} + \frac{1}{a_k + 1} + \frac{1}{a_k(a_k + 1)} = r$$

in $a_1 < \dots < a_{k-1} < a_k + 1 < a_k(a_k + 1)$, torej velja ocena $R_{k+1}(r) > 0$. Odtod takoj sledi, da je res $R_n(r) > 0$ za vsak $n \geq m$.

Videli smo, da ima vsaka enačba $E_n(r)$ pri $n \geq m$ vsaj eno dobro rešitev. To ugotovitev pa lahko še precej izboljšamo. Dokazali bomo, da velja takle

IZREK C. Za vsako pozitivno racionalno število r velja $R_{n+1}(r) > R_n(r)$ za vsak $n > m$.

Dokažimo navedeni izrek. Naj bo $0 < r \in \mathbb{Q}, n \in \mathbb{N}$ in $R_n(r) > 0$. Vzemimo katerokoli dobro rešitev $a_1, a_2, \dots, a_{n-1}, a_n$ enačbe $E_n(r)$ in iz nje tvorimo rešitev

$$a_1, a_2, \dots, a_{n-1}, a_n + 1, a_n(a_n + 1)$$

enačbe $E_{n+1}(r)$. Različnima rešitvama enačbe $E_n(r)$ smo tako priredili različni rešitvi enačbe $E_{n+1}(r)$ (Preveri!), torej vedno velja ocena

$$R_{n+1}(r) \geq R_n(r)$$

Vzemimo zdaj poljuben $n > m$ in dokažimo, da tedaj obstaja taka rešitev $a_1, \dots, a_n$ enačbe $E_n(r)$, ki ustreza pogoju P in ima za a_n sodo število.

Res, enačba $E_{n-1}(r)$ ima zaradi $n - 1 \geq m$ vsaj eno dobro rešitev, iz nje pa na enak način kot prej pridelamo rešitev enačbe $E_n(r)$, katere zadnji člen je sodo število $a_{n-1}(a_{n-1} + 1)$.

Po prejšnjem smemo pri $n > m$ privzeti, da je v eni od rešitev $a_1, \dots, a_n$ enačbe $E_n(r)$ število $a_n = 2p$ sodo. Očitno velja še $p > 1$, kar nam zagotavlja,

da sta desni strani enakosti

$$\frac{1}{2p} = \frac{1}{3p} + \frac{1}{6p}$$

$$\frac{1}{2p} = \frac{1}{2p+1} + \frac{1}{2p(2p+1)}$$

različni. Torej lahko prej dobljenim $R_n(r)$ rešitvam enačbe $E_{n+1}(r)$, ki zadoščajo pogoju P , pridružimo še rešitev

$$a_1, a_2, \dots, a_{n-1}, 3p, 6p$$

ki se očitno razlikuje od vseh ostalih. Potemtakem za $n > m$ res velja

$R_{n+1}(r) > R_n(r)$, prav to pa smo želeli dokazati.

Izrek C nam da naslednjo oceno za število dobrih rešitev enačbe $E_n(r)$:

$$R_{m+k}(r) \geq k \quad \text{za vsak } k \in \mathbb{N}$$

To oceno se da še izboljšati, a naj kljub temu sklenemo prispevek – seveda z nalogami.

1. Dokaži, da je pri $r = 5/6$ $R_2(r) = R_3(r) = 1$ in poišči vsaj deset dobrih rešitev enačbe

$$\frac{1}{x} + \frac{1}{y} + \frac{1}{z} + \frac{1}{t} = \frac{5}{6}, \quad x < y < z < t$$

2. Določi $R_2(1/k)$ za $k = 2, 3, 4, 5$ in 6 .
3. Naj bo $1 < k \in \mathbb{N}$. Dokaži, da je $R_2(1/k) \geq 1$, enakost $R_2(1/k) = 1$ pa velja natanko takrat, kadar je k praštevilo.
4. Za vsako naravno število $k > 4$ ima enačba

$$\frac{1}{x} + \frac{1}{y} = \frac{1}{2k}, \quad x < y$$

vsaj štiri dobre rešitve. Katere?

5. Dokaži, da za vsako liho število $k > 1$ velja $R_2(2/k) > 0$.
Rešitve nalog najdete na strani 118.

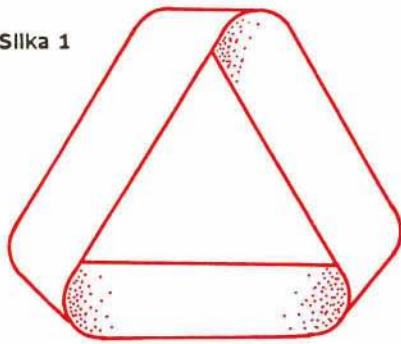
Boris Lavrič

NEKAJ TOPOLOŠKIH SKRIVNOSTI

Bralci ste se verjetno že srečali z eno izmed geometrijskih posebnosti, *Möbiusovim* trakom. S takimi in podobnimi objekti se ukvarja posebna veja matematike - *topologija*. Nepoučeni bralec bi si torej utegnil predstavljati, da matematik - topolog večino svojega časa preživi ob lepljenju trakov in drugih topoloških modelov. Toda kratek pregled kake topološke knjige bi ga zagotovo presenetil. Vsaka nova stran bi bila polna simbolov in le tu in tam bi naletel na slikovno prilogo ali diagram. Mogoče je topolog le matematik, ki ne loči med skodelico za kavo in kolačem. Namreč, dva objekta sta si gledano s topološkega stališča ekvivalentna, če lahko z zaporedjem zveznih deformacij enega spremenimo v drugega. *Topologijo* lahko torej okarakteriziramo kot študij lastnosti, ki so invariantne za take deformacije. *Topologija* se je pravzaprav razvila iz proučevanja geometrijskih problemov in posebnosti, kot je na primer *Möbiusov* trak. Za tiste bralce, ki ga še ne poznajo, si oglejmo, kaj pravzaprav to je. V ta namen ne bomo potrebovali nobenega matematičnega znanja, le nekaj papirja, škarje, lepilo, nekaj ročne spretnosti in malo potrpljenja.

Vzemimo dolg, ozek trak, zvijmo ga enkrat za pol obrata in nato konca zlepimo skupaj. Ploskev, ki smo jo sestavili, ima le eno stran, njen rob pa je ena sama sklenjena krivulja; slika (1). Pa pogledjmo, če je to res. Denimo, da na sredo traku postavimo muho, ki pri hoji za seboj pušča sled. Muha, ki hodi po traku, ne da bi zavila čez njegov rob, bo kmalu naletela na svojo sled.

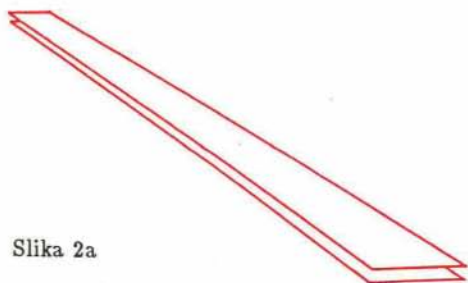
Slika 1



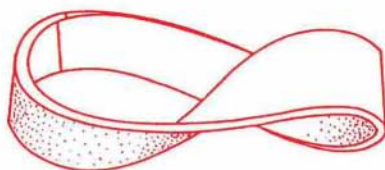
Model Möbiusovega traku.

Začuden opazovalec bi opazil, da se sled pozna na "obeh" straneh traku. Torej ima naša ploskev le eno stran. Če pa muho postavimo na rob traku in jo pustimo, da bo prehodila cel rob, ugotovimo, da je rob *Möbiusovega* traku ena sama sklenjena krivulja.

Oglejmo si sedaj dvojni *Möbiusov* trak, prikazan na sliki (2). Položimo skupaj dva skladna trakova, ju zvijmo enkrat za pol obrata, kot smo to storili pri enojnem *Möbiusovem* traku, in ju zlepimo skupaj. Za trenutek se nam dozdeva, da smo sestavili dva nepovezana objekta. Toda, oglejmo si našo muho na poti med trakovima. Ker muha ne sme prekoračiti robu, bo po enem



Slika 2a



Slika 2b

Slika 2 : Dvojni Möbiusov trak dobimo, če položimo skupaj dva skladna trakova, ju zvijemo za polobrata in zlepimo prosta konca.

krogu prišla do svoje sledi, toda le ta se pojavi na "stropu". Šele po drugem obhodu bo muha zares prispela na začetek svoje poti, saj se bo oznaka zopet pojavila na tleh. Inteligentna muha bi potrebovala ogromno domišljije, da bi razumela, da so "tla" in "strop" v bistvu ista stran enega traku. Če trak razgrnemo, ugotovimo, da je dvojni Möbiusov trak ploskev z dvema stranema. Podobno lahko uvidimo, da je njen rob sestavljen iz dveh sklenjenih krivulj, ki dvakrat obkrožita model. Prijetna naloga vas čaka, če boste hoteli razgrnjen dvojni Möbiusov trak zopet zložiti v prvotno obliko. Dvojni Möbiusov trak je pravzaprav identičen enojnemu traku, pred lepljenjem štirikrat zavitemu za pol obrata.

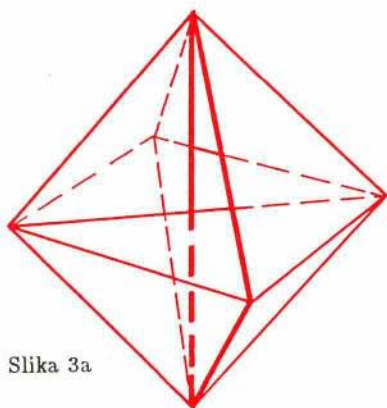
Vzemimo sedaj tri skladne trakove, recimo dva bela in enega rdečega. Iz belih trakov sestavimo dvojni Möbiusov trak, rdečega pa vstavimo med "dva" bela trakova in ga zlepimo. Na prvi pogled se zdi, da je dvojni Möbiusov trak sestavljen iz dveh belih trakov, saj je rdeči med njima po celi dolžini. Toda če model razpremo, ostaneta bel in rdeč trak prepletena. Opazimo, da je rdeči trak kar enojni Möbiusov trak.

Predstavljajte si, da paralelna robova dvojnega Möbiusovega traku zlepimo skupaj. Če napihnemo model, narejen iz tanke gume, dobimo *torus* ali *svitek*. Zlepljena robova tvorita sklenjeno krivuljo, ki se dvakrat ovije okrog torusa. To pomeni, da lahko torus prerežemo vzdolž sklenjene krivulje in dobimo dvojni Möbiusov trak. Velja celo več; torus lahko razrežemo v trak s poljubnim sodim številom polobratov, toda ne moremo ga razrezati tako, da bi dobili trak z lihim številom polobratov. To je posledica tega, da je torus ploskev z dvema stranema, podobno kot vsi trakovi s sodim številom polobratov, medtem ko imajo trakovi z lihim številom polobratov le eno stran, podobno kot enojni Möbiusov trak. Čeprav lahko dvostranske ploskve sestavimo iz enostranskih, obrat ni možen.

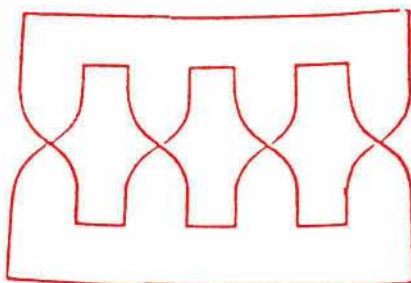
Rob enojnega Möbiusovega traku je gladka sklenjena krivulja. Toda model lahko preoblikujemo tako, da rob dobi obliko trikotnika. Ta model

je odkril *Bryant Tuckerman*. Slika (3) prikazuje, kako morate izrezati, zgibati in zlepit polo papirja, da boste dobili *Tuckermanov model Möbiusovega* traku s trikotnim robom. Podobno lahko skonstruiramo trak, dvakrat zviti za polobrata, ki ima prepletena trikotna robova (ploskev 12 s slike (6)). Ploskev je narisana na sliki (4). Slika (5a) predstavlja mrežo še ene zanimive ploskve. Sestavite jo in preverite, če je topološko ekvivalentna ploskvi s slike (5b).

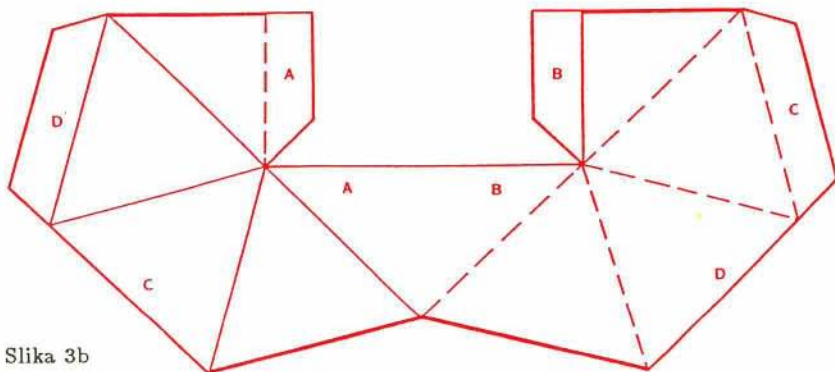
Ploskev ne delimo le na enostranske in dvostranske, ločimo jih tudi glede



Slika 3a

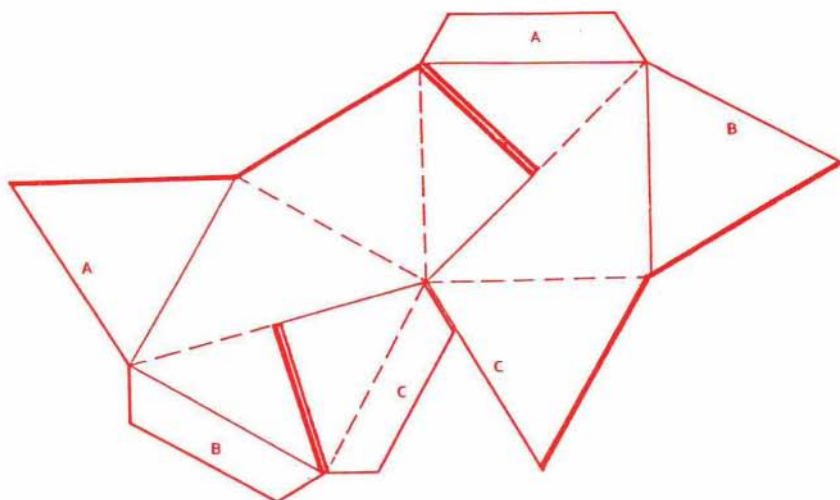


Slika 5b

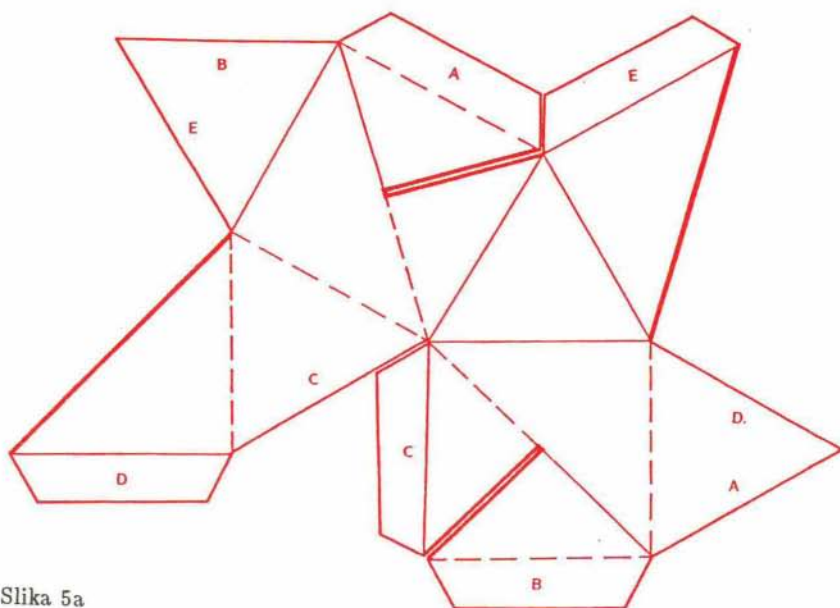


Slika 3b

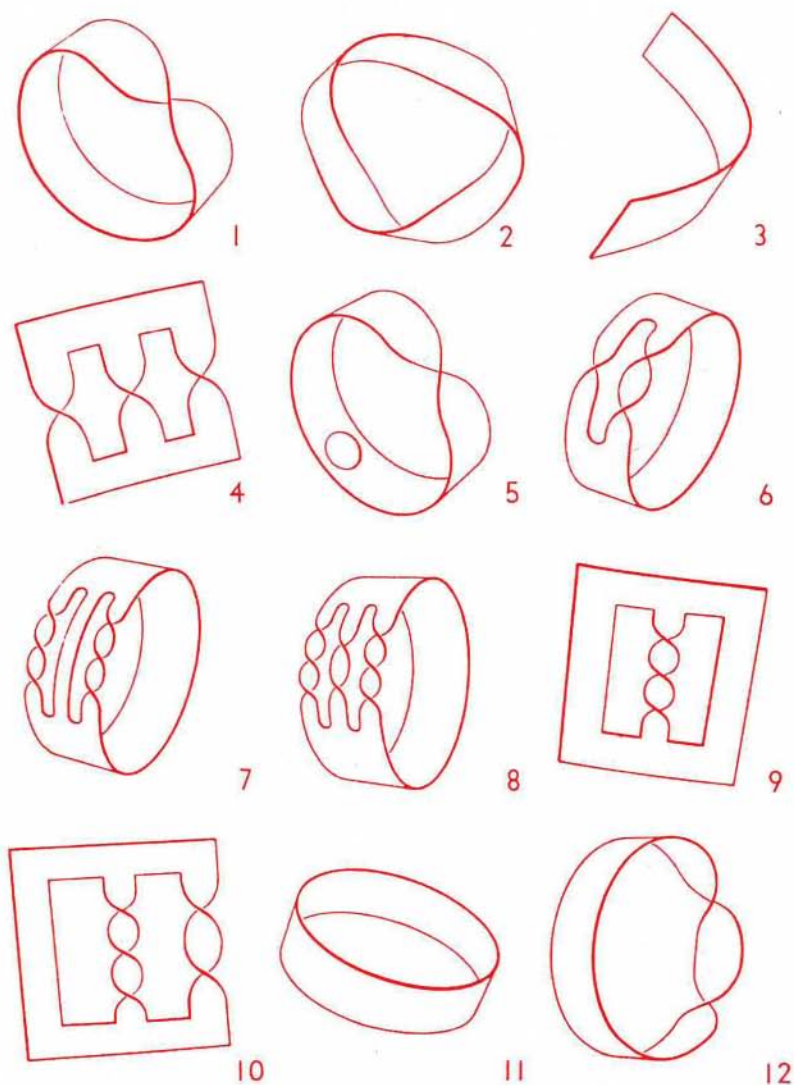
Slika 3 : *Möbiusov* trak s trikotnim robom je odkril *Bryant Tuckerman*. Prenesimo povečano ploskev na dvobarvno polo tršega papirja. Model izrežemo po zunanjih robovih, nato upognemo vse notranje robove, označene s črto, navzdol, vse črtkane robove pa v nasprotni smeri. Zlepimo dele A z A, B z B, C s C in D z D. Poudarjene črte na sliki predstavljajo trikotni rob zanimivega traku.



Slika 4 : Zlepimo gornjo ploskev kot prikazuje skica in pred nami bo dvakrat zvit trak z dvema prepletenima trikotnima robovoma. Poudarjeni črti na sliki predstavljata trikotna robova zanimivega traku.

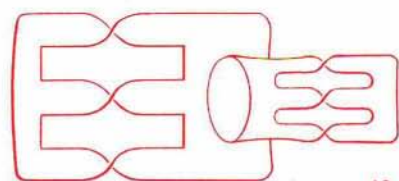


Slika 5a

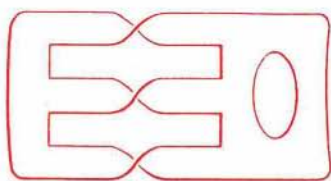


Slika 6 : Risbe modelov ploskev od 1 do 16.

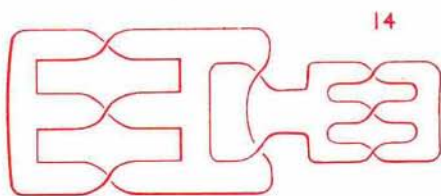
na strukturo robov. Te lastnosti ne morejo biti spremenjene z zvezno deformacijo ploskve, zato jih imenujemo *topološke invariante*. S stališča topologije sta dve ploskvi ekvivalentni, če so vse njune lastnosti, ki so



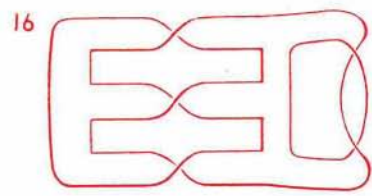
13



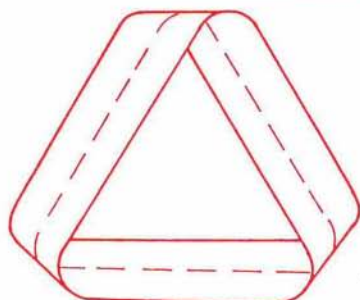
15



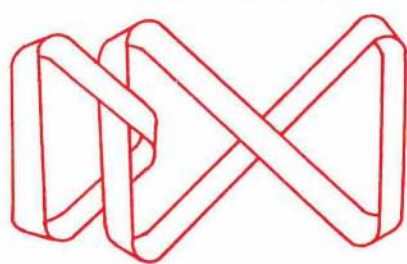
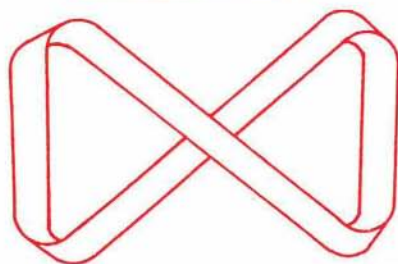
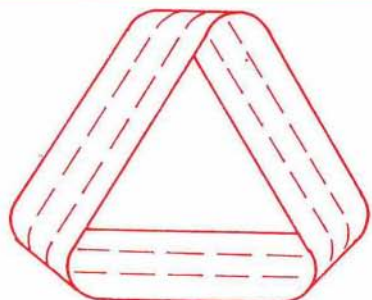
14



16



Slika 7a



Slika 7b

Slika 7 : Möbiusov trak prerezan na dva različna načina. Z rezanjem po sredini dobimo trak, ki je štirikrat zvit za polobrata. Če pa rez poteka tretjino širine od osnovnega robu, razpade na dva prepletena trakova, prvi je enojni, drugi pa razgrnjen dvojni Möbiusov trak.

topološke invariante, enake. Ploskev ima lahko rob prazen, tako kot na primer sfera, torus in *Kleinova* steklenica. Rob je lahko sestavljen iz ene ali več sklenjenih krivulj. Če je robnih krivulj več, moramo paziti še na to, ali so med seboj prepletene ali ne. Podrobneje si oglejmo ploskve z robom, sestavljenim iz ene ali dveh enostavnih sklenjenih krivulj. S temi omejitvami lahko za primer navedemo šestnajst različnih ploskev.

ENOSTRANSKE PLOSKVE Z ENIM ROBOM :

1. Rob je enostavna sklenjena krivulja.
2. Rob je zvita sklenjena krivulja.

DVOSTRANSKE PLOSKVE Z ENIM ROBOM :

3. Rob je enostavna sklenjena krivulja.
4. Rob je zvita sklenjena krivulja.

ENOSTRANSKE PLOSKVE Z DVEMA ROBOVOMA :

5. Robova sta enostavna in neprepletana.
6. Robova sta enostavna in prepletana.
7. Robova sta zavozlana in neprepletana.
8. Robova sta zavozlana in prepletana.
9. En rob je enostaven, drugi zavozlan in sta neprepletana.
10. En rob je enostaven, drugi zavozlan in sta prepletana.

DVOSTRANSKE PLOSKVE Z DVEMA ROBOVOMA :

11. Robova sta enostavna in neprepletana.
12. Robova sta enostavna in prepletana.
13. Robova sta zavozlana in neprepletana.
14. Robova sta zavozlana in prepletana.
15. En rob je enostaven, drugi zavozlan in sta neprepletana.
16. En rob je enostaven, drugi zavozlan in sta prepletana.

Za vse te ploskve lahko kaj hitro sestavimo papirnate modele (slika (6)). Če nekatere od njih prerežemo po določenih krivuljah, dobimo presenetljive rezultate. Poglejmo nekaj primerov.

Vrnimo se k enojnemu *Möbiusovemu* traku in ga prerežimo po sredini. Rezultat je mogoče nepričakovan, saj pri rezanju na "dve polovici" dobimo le en trak, ki je štirikrat zavit za polobrata, torej dvojni *Möbiusov* trak. Toda to ni edini rezultat, ki ga lahko dobimo z rezanjem enojnega *Möbiusovega* traku. Vzemimo nov izvod enojnega *Möbiusovega* traku. Zopet ga prerežemo podobno kot prej, le da rez poteka tretjino širine od osnovnega robu. Model nam je razpadel na dva prepletena trakova. Prvi je zopet enojni, drugi pa razgrnjen dvojni *Möbiusov* trak, oba smo že srečali. Oba modela sta predstavljena na sliki (7). Prerežimo po sredini še trak, dvakrat zavit za polobrata (12. ploskev s slike (6)). Razpade nam na dva prepletena trakova enake velikosti, ki sta kopiji prvotnega traku. Ploskev (2) s slike (6) je trak, trikrat zavit za polobrata. Če trak prerežemo po sredini, nastane dvakrat daljši trak, toda le ta je zavozlan. Trakovi, ki so dvakrat, trikrat ali večkrat zaviti pred lepljenjem, nam z rezanjem bodisi po sredini ali pa na tretjini širine dajo ne- navadne rezultate. Nalogo si lahko še bolj zapletemo z nadaljnjim rezanjem dobljenih trakov.

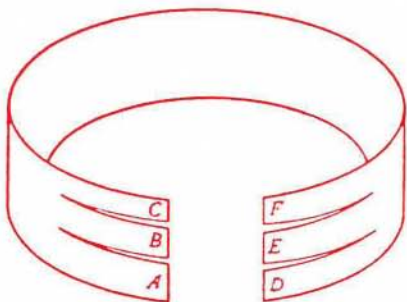
Oglejmo si še eno vrsto modelov. Širok trak na konceh nekajkrat za- režemo in rezultati različnih načinov lepljenja prostih koncev so raznovrstni in navidez nemogoči. Na primer: izdelajmo trak s slike (8). Zlepimo konca A in D. Povlecimo B pod A in zlepimo z E. Povlecimo še C preko B in pod A ter F preko D in pod E. Zlepimo konca C in F. Če potegnemo oba začeta reza na traku do konca, razpade trak v tri prepletene obročje. *Ellis Stanyon* je leta 1930 iz začetnega traku s slike (8) izdelal podoben model. Oglejmo si njegovo konstrukcijo. Zvijmo E za polobrata v desno in zlepimo s C; zvijmo F v desno za pol obrata preko E in C ter zlepimo z B; končno povlecimo A pod B brez obračanja in zlepimo z D. Prerežemo kot v prejšnjem primeru in dobimo prepletena trakova. Prvi je *Möbiusov*, drugi trak pa je dvakrat zavit za polobrata.

Pri modelih, s katerimi smo se že seznanili, smo potrebovali en rez za dva obročja in dva reza za največ tri obročje. Opravičeno lahko domnevamo, da potrebujemo za štiri obročje tri reze. Toda *Maxey Brooke* in *J.S. Madachy* sta razvila tehniko, s pomočjo katere lahko izdelamo poljubno število obročev povezanih v verigo z *enim samim rezom*, seveda po ustrezni predhodni pripravi. Skrivnost je v tem, da trak preganemo po dolžini in šele nato oprav- imo rezanje in lepljenje prostih koncev. Začnimo z enim vzdolžnim pregibom traku. Trak preganemo in nato zarežemo na obeh konceh, zvijmo dvakrat-

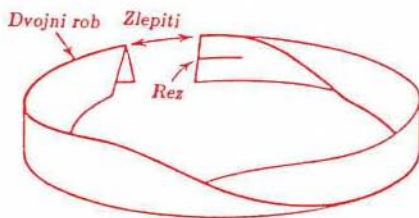
za pol obrata in zlepimo, kot kaže slika (9). Če zgiban trak prerežemo po začetem rezu do konca, nastanejo trije prepleteni trakovi, dvakrat zaviti za polobrata. Pripravimo si še zgiban trak s slike (10). Spojimo proste trakove, kot nas pouči slika (11), in po opravljenem rezanju okrog obroča dobimo verigo s tremi enostavno spojenimi trakovi. Za nadaljnje delo bomo potrebovali širše papirnate trakove. Večkratno pregibanje nam bo le tako pustilo nekaj delovnega prostora.

Za verigo s petimi členi potrebujemo 30 do 40 cm dolg trak. Najprej ga zgibamo in prerežemo robove, kot kaže slika (12). Spojimo C s C, D z D in E z E vse direktno, brez predhodnega zvijanja. Nato en konec B povlečemo pod obročema C in D ter ga zlepimo z drugim prostim trakom B. Trak A povlečemo pod obročema C in E ter zlepimo z drugim koncem A. Zaključimo rez po vsej dolžini in pred nami je veriga s petimi členi.

Preden zaključimo naš kratek sprehod med papirnati verigami, naredimo še verigo z devetimi členi. Potrebovali bomo približno 20 cm široko in 50 do 60 cm dolgo polo papirja. Pripravimo ustrezno sedemkrat preganjen trak. Za lažji pregled nad prostimi trakovi jih je priporočljivo označiti, kot prikazuje slika (13). Zlepimo trak F s F, G z G, H s H in I z I direktno. Povlecimo konec E pod obročema G in I ter zlepimo z drugim prostim koncem E. Povlecimo prosti konec D pod obročema F in H ter zlepimo z drugim trakom D. Sedaj povlečemo trak C pod obročem G in ga zlepimo s preostalim trakom C. Končno povlečemo še trak A preko obroča G in pod obročem C ter zlepimo z drugim trakom A. Preostala sta še trakova B. Če celoten obroč prerežemo po vseh plasteh naokrog, bo obroč razpadel na dve verigi. Eno sestavljeno iz petih in drugo iz treh členov, toda trak B bi odpadel nepovezan. Uporabimo še trak B in povežimo obe verigi. Obroč A je zadnji člen v petčlenski verigi, F pa v tričlenski. Povlecimo en konec traku B pod obročem A, preko D in



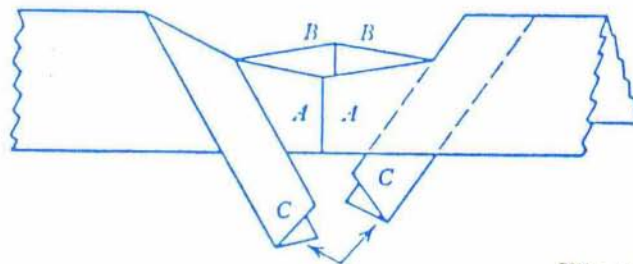
Slika 8



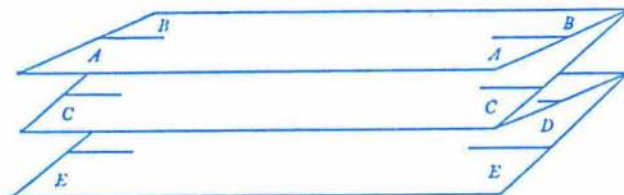
Slika 9



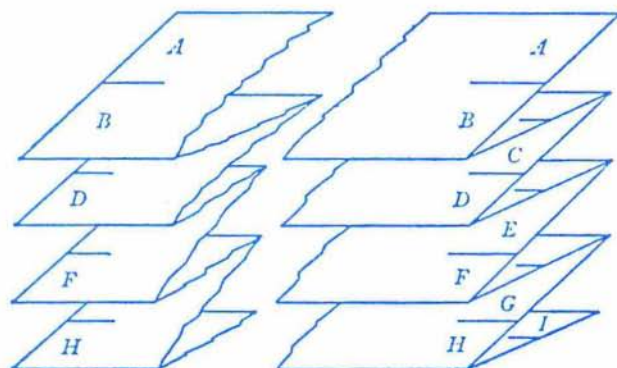
Slika 10



Slika 11



Slika 12



Slika 13

LITERATURA:

- [1] Martin Gardner, *Mathematical Puzzles and Diversions*, Scientific American 1958,
- [2] J.A.H. Hunter and Joseph S. Madachy, *Mathematical Diversions*, Dover Publications 1975;

pod obročem F ter nato zlepimo s preostalim trakom B. Celoten trak zopet prerežimo po vseh plasteh naokrog in rezultat je devetčlenska veriga. Če ste slučajno naredili napako in niste točno upoštevali navodil, bo rezultat nekaj popolnoma drugega. Pravzaprav je veliko zabave v presenečenjih, ki sledijo premišljenim in namernim napakam.

Za konec vseh muk in težav, vkljenjenih v raznovrstne trakove, obroče in verige, pa še nekaj problemov. Na predhodno zgibanem, zarezanem in zlepljenem traku sestavite naslednje modele z enim samim rezanjem :

1. Verigo s štirimi členi.
2. Dve ločeni verigi, prvo z dvema in drugo s tremi členi.
3. Verigo s tremi členi in obročem, prepletenim s srednjim členom.
4. Tri ločene verige s tremi členi.
5. Dve ločeni verigi s štirimi in petimi členi.

Janez Aleš

DINARJI KONVERGIRAJO

Zadnjič sem bil prisiljen na ček napisati naslednji znesek:

dva milijona štiristo sedeminosemdeset tisoč sedemsto devetdeset

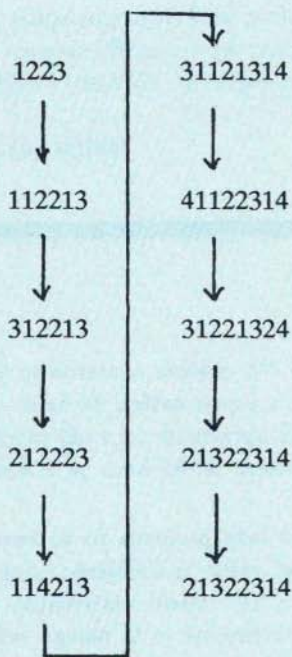
Žal je bil znesek v dinarjih, ne v dolarjih. Reci in piši, za zapis zneska sem porabil 58 znakov (presledkov ne štejemo). Število 58 zopet lahko zapišemo z besedami: osemindeset. Če zapišemo število 58 z besedo, vidimo, da potrebujemo 14 znakov. Nadaljujmo zgodbo: za zapis števila 14 z znaki potrebujemo 10 znakov, za zapis števila 10 potrebujemo 5 znakov in za zapis števila 5 z znaki potrebujemo 3 znake. Tu se zgodba ustavi, lahko bi rekli, da so dinarji skonvergirali.

Vprašanje: ali se opisani postopek vedno ustavi in če se, kaj je končni rezultat?

Sandi Klavžar

KOLIKO CIFER ?

V eni od prejšnjih števil Preseka je Sandija Klavžarja zanimalo, kam 'konvergirajo' števila, ki jih zapišemo z besedami. Pa si še enkrat zastavimo podobno vprašanje. Vzemimo poljubno število in preštejmo, koliko posameznih cifer je v njem. Npr. v 1223 je ena enka, dve dvojki in ena trojka. Zapišimo to kot 112213. S tem smo dobili novo število, s katerim ponovimo postopek. Tokrat imamo tri enke, dve dvojki in eno trojko, torej 312213. Poglejmo še naprej:



```

program cifre;
var ste : string[50];
    cif : char;
    odg : char;
    i : integer;
    c : array ['1'..'9'] of char;
begin
  write(' Stevilo: '); readln(ste);
  repeat
    readln; { počakaj pritisk na ENTER }
    writeln(ste);
    for cif := '1' to '9' do
      c[cif] := '0'; { stevci cifer }
    for i := 1 to length(ste) do
      c[ste[i]] := succ(c[ste[i]]);
    ste := ''; { zgradimo novo stevilo }
    for cif := '1' to '9' do
      if c[cif] <> '0' then
        ste := ste + c[cif] + cif;
    write('Dalje (d/n) '); readln(odg)
  until odg = 'n'
end.
  
```

Opazimo, da se število 21322314 ponavlja sedaj v nedogled. Postopek je torej skonvergirал. Velja to v splošnem? Peš računanje je dolgočasno, zato si pomagajmo s kratkim programom v Pascalu. Dogovoriti se moramo le za predstavitev števil. Ker potrebujemo le posamezne cifre, jih predstavimo kot niz cifer. Za zgornji program zato uporabimo Turbo Pascal, ki ima vgrajen podatkovni tip STRING in zna delati z nizi.

No, program pravzaprav ni čisto pravilen, saj ne upošteva, če kakšna cifra nastopa več kot desetkrat. Prav tako ne štejemo ničel. Program ne bo težko popraviti, vendar to prepuščam kot izziv vam. Mi si pogledjmo, kaj se dogaja, ko vtipkamo nekatera števila. Pa začnimo kar po vrsti: 1, 2, 3, 4. Pri vseh dobimo 21322314. Pri 5 seveda dobimo drugo končno število 3122331415. Tudi pri 5, 6, 7, ..., 25 postopek skonvergira. Se to zgodi vedno? No, če vtipkamo 1989 opazimo, da se pričeneta izmenjevati števili 712213241526171819 in 614213141516271819. Tudi pri 12345 se izmenjujeta po dve števili. Poskušamo naprej in glej! Vse kar vtipkamo, konvergira bodisi k enemu, bodisi k dvema številoma. Je to vedno res? Ali se mogoče kdaj izmenjujejo tri, štiri števila? Ali se kdaj postopek sploh ne konča? Kaj pa, če namesto desetiškega uporabimo npr. osmiški sistem? V trenutku, ko to pišem, odgovora na večino vprašanj še ne poznam. Pošljite svoje ugotovitve Preseku, veseli jih bomo.

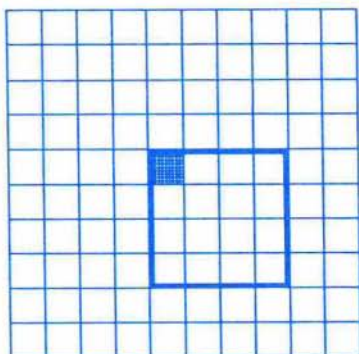
Matija Lokar

KOLIKO JE KOCK V RUBIKOVI KOCKI?

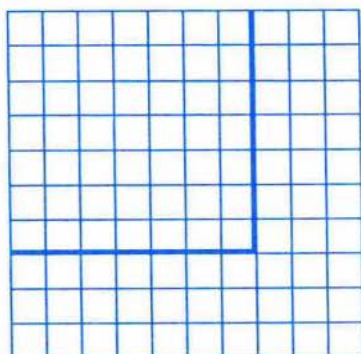
27? No ja, tudi cela kocka je kocka. Torej 28? Ne, prišteti moramo še vse kocke $2 \times 2 \times 2$. Verjamem, da smo z nekaj truda uspeli naštetih 36 kock. Je torej naloga že rešena? Ne, šele začenja se, kajti vprašujem po naslednjem: koliko kock je v kocki $10 \times 10 \times 10$ oz. splošneje, koliko kock je v kocki $n \times n \times n$!

Lotimo se naloge postopno. Najprej rešimo lažji problem, in ko bomo tega dobro razumeli, ne bo nobena težava več rešiti zastavljeno nalogo. Vprašajmo se, koliko kvadratov je v mreži 10×10 . Resni matematiki bi sicer dejali, saj ni nobene prave razlike med problemoma in bi nalogo rešili kar za n -dimenzionalno kocko. Včasih pa je dobro, če si znamo problem lepo predstavljati, zato ostanimo kar pri kvadratni mreži.

Izberimo si poljuben kvadrat mreže, kot je prikazano na sliki 1a. kateri podatki ga določajo? Prav gotovo njegova velikost, v našem primeru 4. Seveda so še drugi kvadrati velikosti 4. Toda, to je edini kvadrat te velikosti, ki ima za zgornji levi vogal osenčeni kvadrat s slike. Skratka, kvadratov 4×4 je toliko, kolikor je kvadratov 1×1 , ki so lahko zgornji vogal kvadrata 4×4 . Ti kvadrati so označeni na sliki 1b. Opazimo, da jih je 7^2 . Če se vprašamo še po kvadratih ostalih velikosti, je rešitev že pred nami: $1 + 2^2 + 3^2 + \dots + 9^2 + 10^2$



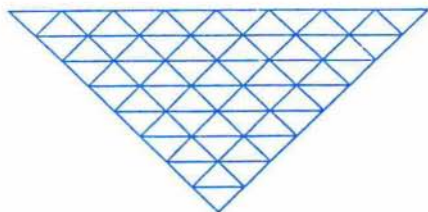
Sl. 1 a



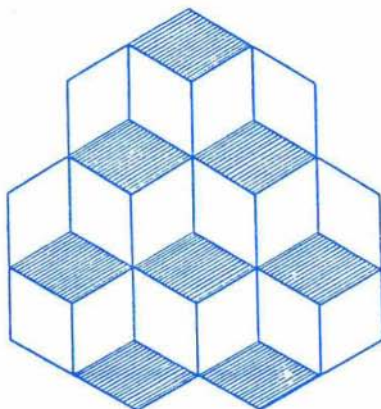
Sl. 1 b

oz. krajše $\sum_{i=1}^{10} i^2$. Pri tem je z 1^2 štet največji kvadrat in 10^2 je število malih kvadratov. Rezultat takoj posplošimo na mrežo $n \times n$: vseh kvadratov je $\sum_{i=1}^n i^2$.

Povrnimo se sedaj h kocki $n \times n \times n$. Če smo razumeli gornjo izpeljavo, potem gotovo ni noben problem dokazati, da je v kocki natanko $\sum_{i=1}^n i^3$ kock. Naloga je tako rešena.



Sl.2



Sl.3

Za konec še dve (stari) nalogi.

1. Koliko trikotnikov je na sliki?
2. Koliko kock je na sliki? Kaj pa, če Presek obrnemo?

Sandi Klavžar

GLEJ, MAVRICA!

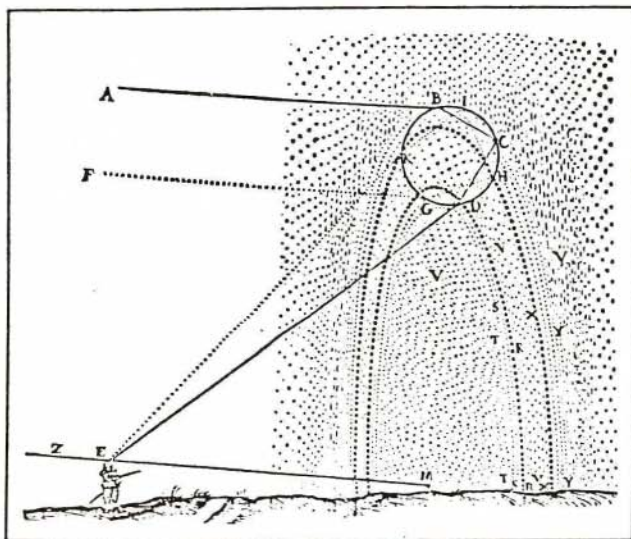
2. del: Kje na nebu iskati mavrico

Po uvodnih mislih v prejšnji številki Preseka je pred nami naloga, da razložimo pojav dežne mavrice.

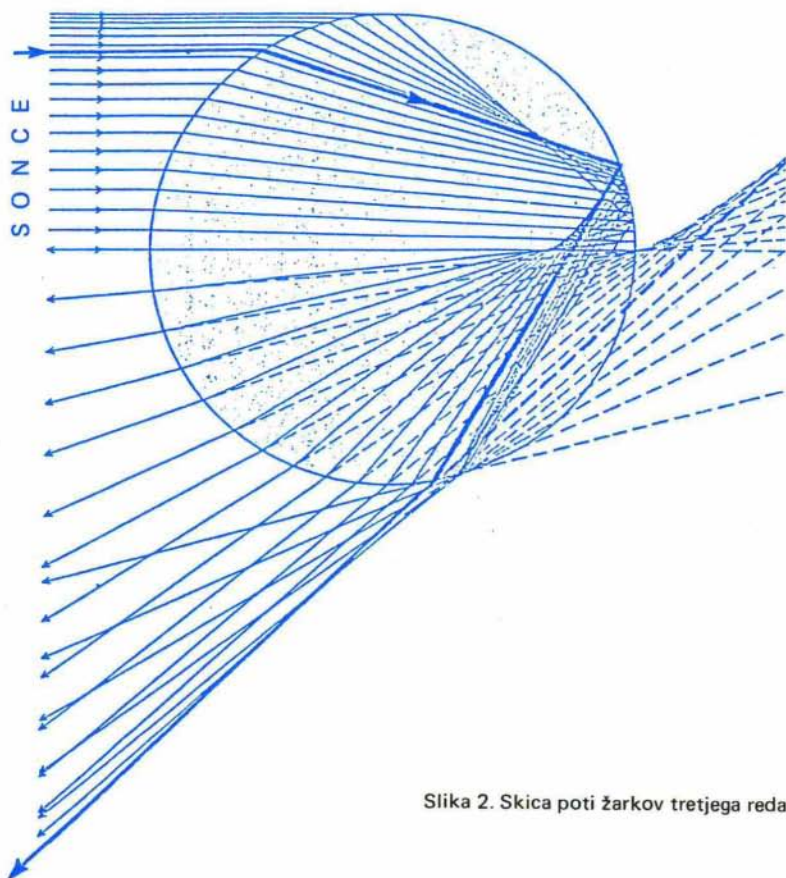
Povedali smo že, da so *izvor glavne mavrice žarki tretjega reda*. To so žarki, ki se na stenah dežne kapljice dvakrat lomijo in enkrat odbijejo na notranji strani. *Stransko mavrico dajejo* žarki z dvema lomoma in dvema notranjima odbojema. Imenovali smo jih *žarki četrtega reda*.

Da je mavrica posledica loma in odboja svetlobe, je že v 13. stoletju domneval poljski menih Vitello. Vendar je menil, da gre za lom in odboj na oblaku kot celoti. Pomemben napredek pomeni trditev nemškega meniha Theodorica iz Freiburga v začetku 14. stoletja, da nastane mavrica zaradi loma in odboja svetlobe na posameznih vodnih kapljicah. Ker pa v njegovem času lomni zakon še ni bil znan, ni mogel razložiti, zakaj vidimo mavrico vedno pod istim kotom glede na smer sončnih žarkov.

To je uspelo šele Descartesu dobra tri stoletja kasneje (slika 1). Descartes je rezultat dobil z risanjem poti sončnih žarkov, ki zadenejo ob kapljico pod različnimi vpadnimi koti. Na sliki 2 je skica žarkov tretjega reda. Žarek, ki pade na kapljico pravokotno, gre skozi središče kapljice, se na notranji steni odbije nazaj proti soncu in izhaja kot žarek tretjega reda za 180° odklonjen od



Slika 1. Descartesova razlaga mavrice iz leta 1637. Glavno mavrico daje žarek **ABCDE**, stransko žarek **FGHIKE**.



Slika 2. Skica poti žarkov tretjega reda.

prvotne smeri. Z večanjem vpadnega kota se odklon žarkov tretjega reda od prvotne smeri manjša do nekega najmanjšega odklona (ta žarek je na risbi narisani poudarjeno), nato pa spet raste. Črtkano so narisane še navidezne poti žarkov, kot jih dojemata naše oko. S slike lahko razberemo marsikaj. Če naj žarek tretjega reda zadene naše oko, se moramo nahajati na isti strani kapljice kot sonce. To pomeni, da *moramo biti obrnjeni tako, da imamo sonce za hrbtom*. Razen tega *mavrice ne bomo našli prav visoko na nebu*. Najvišja možna smer je določena s smerjo najmanjšega odklona žarkov tretjega reda od prvotne smeri. Na sliki je ta smer označena s poudarjeno črtkano črto.

Če je mavrica vidna, smer lahko izmerimo. Poiskali jo bomo tudi po matematični poti. V obeh primerih se moramo odločiti, od kod bomo merili kot, ki smer določa. Prvi hip se zdi, da bi ga bilo najprimerneje meriti od vodoravne

kjer sta c in c_1 hitrosti širjenja svetlobe v zraku in v vodi. Če označimo

$$n = \frac{c}{c_1}$$

imamo

$$\beta = \arcsin \left(\frac{1}{n} \sin \alpha \right)$$

kar da skupaj z (1)

$$\varphi = 4 \arcsin \left(\frac{1}{n} \sin \alpha \right) - 2\alpha \quad (2)$$

Vstavimo v (2) vrednost $n = \frac{4}{3}$, kar je približna vrednost lomnega količnika za prehod svetlobe iz zraka v vodo. Dobimo:

$$\varphi = 4 \arcsin \left(\frac{3}{4} \sin \alpha \right) - 2\alpha \quad (3)$$

kjer je $0^\circ \leq \alpha \leq 90^\circ$.

Funkcija (3) je narisana na sliki 4. Tudi tisti, ki so vam bili zadnji računi pretežki, lahko z nje razberete, kako se spreminja kot φ , ko vpadni kot α narašča od 0° do 90° .

Vidimo, da zavzame kot φ vrednosti od 0° do približno 42° . Pri tem ne prezrimo, da je φ odvisen le od vpadnega kota α in nič od premera krogljice. Torej bo tudi *največja možna vrednost kota φ za vse dežne kapljice ista*. Z nekaj več matematičnega znanja lahko to vrednost izračunamo. V ta namen poiščemo ničle prvega odvoda funkcije (2) na intervalu $[0^\circ, 90^\circ]$. Imamo:

$$\varphi' = \frac{4 \cos \alpha}{\sqrt{n^2 - \sin^2 \alpha}} - 2 = 0$$

kar da

$$\sin \alpha_{\max} = \sqrt{\frac{4 - n^2}{3}} \quad (4)$$

Za $n = \frac{4}{3}$ je

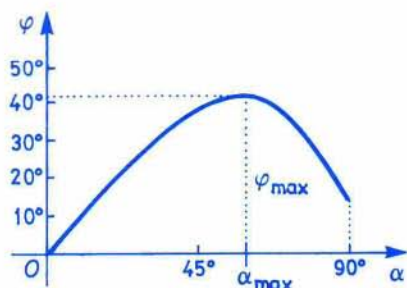
$$\sin \alpha_{\max} = \frac{2}{3} \sqrt{\frac{5}{3}}$$

in

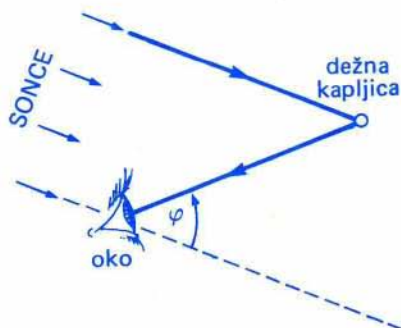
$$\alpha_{\max} = 59,4^\circ \quad \varphi_{\max} = 42,03^\circ$$

Kaj ta rezultat pomeni? Poglejmo ponovno sliko 3. Denimo, da narisani žarek zadene naše oko. Potem je kot φ enak kotu z vrhom v našem očesu, enim krakom v smeri sončnih žarkov (stran od sonca) in drugim krakom v smeri kapljice, iz katere žarek izhaja (slika 5).

Ta kot lahko zavzame vrednosti od 0^0 do $\varphi_{\max}$. Temu pogoju ustreza *notranjost stožca z vrhom v našem očesu, osjo v smeri sončnih žarkov in kotom $\varphi_{\max}$ med osjo in tvorilko*. Vsaj polovica tega stožca je pod obzorjem. V zgornjem delu prihajajo do nas žarki tretjega reda, ki jih dojemamo kot *kos osvetljene polkrožne plošče v daljavi*. Kolikšen je ta kos, je odvisno od višine sonca in tudi od tega, kolikšen del dopustnega prostorskega kota zastira dežna zavesa.



Slika 4

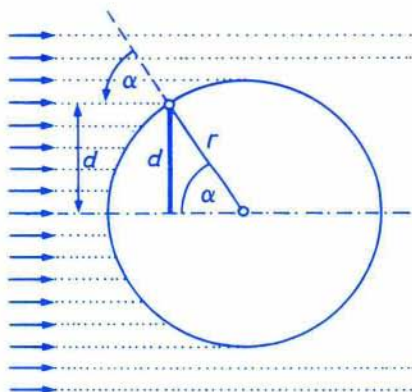


Slika 5

Poglejmo sedaj, kako je s *porazdelitvijo svetlobe* na tej plošči. Ker pripada dani kapljici ena sama taka ravnina, v kateri potuje žarek tretjega reda proti opazovalčevemu očesu, je tudi ta problem ravninski.

Sončna svetloba je v prostoru *enakomerno porazdeljena*. Za ravninski primer lahko to lastnost prikažemo s snopom med seboj enakomerno oddaljenih žarkov (slika 6). S slike takoj vidimo, da temu ne ustreza enakomerna porazdelitev vpadnih kotov. *Pod manjšimi vpadnimi koti zadene kapljico več svetlobe kot pod velikimi*. Enakomerna pa je porazdelitev oddaljenosti vpadnih žarkov od središča kapljice. Na sliki 6 je ta razdalja označena z d . Zavzame lahko vrednosti z intervala $[0, r]$, kjer je r polmer opazovane kapljice. Enako dolgim intervalom spremenljivke d pripadajo enake količine vpadle svetlobe.

Slika 6



Za opis porazdelitve svetlobe na naši navidezni svetli plošči v daljavi je torej primerno v funkciji (3) zamenjati spremenljivko a s spremenljivko d . Njunjo medsebojno zvezo

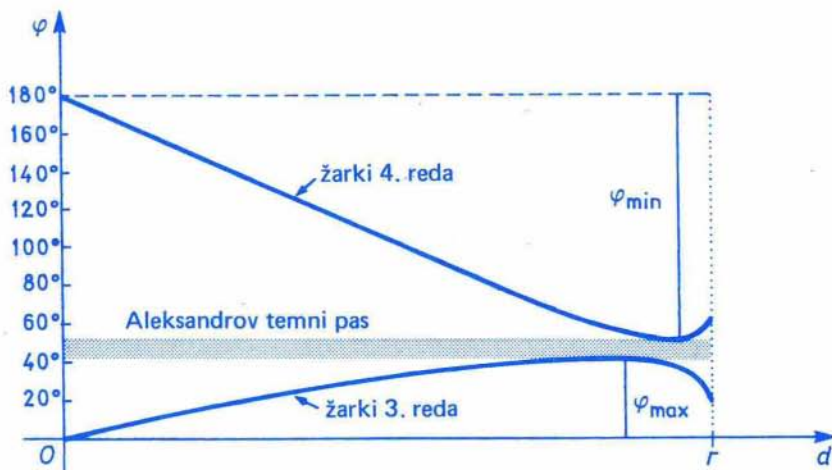
$$d = r \sin \alpha$$

dobimo s slike 6. Opustimo analitičen zapis funkcije $\varphi(d)$, $d \in [0, r]$, pač pa si oglejmo njen graf na sliki 7. Na isti sliki je narisana tudi graf ustrezne funkcije za stransko mavrico, o kateri bomo govorili kasneje.

Večjo koncentracijo svetlobe lahko pričakujemo v taki smeri φ , v kateri se združujejo osnovni žarki s širšega območja spremenljivke d . To je področje počasnega spreminjanja funkcije $\varphi(d)$, torej okolica maksimuma. S slike 7 razberemo, da za zelo širok interval spremenljivke d izhajajo žarki tretjega reda pod koti med 40° in 42° . Pri manjših kotih φ je svetlobe manj in je enakomerneje porazdeljena.

Torej lahko sklenemo: *navidezna svetlobna plošča ima v bližini $\varphi_{\max}$, to je ob zunanjem robu, svetel lok, ki blesti postopoma proti notranjosti in ostreje proti temni zunanji strani.* Ponovno se je izkazala pomembnost kota $\varphi_{\max}$, zato zasluži posebno ime. Rekli mu bomo *mavrični kot*.

Seveda mavrice s tem še nismo povsem razložili. Vsi vemo, da lok ni samo svetel, ampak tudi lepo barvast.



Slika 7

V prejšnji številki Preseka smo povedali, da se vsaka barvna komponenta svetlobe nekoliko drugače lomi. Tega doslej nismo upoštevali, saj smo funkcijo (3) dobili iz (2) z vstavljanjem $n = 4/3$, približne vrednosti lomnega količnika za prehod svetlobe iz zraka v vodo. Dejansko pa bi morali vstaviti v (2) za vsako posamezno barvo ustrezno poprečno vrednost za n . Da ne bo preveč podatkov, navedimo le mejni vrednosti:

barva	n	φ_{max}
rdeča	1'3290	42° 39' 52"
vijolična	1'3452	40° 20' 0"

V zadnjem stolpcu je zapisana tudi velikost ustreznega mavričnega kota. Vidi-mo, da je pri rdeči barvi ta kot za dobri dve stopinji večji kot pri vijolični. Ko gremo v osnovnem spektru vidne svetlobe od vijolične preko modre, zelene, rumene in oranžne barve do rdeče, lomni količnik n monotono pada. Nadalje sledi iz (4), da je a_{max} padajoča funkcija spremenljivke n na intervalu (1'3290, 1'3452); z vstavljanjem a_{max} v (3) dobimo še, da je φ_{max} padajoča funkcija a_{max} . Če vse združimo, sledi, da narašča mavrični kot od 40° 20' do 42° 39' 52" glede na barve v istem vrstnem redu, kot si slede v osnovnem spektru vidne svetlobe.

Mavrica sestoji torej iz polkrožnih plošč svetlobe različnih barv. Ker imajo plošče skupno središče, se v sredini prekrivajo in dajejo *belo ali svetlo sivo notranjost glavnega mavričnega loka*. Posamezne barvne plošče so zaradi različnih mavričnih kotov različno velike. Največja je rdeča, najmanjša vijolična plošča. Tako rdeča plošča na zunanjem robu ni prekrita z drugimi barvami. To pojasnjuje, zakaj je v mavrici prav rdeča barva najčistejša. Ostale barve se bolj ali manj prekrivajo. Ker pa so njihovi intenzivneje obarvani zunanji robovi medsebojno rahlo premaknjeni, prevlada v mešanici na posameznem mestu ustrezna najmočnejša barva. *Lepi lok glavne mavrice torej sestavljajo drug ob drugem nanizani barvni loki s skupno navidezno širino nekaj nad dve stopinji*. V njem je vijolična barva najmanj izrazita, ker je prekrita z vsemi barvami. Včasih celo čisto zbledi. Ostale barve postajajo proti zunanjemu robu izrazi-tejše.

Tako smo s sredstvi geometrijske optike uspešno razložili zgradbo in lego glavne mavrice. Poglejmo še enkrat, kje jo ob ugodnih vremenskih razmerah lahko pričakujemo. *Obrnjeni s hrbtom proti soncu, odmerimo kot 40° do 42° navzgor od smeri sončnih žarkov. Le na dobljenem mestu se lahko nahaja vrh loka glavne mavrice*. Od tod takoj sledi, da glavne mavrice ne moremo videti,

če je sonce previsoko na nebu, natančneje, če je več kot 42° nad obzorjem. Če pa je sonce dovolj nizko, si jo lahko celo sami napravimo. "Dež" v ravno pravi smeri lahko naredimo kar s pomočjo cevi za zalivanje vrta ali pranje avtomobila.

Stranska mavrica je zgrajena podobno kot glavna, kar ugotovimo z analizo žarkov četrtega reda. Odvisnost kota φ , ki ga merimo od istega poltraka kot pri žarkih tretjega reda, je prikazana na sliki 7.

Vidimo, da stranska mavrica ne oddaja nič svetlobe v notranjost stožca, določenega s kotom φ_{min} , ki meri približno 50° . To je *mavrični kot stranske mavrice*. Med posameznimi barvami ima najmanjši mavrični kot rdeča komponenta stranske mavrice, največjega vijolična. Torej si barve stranske mavrice slede od znotraj navzven v obratnem vrstnem redu kot pri glavni mavrici. Poleg tega so tu razlike med mavričnimi koti posameznih barv večje. Zato je stranska mavrica širša od glavne, je pa tudi bolj motna oziroma bleda. To lahko razložimo z večjo izgubo svetlobe pri žarkih četrtega reda v primerjavi z žarki tretjega reda. Delno pa pojasnjuje medlost tudi manj sploščeno teme zgornje krivulje na sliki 7.

Slika 7 pojasnjuje tudi *Aleksandrov temni pas*, to je temnejše področje med obema mavričnima lokoma. Vidimo, da žarki tretjega in četrtega reda ne prispevajo nič svetlobe v kote med 42° in 50° . Če bi ne bilo drugih žarkov, bi bilo to področje povsem črno.

Tako smo z metodo *geometrijske optike* pojasnili najbolj opazne mavrične pojave. Ima pa metoda to pomankljivost, da z njo ni moč razložiti navedeno manj pomembnih pojavov. Za njihovo razumevanje je treba upoštevati *valovno naravo svetlobe*. Tako je moč z *interferenco* pojasniti pojav dodatnih lokov, ki leže na notranji strani glavne mavrice, kakor tudi to, da so njihove sledi odvisne od velikosti dežnih kapljic. Čim manjše so kapljice, tem redkejši in zato jasneje vidni so dodatni loki. Ko kapljice dežja padajo, se večajo, zato dodatne loke lažje opazimo blizu vrha mavrice.

Ni pa moč npr. samo z interferenco razložiti rahle osvetljenosti Aleksandrovega temnega pasu, saj tudi ta metoda predvideva popolno temo v tem področju. Zadovoljiv odgovor na to in še na nekatera druga vprašanja daje pravzaprav le popolno upoštevanje dejstva, da je *svetloba elektromagnetno valovanje*.

Za konec omenimo še lep pojav, ki ga z metodami, uporabljenimi v tem članku, ne moremo razložiti. Gre za imenitno predstavo, za katero včasih

poskrbe žarki višjih redov. Zaradi majhne intenzivnosti teh žarkov se lahko pojavi le v smeri stran od sonca in pri zelo majhnih kotih φ , ker jo sicer prekrije svetloba obeh mavric. Pojav se imenuje glorijska, ker kot svetniški sij mavričnih barv obdaja rob opazovalčeve sence na megli ali oblakih (slika na naslovni strani). Pogosto jo je moč videti iz letala, ki leti nad oblaki. Po glorijski okrog sence na megli je še posebej znan Kurešček, hrib na južni strani Ljubljanskega barja. Barjanska megla in ugodna lega sta kot naročeni za njen pojav.

Marija Vencelj

MAVRIČNA UGANKA

Zadnjega šolskega dne opoldne sta se s spričevaloma v torbah skupaj vračala iz šole Špela in Janez. Nenadoma je skozi dež posijalo sonce. Janez je vzkliknil: "Glej, mavrica!" "Lažeš!" je odvrnila Špela in se ni niti ozrla. — Kako je Špela vedela, da jo hoče Janez potegniti?

Marija Vencelj



Ivan Pucelj
Ivan Štalec

GEOMETRIJA
za srednje šole

2. del

Ivan Štalec

ZBIRKA VAJ IZ
ARITMETIKE
ALGEBRE IN
ANALIZE

za 4. razred
srednjih šol

France Avsec
Marijan Prosen

ASTRONOMIJA
za srednje šole

PROGRAMSKI JEZIK



MAJNOJANE
O GRAMATIKI



ZLATKO
ŠPORER

OH.TA

MATEMATIKA

Niko Prijatelj OSNOVE
MATEMATIČNE
LOGIKE
1.del

Algebra



Ivan Vrhovnik

UČBENIKI IN PRIROČNIKI ZA OSNOVNO IN SREDNJO ŠOLO

SLIKOVNA KRIŽANKA —

JOŽE GRASSELLI 12345678 910111213 1415161718			ZELENICA V PUŠČAVI	SPLIT	KRAJ PRI KRANJU	VELIK KOS POHIŠTVA	POJAV NA VODNI GLADINI	FIGURA PRI PLESU ČETVORKI	DOMAČE ŽENSKO IME	KRAJ V BANATU
PRIMORSKO VINO										
TKANINA ZA KAVBOJKE										
VODNA PREGRADA				NEPOMEM- BNOST, DROBNA- RIJA						
VEK, STOLETJE				IRIDIJ PASMA PSOV			ROČNO ORODJE ZA ŽETEV	ANTIČNI KRAJ V APULIJI VOJAŠKI POHOD		
ALUMINIJ			UVRSTITEV PRIKAZ ČESA PRED PUBLIKO							VAS PR GRADU KLEVEV NA DOLE
POMOŽNA DELITEV GLAVNE ENOTE						RADIJ			PREVRETEK DEKOKT ODISEJEV OTOK	
HEROJ FRANC ROZMAN						MOČVIRSKA PTICA				
AVTOR MARKO BOKALIČ	IZKLICANA BARVA PRI KARTAH	SANDI COLNIK ZELENI DEL RASTLINE			NEKDANJI TURŠKI ČASTNIŠKI NASLOV	NEMŠKO IME REKE ANIŽE	SLOV. SKLADA- TELJ (FRANČ) VERZ			
NIZEK ŽENSKI GLAS				DOMAČA ZIVAL TOPEL ALP- SKI VETER				URANOV SATELIT SKANDIJ		
DELO JOŽETA GRASSELLI- JA										
BEST- SELLER, HIT										DEI RAJ JAMN
TOMAŽ TERČEK			AMERIŠKI MATEMA- TIK					RISBA: MIHA ŠTALEC	KNJIŽNICA SIGMA	IZVL

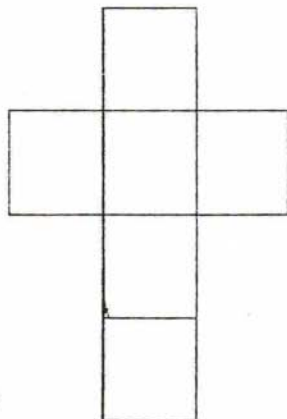
KNJIŽNICA SIGMA – MATEMATIKA

	REKA V MONGOLIJI	SREDOZEM- ZELIKA, KATANEC	MANJŠI JADRANSKI OTOK	JEAN TREMBLEY	LJUBEZEN- SKO PES- NIŠTVO	NAJNIŽJA INDIJSKA KASTA	KRAJ NA OTOKU PAŠMANU	GRŠKA ČRKA	SLA- VONSKO MESTO OB DONAVI	FLAV- TISTKA GRAFE- NAUER	OTOK V JUŽNIH SPORADIH
				GERM. VOJ- SKOVODJA DEL VOJVODINE							
			POŽETA NJIVA					OSEBNI ZAIMEK			
			MAKE- DONSKO KOLO					1000 LITROV			
I Ž N.J.	GENOVSKI DRŽAVNIK						VZHAJALNO SREDSTVO				
	VELE- MESTNO ZABAVIŠČE						ZAKONČEV OČE				
						POD IME DVEH DRŽAV V JV AZIJI				IZGUBA PRI MERJENJU	MOŠKO IME
		PRIKUHA SLADKO- VODNA RIBA						ŽGAŃA PIJAČA			
								SL. POLITIK (FRANCE)			
			DRŽAVA V INDOKINI		KRAJ PRI KOPRU GORA NA KOROŠKEM				MESSINA		
				ZDRAVNIK ZA GIBALNE ORGANE ŠKODLAR					SEVERNO- JADRANSKI OTOK		
							VODA V PLIN STANJU ANDREJ KURENT				
.O KA I IKA											
EČEK									KAREL DESTOVNIK		

MREŽE TELES IN LOGO

Pred nekaj leti sem v Londonu kupil knjigo Mathematical Models, ki sta jo leta 1951 napisala H.M. Cundy in A.R. Rollet in je leta 1981 pri založbi Tarquin Publications doživela tretjo izdajo. V njej so me pritegnila navodila za sestavo papirnatih modelov raznih zanimivih poliedrov. Med njimi so na primer pravilna telesa: tetraeder, kocka, oktaeder, dodekaeder in ikozaeder.

Verjetno je bralcu dobro znana mreža kocke, ki jo prikazuje slika 1.



Slika 1. Običajna mreža kocke

Kocka

Če iz papirja izrežemo mrežo telesa, jo s prepogibanjem vzdolž notranjih črt (povezav) lahko preoblikujemo v polieder. Ker sem po naravi len in me natančno risanje z ravnilom in šestilom ter kotomerom utruja, sem se odločil, da si bom z računalnikom narisal mreže nekaterih teles in jih nato uporabil pri konstrukciji modelov. Med jeziki, ki so na razpolago, se mi je zdel za ta podvig najprimernejši logo.

Zaradi težavnosti problema sem se omejil na telesa, ki imajo vse robove enake dolžine in katerih vsa lica (stranske ploskve) so pravilni mnogokotniki. S tem so seveda odpadla zanimiva "zvezdna" telesa, ki nimajo konveksnih lic. O njih je Presek že pisal. Najprej sem se moral odločiti za predstavitev mrež v računalniku. Ker je kljub poenostavljenemu problemu izbrana rešitev precej zamotana, za samo razumevanje tega prispevka pa ni nujno, da bi jo bralec v celoti dojel, jo tukajle prikazujem le na zgledih. Na sliki 2 so prikazane nekatere ravninske mreže, ki pa predstavljajo le dele teles. Ob vsaki mreži je prikazana tudi njena predstavitev, ki jo določajo oglati oklepaji. Na obodu mreže izberemo

TO R :S	... riše mrežo s predstavitvijo :S
TO RIS :S	... riše mrežo
TO RISO :S	... pomožni program za risanje mreže
TO KOT :N	... kot pri :N-kotniku
TO S :K	... dolžina stranice
TO BESEDILO :B	... Napiše besedilo :B pod sliko
TO RB :S	... Nariše sliko z besedilom vred
TO OSNOVNICA	... S puščico označi osnovnico

```

TO BESEDILO :B
PU
SETPOS [-300 -150]
SETTEXT 4
PD
TT :B
SETTEXT 0
END

```

```

TO RISO :S :N
RT KOT :N
IF EMPTY :S [STOP]
PU FD :KORAK RT 180 PD
RIS FIRST :S
RT 180
RISO BF :S :N
END

```

```

TO R :S
CS
HT
OSNOVNICA
RIS :S
END

```

```

TO OSNOVNICA
FD 10
RT 160
FD 10
BK 10
LT 160
BK 10
END

```

```

TO RIS :S
FD :KORAK
IF EMPTY :S [BK :KORAK S
RISO :S 1 + COUNT :S
END

```

```

TO KOT :N
OP 360 / :N
END

```

```

TO RB :S :B
R :S
BESEDILO :B
END

```

```

TO S :K
MAKE "KORAK :K
END

```

Slika 3. Mrežo narišemo s programom RB, ki zbriše zaslon, nariše mrežo in na njej označi osnovnico, pod sliko pa napiše še ustrezno besedilo. Če pa je mreža le del slike, jo lahko narišemo s programom RIS. Pred tem moramo s programom S določiti dolžino stranice.

Ker je "peš" težko konstruirati zamotane mreže, sem izdelal še nekaj osnovnih programov za sestavljanje mrež. Najprej pa točno povejmo, kaj je ravninska mreža. Definiramo jo takole:

Ravninsko mrežo lahko dobimo na dva načina.

(1) Lahko je pravilni n -kotnik.

(2) Lahko pa jo dobimo tako, da zlepimo dve stranici na obodu dveh ravninskih mrež.

Ravninsko mrežo smo definirali samo s seboj. Taki definiciji pravimo induktivna ali rekurzivna definicija. Stranice na obodu so ravno tiste stranice mreže, ki jih še nismo uporabili pri lepljenju. Zdaj vemo, katere programe za konstrukcijo mrež potrebujemo. Potrebujemo program, ki sestavi mrežo pravilnega mnogokotnika. Potrebujemo pa tudi program, ki lepi dve mreži. To pa še ni vse. Če ne želimo lepiti mrež vzdolž trenutnih osnovnic, potrebujemo še program, ki "premakne" osnovnico. To pomeni, da namesto izbrane osnovnice izbere sosednjo stranico na obodu mreže.

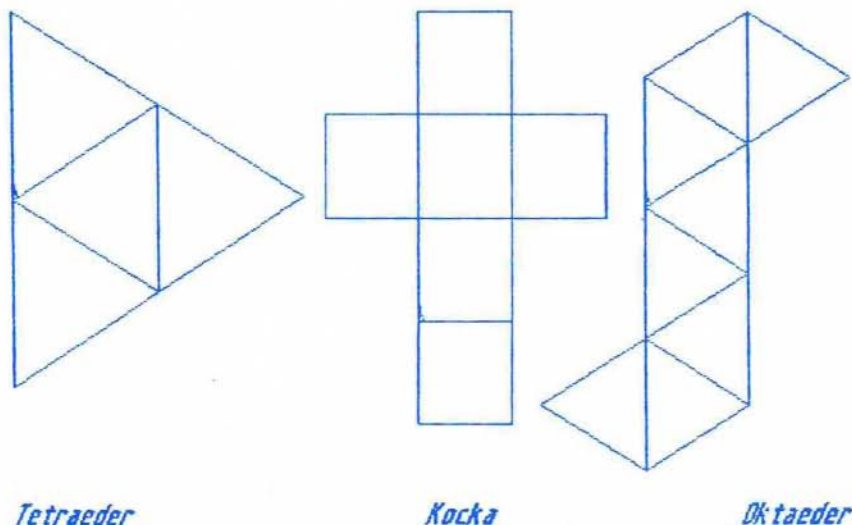
TO DG :S :T	... zlepi mreži :S :T vzdolž izbrane osnovnice
TO LG :S :T	... zlepi mreži :S :T vzdolž izbrane osnovnice
TO D :S	... osnovnico mreže :S premakne za eno v desno
TO L :S	... osnovnico mreže :S premakne za eno v levo
TO N :N	... sestavi mrežo pravilnega :N-kotnika.

TO DG :S :T	TO L :S
IF EMPTY :S [OP :T]	IF EMPTY :S [OP []]
IF EMPTY :T [OP :S]	OP LG FPUT [] BL :S LAST :S
OP DG FIRST :S LPUT :T BF :S	END
END	TO N :N
	IF :N = 1 [OP []]
	OP FPUT [] N :N - 1
	END
TO LG :S :T	TO D :S
IF EMPTY :S [OP :T]	IF EMPTY :S [OP []]
IF EMPTY :T [OP :S]	OP DG FIRST :S LPUT [] BF :S
OP LG FPUT :S BL :T LAST :T	END
END	

Slika 4. Osnovni programi za konstrukcijo ravninskih mrež.

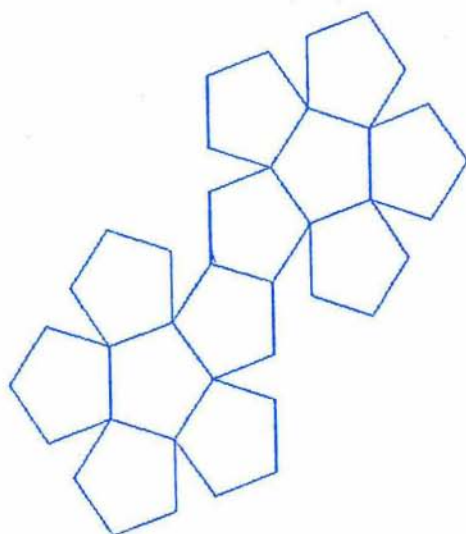
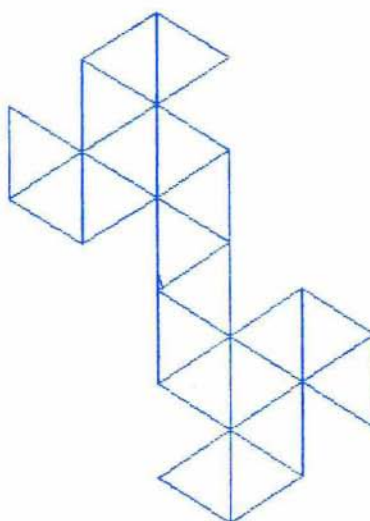
Programa DG in LG se ločita le po tem, kako izbereta novo osnovnico na zlepljeni mreži. Kasneje sem uporabljal le program DG. Pazljivi bralec bo opazil, da potrebujemo program LG v programu L. Očitno je, da lahko s programi na sliki 4 sestavimo poljubno ravninsko mrežo, torej tudi vse mreže pravilnih teles.

Problem je v bistvu rešen. Za prijetno delo pa kljub temu še marsikaj manjka. To sem opazil, ko sem poskusil konstruirati mrežo tetraedra (glej sliko 5). Mrežo tetraedra sestavljajo štirje trikotniki. Pri drugih zanimivih mrežah pa potrebujemo kvadrate, petkotnike, šestkotnike, osemkotnike.



Slika 5. Mreže pravilnih teles: (a) tetraeder, (b) kocka, (c) oktaeder, (d) dodekaeder, (e) ikozaeder.

Zato sem napisal nekaj kratkih programov. Pri risanju mreže tetraedra bi bilo ugodno imeti na razpolago program, ki bi na stranice srednjega trikotnika nalepil preostale tri trikotnike. To idejo lahko uporabimo tudi pri risanju mreže dodekaedra. Tam moramo podvojiti mrežo iz petih petkotnikov, ki smo jih nalepili na stranice šestega. Pogosto moramo osnovnico pred lepljenjem prestaviti kar daleč v levo ali desno. Tako so nastali programi s slike 6.

*Dodekaeder**Ikozaeder*

TO T	... trikotnik
TO Q	... kvadrat
TO P	... petkotnik
TO H	... šestkotnik
TO O	... osemktonik
TO DEC	... desetkotnik
TO CC :S	... obseg
TO LL :N :S	... osnovnico :N krat v levo
TO DD :N :S	... osnovnico :N krat v desno
TO GG :N :K :S	... :N krat nalepi :S nase, pri tem skače po :K
TO DB :S	... podvoji :S
TO ROZA :S :T :N	... na :N zaporednih stranic :T nalepi primerek :S
TO RZ :S :T	... na vsako stranico :T nalepi primerek :S
TO AT :S :T :L	... na :S nalepi večkrat :T. Pri tem določa seznam števil :L razmike in COUNT :L je število primerkov :T, ki jih lepimo.

(program se nadaljuje na naslednji strani)

TO P	TO ROZA :S :T :N
OP N 5	IF :N = 0 [OP :T]
END	MAKE "ROZA ROZA :S :T :N - 1 :
	OP DG :ROZA :S
	END
TO H	
OP N 6	TO RZ :S :T
END	OP ROZA :S :T CC :T
	END
TO O	
OP N 8	TO DB :S
END	OP DG :S :S
	END
TO DD :N :S	
IF :N = 0 [OP :S]	TO AT :S :T :L
OP DD :N - 1 D :S	IF EMPTY :L [OP :S]
END	MAKE "TEMP DG :T LL FIRST :L :S
	OP AT :TEMP :T BF :L
	END
TO LL :N :S	
IF :N = 0 [OP :S]	TO DEC
OP LL :N - 1 L :S	OP N 10
END	END
TO CC :S	
IF EMPTY :S [OP 1]	TO Q
OP (+ CC FIRST :S CC BF :S)	OP N 4
END	END
TO GG :N :K :S	TO T
IF :N = 0 [OP []]	OP N 3
OP DD :K DG :S GG :N - 1 :K :S	END
END	

Slika 6. Nekatera lica, ki jih v mrežah pogosto potrebujemo.

Pomožni programi za konstrukcijo mrež.

Zdaj pa ni bilo več težko sestaviti mrež pravilnih teles.

TO TETRAEDER
 TO KOCKA
 TO OKTAEDER
 TO DODEKAEDER
 TO IKOZAEDER
 TO KINO ... program, ki zaporedoma riše mreže teles.

TO KOCKA
 OP DG L L RZ QQQ
 END

TO OKTAEDER
 OP DB D DG D DG T T DG T T
 END

TO DODEKAEDER
 OP DB D RZ P P
 END

TO IKOZAEDER
 OP DB L L RZ DG T DB T T
 END

TO KINO

S 60

RB TETRAEDER "Tetraeder

S 50

RB KOCKA "Kocka

RB OKTAEDER "Oktaeder

S 30

RB IKOZAEDER "Ikozaeder

RB DODEKAEDER "Dodekaeder

END

TO TETRAEDER

OP RZ T T

END

Slika 7. Programi za konstrukcijo mrež petih pravilnih teles.

Z orodjem, ki ga imamo zdaj na razpolago, se lahko lotimo sestavljanja in risanja drugih zanimivih mrež. Pri velikih mrežah je v mojem računalniku včasih zmanjkalo prostora. Včasih sem si pomagal tako, da sem shranil vmesne rezultate, ki so seveda predstavitev mrež. To naredimo tudi takrat, ko nameravamo večkrat risati isto mrežo. Tako postane risanje precej hitrejšo. Tako na primer namesto

R KOCKA, raje napišemo

MAKE "KOCKA KOCKA
 R:KOCKA

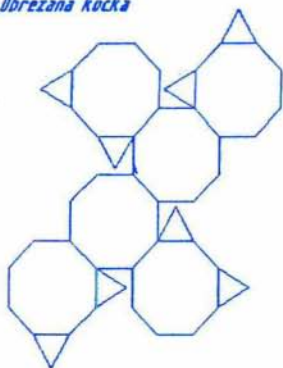
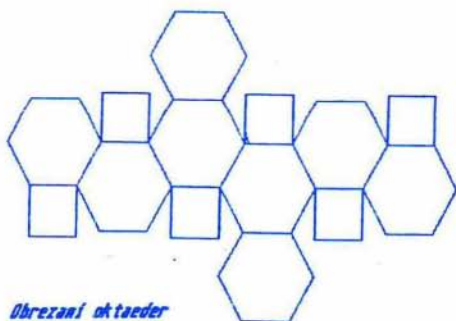
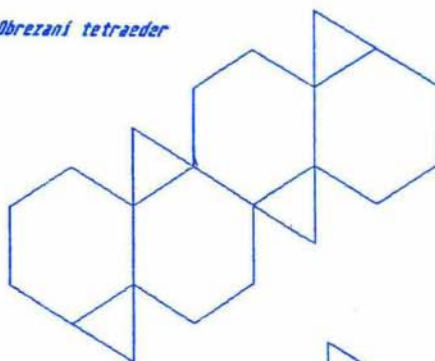
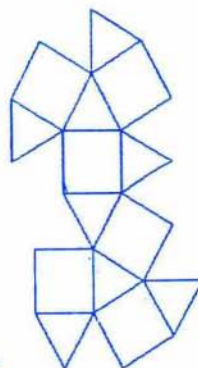
Kogar zanima, kako je shranjena mreža kocke v logu, pa lahko doda še ukaz PR : KOCKA. Lahko pa napiše RB : KOCKA : KOCKA.

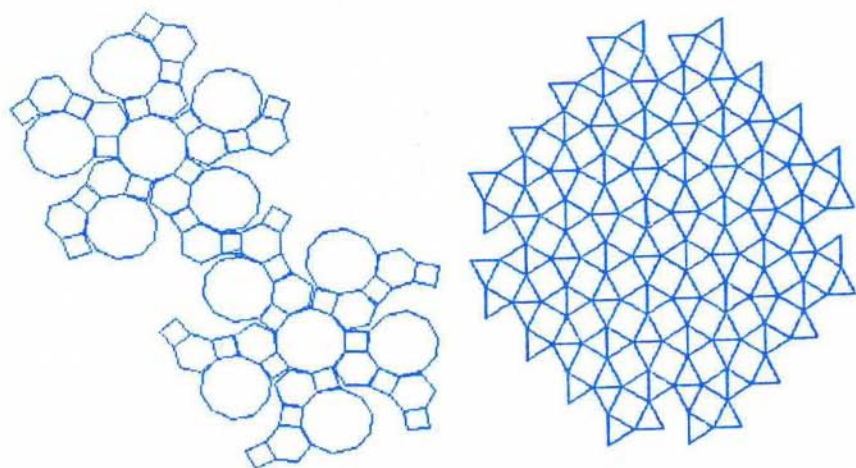
Na sliki 8 so nekateri programi, ki konstruirajo ravninske mreže, na sliki 9 pa so narisane te mreže.

TO KUBOKT	TO OBRKUBOKT
MAKE "KBK D RZ L DG T Q T	OP []
OP DG D :KBK :KBK	END
END	
	TO IKOZIDO
TO OBRTET	MAKE "PTT L L DG T D DG T P
OP DB D D DB L DG T H	MAKE "HICO L L RZ :PTT P
END	OP DG :HICO L :HICO
	END
TO OBRKOCKA	TO ROMBKUBOKT
OP DB L L AT O L AT O T [0 2] [0 2]	OP ATT RBCOC C [3 13]
END	END
TO OBROKT	
OP DB DD 6 DG H LL 3 AT DG H D DG H H Q [1 5 4]	
END	
TO VELIKI	
MAKE "VV DG Q DD 4 DG H DG DEC D D DG Q DD 3 DG H Q	
MAKE "VVV DD 13 AT DEC :VV [2 2 2 2 2]	
OP DG D D :VVV :VVV	
END	
TO FILM	
S 30	
RB OBRTET [Obrezani tetraeder]	
RB KUBOKT [Kuboktaeder]	
RB OBRKOCKA [Obrezana kocka]	
RB OBROKT [Obrezani oktaeder]	
S 20	
RB OBRKUBOKT [Obrezani kuboktaeder]	
RB IKOZIDO [Ikozidodekaeder]	
S 10	
RB VELIKI [Obrezani ikozidodekaeder]	
END	

Slika 8. Programi za nekatere mreže.

Na tem mestu smo dolžni nekaj pojasnil. Pojem "obrezanega" telesa je intuitivno jasen. Pomeni, da izbrano telo popravimo tako, da ga v bližini vsakega oglišča presekamo z ustrezno izbrano ravnino in tako "odrežemo" oglišče. Pri kocki na ta način za vsako oglišče dobimo enakostranični trikotnik. Iz kockinih ploskev pa dobimo pravilne osemkotnike. Seveda si lahko tako obrezovanje zamislimo bolj radikalno, tako da od originalnih robov telesa nič ne ostane. Če takšno radikalno obrezovanje naredimo na kocki, dobimo telo, ki smo ga tu poimenovali kuboktaeder. Običajno pri programiranju za imena programov jemljemo daljše opisne izraze. Mi pa smo s T označili trikotnik, s Q kvadrat, L je premik v levo, D je premik v desno, itd. To je res v nasprotju z omenjenim načelom. Če pa pogledamo, kje in kako te programe uporabljamo (glej na primer program OBR TET na sliki 8), pa vidimo, da smo na ta način pregledno zapisali dokaj zamotane konstrukcije. Navsezadnje pa je končna izbira imena stvar programerjevega okusa.

Obrezana kocka*Obrezani tetraeder**Obrezani oktaeder**Kuboktaeder*



Obrezani ikozidodekaeder

Slika 9. Slike mrež, ki smo jih sestavili s programi na sliki 8. Zadnji med njimi je ravninski vzorec. Na njem so nekatera lica narisana večkrat.

Če programe iz slike 8 pokličemo iz programa FILM, lahko pripravimo računalniško predstavo. Če priznam po pravici, do danes še nisem nobene od narisanih mrež zares uporabil za konstrukcijo papirnatega modela. Na mizi imam napol zlepljen majcen dodekaeder. Očitno se je treba konstrukcije pravih papirnatih modelov lotiti na pametnejši način, na primer tako, kot svetujejo v knjigi, ki sem jo omenil na začetku. Zadnje čase me preganja misel, da bi raje z računalnikom narisal njihove dvorazsežne projekcije. Vendar se bojim, da bom pri tem problemu zaradi lenobe raje segel po papirju.

Tomaž Pisanski

PLOŠČINA TRIKOTNIKA

Izračunaj ploščino trikotnika s stranicami: $\sqrt{5}$, $\sqrt{13}$, $\sqrt{26}$!

Dragoljub M. Milošević

Becklake S., **VESOLJE — zvezde, planeti in vesoljske ladje**, Domus in Mladinska knjiga, Ljubljana 1989, 64 strani, velik format; prevedla Irena Struna Arko.

V zbirki priročnikov za otroke *Okno v svet* založb Domus in Mladinske knjige je v prevodu Irene Strune—Arko izšla prikupna poljudnoznanstvena knjiga S. Becklake, **VESOLJE — zvezde, planeti in vesoljske ladje**. Knjiga pripoveduje o tem, kaj vse je človek doslej že odkril o vesolju in kako ga raziskuje danes. Opisuje naš planetni sistem, Sonce, Luno, zvezde in galaksije. Zvemo, kakšne naloge opravljajo umetni sateliti in vesoljske ladje in kakšno je življenje astronavta v vesoljskem plovilu. S podatki o najnovejši tehnologiji in nazornimi ilustracijami nam knjiga preprosto, a na strokoven način približa zanimiva področja astronomije in astronautike, to je temo, ki je človeka že od nekdaj vznemirjala in burila njegovo domišljijo.

Nekaj naslovov posameznih poglavij: Natančnejši pogled na nočno nebo; Kako delujejo umetni sateliti; Planet Zemlja; Astronavske obleke; Človek na Luni; Preučevanje Sonca; Najbolj vroči planeti; Odkrivanje zunanjih planetov; Življenje in smrt zvezde; Črne luknje; Nevidna astronomija; Začelo se je z velikim pokom; Naša prihodnost v vesolju; Nebesne karte.

Knjiga je izredno estetsko oblikovana. Pisana je živahno, privlačno, razumljivo, jedrnat. Posebno bogat in dobro prikazan je ilustrativni del. Zaradi teh odlik lahko snov v knjigi razume že učenec nižjih razredov osnovne šole. Knjigo priporočam vsem, ki se zanimajo za astronomijo in novejša astronautska dognanja, posebno matematično fizikalnim krožkom pa tudi šolskim in drugim knjižnicam.

Marijan Prosen

NAROČILNICA — DOMUS

Nepreklicno naročam knjigo **VESOLJE — zvezde, planeti in vesoljske ladje** po ceni 312.000 din.

Znesek bom poravnal po prejetju računa:

- a) Posebna ponudba za naročnika "Preseka": v enkratnem znesku z 20% popustom — 249.600 din
- b) v dveh obrokih po 156.000 din
(ustrezno obkroži)

Knjigo pošljite na naslov:

Ime in priimek

Ulica

Kraj

Reg. št. os. izk. Poštna številka

izdana v

Naročilnica zavezuje založbo in kupca.

Naročilnico izrežite in pošljite na naslov:

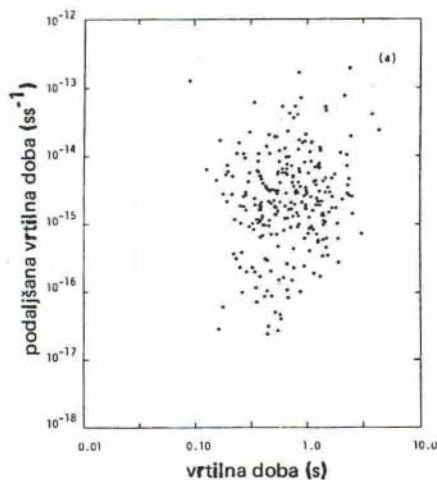
DOMUS, Kardeljeva 2/III, 61001 LJUBLJANA

ODKRITJE PULZARJA V OSTANKU SUPERNOVE 1987 A

Astronomi, ki so opazovali na štiri metrskem daljnogledu mednarodnega observatorija pri Cerro Tololu v Čilu, so 18. januarja 1989 odkrili pulzar v ostanku supernove v Magellanovem oblaku. Njeno eksplozijo opazujejo od februarja 1987 (glej Presek letnik 16, št. 1). Iz približno sedmih ur opazovanja so ugotovili, da utripa pulzar s frekvenco $1968,629 \text{ s}^{-1}$. Hitrosti, s katero se zmanjšuje ta frekvenca, pa še niso izmerili. Sij pulzarja v vidnem področju se je med sedemurnim opazovanjem spreminjal med 18. in 19. magnitudo. Če upoštevamo razdaljo do pulzarja, to pomeni, da seva v vidnem področju približno stokrat več kot Sonce. Prav verjetno je, da je pri tem pulzarju vidno sevanje le majhen del vse oddane energije za razliko od Sonca, kjer predstavlja vidno sevanje približno 30 odstotkov vse oddane energije. Frekvenca pulzarja je izredno visoka. Zato še vedno preverjajo, če niso morda zamenjali vmesnega pulza za ponovitev osnovnega. Taka pomota bi pripisala pulzarju dvojno frekvenco. Ponoven poskus opazovanja z 2,5 metrskim daljnogledom v Las Campanasu dne 31. januarja 1989 ni uspel. Daljnogled bi mogel zaznati pulzar, če bi imel sij 20. magnitud, kar pa je 2,5 krat manj od najšibkejšega sija 19^m izmerjenega pri Cerro Tololu.

Prvo odkritje rojstva pulzarja je za astronome zelo vesel dogodek. Saj so tak pojav že nekaj let napovedovali kot možen, nihče pa ni mogel predvideti, da ga bomo opazovali že tako kmalu. Zato si bom kljub skupim podatkom privoščil nekaj komentarjev.

Pulzarje poznamo že dobrih dvajset let (odkriti 1967). Kmalu po odkritju se je uveljavila hipoteza, da so pulzarji nevtronske zvezde, ki ostanejo po eksploziji supernove (glej Presek letnik 3, št. 4). Mnogi pojavi so kazali na obstoj močnih magnetnih polj na pulzarjih, zato ni bilo težko pojasniti radijskega utripanja z elektromagnetnim vplivom hitro vrtečega se magneta na okolno snov. Magnetno zaviranje vrtenja se opazi kot upočasnjevanje pulzarja in ta pojav so pri pulzarjih tudi v resnici opazili. Na sliki iz leta 1985 so zbrani rezultati meritev za 256 pulzarjev v



diagramu vrtilna doba (s) — podaljše-

vanje vrtilne dobe v sekundi ($s \cdot s^{-1}$). Iz tega diagrama je razvidna določena korelacija (statistična zveza) med vrtilno dobo pulzarja in hitrostjo podaljševanja te dobe. Pulzarjem, ki se hitro vrtijo, se vrtilna doba v splošnem mnogo hitreje podaljšuje kot počasnejšim pulzarjem. To lahko tudi pričakujemo, če pomislimo, da raste navor magnetnega zaviranja z visoko potenco hitrosti vrtenja. Vidimo pa tudi, da zveza ni enolična, kar verjetno kaže, da jakost magnetnega polja ni enaka za vse pulzarje.

Na žalost, novega pulzarja še ne moremo vrisati v diagram na sliki, ker še niso izmerili daljšanja vrtilne dobe (za to je potreben daljši čas opazovanja). Vendar nam že sam podatek o njegovi vrtilni dobi (to je $1/\text{frekvenca} \sim 500 \mu s$) namiguje, da ta pulzar precej odstopa od skupine dosedaj znanih. Po hitrosti vrtenja bi ga raje uvrstili v drugo vrsto med tako imenovane milisekundne pulzarje: nekatere njihove predstavnike so odkrili pred približno tremi leti. Vendar pa nastanek najnovejšega pulzarja ni v skladu s predstavami o naravi milisekundnih pulzarjev. Ti naj bi po mnenju astronomov imeli tako velike hitrosti zato, ker so v tesnem paru s še eno zvezdo, ki jim stalno dodaja snov. Tirna vrtilna količina vpadajoče snovi, ki je velika, naj bi se tako prelivala v vrtilno količino pulzarja. Za tak mehanizem je na novo odkritem pulzarju malo prostora. Zato lahko s precejšnjo gotovostjo pričakujemo, da bo novi pulzar precej spremenil našo sliko o naravi teh nenavadnih zvezd.

Andrej Čadež

UMETNOST V VESOLJU

V celotnem vesolju umetnosti ni. Kako to? Enostavno! Vesolje je neskončno veliko. Naloga umetnosti pa je, da drži zrcalo naravi, takega zrcala pa glede na neskončnost vesolja enostavno ni. Torej, ...

KAJ JE TO NESKONČNO

Neskončno: Večje kot največja stvar vseh časov pa še malo. V resnici še mnogo večje kot to, prav fantastično velikansko, totalno gromozansko, vrste 'uf, to pa je!'. Neskončnost je tako velika, da je v primerjavi z njo velikanskost prav cuckana. Orjaško krat velikansko krat gromozansko, nekaj takega vam skušamo dopovedati.

Iz knjige D.Adams, Restavracija ob koncu Vesolja izbral Matija Lokar

5. ŠOLSKO IN 15. IZBIRNO TEKMOVANJE SREDNJEŠOLCEV IZ MATEMATIKE

V šolskem letu 1988/1989 smo šolsko tekmovanje srednješolcev iz matematike prestavili na december. Že 16. decembra so se na nenaravoslovnih šolah učenci spoprijeli z naslednjimi nalogami:

Prvi letnik

1. Pokaži, da je razlika četrth potenc poljubnih dveh zaporednih lihth števil deljiva s 16.
2. Pri kakšnih naravnih številih a in b je $(a - 1)/(b - 1)$ za 1 večje od a/b ?

3. Če v magičnem kvadratu seštejemo števila v poljubni vrstici, poljubnem stolpcu ali poljubni diagonali, dobimo enak rezultat. Kolikšno naj bo število N , da bo kvadrat na sliki magičen?

16	N	
11		15
12		

4. Dan je pravokotnik $ABCD$, ki ima stranici $AB = 10$ cm in $BC = 8$ cm. E naj bo središče stranice AB , F pa poljubna točka na stranici CD . Presečišče daljice AF z zveznico središč stranic BC in AD označimo z G . Kolikšna je ploščina lika, ki ga dobimo, če iz pravokotnika izrežemo trikotnik EBG ?

Drugi letnik

1. Pri pouku telesne vzgoje so ugotovili, da je v skupini dvajsetih fantov vsak v povprečju težak 62 kg. Če se fantom pridruži še učitelj, je v večji skupini vsak v povprečju težak 63 kg. Koliko tehta učitelj?
2. V pravokotnem trikotniku ABC razdelimo hipotenuzo AB s štirimi točkami na 5 enakih delov. Naj bo D točka, ki je najbližja A , in E točka, ki je najbližja B . Določi število k v izrazu $CD^2 + CE^2 = k AB^2$.
3. Iz oglišča C kocke s spodnjo osnovno ploskvijo $ABCD$ in zgornjo

osnovno ploskvijo $A'B'C'D'$ potegnemo vektor CE do točke E na diagonali $A'C'$ tako, da je CE pravokoten na telesno diagonalo AC' . Kolikšen je kvocient dolžin daljice $A'E$ in diagonale $A'C'$?

4. Pokaži, da je v tetraedru zveznica težišč dveh mejnih ploskev vzporedna z enim od robov tetraedra.

Tretji letnik

1. V pravokotniku $ABCD$ naj bosta E in F zaporedoma razpolovišči stranic CD in DA , G pa presečišče daljic AE in CF . Poišči razmerje plosčin štirikotnika $ABCG$ in trikotnika FCD .
2. Enakokraki pozitivno orientirani trikotnik ABC z osnovnico AB ima oglišča na paraboli $y = -x^2/2$, eno od oglišč je v njenem temenu. Izračunaj ploščino tega trikotnika, če veš, da ima oglišče B enaki neničelni koordinati.
3. Reši enačbo $\log_3 x^3 + \log_3 \sqrt{x} = 5 + \log_3 x$.
4. Poišči vse rešitve enačbe $\log_7(6 + 7^{-x}) = 1 + x$.
5. Predstavniki mest A in B , ki sta med seboj oddaljeni 3 km, so se dogovorili, da bodo zgradili novo šolo, ki jo bo obiskovalo 100 učencev iz mesta A in 50 učencev iz mesta B . Želijo, da bi vsi učenci skupaj prehodili dnevno čim krajšo pot. Koliko naj bo šola oddaljena od kraja A ? (Mesti A in B obravnavaj kot točki.)
Opomba: Peta naloga ni bila obvezna.

Četrty letnik

1. Graf polinoma $p(x) = ax^7 + bx^3 + cx - 4$ gre skozi točko $T(-7,3)$. Utemelji odgovor na vprašanje, ali lahko izračunamo $p(7)$ (izračunaj to vrednost, če se da).
2. Kolikšen kot oklepata tangenti, ki ju iz koordinatnega izhodišča postavimo na krožnico $x^2 + y^2 - 8y + 12 = 0$?
3. Reši enačbo $\sqrt{\cos^2 x + \frac{1}{2}} + \sqrt{\sin^2 x + \frac{1}{2}} = 2$.
4. Na igrišču je Miha narisal velik koordinatni sistem. Enoto je izbral tako, da je njegov korak meril v dolžino $\sqrt{2}$ enote. Postavil se je v izhodišče in začel svojo pot takole: napravil je korak do točke $(1,1)$, se prvič ustavil, obrnil za 90° v levo, napravil dva koraka, se drugič ustavil, obrnil spet za

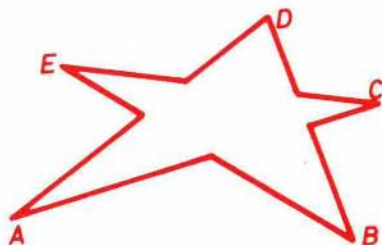
90^0 v levo, napravil tri korake, se tretjič ustavil, obrnil za 90^0 v levo, ...
V kateri točki se je stotič ustavil? Kolikšno pot je do tedaj prehodil?

V soboto, 18. marca 1989 so poskušali vsi, ki so se želeli uvrstiti na republiško tekmovanje, rešiti čimveč izmed naslednjih nalog:

Prvi letnik

1. Določi najmanjše naravno število $n > 1$, ki je kvadrat, kub in sedma potenca. Koliko mest ima to število?
2. Pokaži, da izraz $n^2 + 3n + 5$ ni deljiv s 121 pri nobenem naravnem številu n .

3. Dana je poljubna petokraka zvezda (na sliki je en primer). Kolikšna je vsota kotov z vrhovi v točkah A, B, C, D in E ?



4. Mali matematik Matjažek je s kockicami LEGO sestavljal razne like in telesa. Ko je sestavljal kvadrate, mu je vedno nekaj kockic ostalo ali pa zmanjkalo. Podobno se mu je dogajalo, ko se je poskušal v oblikovanju večjih in manjših kock. Dedku je povedal: 'Če bi mi oče kupil še enkrat toliko kockic, bi lahko ravno sestavil kvadrat, če bi mi pa še mama kupila toliko kockic kot oče, bi jih imel ravno prav za oblikovanje kocke.' Dedek se je nasmehnil in dodal: 'Število kock, s katerimi se igraš, je najmanjše mogoče, da velja, kar si mi povedal.' Koliko kockic je imel Matjažek?

Drugi letnik

1. Dani sta različni pozitivni števili a in b . Kaj je več:

$$\frac{a}{\sqrt{b}} - \sqrt{a} \quad \text{ali} \quad \sqrt{b} - \frac{b}{\sqrt{a}} ?$$

2. V trikotniku ABC naj bosta B_1 in C_1 nožišči višin na AC oziroma AB ter O središče trikotniku očrtane krožnice. Pokaži, da je zveznica AO pravokotna na B_1C_1 .

- Kroga naj se dotikata od zunaj v točki C (tako da je presek njunih notranjosti prazen). Skupna tangenta naj se dotika prvega kroga v točki A in drugega v točki B (A in B naj bosta različni točki). Pokaži, da je kot ACB pravi.
- Košarkarski ekipi iz Osme in Devete dežele sta se doslej pomerili na 11 tekмах, ki jih izmenično organizirajo v eni in drugi deželi. Kar pet krat so bili gostje uspešnejši, trenutno pa s 7:4 v zmagah vodi moštvo iz Osme dežele. Kje bo dvanajsta tekma?

Tretji letnik

- Dokaži, da je

$$\frac{1}{\log_x 2 \log_x 4} + \frac{1}{\log_x 4 \log_x 8} + \dots + \frac{1}{\log_x 2^{n-1} \log_x 2^n} = \frac{n-1}{n} \left(\frac{1}{\log_x 2} \right)^2$$

- Pokaži, da v poljubnem trikotniku velja:

$$a) \frac{a+b-c}{2} < t_c < \frac{a+b}{2}$$

$$b) s < t_a + t_b + t_c < 2s$$

(tu so a, b, c stranice trikotnika, t_a, t_b, t_c težiščnice in s polovica obsega).

- Sredi širne ravnine stoji stolp. Janez se je odločil, da mu bo izračunal višino. Na razdalji a od njegovega nožišča ga je videl pod kotom α , na razdalji b pod kotom β in na razdalji c pod kotom γ . Kako visok je stolp (višino izrazi z razdaljami a, b in c), če je:

$$a) \alpha + \beta + \gamma = \pi/2$$

$$b) \alpha + \beta + \gamma = \pi$$

- Ali obstaja polinom p z realnimi koeficienti, da velja $p(\cos x) = \sin x$?
Odgovor utemelji.

Četrti letnik

- Poišči realne rešitve enačbe

$$x^n - \binom{n}{1} ax^{n-1} - \binom{n}{2} a^2 x^{n-2} - \dots - \binom{n}{n-1} a^{n-1} x - a^n = 0$$

če je a od nič različno realno število.

- Dano je neskončno zaporedje $1, \cos x, \cos^2 x, \dots, \cos^n x, \dots$. Če od vsote členov na lihih mestih zaporedja odštejemo vsoto členov na sodih mestih, dobimo $2/3$. Kolikšen je x ?
- Dokaži trditev: zrcalna slika gorišča parabole preko njene tangente leži na vodnici.

4. Dan je polinom $p(x) = x(x-1)(x-2) \dots (x-1989)$. Izračunaj vrednost njegovega odvoda v $x = 0$.

Iz šol so predlagali nad 250 kandidatov za nastop na republiškem tekmovanju, Komisija za popularizacijo pa jih je izbrala 100 manj. Slaba tretjina izbranih je bila z nenaravoslovnih usmeritev.

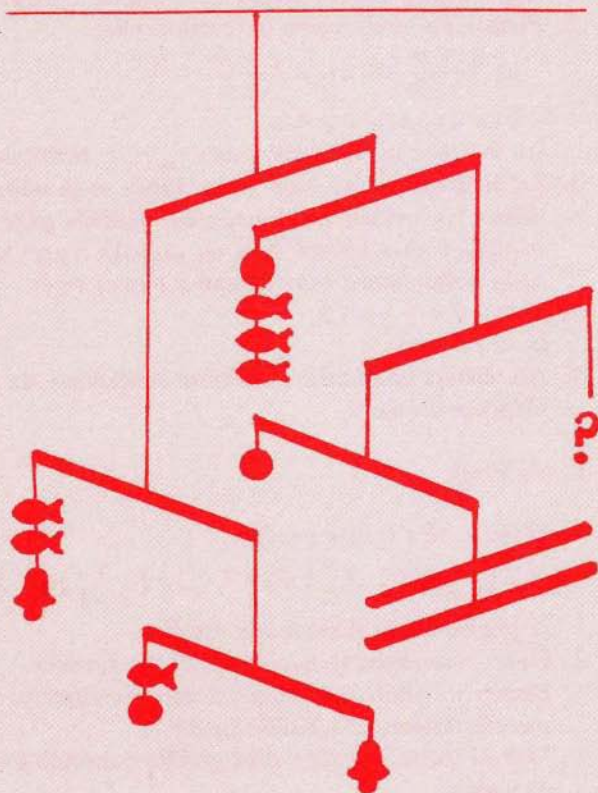
Izobraževalna skupnost SR Slovenije, Fakulteta za elektrotehniko in računalništvo, FNT – VDO Matematika in mehanika ter Zavod SR Slovenije za šolstvo so nam tudi letos poleg mnogih učiteljev pomagali pri naši dejavnosti. Vsem se iskreno zahvaljujemo.

Darjo Felda

PRAZNIČNI OKRASEK

Izpod stropa sobe visi kovinski okrasek iz prečk, ribic, krogel in zvončkov. Kateri dve različni stvari, ki visita na mestu, označenem z vprašajem, držita sistem v ravnotežju? Pri tem je teža vrvic zanemarljiva, ne pa tudi teža prečk.

Marija Vencelj



REŠITVE NALOG

ENAKOST – Rešitev s str. 16 iz P–1

Predpostavimo, da sta števili x in y različni. Zaradi simetričnosti pogoja v nalogi smemo privzeti, da je $0 < x < y$. Potem je $y \geq 1$, poleg tega pa očitno drže ocene

$$0 < x^x < y^x, \quad x^{y-x} - 1 < y^{y-x} - 1$$

Ker je $y^{y-x} \geq 1$, odtod sledi neenakost

$$x^y - x^x = x^x (x^{y-x} - 1) < y^x (y^{y-x} - 1) = y^y - y^x$$

torej velja $x^y + y^x < x^x + y^y$.

KORNET – Rešitev s str. 16 iz P–1

Slika na desni strani nam pove, da sta trikotnika PMA in PNS podobna, torej velja

$$\overline{PN} : r = v : \overline{MA}$$

Če upoštevamo še Pitagorov izrek, ki nam da zvezo

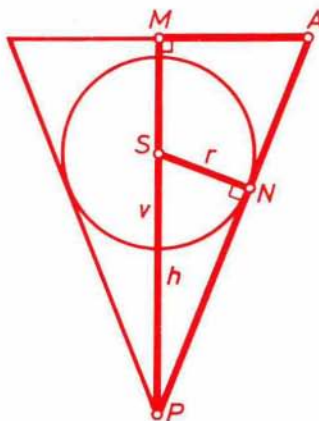
$$\overline{PN}^2 = h^2 - r^2$$

dobimo enakost

$$\overline{MA}^2 = r^2 v^2 / (h^2 - r^2)$$

Prostornina korneta meri

$$\frac{\pi}{3} \cdot \frac{r^2 v^2}{h^2 - r^2}$$



Boris Lavrič

ZAPOREDJA – Rešitev s str. 51 iz P–1

Če je na zadnjem mestu 8, je pred njim lahko 18, 81, 24 ali 42. Ko poskušamo s takim preverjanjem za nazaj, pridemo do edine rešitve

$$77 \rightarrow 49 \rightarrow 36 \rightarrow 18 \rightarrow 8$$

Pa še vprašanje za najbolj vztrajne: ali lahko najdemo tako zaporedje z vsaj petimi členi, ki imajo na zadnjem mestu kako drugo cifro?

Darjo Felda

VSOTE ULOMKOV S ŠTEVCEM 1 – Rešitve s strani 68

Najprej odgovorimo na vprašanje v tekstu članka (str. 68).

Enačba $E_3(1)$ ima le rešitev $a_1 = 2, a_2 = 3, a_3 = 6$, ki zadošča pogoju P .
Enačba $E_4(1)$ ima naslednje dobre rešitve:

$a_1 = 2,$	$a_2 = 3,$	$a_3 = 7,$	$a_4 = 42$
$a_1 = 2,$	$a_2 = 3,$	$a_3 = 8,$	$a_4 = 24$
$a_1 = 2,$	$a_2 = 3,$	$a_3 = 9,$	$a_4 = 18$
$a_1 = 2,$	$a_2 = 3,$	$a_3 = 10,$	$a_4 = 15$
$a_1 = 2,$	$a_2 = 4,$	$a_3 = 5,$	$a_4 = 20$
$a_1 = 2,$	$a_2 = 4,$	$a_3 = 6,$	$a_4 = 12$

1. Enačba $E_2(5/6)$ ima le rešitev $a_1 = 2, a_2 = 3$, ki ustreza pogoju P , enačbo $E_3(5/6)$ pa lahko obravnavamo takole: Zaradi ocene

$$\frac{3}{a_1} > \frac{1}{a_1} + \frac{1}{a_2} + \frac{1}{a_3} = \frac{5}{6}$$

velja $a_1 \leq 3$, torej $a_1 \in \{2, 3\}$. Če je $a_1 = 2$, dobimo

$$\frac{2}{a_2} > \frac{1}{a_2} + \frac{1}{a_3} = \frac{1}{3}$$

odkoder sledi $a_2 \in \{3, 4, 5\}$. Od vseh treh možnosti za a_2 je v tem primeru dobra le $a_2 = 4$. Če pa je $a_1 = 3$, na podoben način kot prej vidimo, da velja $a_2 < 4$, kar pa za dobro rešitev ni mogoče. Torej je $a_1 = 2, a_2 = 4, a_3 = 12$ edina dobra rešitev enačbe $E_3(5/6)$. Z njeno pomočjo lahko konstruiramo rešitve enačbe $E_4(5/6)$. Nekaj jih zabeležimo v naslednjo preglednico

x	y	z	t	x	y	z	t	x	y	z	t
2	4	13	156	2	4	20	30	2	5	12	20
2	4	14	84	2	4	21	28	2	6	7	42
2	4	15	60	2	5	8	120	2	6	8	24
2	4	16	48	2	5	9	45	2	6	9	18
2	4	18	36	2	5	10	30	2	6	10	15

2. Odgovor: $R_2(1/2) = R_2(1/3) = R_2(1/5) = 1, R_2(1/4) = 2, R_4(1/6) = 4$.

3. Enačbo $E_2(1/k), 1 < k \in \mathbb{N}$, vedno reši par

$$a_1 = k + 1, \quad a_2 = k(k + 1)$$

torej je $R_2(1/k) \geq 1$. Če je število k sestavljeno, ga lahko zapišemo v obliki $k = pq$, kjer je $1 < p \in \mathbb{N}$ in $1 < q \in \mathbb{N}$. Enačba $E_2(1/k)$ ima tedaj vsaj dve dobri rešitvi

$$a_1 = pq + 1, \quad a_2 = pq(pq + 1)$$

$$a_1 = p(q + 1), \quad a_2 = pq(q + 1)$$

torej velja $R_2(1/k) = 1$ kvečjemu, če je k praštevilo.

Naj bo zdaj k praštevilo in naj velja

$$\frac{1}{x} + \frac{1}{y} = \frac{1}{z}; \quad 1 < x < y, \quad x, y \in \mathbb{N}$$

Potem je $k(x + y) = xy$, zato velja enakost

$$(x - k)(y - k) = k^2$$

Ker je poleg tega $k < x < 2k$ in tedaj $0 < x - k < k$, mora biti $x - k = 1$. Torej je dobra le rešitev $x = k + 1, y = k(k + 1)$.

4. Vedno so dobre (na primer) naslednje rešitve

$$x = 2k + 1, \quad y = 2k(2k + 1)$$

$$x = 2k + 2, \quad y = 2k(k + 1)$$

$$x = 2k + 4, \quad y = k(k + 2)$$

$$x = 3k, \quad y = 6k$$

5. Število k zapišemo v obliki $k = 2p + 1, p \in \mathbb{N}$. Potem enakost

$$\frac{1}{p + 1} + \frac{1}{(p + 1)(2p + 1)} = \frac{2}{2p + 1}$$

da dobro rešitev enačbe $E_2(2/k)$.

Boris Lavrič

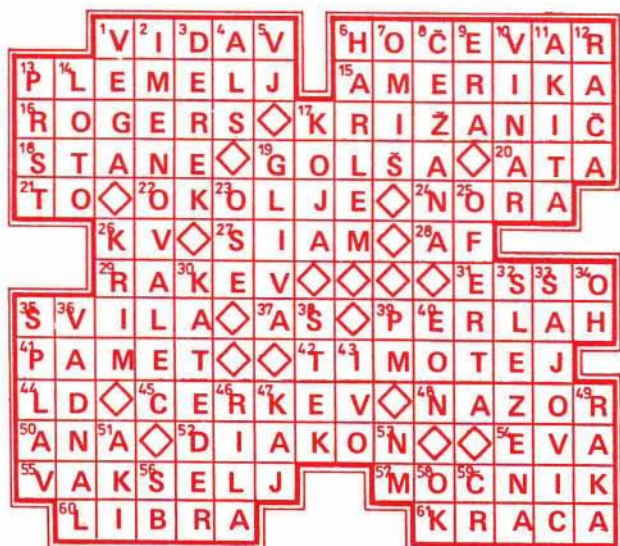
PRAZNIČNI OKRASEK — Rešitev s str. 116

Krogla in ribica.

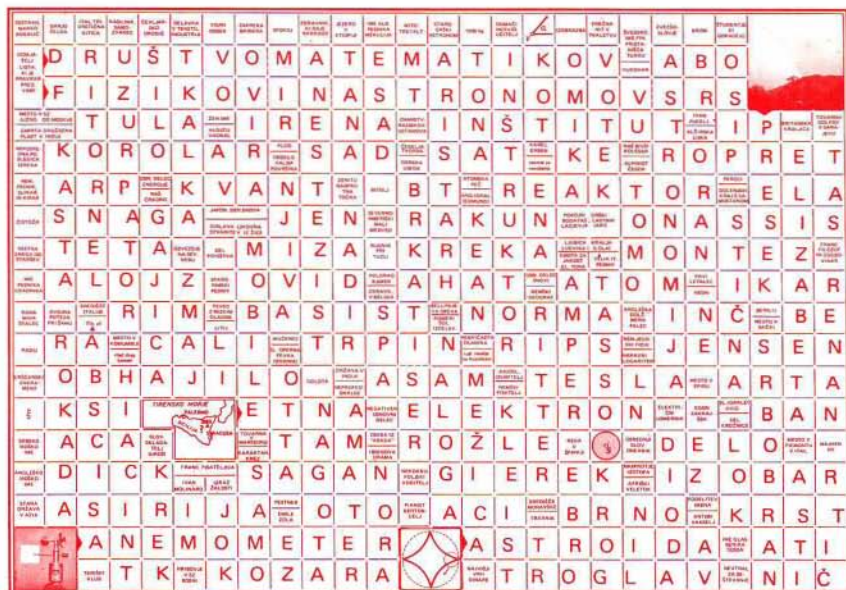
Marija Vencelj

KRIŽANKA "SLOVENSKI MATEMATIKI"

— Rešitev iz P-1



SLIKOVNA KRIŽANKA — Rešitev iz P-1



NAJBOLJ KVADRATASTO LETO – REŠITEV

V prvi številki lanskega Preseka smo objavili nalogo o najbolj kvadratastem letu. Dobili smo eno pomanjkljivo in eno pravilno rešitev. Nalogo je pravilno rešila **Polona Novak**. Z računalniškim programom je ugotovila, da je 1369 najmanjše najbolj kvadratasto leto do leta 10000. Iz števil tega števila dobimo naslednjih 10 kvadratov:

1, 9, 16, 36, 169, 196, 361, 961, 1369, 1936.

Seveda je tudi vsako število, ki ga dobimo s permutacijami (zamenami) števil 1, 3, 6, 9, rešitev naloge. Tako dobimo skupaj $4! = 1 \times 2 \times 3 \times 4 = 24$ rešitev:

1369, 1396, 1639, 1693, 1936, 1963,
3169, 3196, 3619, 3691, 3916, 3961,
6139, 6193, 6319, 6391, 6913, 6931,
9136, 9163, 9316, 9361, 9613, 9631.

Polonin program je pokazal, da drugih rešitev ni! Med temi rešitvami sta le števili 1369 in 1936 tudi sami popolna kvadrata. Tako sta v nekem smislu bolj "kvadratasti" od preostalih.

Polonin program je poiskal tudi najbolj kvadratasto leto do leta 100000. To je 92416. Ima kar 14 kvadratov:

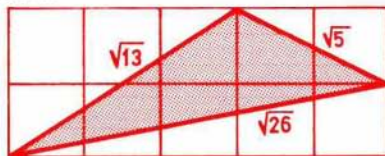
1, 4, 9, 16, 49, 64, 169, 196, 961, 1296, 2916, 6241, 9216, 92416.

Seveda daje tudi vsaka od $5! = 120$ permutacij cifr tega števila rešitev. Najmanjše število, ki ga dobimo na ta način, je 12469, ki pa samo žal ni popoln kvadrat. Na vsak način pa bo do leta 12469, ki je prvo bolj kvadratasto leto od leta 1936, preteklo še precej vode!

Tomaž Pisanski

PLOŠČINA TRIKOTNIKA — Rešitev s str. 80

Z uporabo Pitagorovega izreka ugotovimo, da ima trikotnik na sliki stranice $\sqrt{5}$, $\sqrt{13}$, $\sqrt{26}$. S pomočjo mreže in razmerij izračunamo, da je ploščina ustreznega trikotnika enaka 3,5.



*Dragoljub M. Milošević
prev. D. Kobal*

PISMA BRALCEV

Zdravo!

Pri listanju starejših Presekov sem našla vabilo vsem sestavljalcem križank in se odločila, da sestavim manjšo križanko, ki je priložena v pismu.

Hodim v sedmi razred OŠ Josipa Plemlja Bled in sem odlična učenka, od vsega pa imam najraje matematiko in fiziko.

Drugi vzrok, zaradi katerega ti pišem, pa je matematični zvezek za prvi razred. Ena izmed nalog se glasi:

Na trati se je paslo 16 zajcev. Prišel je lovec in ustrelil 9 zajcev. Koliko jih je še na trati? (Števila sem si izmislila.)

Ta naloga je po mojem mnenju prirejena pesmi:

Vrane družijo se rade,
pet na veji jih čepi,
puška počí, ena pade,
koliko jih še čepi?

Vendar se zatakne pri odgovoru. Pri pesmi je odgovor nič, saj druge vrane odletijo. Pa zajci? Pri "modernizirani" nalogi ne odleti noben zajec, saj ne znajo leteti. Torej zbežijo, vendar to velja samo za žive. Na trati je torej še 9 zajcev in ne 0 kot pri pesmi. Moti me torej, ker je ta naloga med računi odštevanja.

Presek naročam že tri leta in menim, da je vsako leto, celo vsako številko, boljši. Upam, da bo nekoč Presek mogoče kupiti tudi v kioskih, saj bi se tako mnogo več ljudi seznanilo z njim.

Zvesta bralka
Vesna Žnidar

Vesna, hvala za duhovito pismo. Veseli smo, da ti je Presek vse bolj všeč. Tisto o zajcih pa se povsem strinjam. Res bi bilo malo čudno, če bi "ostalih sedem" zajcev mirno obsedelo na trati ... Čudno je pa tudi, kako jih je lahko lovec ustrelil kar devet. Vse z enim strelom? Ali so mirno čakali, da je ustrelil drugega za drugim? Naj bo dovolj šale!

Veseli smo bili tvoje križanke, s katero smo se tokrat pozabavali le v ure-dništvu. Prepričan sem, da to ni bila tvoja zadnja in da se bodo s katero izmed tvojih prihodnjih križank lahko poigrali tudi naši bralci.

Vesna, še naprej ti želimo mnogo uspehov v šoli pa tudi izven nje. Oglasi se še kaj!

Damjan Kobal

RAZISKOVALNE NALOGE MLADIH

V petek, 2. junija 1989 so se v Ljubljani srečali srednješolci iz vse Slovenije, da bi predstavili svoje raziskovalne naloge. Tisti, ki so se poleg drugih šolskih obveznosti ukvarjali z matematičnimi problemi, so se srečali na fakulteti za matematiko. Komisija je prejela, čeprav zaradi mnogih organizacijskih nerodnosti precej pozno, 18 nalog z najrazličnejšimi naslovi. Omenimo nekatere: Jure DOBNIKAR je obravnaval družine parabol, Martin RAIČ funkcijo gama, Renata NOVAK geometrijske konstrukcije s prepogibanjem papirja, Matej KLEMENČIČ Markovske verige, Marjan JERMAN Lance–Williamsovo formulo, Jaka CIMPRIČ Fruchtov izrek. Kar štiri naloge so bile iz zanimivega področja fraktalov, to so bile naloge Anamarije BORŠTNIK, Marka ŽERDINA, Savina GORUPA in Gregorja DOLINARJA. Sodelovali so še: Boris BEZJAK, Andrej ČEH, Milenko POTOČNIK, Zvonko ŽNIDARIČ, Simona RAKUŠA, Peter BEZNEC, Boštjan KOROŠEC, Janja SKALIBER, Alojz NOVAK, Renata PLEH, Miroslav BENČIK, Nada VUKOVIČ, Anita RITONJA in Tatjana NOVAK. Seveda ne gre spregledati požrtvovalnega dela mentorjev.

Udeleženci so dobili priznanja, najboljši pa tudi knjižne nagrade. Komisija je vse naloge pregledala in kratko predstavila vsako nalogo, njene odlične in dobre strani, pa tudi pomanjkljivosti. Ob koncu sta dve avtorici obširneje predstavili svoji nalogi. Škoda, da se nekateri zaključne predstavitve niso udeležili.

Nekatere naloge so obravnavale izredno zahtevno matematično snov, spet druge bolj elementarno, a zato nič manj zanimivo. Zelo poučne so bile naloge, ki so se lotevale praktičnih — uporabnih problemov, pa tiste, kjer sta se koristno prepletala matematična teorija in uporaba računalnika. Marsikje pa je komisija svetovala tudi več doslednosti, natančnosti, več skrbi izražanju, oblikovanju stavkov in jeziku. Marsikdaj je škodljiva tudi prevelika ambicioznost, kajti zaradi previsoko postavljenih ciljev postane obravnavanje problemov preveč površno in premalo globinsko.

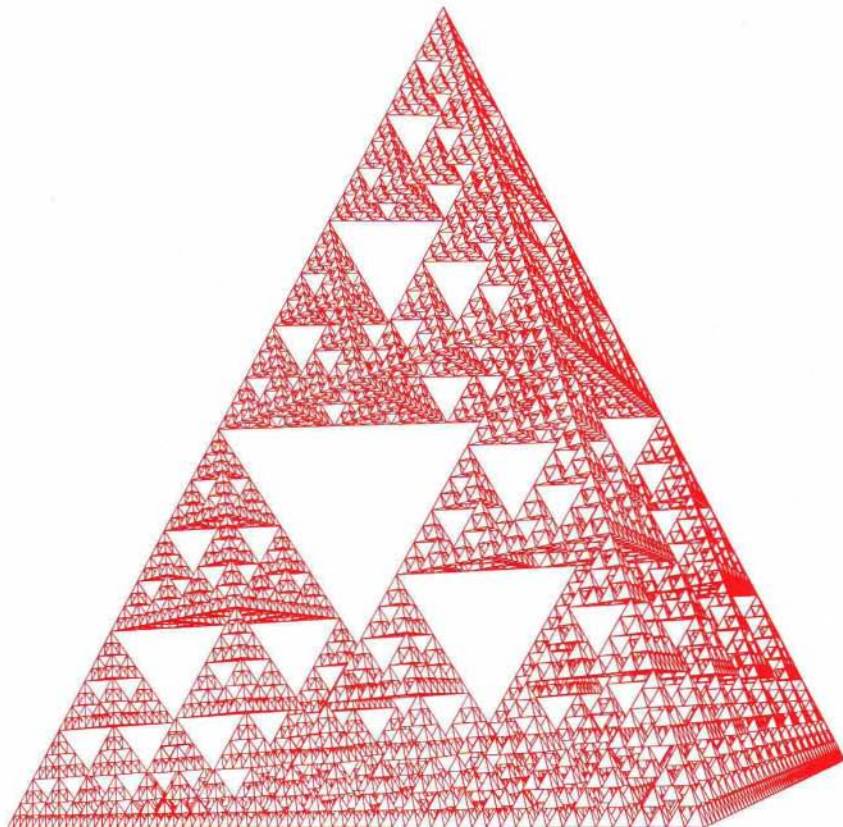
Vsekakor so tisti, ki so prisostvovali tej zaključni predstavitvi, vsaj bežno spoznali mnogo zanimivih problemov, s katerimi se ukvarjajo njihovi vrstniki. Upamo, da bodo avtorji zanimivih nalog našli še toliko časa in se odzvali povabilu, da predstavijo svoje delo tudi bralcem Preseka.

Damjan Kobal



TETRAEDERSKI FRAKTAL

Slika prikazuje rezultat prvih šestih korakov konstrukcije tetraedrskega fraktala. Na vsakem koraku izrežemo iz vseh tetraedrov njihove "sredice". Sredica tetraedra je oktaeder z oglišči v razpoloviščih stranic tetraedra; od vsakega tetraedra tako preostanejo štirje vogalni tetraedri, pa se na vsakem koraku število tetraedrov pomnoži s 4. Po šestih korakih imamo torej $4^6 = 2048$ tetraedrov.



Risba je bila ustvarjena za atestiranje risalnika BENSON na AMBIENTu.

France Dacar

KVADRAT NA TRIKOTNIKE

Trikotnik je ostrokoten, če vsak izmed njegovih notranjih kotov meri manj od pravega kota. In med matematičnimi rekreativci je v tej zvezi zelo znana naloga, ki pravi: *Dani kvadrat razreži na same ostrokatne trikotnike.*

O tem problemu je pred leti profesor Ivan Vidav že pisal v *Preseku* (glej Presek 4 (1976/77 2) in o njem na tistem mestu povedal pravzaprav že skoraj vse.

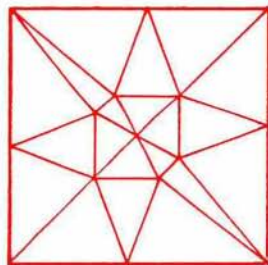
Povzemimo na kratko:

Čeprav je problem zelo enostavno zastavljen in se na prvi pogled najbrž večini reševalcev zdi, da ga zagotovo ni težko razrešiti, je resnica povsem drugačna. To ve vsak, ki se je že kdaj poskusil z njim.

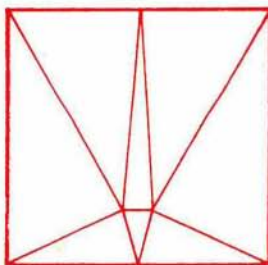
Seveda je dodatna draž problema v tem, da mora reševalec razrezati dani kvadrat na kar najmanjše število ostrokatnih trikotnikov. Na sliki (2) vidimo eno izmed rešitev problema, ki jo je za objavo prispeval Miha TOMŠIČ, dijak Srednje naravoslovne šole v Ljubljani. Kasneje mu je uspelo rešitev še precej izboljšati.



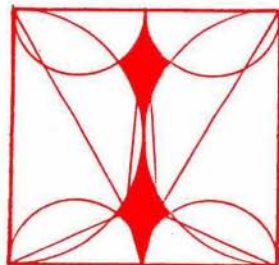
Slika 1



slika (2)



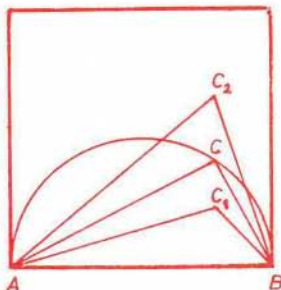
slika (3)



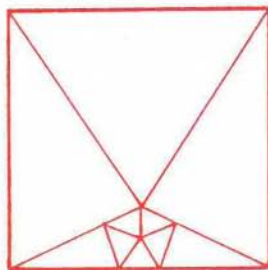
slika (4)

Martin GARDNER, znani ameriški publicist, trdi, da je najmanjše možno število ostrokotnih trikotnikov pri tej nalogi osem. Na sliki (3) vidimo ustrezno rešitev.

Za dokaz, da je ta rešitev dobra, pa služi slika (4). Ostrokotnost nekaterih trikotnikov v rešitvi s slike (3) namreč na prvi pogled najbrž ni dovolj očitna. Brž, ko v kvadrat vrišemo še polkroge, je drugače. Le izreka o v polkrog včrtanem trikotniku se je treba spomniti. Na sliki (5) se da razbrati, da je trikotnik ABC pravokoten, trikotnik ABC_1 topokoten, trikotnik ABC_2 pa ostrokoten.



slika (5)



slika (6)

Slika (4) nas pouči tudi o tem, da je za razrešitev naloge ugodno izbirati delilne točke prav v območju med polkrogi; v tistem delu kvadrata torej, ki je na sliki osenčen. Ugodno, pravim, kajti nikakor ni tudi nujno, da jih poiščemo prav tam. O tem nas pouči že rešitev s slike (2). Pa tudi rešitev s slike (6). Na njej je kvadrat razrezan na deset ostrokotnih trikotnikov, njen avtor pa je spet Martin GARDNER.

Tako. Poduka bodi dovolj. Sedaj pa k vprašanjem:

- 1) Koliko je vseh med seboj različnih razredov danega kvadrata na osem ostrokotnih trikotnikov?
- 2) Razreži kvadrat na enajst ostrokotnih trikotnikov. Namig – uporabi idejo s slike (6).
- 3) Ali obstaja naravno število n , za katerega velja: dani kvadrat je mogoče razrezati na katerokoli število ostrokotnih trikotnikov, ki je večje od n . Če misliš, da obstaja, poišči najmanjše takšno število.
- 4) Razreži kvadrat na devet ostrokotnih trikotnikov. Namig – slika (6).
- 5) Ali obstaja razrez kvadrata na same enakokrake ostrokatne trikotnike?
- 6) Topokotni trikotnik razreži na same ostrokatne trikotnike.

- 7) Dokaži, da nobenega topokotnega trikotnika ni moč razrezati na manj kakor sedem ostrokotnih trikotnikov.
- 8) Postavi kakršnokoli zanimivo vprašanje v zvezi s tokratno *Presekovo nadlogo*.

Spet je treba reči, da nikakor ni nujno, da odgovorite na vseh osem zastavljenih vprašanj. Nekatera med njimi so namreč že kar precej zahtevna. Svoje odgovore nam pošljite do 25. decembra s pripisom "Presekova nadloga". Nagrade vas čakajo!

Vilko Domajnko
ilustr. *Sandi Jakončič*

UGANKE – RAZREŠITEV IZ PREJŠNJE ŠTEVILKE – str. 7

Augustus De Morgan (1806 – 1871) seveda zagotovo ni imel v mislih stavka:
"44 let sem imel leta 44^2 (= 1936)."

Glede na to, da je prijateljeval z omenjenim Georgom Boolom, to pač ne bi bilo mogoče. Iz istega razloga bi bilo teoretično komajda možno, da bi rekel:

"42 let sem imel leta 42^2 (= 1764)."

Razlika v letih med obema prijateljema (93 let) bi bila v tem primeru le prehuda.

Rešitev poiščemo torej vmes:

"43 let sem imel leta 43^2 (= 1849)."

V družbi matematikov pa seveda nihče ne sprašuje naprej, kdaj da se je torej rodil ...

Vilko Domajnko

MAVRIČNA UGANKA – Odgovor na vprašanje s str. 94

Po imenih sodeč hodita sošolca v šolo nekje v Sloveniji, ki leži vsa med 45° in 47° severne zemljepisne širine. Zadnji šolski dan je v drugi polovici junija, takrat pa je na tej zemljepisni širini opoldne sonce tako visoko na nebu, da bi bila vsa mavrica pod obzorjem. Špela je videla, kako visoko je sonce, in ker bere Presek, takoj vedela, da mavrice ne more videti.

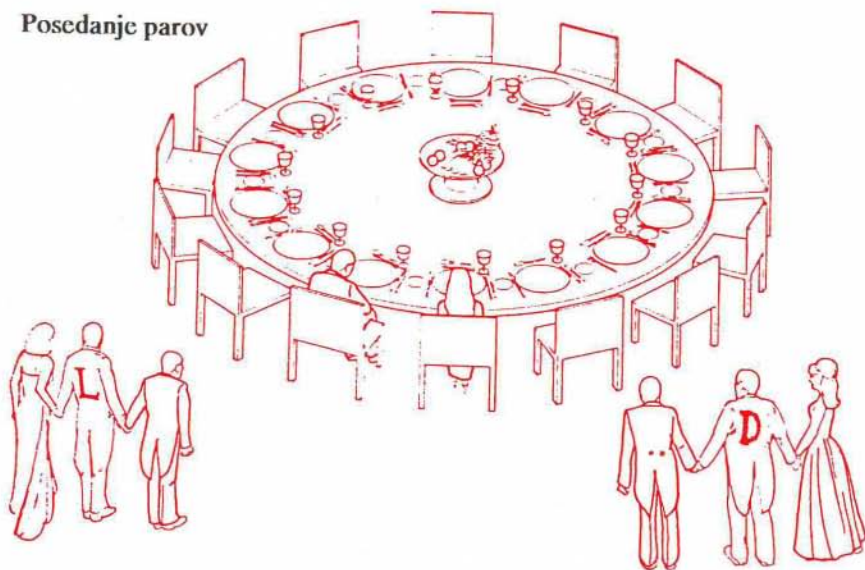
Marija Vencelj

KAJ POČETI, ČE DEŽUJE ?

Tole pišem v deževnem, zaspanem aprilskem popoldnevu, na dan, ko je dolgočasno za zjokat, kot je zapisal ... Kdo že? Pozabil sem! Kaj pa počnete vi, ko dežuje več dni skupaj? Idej vam verjetno ne manjka. Če pa boste kdaj v zadregi za primerno igro, sem iz knjige *Winning ways* zbral nekaj matematično pobarvanih iger, primernih za igro v dvoje. V enem od naslednjih Presekov si bomo ogledali, kako igrati, da zmagamo. Verjemite mi, ni ravno lahko.

Upam, da vam bo katera od iger všeč in vam bo prijetno krajšala deževne popoldneve.

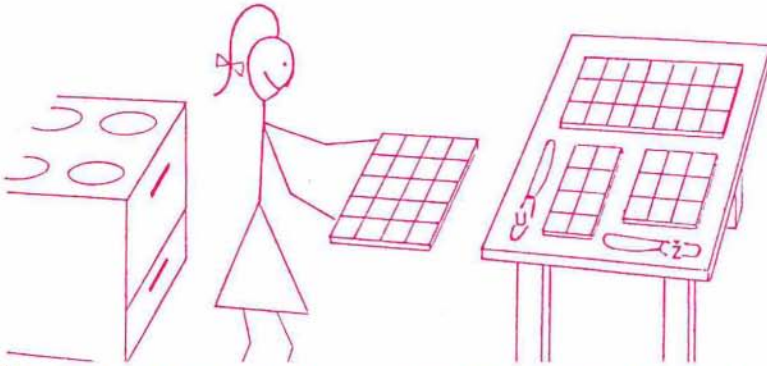
Posedanje parov



Za okroglo mizo je prostora za $2n$ oseb. Desni in levi igralec izmenično posedata povabljene pare. Desni jih raje posadi tako, da ženska sedi desno od svojega partnerja, levi pa tako, da sedi levo od njega, ni pa nujno, da sedita skupaj. Poleg ženske ne sme sedeti nihče drug razen njenega partnerja. Levi lahko torej posadi žensko na kateregakoli od n stolov levo od partnerja, seveda če je stol nezaseden in če s tem ne krši zadnjega pravila. Igralec, ki ne more več posedeti svojega para, izgubi.

Rezanje piškotov

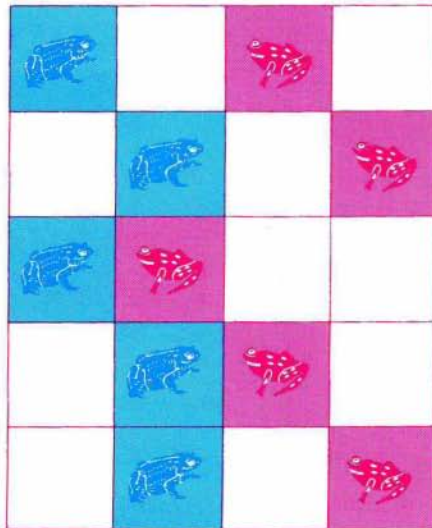
Mama je spekla poln pladenj piškotov. Le še razrezati jih mora, čeprav je že označila, kje jih bo.



Žiga in Urša bosta to storila namesto nje. Seveda pa tudi tu brez igre ne gre. Žiga bo rezal kose vodoravno, Urša navpično. Rezala bosta izmenično, zgubil pa bo tisti, ki ne bo mogel več rezati.

Žabe

Igra se prav tako kot prejšnja igra na pravokotni mreži. V vsaki vrsti sta po ena svetla in ena temna žaba. Igralca lahko premikata svojo žabo za eno mesto v levo (temni) ali eno mesto v desno (svetli), lahko pa s svojo žabo preskočita nasprotnikovo, če je za njo prazno mesto. Igralec, ki ne more napraviti poteze, izgubi.

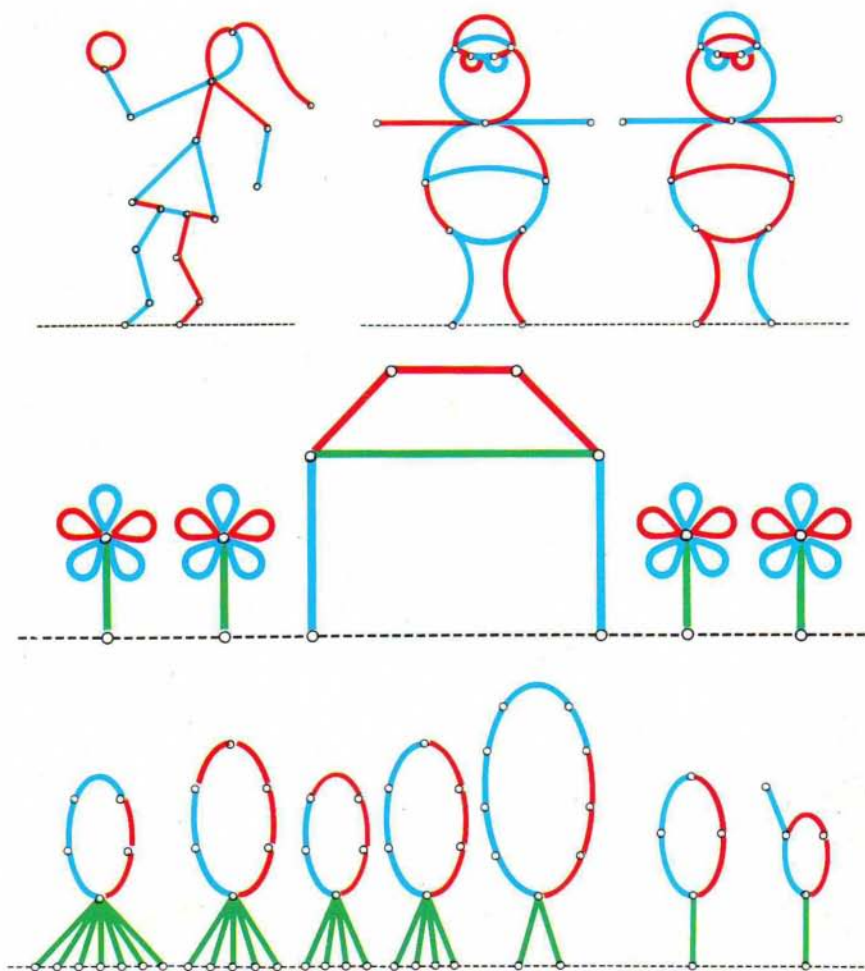


Dvobarvna slika

Najlažje se boste to igro igrali s pomočjo dvobarvne krede in gobe, šlo pa bo tudi s svinčnikom in radirko. Na tablo narišemo deklico z žogo:

Igrata dva igralca. Imenujmo ju modri in rdeči. Izmenično brišeta črte svoje barve. Vendar če zbrišeta tako črto, da del slike nima več povezave s tlemi, zbrišeta tudi ta del. Npr. ko na sliki rdeči zbriše trup, zbriše s tem ves zgornji del. Igralec, ki ne more več zbrisati črte svoje barve, izgubi. Pri naši sliki je najbolj nespametna poteza, ki jo lahko naredi igralec ta, da zbriše stopalo. Nasprotnik potem tudi zbriše stopalo, s tem pa tudi celotno sliko in zmaga, saj drugi igralec ne more več brisati.

Igro lahko zapletemo še s tem, da dodamo npr. zelene povezave. Te lahko brišeta oba igralca. še nekaj slik:



Matija Lokar