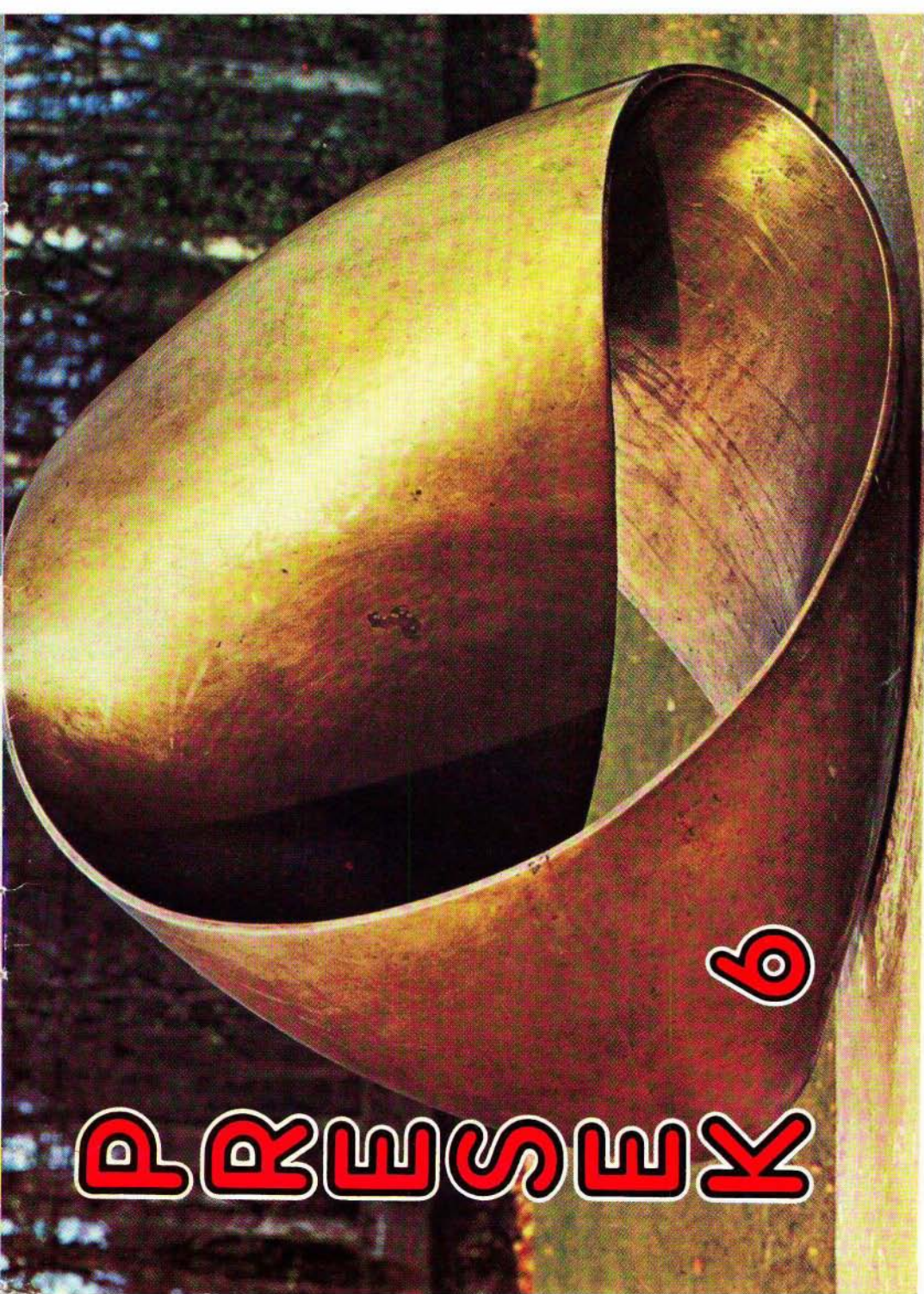




୨
କାମାକ୍ଷୀ

VSEBINA

MATEMATIKA	Möbiusov trak (Milena Strnad)	321
	Kako narisati letalsko krilo? (Janez Aleš)	328
	Zakaj so antene parabolične? (Janez Strnad)	334
FIZIKA	Astronomski daljnogled (Janez Strnad)	338
RAČUNALNIŠTVO	K nalogam s 3. republiškega tekmovanja osnovnošolcev iz računalništva (Sandi Klavžar)	343
ASTRONOMIJA	Astronomski daljnogled z vrtečim se kapljevinskim zrcalom (Janez Strnad)	350
TEKMOVANJA	3. republiško tekmovanje iz logike — Rešitve nalog str. 376 (Izidor Hafner, Nežka Mramor—Kosta)	352
NOVICE	Astronomski tabor Javornik 89 — vabilo	333
	Poletna šola Tržič (Jože Kotnik)	360
	Poletna šola mladih fizikov (Nada Razpet)	362
NALOGE	Dve iracionalni — Rešitev str. 349 (Boris Lavrič)	326
	Tri sestre (Janez Aleš)	327
	Matematični krožek — Rešitev str. 380 (Boris Lavrič)	342
	Kokosovi orehi in poštena opica (Marija Vencelj)	348
	Trikrat o neki nalogi — Rešitev str. 371 (Božidar Casar)	351
	Deževne kapljice (Jože Kotnik)	370
RAZVEDRILO	"Nova tehnika v astronomiji"	333
	Slikovna križanka "Z logiko v leto 2000" — Rešitev iz P-5 (Marjan Škvorc)	337
	Anekdota — Edison	364
	Saj ni res, pa je (Dušica Boben)	379
REŠITVE NALOG	Uravnoteženi dodekaeder — Rešitev iz P-2, str. 75 (Vilko Domajnko)	348
	Prelivanje — Rešitev iz P-4, str. 223 (Boris Lavrič)	359
	Predračun tiskarne — Rešitev iz P-1, str. 3 (Ciril Velkovrh)	361
	Nagradno pokrivanje — Rešitev iz P-4, str. 209 (Boris Lavrič)	365
	Ulomek z najdaljšo periodo — Odgovor iz P-2, str. 105 (Matija Lokar)	366
	Težišča in trije računi — Rešitev iz P-5, str. 281 (Boris Lavrič)	374
	Premisli in reši — Kvadrat in sedem točk — Rešitev iz P-4, str. 222 (Boris Lavrič)	375
NA OVITKU	M. Bill, <i>Neskončna ploskev</i> (1953–1956), Antwerpen, Belgija Muzej kipov na prostem (Slika 1, članek str. 321)	I
	"Kjer tišina šepeta" — Elanovo jadralno letalo — glej članek na strani 328 (Slika zgoraj)	IV
	Večzrcalni daljnogled (glej članek na str. 388) (slika spodaj)	IV

MÖBIUSOV TRAK

Samoumevno se nam zdi, da uporabljamo matematiko pri reševanju številnih problemov z naravoslovnih in tehničnih področij. Prav tako nam je domača izjava številnih umetnikov: "O, matematika, z njo sem v sporu že od šolskih let!" Redkeje pomislimo na možnost, da matematična spoznanja lahko uporabijo tudi umetniki, na primer slikarji, kiparji, glasbeniki in celo pisatelji. Še redkeje se primeri, da prideta do istega odkritja matematik in umetnik neodvisno drug od drugega. Prav to se je dogodilo z Möbiusovim trakom.

Švicarski kipar Max Bill je leta 1935 v prizadevanju, da ustvari dovršeno umetnino, naredil kip z naslovom *Enostranski trak* (slika 1). Spoznanje, da je njegovo "odkritje" le umetniški prikaz matematikom že sto let znanega Möbiusovega traku, je umetnika možno prizadelo. Za več kot štiri desetletja je opustil nadaljnja umetniška iskanja v tej smeri. Njegova vrnitev k proučevanju Möbiusovega traku po letu 1979 je bila sicer uspešna — ustvaril je več kipov velike umetniške vrednosti — vendar ni mogel prikriti razočaranja: "Čeprav nisem iznašel Möbiusovega traku, je bil študij tega matematičnega fenomena zame velikega pomena. V tej ploskvi sem našel svoj filozofski pogled na simbol neskončnosti."

Kaj je pravzaprav Möbiusov trak?

To je zelo zanimiva ploskev, ki ima eno samo stran, njen rob pa je sklenjena krivulja. Tri leta pred smrtjo, leta 1865, jo je našel nemški matematik in astronom August Ferdinand Möbius. S proučevanjem njenih lastnosti se ukvarja najmlajša veja geometrije — *topologija*. Topologija temelji na pojmu zveznosti in gradi na abstraktnih matematičnih pojmih. Že po tem se razlikuje od nazornih, starejših vej geometrije.

Möbiusov trak dobimo, če daljši trak pravokotne oblike z oglišči A , B , C in D najprej zvijemo, nato zlepimo oglišči A in D ter B in C . Če traku ne bi zvil, preden ga zlepimo, in bi zlepili kar oglišči A in B ter C in D , bi dobili krožni obroč (slika 2).

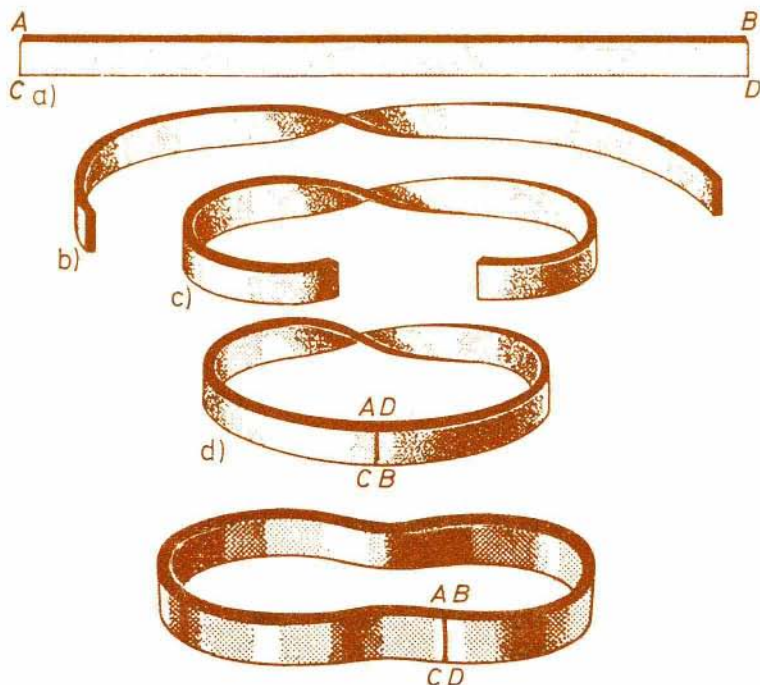
Premislimo trditev, da ima Möbiusov trak le eno stran. To pomeni, da s poljubne točke Möbiusovega traku lahko pri vzdolžnem potovanju po njem prispemo do točke na "drugi strani" traku, ne da bi prestopili njegov rob. Zato Möbiusovega traku ne moremo obarvati z dvema barvama, kar lahko naredimo

Slika 1. *Enostranski trak* M. Billa (1947/48) (glej prvo stran ovitka)

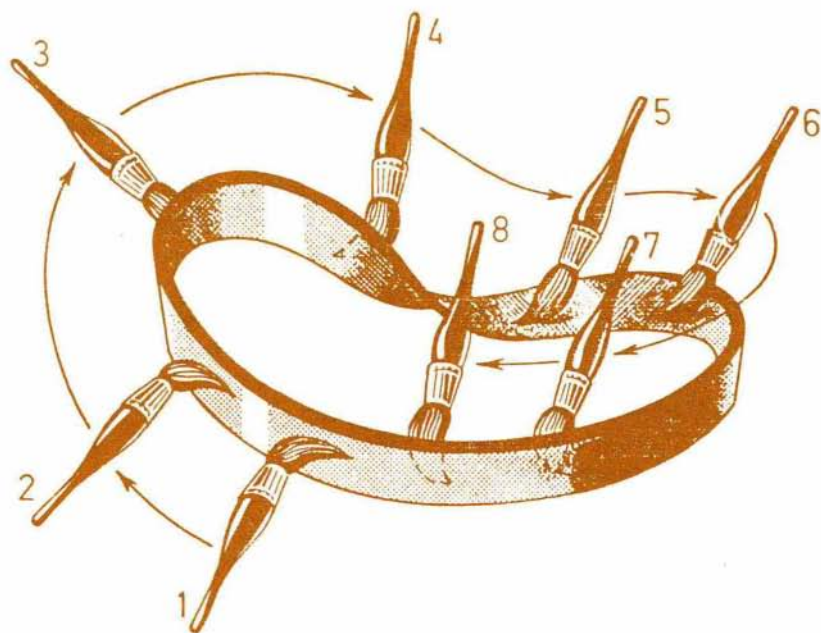
s krožnim obročem. Temu lahko obarvamo notranjost z eno barvo zunanost pa z drugo. Nasprotno pa Möbiusov trak lahko obarvamo le z eno barvo, in to pri dvakratnem obhodu čopiča (slika 3).

Möbiusov trak z matematičnega stališča nima debeline, zato njegovo lastnost, da ima eno samo stran, bolje kot z barvanjem pojasnimo z vektorji. V vsaki točki Möbiusovega traku si lahko predstavljamo dva nasprotno usmerjena vektorja, ki sta pravokotna na trak in določata normalni. Izberimo normalo v neki točki, ki leži na sredini traku, in si mislimo, da se giblje po krožnici, vzporedni z robom. Ko naredi točka en obhod in se vrne v začetno lego, ima normala nasprotno smer. Šele po drugem obhodu ima normala v začetni točki tudi začetno smer (slika 4). Tako ploskev, na kateri lahko najdemo zvezno pot z začetkom in koncem v isti točki, vzdolž katere se smer normale obrne, imenujemo enostransko ploskev.

Rob Möbiusovega traku zato lahko z zvezno elastično deformacijo preoblikujemo v krožnico. Če pa bi hoteli rob Möbiusovega traku zalepiti na krožno

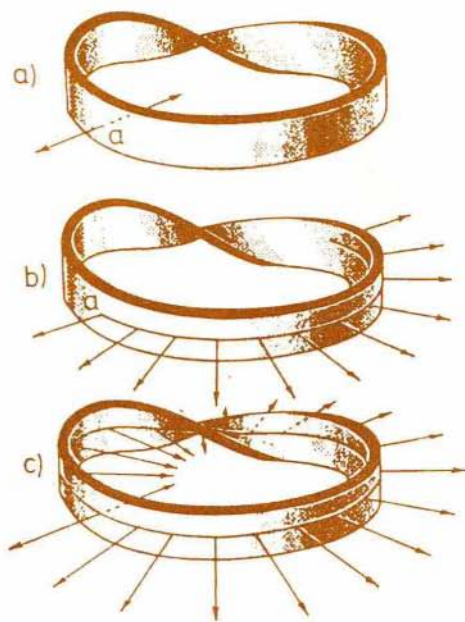


Slika 2. Z lepljenjem dobimo Möbiusov trak (levo) ali krožni obroč (desno).



Slika 3. "Barvanje" Möbiusovega traku

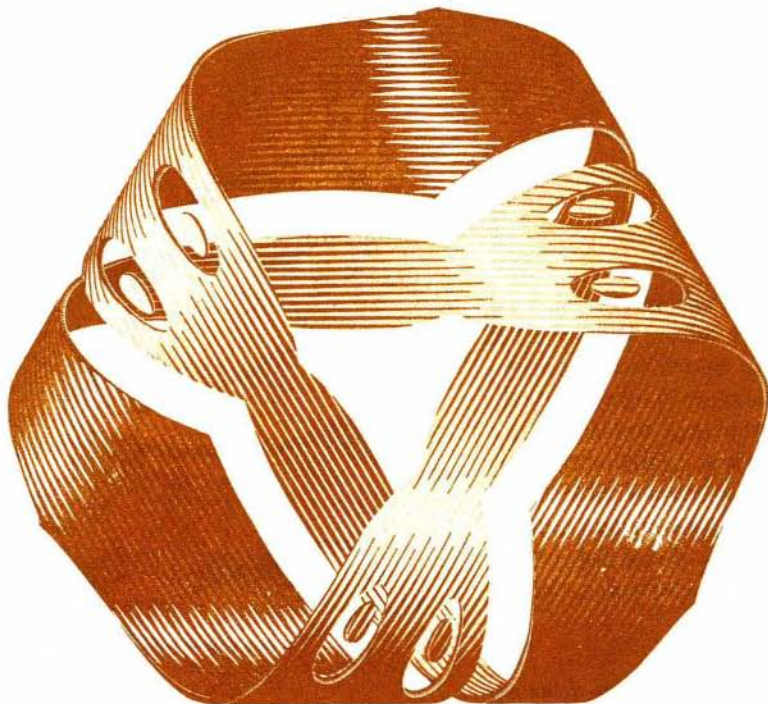
odprtino ne neki ploskvi, bi naleteli na težave. Möbiusov trak bi v ta namen morali deformirati tako, da bi njegov rob ležal v prostoru kot običajna krožnica, ves trak pa bi bil pri tem na eni strani ravnine te krožnice. To pa v trirazsežnem prostoru ni mogoče, če ne dopuščamo, da ploskev seka samo sebe.



Slika 4. Spreminjanje orientacije normalnega vektorja pri "potovanju" po Möbiusovem traku.

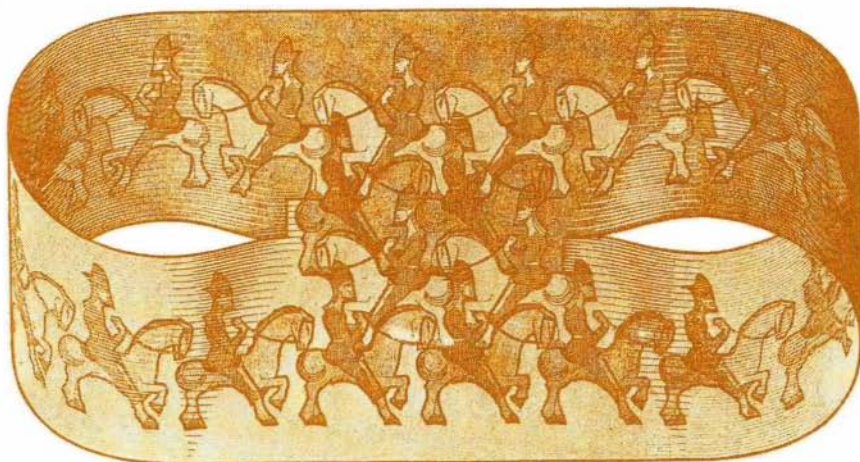
Posebnost Möbiusovega traku vidimo tudi, če ga poskušamo prerezati po njegovi dolžini na dva enaka dela. Če bi tako prerezali po sredini krožni obroč, bi dobili dva enaka, ločena krožna obroča, podobna prvotnemu. Če bi poskus ponovili z Möbiusovim trakom, bi po rezanju dobili le en povezan, dvakrat zasukan in daljši trak, ki bi imel dva robova in dve različni strani: "notranjo" in "zunanjo". Če pa bi Möbiusov trak prerezali po dolžini na tretjini širine, bi dobili dva prepletajoča se trakova. Eden od njiju bi bil pravi Möbiusov trak, drugi pa dvostranski trak z dvema polovičnima zasukoma.

Posebnosti Möbiusovega traku so navdihnile tudi več del nizozemskega umetnika Mauritsusa C. Escherja. Rezanje je upodobil z dvema prepletajočima se kačama, ki prehajata druga v drugo in izhajata druga iz druge (slika 5), enostranskost pa z neskončno četo konjenikov (slika 6) in z mravljami (slika 7). Za razliko od M. Billa je Escher zvedel za Möbiusov trak od svojih matematičnih prijateljev. Sicer pa tega umetnika poznamo zlasti po njegovih študijah, kako s podobnimi figurami popolnoma prekriti vso ploskev (slika 8). Ali je



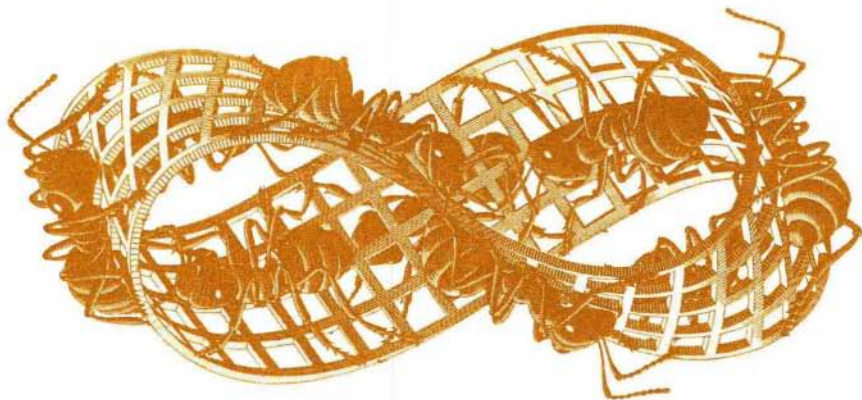
Slika 5. Prepletajoči se kači M.C. Escherja z naslovom *Möbiusov trak I* (1961)

Slika 6. *Konjeniki* M. C. Escherja (1964)

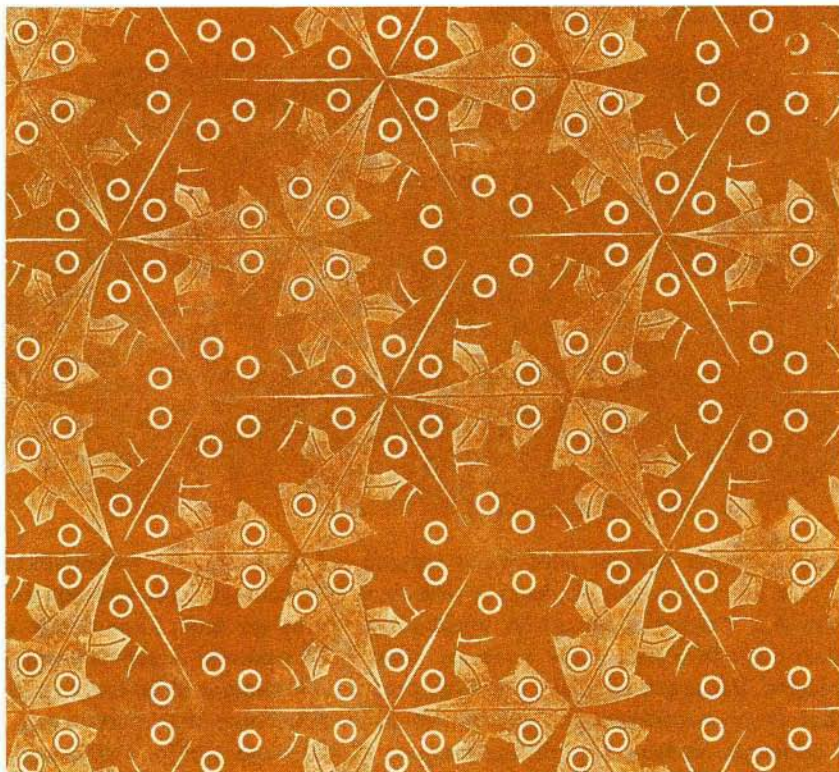


tokrat umetnik nakazal področje, s katerim naj bi se ukvarjali matematiki?

Ob koncu povejmo še, kako je posebnost Möbiusovega traku uporabil pisatelj A.J. Duetsch v fantastični zgodbi *Kam gremo od tod?*, ki se dogaja v mreži bostonske podzemne železnice. Vlak št. 86 s potniki odpelje s postaje in izgine. Vsi ga zaman iščejo, čeprav ga posamezniki večkrat slišijo nad ali pod seboj. Problem nenavadnega izginotja reši harvardski matematik Roger Tupelo, ki obupanim vodjem železniškega prometa razloži svojo teorijo. Ker je podzemna železnica zelo kompleksna, je čisto mogoče, da je postala del enostan-



Slika 7. *Möbiusov trak II* M. C. Escherja (1963)



Slika 8. Prekritje ravnine z živalmi M. C. Escherja.

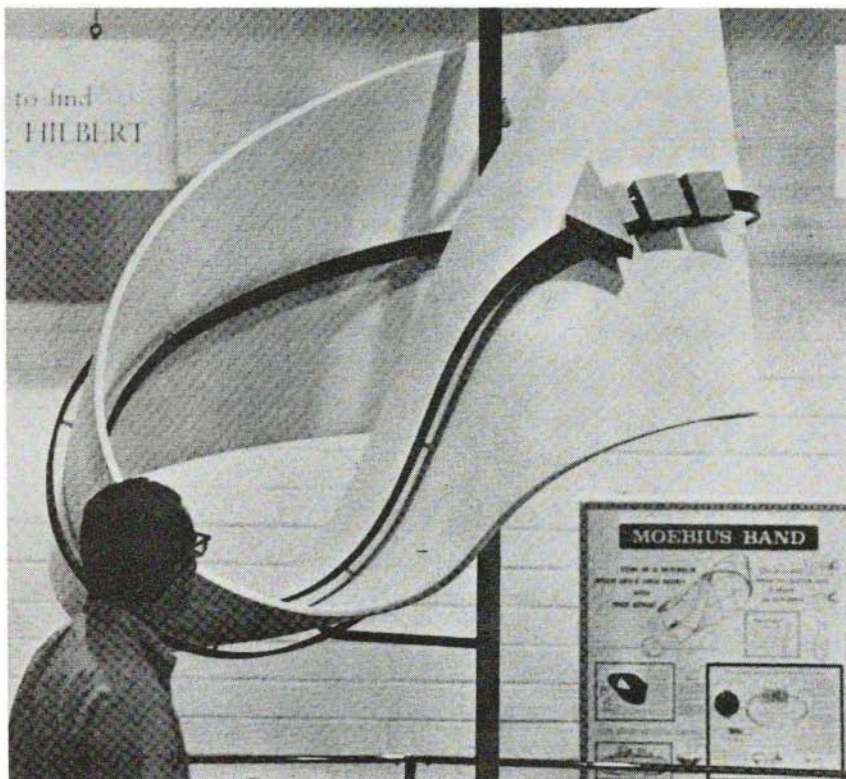
DVE IRACIONALNI

1. Dokaži ali ovrzi naslednjo trditev:

Če je a racionalno število, ki pa ni celo, potem število 10^a ni racionalno.

2. Dokaži, da za noben $n \in \mathbb{N}$ število $\sqrt{n + \sqrt{n + \sqrt{n}}}$ ni racionalno.

Boris Lavrič



Slika 9. Möbiusova "železnica".

ske ploskve, torej ima obliko Möbiusovega traku. Zato je vlak izginil. Vse, kar lahko naredijo je le, da čakajo, da bo vlak dvakrat obvozil vso progo. In res! Po tednu dni se vlak spet prikaže z zdravimi, a hudo prestrašenimi in utrujenimi potniki (slika 9).

Milena Strnad

TRI SESTRE

Barbara, Mojca in Jana so sestre. Barbara je toliko mlajša od ene, kolikor je starejša od druge sestre. Mojca je sedem let mlajša od dvakratne Janine starosti. Jana je pet let starejša od polovice let ene njenih sester.

Koliko je torej stara Mojca?

Janez Aleš

Mojca je stara 19 let.

327

KAKO NARISATI LETALSKO KRILO ?

Ste se že kdaj vprašali, kako bi narisali profil letalskega krila ? Ali pa ste se celo srečali s podobno nalogo ? Tisti med vami, ki so se s takim risanjem že sprijeli, vedo, da to ni tako enostavno! Na srečo pa si lahko pomagamo z računalnikom, vendar potrebujemo nekaj matematičnega predznanja. V ta namen si oglejmo transformacijo *Žukovskega*, ki spada med poglavja *kompleksne analize*. Mi si jo bomo ogledali kot preslikavo ravnine na ravnino, ki priredi vrednosti po naslednjem predpisu

$$\Phi : \mathcal{R} \times \mathcal{R} \longrightarrow \mathcal{R} \times \mathcal{R}$$

$$\Phi : (x, y) \longrightarrow (u(x, y), v(x, y))$$

Tu sta u in v funkciji

$$u(x, y) = \frac{Kx}{2} \left[1 + \frac{1}{x^2 + y^2} \right] \quad (1)$$

$$v(x, y) = \frac{Ky}{2} \left[1 - \frac{1}{x^2 + y^2} \right] \quad (2)$$

in K pozitivna realna konstanta.

Oglejmo si kam se s preslikavo Φ preslika *družina krožnic* s središčem v točki $(0, 0)$ in radijem r . Enačba družine se v kartezičnih koordinatah glasi

$$x^2 + y^2 = r^2 \quad (3)$$

Enačbi (1) in (2) kvadriramo in delimo tako, da dobimo naslednjo obliko

$$\frac{u^2}{\frac{K^2}{4} \left(1 + \frac{1}{x^2 + y^2} \right)^2} = x^2 \quad (4)$$

$$\frac{v^2}{\frac{K^2}{4} \left(1 - \frac{1}{x^2 + y^2} \right)^2} = y^2 \quad (5)$$

Enačbi (4) in (5) seštejemo, v dobljeno enakost vstavimo enačbo (3), delimo z r^2 in takoj prepoznamo enačbo *elipse* v kanonski obliki.

$$\frac{u^2}{\frac{K^2}{4} \left(r + \frac{1}{r} \right)^2} + \frac{v^2}{\frac{K^2}{4} \left(r - \frac{1}{r} \right)^2} = 1 \quad (6)$$

Polosi sta

$$a = \frac{K}{2} \left[r + \frac{1}{r} \right] \quad (7)$$

$$b = \frac{K}{2} \left| r - \frac{1}{r} \right| \quad (8)$$

S pomočjo enačb (7) in (8) lahko izračunamo *ekscentričnost* elipse c

$$c = \pm \sqrt{a^2 - b^2} = \pm K$$

Slika *družine krožnic* je torej *družina elips* z goriščema v točkah $(K, 0)$ in $(-K, 0)$.

S preslikavo Φ preslikajmo še *družino premic*

$$y = kx \quad (9)$$

ki gredo skozi izhodišče. Vstavimo enačbo (9) v enačbi (1) in (2), ju kvadriramo in preuredimo tako, da dobimo enakosti

$$\frac{u^2}{K^2} = \frac{x^2}{4} \left[1 + \frac{1}{x^2(1+k^2)} \right]^2 \quad (10)$$

$$\frac{v^2}{K^2 k^2} = \frac{x^2}{4} \left[1 - \frac{1}{x^2(1+k^2)} \right]^2 \quad (11)$$

Enačbi (10) in (11) odštejemo, uredimo desno stran

$$\frac{u^2}{K^2} - \frac{v^2}{K^2 k^2} = \frac{1}{1+k^2} \quad (12)$$

V enačbi (12) hitro prepoznamo enačbo hiperbole

$$\frac{u^2}{K^2 \frac{1}{1+k^2}} - \frac{v^2}{K^2 \frac{k^2}{1+k^2}} = 1 \quad (13)$$

Dobljena enačba predstavlja *družino hiperbol* s *polosema*

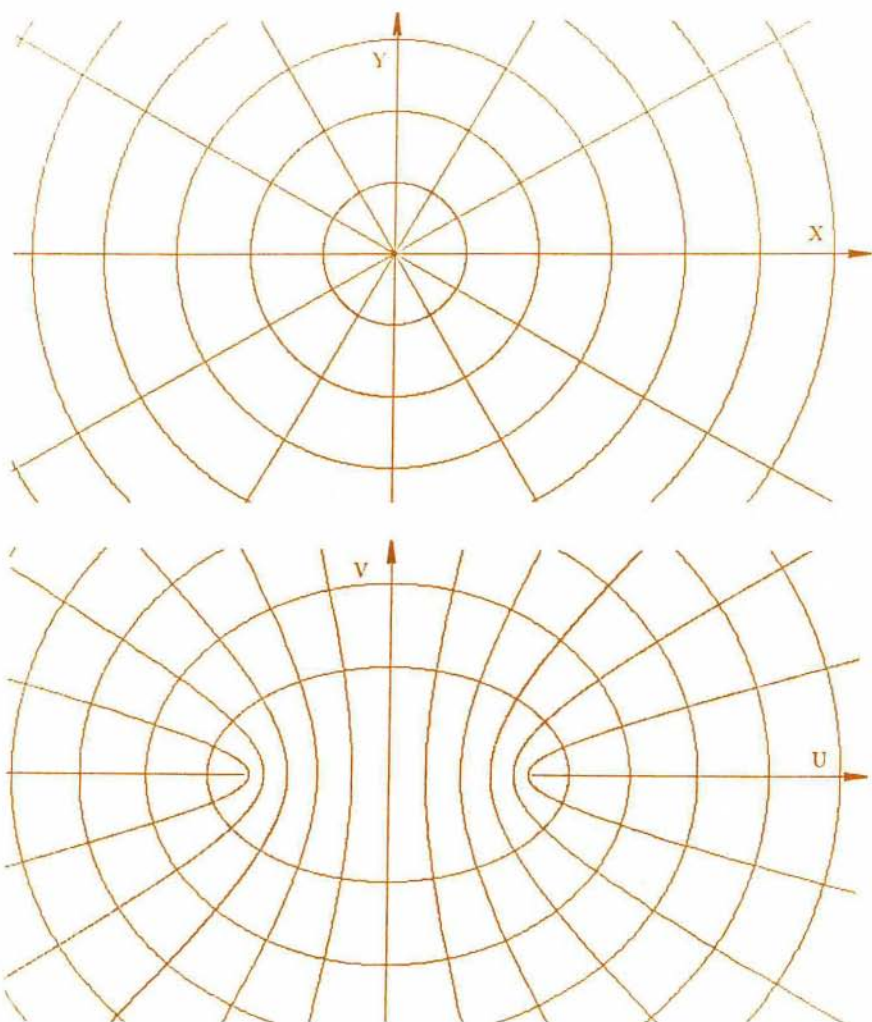
$$a = \left| \frac{K}{\sqrt{1+k^2}} \right| \quad (14)$$

$$b = \left| \frac{Kk}{\sqrt{1+k^2}} \right| \quad (15)$$

Enačbi (14) in (15) vstavimo v enačbo za *ekscentričnost* hiperbole c in dobimo

$$c = \pm \sqrt{a^2 + b^2} = \pm K$$

Družina premic se torej preslika v družino hiperbol z goriščema v točkah $(K, 0)$ in $(-K, 0)$. Premici $x = 0$ in $y = 0$ se preslikata v premico $u = 0$ in v poltraka $(-\infty, -K)$, (K, ∞) na u osi. Opazimo, da sta gorišči za družino



Slika (1) : Na XY ravnini je prikazana ortogonalna mreža premic in krožnic, slika le te pa je predstavljena na UV ravnini. Na vseh slikovnih prilogah je konstanta K v transformaciji Žukovskega enaka, in sicer $K = 1$.

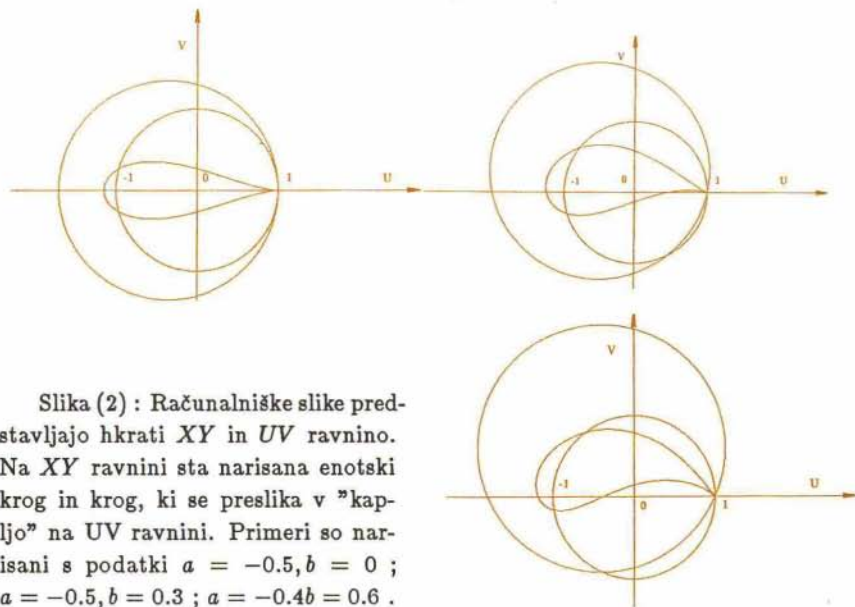
elips in hiperbol isti in sta odvisni le od konstante K , ki nastopa v preslikavi Žukovskega. Na sliki (1) si lahko ogledate mrežo krožnic in premic na XY ravnini, ki se preslika v mrežo elips in hiperbol na UV ravnini.

Ogledali smo si nekaj osnovnih značilnosti dane preslikave, sedaj pa se vrnimo k našemu problemu. V ta namen lahko preslikavo nekoliko poenostavimo in vzamemo konstanto $K = 1$. Opazimo, da se krožnica s središčem v točki $(0, 0)$ in radijem $r = 1$ na XY ravnini preslika v daljico od točke $(-1, 0)$ do točke $(1, 0)$ na UV ravnini. S pomočjo teorije v kompleksni analizi, ki žal presega okvir revije PRESEK, pridemo do naslednjih ugotovitev. Do letalskega krila nas bodo vodile le krožnice, ki bodo potekale skozi točko $(1, 0)$, saj se zunanji kot v dani točki pri preslikavi podvoji. Pri krožnici je zunanji kot $\varphi = \pi$. Zunanji kot slike v prirejeni točki torej znaša $\phi = 2\pi$, kar nam zagotavlja značilno obliko konice "kaplje". Krožnice naj vsebujejo tudi točko $(-1, 0)$. Preslikajmo s preslikavo Φ krožnico, podano z enačbo

$$(x - a)^2 + (y - b)^2 = r^2 \quad (16)$$

Zaradi prej navedenih pogojev sledi zveza med radijem in koordinatama središča krožnice

$$r = \sqrt{(a - 1)^2 + b^2}$$



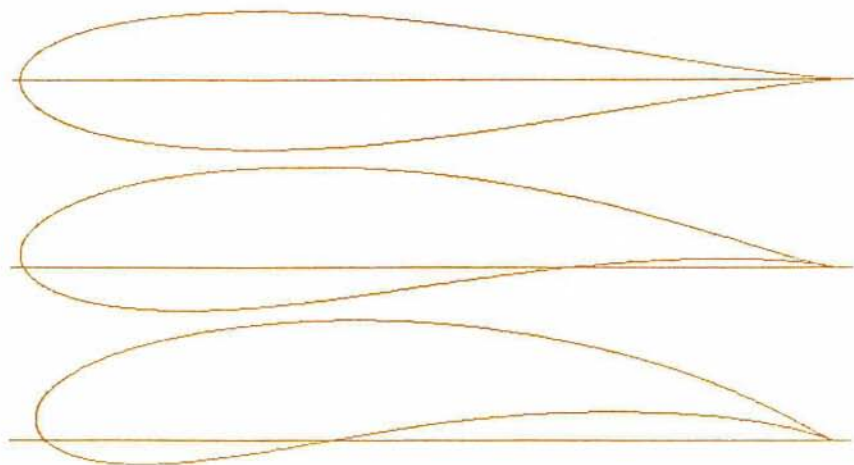
Slika (2) : Računalniške slike predstavljajo hkrati XY in UV ravnino. Na XY ravnini sta narisana enotski krog in krog, ki se preslika v "kapljo" na UV ravnini. Primeri so narisani s podatki $a = -0.5, b = 0$; $a = -0.5, b = 0.3$; $a = -0.4, b = 0.6$.

Sedaj smo že blizu našega cilja. Najprej si oglejmo, kam se preslikajo krogi, ki imajo središče na premici $y = 0$, gredo skozi točko $(1, 0)$ in imajo točko $(-1, 0)$ v svoji notranjosti. Dobili smo obliko "kaplje" (primer je prikazan na sliki (2)), ki se še ne ujema popolnoma z našo predstavo o letalskem krilu.

Sedaj sliko le nekoliko raztegnemo po u osi s transformacijo

$$\Psi : \mathcal{R} \times \mathcal{R} \longrightarrow \mathcal{R} \times \mathcal{R}$$

$$\Psi : (u, v) \longrightarrow (tu, v)$$

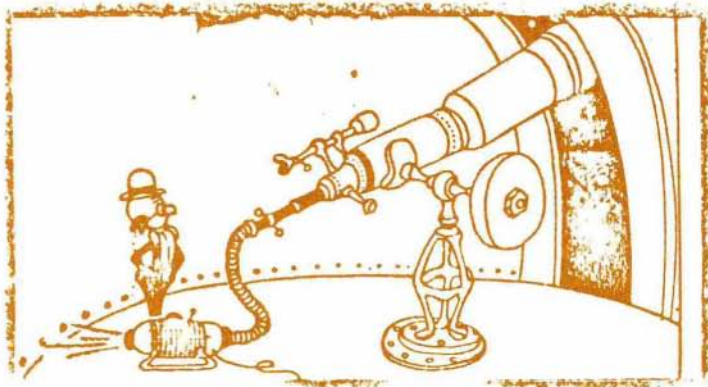


Slika (3) : Primeri so narisani z istimi podatki kot na sliki (2). Koeficient raztega v preslikavi Ψ pa je $t = 2.5$.

Že smo pri želenem rezultatu (slika (3)). Opazimo, da je oblika krila simetrična glede na os u . S preslikavo Žukovskega lahko skonstruiramo tudi nesimetrične profile. Središče krožnice le nekoliko premaknemo tudi po y osi.

Janez Aleš

"Nova tehnika v astronomiji"



ASTRONOMSKI TABOR

Astronomsko društvo Javornik in Gibanje "Znanost mladini" že dvanajsto leto zapored organizirata astronomski raziskovalni tabor. Letos bo tabor potekal od 28. julija do 7. avgusta. Namenjen je osmošolcem, srednješolcem in študentom nižjih letnikov fakultet. Udeleženci tabora bodo pod strokovnim vodstvom izkušenih mentorjev deset dni in noči spoznavali osnovne zakonitosti nebesnih pojavov in na Slovenskem ljudskem astronomskem observatoriju (SLAO) opazovali zvezde, planete, meglice, galaksije in druge nebesne objekte.

Če se želiš udeležiti tabora, pošlji izpolnjen priloženi obrazec (ali fotokopijo) **do 15. junija 1989** na naslov: Aram Karalič, Kogojeva 10, 61117 Ljubljana. Izmed prispelih prijav bomo izbrali 25 udeležencev tabora. Prednost bodo imeli prijavitelji, ki še niso sodelovali na astronomskem taboru, upoštevali pa bomo tudi vrstni red prijav.

PRIJAVNICA

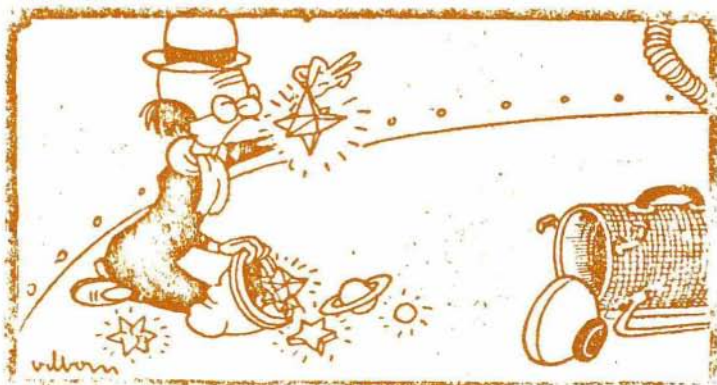
Ime in priimek: Telefon:

Točen naslov:

Naziv in naslov šole: Razred:

Želim se prijaviti na astronomski tabor "Javornik 89".

Kraj, datum: Podpis:



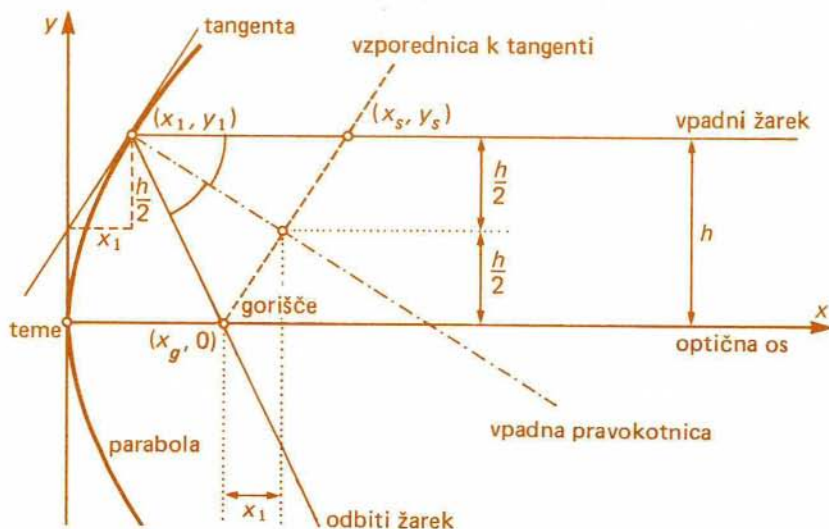
ZAKAJ SO ANTENE PARABOLIČNE?

Na naslovni strani prve številke Preseka v šolskem letu 1988/89 je videti veliko parabolično anteno radijskega teleskopa. Slika pač spremlja članka o rotacijskem paraboloidu v notranjosti številke. V enaki vlogi kot v velikem radijskem teleskopu najdemo del ploskve rotacijskega paraboloidea še pri drugih napravah. Omenimo samo manjše parabolične antene za sprejem satelitske televizije in za poštné brezžične zveze, reflektorje avtomobilskih žarometov, ki jim po domače pravijo kar "parabole", in druge svetilke za osvetljevanje. Ob vrsti takih naprav se vprašamo: Zaradi katere lastnosti uporabljamo v njih rotacijske paraboloide? Poskusimo odgovoriti čim preprosteje.

Rotacijski paraboloid dobimo, ko zavrtimo parabolo okoli simetrijske osi. Pri razglabljanju se bomo lahko omejili na ravnino, zato pojdimo v nasprotni smeri in presecimo rotacijski paraboloid z ravnino, ki vsebuje os. To ravnino prenesimo na papir. Os x koordinatnega sistema usmerimo po osi parabole in postavimo izhodišče v teme (slika 1). Dobljeno parabolo opišemo z enačbo

$$v^2 = 4fx$$

z dano konstanto f . Na paraboloid naj pade vzporeden curek vidne svetlobe ali radijskih valov vzporedno z osjo, ki ji zdaj recimo *optična os*. Zanimajmo se



Slika 1. Vpadni žarek, vzporeden z optično osjo, se odbije na paraboli in seka optično os v gorišču.

samo za žarek v razdalji h od osi. Kako se odbije na paraboli in v kateri točki seče os?

Pomagajmo si z odbojnim zakonom, po katerem je odbojni kot enak vpadnemu. Da ležijo vpadni žarek, odbiti žarek in vpadna pravokotnica v isti ravnini, v našem primeru ni treba posebej poudarjati.

Žarek zadane parabolo v točki (x_1, y_1) , kjer je $y_1 = h$ in zato $x_1 = h^2/(4f)$. Vpadna pravokotnica je premica, ki je pravokotna na parabolo v točki (x_1, y_1) . Pravokotna na krivuljo? Ne, pač pa pravokotna na premico, ki jo v tej točki prislonimo ob krivuljo, to je na *tangento*. Poiščimo smerni koeficient k enačbe tangente.

Če točka (x_2, y_2) , $x_2 \neq x_1$ leži na paraboli, torej $x_2 = y_2^2/4f$, potem je smerni koeficient sekante skozi (x_1, y_1) in (x_2, y_2) enak

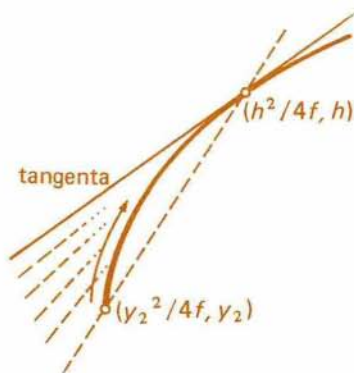
$$(y_2 - y_1)/(x_2 - x_1) = (y_2 - h)/((y_2^2 - h^2)/(4f)) = 4f/(y_2 + h)$$

Sekanta preide v tangento skozi točko (x_1, y_1) , ko potisnemo drugo točko proti tej točki, tako da postane y_2 enak h (slika 2). Potemtakem velja $k = 2f/h$.

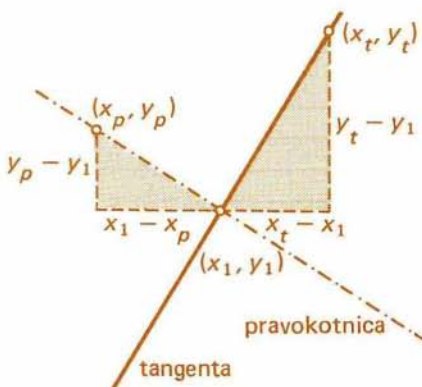
Iščemo točko $(x_g, y_g = 0)$, v kateri preseka odbiti žarek os $y = 0$. Narišimo skozi to točko vzporednico k tangenti in jo zapišimo z enačbo

$$y - 0 = (2f/h)(x - x_g)$$

Ta premica seka žarek $y = h$ v točki (x_s, y_s) , zato je $x_s = x_g + h^2/(2f)$. Ker vpadna pravokotnica razpolavlja kot med vpadnim in odbitim žarkom, je točka (x_1, h) enako oddaljena od presečišča (x_s, y_s) in od točke $(x_g, 0)$, torej velja



Slika 2. Premica, ki seka parabolo v dveh točkah, preide v tangento, ko se druga točka bliža prvi in se z njo zlije.



Slika 3. Če sta pravokotnica in tangenta druga na drugo pravokotni, morata biti osenčena trikotnika podobna.

$$(x_g - x_1)^2 + h^2 = (x_s - x_1)^2$$

Upoštevajmo enakosti

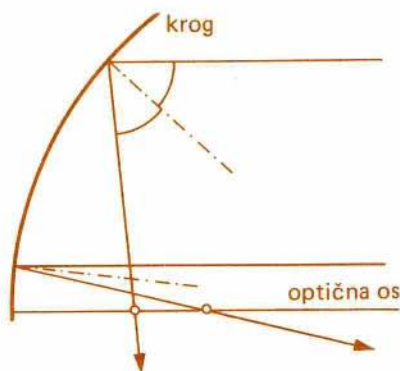
$$x_s = x_g + h^2 / (2f) \text{ in } x_1 = h^2 / (4f)$$

pa brž izračunamo, da je $x_g = f$.

Bilo je naporno, a zdaj smo na koncu. Odbiti žarek seka optično os v razdalji f od temena, ne glede na razdaljo vpadnega žarka od osi. Vsi vpadni žarki, vzporedni z optično osjo, se po odboju sekajo v eni točki – *gorišču*. To velja v vseh ravninah in zato tudi za rotacijski paraboloid. V gorišču rotacijskega paraboloidea se zberejo vsi žarki, ki so pred odbojem vzporedni z optično osjo. Ker nismo nikoli zares upoštevali smeri žarkov, lahko trditev obrnemo: Vsi žarki, ki izvirajo iz gorišča, so po odboju vzporedni z optično osjo. Prvo izkoriščamo pri radijskih antenah, majhnih in velikih, drugo pa pri reflektorjih z drobnimi svetili vseh vrst.

Veliki astronomski daljnogledi imajo zrcalno ploskev, ki je del krogle, ne rotacijskega paraboloidea. Zakaj? Pri dobrem zrcalu se mora ploskev na del valovne dolžine natančno prilegati želenemu načrtu. Valovna dolžina zelene svetlobe, na katero je oko najbolj občutljivo, meri pol tisočine milimetra, tako da odstopanje ne sme presegati nekaj stotisočin milimetra. Tako natančno je lažje izdelati krogelno ploskev, ki je v vseh točkah enako ukrivljena, kot paraboloid.

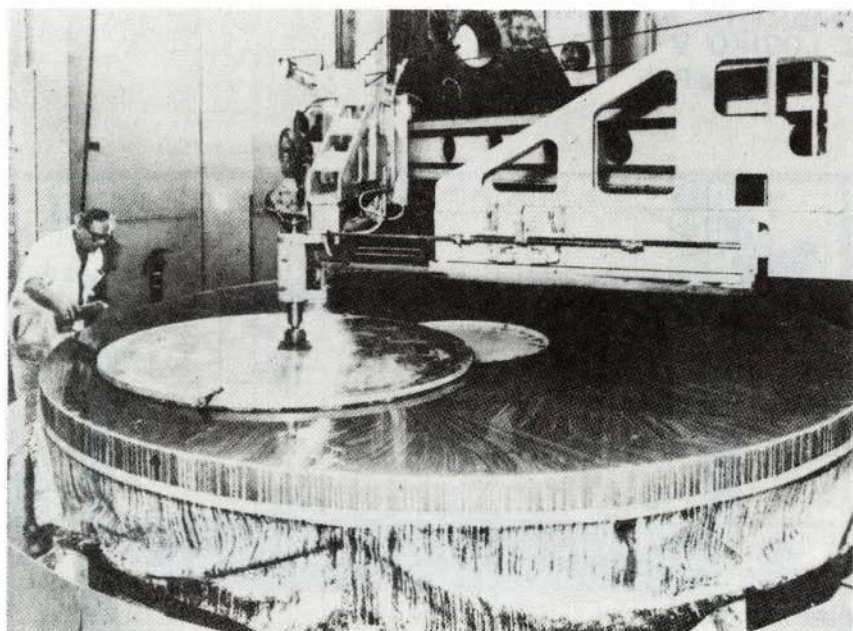
Pri zbiralnem krogelnem zrcalu se vsi žarki, ki so vzporedni z optično osjo, po odboju ne sekajo v eni točki. Tisti, ki so bližje osi, sekajo optično os nekoliko dalj od temena, tisti, ki so bolj oddaljeni od osi, pa nekoliko bližje temenu (slika 4). Tej pomanjkljivosti je ime *napaka pasov*. V tem pogledu je krogelno zrcalo slabše od paraboloidega.



Slika 4. Napaka pasov pri krogelnem zrcalu.

ASTRONOMSKI DALJNOGLEDI

Pisanju o paraboloidnih zrcalih in antenah dodajamo nekaj podatkov o krogelnih zrcalnih astronomskih daljnogledov. Angleži so že leta 1781 izdelali zrcalo novega daljnogleda, ki ga imenujemo po *Williamu Herschlu*. (Ta je poleg drugega leta 1781 odkril planet Uran.) Zrcalo s premerom 4,3 metra je tretje največje zrcalo na svetu - za šestmetrskim sovjetskim na Kavkazu in petmeterskim ameriškim na Mt. Palomarju. Daljnogled je sestavni del zvezdarne greenwiškega observatorija pri La Palmi na Kanarskih otokih. Razmere so tam nenavadno ugodne za opazovanje. Da bi to prednost v celoti izkoristili, so morali zrcalo izdelati zelo natančno. Znana družba Corning iz New Yorka je zrcalo za pol milijona funtov vlila iz posebne steklene keramike Cer Vit. Optična delavnica Parsons v Newcastlu v Angliji pa je za enako vsoto zrcalo zbrusila. V celoti odstopa oblika zrcala za manj od $1/12$ valovne dolžine svetlobe, to je za manj



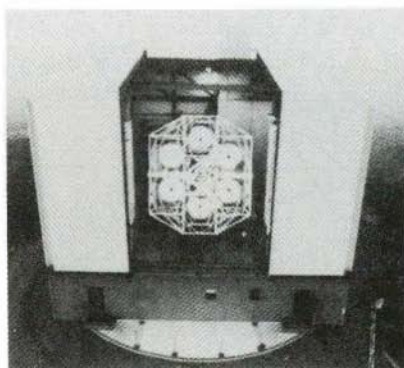
Slika 1. Zrcalo Herschlovega daljnogleda med končnim brušenjem.

kot pol desettisočine milimetra, od predpisane oblike. V dveh točkah v razdalji dveh centimetrov je odstopanje še manjše, meri kvečjemu $1/80$ valovne dolžine (slika 1). Po začetnem preskušanju bi moral biti daljnogled zdaj kmalu nared za opazovanje.

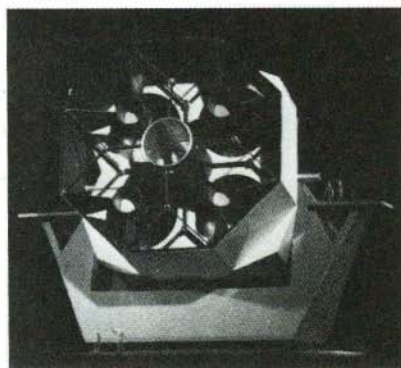
V načrtu so večji daljnogledi, ki pa ne bodo imeli enega samega velikega zrcala. Več zrcal bo uravnaval računalnik tako, da bodo zbrala svetlobo v skupnem gorišču. Tak daljnogled že stoji, to je *MMT* (Multiple Mirror Telescope, daljnogled z več zrcali) Whippleve zvezdarne v Arizoni. Ima šest zrcal s premerom po 1,8 metra, kar ustreza enemu zrcalu s premerom 4,5 metra (slika 2). Zrcala v resnici niso krogelna ampak paraboloidna. Izdelajo jih tako, da talino zavrtijo v posodi. Tako dobi paraboloidno obliko in jo zadrži, ko se ohladi. Ker zrcala ni treba brusiti, je lahko dvajsetkrat lažje in zato cenejše.

Na Mauni Kei na Havajih načrtujejo daljnogled z zrcalom iz večjega števila odsekov, ki bo ustrezalo zrcalu s premerom 10 metrov. Predvidena cena je 85 milijonov dolarjev. Prav tako so v delu načrti za *NNTT* (National New Technology Telescope, državni daljnogled po novi tehnologiji) s štirimi zrcali s premerom po 7,5 metra, kar ustreza zrcalu s premerom 15 metrov (slika 3). Poleg ameriških načrtov obstaja še japonski načrt za daljnogled z zrcalom s premerom 7 metrov.

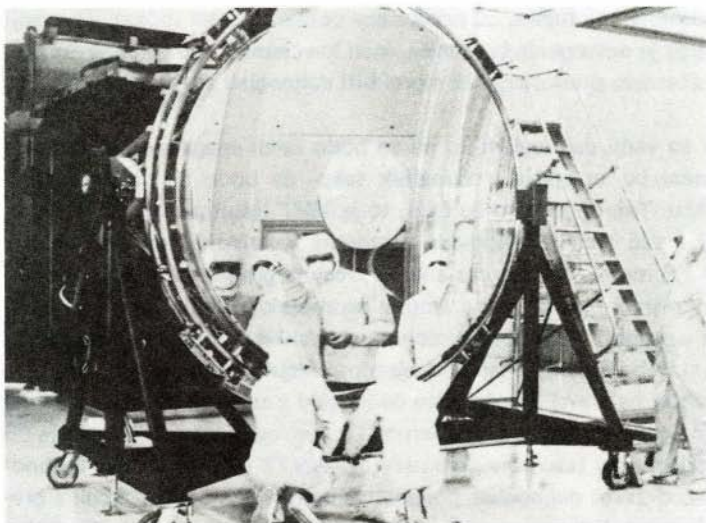
Večje zrcalo zbere več svetlobe in je z njim mogoče opazovati šibkejša vesoljska svetila. V načelu pomeni večje zrcalo tudi boljšo ločljivost, se pravi manjši kot med vesoljskima telesoma, ki ju še ločimo. Toda v praksi omejujejo ločljivost tokovi v ozračju. Zato je NASA (Ameriški urad za vesolje) izdelala *Hubblev vesoljski daljnogled*, ki ga bo vesoljsko letalo (shuttle) odneslo nad ozračje. Daljnogled bo prosto krožil okoli Zemlje kot umetni satelit. Vsakih



Slika 2. Večzrcalni daljnogled MMT Whippleve zvezdarne v Arizoni.



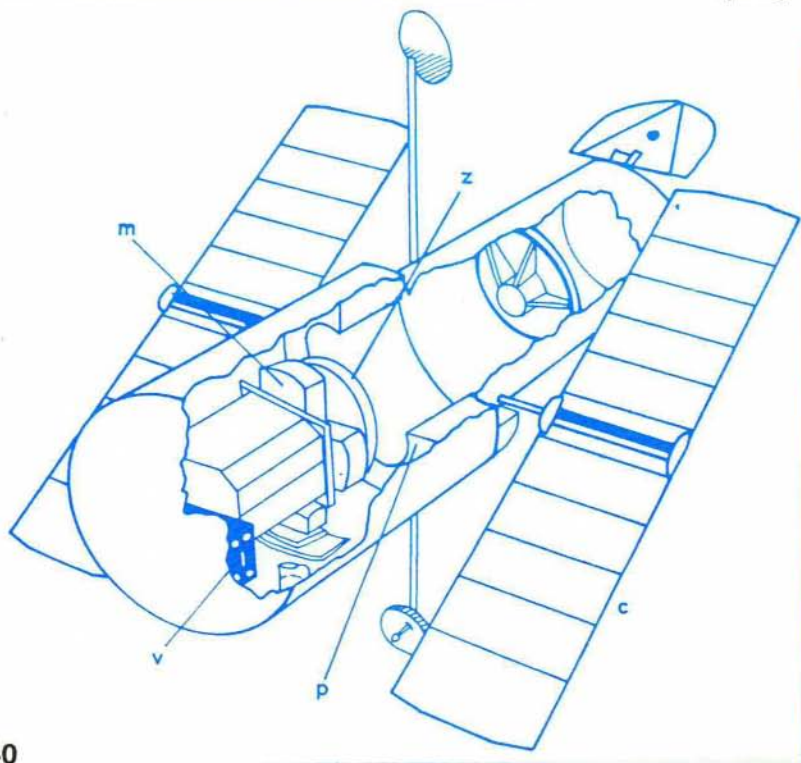
Slika 3. Maketa daljnogleda NNTT.



Slika 4a
levo

Slika 4c
desno

Slika 4b
spodaj





Slika 4. Zrcalo Hubblovega vesoljskega daljnogleda (a), risba daljnogleda: c sončne celice, v vrtavke za določanje smeri, m merilniki za natančno usmerjanje, p preverjanje usmeritve, z zrcalo (b) in daljnogled pred vgraditvijo v vesoljsko letalo (c).

nekaj let ga bodo obiskali vesoljci, da popravijo morebitne okvare, približno vsakih deset let pa bodo daljnogled spravili na Zemljo, da obnovijo kovinsko prevleko zrcala. Izstrelili naj bi ga (po številnih zamudah) leta 1989. Med tem je cena močno presegla milijardo dolarjev. Z daljnogledom bodo dobili zelo jasne slike vesoljskih teles na zelo temnem ozadju, saj ne bo sipanja svetlobe v ozračju. Čeprav ima zrcalo premer samo 2,4 metra, bodo z njim prodrli v vesolje do precej večjih razdalj kot z večjimi daljnogledi na Zemlji (slika 4).

Janez Strnad

NALOGE

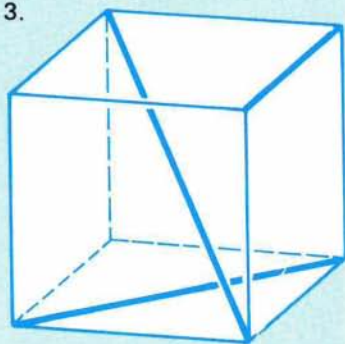
MATEMATIČNI KROŽEK

1. Trikotniku, v katerem obstajata taki dve stranici, da je vsota njunih dolžin enaka vsoti dolžin tretje stranice in višine nanjo, recimo TV -trikotnik.
 - a) Poišči vse enakokrake TV -trikotnike.
 - b) Ali obstaja kakšen pravokoten TV -trikotnik?



2. Za katera naravna števila n je vsota $3^n + 7$ popolni kvadrat?

3.



Dana je kocka z robom dolžine a . Kolikšna je (najkrajša) razdalja med njeno telesno diagonalo in

- a) mimobežnim robom kocke?
- b) mimobežno diagonalo stranske ploskve kocke?

Boris Lavrič

K NALOGAM S 3. REPUBLIŠKEGA TEKMOVANJA OSNOVNOŠOLCEV IZ RČUNALNIŠTVA

V 3. številki letošnjega Preseka smo objavili naloge, ki so jih reševali osnovnošolci na 3. republiškem tekmovanju iz računalništva. Tokrat si nekatere naloge pobje oglejmo. Zapisali bomo rešitve za tiste, ki so reševalcem povzročale največ preglavic, ob vsaki pa skušali povedati še kaj več kot le rešitev. Za besedila nalog pobjskajte po omenjeni številki Preseka. Programi, ki jih objavljamo, so prepisani iz biltena tekmovanja, saj tako lahko bodoči tekmovalci vidijo, kaj tekmovalna komisija pričakuje od njih. Seveda to ne pomeni, da se ne bi dali programi napisati tudi kako drugače. Programi v jeziku logo so napisani v inačici loga za Commodore 64.

Naloge v jeziku logo

Izmed osmih nalog so tekmovalcem predstavljale najtrši oreh zadnje tri. Značilnost teh nalog je, da je za njihovo reševanje treba premišljevati rekurzivno. Čeprav je logo po svoji naravi rekurziven, reševanje takih problemov očitno povzroča učencem največje težave. Za zgled rešimo 6. in 7. nalogo. Slednje, mimogrede povedano, ni rešil noben tekmovalec. V 8. nalogi je potrebno narisati *spiralateral*, o risanju le teh pa je M. Lokar napisal članek v 3. številki letošnjega Preseka.

6. naloga. Kaj naredi želva v enem koraku? Potegne črto, ki je nekoliko daljša od črte, ki jo je napravila v predhodnem koraku, zatem pa se obrne v desno za določen kot. Na levi sliki pri besedilu naloge se obrne za 45° in na desni sliki za 90° . Postopek ponavljamo, dokler ne pridemo do roba zaslona.

```
TO SPIRALA1 :A
  IF :A > 84 THEN STOP
  FD :A RT 45
  SPIRALA1 :A + 2
END
```

```
TO SPIRALA2 :A
  IF :A > 98 THEN STOP
  FD :A RT 90
  SPIRALA2 :A + 2
END
```

7. naloga. Ker ne smemo uporabiti ukaza REPEAT, si moramo sami organizirati štetje objektov, ki jih rišemo. Število hiš, ki jih moramo še narisati, naj bo spravljeno v spremenljivki STEVILO, velikost hiške v A, KRAT pa je število narisanih stranic trikotnika in kvadrata.

```
TO HISE :A :STEVILO
  IF :STEVILO=0 THEN STOP
  HISA :A
  PU RT 90 FD :A+10 LT 90 PD
  HISE :A+20 :STEVILO-1
END
```

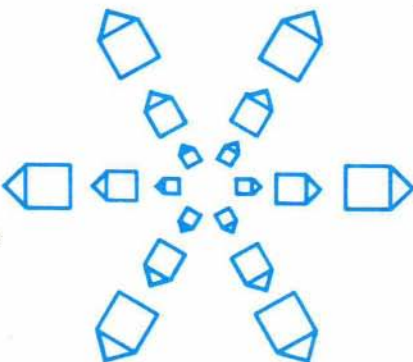
```
TO HISA :A
  KVADRAT :A
  FD :A RT 30
  TRIKOTNIK :A
  LT 30 BK :A
END
```

```
TO TRIKOTNIK :A :KRAT
  IF :KRAT > 3 THEN STOP
  FD :A RT 120
  TRIKOTNIK :A :KRAT+1
END
```

```
TO KVADRAT :A :KRAT
  IF :KRAT > 4 THEN STOP
  FD :A RT 90
  KVADRAT :A :KRAT+1
END
```

Če hočemo imeti tako sliko, kot jo zahteva naloga, se moramo z želvo najprej prestaviti nekoliko v levo, pero obrniti navzgor, zbrisati zaslon in nato narediti klic HISE 10 4. Ukaza TRIKOTNIK in KVADRAT bi seveda lahko napisali brez uporabe rekurzije - le trikrat oz. štirikrat moramo ponoviti ukaza FD in RT. Nekaj podobnega bi lahko napravili tudi z ukazom HISE, a taka rešitev v tem primeru ni najboljša, saj s tem dobimo precej šibkejši ukaz. Za konec pa še zahtevnejša naloga: Popravi ukaze, tako da se bodo vedno večje hiške navijale po spirali. Dobljena slika naj bi izgledala nekako takole:

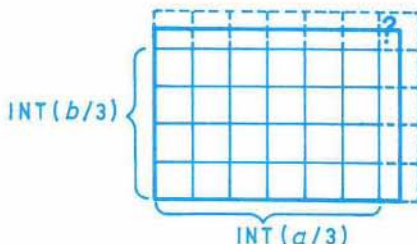
Če vam bo uspela kakšna lepa slika, nam jo pošljite skupaj s programom. Z veseljem ju bomo objavili. Seveda ni prepovedano med hiše postaviti še kako drevo, ...



Naloge za 5.-6. razred

Druga in četrta naloga sta bili lahki, kar se je pokazalo tudi pri rezultatih. Največ preglavic je povzročala tekmovalcem prva naloga, takoj za njo pa tretja. Rešimo ju.

1. naloga. Formulacija naloge je nekoliko pomanjkljiva, saj ne vemo, v katerih enotah sta podani dolžini stranic a in b . Predpostavimo torej, da sta podani v mm. V eno vrstico najprej postavimo toliko kvadratkov, kolikorkrat gre 3 v a . Še en kvadratak gre v vrstico, če je ostanek pri deljenju a s 3 vsaj 1.5.



Izračunati moramo torej celi del števila $a/3$ in še ostanek pri tem deljenju. Za drugo stranico napravimo isti premislek, kot smo ga za prvo. Število kvadratkov je zato kar produkt števila kvadratkov v eni vrstici s številom kvadratkov v drugi. Paziti moramo le še na robne pogoje. Včasih se zgodi, da smo zgornji desni kvadratak šteli, čeprav ga ne bi smeli. To se lahko zgodi le v primeru, ko smo šli tako levo kot tudi zgoraj čez rob osnovnega kvadrata. To popravimo v vrstici 100 v spodnjem programu.

```
10 INPUT "PODAJ A IN B", A, B
20 LET POACELE = INT(A/3)
30 LET POBCELE = INT(B/3)
40 OSTPOA = A - 3*POACELE
50 OSTPOB = B - 3*POBCELE
60 IF OSTPOA >= 1.5 THEN LET POACELE = POACELE+1
70 IF OSTPOB >= 1.5 THEN LET POBCELE = POBCELE+1
80 LET SKUPAJ = POACELE * POBCELE
90 REM še vogal
100 IF (OSTPOA*OSTPOB<4.5) AND (OSTPOA>=1.5) AND
    (OSTPOB>=1.5) THEN LET SKUPAJ = SKUPAJ-1
110 PRINT "ŠTEVILO KVADRATKOV = ", SKUPAJ
120 END
```

3. naloga. Naloga nas približa podatkovni strukturi, ki ji učeno rečemo dvojiško drevo. Kar na primeru povejmo, kaj je v drevesu *oče* in kaj *sin*. Element $a(5)$ je oče elementoma $a(10)$ in $a(11)$, ki sta seveda njegova sinova, $a(5)$ pa je sin elementa $a(2)$. V splošnem drevesu ima lahko oče poljubno število sinov. Kadar ima vsak oče največ dva sinova, drevo imenujemo *dvojiško drevo*. Če ima vsak oče natanko dva sinova, imamo *polno dvojiško drevo* in tako je drevo iz naloge.

V polnem dvojiškem drevesu najprej opazimo, da se z vsako vrstico podvoji število elementov prejšnje vrstice. Res, število elementov po vrsticah je 1, 2, 4, 8, ... To pa so ravno potence števila 2! Prvi element v i -ti vrstici ima tako indeks 2^{i-1} , zato ima j -ti element v i -ti vrstici indeks $2^{i-1} + j - 1$. S tem je naloga že rešena. Še naloga: Kako iz indeksa očeta ugotovimo indeksa njegovih sinov. Drevo in dvojiško drevo smo opisali zelo površno. Morda ste že iz te naloge zaslutili, da gre za zanimivo podatkovno strukturo. Kdor bi rad kaj več izvedel o drevesih, lahko svojo radovednost poteši s knjigo J. Kozaka "Podatkovne strukture in algoritmi".

Naloge za 7.-8. razred

Največ točk so tekmovalci nabrali pri 2. in 5. nalogi. Predvsem 2. so rešili skoraj vsi. Najslabše so reševali 1. in 4. nalogo, slednje ni v celoti rešil nihče.

1. naloga. Naloga ni težka, zato je presenetljivo, da so pri tej nalogi tekmovalci nabrali najmanj točk. Je razlog v tem, da je bilo potrebno poznati enačbo kroga? Kakorkoli že, naloga je še en opomin tistim, ki mislijo, da lahko obvladajo računalništvo brez znanja matematike.

Če imamo zadetek s koordinatama (x, y) , potem je oddaljenost te točke od središča tarče podana s formulo $\sqrt{x^2 + y^2}$. Kdor formule ne pozna, naj jo dokaže s pomočjo Pitagorovega izreka. Zadetek je v notranjem krogu, če ni dlje kot 2.5 cm od izhodišča (pazi: podatek je premer, ne polmer!), v srednjem krogu, če je na oddaljenosti med 2.5 in 7.5 cm; v zunanem pa, če je na razdalji med 7.5 in 12.5 cm od izhodišča. Program v basicu:

```

5    LET S = 0
10   FOR I = 1 TO 10
20     PRINT AT 21,1; "PODAJ KOORDINATE ZA TOČKO "; I
30     INPUT "X = "; X
31     INPUT "Y = "; Y
35     REM Izračunamo oddaljenost zadetka od središča
        tarče
40     LET R = SQR(X^2 + Y^2)
50     IF R <= 2.5 THEN LET S = S+10
60     IF (R <= 7.5) AND (R > 2.5) THEN LET S = S+5
70     IF (R <= 12.5) AND (R > 7.5) THEN LET S = S+3
80   NEXT I
90   PRINT "SKUPNE TOČKE: "; S
100  END

```

4. naloga. Je poenostavitev naloge, ki so jo leta 1979 reševali srednješolci v prvi skupini na republiškem tekmovanju. Razlago in rešitev te naloge najdemo v knjigi "Enajsta šola računalništva", zato tu podajmo le rešitev iz biltena tekmovanja. Za spremembo je program v pascalu.

```

program Most (output);
  var st, y, y1, x: integer;
  function Semafor: integer; extern;
  function Senzor: integer; extern;
  begin {Most}
    repeat until Semafor = 0;
    repeat
      st:= 0; y1:= 0;
      repeat until Semafor = 1;
      repeat
        y:= Senzor;
        if y > y1 then st:= st+1
        y1:= y;
      until Semafor = 0;
      writeln(st);
    until false;
  end. {Most}

```

Sandi Klavžar

RESITVE

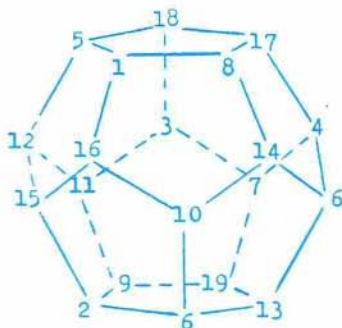
URAVNOTEŽENI DODEKAEDER — Odgovor iz P2, str. 75

S tistikrat zastavljeno nalogo sta se do kraja spoprijela le dva Presekova bralca - Gorazd Beton iz Preddvora in Erika Pojavnik iz Šempetra pri Novi Gorici. Potrebno je povedati, da pot do popolne rešitve problema nikakor ni preprosta. Očitno se naloga uvršča pač v tisto kopico mičnih in elegantnih matematičnih ugank, ki človeku padejo kar tako — en, dva, tri na misel in mu prav zlahka zdrsrnejo naravnost v pisalni stroj. A ko se reševalec sreča z njo ... takrat do dobra skusi njeno do tedaj prikrito zapletenost.

Glede na zahtevnost naloge sta rešitvi, ki sta prišli na Presekov naslov, dobri. Gorazd je znal uravnotežiti telo s sedmimi različnimi utežmi, Erika pa sicer le s petimi, a zato njena rešitev zaradi popolne simetričnosti "na oko" nadvse ugaja. Oba sta povsem zadovoljila pogojem v postavljeni nalogi — poiskati vsaj eno izmed rešitev. Zato knjižna nagrada tokrat pripada kar obema — najboljšima. Čestitam.

Sicer pa dodekaedra ni mogoče uravnotežiti s samimi med seboj različnimi utežmi od 1 do 20. Vsaj dve med njimi morata biti enaki. Objavljamo eno izmed takšnih popolnih rešitev.

Vilko Domajnko



KOKOSOVI OREHI IN POŠTENA OPICA

(da o nepoštenih možeh ne govorimo)

Alfonso, Bravo, Costa in Diego so z dresirano opico na tihomorskem otoku ves dan nabirali kokosove orehe. Zvečer so orehe zložili na kup in vsi razen opice zaspali. Ponoči se A zbudi, da en oreh opici, razdeli ostale orehe na štiri enake dele, en del skrije, preostale orehe pa spet zloži na kup in zaspi. Čez čas se

DVE IRACIONALNI — Rešitev s strani 326

1. Denimo, da sta števili a in 10^a obe racionalni. Zapišimo ju v obliki okrajšanih ulomkov in se najprej omejimo na primer $a > 0$.

$$a = m/n, \quad 10^a = p/q; \quad m, n, p, q \in \mathbb{N}$$

Potem je $10^{m/n} = p/q$, od koder sledi enakost

$$10^m q^n = p^n$$

Števili p in q sta tuji, zato je $q = 1$ in tedaj $10^m = p^n$. Od tod vidimo, da sta 2 in 5 edina prafaktorja števila p , in zato p naravna potenca števila 10. Torej je m večkratnik števila n , a pa naravno število.

Na podoben način ugotovimo, da pri pogoju $a < 0$ velja $a \in \mathbb{Z}$. Trditev naloge potemtakem drži.

2. Predpostavimo, da je število $r = \sqrt{n + \sqrt{n + \sqrt{n}}}$ racionalno. Potem je

$$\sqrt{n + \sqrt{n}} = r^2 - n \in \mathbb{Q} \quad \text{in} \quad \sqrt{n} = (r^2 - n)^2 - n \in \mathbb{Q}$$

Druga ugotovitev nam pove, da je n popoln kvadrat, torej $n = m^2$, $m \in \mathbb{N}$. Potem pa je število $\sqrt{m^2 + m}$ racionalno in se da zapisati kot okrajšani ulomek

$$\sqrt{m^2 + m} = p/q; \quad p, q \in \mathbb{N}$$

Enakost $(m^2 + m) q^2 = p^2$ s tujima p in q pove, da je $q = 1$, torej velja $m^2 + m = p^2$. Zato je

$$m^2 < p^2 < (m+1)^2 \quad \text{in} \quad m < p < m+1$$

kar pa ne more biti res. Predpostavka na začetku dokaza je tedaj napačna, trditev pa s tem dokazana.

Boris Lavrič

zbudi B, da en oreh opici, razdeli druge orehe na štiri enake dele, skrije en del, zloži ostanek na kup in zaspi. Nato storijo enako drug za drugim še C in D. Zjutraj se vsi zbudijo, dajo najprej en oreh opici in nato razdelijo preostale orehe na štiri enake dele.

Koliko je najmanjše število orehov, pri katerem se sploh zgodba lahko odvija tako, kot je napisano?

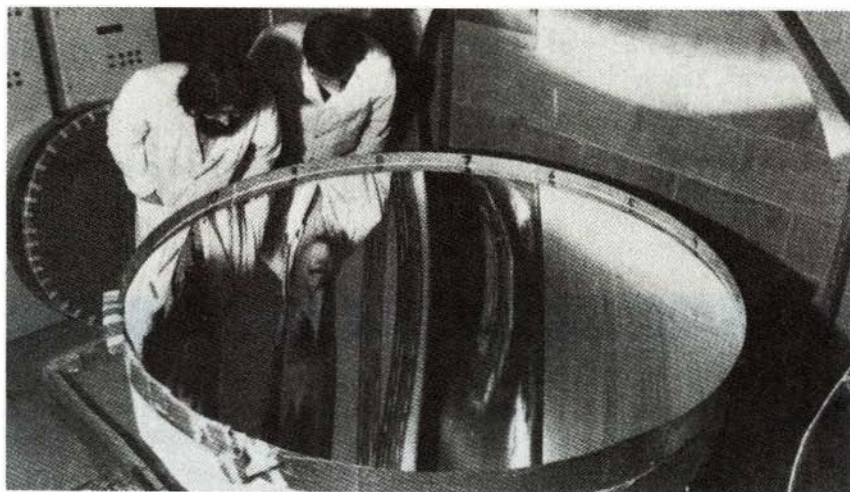
Marija Vencelj

ASTRONOMSKI DALJNOGLED Z VRTEČIM SE KAPLJEVINSKIM ZRCALOM

Kapljevina, ki se enakomerno vrti v valjasti posodi z navpično osjo, ima gladino v obliki rotacijskega paraboloida. Gladino živega srebra v vrteči se posodi lahko uporabimo kot zrcalo astronomskega daljnogleda. Šop navpičnih žarkov se seka natanko v gorišču paraboloida.

Daljnogled z zbiralnim zrcalom je pred več kot tri sto leti prvi izdelal Isaac Newton, ki je razmišljal tudi o gladini vrtečih se kapljevin. Vendar je prvi preskusil daljnogled z vrtečim se živosrebrnim zrcalom šele leta 1908 Robert Wood v ZDA. Izdelal je daljnogled s premerom pol metra, ki pa se ni obnesel, ker je bil preveč občutljiv za motnje. Že "stopinje človeka v razdalji 50 metrov od daljnogleda" so povzročile motnje na gladini. Motila je tudi neenakomerna hitrost vrtenja. Poleg tega je z daljnogledom z navpično osjo mogoče opazovati le zvezde v bližini zenita.

Dandanes je mogoče nekatere od teh pomanjkljivosti odpraviti, druge pa se ne zdijo več odločilne. Tudi največji radijski teleskop v portoriškem Arecibu



Slika 1. Živosrebrno zrcalo daljnogleda s premerom 1,65 metra in goriščno razdaljo 1,5 metra R.F. Borre in sodelavcev z univerze Laval v Quebecu.

s premerom 300 metrov ima nepremično os. Zaradi vrtenja Zemlje pa je z njim mogoče opazovati ozek pas neba. Polega tega so močno izpopolnili naprave, ki spremenijo vidno sliko v električne signale in jih ojačijo.

Tako so se ponovno začeli zanimati za daljnogleds z vrtečim se živosrebrnim zrcalom. Skupina E. Borre v Kanadi je uporabila zračne ležaje, ki ne prenašajo tresljajev, in sinhronski motor, ki se vrti popolnoma enakomerno. Živosrebrno gladino je prelila s tanko plastjo prozornega silikonskega olja, ki je zadušila motnje. Tanek list prozorne plastične snovi je varoval zrcalo pred vetrom. Leta 1986 so delali poskuse z zrcalom s premerom enega metra. Fotografije zvezdnega neba so pokazale, da daljnogled ne zaostaja za enako velikim daljnogledom z brušenim zrcalom, je pa precej cenejši — daljnogled s premerom enega metra velja okoli 7500 dolarjev. Poleg tega je mogoče spreminjati z izbiro vrtilne hitrosti goriščno razdaljo daljnogleda.

Preskušajo daljnogled s premerom zrcala 1,65 metra (slika 1), resno načrtujejo daljnogled s premerom 3 metrov in sanjajo o daljnogledu z desetkrat večjim premerom. To bi bil ne glede na nepremično os velik dosežek, če upoštevamo, da ima največje brušeno zrcalo v daljnogledu premer 6 metrov.

Janez Strnad

TRIKRAT O NEKI NALOGI

Ko sem pred dnevi brskal po starih zvezkih iz gimnazijskih časov, sem našel v njih tudi nalogo z republiškega tekmovanja srednješolcev iz fizike v Velenju leta 1981. Nalogo sem rešil na tri načine in prepričan sem, da vas bodo naloga, in seveda tudi same rešitve, zanimale. Pa kar k nalogi.

Mornar opazi ob času $t = 0$ dve ladji. Prva je od njega oddaljena za 5 km proti vzhodu in 2 km proti severu, giblje pa se s hitrostjo 3 km/h proti severu. Druga ladja je 2 km vzhodno in 4 km severno od mornarja, njena hitrost pa je 1 km/h proti vzhodu in 2 km/h proti severu.

- Kdaj si bosta ladji najbližji?
- Kolikšna bo tedaj njuna medsebojna razdalja?
- Za koliko bosta oddaljeni od mornarja?

Božidar Casar

Rešitve glej na strani 371.

TEKMOVANJA

3. REPUBLIŠKO TEKMOVANJE IZ LOGIKE

15. oktobra je v Cankarjevem domu potekalo tretje republiško tekmovanje iz logike. Letos smo prvič izvedli tudi izbirno tekmovanje, ki se ga je udeležilo okrog 2000 dijakov.

Tekmovanje je organizirala komisija za logiko pri ZOTKS v sodelovanju z Društvom matematikov, fizikov in astronomov. Generalni pokrovitelj tekmovanja je delovna organizacija Metalka. Letos so tekmovanje organizirali tudi zamejci v Avstriji in Italiji, pet njihovih dijakov pa se je z vidnim uspehom udeležilo republiškega tekmovanja.

V skupini 7. razredov je tekmovalo 61 učencev, v 8. razredu 75 učencev, v 1. letniku srednjih šol 46 tekmovalcev, v 2. letniku 44 tekmovalcev in v 3. letniku 42 tekmovalcev.

Udeležence tekmovanja je pozdravil tov. Boštjan Zgonc, sekretar republiške konference SZDL Slovenije.

Pred začetkom tekmovanja je zbor tekmovalcev in mentorjev sprejel naslednje sklepe:

1. da se tekmovanje imenuje po R. Smullyanu in da se mu napiše pismo z željo, da prihodnjič pride na tekmovanje in da napiše še kakšno knjigo iz logike;
2. da se zahteva od RTV Ljubljana, da enkrat letno uvrsti v program oddajo, ki bo posvečena logiki;
3. da se zagotovi nemoteno izdajanje zbirke z LOGIKO V LETO 2000.

Medtem, ko so učenci 90 minut reševali naloge, so se mentorji pogovarjali o prihodnosti tekmovanja. Ugotovili so, da družba kljub ogromnemu številu pravilnikov nima pravilnika za vrednostenje tekmovanj iz znanj, tako glede organizacije kot glede nagrajevanja mentorjev. V drugem delu je bila predstavitve knjige Martina Gardnerja *Aha, pa te imam!*

Komisija za ocenjevanje so vodili Neža Mramor — Kosta, Aleša Mižigoj, Tomaž Cokan, Peter Legiša in Bojan Orel, sestavljali pa so jih študenti elektrotehnike, računalništva in matematike.

NALOGE

7. razred

1. Mojstri

Mojstri Kolar, Lončar, Pečar in Zidar opravljajo tele dejavnosti: kolarstvo, lončarstvo, pečarstvo in zidarstvo. Toda nihče ne opravlja obrti, po kateri se imenuje. Kdo je lončar, če je od naslednjih štirih trditev resnična samo ena?

Kolar je zidar.

Lončar je kolar.

Pečar ni zidar.

Zidar ni pečar.

2. Umor

Andrej, Brane in Cene so pogosto izrazili svoje slabo mnenje o prof. Cveku, tako da, ko je bil le—ta umorjen z bodalom, so bili vsi naravni osumljenci. Pokazalo se je, da je bil morilec eden izmed njih. V preiskavi so izjavili:

Andrej: 1. S profesorjem nisem imel nobenih stikov že dalj časa.

2. Vse, kar je Boris izjavil, je resnica.

3. Vse, kar je Cene izjavil, je resnica.

Boris: 1. Nikoli nisem imel bodala.

2. Vse, kar je Andrej izjavil, je laž.

3. Vse, kar je Cene izjavil, je laž.

Cene: 1. Andrej se je pogovarjal s profesorjem nekaj minut pred umorom.

2. Boris je že imel bodalo.

3. Zadnje čase sem veliko razmišljal o profesorju.

Ugotovimo, da sta Andrej in Boris dala enako število resničnih izjav. Kdo je umoril prof. Cveka?

3. Nogometni turnir

Na nogometnem turnirju so klubi A, B, C in D igrali vsak z vsakim. Nekaj številc je vnesenih v tabelo rezultatov po abecednem redu klubov.

	število odigranih tekem	zmage	porazi	nerešeno	dani goli	dobljeni goli
A	3					5
B	3	3			4	
C	3					
D	3			1	0	3

Tekma med A in C se je končala nerešeno (3 : 3). Vemo tudi, da je klub A dal več kot 5 golov. Poišči rezultate vseh tekem!

8. razred

1. Tekmovanje

Osebe A, B, C, D in E so se pomerile na tekmovanju, na katerem ni delitve mest. Po tekmovanju so dale nekaj opazk. Prvak in drugi sta dala napačni izjavi, ostali pa resnične.

A: D je bil tretji.

D: C je bil slabši kot B.

B: E ni bil prvi.

E: B je bil drugi.

C: Nisem bil zadnji.

Kako so dejansko uvrščeni?

2. Inteligenčni test

Aleša, Breda, Cilka, Danica in Erna so bile na inteligenčnem testu razvrščene brez delitve mest. Vsaka je bila seznanjena s svojim doseženim mestom in dejstvom, da je bila Danica dve mesti višje od Brede.

Aleša je pripomnila: "Če bi vedela, ali je Cilka prva ali ni, potem bi poznala celotno razvrstitev."

Erna, ki je slišala to pripombo je dejala: "Zdaj pa vem, (prej še nisem), ali je Cilka prva ali ni. Razvrstitev vseh mi je znana."

Poiščite razvrstitev! Ali so vsa dekleta inteligentna?

3. Nogometni turnir

Na nogometnem turnirju igrajo moštva vsako z vsakim po eno tekmo. Po nekaj odigranih tekmah, je nekaj podatkov vnesenih v tabelo:

	število odigranih tekem	zmage	porazi	neodločeno	dani goli	dobljeni goli
A	2	1			3	3
B	2			1	4	
C	2					
D				1	4	7

Vemo še, da se je tekma A proti B končala 3 : 1.

Kdo je igral s kom in kakšni so rezultati odigranih tekem?

1. letnik

1. Fantje tekmujejo

Ado, Berti, Čarli, Davor in Ernest so tekmovali v znanju. V končni razvrstitvi ni bilo nobene delitve mest. Čarli in Davor sta se uvrstila drug za drugim. Dala sta tudi dve izjavi. Tisti, ki se je uvrstil višje, je obakrat lagal, drugi

pa je obakrat izjavil resnico.

Čarli: 1. Ernest se je uvrstil točno v sredino med Bertija in Čarlija.
2. Davor je bil tretji.

Davor: 1. Ado se je uvrstil točno v sredino med Čarlija in Ernesta.
2. Berti je bolje uvrščen kot Ado in Čarli.

Kakšen je vrstni red?

2. Srajce

Tovariši Ribič, Čuvaj, Brinovec in Zidar se ukvarjajo z ribištvo, čuvanjem, pridelavo brinovca in zidarstvom, vendar ne v tem vrstnem redu. Imajo navado, da nosijo rdečo, črno, belo in zeleno srajco, vendar spet ne v tem vrstnem redu.

Pri nobenem od njih ni delo v skladu s priimkom in barva srajce ima pri vsakem začetnico različno od začetnice priimka in poklica.

Tov. Brinovec in zidar vedno kosita skupaj. Tov. Brinovec ne mara rdeče barve in zato nikoli ne nosi rdeče srajce. Tov. Čuvaj je ribič.

Poiščite poklic vsakega moškega in barvo njegove srajce!

3. Turnir

Tri nogometna moštva so odigrala turnir, v katerem je vsako moštvo igralo z vsakim. Rezultati so zapisani v tabelo, vendar nekaj števil manjka.

	število odigranih tekem	zmage	porazi	neodločeno	dani goli	sprejeti goli
A	2	2				
B	2					
C	2			1	3	

Peter, ki je vedel za vse rezultate, je pa tudi pameten fant, je dejal Tonetu: "Dejstvo je, če bi ti vedel še število golov, ki jih je dalo moštvo A, potem bi lahko izpolnil tabelo in našel rezultate vseh tekem."

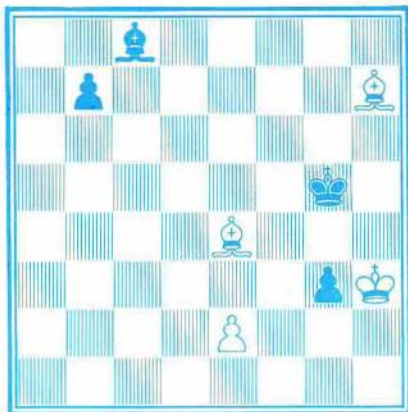
Kakšni so rezultati posameznih tekem?

2. letnik

1. (Tekmovalci izbirajo med nalogama a in b.)

a. **Šahovska naloga.** V poziciji na sliki ima beli dva bela lovca. Kateri je promoviran?

Beli: kralj h3, kmet e2, lovca e4 in h7
 Črni: kralj g5, kmeta b7 in g3, lovec c8



b. Izjave . Sever, Jančar in Ribnikar so vsak dali štiri izjave:

- Sever: 1. Jančar mi dolguje 1 milijon.
 2. Ribnikar mi dolguje 5 tisočakov.
 3. Vse Ribnikarjeve izjave so resnične.
 4. Vse Jančarjeve izjave so neresnične.

- Jančar: 1. Severju nisem dolžan ničesar.
 2. Ribnikar mi je dolžan 1 milijon.
 3. Jaz sem Gorenjec.
 4. Vse Severjeve izjave so lažne.

- Ribnikar: 1. Nikomur nisem dolžan ničesar.
 2. Jančar je Štajec.
 3. Vedno govorim resnico.
 4. Dve Jančarjevi izjavi sta resnični, dve pa neresnični.

Vemo še, da je vsaj eden dal štiri pravilne izjave. Kdo? Za vsakega poišči, kateri stavki so resnični in kateri neresnični!

2. Dekleta

Petra, Karla in Rozi so bile razvrščene brez delitve mest po šarmu, ženskosti in intuiciji. Vsaka je na koncu vedela za svoje uvrstitve, toda nobena razvrstitve drugih dveh. Toda Petra ni mogla zadržati skrivnosti in je dejala: "Boljša sem v ženskosti kot v šarmu in kot v intuiciji."

Karla, inteligentna mlada ženska, je nato dodala: "V tem primeru vem mesta vseh v vseh rečeh."

Z informacijo, da je Rozi višje uvrščena v šarmu kot pri intuiciji, morate ugotoviti mesta vseh v vseh rečeh.

3. Turnir

Nogometna moštva A, B, C, D in E igrajo vsako z vsakim. Naslednja tabela daje nekaj podatkov po nekaterih odigranih tekmah (po abecedi moštev):

	odigrane partije	zmage	porazi	neodločeno	dani goli	dobljeni goli	točke
A	4			0	3	1	
B	3				4	4	
C	4			2			
D				2	3	2	4
E					4	5	1

Vsako moštvo dobi za zmago 2 točki, za neodločen izid 1 točko in za poraz 0 točk. Vemo še to, da je moštvo C dalo moštvu B tri goli. Kakšni so rezultati odigranih tekem?

3. letnik

1. Bratje

Pet bratov Aci, Brane, Ciril, Drago in Edi so bili testirani za reflekse. V vrstnem redu ni bilo delitve mest. Vsakemu so sporočili njegovo končno razvrstitev. Cirilu so še povedali, da je Drago dve mesti višje kot Aci. Ciril je potem dejal: "Če predpostavim, da naš počasni Edi ne more biti prvi, potem lahko logično izpeljem vrstni red vseh."

Predpostavka, da Edi ni prvi, je dejansko točna, Ciril pa je dober logik. Kakšen je vrstni red?

2. Tekmovanje

Osebe A, B, C, D in E so tekmoval v latinščini, grščini in matematiki. Nikjer ni bilo delitve mest in v nobenem primeru ni bil vrstni red hkrati tudi abecedni red. Vemo še:

- A je uvrščen bolje v latinščini kot D v grščini, toda A ni prvi v latinščini in D ni zadnji v grščini.
- B—jev povprečni dosežek je tretje mesto, toda nikoli ni zmagal.
- C je boljši v matematiki kot v latinščini in boljši v latinščini kot v grščini.
- E je v matematiki slabši kot v latinščini, v latinščini pa je slabši kot C v grščini.
- Vsota D—jevih mest je za tri večja kot vsota C—jevih.

Poišči vrstni red pri vsakem predmetu!

3. Nogomet

Na turnirju petih moštev A, B, C, D in E je vsako enkrat igralo z vsakim. Po nekaj tekmah je bila tabela po abecednem redu videti takale, čeprav nekaj podatkov manjka.

	število odig. tekem	zmage	porazi	neodločeno	dali gole	dobili gole	točke
A	4				8	1	5
B	3				7	2	
C	3	0				5	3
D	2						1
E	2				0	5	0

Za zmago dobi moštvo 2 točki, za poraz 0, za remi 1 točko. Poišči odigrane tekme in rezultate!

Uvrstitve

7. razred: 1. mesto Petra IPAVEC, OŠ Komenda – Moste, 2. mesto Sabina MIHELJ, OŠ Antona Ukmarja – Koper, 3. mesto Nika NOVAK, OŠ E. Kardelja – Ljubljana Polje, 4. mesto Mark URBAN, OŠ I. Groharja – Škofja Loka, 5. – 10. mesto Mojca ČUK, OŠ Ajdovščina, Silvo SOK, OŠ Velika Nedelja, Andreja ULČAKAR, OŠ E. Kardelja, Barbara GUŠTIN, OŠ XV. divizije – Grm, Katja VERNIG, OŠ Šober–Nataša – Novo mesto, Jasna ZWITTER–TEKOVNIK, Zvezna gimnazija Celovec.

8. razred: 1. mesto Thierno DIALLO, OŠ Edvard Kardelj, Ljubljana, 2. mesto Valentin BATAGELJ, OŠ Dobravlje, 3. mesto Uroš MIDIČ, OŠ Danile Kumar, 4. mesto Alojz NOVAK, OŠ XV. divizije – Grm, 5. – 7. mesto Mirjam KOTAR, OŠ Ivana Groharja, Benjamin PEZDIR, OŠ Ivana Korošca – Borovnica, Jernej ČOPIČ, OŠ Vita Kraigher, 8. mesto Urša DRČAR, OŠ Frana Albrehta, 9. – 11. mesto Damijan STRNAD, OŠ Velika Nedelja, Arnej GALJOT, OŠ Vlado Bagat – Braslovče, Janez KUŠAR, OŠ Cveto Golar – Škofja Loka.

1. letnik: 1. – 2. mesto Marko KUKRIKA, SNŠ – Ljubljana, Roman VERHOVŠEK, SŠTS F. Leskošek – Luka, Ljubljana, 3. – 4. mesto Tomaž CEDILNIK, SNŠ – Ljubljana, Tomaž SEŠEK, SNŠ – Ljubljana, 5. mesto Nina MILAČ, SNŠ – Ljubljana, 6. – 7. mesto Luka FRELIH, SNŠ – Ljubljana,

Jana KRISTANC, SŠPRNMU – Kranj, 8. – 10. mesto Andrej MAVER, France Prešeren – Trst, Tomaž SUŠNIK, SŠEN – Šentvid, Ksenija BARTOL, SNŠ – Maribor.

2. letnik: 1. mesto Janja VRANAC, SPNMŠ – Koper, 2. mesto Jure IVANUŠIČ, SNŠ – Maribor, 3. mesto Adam FLIS, STŠ Maršal Tito – Celje, 4. mesto Damjan HOZJAN, SERŠ – Maribor, 5. mesto Iztok PETEK, SNŠ – Maribor, 6. mesto Urška DEMŠAR, SŠEN – Ljubljana, 7. mesto Matej ČERNIGOJ, SPNMŠ – Koper, /. – 11. mesto Vojko REBOLJ, SENŠRM – Kamnik, Barbara BOŽIČ, SENŠRM – Kamnik, Sašo BLAŽIČ, SŠCER – Črnomelj, Vladimir BENSA, NSC – Nova Gorica.

3. letnik: 1. mesto Erazem POLUTNIK, STŠMT – Celje, 2. mesto Mitja KOLŠEK, CSŠ – Titovo Velenje, 3. mesto Marko PINTERIČ, SNŠ – Maribor, 4. mesto Gregor DOLINAR, SŠPRNMUS – Kranj, 5. mesto Sašo JEZERNIK, SNŠ – Maribor, 6. mesto Marko ŠKALA, SŠ E. Kardelja – Črnomelj, 7. mesto Jure DOBNIKAR, SNŠ – Maribor, 8. mesto Borut LESJAK, SŠPRNMUS – Kranj, 9. – 10. mesto Marko KERN, SŠPRNMD – Kranj, Roman MAURER, SNŠ – Trbovlje.

Izidor Hafner, Nežka Mramor–Kosta

PRELIVANJE – Rešitev iz P4

Najprej pojasnilo: Raztopino dobimo tako, da zmešamo dve tekočini. Eni rečemo topljenec, drugi pa topilo. Koncentracija raztopine nam bo pomenila razmerje med prostornino topljenca v raztopini in prostornino raztopine (to je prostorninska koncentracija – za razliko od običajne, ki je razmerje ustreznih mas).

Če sta prostornini obeh posod enaki 1, je količina topljenca v prvi posodi enaka a , v drugi pa $b/2$. Po prvem prelivanju je v prvi posodi topljenca $a/2$, v drugi pa $a/2 + b/2$; po drugem prelivanju pa ga je v prvi posodi $a/2 + (a/2 + b/2)/2 = 3a/4 + b/4$, v drugi pa $a/4 + b/4$. Zato sta iskani koncentraciji enaki (v istem zaporedju) $3a/4 + b/4$ in $a/2 + b/2$.

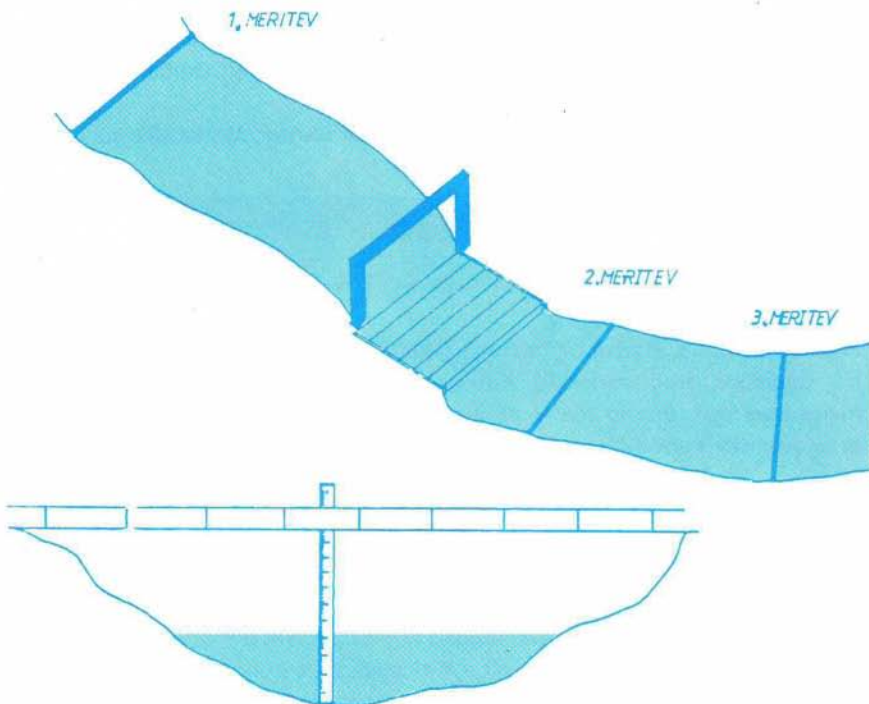
Če bi s prelivanjem nadaljevali v nedogled, bi se koncentraciji izenačili, za končno koncentracijo x pa bi veljala enakost $x + x/2 = a + b/2$. Torej je $x = 2a/3 + b/3$.

Boris Lavrič

POLETNA ŠOLA TRŽIČ

Od 23. junija do 2. julija 1988 je skupina 24 učencev, najboljših mladih fizikov in kemikov s področnih tekmovanj sedmih in osmih razredov osnovnih šol Gorenjske, sodelovala v 2. *poletni šoli iz naravoslovja* na Osnovni šoli Heroja Bračiča v Trziču.

Program dela je bil podoben kakor lansko leto: ugotavljati onesnaženost Tržiške Bistrice, spoznavati geološke značilnosti Dolžanove soteske in širše okolice, opraviti nekaj meteoroloških in fizikalnih meritev ter se seznaniti s kulturnim in gospodarskim razvojem Trziča. Razširili smo ga z uporabo računalnikov, z uvedbo angleščine pri spoznavanju strokovne literature, s predava-



Prva skica kaže del potoka med 1. in 3. mestom meritev, druga pa postopek merjenja.

njem o dragih kamnih in spoznavanjem njihovih lastnosti ter s predavanjem in praktičnimi vajami iz astronomije, ki jih je vodil prof. Boris Kham. Tudi meteorološke meritve smo vzeli čisto zares in jih po navodilih meteorologa ing. Filipa Štucina opravljali po mednarodnih predpisih in vodili dnevnik opazovanj. Pri kemiji smo k lanskim analizam dodali določanje klorovih ionov in elementarnega klora v vodi. Pri fiziki pa smo vaje obogatili z določanjem lomnega količnika, viskoznosti, specifičnih toplot in površinske napetosti. Za spremljanje dvigovanja vodne gladine v posodi s stalnim dotokom smo uporabili fotoupornik in računalnik c-64 s programom Pedagoške fakultete iz Maribora. Opazovali smo tudi segrevanje vode v črni, rjavi in beli bakreni cevi, obsevani s sončno svetlobo ter razpravljali o možnosti uporabe sončne energije. Poleg sprotnega merjenja temperature, zračnega tlaka in relativne vlažnosti zraka, smo določali tudi gostoto vode, površinsko hitrost rečnega toka, risali hitrostne profile, preseke rečnega korita, računali pretoke in moč vodnega toka.

Grafične prikaze, račune in meritve, rezultate analiz, poročila o predavanjih in vajah ter ugotovitve o onesnaženosti Tržiške Bistrice, smo zbrali v biltenu.

Onesnaževanje narave, posebej voda, je pomembno vprašanje vsega človeštva, posebej še naravoslovcev. Morda bo kdo med učenci, ki so opravili prvo seznanjanje z raziskovalnim delom v Poletni šoli iz naravoslovja, čez leta, uspešno sodeloval pri njegovem reševanju.

Jože Kotnik

PREDRAČUN TISKARNE —Rešitev iz P—XVI—1

Skupni stroški natisa 2000 knjig po 8.000.— din so 16.000.000.— din (novih seveda). V tem so upoštevani stroški tiskanja ter priprave, stavljenja, izdelave filmov, barve itd. Samo tiskanje ene knjige stane 3.000.— din, tiskanje 2000 knjig pa 6.000.000.— din. Torej odpade na stroške priprave in drugo ne glede na višino naklade kar 10.000.000.— din. Samo natis 1000 izvodov stane 1000 x 3.000.— din, t.j. 3.000.000.— din. Torej znašajo vsi stroški za natis 1000 knjig kar 13.000.000.— din ali 13.000.— din za izvod.

Ciril Velkovrh

Letošnja poletna šola mladih fizikov je bila na Pedagoški akademiji v Ljubljani, od 20.6. do 26.6. 1988. Namenjena je bila dvajsetim najboljšim tekmovalcem prvih letnikov srednjih šol.

Uvodno predavanje je imel dr. Anton Moljk. Pogovarjali smo se o načinih merjenja, o merskih količinah, o merskih enotah, čutilnikih – senzorjih in novih načinih merjenja.

Popoldne nam je profesor Boris Žumer prinesel nenavadno nihalno na vodne kapljice. Idejo za izdelavo tega nihala je dobil, ko je opazoval nihanje rastlin pri polzenju drobnih kapljic po listih. Proučevali smo nihanje tega nihala in skušali ugotoviti, kako spreminjanje posameznih parametrov (debelina kapljice, dolžina ročice, napetost nosilne vrvi itd) vpliva na nihajni čas nihala. Za zaključek smo ponovili še preslikave z ravnim in sferičnim zrcalom, da bi nam bilo delo pri astronomiji lažje.

Drugi dan smo začeli z elektroniko. Ponovili smo osnovne pojme o atomu: energijska stanja atoma, diskretne spektre, proste elektrone. Pregledali smo lastnosti izolatorjev, polprevodnikov in prevodnikov (energijske pasove, valenčni pas, prevodniški pas) in razdelili polprevodnike v donorje in akceptorje. Ponovili smo lastnosti diode, pregledali osnovne vezave in uporabo diode. Drugi del dopoldanske razprave je bil namenjen tranzistorju. Po pregledu delovanja in uporabe tranzistorja smo se lotili praktičnih vaj in tako teoretično znanje preverili. Popoldne smo nadaljevali z vajami. Sestavili smo delilnik napetosti, izmerili tokove in napetosti, dodali termistor in fotoupor, nato pa še tranzistor. Sestavili smo tudi dvostopenjski ojačevalnik.

Tretji dan nas je dr. Peter Prelovšek seznanil s teorijami o nastanku Zemlje. Pregledali smo zanimive diapozitive, se seznanili s sestavo Zemlje in starostjo kamenin ter z načini za določanje njihovih starosti. Zvedeli smo, kako znanstveniki proučujejo spreminjanje zemeljskega magnetnega polja v preteklosti, kako so se premikali kontinenti, kako nastanejo potresi. Naslednje ure smo posvetili geofiziki. Tov. Boris Tomšič nas je seznanil z osnovnimi metodami geofizike: seizmiko (meritve umetno vzbujenih tresljajev tal), gravimetrijo (meritve težnega polja Zemlje), magnetometrijo (meritve magnetnega polja Zemlje), geoelektriko (meritve naravnih in umetno vzbujenih električnih in elektromagnetnih polj v tleh), radiometrijo (meritve naravne in umetne radioaktivnosti v tleh), geotermijo (meritve toplotnega polja Zemlje). Seznanil nas je z osnovnimi načeli dela na terenu, z risanjem modelov, branjem seizmičnih zapisov in interpretacijo dobljenih rezultatov. Popoldne smo naredili tudi dve praktični vaji. Proučevali smo teren pred Pedagoško akademijo in ugotavljali,

kakšna je sestava plasti v globini nekaj metrov, in preizkusili še delo z geoelektrično metodo. Merili smo upornost plasti in iz dobljenih rezultatov s tabelami ugotovili, katere vrste plasti (zemlja, prod) tam najdemo.

Kot se za prave naravoslovce spodobi, smo se morali pogovoriti tudi o drugih pojavih v naravi. Tov. Mirana Trontlja smo poprosili, da nam pove kaj o vremenu. Razložil nam je nastanek front; povedal, kakšne so meje med frontami in kakšni pojavi nastopajo na mejah; kako pride do slabega vremena; kako se giblje suh in vlažen, kako pa topel in hladen zrak. Predstavil nam je instrumente, s katerimi delajo tako poklicni meteorologi kot tisti, ki na opazovalnicah opazujejo vreme. Povedal je, katere količine merimo pri tleh in katere v višinah, ter razložil, kako dobimo meteorološke karte. Pokazal nam je nekaj izredno lepih diapozitivov različnih vremenskih situacij. Obiskali smo tudi Hidrometeorološki zavod in prisostvovali sprejemu satelitske slike vremena in sprejemu radarske slike z Lisce. Opazovali smo, kako posnamejo risanko vremenskih situacij (pregled, kako se gibljejo fronte s časovnim razmikom, ki ga lahko sami določijo). Pregledali smo, kakšno vreme je v krajih, od koder so prišli udeleženci. Sodelavci zavoda so nas seznanili tudi z načini merjenja onesnaženosti zraka, pregledali smo tabele za posamezna področja v različnih letnih časih. Na dvorišču smo si ogledali vremensko opazovalnico in nekaj značilnih instrumentov. Od dela pa nas je pregnal – dež!

Popoldan smo posvetili digitalni elektroniki. Večer smo hoteli preživeti z astronomi. Boris Kham je pripravljaj teren za praktične meritve iz astronomije. Določali smo zorni kot nebesnih teles, risali graf (vzhod zahod in kulminacije preko leta), izračunali maso Zemlje, se učili brati zvezdno karto, poslušali radijsko oddajo o razvoju zvezd. Opazovanje nočnega neba pa je zaradi slabega vremena odpadlo.

Naslednji dan je mag. Aleksander Kregar nadaljeval z digitalno elektroniko. Sestavljali smo različne digitalne sklope. Bolj ko je bilo vezje komplicirano, več vrat je imelo, večja je bila zabava. Učenci so po shemi sestavljali sklope hitro in natančno, čas je hitro mineval.

Astronomija je bila za vse udeležence poletne šole vedno zanimiva, zato smo se lotili teme, ki ni bila odvisna od vremena. Dr. Mitja Rosina je predaval o 19 nevtrinih, ki so prišli iz vesolja. Pogovorili smo se o osnovnih pogojih za eksplozijo super nove; o teorijah, ki pokažejo, kakšni sta temperatura in radij take zvezde in meritvah z nevtroni. Pogledali smo tudi nekaj diapozitivov. Učenci so pridno spraševali, tema jih je izredno pritegnila.

Popolne smo obiskali Institut Jožef Stefan. Ogledali smo si laboratorij, kjer tečejo raziskave o uporabi tekočih kristalov. Potem smo poslušali kratko predavanje o uporabi računalnikov in razvoju računalnikov v prihodnje. Nato

smo sedli za računalnike in napisali nekaj vtisov o poletni šoli.

Zadnji dan smo posvetili osnovnim gradnikom snovi. Dr. Norma Mankoč—Borštnik je pripovedovala o zgradbi snovi, osnovnih gradnikih in osnovnih silah. Ugotovili smo, da izbira, kaj vzeti za gradnike in kaj za sile med gradniki, ni enolična. Ponovili smo osnovna velikostna razmerja med jedrom, atomom in elektroni. Kakšne delce dobimo, ko neki atom obstreljujemo z delci z določeno energijo, lahko napovemo. Kaj pomeni dovolj velika energija? Delcu pripišem energijo, energiji valovno dolžino. Valovna dolžina mora biti primerljiva z velikostjo delcev. Kakšne so sile med delci? Nekatero lahko izmerimo in jih primerjamo z izračunanimi vrednostmi. Nabit delec spremeni lastnosti okolice. Elektron spremeni okolico vsaj na tri načine. Med delci deluje:

- a) Elektromagnetna sila, ki skrbi za pestrost življenja na Zemlji.
- b) Če postavimo v bližino elektrona še en nabit delec, deluje med njima električna sila (odbojna ali privlačna, odvisno od predznaka naboja)
- c) Če postavimo v bližino masni delec brez naboja, deluje gravitacijska sila, ki je (vsaj tako do zdaj kaže) vedno privlačna.
- d) Če je v bližini elektrona nevtrino, delujeta drug na drugega s šibko silo (ta povzroča določene razpade — radioaktivni razpad).
- e) Kvarke še drugače spremeni lastnosti okolice. In kaj so kvarki?

Drobili smo delce, se pogovorili o kvarkih, o silah, o sipanju, o barvi, o kvantni teoriji elektromagnetnega polja in seveda nismo prišli do konca teme. Toda kje je sploh konec?

Nada Razpet

ANEKDOTA

EDISON

Veliki fizik in matematik Edison je bil zelo raztresen. Ko je bil ves zatopljen v študij, mu je gospodinja prinesla za zajtrk presno jajce, ki bi ga morala še skuhati. Edison pa bi bil prav tisti hip rad sam in je gospodinjo odslovil, češ da bo jajce že sam skuhal. Gospodinja ga je poučila, da sme biti jajce v vreli vodi največ tri minute in je nato odšla.

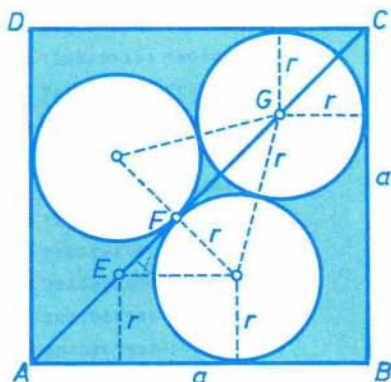
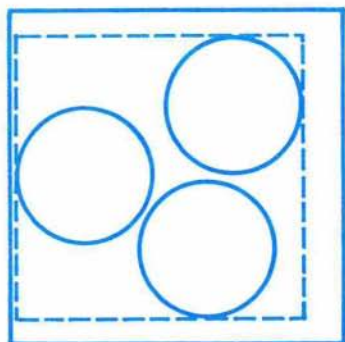
Ko se je čez pol ure vrnila, da bi videla, ali je učenjak že zajtrkoval, je presenečena obstala; učenjak je slonel na mizi in strmel v jajce, ki ga je držal v roki, v ponvi pa je ležala njegova žepna ura.

REŠITVE NALOG

NAGRADNO POKRIVANJE — Rešitev iz P4

Najprej bomo določili lego krogov, ki zagotavlja največji delež pokrite površine. Imenovali jo bomo najboljša lega.

Postavimo tri enake kroge v kvadrat tako, da se ne sekajo. Nato poiščemo najmanjši pravokotnik, ki zajema vse tri kroge in ima robove vzporedne stranicam kvadrata. Vsaj eden od krogov se dotika dveh nevzporednih pravokotnikovih stranic. Torej smemo predpostaviti, da pri najboljši legi eden od krogov leži v kotu kvadrata. Zdaj se lahko prepričamo, da se ga dotikata tudi druga dva kroga, ki poleg tega segata do roba kvadrata in do diagonale, na kateri leži središče prvega kroga.



Poglejmo na sliko in izračunajmo dolžino polmera r krogov v najboljši legi, pri tem pa z a označimo dolžino stranice kvadrata. Očitno velja

$$a\sqrt{2} = \overline{AE} + \overline{EF} + \overline{FG} + \overline{GC} = r\sqrt{2} + r + r\sqrt{3} + r\sqrt{2}$$

odkoder sledi

$$r = \frac{\sqrt{2}}{1 + 2\sqrt{2} + \sqrt{3}} a$$

Iskani delež je torej enak

$$\frac{3\pi r^2}{a^2} = \frac{6\pi}{(1 + 2\sqrt{2} + \sqrt{3})^2} \doteq 0,61$$

ULOMEK Z NAJDALJŠO PERIODO

V drugi letošnji številki smo objavili naslednjo nalogo: poišči tisto naravno število M med 2 in 1000, katerega ulomek $1/M$ ima najdaljšo periodo. Pravilni rešitvi sta nam poslala *Marjan Jerman* iz Trbovelj in *Tomaž Cedilnik* iz Ljubljane. Oba sta s pomočjo računalnika ugotovila, da je to število 983, katerega perioda je dolga 982 mest. Pa jo zapišimo

$$\frac{1}{983} = 0.0010172939\ 9796541200\ 4069175991\ 8616480162\ 7670396744\ 6592065106\ 8158697863\ 6826042726\ 3479145473\ 0417090539\ 1658189216\ 6836215666\ 3275686673\ 4486266531\ 0274669379\ 4506612410\ 9867751780\ 2644964394\ 7100712105\ 7985757884\ 0284842319\ 4303153611\ 3936927772\ 1261444557\ 4771108850\ 4577822990\ 8443540183\ 1129196337\ 7416073245\ 1678535096\ 6429298067\ 1414038657\ 1719226856\ 5615462868\ 7690742624\ 6185147507\ 6297049847\ 4059003051\ 8819938962\ 3601220752\ 7975584944\ 0488301119\ 0233977619\ 5320447609\ 3591047812\ 8179043743\ 6419125127\ 1617497456\ 7650050864\ 6998982706\ 0020345879\ 9593082400\ 8138351983\ 7232960325\ 5340793489\ 3184130213\ 6317395727\ 3652085452\ 6958290946\ 0834181078\ 3316378433\ 3672431332\ 6551373346\ 8972533062\ 0549338758\ 9013224821\ 9735503560\ 5289928789\ 4201424211\ 5971515768\ 0569684638\ 8606307222\ 7873855544\ 2522889114\ 9542217700\ 9155645981\ 6887080366\ 2258392675\ 4832146490\ 3357070193\ 2858596134\ 2828077314\ 3438453713\ 1230925737\ 5381485249\ 2370295015\ 2594099694\ 8118006103\ 7639877924\ 7202441505\ 5951169888\ 0976602238\ 0467955239\ 0640895218\ 7182095625\ 6358087487\ 2838250254\ 3234994913\ 53$$

Pri iskanju si pomagamo z naslednjo trditvijo:

Trditev 1 Število $1/M$ ima v periodi kvečjemu M cifer.

Dokaz: Pri deljenju z M je M ostankov, zato se mora eden od njih slej ko prej ponoviti - v najslabšem primeru pri M -ti decimaliki.

No pravzaprav je dolžina periode lahko največ $M - 1$, saj bi se v nasprotnem primeru med ostanki pojavil tudi ostanek 0 in bi se deljenje torej izšlo.

Večja števila imajo torej lahko daljšo periodo. Zato je smiselno, da začnemo iskati naše število od zadaj. Brž, ko bomo ugotovili, da je število,

za katerega iščemo periodo manjše od dolžine doslej ugotovljene periode, lahko prenehamo z iskanjem. Kot vidimo iz rezultata, nam to prinese kar precejšnji prihranek, saj moramo periodo izračunati le za 19 števil, namesto za 1000.

Pa še nekaj sledi iz dokaza trditve. Če želimo poiskati dolžino periode, si moramo le zapomniti, na katerem koraku se ostanek pri deljenju prvič ponovi, in če od tega odštejemo korak, na katerem se je ta ostanek prvič pojavil, dobimo dolžino periode.

Da bi kar se da hitro ugotovili, če se je ostanek že pojavil kdaj prej, uporabimo tabelo. Tu bomo na i -to mesto vpisali korak, na katerem se ostanek i prvič pojavi. Hkrati pa imamo s tem shranjeno tudi potrebno informacijo, iz katere določimo dolžino periode. Poglejmo si program, napisan v Pascalu

```
program ulomek(output);

{ določi naravno število M med 2 in 1000, katerega
  ulomek 1/M ima najdaljšo periodo }

const zg_meja = 1000;
type interval = 0..zg_meja;
var ostanki : array[interval] of interval;
    naj_perioda : interval;
    m,ost,perioda,i,korak : interval;
    konec : Boolean;

begin
    naj_perioda := 0;    { trenutno najdaljša periodo }
    m := zg_meja;

    while (m > naj_perioda) do      { iscemo, dokler imamo se
                                    možnost, da dobimo
                                    daljšo periodo }
    begin
        for i := 0 to zg_meja do ostanki[i] := 0;
        { določimo periodo 1/M }
        ost := 10; korak := 0; konec := false;
        repeat { dokler se ostanek ne ponovi }
```

```

korak := korak + 1;
ost := ost mod m; { novi ostanek }
if ostanki[ost] <> 0 then {ostanek se je
                        pojavil že prej }
    begin
        perioda := korak - ostanki[ost];
        konec := true
    end
else ostanki[ost] := korak; {ostanek ost nastopa
                            prvic; zapomnimo si
                            na katerem koraku }

    ost := ost * 10
until konec;
if perioda > naj_perioda then naj_perioda := perioda;
m := m - 1
end;
writeln('Najdaljšo periodo (', naj_perioda,
        ') dobimo pri M = ', m + 1);
end.

```

Rešitev pa lahko najdemo tudi drugače. Še vedno ne bo šlo brez računalnika, vendar tokrat ne bomo uporabili tabele. Idejo za to rešitev smo si izposodili v knjigi *Z računalnikom v matematiko*, ki je izšla lansko leto pri DZS v zbirki Računalniška obzorja.

Osnovo programa predstavlja naslednja trditev, ki jo je nemški matematik K. F. Gauss dokazal pred skoraj 200 leti, leta 1801.

Trditev 2 Okrajšani ulomek r/s ima periodo dolžine p po t neperiodičnih cifrah, kjer sta p in t takole določena:

- zapiši imenovalac v obliki $s = 2^u 5^v q$, kjer sta si q in 10 tuji števili. Tedaj je t enak večjemu izmed u in v
- če je $q = 1$, je $p = 1$, sicer pa je p tisto najmanjše število, za katero q deli $10^p - 1$

Omenimo še, da je Tomaž opazil, da imajo števila, ki se razlikujejo za faktorja 2 ali 5 enako dolgo periodo, kar očitno sledi iz gornje trditve.

V programu bomo najdaljšo periodo še vedno iskali od konca

proti začetku, torej bo ogrodje programa isto. Le periodo vsakega števila bomo iskali malo drugače. S krajšanjem ulomka ne bo problemov, saj je $1/m$ že okrajšan. Za vsako število bomo določili q tako, da bomo m delili z 2, dokler bo to šlo brez ostanka in nato še z 5. Tako bomo dobili q in iz le-tega določili še dolžino periode p .

```
program ulomek2(output);
```

```
{ doloci naravno stevilo M med 2 in 1000, katerega
  ulomek 1/M ima najdaljšo periodo brez uporabe tabele}
```

```
const zg_meja = 1000;
```

```
var
```

```
    naj_perioda : integer;
```

```
    m,p,q,s : interval;
```

```
begin
```

```
    naj_perioda := 0;    { trenutno najdaljša periodo }
```

```
    m := zg_meja;
```

```
    while (m > naj_perioda) do          { iscemo, dokler imamo
                                          se možnost, da dobimo
                                          daljšo periodo }
```

```
    begin
```

```
        { določimo periodo 1/m }
```

```
        q := m;
```

```
        while q mod 2 = 0 do q := q div 2;
```

```
        while q mod 5 = 0 do q := q div 5; { določili smo q }
```

```
        if q > 1 then begin
```

```
            p := 0; s := 1;
```

```
            repeat { dokler q ne deli  $10^p - 1$  }
```

```
                s :=  $10^s \bmod q$ ;
```

```
                p := p + 1
```

```
            until s = 1
```

```
        end else p := 1;
```

```
        if p > naj_perioda then naj_perioda := p;
```

```
        m := m - 1
```

```
    end;
```

```
    writeln('Najdaljšo periodo (' , naj_perioda,
```

```
        ') dobimo pri M = ', m + 1);
```

```
end.
```

Marjanu in Tomažu smo kot nagrado poslali knjigo M. Gardnerja *Aha! Pa te imam*. Za konec si pogledjmo še nekaj nadaljših period

Matija Lokar

max	M	d.per.
2000	1979	1978
3000	2971	2970
4000	3989	3988
5000	4967	4966
6000	5981	5980
7000	6983	6982
8000	7949	7948
9000	8971	8970
10000	9967	9966

DEŽEVNE KAPLJICE

Med "rekreativnim" odmorom je deževalo. Mateja se je zazrla v deževne kapljice, ki so enakomerno padale iz oblakov, in se zamislila: "Le koliko jih bo med dvajset minutnim odmorom padlo na asfaltirano šolsko ploščad? Koliko na bližnjo zelenico? Na streho sosednje hiše? .. Bi jih znala prešteti? Kako? Kako prešteti travne bilke na zelenici, zrnca peska na dvorišču, liste na bližnjem drevesu ... ?"

Kako bi se tega lotila? Zakaj? Zaradi dolgočasja? Za zabavo? Da nekaj počne — premišljuje? Ali bi to lahko koristno uporabili? Naučili smo se, kako hitro preštejemo opeke na strehi, kvadratke na karirastem listu papirja in ploščice na tleh ali na steni, sedeže v dvorani in še kaj. Kaj bi svetovali Mateji, da bi lahko čim bolj učinkovito rešila problem? Mislite, da je reševanje tega in podobnih problemov le miselna telovadba? Kateri novi problemi in vprašanja se ob tem lahko pojavijo?

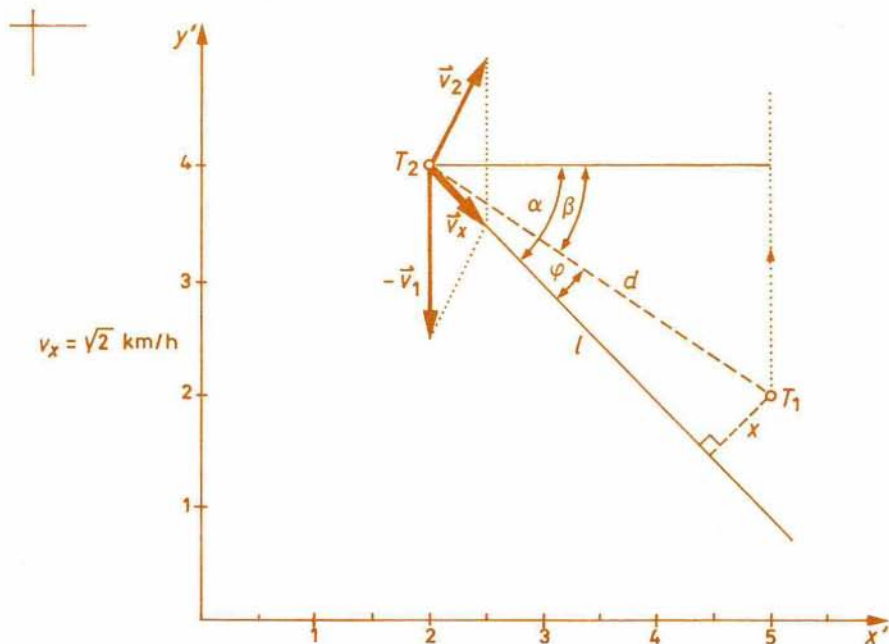
Sodelujte pri reševanju problema! Opišite način(e) reševanja in ga (jih) preizkusite. Razmislite in poizvejte, ali znane metode za reševanje Matejine naloge in podobnih problemov že uporabljajo. Pišite nam o svojih odkritjih in o uporabi načinov preštevanja ter nam pošljite tudi rezultate meritev. Najboljše prispevke bomo objavili in nagradili.

Mateja vam bo, tako za odgovore kakor za predloge in druge zastavljene probleme, hvaležna. O njih bo razmišljala med kakšno pusto in deževno uro, med odmorom v celodnevni šoli pa tudi doma.

Jože Kotnik

TRIKTRAT O NEKI NALOGI — Rešitev s str. 351

A) Nalogo lahko rešujemo upoštevaje *Galilejevo transformacijo*. Ta transformacija nam omogoča, da pri računanju upoštevamo, kot da prva ladja miruje, druga pa se premika glede na njo s hitrostjo $\vec{v}_x = \vec{v}_2 + (-\vec{v}_1)$. Z drugimi besedami, koordinatni sistem, v katerem bomo sedaj računali, "se vozi" s prvo ladjo z enako hitrostjo v isti smeri.



Slika 1

Izračunajmo najprej d (slika 1)

$$d = \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2}$$

$$d = \sqrt{(2 - 5)^2 + (4 - 2)^2} = \sqrt{13} \text{ km}$$

Hitro ugotovimo, da $\alpha = 45^\circ$ in $\sin \beta = 2/\sqrt{13}$. Ker velja $\varphi = \alpha - \beta \Rightarrow \varphi \doteq 11,3^\circ$.

Najmanjša razdalja med ladjama je pravokotnica x , za katero velja

$$x = d \cdot \sin \varphi = 0,707 \text{ km}$$

To bo po času t

$$t = \frac{l}{v_x} = \frac{x}{\operatorname{tg} \varphi \cdot v_x} = \frac{d \cdot \sin \varphi}{v_x \cdot \operatorname{tg} \varphi} = \frac{d \cdot \cos \varphi}{v_x} = 2,5 \text{ h}$$

Razdalje do mornarja dobimo od tu zelo enostavno: k legam v koordinatnem sistemu $x'y'$ prištejemo razdaljo, ki jo je ta koordinatni sistem prevozil v primerjavi s koordinatnim sistemom xy t.j. $Y = 2,5 \text{ h } 3 \text{ km/h} = 7,5 \text{ km}$.

B) Poglejmo drugi način. Poti ladij se sečeta v točki S pod kotom α (za kot α se hitro ugotovi, da velja $\operatorname{tg} \alpha = 0,5$ ali $\cos \alpha = 2/\sqrt{5}$). Ob času $t = 0$, sta ladji oddaljeni za l_1 oz. za l_2 od točke S (slika 2). Za razdaljo d med ladjama velja vsak trenutek enačba (upoštevaje *kosinusni izrek*)

$$d^2 = (l_1 - v_1 t)^2 + (l_2 - v_2 t)^2 - 2(l_1 - v_1 t)(l_2 - v_2 t) \cos \alpha$$

Če enačbo malo preuredimo,

$$d^2 = (v_1^2 + v_2^2 - 2v_1 v_2 \cos \alpha) t^2 - 2[(l_1 v_1 + l_2 v_2) - (l_1 v_2 + l_2 v_1) \cos \alpha] t + (l_1^2 + l_2^2 - 2 l_1 l_2 \cos \alpha)$$

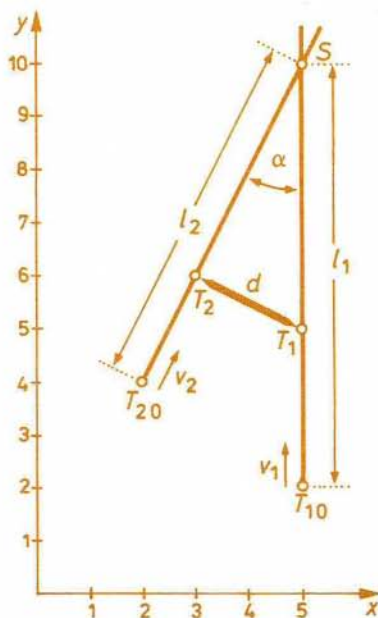
vidimo, da predstavlja naša kvadratna enačba za d^2 funkcijo, katere graf je parabola s koeficienti a, b, c

$$y = d^2 = at^2 + bt + c$$

Zadostuje, da najdemo *teme* parabole, in že imamo odgovor na prvi dve vprašanji (tam doseže funkcija najmanjšo vrednost = najmanjša razdalja med ladjama). Kot vemo, je teme parabole $P(t, y)$ podano z

$$t = -\frac{b}{2a}, \quad y = d_{\min}^2 = -\frac{D}{4a}$$

kjer je D *diskriminanta* gornje kvadratne enačbe $D = b^2 - 4ac$. V našem prime-



Slika 2

ru velja

$$a = (v_1^2 + v_2^2 - 2 v_1 v_2 \cos \alpha)$$

$$b = 2 [(l_1 v_1 + l_2 v_2) - (l_1 v_2 + l_2 v_1) \cos \alpha]$$

$$c = (l_1^2 + l_2^2 - 2 l_1 l_2 \cos \alpha)$$

Sedaj zlahka zapišemo izraza za najmanjšo razdaljo med ladjama in za čas po katerem bo ta dosežena:

$$d = \left\{ \frac{(v_1^2 + v_2^2 - 2 v_1 v_2 \cos \alpha)(l_1^2 + l_2^2 - 2 l_1 l_2 \cos \alpha) - [(l_1 v_1 + l_2 v_2) - (l_1 v_2 + l_2 v_1) \cos \alpha]^2}{v_1^2 + v_2^2 - 2 v_1 v_2 \cos \alpha} \right\}^{1/2}$$

$$t = \frac{(l_1 v_1 + l_2 v_2) - (l_1 v_2 + l_2 v_1) \cos \alpha}{v_1^2 + v_2^2 - 2 v_1 v_2 \cos \alpha}$$

ker je $l_1 = \sqrt{45}$ km, $v_1 = 3$ km/h, $l_2 = 8$ km, $v_2 = \sqrt{5}$ km/h, sledi

$$d_{\min} = \frac{1}{\sqrt{2}} = 0,707 \text{ km}, \quad t = 2,5 \text{ h}$$

Sami lahko odgovorite še na tretje vprašanje.

C) Pa pogledjmo še tretjo rešitev, ki je namenjena tistim, ki so v matematiki že malo bolj podkovani. Zapisali bomo *parametrsko* obliko enačb gibanja

$$x_1 = 5$$

$$x_2 = 2 + t$$

1. ladj

2. ladj

$$y_1 = 2 + 3t$$

$$y_2 = 4 + 2t$$

Zaradi večje preglednosti smo opustili pisanje enot (kot tudi prej), kar pa v tem primeru ni velik greh, ker je vsa stvar enostavna. Zapišimo izraz za razdaljo med ladjama $s = T_1 T_2(t)$ in zahtevajmo, naj bo le-ta minimalna:

$$s = \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2}$$

$$s = \sqrt{(2 + t - 5)^2 + (4 + 2t - 2 - 3t)^2}$$

$$s = \sqrt{2t^2 - 10t + 13} = \min$$

Da zadovoljimo zahtevi, mora biti *odvod* te funkcije enak 0

$$\frac{ds}{dt} = \frac{2t - 5}{(2t^2 - 10t + 13)^{1/2}} = 0 \Rightarrow t = 2,5 \text{ h}$$

Razdalja med ladjama ob tem času je $s_{\min} = \sqrt{2}/2 = 0,707$ km. Iz parametrickih enačb gibanja dobimo tudi legi ladij ob času $t = 2,5$ h

$$\left. \begin{array}{l} x_1 = 5 \text{ km} \\ y_1 = 9,5 \text{ km} \end{array} \right\} \text{ 1. ladja} \qquad \left. \begin{array}{l} x_2 = 4,5 \text{ km} \\ y_2 = 9 \text{ km} \end{array} \right\} \text{ 2. ladja}$$

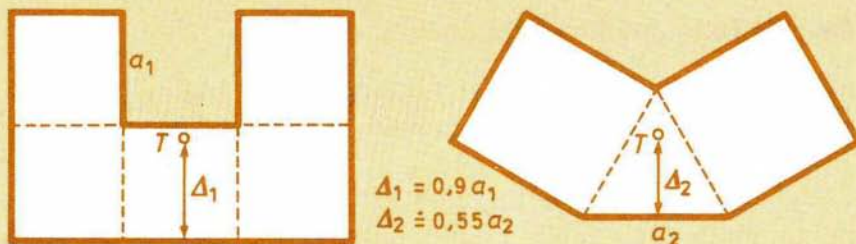
od tu pa hitro razdalji od mornarja do njiju.

Božidar Casar

TEŽIŠČA IN TRIJE RAČUNI — Rešitev iz P5

1. Težišče prve homogene plošče ne leži na njej, pač pa je od njenega notranjega vogala oddaljeno (navzven po diagonali) približno 0,02 enote. (Težišči drugih dveh plošč sta dani na slikah.

2.



3. Obe enakosti hkrati ne moreta veljati. Iz desne enakosti preberemo, da je $I = 0$, zato je $S = 9$ (glej tretji stolpec leve enakosti!), in tedaj $P + E = 18$ ali 19, kar pa ne more biti res.

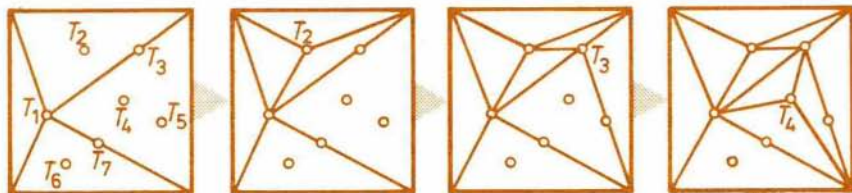
4. Račun ima rešitev

$$\begin{array}{rclcl} 2613 & : & 39 & = & 67 \\ + & & + & & \times \\ 3604 & - & 3459 & = & 145 \\ \hline 6217 & + & 3498 & = & 9715 \end{array}$$

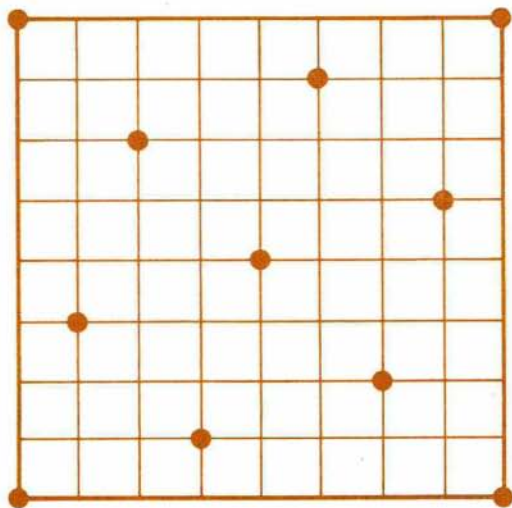
Boris Lavrič

PIR – Rešitev iz P–4

- a) Označimo oglišča kvadrata z A, B, C in D , ostale točke iz M pa s $T_1, T_2, \dots, T_7$. Povežimo z daljicami T_1 z A, B, C in D ter s tem razdelimo kvadrat na štiri trikotnike. Nato T_2 z daljicami zvežemo z oglišči vseh tistih (od omenjenih) trikotnikov (lahko je eden ali pa sta dva), ki jim ta točka pripada. Kvadrat smo tako razdelili na šest trikotnikov. Če s tem postopkom nadaljujemo po vrsti do točke T_7 , razpade kvadrat na 16 trikotnikov. Vsaj eden od njih meri kvečjemu 1 cm^2 .



- b) Glej sliko.



Boris Lavrič

3. REPUBLIŠKO TEKMOVANJE IZ LOGIKE – Rešitve nalog s strani 352

V vsaki skupini nalog smo izbrali eno, pri kateri bomo natančno opisali potek reševanja. Za ostali dve pa navajamo samo pravičen odgovor.

7. razred

1. V vsakem primeru mora biti lončar Kolar.
2. Andrejeva druga izjava ne more biti resnična – če bi bila resnična, bi bila resnična Borisova druga izjava, ki pravi, da Andrej laže. Če je tretja Andrejeva izjava resnična, potem se je pogovarjal pred časom s profesorjem, kar pomeni, da njegova prva izjava ni resnična.

Andrej je dal torej vsaj dve neresnični izjavi.

Recimo, da je druga Borisova izjava resnična. Potem so vse Andrejeve izjave neresnične. Zato morajo biti neresnične tudi vse Borisove izjave, to pa je protislovje. Zato je druga Borisova izjava neresnična. To pomeni, da je prva Andrejeva izjava resnična (ostali dve pa neresnični). Andrej torej ni umoril profesorja.

Recimo, da je tretja Borisova izjava resnična (zdaj vemo, da je točno ena njegova izjava resnična). Potem so vse Cenetove izjave lažne, posebej še druga, torej Boris še ni imel bodala. Potem pa je tudi prva Borisova izjava resnična. Toda to ni mogoče, ker je samo ena Borisova izjava resnična. Sledi, da je tretja Borisova izjava lažna, prva pa resnična. Sledi, da Boris ni ubil profesorja.

Profesorja je torej ubil Cene.

3. Rezultati so:

$$\begin{array}{lll} A:B - 1:2 & B:C - 1:0 & C:D - 0:0 \\ A:C - 3:3 & B:D - 1:0 & \\ A:D - 2:0 & & \end{array}$$

8. razred

1. Vrstni red je: A, E, B, C, D.
2. Vrstni red je: Cilka, Danica, Aleša, Breda, Erna. Ker Erna dobro razmišlja in je bila najslabša, so vsa dekleta inteligentna.
3. Tudi moštvo D je odigralo vsaj dve tekmi, saj ima razliko 4:7 in en neodločen rezultat, ker pa je skupna vsota odigranih tekem (prve kolone) soda, je moštvo D tudi odigralo točno dve tekmi. Ker je eno igralo nerešeno,

je drugo izgubilo, saj je sprejelo več golov, kot jih je dalo.

Moštvo A je eno tekmo izgubilo, saj ima razmerje golov 3:3, vemo pa, da je eno tekmo dobilo. Zmagalo je lahko le proti C in to z rezultatom 0:2 (ker mora z zmago 3:1 imeti vsoto golov 3:3).

Preostaneta še tekmi B:D in C:D. Ker je moštvo B izgubilo z A, je moralo z D igrati neodločeno; tekma C:D pa se je končala s porazom kluba D. Moštvo B je dalo A-ju en gol, preostale 3 pa D-ju. Zato se je tekma B:D končala 3:3.

Sledi, da se je tekma C:D končala 4:1.

Končni rezultati:

A:B – 3:1 B:D – 3:3

A:C – 0:2 C:D – 4:1

1. letnik SI

1. Vrstni red je: B, E, A, C, D.

2. Tov. Brinovec ne more biti ne zidar ne ribič. Ker se ne ukvarja s predelavo brinovca, mora biti čuvaj. Tov. Zidar ni ribič, ni čuvaj in ni zidar. Zato je pridelovalec brinovca. Tov. Ribič je zidar.

Tov. Brinovec ne nosi rdeče srajce, tudi bele ne, in ker je čuvaj, tudi črne ne. Torej nosi zeleno srajco. Tov. Čuvaj ne nosi črne ne zelene ne rdeče (ker je ribič), torej nosi belo srajco. Tov. Ribič ne nosi rdeče srajce, pa tudi bele in zelene ne. Nosí torej črno.

Za tov. Zidarja ostane rdeča srajca.

Rezultat :

Ribič – zidar – črna

Čuvaj – ribič – bela

Brinovec – čuvaj – zelena

Zidar – p. brinovca – rdeča

3. Rezultati so: A:B – 1:0, A:C – 1:0, B:C – 3:3

2. letnik SI

1. a) Oba lovca belega sta promovirana! Beli je v šahu z lovcem na c8. Katera je bila zadnja poteza črnega?

Z lovcem na c8 ne gre, ker je lahko prišel le s takšnih polj, da bi bil beli že prej v šahu. S kraljem iz f5 na g5 tudi ni mogoče, saj bi bil črni kralj v šahu z dveh strani. Kmet b7 je na svojem izhodiščnem položaju. Ostane torej le kmet g3. Ta seveda ni mogel priti s polja g4, ker bi bil beli tedaj v

šahu. Edina možnost je, da je kmet na g4 en passant vzel belega kmeta, ki je pred tem prišel iz g2, da zaščiti kralja, ki je dobil šah s potezo kmet f5 – f4. To pa pomeni, da je bil kraljevi lovec vzet na izhodiščnem položaju in sta oba lovca promovirana.

b) Če je Sever dal vse pravilne izjave, jih je zaradi tretje izjave dal tudi Ribnikar. Toda Severjeva druga izjava in Ribnikarjeva prva nista skladni – vsaj ena je napačna. Sever torej ni dal samih resničnih izjav.

Recimo, da je Jančar dal same pravilne izjave. Potem so vsi stavki Severja napačni, pa tudi prva in druga izjava Ribnikarja sta napačni, ker nista v skladu z Jančarjevo drugo in tretjo izjavo. Seveda je zato napačna tudi tretja Ribnikarjeva izjava, pa tudi četrta.

Ali so lahko vse Ribnikarjeve izjave resnične? V tem primeru sta resnični dve Jančarjevi izjavi, dve pa neresnični. Napačni sta gotovo druga in tretja izjava, torej je četrta Jančarjeva izjava resnična. Vse Severjeve izjave so napačne, tudi tretja, v kateri pravi, da so vse Ribnikarjeve izjave resnične. To je protislovje.

Jančar je torej dal štiri pravilne izjave, druga dva pa same nepravilne.

2. Razvrstitev je bila takale:

	šarm	ženskost	intuicija
Petra	3	2	3
Karla	2	1	1
Rozi	1	3	2

3. Rezultate zapišimo v tabelo:

	A	B	C	D	E
A		1:0	1:0	0:1	1:0
B			4:3	0:0	–
C				2:2	4:4
D					–
E					

3. letnik SI

1. Mesta za Draga in Acija so lahko: prvo oz. tretje ali drugo oz. četrto ali tretje oz. peto. Upoštevajmo še, da Edi ni prvi.

Kdaj lahko Ciril logično izpelje uvrstitve?

- Ciril je prvi. Potem ne more ugotoviti ali gre pri Dragu in Aciju za drugo oz. četrto ali tretje oz. peto mesto.
- Ciril je drugi. Potem ne more ugotoviti ali gre pri D. in A. za prvo oz. tretje ali tretje oz. peto mesto.

- c) Ciril je tretji. Potem sta D. oz. A. druga oz. četrta. Ker Edi ni prvi, je zadnji. Brane je prvi.
- d) Ciril je četrti. Potem ne more ugotoviti, ali gre pri D. in A. za prvo oz. tretje ali treje oz. četrto mesto.
- e) Ciril je peti. Potem ne more ugotoviti ali gre pri D. in A. za prvo oz. tretje ali drugo oz. četrto mesto.

Rezultat: B, D, C, A, E.

2. Zapišimo vrstni red v tabelo:

	MAT.	GRŠČ.	LAT.
A	3	5	3
B	2	2	5
C	1	3	2
D	4	4	1
E	5	1	4

3. Rezultati so:

A:B – 0:1

A:C – 0:0

A:D – 7:0

A:E – 1:0

B:C – 2:2

B:E – 4:0

C:D – 3:3

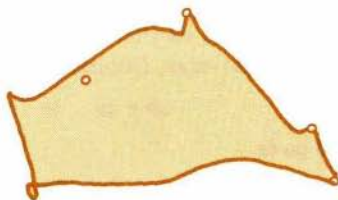
Izidor Hafner in Nežka Mramor-Kosta

BOLJ ZA ŠALO KOT ZARES

SAJ NI RES, PA JE

Vsi poznate krožnico. Je množica točk, ki so enako oddaljene od središča. Pa veste, kako si človek ogleduje takšno množico točk?

Znanstveniki so si pomagali s kamerami. Gibi oči so jim dali sliko, ki je krogu le malo podobna (točka pomeni mirovanje oči, črta pa skokovit gib z očmi):



Dušica Boben

1. a) Naj bo ABC enakokraki TV -trikotnik s krakoma AB in AC ter višino AA_1 in BB_1 . Višina BB_1 je kateta pravokotnega trikotnika BCB_1 , zato je krajša od osnovnice BC in velja

$$\overline{AC} + \overline{BB_1} < \overline{AC} + \overline{BC} = \overline{AB} + \overline{BC}$$

Torej mora biti (glej sliko in upoštevaj, da je ABC TV -trikotnik)

$$a + v = 2b$$

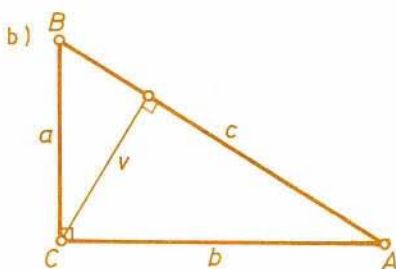
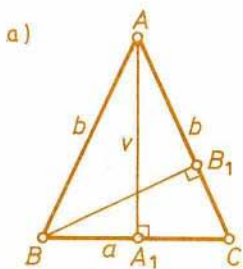
po Pitagorovem izreku za AA_1C pa še

$$a^2 + 4v^2 = 4b^2$$

Če kvadriramo prvo enakost in upoštevamo drugo, dobimo $3v^2 = 2av$, torej velja

$$v = (2/3)a, \quad b = (5/6)a$$

Vsi enakokraki TV -trikotniki so potemtakem podobni trikotniku z osnovnico dolžine 6 in krakoma, ki merita 5.



b) Dokažimo, da pravokotnega TV -trikotnika ni. Vsota dolžin katete in hipotenuze je očitno večja od vsote dolžin druge katete in višine nanjo, ki sovpada s prvo kateto. Bolj zanimivo je preveriti, če je vsota dolžin obeh katet manjša od vsote dolžin hipotenuze in višine nanjo:

Poglejmo oznake na sliki, izrazimo ploščino trikotnika na dva načina in uporabimo Pitagorov izrek. Dobimo

$$ab = cv \quad \text{in} \quad a^2 + b^2 = c^2 < c^2 + v^2$$

od tod pa še

$$(a + b)^2 = a^2 + b^2 + 2ab < c^2 + v^2 + 2cv = (c + v)^2$$

in nazadnje $a + b < c + v$.

2. Zapišimo $3^n + 7 = m^2$ ($m, n \in \mathbb{N}$) in upoštevajmo, da je vsota na levi sodo za vsak $n \in \mathbb{N}$. Zato je tudi število m sodo, m^2 pa deljiv s 4. Odtod sledi, da potenca 3^n pri deljenju s 4 da ostanek 1. Ostanki pri deljenju 3^n s 4 so zaporedoma za $n = 1, 2, 3, 4, \dots$ enaki 3, 1, 3, 1, ..., torej je n sodo število. Zato velja $n = 2k$ ($k \in \mathbb{N}$) in

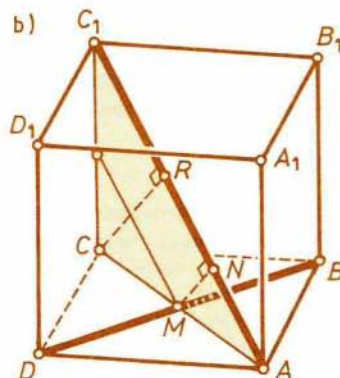
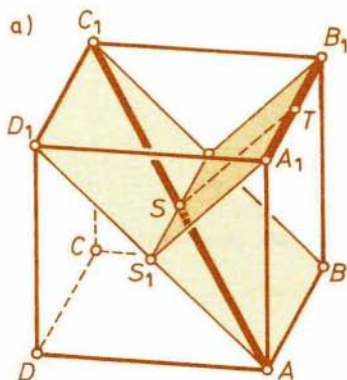
$$7 = m^2 - 3^{2k} = (m - 3^k)(m + 3^k)$$

Ker je 7 praštevilo, dobimo enakosti

$$m - 3^k = 1, \quad m + 3^k = 7$$

z edino rešitvijo $m = 4, k = 1$. Torej je $n = 2$.

3. a) Pomagali si bomo s sliko a. Izračunajmo razdaljo med robom A_1B_1 in diagonalo AC_1 . Rob A_1B_1 je vzporeden ravnini skozi točke A, C_1, D_1 in od nje oddaljen $A_1S_1 = (\sqrt{2}/2)a$. To je tudi oddaljenost med točko T z roba A_1B_1 in najbližjo točko S z diagonale AC_1 , torej razdalja med obema daljicama.



b) Poglejmo sliko b in določimo razdaljo med diagonalo BD stranske ploskve in telesno diagonalo AC_1 . Le-ta je vzporedna ravnini, ki gre skozi točki B, D in razpolovišče P roba CC_1 . Zato je iskana razdalja d enaka dolžini pravokotnice MN , ki pa je pol krajša od višine CR pravokotnega trikotnika AC_1C . Iz enakosti

$$\overline{AC} \cdot \overline{CC_1} = \overline{CR} \cdot \overline{AC_1}$$

dobimo $\overline{CR}$ in nato še $d = \sqrt{2/3} a$.

Boris Lavrič

PRESEK, 16 (1988/89) številke 1 – 6 – STVARNO KAZALO

Matematika

strani od – do

1. Prostornina paraboloida (Boris Lavrič)	4 – 7
2. O lihih magičnih kvadratih (Borut Zalar)	8 – 11
3. Glasbena lestvica (1) in (2) (Marija Vencelj)	I, 12 – 16, 66 – 73
4. O čem v televizijskem dnevniku ni moč slišati? (Vilko Domajnko)	75 – 79, 348
5. Geometrijska ponazoritev skrčenja dolžine in podaljšanja časa (Marko Razpet)	80 – 81
6. O praštevilih (Boris Lavrič)	82 – 89, 117
7. Matematične neenakosti pod napetostjo (Miran Černe, Igor Kukavica)	126 – 128
8. Šahovski kralj izbira vzorec (Marko Razpet)	130 – 131
9. Sredini na tehtnici (D.M. Milošević, prir. in prev. Boris Lavrič)	194 – 196
10. Že spet premica (M. Malenica, prev. in prir. Damjan Kobal)	238 – 239
11. Plavanje v dveh tekočinah (Marija Vencelj)	258 – 263
12. Kvadratna enačba pri Babiloncih (Milena Strnad)	271 – 273
13. Diofantske enačbe v geometriji (Edvard Kramar)	274 – 280, 302
14. Teta Amalija in kaos (Peter Petek, slike Andrej Vitek)	282 – 287
15. Newtonova naloga (Marija Vencelj)	312 – 315
16. Bliže k razdalji (Boris Lavrič)	316 – IV
17. Möbiusov trak (Milena Strnad)	I, 321
18. Kako narisati letalsko krilo (Janez Aleš)	IV, 328
19. Zakaj so antene parabolične? (Janez Strnad)	IV, 334

Računalništvo

1. Kaj se zgodi, ko prižgemo računalnik (Veselko Guštin)	38 – 40
2. Čarobna sedmica (P.J. Davis, W.G. Chinn, prev. in prir. Mojca Lokar)	41 – 47
3. Izpopolnimo logo na mavrici (Vladimir Batagelj)	100 – 102
4. Šahovski kralj izbira vzorec na zaslonu (Marko Razpet)	I, 152 – 153
5. Želva gre na sprehod (Matija Lokar)	154 – 158
6. O igri petnajst in permutacijah (Sandi Klavžar)	159 – 163
7. Lačni črv (Matija Lokar)	214 – 220
8. K nalogam s 3 republiškega tekmovanja osnovnošolcev iz računalništva (Sandi Klavžar)	343

Fizika

1. Gladina vode v vrteči se posodi (Janez Strnad)	17 – 21
2. Tek v dežju (Marjan Hribar)	22 – 23
3. Dogodek v ploščatem kondenzatorju (Gorazd Planinšič)	90 – 94
4. Jojo (Janez Strnad)	132 – 137
5. Obratni brizgalnik (Janez Strnad)	197 – 202
6. Ali je jajce kuhano? (Janez Strnad)	I, 264 – 270
7. Astronomski daljnogled (Janez Strnad)	338

Astronomija

1. Končno: Supernova (Tomaž Zwitter)	24 – 30
2. Merjenje višine severnice (Marijan Prosen)	96 – 99
3. Opazuj šestzvezdje (Marijan Prosen)	138 – 139
4. Stari kitajski astronomski instrumenti (Marijan Prosen)	I, 210 – 213
5. Astronomski daljnogled z vrtečim se kapljevinskim zrcalom (Janez Strnad)	350

Naloge

1. Nagradni pravokotnik (Boris Lavrič)	3, 270
2. Predračun tiskarne (Ciril Velkovrh)	3, 361
3. Najbolj kvadratasto leto (Tomaž Pisanski)	16
4. Gladka nagradna naloga (Boris Lavrič)	30, 305
5. Kateri ulomek je to? (Peter Petek)	31
6. Tri stare naloge (Boštjan Tratar)	37
7. 1988 (Boris Lavrič)	47, 55 – 56
8. Trd oreh (Boris Lavrič)	47, 56
9. Naloga o višini Sonca in najdaljši senci (Marijan Prosen)	51, 57 – 58
10. Kvadrati z najdaljšim repom (Vladimir Batagelj)	51
11. Parki (Boris Lavrič)	52, 58 – 59
12. Dotikanje (Boris Lavrič)	89, 122
13. Plašča (Boris Lavrič)	89, 123
14. Projekcija (Boris Lavrič)	89, 122 – 123
15. Matematični krožek (Boris Lavrič)	99, 124
16. Eksistenca (Boris Lavrič)	102, 115
17. Ulomek z najdaljšo periodo (Matija Lokar)	105, 366
18. Naloge bralcev (Aktiv matematikov Slovenske Konjice, prir. Damjan Kobal)	112 – 113
19. Naloge bralcev (D.M. Milošević, prev. Peter Petek)	137, 189
20. Matematični krožek (Boris Lavrič)	152, 190
21. Matematični krožek (Boris Lavrič)	196, 203
22. Nagradno pokrivanje (Boris Lavrič)	209, 365
23. Kvadrat in sedem točk (Boris Lavrič)	222, 375
24. Prelivanje (Boris Lavrič)	223, 359
25. Sadeži (Vladimir Batagelj)	231
26. Nekaj načrtovalnih nalog (Pavle Zajc)	245, 256
27. Matematični krožek (Boris Lavrič)	257, 298
28. Težišča in računi (Boris Lavrič)	281, 374
29. Razvrščanje števil (D. M. Milošević, prev. Damjan Kobal)	280, 297
30. Lonec (Ciril Velkovrh)	294, 299
31. Težka lahka naloga (Ciril Velkovrh)	299, 315
32. Zaboje steklenic Radenske (Ciril Velkovrh)	301, 303
33. Dve iracionalni (Boris Lavrič)	326, 349
34. Matematični krožek (Boris Lavrič)	342, 380
35. Kokosovi orehi in poštena opica (Marija Vencelj)	348
36. Trikrat o neki nalogi (Božidar Casar)	351, 371
37. Deževne kapljice (Jože Kotnik)	370

Tekmovanja

1. 4. šolsko in 14. izbirno tekmovanje srednješolcev iz matematike
(Darjo Felda) 48 – 51, 118 – 121, 186 – 187
2. 23. tekmovanje za srebrno Vegovo priznanje
(Aleksander Potočnik) 106 – 107, 114 – 115
3. 24. republiško tekmovanje osnovnošolcev iz matematike
(Aleksander Potočnik) 108 – 111, 116 – 117
4. 32. republiško tekmovanje srednješolcev iz matematike (Angelca Jaklič) 164 – 168
5. 19. zvezno tekmovanje osnovnošolcev iz matematike
(Aleksander Potočnik) 168 – 169, 184 – 185
6. 26. republiško tekmovanje srednješolcev iz fizike (Iztok Kukman) 170 – 175
7. 3. republiško tekmovanje iz računalništva za osnovnošolce (Ivan Gerlič) 176 – 182
8. Tudi lokiga dobiva mesto na slovenskih šolah (Marta Zabret) 240 – 245, 306 – 311
9. 29. zvezno tekmovanje srednješolcev iz matematike (Aleksandar Jurišić) 246 – 248
10. 24. zvezno tekmovanje iz fizike (Bojan Golli) 249 – 255
11. Tekmovanje zamejskih Slovencev iz logike
(Nežka Mramor–Kosta) 290 – 291, 300 – 301
12. 3. republiško tekmovanje iz logike – Rešitve nalog str. 376
(Izidor Hafner, Nežka Mramor–Kosta) 352

Nove knjige

1. Batagelj V., in dr., Enajsta šola Računalništva – Rešene naloge
z republiških tekmovanj 1977 – 1987 (Sandi Klavžar) 63
2. Gardner M., Aha! Pa te imam (Zvonimir Bohte) 149 – 151
3. Strnad J., Iz take so snovi kot sanje (Norma Mankoč–Borštnik) 150
4. Strnad J., Mala kvantna fizika (Mitja Rosina) 222
5. Računalništvo – Leksikon Cankarjeve založbe (Matija Lokar) 223
6. Devide V., Zabavna matematika (Damjan Kobal) 273

Novice

1. Uvodnik (Boris Lavrič, Ciril Velkovrh) 1
2. Pisma bralcev (Damjan Kobal) 37
3. Spominske znamke leta 1987 (Janez Strnad) 103
4. Pavel Kunaver, 1889 – 1988 (Bogdan Kilar) 104 – 105
5. Turingova nagrada (Sandi Klavžar) 140 – 141
6. Srečanje mladih raziskovalcev (Pavla Ranzinger, Marija Vencelj,
Anton Moljk) 141 – 145
7. Profesor Ivan Vidav – častni član slovenskega društva matematikov, fizikov
in astronomov (Peter Legiša) 146 – 147
8. Urnik tekmovanj v letu 1989 (Darjo Felda) 233 – 237
9. 3. poletna šola Intertrade – IBM (Izidor Hafner) 293
10. Poletna šola Tržič (Jože Kotnik) 360
11. Poletna šola mladih fizikov (Nada Razpet) 362

Rešitve nalog

1. Poišči vsa tri mesta (Peter Petek)	31
2. Nagradna naloga ob Ramanujanovi obletnici (Marko Petkovšek)	53 – 55
3. Zodiak (Boris Lavrič)	293
4. Pisma bralcev (Dušica Boben)	95

Razvedrilo .

1. Dobra in slaba novica (Damjan Kobal)	36
2. Je res $7 = 8$? (Dušan Modic)	60, 293
3. Papirnati naslanjač (Boris Lavrič)	64 – IV
4. Kratkočasne vžigalice (Roman Rojko)	2/II, III, 3/II, 191 – III
5. Brez besed (Boris Lavrič)	148, 255
6. Tri srca (Boris Lavrič)	202, 255
7. Kovanci (Sandi Klavžar)	202
8. Papirnate jasli (Boris Lavrič)	226 – 228
9. Tri modre (Vilko Domajnko)	229 – 231
10. Natečaj (prev. Boris Lavrič)	248

PRESEK — list za mlade matematike, fizike, astronome in računalnikarje 16. letnik, šolsko leto 1988/89, številka 6, strani 321 – 384

UREDNIŠKI ODBOR: Vladimir Batagelj, Dušica Boben (pisma bralcev, stavljenje teksta), Darjo Felda (tekmovanja iz matematike), Franci Forstnerič, Bojan Golli (tekmovanja iz fizike), Marjan Hribar, Damjan Kobal (razvedrilo), Jože Kotnik, Edvard Kramar, Sandi Klavžar (računalništvo), Andrej Kmet, Peter Križan (fizika), Boris Lavrič (matematika, odgovorni urednik), Gorazd Lešnjak, Matija Lokar, Franci Oblak, Peter Petek (premisli in reši), Pavla Ranzinger (astronomija), Tomaž Skulj, Marjan Smerke (svetovalec za fotografijo), Bojan Mohar (glavni urednik), Tanja Bečan (jezikovni pregled), Miha Štalec (risbe), Ciril Velkovich (urednik, nove knjige, novice).

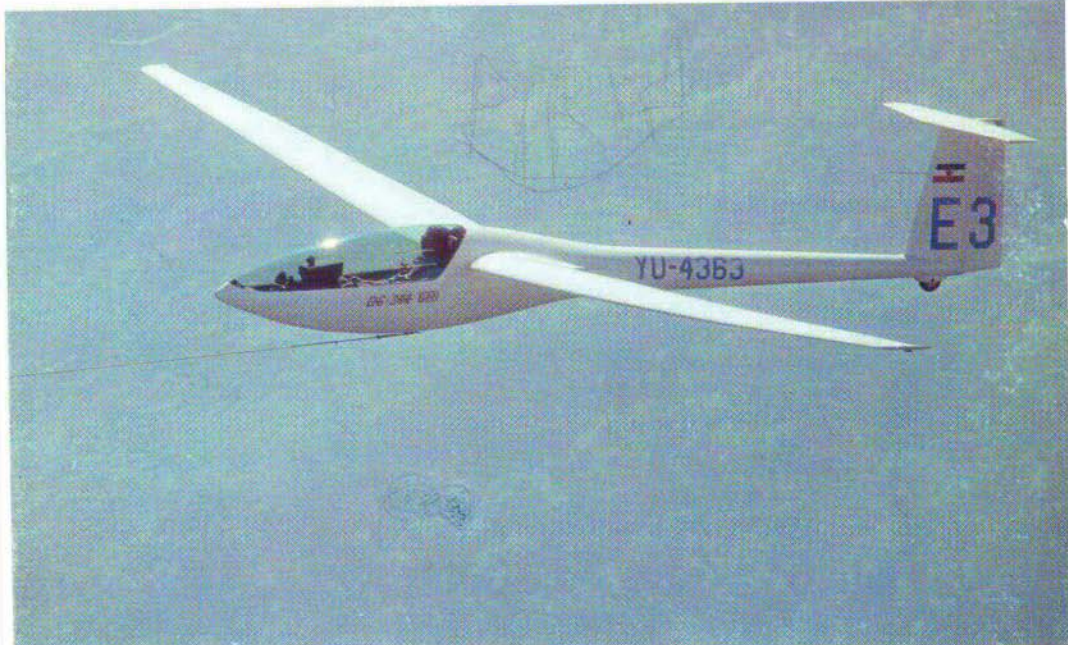
Dopise pošiljajte in list naročate na naslov: Društvo matematikov, fizikov in astronomov SRS — Podružnica Ljubljana — Komisija za tisk, Presek, Jadranska c. 19, 61111 Ljubljana, p.p. 64, tel. (061) 265–061/53, št. žiro računa 50101–678–47233. Naročnina za šolsko leto 1988/89, vplačana po 1.1. 1989, je za posamezne naročnike 15.000.— din, za člane društva 12.000.— din, za skupinska naročila šol 10.000.— din, posamezna številka 2.500. din (2.000.— din).

List sofinancirajo Izobraževalna, Kulturna in Raziskovalna skupnost Slovenije

Ofset tisk Časopisno in grafično podjetje DELO, Ljubljana

© 1989 Društvo matematikov, fizikov in astronomov SRS — 954

ISSN 0351–6652



Matematika in fizika sta nepogrešljivi stroki pri konstruiranju jadralnih letal. (Glej članek na strani 328).

Ko zaide Sonce in nastopi noč, se začne delo tudi na večzrcalnem daljnogledu (MMT) na gori Hopkins v Arizoni (ZDA). Daljnogled sestavlja šest zrcal s premerom 1.8 m, kar ustreza odprtini 4,5 m. (Glej članek na str. 338.)

