

YU ISSN 0351-6652

1

PRESEK

DRUŠTVO MATEMATIKOV, FIZIKOV IN ASTRONOMOV SRJ LETNIK 17, 1989-90.



UVODNIK

Planet Merkur zveni kakor kristalna kupa.

Ves čas zveni.

V globokih jamah Merkurja živijo bitja.

Pesem, ki jo poje planet, je zanje pomembna, saj živijo od tresljajev. Živijo se z mehansko energijo.

Ta bitja se oklepajo zvonečih jamskih sten.

Tako se hranijo z Merkurjevo pesmijo.

Merkurjeve jame so v svojih globinah prijetno tople.

V globinah so jamske stene svetleče. Oddajajo narcisasto rumeno svetlobo.

Jamska bitja so prozorna.

Oprijemajo se sten, svetloba svetlečih sten pa prenika skozi njih.

Jamska bitja so zelo podobna majčkenim otroškim zmajem brez hrbtenice. Imajo rombasto obliko in so, ko čisto odrastejo, tri decimetre dolga in dva decimetra široka.

Ko dozori, ostanejo — če lahko tako rečemo — v najlepšem cvetu, dokler se Merkurju le ljubi peti.

Ta bitja nikakor ne morejo škodovati drugo drugemu in tudi nimajo vzroka za kaj takega.

Bitja imajo še eno posebnost, ki je ni mogoče pojasniti z načelom koristnosti: po vsem videzu se rada urejajo po svetlečih stenah v osupljive vzorce.

Ker ta bitja tako ljubijo glasbo in ker so se pripravljena razporejati v čast lepote, so jim dali Zemljani prikupno ime.

Imenujejo jih harmóniji.

Harmónij — edina poznana oblika življenja na planetu Merkurju.

Harmónij je jamski prebivalec.

Bolj ljubko bitje bi si težko zamislili.

Iz Otroške ciklopedije
čudes in zanimivih dejavnosti

Drobec romana *Sirene s Titana* Kurta Vonneguta.

Boris Lavrič

MATEMATIKA

ARHIMED

Pred kratkim je minilo 2200 let od smrti velikega grškega matematika Arhimedea. Živel je v Sirakuzah na Siciliji. Mesto je bilo grška kolonija in je imelo stike z drugimi grškimi naselbinami ob Sredozemlju. Arhimed je bil vsaj enkrat v Egiptu in si je dopisoval z matematiki v Aleksandriji, ki je bila takrat najmočnejše matematično središče na svetu.

Arhimed je znan po delih iz matematike in mehanike. Posebej omenimo mehaniko tekočin. Znana je anekdota o tem, kako je Arhimed rešil problem zlatega venca. Kralj v Sirakuzah je namreč dal delati venec v posvetitev bogovom in je zanj dal ustrezno količino zlata. Ko pa je bil izdelek končan, so se razširile govorice, da je obrtnik del zlata zamenjal s srebrom. Kralj je prosil Arhimeda, naj ugotovi resnico. Medtem ko je premišljeval o problemu, se je Arhimed šel kopat. Ko je stopil v polno kad, je opazil, da se voda v kadi tem bolj razliva, čim bolj se je spuščal vanjo. Posvetilo se mu je, da lahko na ta način določi prostornino kovine v vencu in s tem gostoto (masa je bila znana). Navdušen nad odkritjem je skočil iz kadi in gol tekel domov, vpiljoč "Eureka, eureka!" (Odkril sem!). Tudi danes določamo gostoto rudnin tako, da jih stehamo in izmerimo, koliko tekočine izpodrinejo iz posebne posodice, imenovane piknometar.

Včasih to anekdoto povezujejo z Arhimedovim zakonom, da je v tekočino potopljeno telo za toliko lažje, kolikor je teža izpodrinjene tekočine (= sila vzgona). Manj znano je, da se je Arhimed ukvarjal tudi s stabilnostjo plavajočih objektov. Dobil je zelo lepe rezultate za telesa posebne oblike (odseke rotacijskega paraboloida, se pravi telesa, katerih površje je enako parabolični anteni, spredaj zaprti z ravno ploščo). To je bil izreden dosežek, če upoštevamo takratna sredstva. Kot vemo, je stabilnost ladij lahko še danes problem. Spomnimo se nedavne tragedije trajekta v Rokavskem prelivu, ki se je prevrnil na mirnem morju pri običajnem manevru.

Občudovanja vredni so tudi Arhimedovi matematični dosežki. Povezani so predvsem z merjenjem v geometriji. S primerjanjem obsegov krogu s premerom d včrtanih in očrtanih večkotnikov je Arhimed ugotovil za obseg o kroga:

$$3 \frac{10}{71} d < o < 3 \frac{1}{7} d$$

Če označimo $o = \pi d$, je torej

$$3 \frac{10}{71} < \pi < 3 \frac{1}{7}$$

ali

$$3.1408... < \pi < 3.1428...$$

Izračunal je tudi ploščino paraboličnih odsekov, prostornino in površino krogle in še mnogo drugega.

Leta 214 pr.n.št. so Rimljani začeli oblegati Sirakuze. Arhimed je s svojim tehničnim znanjem pomagal uničevati oblegalne naprave in si tako pridobil spoštovanje nasprotnika. Ko je leto 212 pr.n.št. mesto le bilo premagano, je rimski poveljnik izrečno ukazal, naj Arhimedu prizanesejo. Zgodba pravi, da rimski vojak ni imel potrpljenja s starcem, ki se je oklepal svojih instrumentov in govoril: "Noli tangere circulos meos!" (Ne dotikaj se mojih krogov). Velikega matematika je ubil.

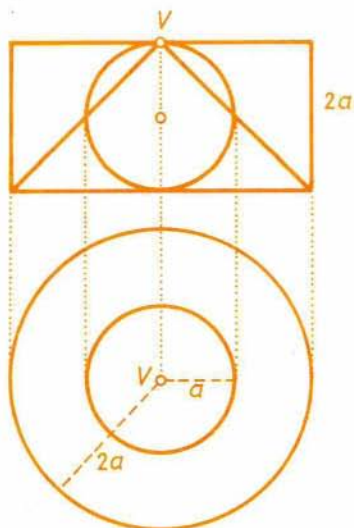
Kljub veliki slavi, ki jo je Arhimed užival še v času svojega življenja, njegovo delo v antiki ni imelo pravega odmeva ali nadaljevanja. Nakazovalo je novo smer v matematičnem raziskovanju, ki se je počasi začela razvijati šele več stoletij kasneje in je pripeljala do tako imenovane višje matematike.

Ponovno je Arhimed postal popularen v Bizancu v času cesarja Justinijana. Graditelj cerkve Hagia Sofia sta vodila tudi matematično šolo, v kateri so zbirali in preučevali Arhimedove spise. Več rokopisov je od tod v začetku našega tisočletja prišlo na Sicilijo. Po padcu sicilskega kraljestva v 13. stoletju so tako imenovana kodeksa A in B prenesli v Italijo, kjer sta zamenjala več lastnikov. Okrog leta 1500 je bil kodeks A prodan za 800 zlatnikov, kakih šestdeset let kasneje pa se je za njim izgubila vsaka sled. Na srečo so obstajali številni prevodi in prepisi, resda z neogibnimi napakami. Kodeks B pa je danes v Vatikanski knjižnici.

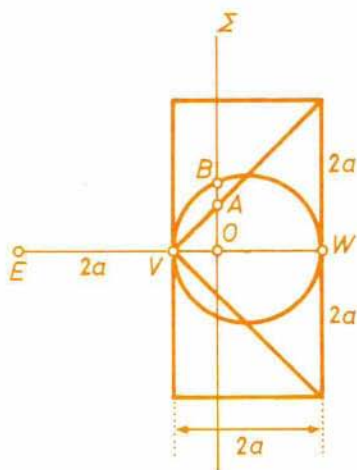
Leta 1899 pa je prišlo do presenetljivega odkritja. V Samostanu svetega groba v Jeruzalemu so odkrili matematični rokopis iz desetega stoletja, ki je bil delno izbrisan (čezenj pa napisano drugo besedilo). Izkazalo se je, da gre za Arhimedova dela, med njimi pa so bila tudi taka, za katera so mislili, da so že davno izgubljena. Eno od njih nosi naslov *Metoda* in opisuje, kako s sredstvi iz mehanike (težišče itd.) lahko dobimo matematične rezultate. Oglejmo si, kako je Arhimed s to metodo izračunal prostornino krogle. Z njegovimi lastnimi besedami:

Prostornina krogle je štirikratna prostornina stožca, ki ima osnovno ploskev enako največjemu krogu na krogli in višino enako polmeru krogle. Prostornina valja, ki ima osnovno ploskev enako največjemu krogu na krogli in višino enako premeru krogle, je ena in polkrat prostornina krogle.

Arhimedova mehanična pot do tega rezultata gre takole. Na sliki 1 imamo tloris in naris valja s polmerom $2a$ in višino $2a$. V ta valj včrtamo stožec, ki ima isto spodnjo osnovno ploskev, vrh V pa v središču zgornje osnovne ploskve. V valj včrtamo še kroglo s polmerom a , ki se dotika gornje osnovne ploskve v točki V . Na sliki 2 imamo stanje obrnjeno za 90° .



Slika 1



Slika 2

Vzemimo ravnino Σ , vzporedno osnovni ploskvi valja (slika 2). Presek te ravnine s kroglo je krog s polmerom $q = |OB|$, s stožcem pa krog s polmerom $u = |OA|$ in z valjem krog s polmerom $2a$. Ker je kot AVO enak 45° , je $|OV| = |OA|$. Tako je

$$q^2 + u^2 = |OB|^2 + |OV|^2 = |VB|^2$$

Trikotnik VBW je pravokoten (kot v polkrogu), zato je po Evklidovem izreku

$$|VB|^2 = |VO| \cdot |VW| = |VO| \cdot 2a$$

Od tod je

$$|VO| \cdot (2a)^2 = (2a)(q^2 + u^2)$$

Pomnožimo s π :

$$|VO| \cdot \pi (2a)^2 = (2a)(\pi q^2 + \pi u^2)$$

Mislmo si zdaj, da naša ravnina ni prava ravnina, ampak je narejena iz izredno tanke pločevine. Predstavljajmo si še, da imamo na naši sliki tehtnico z vzvodom EV in VW dolžine $2a$ ter z vodoravno osjo, ki se na naši sliki projicira v točko V . Zgornja enačba pove, da presek naše pločevine z valjem ravno uravnovesi pločevinasta kroga s polmeroma q in u , obešena v točki E na tehtnici. Mislmo si zdaj, da je naš valj sestavljen iz samih takih pločevinastih krogov vzporednih osnovni ploskvi. Potem je jasno, da valj, nataknjen na tehtnico kot

na sliki, ravno uravnovesi masi krogle in stožca iz istega materiala, obešeni v točki E . Ker je težišče valja oddaljeno a od V , to pomeni

$$m(\text{valja}) \cdot a = [m(\text{krogle}) + m(\text{stožca})] \cdot 2a$$

ali po krajšanju z a :

$$m(\text{valja}) = 2m(\text{krogle}) + 2m(\text{stožca})$$

Ker je gostota vseh teles enaka, velja

$$V(\text{valja}) = 2V(\text{krogle}) + 2V(\text{stožca})$$

Privzemimo, da že vemo, da je

$$V(\text{stožca}) = \frac{1}{3} V(\text{valja})$$

Tako je

$$V(\text{krogle}) = \frac{1}{6} V(\text{valja}) = \frac{1}{6} \pi (2a)^2 \cdot 2a = \frac{4\pi a^3}{3}$$

Antično grško matematiko je odlikovala težnja k popolni natančnosti. Opisani "dokaz" temu ne ustreza povsem. Govorili smo o pločevini, kar privzeli pa, da je ta pločevina "neskončno tanka". Seveda lahko delamo tudi s pločevino končne debeline, toda potem bi odrezani kosi na robovih bili porezani vsak drugače. (Kar pomislite, kakšni so kolobarčki salame, ko se bližamo koncu.) Intuitivno vemo: čim tanjša je pločevina, tem manj to moti. Arhimed je pozneje naredil povsem točne ocene in tako dobljeni rezultat potrdil na neoporečen način. Pravzaprav bi to morali narediti tudi mi. Toda to ne bi imelo pravega smisla. Danes imamo namreč na razpolago integralni račun, s katerim lahko ta rezultat dobimo prav na kratko. Seveda pa to že malo presega nivo te revije.

Peter Legiša



Glej članek na naslednji strani.

ARHIMEDOV NAGROBNI SPOMENIK



V prejšnjem članku je Peter Legiša na kratko predstavil življenje in delo velikega in slavnega misleca Arhimeda.

Arhimedovo življenje je bilo mirno, kot le more biti mirno življenje, izpolnjeno z razmišljanjem. Vsa dramatičnost in tragičnost sta bili prihranjeni za zadnje trenutke v življenju velikega matematika.

Premagane so bile Sirakuze, sredozemsko trnje in osat sta prekrila Arhimedov grob. Arhimed sam in spomin nanj sta ostala živa v njegovih delih. Toda — Arhimedovo delo je rešilo pozabe — naj se sliši še tako nenavadno — tudi njegov grob.

Arhimed je bil upravičeno ponosen, da mu je prvemu uspelo izračunati površino in prostornino krogle. Pri tem je ugotovil, kakor lahko preberete v Legiševem članku, da je prostornina pokončnega valja, očrtnega krogli, enaka poldrugi prostornini te krogle. Rezultat mu je bil tako všeč, da si je figuro teh dveh teles zaželel za okras svojega nagrobnega kamna.

In prav po tej figuri je Cicero približno 150 let po Arhimedovi smrti prepoznal grob tega velikega učenjaka ...

Marija Vencelj

UGANKI

Prijatelj precej znamenitega angleškega matematika **Georga Boola** (1815–1869),

....., tudi sam prav tako pomemben matematik in še filozof povrh, se je nekoč takole predstavil izbranim v neki družbi, ko je padlo vprašanje o njegovi starosti:

"n let sem imel leta n^2 ."

Sprašujemo:

1. Katerega leta se je rodil ?
2. Kdo je bil ta ?

Skrivnostnega in premetenega morebiti prepoznate na sliki, njegovo ime pa preberete celo v srednješolskih učbenikih matematike.

Vilko Domajnko



PITAGOROV IZREK PRED PITAGOROM

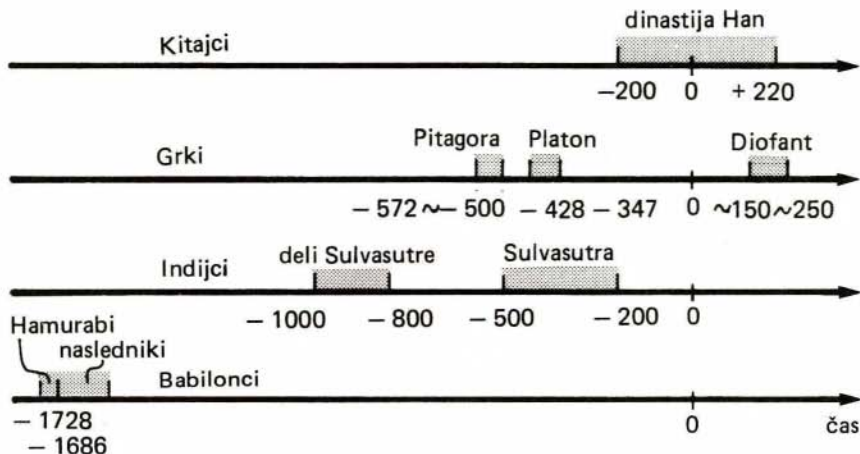
V matematiki so skoraj sočasna neodvisna odkritja dokaj redka, večkratna odkritja pa prave izjeme. ★ Znani matematik in poznavalec matematike starih civilizacij B.L. van der Waerden misli, da je taka izjema tudi odkritje *Pitagorovega izreka*. Z njim so računali v starih časih Babilonci, Indijci, Grki in Kitajci. Pri vseh štirih narodih srečamo tudi enak način računanja pitagorejskih trojic. Zato si je zanimivo ogledati, kako so se s pravokotnim trikotnikom ukvarjali matematiki davno umrlih kultur.

Najprej ponovimo:

- Pravokotni trikotnik ima en pravi kot.
- Pitagorov izrek poveže njegove stranice x, y, z takole

$$x^2 + y^2 = z^2 \quad (1)$$

- Trojico naravnih števil, ki zadošča zvezi (1) imenujemo *pitagorejsko trojico*.
- Pitagorejska trojica je *primitivna*, če števila x, y, z nimajo skupnega faktorja.



Slika 1. Pitagorejske trojice pri Babiloncih, Indijcih, Grkih in Kitajcih.

★ V novejšem času je tak primer odkritje neevklidske geometrije, le-to je uspelo skoraj hkrati trem: Gaussu, Bolyaiu in Lobačevskemu.

- V primitivni pitagorejski trojici (x, y, z) mora biti eno izmed števil x ali y liho in drugo sodo. Če sta obe števili sodi, trojica po definiciji ne more biti primitivna. Če sta obe števili lihi, je vsota njunih kvadratov $x^2 + y^2$ število oblike $4n + 2$, ki ne more biti kvadrat naravnega števila.

Pot do primitivnih pitagorejskih trojic ni zahtevna. Poznati moramo Pita-
gorov izrek in *pravilo o razcepu razlike kvadratov*

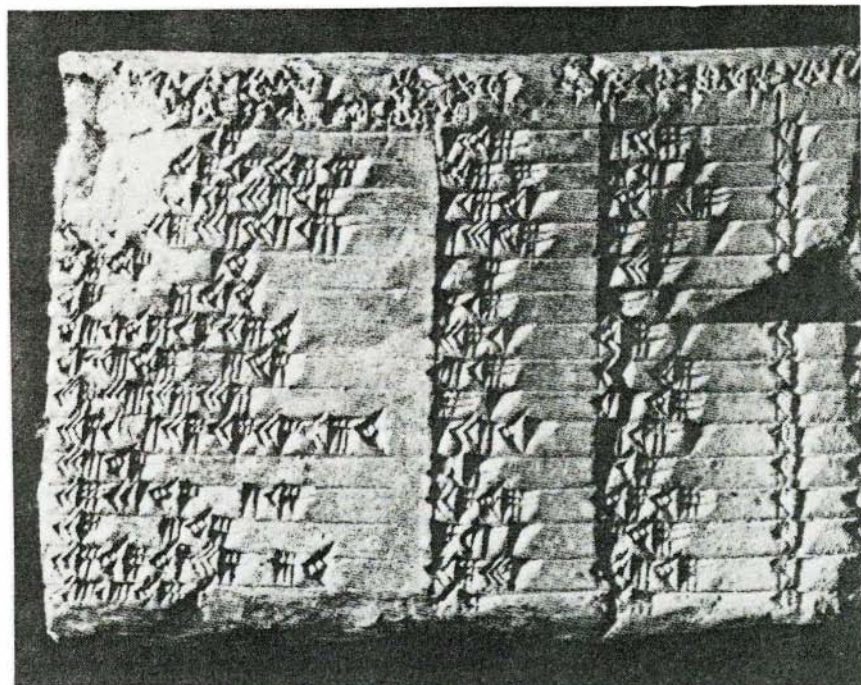
$$a^2 - b^2 = (a - b)(a + b) \quad (2)$$

Znati tudi moramo z naravnimi števili rešiti sistem dveh linearnih enačb z dve-
ma neznankama.

Najprej izberimo poljubno naravno število x . Z rešitvijo enačbe $z^2 - y^2 =$
 $= x^2$ v obliki

$$(z - y)(z + y) = x^2 \quad (3)$$

mu priredimo drugi števili. To storimo tako, da število x zapišemo kot produkt



Slika 2. Klinopisna tablica z oznako Plimton 322, ki jo hrani kolumbijska univerza v New Yorku.

dveh naravnih števil. Nato enačbo (3) razbijemo v sistem dveh linearnih enačb z dvema neznankama. Njegova rešitev je rešitev enačbe (3).

Od tega, ali izberemo lih ali sod x , je odvisno, ali sledimo računanju Kitajcev v času dinastije Han (od 200 let pred našim štetjem do leta 220 našega štetja) ali Grka Diofanta iz Aleksandrije (okoli leta 250 našega štetja).

Kitajski način: Naj bo $x = st$ poljubno liho število. Iz (3) sledi $(z - y)(z + y) = s^2 t^2$ in od tod sistem enačb

$$z + y = s^2 \quad z - y = t^2$$

z rešitvijo

$$z = \frac{1}{2}(s^2 + t^2) \quad y = \frac{1}{2}(s^2 - t^2) \quad (4)$$

Grški način: Naj bo $x = 2pq$ poljubno sodo število. Iz (3) sledi $(z - y)(z + y) = 4p^2 q^2$ in od tod sistem enačb

$$z + y = 2p^2 \quad z - y = 2q^2$$

z rešitvijo

$$z = p^2 + q^2 \quad y = p^2 - q^2 \quad (5)$$

Navedimo nekaj zgledov za kitajski in za grški način.

$$x = st \quad y = (s^2 - t^2)/2 \quad z = (s^2 + t^2) \quad x = 2pq \quad y = p^2 - q^2 \quad z = p^2 + q^2$$

5=3.1	5	4	4=2(2.1)	3	5
5=5.1	13	12	12=2(3.2)	5	13
7=7.1	25	24	24=2(4.3)	7	25

Na koncu vstavimo v (4) $s = p + q$ in $t = p - q$, pa dobimo (5). Oba načina za računanje pitagorejskih trojic sta torej enakovredna.

Šele leta 1945 so ugotovili, da so poznali primitivne pitagorejske trojice tudi Babilonci. S klinopisne tablice iz časa Hamurabija (1728–1686 pred našim štetjem) in njegovih naslednikov so razbrali, da so pitagorejske trojice računali enako kot za njimi Grki. Pot do spoznanja ni bila preprosta, ker se klinopisni zapis števil razlikuje od našega in ker tablica ni bila v celoti ohranjena. Kaže, da so Babilonci reševali nalogo v dveh korakih. Najprej so z rešitvijo enačbe $1 + v^2 = w^2$ poiskali vse pitagorejske trojice z obliko $(1, v, w)$, nato so dobljene trojice pomnožili s številom x . Nalogo je mogoče najhitreje rešiti prek enačbe $(w + v)(w - v) = 1$. Po tem je mogoče sklepati, da so Babilonci poleg Pitagoro-

vega izreka poznali tudi razcep (2).

Zapis Pitagorovega izreka in primitivnih pitagorejskih trojic najdemo tudi v starem hindujskem priročniku za gradnjo oltarjev *Sulvasutra* (od 500 do 200 pred našim štetjem, nekateri deli izvirajo iz 1000 do 800 pred našim štetjem). V njem preberemo: "Diagonala 'podolgovatega' (v angleškem prevodu oblong) da sama obe ploščini, ki ju dasta obe stranici 'podolgovatega' posebej." (Pomeni: Kvadrat hipotenuze pravokotnega trikotnika je enak vsoti kvadratov obeh katet.) To vidimo po tistih 'podolgovatih', katerih stranici sta 3 in 4, 12 in 15, 15 in 8, 7 in 48, 12 in 53 ter 15 in 36.

Ko izračunamo manjkajoče stranice 'podolgovatih', to je pravokotnih trikotnikov, dobimo pitagorejske trojice, pri katerih sta kateti skoraj enako veliki. To vsiljuje misel, da so Indijci računali pitagorejske trojice z enačbo (4) ob primerni izbiri x . Zgledi

$z - y = 1$	$z - y = 2$	$z - y = 3$
(3, 4, 5)	(8, 15, 17)	(15, 36, 39)
(5, 12, 13)	(12, 35, 37)	

govorijo proti temu, da so dobili trojice z merjenjem trikotnikov. Trojice (12, 35, 37) ne bi bilo lahko določiti z merjenjem, saj obstaja več kot tisoč pravokotnih trikotnikov, katerih kateti sta celi števili, njuna vsota pa manjša kot 48.

Vse kar smo izvedeli o računanju pitagorejskih trojic v Babiloniji, Indiji, na Kitajskem in v Grčiji ne nasprotuje, a tudi ne dokazuje van der Waerdenove misli o neodvisnem odkritju Pitagorovega izreka in pitagorejskih trojic. Morda pa so bile davne civilizacije med seboj bolj povezane, kot smo doslej mislili.

Milena Strnad

TRIKOTNIKI

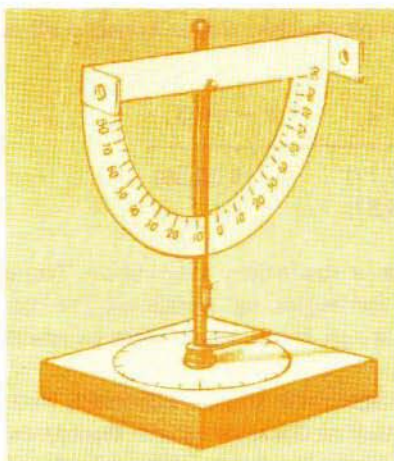
Koliko med seboj neskladnih raznostraničnih trikotnikov z obsegom po 20 cm lahko načrtamo, če naj bodo stranice cela števila?

Darjo Felda

ASTRONOMIJA

KULMINACIJA

Jasne noči si na vzhodnem delu neba, a ne previsoko, izberi svetlo zvezdo. (Poleti in jeseni je zelo primerna zvezda Atair v ozvezdju Orla, pozimi zvezde Oriona – med njimi posebno Rimščice (Kosci), spomladi pa Spika v Devici.) S preprostim višinomerom (slika 1) ji izmeri višino $\star$, to je kot med vodoravno ravnino in smerjo proti zvezdi. Če tega ne moreš narediti, pa vsaj oceni višino zvezde glede na kak značilen in dobro opazen predmet na zemljišču (večje drevo, cerkveni zvonik). Nato vsake pol ure, ali vsaj vsako uro, ponovno izmeri ali pa oceni višino izbrane zvezde. To delaj nekaj ur tako, da ugotoviš vsaj deset



Slika 1. Preprost višinomer, s katerim izmeriš višino zvezde.

Slika 2. Spreminjanje višine izbrane svetle zvezde – shema



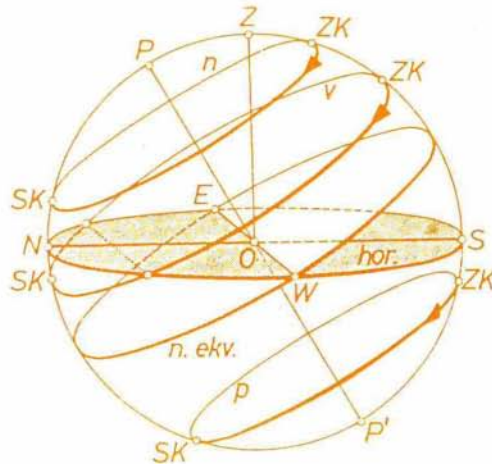
višin zvezde (slika 2). Vzemi si čas. Zberi se in bodi potrpežljiv in natančen. Potem sestavi preglednico:

Datum:	Čas	Izmerjena višina zvezde
Čas opazovanja: Od $t_1 =$	-----	-----
Do $t_{10} =$	t_1	
	t_2	
	...	
	t_{10}	

Če boš upošteval navodila za opazovanje, ti ne bo težko ugotoviti, da se zvezdi spreminja višina. Najprej se ji veča, ko pa zvezda doseže najvišjo lego nad obzorjem, se njena višina manjša. Ko je zvezda najvišje nad obzorjem, ko doseže največjo višino, pravimo, da *kulminira* **. V našem primeru je zvezda dosegla (prišla v) *zgornjo kulminacijo*.

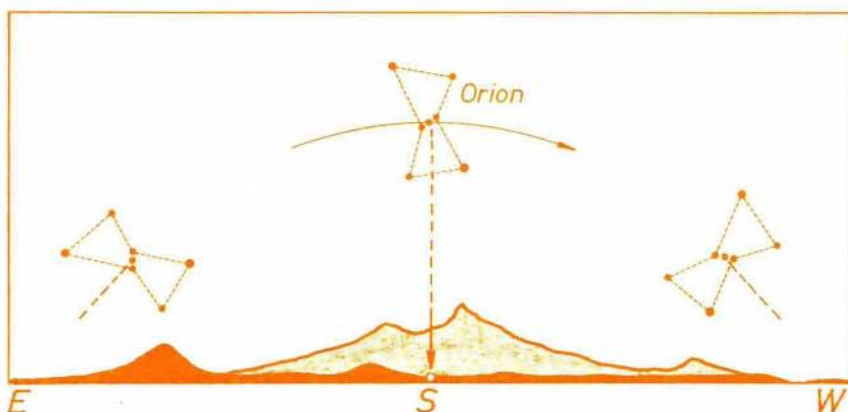
Zaradi vrtenja Zemlje zvezde, pa tudi druga vesoljska telesa (Sonce, Luna, planeti) navidezno krožijo okrog nebesne osi. Pri tem enkrat na dan dosežejo največjo višino — *zgornjo kulminacijo*, drugič (čez 12 ur) pa najmanjšo — *spodnjo kulminacijo* (slika 3). Pri nadobzornicah, to je zvezdah, ki stalno krožijo nad obzorjem, sta vidni obe kulminaciji. Pri zvezdah, ki vzhajajo in zahajajo, je vidna le zgornja kulminacija, in sicer natanko na južni strani neba. Pri ne-

Slika 3. Kulminacija zvezd. ZK — zgornja kulminacija, SK — spodnja kulminacija, n — dnevna pot nadobzorniške zvezde, v — dnevna pot zvezde, ki vzhaja in zahaja, p — dnevna pot podobzorniške zvezde, P — severni nebesni pol, P' — južni nebesni pol, PP' — nebesna os, okrog katere navidezno krožijo zvezde (in tudi druga vesoljska telesa), $n.ekv.$ — nebesni ekvator, Z — zenit, O — opazovalec, $hor.$ — horizont.

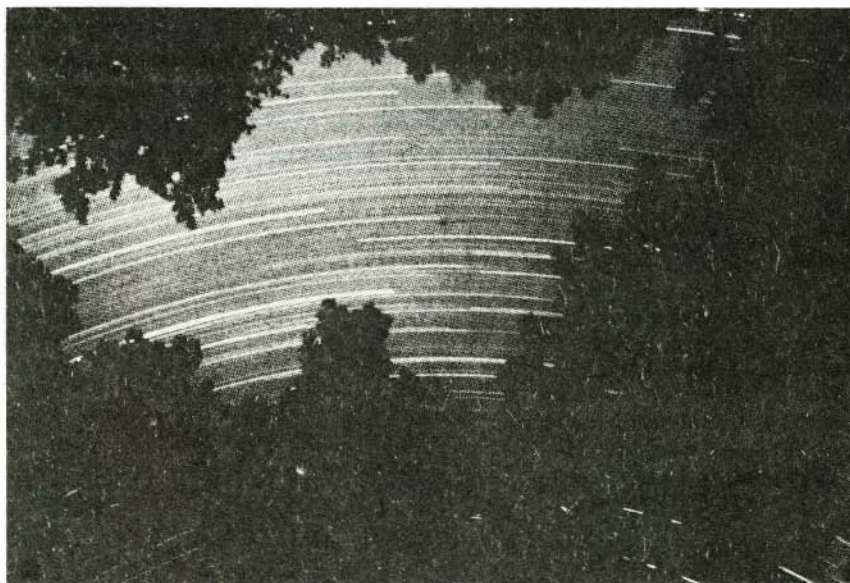


* Glej še Presek 16 (1988/89), 96 — 99.

** Iz latinske besede *culmen* — vrh, najvišja točka, vrhunec.



Slika 4. Kulminacija ozvezdja Oriona pri nas v poznih večernih urah sredi zime. V krajih južno od nas kulminira Orion višje, v krajih severno pa nižje.



Slika 5. Kulminacijo zvezd lahko ugotoviš tudi s fotografijo. Fotografski aparat, v katerega vložiš občutljiv film, naravnaš na neskončnost, trdno pritrdiš, da se ne premika, in ga usmeriš proti zvezdam na južni strani neba. Snemaš eno do dve uri. Loki krožnic, ki jih na negativu zarišejo zvezde, prikazujejo navidezno vrtenje neba. Naša slika kaže zgornjo kulminacijo zvezd ozvezdja Orla.

katerih zvezdah pa ne vidimo niti zgornje niti spodnje kulminacije. To so pod-obzornice.

Predlagam, da nadaljuješ z opazovanjem višine izbrane svetle zvezde. Zvezdo opazuj z istega opazovališča še vsaj vsako peto noč. To delaj en mesec. Da zvezda spreminja višino, že veš. Zato te ta opazovanja sedaj ne zanimajo več, pač pa bodi pozoren le na največjo višino, to je višino ob kulminaciji zvezde vsako noč opazovanja. Vsako peto noč torej izmeri le največjo višino zvezde. Sestavi preglednico z vsaj petimi izmerjenimi največjimi višinami zvezde:

	Datum	Največja višina zvezde
1.		
2.		
3.		
4.		
5.		

Če boš dovolj natančen, boš opazil, da izbrana zvezda kulminira vedno na isti višini nad obzorjem. Prišel boš do spoznanja, ki velja za zvezde: *V danem kraju*



Slika 6. Polarni dan na Greenlandu. Fotografirano v juliju. Osvetlitve si sledijo vsakih 20 minut. V času snemanja je Sonce opisalo najnižji del svoje dnevne poti nad obzorjem.

določena zvezda kulminira vedno enako visoko. Če pa bi to zvezdo opazoval iz kraja, ki leži severneje od tvojega kraja, bi ob kulminaciji izmeril manjšo višino, če pa bi zvezdo opazoval južneje, bi ob kulminaciji izmeril večjo višino. Velja torej, da je višina zvezde ob kulminaciji odvisna od njene lege na nebu in zemljepisne širine kraja.

Z opazovanjem lahko tudi ugotoviš, kako kulminirajo Sonce, Luna, planeti. Višina Sonca ob zgornji kulminaciji je npr. različna ne samo v različnih krajih, ampak tudi v različnih letnih časih; poleti je v naših krajih večja, pozimi pa manjša. Pri nas je zgornja kulminacija Sonca vidna (tedaj je poldne), spodnja pa ne (tedaj je polnoč). V polarnih krajih pa sta včasih vidni obe kulminaciji Sonca. Sonce tedaj ne zahaja in tam ni noči (slika 6). Včasih pa sta obe kulminaciji Sonca pod obzorjem. Sonce tedaj ne vzhaja in je polarna noč.

Kakor Soncu se tudi Luni in planetom spreminja lega na nebu. Zato ti v istem kraju ne kulminirajo vedno enako visoko, o čemer se prepričaš z opazovanjem.

Marijan Prosen

KORNET

V stožčast kornet globine v spustimo sladoledno kroglico polmera r . Le-ta obtiči v njem, tako da je njeno središče od dna korneta oddaljeno h ($h < v$), kroglica pa ostane nespremenjena. Koliko drži kornet?



ENAKOST

Vsaj eno od pozitivnih realnih števil x in y , ki zadoščata pogoju

$$x^x + y^y = x^y + y^x$$

naj ne bo manjše od 1. Dokaži, da sta potem enaki.

Boris Lavrič

RACUNALNIŠTVO

PROBLEM BARVANJA TOČK GRAFA

Nekateri problemi v matematiki imajo lepo lastnost: zelo enostavno jih je zastaviti (za razumevanje problema ni potrebno veliko znanja), toda rešitev je vse prej kot enostavna.

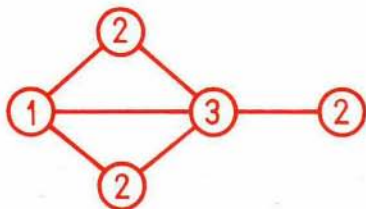
Verjetno ste že slišali za Fermatov problem. Poglejmo celoštevilsko enačbo

$$x^n + y^n = z^n$$

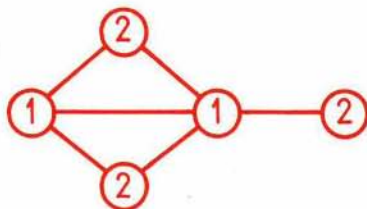
Pri izbranem n iščemo cela števila x, y in z , ki ustrezajo enačbi. Pri $n = 2$ lahko hitro najdemo iskana števila. To so ravno pitagorejske trojice, na primer $x = 3$, $y = 4$, $z = 5$! Kaj pa lahko rečemo za n -je, ki so večji od 2? Znameniti francoski matematik Fermat (1601–1665) je domneval, da obstajajo cele netrivialne rešitve samo pri $n = 2$, pri $n > 2$ pa po njegovi domnevi ni nobene netrivialne rešitve. (Trivialne rešitve so tiste, pri katerih je ena od spremenljivk enaka nič, take pa seveda obstajajo pri vsakem n .) Poiskati dokaz ali protidokaz te domneve je slaven Fermatov problem. Od Fermatovih časov do danes je mnogo matematikov poskusilo dokazati ali ovreči domnevo, toda brez popolnega uspeha. Problem očitno ni enostaven! Zanimivo je, da je Fermat zapisal, da je našel dokaz za svojo trditev, ki pa ga ni nikjer objavil. Več o Fermatovem problemu si lahko preberete v knjižici prof. Ivana Vidava *Rešeni in nerešeni problemi matematike* (Knjižnica Sigma; 1).

Problem barvanja točk grafa je mlajši, pa ima vendar kar zanimivo zgodovino. Za razliko od Fermatovega problema tu ni težav z obstojem rešitev; zajec tiči v drugem grmu. Ko namreč želimo poiskati hiter algoritem, ki bo našel barvanje za poljuben graf, se izkaže, da to nikakor ni enostavno.

Preden zastavimo problem, navedimo in ponovimo nekaj pojmov iz teorije grafov, ki jih najdemo na primer v presekovi knjižici *Najnujnejše o grafih*, ki sta jo napisala Drago Bajc in Tomaž Pisanski. Graf $G = (V, E)$ je matematični objekt, ki ga podamo z množico točk V in množico povezav (torej parov točk)



Slika 1



Slika 2

E . Točki sta sosednji, če med njima poteka povezava. Barvanje grafa je preslikava, ki vsaki točki grafa priredi neko barvo. Za imena barv običajno zaradi enostavnosti vzamemo kar naravna števila. Dobro barvanje je tako, ki sosednje točke pobarva z različnimi barvami. Na primer barvanje na sliki 1 je dobro barvanje, barvanje na sliki 2 pa ne.

Graf je k -pobarvljiv, če obstaja dobro barvanje s k ali manj barvami. Graf iz prejšnjega primera (slika 1 in 2) ni 2-pobarvljiv, je pa 3-pobarvljiv in seveda 4-, 5-, ... -pobarvljiv, torej k -pobarvljiv za vse $k \geq 3$. Minimalno število barv, potrebnih za dobro barvanje, imenujemo kromatično število grafa in ga označimo z $\chi(G)$. Graf iz prejšnjega primera ima torej kromatično število 3.

Zdaj pa naloga: Imamo graf $G = (V, E)$ in naravno število k . Ali je graf G k -pobarvljiv? To je odločitveni problem barvanja točk grafa.

Problem ni nerešen, tako kot Fermatov, je pa "težak" na drug način, ki ga bomo poskusili pojasniti v nadaljevanju. V kratki zgodovini teorije zahtevnosti računskih postopkov se je izoblikovala tudi domneva, da obstajajo problemi, za katere obstajajo učinkoviti postopki in taki, za katere učinkovitih postopkov ni mogoče konstruirati. Zvesti bralci Preseka se bodo verjetno spomnili članka Sandija Klavžarja o časovni kompleksnosti algoritmov v 2. številki letnika 86/87. Natančna definicija učinkovitih postopkov presega okvir tega sestavka, tukaj povejmo le, kaj bi za problem barvanja točk grafa pomenilo, da je algoritem učinkovit. Ko določimo število k in imamo dan graf G , lahko definiramo obsežnost problema barvanja točk grafa: to naj bo kar število točk grafa, torej $n = \text{moč}(V)$. Hitrost algoritma lahko merimo s številom potrebnih korakov. Lahko privzamemo, da smo algoritem zapisali v enem od programskih jezikov (na primer v pascalu, FORTRANu ali BASICu). Korak algoritma je izvedba enega enostavnega ukaza. Na primer vrstica

$$x := y + z * 3$$

je en (pascalski) korak, del programa

```
for i:= 1 to n do
  for j:= 1 to n do begin
    x[i] := y[i];
    z[i] := 2 * y[i]
  end;
```

pa je $2 * n^2$ korakov. Pogosto nas zanima samo velkostni red, konstantni faktor takrat ni pomemben. Del programa v prejšnjem primeru ima število korakov, ki je kvadratna funkcija n -ja, to pa zapišemo krajše $O(n^2)$ in preberemo veliki O od n kvadrat. Po definiciji je funkcija $g(n)$ reda $O(f(n))$, če obstaja

konstanta $C > 0$, tako da je $g(n) \leq Cf(n)$ za vse dovolj velike n . Pri tem fraza "trditev velja za vse dovolj velike n " pomeni, da obstaja naravno število n' , da je za vsak $n \geq n'$ trditev veljavna.

Pravimo, da je algoritem polinomski, če je njegovo število korakov enako $O(p(n))$ za neki polinom p . Polinomski postopki so v teoriji časovne zahtevnosti ravno učinkoviti postopki.

Problem je polinomski, če zanj obstaja polinomski algoritem. Za problem barvanja točk grafa na primer ne poznamo nobenega polinomskega algoritma. Prav tako doslej ni nihče dokazal, da takega algoritma ni mogoče konstruirati. Vsi doslej znani postopki za reševanje problema barvanja točk grafa imajo vsaj eksponentni red potrebnega števila korakov. (Število korakov je na primer $10 \cdot 2^n$ ali 10^n , torej ne obstaja polinom $p(n)$, da bi bilo število korakov reda $O(p(n))$).

Poglejmo si primerjavo rasti neke polinomske in neke eksponentne funkcije. Recimo, da imamo polinomski algoritem s časovno zahtevnostjo $10000n^2$ in eksponentni algoritem s časovno zahtevnostjo 2^n . Predpostavimo, da osnovna operacija traja eno milisekundo in preračunajmo potrebne čase za nekaj različnih n -jev (tabela 1).

Tabela 1

n	$10000 n^2$	2^n
10	$10^6 \cong 16 \text{ min}$	$2^{10} \cong 1 \text{ s}$
20	$4 \cdot 10^6 \cong 1 \text{ h } 6 \text{ min}$	$2^{20} \cong 17 \text{ min}$
30	$9 \cdot 10^6 \cong 2 \text{ h } 30 \text{ min}$	$2^{30} \cong 12 \text{ d}$
40	$1,6 \cdot 10^7 \cong 4 \text{ h } 26 \text{ min}$	$2^{40} \cong 36 \text{ let}$
50	$2,5 \cdot 10^7 \cong 7 \text{ h}$	$2^{50} \cong 45000 \text{ let}$
100	$10^8 \cong 1 \text{ d } 3 \text{ h}$	
1000	$10^{10} \cong 115 \text{ dni}$	

Vidimo, da eksponentna funkcija zelo hitro prehiti polinomsko. Ker število korakov tako hitro narašča, so postopki z eksponentno časovno zahtevnostjo praktično neuporabni že pri malo večjih n . Toda, računalniki so vedno vsak dan hitrejši, porečete. Na žalost to ne pomaga kaj prida. Če na primer računalnike pohitrimo za faktor 1000, se to bore malo pozna, ko želimo ugnati problem pri velikih n -jih z eksponentnim algoritmom. Poglejmo, kako bi se spremenila tabela 1, če bi imeli 1000 krat hitrejši računalnik. V tabeli 2 je osnovna enota mikrosekunda.

n	$10000 n^2$	2^n
10	$10^6 \cong 1 \text{ s}$	$2^{10} \cong 1 \text{ ms}$
20	$4 \cdot 10^6 \cong 4 \text{ s}$	$2^{20} \cong 2 \text{ s}$
30	$9 \cdot 10^6 \cong 9 \text{ s}$	$2^{30} \cong 17 \text{ min}$
40	$1,6 \cdot 10^7 \cong 16 \text{ s}$	$2^{40} \cong 12 \text{ d}$
50	$2,5 \cdot 10^7 \cong 25 \text{ s}$	$2^{50} \cong 36 \text{ let}$
100	$10^8 \cong 100 \text{ s}$	
1000	$10^{10} \cong 2 \text{ h } 46 \text{ min}$	

Tabela 2

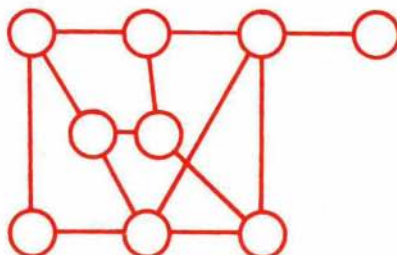
Danes poznamo veliko praktičnih problemov, ki so prav tako "težki" kot problem barvanja točk grafa. Vprašanje, ali resnično ni mogoče najti polinomskega algoritma za te probleme, je eno od najbolj znanih odprtih vprašanj teoretičnega računalništva.

Za tiste, ki jih zanima zgodovina matematike, pa za konec še povejmo, kako je problem barvanja točk grafa povezan s slavnim problemom štirih barv. Problem štirih barv je bil skoraj sto let velika uganka, ob kateri se je razvijala teorija grafov. Problem si je prvi zastavil leta 1852 londonski študent Francis Guthrie, ko je barval zemljevid angleških grofij. Domneval je, da je mogoče vsak zemljevid pobarvati s štirimi barvami, seveda tako, da ozemlja, ki mejijo, niso pobarvana z enako barvo. Pri tem ozemlja, ki se dotikajo samo v končno mnogo točkah, ne štejemo za sosednja. Problem običajno zastavimo v nekoliko drugačni obliki. Namesto ozemelj barvamo točke (lahko si mislimo, da so to glavna mesta), povezani pa sta točki, ki sta v sosednjih državah. Problem se potem glasi: ali je mogoče točke vsakega planarnega grafa pobarvati s štirimi barvami (tako da pobarvamo poljubni povezani točki z različnima barvama)? Planaren je graf, ki ga lahko narišemo v ravnini tako, da se noben par povezav ne seka. Francisov brat Frederic je problem predstavil profesorju Augustu de Morganu. Širše znan je problem postal leta 1878, ko je Arthur Cayley na srečanju Londonske matematične družbe (London Math. Society) vprašal, ali je problem že rešen. Prvi se je reševanja problema resno lotil A.B. Kempe, ki je leta 1879 objavil dokaz, da štiri barve zadoščajo. Deset let kasneje je P.J. Heawood odkril napako v Kempejevem dokazu, ki pa so jo mnogi imeli bolj za tehnično pomanjkljivost kot pa za resno napako. Ko pa so leta minevala in nikomur ni uspelo popraviti dokaza, je postalo jasno, da problem ni od muh. Leta 1976 sta Kenneth Appel in Wolfgang Haken objavila, da sta

dokazala izrek o štirih barvah. Ideja dokaza je v bistvu enaka Kempejevi, le število posebnih primerov, ki jih je bilo potrebno pregledati, je precej večje (okoli 1500 namesto 5!). Obsežnost je tudi glavna pomanjkljivost dokaza, saj je za pregled (okoli 600 strani dolgega) dokaza potrebno ogromno časa, tudi če za nekatera rutinska opravila uporabimo računalnik, kot sta to storila avtorja dokaza.

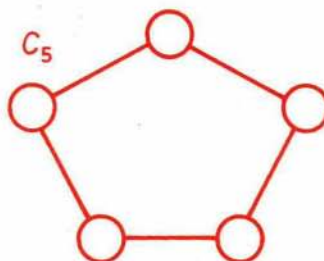
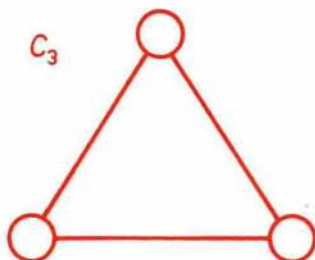
Za konec pa še nekaj nalog:

1. Poišči optimalno barvanje za graf na sliki 3!



Slika 3

2. Premisli, koliko barv potrebuješ za optimalno barvanje cikla lihe dolžine C_{2k+1} !



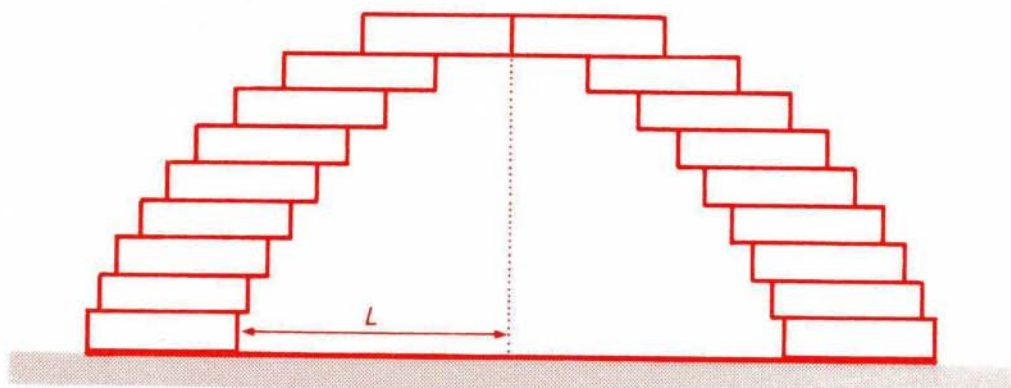
Slika 4

3. Dokaži izrek: 2-pobarvljivi grafi so natanko tisti grafi, ki ne vsebujejo (kot podgraf) nobenega lihega cikla. (To so ravno dvodelni grafi.)

Janez Žerovnik

SLAVOLOK IZ ZIDAKOV

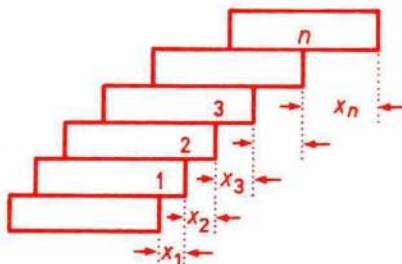
Kot otroci ste se gotovo kdaj igrali z zidaki (ali pa s kockami); postavljali ste jih enega na drugega, zidali hiše, stolpe, mostove ... Včasih so nastale prave mojstrovine, včasih pa se je vse skupaj podrlo in ponovno je bilo treba poprijeti za delo. To so bili trenutki, ko ste se prvič nevede seznanjali s fizikalnimi pojmi, kot sta navor in težišče. V pričujočem prispevku si bomo nekoliko boljše ogledali problem "zidanja slavoloka".



Slika 1

Homogene zidake, ki imajo maso m , ter mere $a = 20$ cm, $b = 10$ cm, $c = 5$ cm, zlagamo enega na drugega tako, da dobimo slovolok, ki je narisano na sliki 1. Vprašanje, ki si ga bomo zastavili je, kako moramo zlagati zidake, da bo širina slavoloka maksimalna in da se le—ta seveda še ne bo podrl. Ker so razmere simetrične glede na sredino slavoloka, bomo gledali samo eno njegovo polovico.

V mejnem primeru (ko iščemo maksimum) mora biti vsota navorov sile teže zidakov posebej za vsako od osi 1, 2, 3, ..., n enaka nič. Očividno pa je, da so za navor okrog določene osi odgovorni samo zidaki, ki so nad to osjo. Zapišimo enačbo, ki mora veljati za prvo os



Slika 2

$$\begin{aligned}
 &mg(x_1 - \frac{a}{2}) + mg(x_1 + x_2 - \frac{a}{2}) + mg(x_1 + x_2 + x_3 - \frac{a}{2}) + \dots \\
 &\quad mg(x_1 + x_2 + x_3 + \dots + x_n - \frac{a}{2}) = 0 \\
 &nx_1 + (n-1)x_2 + (n-2)x_3 + \dots + x_n = n \frac{a}{2}
 \end{aligned} \tag{1}$$

Podobne enačbe dobimo tudi za vsako od naslednjih osi

$$(n-1)x_2 + (n-2)x_3 + \dots + x_n = (n-1) \frac{a}{2} \tag{2}$$

$$(n-2)x_3 + \dots + x_n = (n-2) \frac{a}{2} \tag{3}$$

$$x_n = \frac{a}{2} \tag{n}$$

Odštejmo sedaj po vrsti enačbo (2) od enačbe (1), enačbo (3) od enačbe (2), ..., enačbo (n) od enačbe (n-1) pa dobimo

$$\begin{aligned}
 nx_1 &= \frac{a}{2} \\
 (n-1)x_2 &= \frac{a}{2} \\
 &\vdots \\
 2x_{n-1} &= \frac{a}{2} \\
 x_n &= \frac{a}{2}
 \end{aligned}$$

Razdalja od začetnega zidaka do polovice slavloloka je potemtakem

$$L = x_1 + x_2 + x_3 + \dots + x_n = \frac{a}{2n} + \frac{a}{2(n-1)} + \frac{a}{2(n-2)} + \dots + \frac{a}{2}$$

ali

$$L = \frac{a}{2} \left(1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \dots + \frac{1}{n} \right)$$

Zdaj se pokaže glavno presenečenje. Vsota v oklepaju je neskončna, če je n neskončen, kar pomeni, da je pri neskončnem številu zidakov tudi širina slavloloka neskončna. Vendar pa širina slavloloka narašča zelo počasi, kar bomo videli na spodnjih dveh primerih.

- Za $n = 50$, bi bil slavlolok širok 90 cm in visok 2, 5 m, kar je zadosti podobno, da se lahko pod njim sprehajamo.
- Za $n = 1000$, bi bila višina slavloloka že 50 m, širina pa skromnih 150 cm, kar bi bilo komaj zadosti, da se spodaj pelje manjši avto.

Božidar Casar

GLEJ, MAVRICA!

1. del

Ples in razcvet sončnega žarka v dežni kapljici

Lok dežne mavrice je znamenje zaveze, da voda ne bo nikoli več uničila zemlje. To znamenje je po vesoljnem potopu bog postavil v oblake, ker je bila njegova jeza potolažena. Ta kratko povzeta oznaka iz Geneze, prve Mojzesove knjige Stare zaveze, je bolj razlaga tedanjega človekovega odnosa do boga, kot pa opis tega prelepega vremenskega pojava. Vendar zadene bistvo občutka, ki nas prevzame ob pogledu na mavrico — spokojen mir, v katerem ni mesta za jezo in maščevanje.

Mavrica je most med dvema kulturama: poezijo in znanostjo. Pradaven je trud pesnikov in naravoslovcev, da bi jo primerno opisali. Pri tem so nekateri celo odklonilno sprejemali poskuse in uspehe znanstvene razlage. Znano je, da je Goethe za Newtonovo analizo mavričnih barv zapisal, da je, kot da bi "nara-vi pohabil dušo". Drugačno mišljenje pa povejmo z Descartesovimi besedami: "Mavrica je tak izreden čudež narave, ... da bi težko izbral primernejši zgled za uporabo svoje metode."

Kaj torej je mavrica? Zakaj nastane? Če dežuje in hkrati sije sonce, lahko pričakujemo, da bomo na nebu zagledali njen lok, če bodo okoliščine ugodne — celo dva. Pri tem je ni treba iskati po vsem nebesnem svodu, nahaja se na natanko določenem mestu. Leksikon Cankarjeve založbe Fizika nas o tem pouči takole:



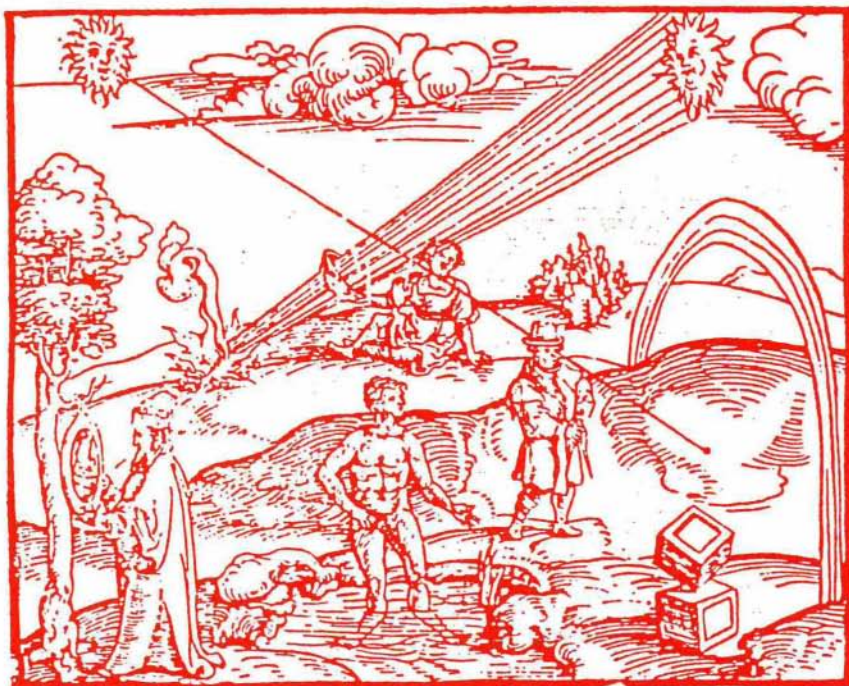
mavrica, spekter sončne svetlobe, ki nastane zaradi disperzije in uklona sončne svetlobe na okroglih vodnih kapljicah v ozračju, ko je Sonce za hrbtom opazovalca. V *glavni mavrici* (pri kotu ok. 42°) so razvrščene barve: vijoličasta, modra, zelena, rumena, oranžna, rdeča; na zunanjem robu se navadno pojavi še *stranska mavrica* (52°) z barvami v obrnjenem redu.

Ta razlaga seveda zbudi naše zanimanje. Zakaj se zaradi sipanja sončne svetlobe na dežnih kapljicah prav na določenem delu neba pojavi barvni lok?

Zmotna je predpostavka, da je to le preprost problem geometrijske optike, ki so ga že davno rešili. Teorijo mavrice so zadovoljivo razvili šele v nekaj zadnjih letih. Poleg teorije geometrijske optike upošteva ta teorija vse znane

lastnosti svetlobe, kot so na primer interferenca, uklon in polarizacija.

Marsikateri fizikalni inštrument so razvili s posebnim namenom, da bi z njim raziskali dežno mavrico in sorodne pojave. Mavrica je bila preskusni kamen za testiranje različnih optičnih teorij. Z najuspešnejšimi med njimi je dandanes moč mavrico ustrezno matematično opisati, to je napovedati porazdelitev svetlobe na nebu.



Slika 1. Vitellov lesorez. Optični pojavi, kot jih je ilustriral poljski menih Vitello. Lesorez je iz 1535. izdaje njegove knjige o optiki, ki jo je napisal leta 1270. Na njem je mavrica zelo opazna.

Če se v pršici slapu ali na nebu po plohi pojavi en sam širok mavrični lok, je to lok *glavne mavrice*. Njena intenzivnost in širina sta lahko različni, toda barve si sledo vedno v istem zaporedju: od vijolične na notranjem robu preko modre, zelene, rumene in oranžne do rdeče na zunanjem robu.

Drugi mavrični pojavi so šibkejši in jih ne opazimo vedno. Više na nebu nad glavno mavrico se lahko pojavi še *stranska mavrica*, v kateri se vrste barve v

obratnem vrstnem redu kot v glavni mavrici — od rdeče, v notranjosti, do vijolične, na zunanjem robu. Če boste pri opazovanju dvojne mavrice dovolj pozorni, boste ugotovili, da je področje med obema mavričnima lokoma nekoliko temnejše kot okoliško nebo. Ta pojav je prisoten celo, če stranska mavrica ni vidna; glavna mavrica ima tedaj svetlejšo in temnejšo stran. Temno področje nad lokom glavne mavrice se imenuje *Aleksandrov temni pas* po grškem filozofu Aleksandru iz Afrodisia, ki je pojav prvi opisal pred več kot dva tisoč leti.

Bolj poredko lahko opazimo še dodatni pojav: gre za zaporedje nejasnih lokov, ki leže na notranji strani glavne mavrice in so izmenično rožnati in zeleni. Še redkeje se taki loki pojavijo na zunanji strani stranske mavrice. Oboji so jasneje vidni v bližini vrha mavričnega loka. Pozornost, ki so jo zbudili, je imela velik vpliv na razvoj teorije mavrice.

— — — — —

Povzeti vso znano teorijo mavrice je za nas prehud zalogaj. Zato se bomo omejili le na njeno *osnovno analizo*, ki temelji na *odboju* in *lomu* sončnega žarka na dežni kapljici. V tej številki Preseka bomo navedli oziroma ponovili potrebne fizikalne zakone in nato opisali, kaj se dogaja s svetlobnim žarkom, ko zadene ob vodno kapljico. Dobljeni rezultati bodo izhodišče za nadaljnja razmišljanja o mavrici v prihodnji številki.

Odboj in lom.

Površje dežne kapljice, ki lebdi v oblaku, je meja med dvema snovema: zrakom in vodo. Del svetlobe, ki pade nanjo, se odbije, del mejo prestopi. Za odbito svetlobo velja *odbojni zakon*:

Odbiti žarek leži v ravnini, ki jo določata vpadni žarek in pravokotnica na mejno ploskev v vpadni točki. Pri tem sta kota med pravokotnico in vpadnim oziroma med pravokotnico in odbitim žarkom enaka.

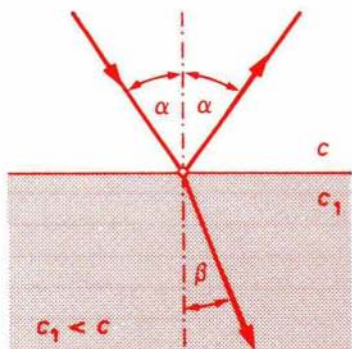
Pri prehodu svetlobe čez mejo dveh snovi, v katerih se svetloba širi z različnima hitrostma c in c_1 , se svetloba *lomi*. Pri tem velja *lomni zakon*:

Vpadni in lomljeni žarek ter pravokotnica na mejno ploskev v vpadni točki leže v isti ravnini. Za vpadni kot α in lomni kot β , ki ju merimo od pravokotnice do žarkov, velja enakost

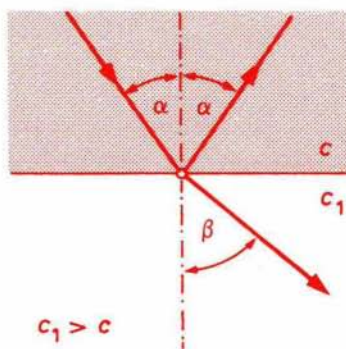
$$\frac{\sin \alpha}{\sin \beta} = \frac{c}{c_1} \quad (1)$$

Hitrost svetlobe v vodi je manjša od hitrosti svetlobe v zraku. Pravimo, da je

voda optično gostejša od zraka. Iz enačbe (1) sledi, da je pri prehodu iz optično redkejše snovi v optično gostejšo snov $\beta < \alpha$, torej se svetloba lomi proti vpadni pravokotnici, pri prehodu v obratni smeri pa stran od nje. Oba primera sta hkrati z odbojem ilustrirana na slikah 2 in 3.

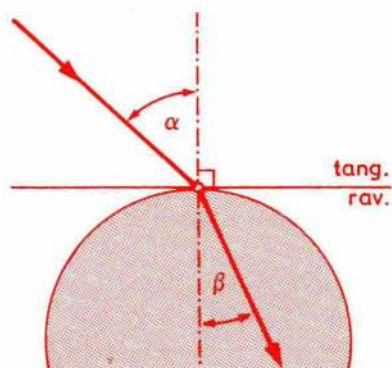


Slika 2



Slika 3

Na obeh slikah je mejna ploskev ravnina. Če mejna ploskev ni taka, je treba vzeti tangentno ravnino, to je ravnino, ki se je dotika v vpadni točki (slika 4).



Slika 4

Povejmo, da je kvocient na desni strani enačbe (1) za prehod svetlobe iz zraka v vodo enak približno $4/3$.

Skica na sliki 3 nas opozori še na nekaj. Ko večamo kot α , se večja tudi kot β . Ker je pri prehodu iz optično gostejše snovi v optično redkejšo snov $\beta > \alpha$, obstaja tak kot $\alpha < 90^\circ$, pri katerem je $\beta = 90^\circ$. Za vpadne kote, večje od tega

kota, svetloba ne prehaja več čez mejo obeh snovi, ampak se vse odbije. Pravimo, da pride do *totalnega odboja*. Izračunajmo iz enačbe (1) mejni kot totalnega odboja za prehod svetlobe iz vode v zrak. Imamo

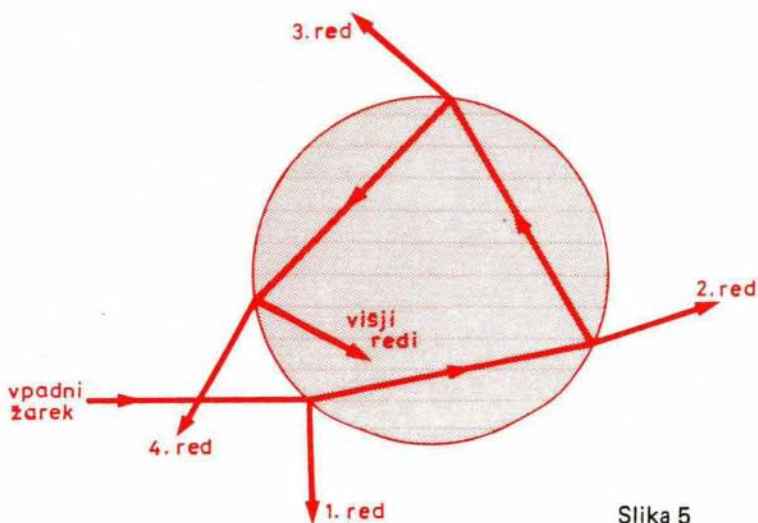
$$\frac{\sin \alpha}{\sin 90^\circ} = \sin \alpha = \frac{3}{4}$$

kar da $\alpha = 49^\circ$.

Ples sončnega žarka v dežni kapljici.

Poskusimo sedaj ugotoviti, kako se odbija in lomi svetloba, ki v zraku naleti na dežno kapljico. Predpostavili bomo, da ima kapljica obliko majhne krogle. Žarek, ki zadene njeno površino, se delno odbije, delno lomi. Lomljeni žarek potuje skozi kapljico do nasprotne stene, kjer se spet delno odbije, del pa lomljen zapusti kapljico, itd.

Ker potekajo vse pravokotnice na krogelno površino skozi središče krogle, leži prvi par lomljenega in odbitega žarka zaradi odbojnega oziroma lomnega zakona v ravnini, ki jo določata vpadni žarek in središče krogle. Drugi par takih žarkov leži v ravnini prvega lomljenega žarka in središča krogle. Ta ravnina seveda sovpada s prvo. Če tako nadaljujemo, ugotovimo, da leže poti vseh žarkov, ki izvirajo iz istega vpadnega žarka, v isti ravnini. To je ravnina, ki jo dolo-



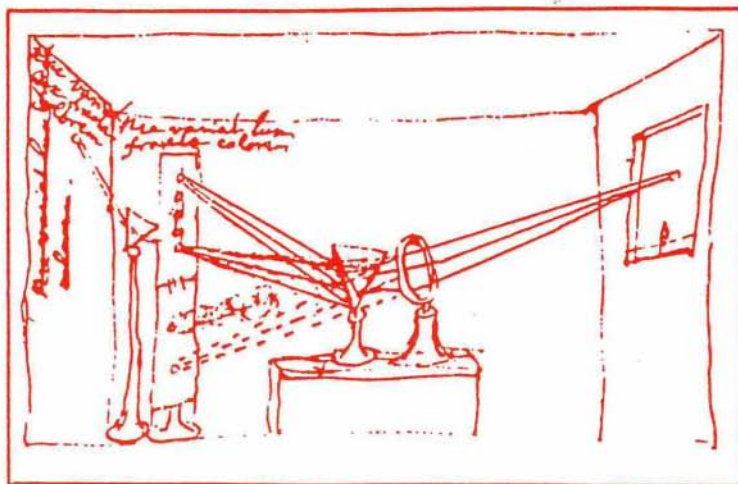
Slika 5

čata vpadni žarek in središče kroglice, torej ravnina nekega glavnega krogelnega kroga. (Ta ravnina ni določena, če žarek pravokotno zadene površino kapljice. Tedaj gre svetloba naravnost skozi kapljico in se odbije v smeri vpadnega žarka.) Zasledovanje svetlobe skozi kapljico je torej ravninski problem. Na sliki 5 imamo narisane tak prerez skozi središče kapljice, v katerem leži opazovani vpadni žarek.

Prvi odbiti žarek bomo imenovali žarek 1. reda. Preostala svetloba lomljena prodre v kapljico. Na nasprotni steni je del izstopi kot žarek 2. reda, del se je odbije nazaj v kapljico. Ko ta del spet zadene steno kapljice, delno prodre ven kot žarek 3. reda, delno pa nadaljuje pot znotraj kapljice kot odbiti žarek. Tako se proces nadaljuje. Kapljica je torej izvor žarkov različnih redov, ki so čedalje šibkejši. Prvi red predstavlja svetlobo, ki se od kapljice direktno odbije, drugi svetlobo, ki gre direktno skozi. Žarki *tretjega reda* zapuste kapljico po enem notranjem odboju in *nam dajejo glavno mavrico*. Žarki 4. reda opravijo dva notranja odboja in *so izvor stranske mavrice*. Obstajajo tudi mavrice višjih redov, ki jih tvorijo žarki, katerih pot je še večkrat odbita, toda praviloma niso vidne.

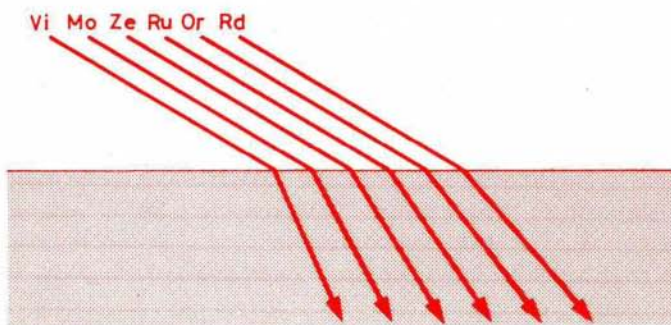
Razcvet sončnega žarka v vodni kapljici.

Doslej še nismo spregovorili niti besede o najopaznejši lastnosti mavrice — njenih *barvah*. Zakaj pravzaprav gre, je leta 1666 razložil Newton s svojim slavnim poskusom prehoda svetlobe skozi tristrano prizmo (slika 6). Pokazal je, da



Slika 6. Newtonova lastnoročna risba poskusa s tristrano prizmo.

je bela svetloba mešanica mavričnih barv: *vijolične, modre, zelene, rumene, oranžne in rdeče* in da se vsaka teh barv nekoliko drugače lomi. Pri istem vpadnem kotu imajo različne barve rahlo različne lomne kote. Posledica tega je, da se vzporeden curek bele svetlobe *razkloni*. Pri tem je najmanj odklonjena rdeča, najbolj vijolična sestavina. Pojav sam imenujemo *disperzija*. Na sliki 7 je prikazan za vsako enobarvno komponento svetlobe posebej.



Slika 7

Pri dežni kapljici se žarki vseh redov, razen prvega, lomijo *dvakrat*: enkrat ob vstopu v kapljico, drugič ob izstopu iz nje. Gre torej za *dvojni lom*. Pri dvojnem lomu se lahko učinek disperzije ali poveča ali zmanjša. Sami se lahko z risbo in s pomočjo enačbe (1) prepričate, da se učinek celo izniči, če sta vpadna in izstopna ploskev vzporedni, to je pri prehodu svetlobe skozi planparalelno plast.

Pri dežni kapljici, torej krogli, nastopi tak primer le, če pade žarek pravokotno na njeno površino. Za vse druge smeri pa pride pri žarkih vseh redov, od drugega dalje do povečanega razklona svetlobe. Žarki drugega reda niso zanimivi, ker pri njih gledamo skoraj naravnost v sonce. Povedali smo že, da žarki tretjega in četrtega reda dajejo glavno in stransko mavrico, pri več kakor treh notranjih odbojih pa je izguba svetlobe že prevelika, da bi kaj videli.

Marija Vencelj

Gerlič I., PRVI KORAKI V LOGO, Ljubljana, ZOTKS, 1988

Programski jezik logo počasi, a vztrajno prodira v slovensko računalniško srenjo. Članki v Preseku, raziskovalne naloge mladih raziskovalcev, računalniška tekmovanja v logu, ... opozarjajo na to. Knjiga, ki je izšla lansko leto, bo prav gotovo še pospešila uporabo tega zanimivega programskega jezika. Po izkušnjah v svetu, pa tudi pri nas, je to jezik, ki je za prvi stik s programiranjem najbolj primeren. Grafika, tvorba kompleksnejših ukazov iz osnovnih, interaktivnost, dostopnost na vseh hišnih računalnikih, ... je le nekaj njegovih zanimivih lastnosti. Knjiga nas popelje v zanimiv svet želje grafike, ne pozabi pa tudi na delo s seznamami. Opremljena je s številnimi zgledi in nalogami. Sicer je pisana za verzijo loga, ki teče na računalnikih Commodore C64, vendar ne bo nobenih težav pri prilagajanju programov za Spectrum, PC ali Partner. Osnovni ukazi so tako ali tako identični, pri 'eksotičnejših' pa si pomagamo bodisi s primerjavo ukazov na koncu knjige bodisi s pregledom ukazov, ki je bil objavljen v Preseku. Vsem, ki bi se radi poizkusili v logu, knjigo z veseljem priporočam.

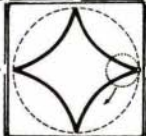
Matija Lokar

NALOGE NA TEKMOVANJIH IZ FIZIKE V OSNOVNI ŠOLI, F. Plevnik, Z. Bradač, M. Cvahte, (Presekova knjižnica; 30) DMFA SRS 1989,

V zbirki so naloge s tekmovanj učencev sedmih in osmih razredov osnovnih šol od leta 1982, ko so se tekmovanja pričela. Posebna vrednost zbirke so rešitve nalog. Avtorji so vsako rešitev skrbno razložili, opisali postopek reševanja in, kjer je bilo potrebno, rešitev ponazorili s pregledno sliko. Koristni so tudi splošni napotki za reševanje nalog na začetku zbirke, saj veliko učencev ne ve, kako se naj reševanja sploh lotijo.

Naloge niso lahke in večinoma presegajo težavnost običajnih osnovnošolskih nalog. Zato so namenjene učencem, ki se pripravljajo na tekmovanje, in boljšim učencem, še posebej tistim, ki nameravajo nadaljevati šolanje na naraščajni smeri. Z reševanjem se bodo lahko veliko naučili, a le tako, da bodo nalogo najprej poskusili rešiti samostojno, in šele nato pogledali rešitev. Rešitve nalog naj bodo torej le za kontrolo; samo s prebiranjem rešitev se reševanja nalog pač ne moremo naučiti. Zbirka bo učencem, ki naloge rešujejo samostojno, lahko nudila veliko zadovoljstva, posebej takrat, ko bodo našli do rešitve izvirno pot, drugačno od tiste v zbirki. Zato zbirko toplo priporočamo.

Bojan Golli

SESTAVIL MARKO BOKALIČ	DARJO FELDA	ITAL. TRI- VRSTIČNA KITICA	NASILNIK, SAMO- ZVANEC	ČEVLIAR- SKO ORODJE	DELAVKA V TEKSTIL- INDUSTRIJI	VOJNI ODESEK	ZAPREKA BARIERA	SPOKOJ	ZDRAVNIK, KI DAJE NARKOZO	JEZERO V ETIOPIJI	IME ALB. PESNIKA MEKULIJA	MITO TREPALI
IZDAJA- TELJ LISTA, KI JE PRAVILNA PRED VAMI												
MESTO V SZ JUŽNO OD MOSKVE						ŽEN. IME						ZNANSTV. RAZISKOV. USTANOVA
ZAPRTA DRUŽBENA PLAST V INDIJI						ALOJZI VADNAL						
NEPOSRE- DNA PO- SLEDICA IZREKA								PLOD OBDELO- VALNA POVRŠINA				ČEBELJA TVORBA GORSKA UJEDA
NEM. PESNIK, SLIKAR IN KIPAR				OSN. DELEC ENERGIJE NAŠ CRKOPIS					ZENITU NASPRO- TNA TOČKA		BITOLJ	
CISTOČA						JAPON. DEN. ENOTA						SEVERNO- AMERIŠKI MALI MEDVED
SESTRA ENEGA OD STARŠEV					OZVEZDJE NA SEV. NEBU	DEL POHIŠTVA						RUDNIK PRI TUZLI
IME PESNIKA GRADNIKA						STARO- RIMSKI PESNIK						POLDRAG KAMEN ZORAVAL V BELGIJI
RISBA MIHA ŠTALEC	DVOJNA POTEZA PRI ŠAHU	SREDIŠČE ITALIJE 7ix, yj ▲				PEVEC Z NIZKIM GLASOM LITIJ						BELL VA O PIŠM SO IZDE
RADIJ			MESTO V KOMUMBIJI rdeč drag kamen				MUČENEC SL. OPERNA PEVKA (ONDINA)					
KRŠČANSKI ZAKRA- MENT								GOLOTA	DRŽAVA V INDIJI NEPROFESI- ONALEC			
S					TIRENSKO MORJE PALERMO SICILIJA SIRACUSA	TOVARNA V MARIBORU KARANTAN. KNEZ					NEGATIVEN OSNOVNI DELEC	
SRBSKO MOŠKO IME				SLOV. SKLADA- TELJ (UROŠ)							OSEBA IZ "KEKCA" IBSENOVA DRAMA	
ANGLÉŠKO MOŠKO IME					FRANC. PISATELJICA IVAN MOLINARO	IZRAZ ŽALOSTI						NEKDANJI POLSKI VODITELJ
STARA DRŽAVA V AZIJI								PESTNER EMILE ZOLA				PIANIST BERTON- CELJ
		TENIŠKI KLUB			HARIBOVJE V SZ BOSNI							

STARO-GRŠKI ASTRONOM	1000 kg	DOMAČI INDIVID. UČITELJ		IZOBRAZBA	PREČNA NIT V TKALSTVU	ŠVEDSKO IME FIN. PRISTANIŠČA TURKU	ZVEZDO-SLOVJE	BROM	STUDENTJE KI ODPADEJO		
						VUKOVAR					
								IVAN PUCELJ			
								ALŽIRSKA LUKA		BRITANSKA KRALJICA	TOVARNA GOLFOV V SARAJEVU
			KAREL ERBEN			NAŠ BIVŠI KOLESAR					
			nevtral za množenje			ALPINIST ČESEN					
	ATOMSKA PEČ								PEROCI		
	ANG. IGRAL (EDMUND)								DOLENSKI KRAJ S SAMOSTANOM		
					POKOJNI BOGATAŠ, LASTNIK LADJEVJA	GRŠKI LASTNIK (ARI)					
					LJUBICA LUDVIGA	KRALJA (LOLA)					FRANC. FILOZOF IN ZGODOVINAR
					ENOTA ZA JAKOST EL. TOKA	VELIK IT. PESNIK					
			OSN. DELEC SNOVI					PRVI LETALEC			
			NEMŠKI GEOGRAF					NEON			
INJEKCIJA ENILNEK						ANGLEŠKA DOLŽ. MERA PALEC				BERILIJ	
										MESTO V BAČKI	
	REBRICAŠKA TKANINA					NEM. JEDRSKI FIZIK					
	nud. nastetje na Korolškem					NARAVNI LOGARITEM					
		JUGOSL. IZUMITELJ						MESTO V EPIRU			
		NEMŠKI PISATELJ									
							ELEKTRIČNI USMERNIK	EGON ZAKRAJŠEK	SL. IGRALEC (IVO)		
									DEL KROŽNICE		
				REKA V ŠPANIJI		OSREDNJI SLOV. DNEVNIK				MESTO V PIEMONTU V ITAL.	MAJHEN RT
						NASPROTJE IZOTOPA					
						AFRIŠKI VELETOK					
			SREDIŠČE MORAVSKE TRAVNIK					PODELITEV IMENA			
								ANTON VAKSELJ			
									IME GLASBENIKA SOSSA		
NAJVIŠJI VRH DINARE									NEVTRAL ZA SEŠTEVANJE		

RAZVEDORILLO

O TEM, KAKO SE GNEČO IZMISLI

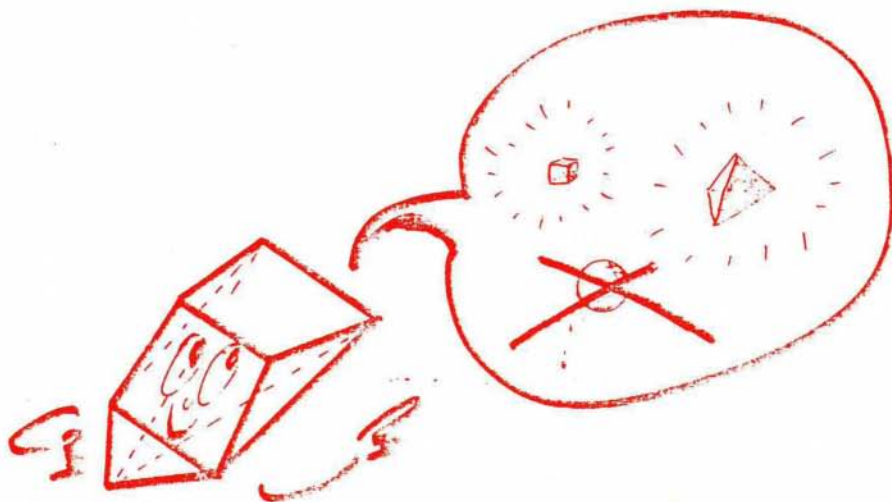
Deželo Poliedrijo boste zaman iskali na zemljevidih. Morala bi biti sicer nekje med Pokljuko in Poljsko, vendar pa?

Pa tudi, če bi se kar sami odpravili na pre-dolgo pot po svetu, češ: "Ni šment, da bi je ne bilo moč najti!", bi iz tega ne bilo koristi. Ne, Poliedrije zares ni primerno iskati na tak način!

Za to, da vstopiš v to deželo ni potrebno prestopiti prav nobene državne meje, nobene vozne karte ni treba kupovati. Še celo nog si človek ne utruja pri tem, ko jo obišče.

Kajti meja, ki nas loči z deželo Poliedrijo, je meja naše domišljije. Seveda, Poliedri, prebivalci te dežele, sami zase prav dobro vedo, kdo in kakšni so. O, ja! Pa tudi tujcem — izletnikom so pripravljeni razložiti:

"Veste, mi, Poliedri, mi smo geometrijska telesa v tridimenzionalnem prostoru. In prav vsi po vrsti smo omejeni z ravnimi ploskvami. To pa je tudi že vse, kar je sprva treba vedeti za potešitev najhujše radovednosti. Za boljšo predstavo naj še povemo, da veljata za najbrž najlepša v naši deželi Kocka in pa Tetraeder, da pa Krogla, ki je sicer prav tako zares "ful" izborna lepotica, žal ne živi v tej naši deželi Poliedriji."



Potem obiskovalca Poliedrije pot vodi navadno mimo vladne palače, kjer je nad vrati zapisan oni znameniti Eulerjev stavek ⁽¹⁾:

"Če od vsote števila oglišč in števila ploskev Poliedra odšteješ število njego-

vih robov, dobiš zmeraj 2. Za kogar pa to ne velja, ni v njem prav nič poliederskega ⁽²⁾."

$$o + p - r = 2$$

Tako!

Povem vam še, kaj se mi je zadnjič pripetilo v Poliedriji. Povsem po vsem slučaju sem zašel v njihovo družbo in jih slisal pripovedovati ...

"... ja, ja, tale njihov Cankar! Ta je pa res od sile. Ja. Kakšno na(d)logo nam je samo postavil! Poglejte ..."

"Če bi tega edinega bogastva ne bilo, (...), bilo bi mu boljše, da bi se koj napravil iztesat si posteljo iz sedmih desak: pet podolž, dvoje počez." ⁽³⁾

"Torej, ... Hm, hm. Da je v tej zadevi beseda prav o nas, Poliedrih, to je jasno! On, Cankar, on sam to reč najbrž resda drugače imenuje, ampak — mi si s temi razlikami v imenih zares ne bomo belili naših poliederskih glav.

Kar nam preostane, je torej le še to, da sedaj takoj popžemo prav vse Poliedre s sedmimi mejnimi ploskvami."

Med Poliedri je bilo čutiti vznemirjenje. Kaj takšnega!

"... seveda bomo ta popis Poliedrov izvedli le teoretično!"

Tukaj sem se potem spomnil, da so Poliedri pravzaprav zares dokaj nerodni pri premikih in pri hoji in da je že zaradi tega pri njih najbrž resnično najbolje, da so meje med teorijo in prakso enostavno in preprosto kar zbrisali, jih ukinili. Tako jim torej za vsak "dejanski" popravek zadošča že "teoretični" razmislek.

"... in seveda ne bomo nerodni. Najelegantnejša pot za razmislek vodi pač preko Eulerjeve pogruntavščine

$$o + 7 - r = 2$$

oziroma

$$r = o + 5$$

"Torej, treba je najti pač vse tiste Poliedre, ki imajo število robov za 5 večje od števila vseh svojih oglišč. Le brži!"

In potem

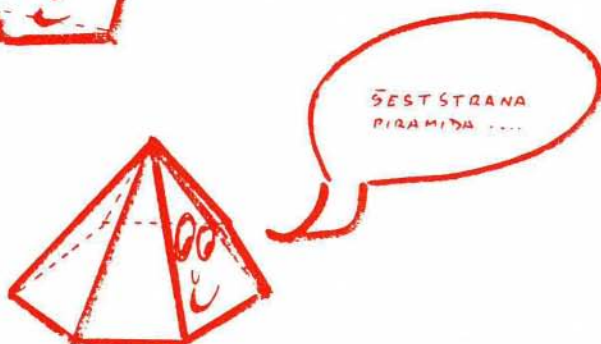
se je začel

mimohod ...

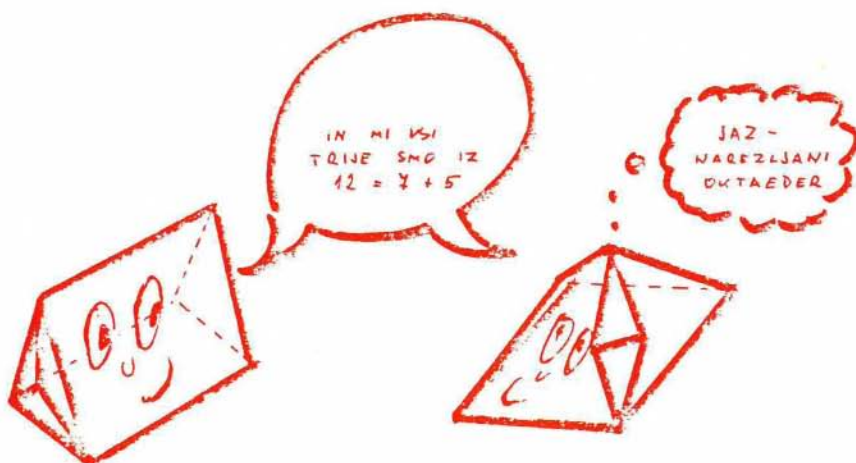
Najprej so zapisali (beri: zarisali) tisti, povsem originalno Cankarjev Polieder



Nakar je pa



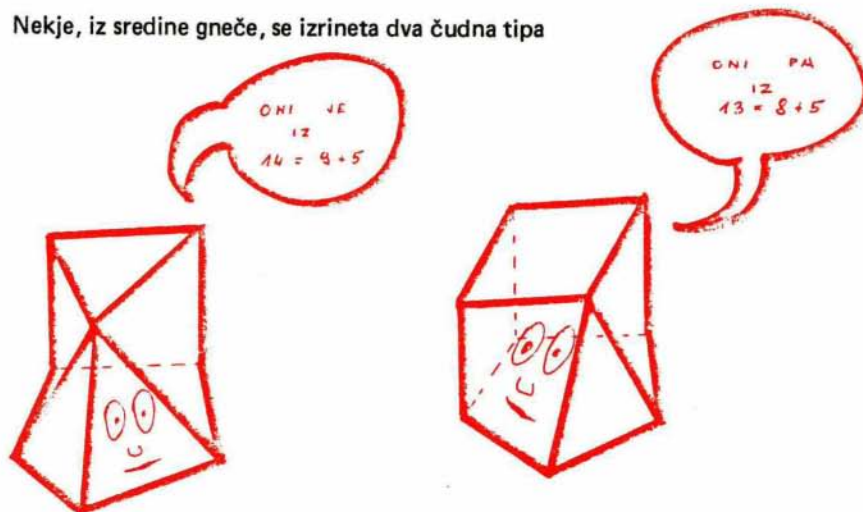
pripeljala skupino treh Poliedrov. Ona dva druga sta bila že nekoliko ...



Potem pa jo pripiha izmed vseh najenostavnejši Polieder te skupine



Nekje, iz sredine gneče, se izrineta dva čudna tipa

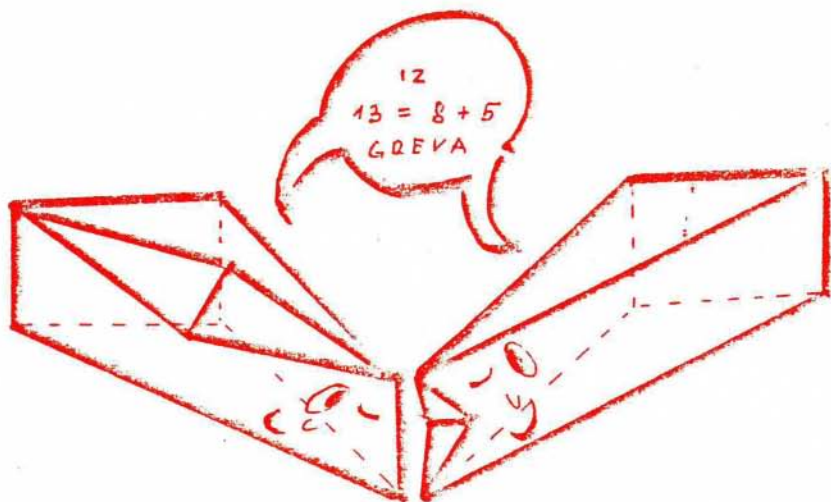


Pa se jima kar vidi, da nista iz Poliedrije! Kajne? In sta seveda ostala — nezapisana.

Saj ... kaj pa jima sploh manjka? I, kaj! Krive ploskve imata ob svojih telesih. To je. Namesto da bi bile vse ravne. Jaz sam sem to stvar opazil šele, ko sem do dobra trikrat pomežikal, Poliedri pa so ju kar takoj odrinili.

Sicer pa — ali sta zares prav onadva kriva za svoje krive ploskve ...

Potem pa sta prišla še dva. Objeta.



In potem še in še
in še.

Oh! Pa saj sem postal že kar utrujen od pripovedovanja o tej nenadni greči v deželi poliederski.

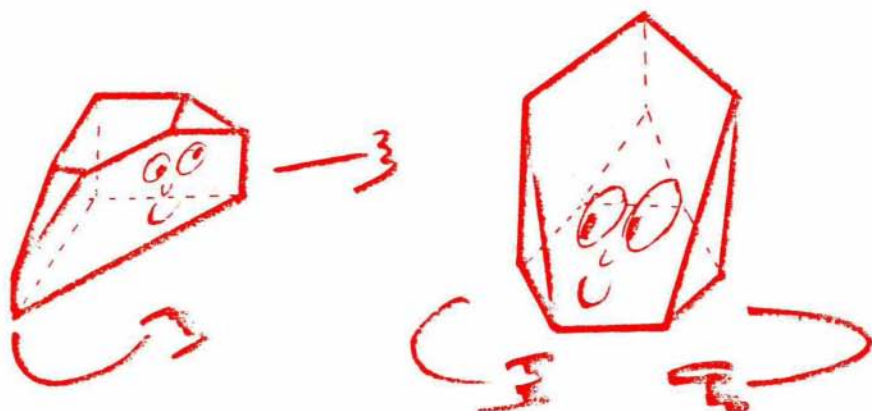
Pravim — ja, saj to bodo pa že Presekovi bralci opravili do kraja. Ni šment, da bi tudi oni ne našli preostanka vseh tistih Poliedrov s sedmimi ploskvami, ki so še o—stali tam v vrsti.

(A — zaradi *tistega* Cankarja?)

Velja!

Opombe:

- (1) Leonhard Euler (1707 — 1783), nemški matematik, ki je večino svojega življenja svetil po matematiki.
- (2) Resnici na ljubo je treba reči, da so si v Poliedriji Eulerjevo misel za malenkost pri-krojili, poenostavili. Pa — naj jim bo!
- (3) Ivan Cankar, *Podobe iz sanj*, črtica Zaklenjena kamrica, Mladinska knjiga, Ljubljana, 1981, strani 73, 74.
- (4) Najbrž ima Cankar pri tem v mislih — krste!



Vilko Domajnko

PRIROČNIKI ZA SREDNJE IN OSNOVNE ŠOLE

Učencem in učiteljem v srednji in osnovni šoli svetujemo, da si pravočasno oskrbijo priročnike, ki jih je izdalo Društvo matematikov, fizikov in astronomov SR Slovenije. Naročniki Preseka in člani društva jih lahko dobe z 20% popustom.

Štalec I. in dr., Zbirka vaj iz aritmetike, algebre in analize za srednje šole

1. razred	100.000.—	80.000.—
2. razred	100.000.—	80.000.—
3. razred	200.000.—	160.000.—
4. razred	100.000.—	80.000.—
Uršič S., Matematične tabele in formule	100.000.—	80.000.—
Leksikon — Matematika	150.000.—	120.000.—
— Fizika	150.000.—	120.000.—

Ciril Velkovrh

PRESEK MED BANKIRJI

V Dnevniku sem prebral novico, da je poštna uslužbenka svetovala stranki, naj pošlje denar raje po banki namesto po pošti, ker je banka cenejša.

Ali je to res?

Poštnina za položnico $p(PTT)$ je 50 din za zneske (z) do 1000 din, od 1001 do 10 000 din je 100 din, za vsakih nadaljnjih začetih 10 000 din pa plačamo še po 80 din. Veljajo torej enačbe za poštino

$$p(PTT) = 50 \text{ din}, z \leq 1000 \text{ din}$$

$$p(PTT) = 100 \text{ din}, 1000 \text{ din} \leq z \leq 10\,000 \text{ din}$$

$$p(PTT) = 20 \text{ din} + 0,008 \cdot |z|, z \geq 10\,000 \text{ din}$$

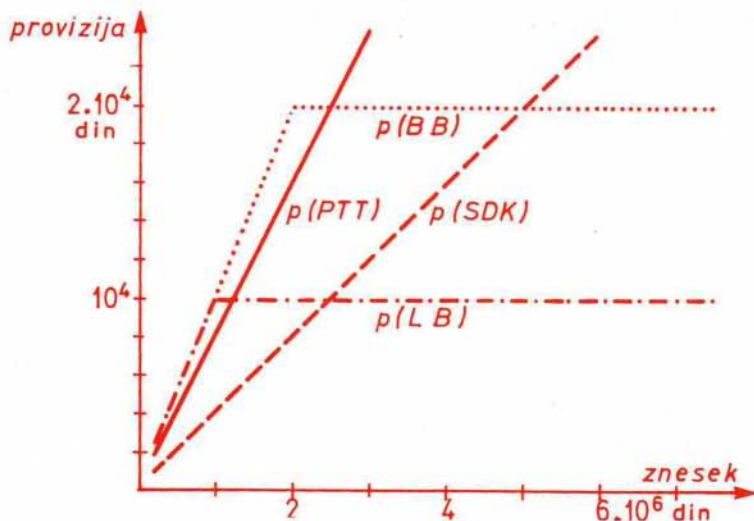
($|z|$ naj pomeni navzgor na desettisoče zaokrožen znesek, ki ga s položnico pošiljamo.)

Če pošljemo denar po položnici pri Službi družbenega knjigovodstva (SDK), plačamo za zneske do 25 000 din provizijo $p(SDK)$ 100 din, od 25 000 din naprej pa je provizija 0,4% od pošiljanega zneska.

Torej veljata enačbi

$$p(SDK) = 100 \text{ din}, z \leq 25\,000 \text{ din}$$

$$p(SDK) = 0,004 \cdot z, z \geq 25\,000 \text{ din}$$



Slika 1. Graf poštne in bančne provizij

Ljubljanska banka zaračuna za položnice provizijo $p(LB)$ v višini 1% pošiljanega zneska, vendar najmanj 200 din, največ pa 10 000 din. Enako ravna Beograjska banka, le da je zgornja meja 20 000 din. Enačbe so:

$$p(LB) = p(BB) = 200 \text{ din}, z \leq 20\,000 \text{ din}$$

$$p(LB) = 0,01 \cdot z, \quad 20\,000 \text{ din} \leq z \leq 1\,000\,000 \text{ din}$$

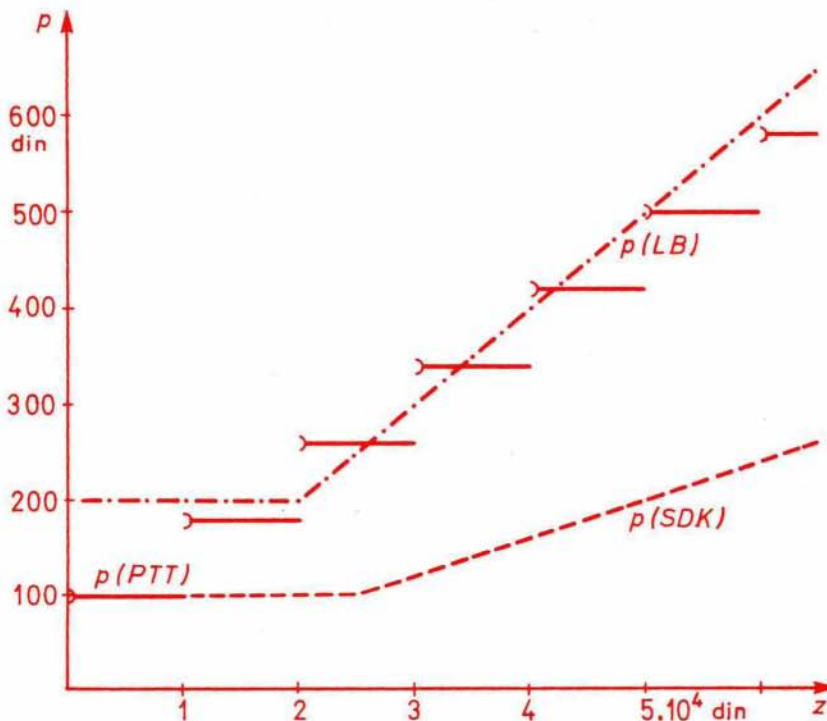
$$p(LB) = 10\,000 \text{ din}, \quad z(LB) \geq 1\,000\,000 \text{ din}$$

$$p(BB) = 0,01 \cdot z, \quad 20\,000 \leq z \leq 2\,000\,000 \text{ din}$$

$$p(BB) = 20\,000 \text{ din}, \quad z(BB) \geq 2\,000\,000 \text{ din}$$

”Zaokrožimo” pošiljane zneske na 10 000 din in si oglejmo graf.

Iz enačb in njihovih grafov je razvidno, da je do zneska 2 500 000 din provizija najmanjša pri SDK, višja je na pošti, še višja pa pri obeh bankah, zlasti dokler



Slika 2. Graf poštnine in bančnih provizij v začetnem delu

ne pridejo do veljave njihovi maksimalni zneski provizije.

Natančneje pa je takole:

Vedno je $p(SDK) \leq p(PTT)$ razen za zneske do 1000 din.

Zaradi maksimirane provizije pri LB postane pošiljanje denarja s položnicami pri LB ugodnejše od pošiljanja po pošti, ko je $p(PTT) \geq 10\,000$ din, ali ugodnejše od plačevanja pri SDK, ko je $p(SDK)$ v 10 000 din.

Rešimo obe neenačbi:

$$20 \text{ din} + 0,008 \text{ din} \cdot |z| \geq 10\,000 \text{ din}$$

$$|z| \geq 9980 / 0,008 \text{ din} = 1\,247\,500 \text{ din}$$

Ker na pošti zaokrožujejo zneske na desetisoče, je za zneske nad 1 240 000 din poštšina višja od provizije na LB.

Še druga enačba:

$$0,004 z \geq 10\,000 \text{ din}$$

$$z \geq 2\,500\,000 \text{ din}$$

z	POŠTNINA oz. PROVIZIJA			
	p(PTT)	p(SDK)	p(LB)	p(BB)
1 000	50 +	100	200	200
10 000	100 +	100 +	200	200
20 000	180	100 +	200	200
25 000	260	100 +	250	250
30 000	260	120 +	300	300
50 000	420	200 +	500	500
100 000	820	400 +	1 000	1 000
1 000 000	8 020	4 000 +	10 000	10 000
1 240 000	9 940 x	4 960 +	10 000 x	12 400
1 250 000	10 020 x	5 000 +	10 000 x	12 500
2 000 000	16 020	8 000 +	10 000	20 000
2 490 000	19 940 y	9 960 +	10 000	20 000 y
2 500 000	20 020 y	10 000 +	10 000 +	20 000 y
3 000 000	24 020	12 000	10 000 +	20 000
5 000 000	40 020	20 000 u	10 000 +	20 000 u
6 000 000	48 020	24 000	10 000 +	20 000
10 000 000	80 020	40 000	10 000 +	20 000

Torej je provizija na LB za zneske nad 2 500 000 din ugodnejša od provizije pri SDK.

Rešitvi neenačb $p(PTT) \geq 20\,000$ din in $p(SDK) \geq 20\,000$ din, $|z| \geq 2497500$ din in $z \geq 5\,000\,000$ din, nam povesta, da je provizija pri Beograjski banki za zneske nad 2 500 000 din ugodnejša kot na pošti in za zneske nad 5 000 000 din ugodnejša kot pri SDK.

Na strani 42 je tabela provizij za nekatere zneske.

Zdaj pa odgovor na vprašanje:

Do 10 000 din bomo pošiljali po pošti, od 10 001 din do 2 500 000 din na SDK, nad 2 500 000 din pa pri LB.

Če v kraju, kjer živimo, ni SDK, bomo na pošti pošiljali do zneska 1 240 000 din, višje vsote pa pri LB.

Če sta v kraju le pošta in BB, bomo na pošti oddajali zneske do 2 490 000 din, višje pa na BB.

Grafi poštnine in provizij v resnici niso premice, kot smo narisali na sliki 1, pač pa so "stopnice". "Poštne stopničke" so dolge 10 000 enot, visoke pa 80. Slika 2 kaže grafa poštnih in bančnih provizij do zneska 60 000 din.

Vidimo, da so tudi do zneska 50 000 din intervali, na katerih je bančna provizija nižja od poštnine. Določi jih za vajo!

Zaradi zaokrožanja zneskov na 10 din, bi stvari lahko še malo bolj zapletli, a pustimo to bančnikom.

Na primeru poštnih in bančnih provizij smo videli, kako lahko izkoristimo znanje iz osnovne in srednje šole pri reševanju "resničnih" nalog.

Ker ne znamo napovedati prihodnjih cen, vam ponujamo stare. Od julija 1987 so veljale na pošti naslednje cene za položnice: do 500 din je bila poštnina 18 din, do 1000 din je bila poštnina 30 din, za vsak naslednji (začeti) tisočak pa se je povečala še za 6 din. Ljubljanska banka pa je računala 1% pošiljanega zneska, vendar najmanj 20 din, največ pa 1 000 din. Kje smo takrat plačevali različne zneske?

(Rezultati: PTT: do 500 din, od 6 650 do 7 000 din in od 7250 do 162 000 din. LB: vmesni intervali: od 501 do 6649 din, od 7 001 do 7 249 din in od 162 001 din naprej.)

Dušan Modic

TEKMOVANJA

19. MEDNARODNA FIZIKALNA OLIMPIADA

19. mednarodna fizikalna olimpiada je potekala od 23. junija do 2. julija 1988 v Bad Ischlu v Avstriji. Udeležili smo se je najboljše uvrščeni z zveznega tekmovanja v Zagrebu: tretješolci Zvonimir BANDIĆ iz Beograda, Davor MATIĆ iz Zagreba in Andrej VILFAN iz Ljubljane ter četrtošolca Matko MILIN in Damir STAREŠINIĆ iz Zagreba. Ekipo sta vodila prof. Ana SMONTARA in dr. Damir VEŽA iz Zagreba. Skupne priprave, ki so trajale en teden, so potekale v Zagrebu.

V četrtek, 23. junija zvečer smo se odpeljali s spalnikom proti Salzburgu. Že na kolodvoru nas je pričakal uradni spremljevalec, ki je bil obenem tudi prevajalec. V Bad Ischlu, turističnem kraju, oddaljenem 50 km od Salzburga, so nas nastanili v hotelu, ki ga oskrbujejo učenci tamkajšnje turistične šole. Še isti dan je bila svečana otvoritev olimpiade. Tam smo tudi prvič videli znak 19. olimpiade, Machovo valovno čelo. Zanj so se odločili v počastitev 150-letnice rojstva tega velikega avstrijskega fizika. V soboto se je začelo tekmovanje s teoretičnim delom. Tri naloge smo reševali pet ur. Eksperimentalni nalogi smo reševali v ponedeljek. Vse naloge, razen ene, so bile izvirne in so vključevale področja, ki doslej na fizikalnih olimpiadah še niso bila zastopana. Preliminarne rezultate smo izvedeli že nekaj dni po tekmovanju, tako da je imel vsakdo možnost pritožbe, ki jih letos ni bilo veliko. Podelitev nagrad je bila v petek, 1. julija. Podeljenih je bilo 7 prvih, 22 drugih, 26



Poštni žig z znakom fizikalne olimpiade

tretjih nagrad ter 22 pohval. Poleg teh so bile podeljene tudi nagrade za najmlajšega udeleženca, za najboljše tekmovalce iz držav, ki sodelujejo prvič, ter za najboljše rešitve posameznih nalog. Tako kot lani smo tudi letos osvojili dve tretji nagradi, in sicer sta bila nagrajena Andrej VILFAN in Zvonimir BANDIĆ. Število držav udeleženk se je dvignilo že na 27, poleg tega so tri države poslale svoje opazovalce. Skupni vrstni red držav je bil naslednji: Romunija, Sovjetska zveza, Madžarska, ZR Nemčija, Kitajska, Švedska, Bolgarija, ZDA, Poljska, Velika Britanija, Nizozemska, Nemška demokratična republika, Češkoslovaška, Finska, Avstralija, Jugoslavija, Norveška, Avstrija, Italija, Kanada, Kuba, Ciper, Vietnam, Islandija, Belgija, Kolumbija, Kuvajt. Naša ekipa je bila v skupnem seštevku torej šestnajsta, kar je približno na sredini. Podobno se je uvrstila tudi leto poprej v Jeni.

Ker je letos olimpiada trajala nekoliko dlje kot običajno, smo si v prostem času lahko ogledali precej okoliških znamenitosti. Tako so nas organizatorji peljali na ogled svetovno znanih jezer v Salzkammergutu (po nekaterih smo se tudi peljali z ladjo), ledenih jam na Dachsteinu in rudnika soli, ki še obratuje. V četrtek smo si ogledali še mesto Salzburg. Zadnji večer so se



Jugoslovanska ekipa na 19. mednarodni fizikalni olimpiadi v Bad Ischlu 1988. Z leve: Matko Milin, poleg njega uradni spremljevalec, nato Damir Starešinić, Andrej Vilfan, Davor Matić in Zvonimir Bandić.

ekipe obiskovale po sobah in si izmenjevale razna darila in spominke. Ob tej priložnosti so nam Poljaki povedali, da bodo prihodnjo, jubilejno olimpiado že tretjič gostili v Varšavi.

Naloge objavljamo v nekoliko skrajšani obliki:

Teoretične naloge:

1. V namišljenem idealnem eksperimentu se enkrat ionizirani atomi s specifičnim nabojem (e/m) $4 \cdot 10^6$ As/kg gibljejo v laserskem snopu v nasprotni smeri, kot se širi svetloba. Valovno dolžino laserja lahko zvezno spreminjamo. Da vzbudimo mirujoč ion, potrebujemo foton valovne dolžine, $\lambda_1 = 600$ nm, za gibajočega se pa je potrebno valovno dolžino zaradi Dopplerjevega pojava spremeniti. Hitrosti gibanja ionov so enakomerno porazdeljene na intervalu med 0 in 6000 m/s.
 - 1.1 V kolikšnem intervalu se mora spreminjati valovna dolžina laserja, da lahko vzbudimo vse ione? Lahko uporabiš enačbo za klasični Dopplerjev pojav. Natančna rešitev tega problema zahteva uporabo relativistične formule za Dopplerjev pojav. Oцени velikostni red napake, ki jo storiš, če uporabiš klasično formulo!
 - 1.2 Pred vzbujanjem pospešimo ione v električnem polju, v katerem je razlika potencialov U . Zapiši izraz za širino intervala, v katerem se nahajajo hitrosti ionov po prehodu skozi električno polje, v odvisnosti od razlike potencialov (U)!
 - 1.3 Ione lahko vzbujamo z dvema različnima valovnima dolžinama: $\lambda_1 = 600$ nm in $\lambda_2 = \lambda_1 + 0,001$ nm. Pokaži, da se intervala valovnih dolžin laserja, v katerih lahko vzbudimo ione v eno ali drugo stanje, pokrivata. Kolikšna mora biti razlika potencialov U , da se intervala ne bosta več pokrivala?
2. Homogen disk v obliki valja z maso 0,4 kg in radijem 0,06 m visi na dveh enako dolgih tankih vrvicah, ki sta pritrjeni na gred z radijem 3 mm. Geometrijski osi valja in gredi sovpadata. Vrvici navijemo na gred, tako da se disk dvigne na višino 1 m in ga spustimo, da se vrvici pričneta odvijati. Ko se vrvici odvijeta do konca, se začneta navijati v drugo smer in disk se začne dvigati.
 - 2.1 Določi kotno hitrost diska ter silo v vsaki izmed vrvic po tem, ko se je disk spustil za višino 0,5 m!
 - 2.2 Največja sila, ki jo zdrži ena vrvica je 10 N. S kolikšne višine smemo spustiti disk, da se vrvici na dnu ne strgata? Predpostavi, da je vrvica vedno navpična.

3. V plazmi se nahajajo ionizirani atomi z neznanim vrstnim številom Z , ki jim je ostal le po en elektron.
 - 3.1 Določi energijo takega iona v osnovnem stanju! Uporabi enačbo $p_0^2 r_0^2 = \hbar^2$, če je p_0 gibalna količina elektrona, r_0 radij tira, po katerem elektron kroži, $\hbar$ pa Planckova konstanta deljena z 2π .
 - 3.2 Na enak način določi energijo iona z dvema elektronoma, ki se prav tako nahaja v osnovnem stanju. Predpostavi, da se oba elektrona nahajata na razdalji r od jedra, da je njuna medsebojna razdalja enaka $2r$ in da za vsak elektron velja enačba $p^2 r^2 = \hbar^2$.
 - 3.3 Ion z enim elektronom se rekombinira (sprejme še en elektron) in pri tem odda foton z valovno dolžino $7,514 \text{ nm}$. Določi vrstno število atoma!

Eksperimentalni nalogi:

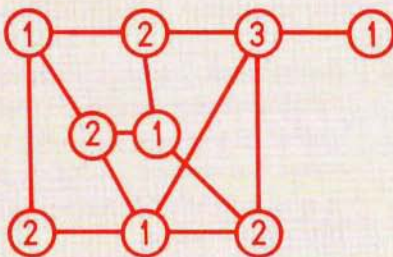
4. Na razpolago imaš žarnico, tri lesene okvirje z odprtinami, dve stekleni ploščici, polarizator okrogle oblike, rdeč filter, celofan, prozoren lepilni trak.
 - 4.1 Določi smeri, v katerih polarizator prepušča svetlobo, tako da analiziraš svetlobo, odbito od steklene plošče. Določi lomni količnik stekla, iz katerega je narejena plošča. *Napotek:* svetloba, ki se odbije od steklene plošče, je popolnoma polarizirana samo, če je vpadni kot enak $\arctg(n)$, pri čemer je n lomni količnik stekla (Brewstrov zakon).
 - 4.2 Naredi polariskop, t.j. napravo, ki ti bo omogočila opazovanja in merjenja optičnih pojavov na dvolomnih filmih in ploščah, če nanje pod pravim kotom vpada linearno polarizirana svetloba. Skiciraj napravo in pojasni njeno delovanje! S to napravo določi osi dvolomnosti na listu celofana! Opiši meritev in nariši skico!
 - 4.3 Na stekleno ploščico nalepi 10 plasti lepilnega traku, tako da so vsi trakovi obrnjeni v isto smer. Preišči ta vzorec s polariskopom. Kdaj lahko na vzorcu opazimo barve? Kako lahko te barve spremenimo? Pojasni!
 - 4.4 S polariskopom preišči centralni del risalnega trikotnika. Opiši rezultate opazovanj! Ali lahko ugotoviš, na kakšen način je bil trikotnik izdelan?
5. Na razpolago imaš digitalni voltmeter, tri znane upornike, vakuumsko cev (diodo), štiri neznane upornike, baterijo $1,5 \text{ V}$, štiri baterije 9 V , ki jih vežeš zaporedno, sponke, žice. V vakuumski cevi lahko tok nasičenja izračunamo z enačbo $I = CT^2 \exp(-A_i/kT)$, če je T temperatura ka-

tode, A_i izstopno delo, potrebno da elektron zapusti katodo, k Boltzmanova konstanta in C neka konstanta. Najprej izmeri upor štirih neznanih upornikov! Določi tok nasičenja pri različnih temperaturah katode! Za gretje uporabi 1,5 voltno baterijo ter različne upornike, katerih vrednosti si izmeril prej. Predpostavi, da je tok, ki teče med anodo in katodo pri napetosti 36–40 V, že enak toku nasičenja. S pomočjo dane enačbe izračunaj izstopno delo A_i !

Andrej Vilfan

PROBLEM BARVANJA TOČK GRAFA – Rešitev s str. 17

1. Potrebujemo 3 barve. Ena od rešitev je na sliki 5:



2. 3 barve
3. H je podgraf grafa G , če ga dobimo iz G tako, da odstranimo nekaj točk in povezav. Skupaj s točko grafa moramo seveda izbrisati tudi vse povezave, ki imajo to točko za krajišče. Očitno dobro barvanje grafa G , zoženo na podgraf H , določa dobro barvanje grafa H . Zato število barv, potrebnih za dobro barvanje grafa G , gotovo zadošča za dobro barvanje grafa H . Torej $\chi(G) \geq \chi(H)$.

Zdaj pa dokažimo izrek:

- a. Recimo, da je graf 2-pobarljiv in vsebuje kot podgraf kak lihi cikel H . Potem bi bil tudi H kot podgraf G 2-pobarljiv. To pa je v nasprotju s premislekom v nalogi 2.
- b. Naj bo zdaj G graf, ki vsebuje kakšen lihi cikel H . Iz naloge 2 vemo, da je $\chi(H) = 3$. Ker je H podgraf grafa G , pa mora biti $\chi(G) \geq \chi(H) = 3$.

Janez Žerovnik

PRESEKOVA NADLOGA

V tem šolskem letu bomo v Preseku uvedli novo rubriko — **Presekovo nadlogo**. V njej bi se radi (z vami) pogovarjali o matematiki; o tem, kaj da je matematika; kako jo vidimo in kako nam ona vrača poglede; s kakšnimi zvijačami se je vse lotevamo, ali pa se je na isti način tudi izogibamo in še in še. Da bi nam pogovor takšne vrste lažje stekel, si bomo za začetek v vsaki številki revije zastavili kak matematični problem.

Eden takšnih je že pred nami. Ideja zanj se mi je zrinila v glavo, ko sem pred meseci prinesel iz trgovine z otroškimi igračami tisto★

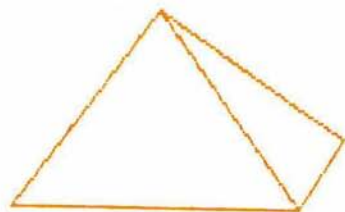
Vsekakor sedaj v uredništvu pričakujejo precej vaše pošte, kopico zapiskov o vaših matematičnih miselnih avanturah. Verjemite, Presekovi bralci, **prav sleherni** izmed vaših prispevkov bo dragocen. Nam — vsem. Saj nenazadnje — kontaktna rubrika pač ne more živeti samo od idej urednika!

Sicer pa bodi dovolj za uvod. Oglejmo si raje tokratno, prvo nadlogo.

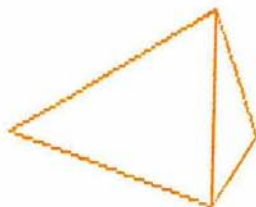
Beseda Egipt nas ponavadi najprej spomni na piramide. Kajti najbrž so prav piramide še zmeraj najrazličnejši simbol celotne egipčanske kulture.

V mislih imam tiste piramide, ki so nekoč, pred tisočletji, egipčanskim faraonom služile za njihove grobnice. Če bi jih morali opisati v natančnem jeziku matematike, bi najbrž rekli, da so Egipčani svojim faraonom gradili pravilne pokončne štiristrane piramide (slika 1).

Vendar pa — ljudje smo vseh sort in tudi najrazličnejših okusov. Egipčanski faraoni v tem pogledu niso mogli biti prav nikakršna izjema. In — le zakaj bi naj ne bilo v vsej tej dooolgi egipčanski zgodovini muhastega faraona, ki si je zaželel imeti grobnico v obliki pravilne enakorobne tristrane piramide? V obliki tetraedra torej, kakor bi tej reči nekaj stoletij za njim rekli stari Grki in kakor smo za Grki povzeli tudi mi, dandanašnji.



Slika 1



Slika 2

★ ... škatlico s sestavljenko za piramido — tetraeder.

Toda, ker so pravila le pravila, želje pa le želje, si je tak muhasti faraon z malce preveč domišljije smel zgraditi svoj tetraeder le v miniaturni obliki. Zgolj kot model.

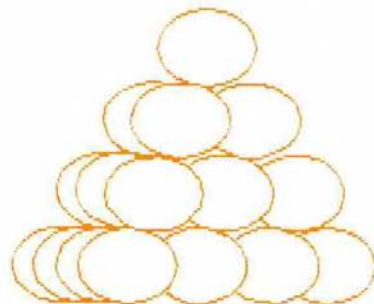
Tako je namesto težkih kamnitih kock vzel za sestavne dele raje majhne in lahkotne kroglice, dvajset jih je bilo. Najprej jih je zlepil skupaj dvakrat po štiri, v vrsto eno zraven druge. Zatem pa si je iz preostalih zlepil še dva "pravokotnika", v vsakem je bilo po šest kroglic. Natančno tako, kakor kaže risba (slika 3).

Faraon pa je bil premetene narave, zato mu je iz pravkar opisanih štirih delov prav nenavadno hitro uspelo sestaviti tetraeder! Na naslednji risbi ga vidiš. Na vsakem izmed robov tetraedra je prav dobro videti po štiri kroglice. Hmmmm, čudno ... saj problem sploh ni tako preprost! No, res pa je tudi, da si premetenega faraona ni težko izmisliti. Težje je sestaviti njegov tetraeder (slika 4).

Slika 3



Slika 4



Sedaj pa tisto — nadloga za bralce:

- 1) Sam si napravi opisano sestavljanke za faraonov tetraeder! Najbolje bo, če za to uporabiš žogice za namizni tenis. Gre pa seveda tudi z orehi, z obrezanimi plutovinastimi zamaški, s kroglicami iz papirja, s kamenčki ...
- 2) Sestavi faraonov tetraeder!
- 3) Opiši, kako si rešil prejšnji problem! Ali si ga zlomil (problem in ne tetraeder!) kar tako, z brezobzirnim poskušanjem, ali pa si se ga lotil raje s premislekom (potem, ko le ni in ni "ratalo")? Poskušaj opisati premislek!

- 4) Ali je dobljena pot k rešitvi edina, ali pa obstaja še kak drug recept za sestavljanje tetraedra?
- 5) Ali se da skonstruirati podobno sestavljenko tudi za tetraeder, ki ima le po tri kroglice na vsakem izmed svojih robov?
- 6) Predlagaj kar se le da zanimivo sestavljenko za tetraeder, ki bo imel po pet kroglic na vsakem izmed robov! Sestavljenka je zanimiva, če ima čim manjše število sestavnih delov, hkrati pa jih je še zmeraj dokaj težko sestaviti v tetraeder.
- 7) Postavi **kakršnokoli** zanimivo vprašanje v zvezi z opisanim problemom! Pri tem imej v mislih, da ni nujno, sploh ne, da znaš na svoje vprašanje tudi pravilno odgovoriti. (Recimo — mene še zmeraj muči vprašanje, *koliko je vseh različnih sestavljanek za faraonov tetraeder, ki vsebujejo točno štiri sestavne dele.*)

Takole. Nikakor ni nujno, da odgovoriš na prav vseh sedem vprašanj. Poskušaj jih razrešiti čim več. Pismo, ki se nam bo zdelo najkvalitetnejše in najbolj zanimivo, bomo nagradili. Morebiti ga bomo tudi objavili, vsekakor pavsaj pokomentirali.

Vilko Domajnko
risal Sandi Jakončič



ZAPOREDJE

88 → 64 → 24 → 8

Do tega zaporedja smo prišli takole: zapisali smo dvomestno število, zmnožili njegove cifre in produkt postavili na naslednje mesto zaporedja. S postopkom smo končali, ko je bil produkt enomestno število. Zapisano zaporedje ima 4 člene. Ali obstaja tako zaporedje s petimi členi, ki ima na zadnjem mestu prav tako število 8?

Darjo Felda

5. razred

1. Izračunaj na pamet $10^6 - (10^6 - (10^6 - 10^6 - (10^6 - 999999)))$.
2. Zapiši 1 000 000 000 kot produkt dveh števil v katerih ne bo ničle.
3. Na koliko delov delita ravnino dve premici na njej?
4. Kolikšna je prostornina kocke, če meri njena površina 24 cm^2 ?
5. Ali si že preživel 100 000 ur? Utemelji!

6. razred

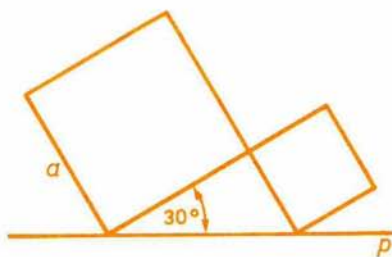
1. Določi vse delitelje števila 1989!
2. S pomočjo cifr 0, 1, 3, 4 in 5 zapiši vsa petmestna števila, ki so deljiva s 4. Cifre se ne smejo ponavljati!
3. Napiši najmanjše petmestno število z različnimi ciframi, ki je deljivo s 6.
4. Ulomka $\frac{69a4b}{72}$, $\frac{62c60}{56}$ predstavljata naravni števili. Kateri ulomek je večji? Črke a, b, c predstavljajo eno cifro.
5. Uredi po velikosti: $\frac{41}{77}$, $\frac{4141}{7777}$, $\frac{414141}{777777}$.
6. Število $1/2$ lahko zapišemo z vsemi desetišskimi ciframi. Poišči kakšen tak zapis!
7. Krogu s polmerom $r = 3 \text{ cm}$ očrtaj pravokotni trikotnik s kotom $\alpha = 30^\circ$.
8. Nariši izbočeni kot z vrhom V in točki A, B , ki ležita na različnih krakih. Določi točko M , ki je enako oddaljena od krakov in $MA = MT$.

7. razred

1. Reši enačbo $(-(-(-5))) - 8 - (-(-(-20) - (-(-x)))) = -5$
2. Izračunaj $\frac{3 + 4,2^2 : 0,1^2}{(1:0,3^3 - 36\frac{1}{27}) \cdot 0,589}$
3. Za koliko procentov se bo povečala ploščina kvadrata, če njegovo stranico a podaljšamo za 20%?
4. Delavec opravi $7/18$ dela v 35 urah. V kolikih urah bo opravil 60% dela?
5. V krog s polmerom r načrtaj štiri enake kroge tako, da se paroma dotikajo med seboj in da se dotikajo danega kroga.

8. razred

1. Izračunaj vrednost izraza $(x + y - 1)^2 + (x - y + 1)^2$, če je $x = \sqrt{53}$, $y = \sqrt{47} + 1$.
2. Vsota dveh števil je 120. Poišči števili, če je 40% enega števila enako 60% drugega števila.
3. Pokaži, da je za vsako naravno število n izraz $n^3 - n$ deljiv s 6.
4. Reši enačbi:
 - a) $3 \cdot (4 \cdot (5 \cdot (6x - 7) - 8) + 9) - 1 = 11$
 - b) $ax - a^2 = x - 1$
5. Kolikšna je dolžina pravokotne projekcije dveh kvadratov v ravnini, če je dana stranica večjega kvadrata a in naklonski kot 30° (slika).



6. Na obe strani višine enakostraničnega trikotnika s stranico $a = 4$ cm načrtaj enakostranični trikotnik, ki ima višino danega trikotnika za stranico. Izračunaj obseg nastalega sedemkotnika, ploščino skupne ploskve in najdaljšo diagonalo.

Pavle Zajc

KOLIKO JE BILA STARA PETRA ?

"Oče, koliko je stara mama?", vpraša Janezek očeta in nadaljuje: "Bojan pravi, da je starejša od njegove mame, toda meni se zdi mlajša!" "Tako je", se je strinjal njegov oče, "toda ne povej Bojanu, da sem to rekel!"

Oče je pomislil za trenutek in dejal: "Mamino starost lahko ugotoviš sam! Seštej obe cifri njenih let, jih pomnoži s starostjo tvoje mlajše sestre Petre in izvedel boš, kateri rojstni dan je praznovala mama lansko leto."

Janezek je torej lahko sam ugotovil, koliko je bila stara njegova mama, vi pa ugotovite še starost njegove sestre Petre, če veste, da ima vsaj 7 let.

Janez Aleš

TRI IZ STARE KITAJSKÉ

1. Ne veš, koliko je teh reči, ne.

Tri po tri jih zbiraš v kupe, pa dve ostaneta.

Pet po pet jih zbiraš, pa jih spet troje ostane.

Nazadnje jih zbiraš še sedem po sedem, pa ostaneta spet dve.

Povej, koliko je teh reči.

Avtor naloge je **Mojster Sun**, zapisal pa jo je v svoj *Mojstra Suna matematični priročnik* v 4. stoletju našega štetja. Reševalec naloge se naj ne zadovolji že z njeno prvo rešitvijo, poskuša naj poiskati pot do vseh rešitev.

Takole pa je nalogo zapisal Mojster Sun (slika 1).



Slika 1

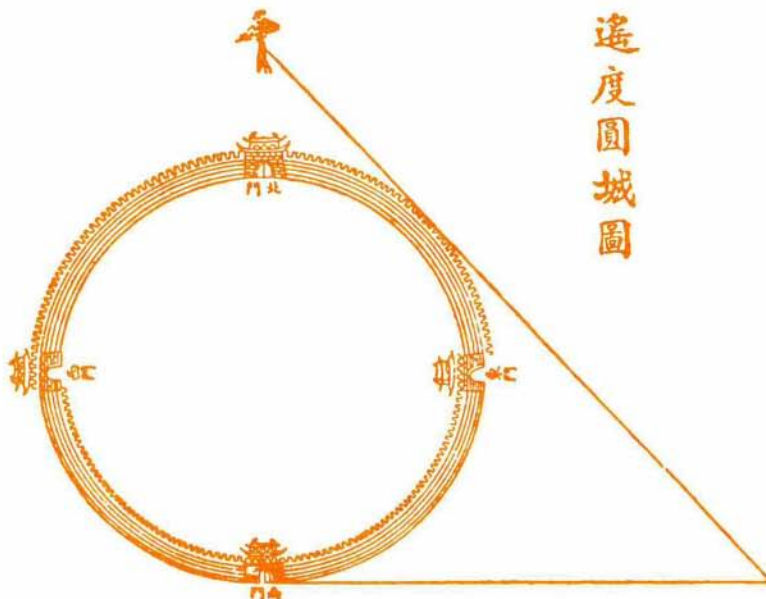
2. Zid je 12 čevljev visok. Deblo, prslonjeno obenj, je pri tleh za 5 čevljev odmaknjeno od zida. Vrh debela pa je poravnán z vrhom zida. Snega je na deblu za 4 palce na debelo. Pa je plast snega na deblu vendarle tanjša od one, ki leži na zemlji.

Ugotovi debelino snežne plasti na zemlji. (En čevljev je deset palcev.)



Slika 2

3. Mesto ima krožno obzidje, pa mu žal ne poznamo ne obsega in ne premera. Skozi obzidje vodi četvero vrat. Visoko drevo raste zunaj mesta, 3 lije daleč proti severu. Če mesto zapustimo pri južnih vratih in se odpravimo naravnost proti vzhodu, moramo 9 lijev daleč, preden izza obzidja zagledamo ono drevo. Izračunaj obseg in premer trdnjave. (1 li je približno 612 metrov.)



Slika 3

Qin Jiushao (beri: Čin Čiu—šao), eden najpomembnejših kitajskih matematikov, je v 13. stoletju nalogi zapisal v svojem *Matematičnem učbeniku v devetih poglavjih*.

Vilko Domajnko

LUNA

Oglišča trikotnika $\triangle ZLS$ naj bodo po vrsti središče Zemlje, Lune in Sonca. Kolikšen del Lunine površine vidimo z Zemlje, če je kot $\sphericalangle ZLS = 108^\circ$?

Darjo Felda

RAZVEDRILO

KRIŽANKA "SLOVENSKI MATEMATIKI"

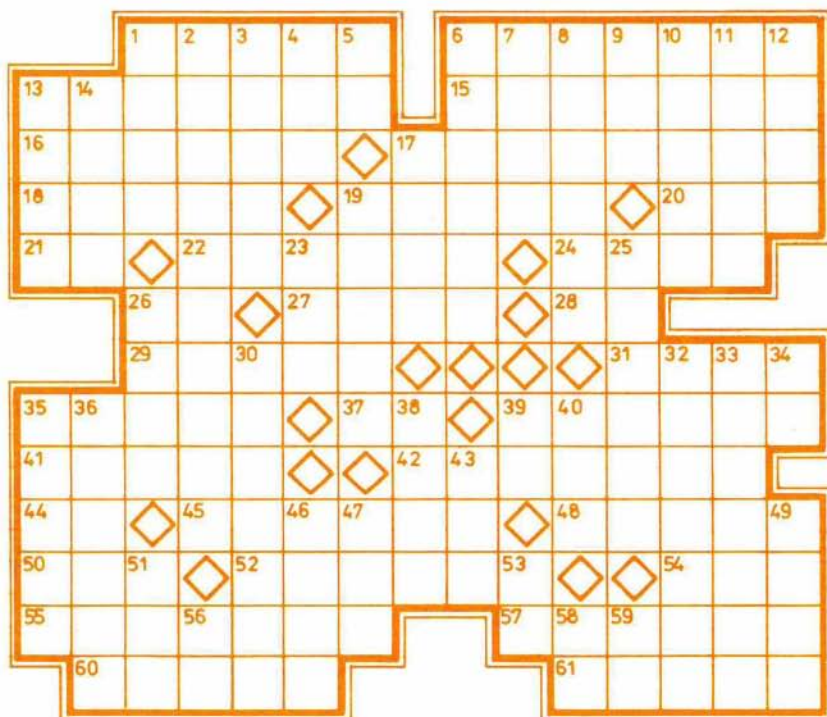
V križanko so uvrščena imena desetih slovenskih matematikov, od že davno pokojnih do sodobnikov!

Vodoravno:

1. sl. matematik, član SAZU, obravnava teorijo diferencialnih enačb, funkcijsko analizo in njeno uporabo (Ivan, rojen 1918)
6. sl. matematik, pisec srednješolskih učbenikov v avstro-ogrski monarhiji (Franc, 1853–1919)
13. sl. matematik, član SAZU, glavni vzgojitelj naših sodobnih matematikov (Josip, 1873–1967)
15. ime dveh celin na zahodni zemljepisni polobli
16. nekdanji ameriški republikanski politik, zunanji minister v letih 1969–73 (William)
17. sodobni slovenski matematik, dela o funkcijski analizi (France, rojen 1929)
18. ime že pokojnega slovenskega igralca Severja,
19. bolezenska oteklina na vratu zaradi povečane ščitnice
20. oče
21. avtomobilska oznaka Torina
22. svet, ki nas obdaja in vpliva na razvoj osebnosti
24. delo norveškega dramatika Ibsena
26. oznaka Kraljeva
27. drugo ime za Tajsko
28. kratica francoske letalske družbe
29. zaboj za umrlega, krsta
31. največji naftni koncern na svetu
35. fina, mehka in bleščeča se tkanina
37. igralna karta z enim samim znakom
39. sl. matematik in astronom, ki je poučeval na dunajski univerzi in bil tudi njen rektor (Andrej, 1490–1551)
41. um, razum
42. redkejšo moško ime
44. začetnici slovenskega kiparja Dolinarja
45. bogoslužju namenjena zgradba v krščanstvu
48. velik hrvaški književnik (Vladimir)
50. ime ruske balerine Pavlove
52. pomožni duhovnik v protestantski cerkvi
54. Adamova žena po bibliji
55. sl. matematik, dela iz diferencialne geometrije in teorije analitičnih funkcij (Anton, 1899–1987)
57. sl. matematik, pisec matematičnih učbenikov v avstro-ogrski monarhiji (Franc, 1853–1919)
60. stara rimska utežna mera (327, 45 grama)
61. črta brez pravega pomena, čačka

Navpično:

1. sl. matematik, svetovno znani avtor logaritamskih tabel (Jurij, 1754–1802)
2. število pod ulomkovo črto
3. ameriška filmska igralka (Bo)
4. rodoviten danski otok v Malem Beltu
5. začetnici slovenske pesnice Jerajeve
6. revna črnska četrt v New Yorku
7. mesto v srednji Dalmaciji ob izlivu Cetine
8. gost kompot iz zmečkanega sadja
9. daljše časovno obdobje, vek
10. star avstrijski kovanec, sprva srebrn, kasneje bakren
11. japonsko пристаниšče na otoku Honšu
12. levi pritok Kamniške Bistrice pri Domžalah
13. izrastek na roki in nogi
14. popularna igra na srečo z žrebanjem številok
17. pregrajena spalnica na ladji
19. nizko razvita rastlina, trosovka
23. Aristofanova komedija; tudi čebelam podobne žuželke

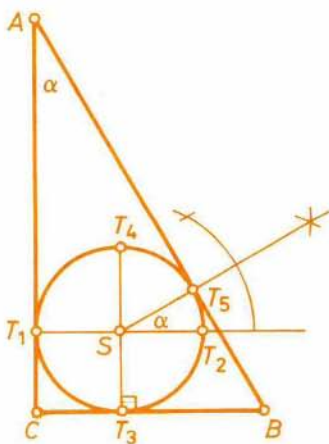


5. razred

- 1
- $1\,000\,000\,000 = 10^9 = (2.5)^9 = 2^9 \cdot 5^9 = 512 \cdot 1953125$
- 3 ali 4
- $V = 8\text{ cm}^3$
- 100 000 ur je 11 let (3 prestopna), 148 dni in 8 ur.

6. razred

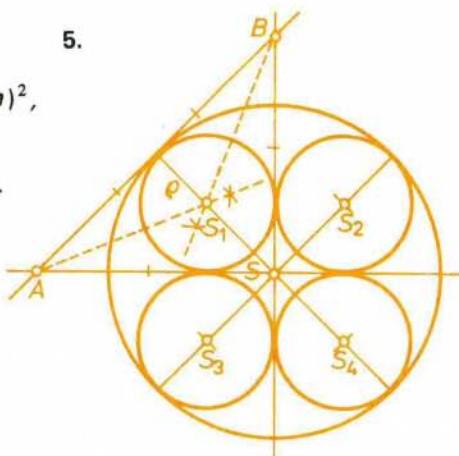
- Delitelji so: 1, 3, 9, 13, 17, 39, 51, 117, 153, 221, 663, 1989
 - | | | |
|-------|-------|-------|
| 13540 | 15304 | 35104 |
| 13504 | 15340 | 35140 |
| 31540 | 51304 | 53104 |
| 31504 | 51340 | 53140 |
 - 10236
 - Števce 69a4b mora biti deljiv z 72 oziroma z 8 in 9. Zadoščata števili 69048 in 69840.
 - Števce 62c60 mora biti deljiv s 56 oziroma s 7 in 8, zadošča le številu 62160.
 - $62160/56 = 1110, \quad 69840/72 = 970$
 - Ulomki so medseboj enaki. Ulomka $4141/7777$, $414141/777777$ sta razširitvi ulomka $41/77$ s 101 in 10101.
 - $1/2 = 3485/6970 = 1485/2970$
 - Najprej načrtamo pravokotno ležeča premera T_1T_2 in T_3T_4 . Nato načrtamo kot 30° z vrhom v S in enim krakom v smeri daljice ST_2 . Drugi krak preseče krožnico v točki T_5 . Odseki tangent v točkah T_1, T_3, T_5 tvorijo stranice iskanega trikotnika.
 - Točka M je presečišče simetrale daljice AB in simetrale kota.
-



7. razred

1. $x = 12$
2. 3000
3. $p = a^2$, $a_1 = \frac{5}{4}a$, $p_1 = (\frac{5}{4}a)^2$,
 $p_1 - p = \frac{9}{16}a^2 = 56,25\%a^2$
4. Delo bo opravljeno v 54 urah.

5.



8. razred

1. 200
2. Označimo prvo število z x_1 , drugo z x_2

$$x_1 + x_2 = 120 \Rightarrow x_2 = 120 - x_1$$

$$40\% x_1 = 60\%(120 - x_1)$$

$$x_1 = 72, \quad x_2 = 48$$

Iskani števili sta 72 in 48.

3. $n^3 - n = n(n^2 - 1) = n(n+1)(n-1) = (n-1)n(n+1)$ je produkt treh zaporednih naravnih števil, ki je deljiv z 2 in s 3. Zato tudi s 6.
4. a) $x = 17/12$
 b) $ax - a^2 = x - 1$
 $(a-1)x = a^2 - 1$
 Če je $a-1 \neq 0$, je rešitev enačbe $x = a+1$.
 Če je $a=1$, sledi $0 \cdot x = 0$. Enačba je identiteta.

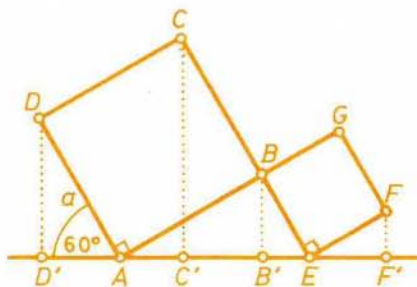
5. $D'F' = D'A + AB' + B'E + EF'$

$$D'A = a/2, AB' = (a\sqrt{3})/2$$

$$B'E = (a\sqrt{3})/6, EF' = a/2$$

$$D'F' = \frac{a}{2} + \frac{a\sqrt{3}}{2} + \frac{a\sqrt{3}}{6} + \frac{a}{2}$$

$$D'F' = a(1 + \frac{2}{3}\sqrt{3})$$



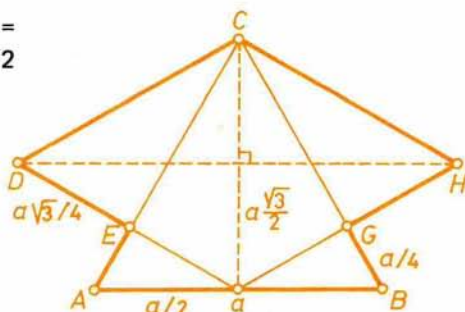
6. $AB = a$
 $AB = BG = a/4$, $ED = GH =$
 $= (a\sqrt{3})/4$, $DC = HC = (a\sqrt{3})/2$

a) $o = a + 2 \cdot \frac{a}{4} + 2 \cdot \frac{a\sqrt{3}}{2}$

$$o = a \cdot \frac{3(1+\sqrt{3})}{2}$$

b) $p = \frac{7a^2\sqrt{3}}{16}$

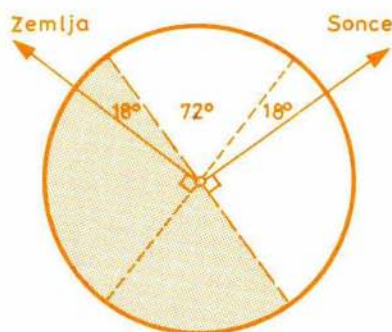
c) $DH = \frac{3a}{2}$



Pavle Zajc

LUNA — Rešitev s str. 55

Narišimo si krog skozi središče Lune in smeri poti proti Zemlji in Soncu (ki tvorita kot 108°). Če postavimo premer pravokotno na smer proti Soncu, ta razdeli krožnico na osvetljeno in temno polovico. Premer, postavljen pravokotno na smer proti Zemlji, pa odreže 72° osvetljene polovice, kar pomeni, da lahko z Zemlje vidimo petino Lunine površine.



TRIKOTNIKI — Rešitev s str. 11

Naj bodo stranice trikotnikov dolge a , b in c , kjer so a , b in c različna cela števila z vsoto 20. Da ne bi iskali med seboj skladnih trikotnikov, privzemimo $a < b < c$, ne smemo pa pozabiti na trikotniško neenakost $a + b > c$. Z malo poskušanja pridemo do štirih rešitev: (3, 8, 9), (4, 7, 9), (5, 6, 9) in (5, 7, 8).

Darjo Felda

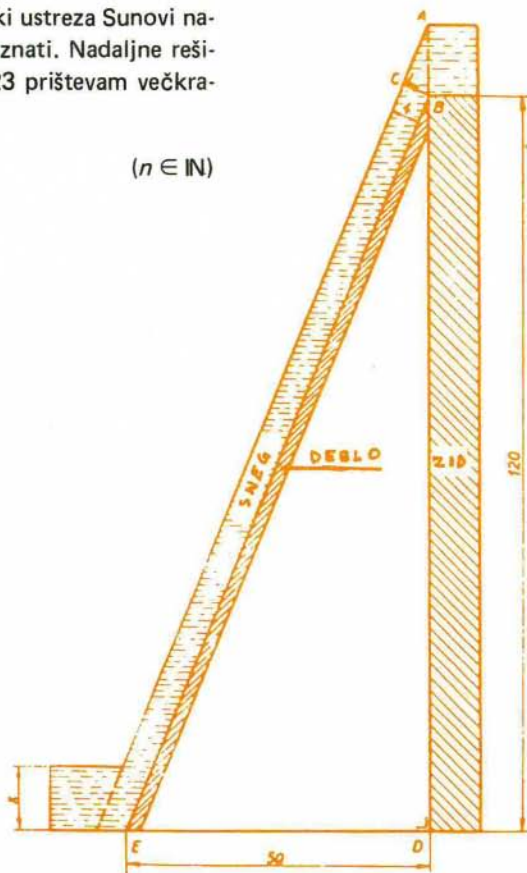
TRI IZ STARE KITAJJSKE – Rešitve s str. 54

1. 23 je najmanjše število, ki ustreza Sunovi nalogi, tega zares ni težko spoznati. Nadaljne rešitve dobim tako, da številu 23 prištevam večkratnike števila 3·5·7. Torej

$$23 + n \cdot 105 \quad (n \in \mathbb{N})$$

2. Trikotnika ACB in BDE sta podobna in torej velja $\overline{AB} / \overline{BE} = \overline{BC} / \overline{DE}$. Debelino snežne plasti na zemlji sedaj takole izračunam

$$x = \overline{AB} = \frac{\overline{BC} \cdot \overline{BE}}{\overline{DE}} = \frac{\overline{BC} \cdot \sqrt{\overline{BD}^2 + \overline{DE}^2}}{\overline{DE}} = 10.4 \text{ palcev}$$



Slika 4

3. Poglejmo sliko 5. Trikotnika ABC in ADO sta podobna, zato velja

$$\frac{\overline{AC}}{\overline{BA}} = \frac{\overline{AO}}{\overline{DA}} \quad \text{ozima} \quad \frac{\sqrt{(x+a)^2 + b^2}}{x+a} = \frac{\frac{x}{2} + a}{\sqrt{a(x+a)}}$$

Dolžina *DA* "pade" po pravilu o šopu premic, presekanem s krožnico. Z nekoliko spretnosti enačbo preuredimo v

UREDNIŠKI ODBOR: Vladimir Batagelj, Tanja Bečan (jezikovni pregled), Dušica Boben (pisma bralcev, stavljenje teksta), Vilko Domajnko, Darjo Felda (tekmovanja iz matematike), Bojan Golli (tekmovanja iz fizike), Marjan Hribar, Sandi Klavžar (računalništvo), Damjan Kobal (razvedrilo), Jože Kotnik, Edvard Kramar, Peter Križan, Boris Lavrič (matematika, odgovorni urednik), Matija Lokar, Bojan Mohar (glavni urednik), Franci Oblak, Peter Petek, Pavla Ranzinger (astronomija), Marjan Smerke (svetovalec za fotografijo), Miha Štalec (risbe), Ciril Velkoverh (urednik, nove knjige, novice), Marija Vencelj.

Dopise pošiljajte in list naročajte na naslov: Društvo matematikov, fizikov in astronomov SRS — Podružnica Ljubljana — Komisija za tisk, Presek, Jadranska c. 19, 61111 Ljubljana, p.p. 64, tel. (061) 265—061/53, št. žiro računa 50101—678—47233. Naročnina za šolsko leto 1989/90 vplačana do 1. 11. 1989, je za posamezne naročnike 100.000.— din, za skupinska naročila šol 80.000.— din, posamezna številka 25.000.— din (20.000.— din).

List sofinancirata Izobraževalna in Raziskovalna skupnost Slovenije
Ofset tisk Časopisno in grafično podjetje DELO, Ljubljana
© 1989 Društvo matematikov, fizikov in astronomov SRS — 966

ISSN 0351—6652

KOMISIJA ZA TISK DMFA SRS

61111 Ljubljana, pp 64

Jadranska c. 19, tel. (061) 265—061

NAROČILNICA

Za šolsko leto 1989/90 naročamo izvodov PRESEKA — lista za mlade matematike, fizike, astronome in računalnikarje po ceni za posameznike 100.000.—din in za skupinska naročila na šolah 80.000.— din.

Šola

Priimek in ime

Naslov (ulica, hišna številka, številka pošte in kraj)

Naročnino bomo poravnali do 1. 11. 1989. (Kasneje nakazane naročnine bodo mnogo višje.)

Datum

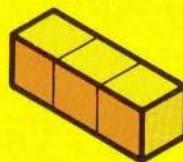
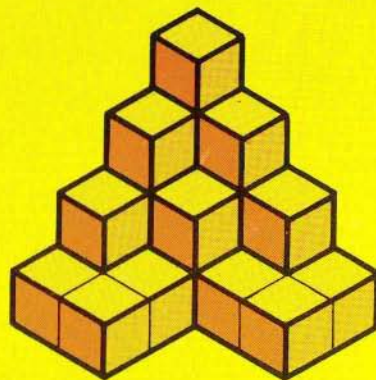
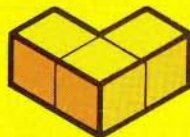
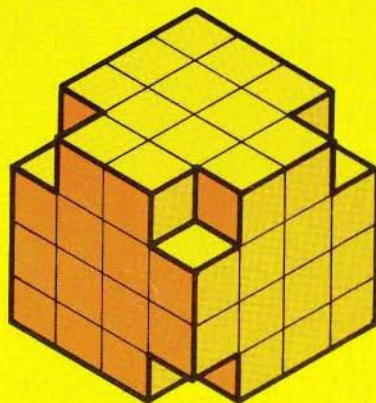
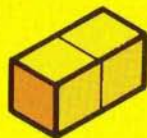
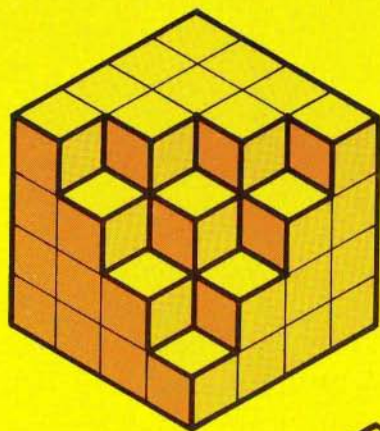
Žig in podpis

VSEBINA

UVODNIK	(Boris Lavrič)	I
MATEMATIKA	Arhimed (Peter Legiša)	2
	Arhimedov nagrobni spomenik (Marija Vencelj)	6
	Pitagorov izrek pred Pitagorom (Milena Strnad)	8
ASTRONOMIJA	Kulminacija (Marian Prosen)	12
RAČUNALNIŠTVO	Problem barvanja točk grafa — Rešitev str. 48 (Janez Žerovnik)	17
FIZIKA	Slavolok zidakov (Božidar Casar)	22
	Glej, mavrica! 1.del. Ples in razcvet sončnega žarka v dežni kapljici (Marija Vencelj)	24
NOVE KNJIGE	Gerlič I., Prvi koraki v logo (Matija Lokar)	31
	Naloge na tekmovanjih iz fizike v osnovni šoli, Zbrali in uredili F. Plevnik, Z. Bradač, M. Cvahte (Bojan Golli)	31
RAZVEDRILO	Priročniki za srednje in osnovne šole (Ciril Velkovich)	39
	Slikovna križanka (Marko Bokalič)	32
	O tem, kako se gnečo izmisli (Vilko Domajnko)	34
	Presek med bankirji (Dušan Modic)	40
	Križanka "Slovenski matematiki" (Marko Bokalič)	56
TEKMOVANJA	19. mednarodna fizikalna olimpiada (Andrej Vilfan)	44
NALOGE	Uganki (Vilko Domajnko)	7
	Trikotniki — Rešitev str. 61 (Darjo Felda)	11
	Kornet, Enakost (Boris Lavrič)	16
	Presekova nadloga (Vilko Domajnko)	49
	Zaporedja (Darjo Felda)	51
	Nekaj nalog za osnovnošolce — Rešitve str. 59 (Pavle Zajc)	52
	Koliko je bila stara Petra? — Rešitev str. 63 (Janez Aleš)	53
	Tri iz stare Kitajske — Rešitve str. 62 (Vilko Domajnko)	54
	Luna — Rešitev str. 61 (Darjo Felda)	55
	Nagradne kocke (Boris Lavrič)	IV
	Slikovna križanka — Z logiko v leto 2000 — Rešitve iz PXVI/5 (Marko Bokalič)	58
NA OVITKU	Mavrica na Vipavskem. Slika k članku na str. 24 (Foto Ivo Kobal)	I
	Ilustracija sodobnega sovjetskega matematika A. T. Fomenka	II

NAGRADNE

KOCKE



Je mogoče le iz enakih zidakov (ene od gornjih treh oblik) zgraditi katero od teles na sliki? Kaj pa dopolniti levo ali desno telo do najmanjše mogoče kocke? In če so za dopolnjevanje levega telesa na voljo vse tri vrste zidakov?

Boris Lavrič