



5

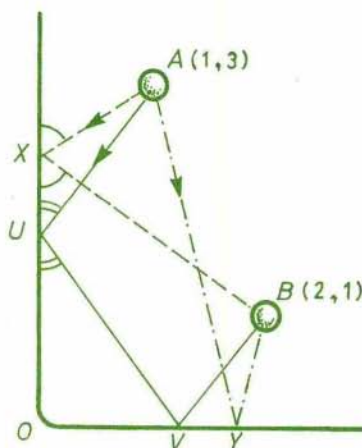
PRESEK

DRUŠTVO MATEMATIKOV, FIZIKOV IN ASTRONOMOV SRS LETNIK 16, 1988-89,

VSEBINA

MATEMATIKA	Plavanje v dveh tekočinah (Marija Vencelj)	258
FIZIKA	Ali je jajce kuhano? (Janez Strnad)	264
MATEMATIKA	Kvadratna enačba pri Babiloncih (Milena Strnad)	271
NOVE KNJIGE	Devide V., Zabavna matematika (Damjan Kobal)	273
MATEMATIKA	Diofantske enačbe v geometriji — Nasveti za reševanje nalog str. 302 (Edvard Kramar)	274
RAČUNALNIŠTVO	Teta Amalija in kaos (Peter Petek, slike Andrej Vitek)	282
RAZVEDRILO	Slikovna križanka — Nove knjige (Marjan Škvorc)	288
TEKMOVANJA	Tekmovanja zamejskih Slovencev iz logike — Rešitve nalog str. 300 (Nežka Mramor—Kosta)	290
NOVICE	Pisma bralcev (Dušica Boben, Ivan Pucelj)	292
	3. poletna šola Intertrade — IBM (Izodor Hafner)	293
	Presekov škrat (Boris Lavrič, Damjan Kobal)	293
	Raziskovalni dnevi iz matematike (Peter Šemrl)	294
	Anketa (Dušica Boben)	295
	Anekdota — Newton	301
MATEMATIKA	Newtonova naloga (Marija Vencelj)	306
	Bliže k razdalji (Boris Lavrič)	316
NALOGE	Matematični krožek — Rešitev str. 298 (Boris Lavrič)	257
	Razvrščanje števil — Rešitev str. 297 (D.M.Milošević, prev. Damjan Kobal)	280
	Težišča in računi (Boris Lavrič)	281
	Lonec — Rešitev str. 299 (Ciril Velkoverh)	294
	Težka lahka naloga — Rešitev str. 315 (Ciril Velkoverh)	299
	Zaboj steklenic radenske — Rešitev str. 301 (Ciril Velkoverh)	303
REŠITVE NALOG	Nagradni pravokotnik — Rešitev iz P/1 (Boris Lavrič)	270
	Petkova Petra — Rešitev iz P XV/4. Za vraževerne — Rešitev iz P XV/6 (Boris Lavrič)	287
	Premisli in reši — Rešitev iz P/1 (Peter Petek)	304
	Slikovna križanka — Rešitev iz P/4 (Marko Bokalič)	304
	Gladka nagradna naloga — Rešitev iz P/1 (Boris Lavrič)	305
	Izbirno tekmovanje iz logike — Rešitve nalog iz P/1 (prev. in pripr. Marta Zabret)	308
NA OVITKU	Za Velikonoč bomo jedli le kuhane pirhe (glej članek na str. 264. Foto Marjan Smerke)	I

1. Kateri dve cifri manjkata v desetiškem zapisu
 $\square 109094 \square 171709440000$
produkta vseh naravnih števil od ena do enaindvajset?
2. Proti kateri točki roba biljardne mize je treba usmeriti kroglo A (glej sliko), da bo po enem odboju (dveh odbojih) zadela kroglo B? Odbojni kot krogle je enak vpadnemu.
3. Kocka in pravilni četverec (tetraeder) imata natanko tri oglišča skupna. Dokaži, da eno do oglišč te kocke razpolavlja eno do telesnih višin četverca.



Boris Lavrič

PRESEK — list za mlade matematike, fizike, astronome in računalnikarje 16. letnik, šolsko leto 1988/89, številka 5, strani 257 — 320

UREDNIŠKI ODBOR: Vladimir Batagelj, Dušica Boben (pisma bralcev, stavljenje teksta), Darjo Felda (tekmovanja iz matematike), Franci Forstnerič, Bojan Golli (tekmovanja iz fizike), Marjan Hribar, Damjan Kobal (razvedrilo), Jože Kotnik, Edvard Kramar, Sandi Klavžar (računalništvo), Andrej Kmet, Peter Križan (fizika), Boris Lavrič (matematika, odgovorni urednik), Gorazd Lešnjak, Matija Lokar, Franci Oblak, Peter Petek (premisli in reši), Pavla Ranzinger (astronomija), Tomaž Skulj, Marjan Smerke (svetovalac za fotografijo), Bojan Mohar (glavni urednik), Tanja Bečan (jezikovni pregled), Miha Štalec (risbe), Ciril Velkovrh (urednik, nove knjige, novice).

Dopise pošiljajte in list naročajte na naslov: Društvo matematikov, fizikov in astronomov SRS — Podružnica Ljubljana — Komisija za tisk, Presek, Jadranska c. 19, 61111 Ljubljana, p.p. 64, tel. (061) 265-061/53, št. žiro računa 50101-678-47233. Naročnina za šolsko leto 1988/89, vplačana po 1.1. 1989, je za posamezne naročnike 15.000.— din, za člane društva 12.000.— din, za skupinska naročila šol 10.000.— din, posamezna številka 2.500.— din (2.000.— din).

List sofinancirajo Izobraževalna, Kulturna in Raziskovalna skupnost Slovenije
Ofset tisk Časopisno in grafično podjetje DELO, Ljubljana

© 1989 Društvo matematikov, fizikov in astronomov SRS — 947

PLAVANJE V DVEH TEKOČINAH

Nedavno je minilo natanko 2200 let od smrti *Arhimeda*, enega največjih matematikov vseh časov. Umrli je pod mečem rimskega vojaka leta 212 pred našim štetjem, ko so v drugi punski vojni Rimljani zasedli njegove rodne Sirakuze. Smrt ga je doletela v starosti 75 let, medtem ko je sklonjen nad risbo v pesku reševal matematičen problem.

Arhimed velja za muzejski primerek zagrizenega misleca. Kadar je globoko razmišljal o matematiki, je pozabljal na hrano in na spanje. Glede pozabljivosti v zvezi z oblačenjem pa je prekosil vse. Tako je do slavnega odkritja o vzgonu, ki nosi po njem ime Arhimedov zakon, prišel med opazovanjem svojega, v kadi potopljenega telesa. Navdušen nad spoznanjem je tak, kot je bil, stekel iz kadi na ulice Sirakuz in vzklikal: "Hevreka, hevreka!" (Našel sem, našel sem!)



Slika desno: Arhimed (287–212)

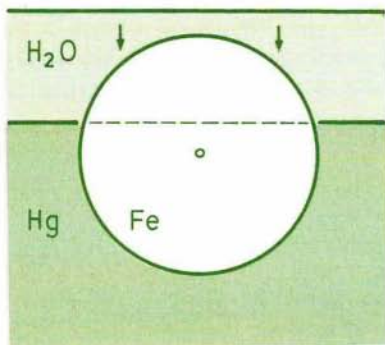
Arhimedu dolgujemo številna velika odkritja v matematiki, mehaniki in astronomiji, najbolj pa je znan prav po zakonu o hidrostatičnem vzgonu, s katerim deluje mirujoča tekočina na potopljeno telo. Zakon srečajo pri nas učenci v sedmem razredu osnovne šole in se glasi:

Mirujoča tekočina deluje na potopljeno telo s silo, ki kaže navpično navzgor in je enaka teži izpodrinjene tekočine. To silo imenujemo (hidrostatični) vzgon.

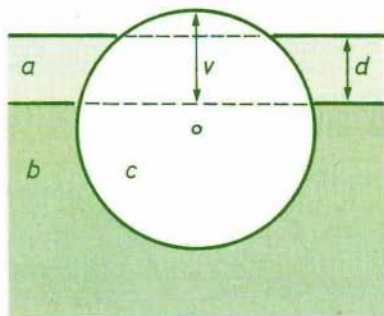
Po tem uvodu, skromnem za tako častitljivo obletnico, si za ilustracijo Arhimedovega zakona ogledajmo nalogo, napovedano že v naslovu:

Na živo srebro, na katerem plava železna krogla, začnemo nalivati vodo in to počnemo toliko časa, da voda kroglo prekrije. Ali se bo pri tem krogla glede na gladino živega srebra dvignila, spustila ali ostala na svojem mestu? Kaj se s kroglo dogaja, medtem ko se vodna gladina dviga?

Spominjam se živahnega prerekanja, ki se je ob vprašanju vnelo v pisani počitniški družbi ob morju. Nekateri so menili, da se bo krogla še bolj potopila v živo srebro, ker bo pač morala nekako potoniti v od sebe redkejši vodi. Drugim se je dozdevalo, da voda pritiska kroglo navzdol, ker vodo pravzaprav nalijemo na kroglo, glede na to, da je gostota železa večja od polovične gostote živega srebra in je situacija taka, kot jo kaže slika 1.



Slika 1



Slika 2

Potem smo ugotovili, da voda, ki je gostejša od zraka, prav gotovo ustvarja neki dodatni vzgon, ko zalije zgornji krogelni odsek. Ta dodatna sila kroglo vleče iz živega srebra. S tem pa se zmanjša vzgon zaradi manjše potopitve v živo srebro, kar spet sili kroglo navzdol. Ravno dovolj različnih mnenj in dvomov, da se spravimo k računanju!

Železna krogla res plava na živem srebru, ker je gostota železa

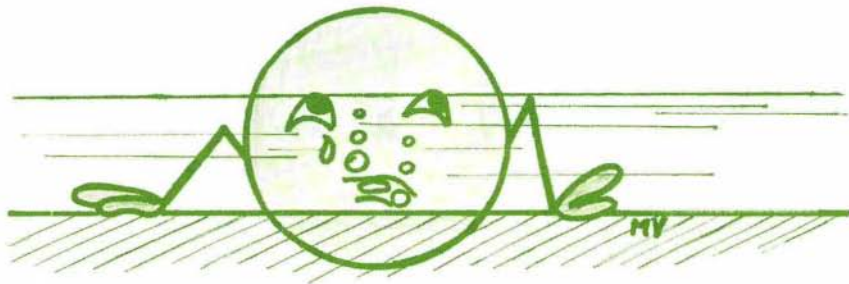
$7,9 \cdot 10^3 \text{ kg/m}^3$, gostota živega srebra pa $13,6 \cdot 10^3 \text{ kg/m}^3$. Domenimo se, naj krogla plava kar v "jezeru" živega srebra, saj bi pri premajhni posodi morali upoštevati tudi dodatne vplive na kroglo zaradi pojavov ob stenah posode.

Nalogo si bomo že na začetku zastavili nekoliko splošnejše. Dani naj bosta dve tekočini, ena z gostoto a , druga z gostoto b , in krogla s polmerom r iz snovi z gostoto c . Pri tem naj velja

$$a \leq c < b$$

Označimo z d debelino plasti zgornje tekočine (to je seveda tista z gostoto a) in z v višino krogelnega odseka nad gladino spodnje gostejše tekočine (slika 2). Zanima nas, kako se spreminja v , ko d narašča po pozitivnih vrednostih. Naloge se lahko lotimo tako, da vse prostornine krogelnih odsekov in plasti, ki jih potrebujemo, takoj izrazimo z r , v in d in nato uporabimo Arhimedov zakon. Zdi se, da bi tako že s prvim zamahom ugnali našo nalogo. Zvezo med v in d bi sicer resda dobili, toda to je algebraična enačba tretje stopnje za v in za d s koeficienti, v katerih nastopajo polmer krogle r in vse tri gostote a , b in c . Iz nje bi težko razbrali še tako grobo zvezo med v in d . Zato bomo nalogo rešili drugače. Omenjeno enačbo bomo izpeljali šele na koncu.

Najprej bomo nalogo fizikalno poenostavili. Namesto, da imamo nad spodnjo tekočino plast zgornje tekočine debeline d , si lahko predstavljamo, da je nad spodnjo tekočino neka *namišljena* tekočina, ki kroglo povsem prekriva, in ima tako gostoto ρ , da ustvarja na kroglo enak vzgon kot dejanska situacija. Če vzamemo, da obdaja ves sistem namesto zraka kar vakuum, je na začetku ρ enak nič. Ko d narašča, gostota fiktivne tekočine tudi narašča (po katerem zakonu nas ne bo zanimalo, važno je le to, da očitno raste) do vrednosti a , to je do gostote zgornje tekočine.



Plavanje v dveh tekočinah (Marija Vencelj)

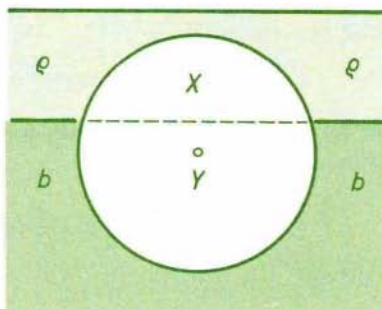
Razen tega bomo za začetek delali kar s prostorninami. To med drugim pomeni, da bodo dobljene "prostorninske" formule veljavne za vsako v dveh tekočinah plavajoče telo (pri pogoju $a \leq c < b$), ne le za kroglo. Označimo z V prostornino plavajočega telesa, z X prostornino tistega dela, ki je nad stično ravnino obeh tekočin, in z Y prostornino dela, ki je pod to ravnino (slika 3).

Imamo

$$X + Y = V$$

in po Arhimedovem zakonu

$$\rho X + b Y = c V$$



Odtod sledi

$$X = \frac{b-c}{b-\rho} V,$$

Slika 3

Dobljeni rezultat pove več, kot smo morda pričakovali. Ko se večja ρ , se večja tudi X . Torej je X naraščajoča funkcija gostote fiktivne tekočine ρ , ta pa je, kot vemo, naraščajoča funkcija debeline plasti zgornje tekočine d . Sledi: X je naraščajoča funkcija debeline d . Za kroglo to pomeni, da je *v naraščajoča funkcija spremenljivke d* . Ko torej višina zgornje tekočine narašča, se plavajoče telo počasi dviga iz spodnje tekočine. Prostornina X dela telesa nad stično ploskvijo obeh tekočin narašča od

$$X_0 = \frac{b-c}{b} V \quad \text{do} \quad X_1 = \frac{b-c}{b-a} V$$

Če vstavimo podatke za naš primer živega srebra, vode in železne krogle, to je $a = 1$, $b = 13,6$ in $c = 7,9$ (vse seveda pomnoženo z 10^3 kg/m^3), dobimo, da gleda na začetku iz živega srebra $0,419 V$, ko kroglo voda povsem pokrije, pa $0,452 V$.

Formula $X = \frac{b-c}{b-\rho} V$ pove še več. Izpeljana je bila sicer za fiktivno tekočino gostote ρ , a velja vedno, če ima zgornja tekočina gostoto ρ in povsem prekriva plavajoče telo, da je $\rho \leq c < b$. Če je $\rho = c$, dobimo $X = V$, kar je edino smiselno, saj mora zgornja tekočina, če ima gostoto enako gostoti plavajočega telesa, telo povsem dvigniti iz spodnje tekočine.

Ostane nam še, da poiščemo obljubljeno enačbo med višino v krogelnega

odseka nad gladino spodnje tekočine in višino d plasti zgornje tekočine.

Prostornina krogelnega odseka z višino v je

$$V(v) = \frac{\pi}{3} v^2 (3r - v)$$

Nobene omejitve splošnosti ne predstavlja, če vzamemo, da je polmer krogle enak 1. Za splošen primer bo treba v rezultatih samo namesto v in d pisati rv in rd . Vzeli bomo torej

$$V(v) = \frac{\pi}{3} v^2 (3 - v) = \frac{\pi}{3} f(v)$$

kjer je $f(v) = v^2 (3 - v)$. Pomagajmo si s sliko 2 in uporabimo spet Arhimedov zakon. Dobimo

$$c \cdot \frac{4}{3} \pi = b \left[\frac{4}{3} \pi - \frac{\pi}{3} f(v) \right] + a \left[\frac{\pi}{3} f(v) - \frac{\pi}{3} f(v-d) \right]$$

in od tod

$$f(v) = 4 \frac{b-c}{b-a} - \frac{a}{b-a} f(v-d) \quad (1)$$

Ker je $0 \leq a < b$, iz te formule, razen za $a = 0$, sledi, da je prostornina tistega dela krogle, ki gleda iz spodnje tekočine, padajoča linearna funkcija prostornine tistega dela, ki gleda iz zgornje tekočine. Za $a = 0$ je $f(v) = 4(b-c)/b$, torej konstanta, kar je smiselno, saj to pomeni, da je zgornja tekočina vakuum in se kropla res ne premakne.

Ko je $d = v$, je kropla povsem pokrita z zgornjo tekočino. Denimo, da je tedaj višina krogelnega odseka, ki gleda iz spodnje tekočine, enaka v_1 , torej $d = v = v_1$. Tedaj imamo

$$f_1 = f(v_1) = 4 \frac{b-c}{b-a} \quad (2)$$

Če je $d = 0$, je $v = v_0$, kjer je v_0 višina krogelnega odseka, ki gleda iz težje tekočine, preden dodamo lažjo tekočino. Označimo $f_0 = f(v_0)$, upoštevajmo (2) in vstavimo v (1). Dobimo

$$-\frac{a}{b-a} = -\frac{f_1 - f_0}{f_0}$$

Enačba (1) preide v

$$f(v) = f_1 - \frac{f_1 - f_0}{f_0} f(v-d) \quad (3)$$

ali, če zapišemo s sorazmerjem

$$\frac{f(v-d)}{f_0} = \frac{f_1 - f(v)}{f_1 - f_0} \quad (4)$$

Na levi imamo razmerje med prostornino krogelnega odseka, ki gleda iz zgornje tekočine pri višini d zgornje tekočine, in prostornino odseka, ki gleda iz spodnje tekočine, če ni zgornje tekočine. Lahko bi tudi rekli, da je to razmerje med prostorninama odsekov, ki gledata iz vse tekočine v danem trenutku (to je pri danem d) in na začetku (pri $d = 0$). Na desni pa je razmerje med prostorninama plasti, za katero se bo krogla še dvignila iz spodnje tekočine od danega trenutka dalje, in plasti, za katero se v celem (od $d = 0$ do z zgornjo tekočino popolnoma prekrite krogle) dvigne iz spodnje tekočine. Formula (4) pove, da sta opisani razmerji za vsak d med seboj enaki (faktor $\pi/3$, ki nas prevede na prostornine, je v formuli (4) krajšan).

Če izrazimo v (3) $f(v)$ in $f(v-d)$ z v in d in enačbo uredimo, dobimo

$$f_1 v^3 - 3[(f_1 - f_0)d + f_1]v^2 + 3(f_1 - f_0)d(2+d)v + f_1 f_0 - (f_1 - f_0)d^2(3+d) = 0 \quad (5)$$

Koeficient f_1 bi bil enak nič le v primeru, ko bi bila krogla vsa potopljena v spodnjo tekočino; toda predpostavili smo, da je gostota krogle c manjša od gostote spodnje tekočine b , in se to ne zgodi. Torej enačbo (5) lahko z f_1 krajšamo. Če označimo še

$$\mu = 1 - f_0/f_1 = a/b$$

preide (5) v

$$v^3 - 3(\mu d + 1)v^2 + 3\mu d(2+d)v - \mu d^2(3+d) + f_0 = 0 \quad (6)$$

kjer je μ parameter, po velikosti med 0 in 1. Zanimivo je, da nastopa gostota c plavajoče krogle le v f_0 , torej vpliva le na prosti člen enačbe. Četudi smo enačbo poenostavili, kolikor je bilo mogoče, ni tako preprosta, da bi iz nje zlahka razbrali, da se v večja, če d raste od 0 do v_1 . Naša prvotna pot je bila preprostejša. Seveda pa brez enačbe (6) ne gre, če nas ne zanima le kvalitativen rezultat, mapak tudi kvantitativen, to je dejanska višina v pri dani debelini d .

Za živo srebro, vodo in železno kroglo ima enačba (6) obliko

$$v^3 - 3(0,0735d + 1)v^2 + 0,2205d(2+d)v - 0,0735d^2(3+d) + 1,676 = 0$$

Pri danem d jo še najlažje rešimo numerično.

Marija Vencelj

ALI JE JAJCE KUHALO?

Kuhanje jajc ni tako preprosto, kakor se zdi na prvi pogled. Marsikomu se je že primerilo, da je bilo mehko kuhano jajce preveč surovo ali pretirno. Na izid pri kuhanju vplivajo začetna temperatura jajca in vode, prostornina, globina in gibanje vrele vode, velikost jajca in njegova lega v vodi, čas ohlajanja in predvsem čas kuhanja. Nerodno je to, da je jajce že razbito, ko spoznamo, da je kuhano premalo ali preveč. Ali bi lahko ugotovili, kako je kuhano, ne da bi ga razbili? To je za fizika, ki mora poslušati, da je njegova stroka neživljenjska, dobrodošlo vprašanje.

Nanj je že odgovoril nemški fizik starejše generacije Heinz Maier—Leibnitz v članku *Neporušna merjenja na jajcu za zajtrk*. Še v času, ko je uspešno raziskoval, je objavil kuharsko knjigo. Sladokusci pravijo, da je v njej veliko valjivih receptov.

Pravilno kuhano jajce za zajtrk je pomembno za družinski mir. Pri tem se na nenavaden način prepletata obe kulturi po C.P.Dnowu. Gospodinja, ki sta ji matematika in tehnika tuji, mora uporabiti kvantitativne tehnične postopke v nenehno se spreminjajočih okoliščinah (velikost jajc, gibanje vode, čas čakanja na moža). Mož pa, čeprav je morda predstavnik tehnično—znanstvene kulture, nič ne prispeva razen morda nekonstruktivnega godrnjanja, ko je jajce že razbito. Ker se zdi, da je hišni mir zopet v modi, smo se lotili problema. Prejšnji premislek je pokazal pot: gospodar mora dobiti delo in sprejeti odgovornost, da je jajce prav skuhan, in to, preden ga razbije — neporušno. Način je — kot velikokrat (spomnimo se Kolumba) — za razmišljajočega se človeka na dlani: notranje trenje.

....

Tudi pri tehničnem razvoju moramo upoštevati želje uporabnikov. Zamislimo si gosta velikega hotela, ki privleče pri zajtrku iz žepa srebrno napravo, položi vanjo jajce in izjavi: "Prosim, kuhajte jajce še 25 sekund v razgibani vreli vodi in ga potem 5 sekund hladite v curku hladne vode."

H.Maier—Leibnitz, *Zerstörungsfreie Messungen am Frühstücksei*, Physik und Didaktik 15 (1987) 182

Zagotovo veste, da je mogoče trdo kuhano jajce preprosto ločiti od surovega. Jajce poskusimo zavrteti na vodoravni podlagi. Surovo jajce se prekopicuje in po kratkem času zaustavi, medtem ko se kuhano jajce giblje precej dlje. Deli trdo kuhanega jajca se namreč drug glede na drugega ne gibljejo, skoraj tako, kot da bi bilo jajce togo. Jajce zavira le trenje podlage. Deli suro-

vega jajca pa se gibljejo drug glede na drugega in med njegovimi plastmi delujejo zaradi židkosti dodatne zaviralne sile. Na začetku se vsi deli surovega jajca ne gibljejo enako in se deli, ki se gibljejo, zaradi dodatnih zaviralnih sil hitro zaustavijo.

Glede gibanja je med surovim in trdo kuhanim jajcem izrazita razlika. Pričakujemo, da se mehko kuhano jajce giblje dlje kot surovo, a se zaustavi prej kot trdo kuhano. Deli mehko kuhanega jajca se lahko drug glede na drugega premaknejo, vendar velika židkost gibanje plasti precej bolj ovira kot pri surovem jajcu.

H.Maier—Leibnitz je preskusil to misel z merjenji. Jajce je v posrebrni žlici ali jekleni posodici postavil pokonci in spustil. S stoparico je meril čas, dokler se jajce ni zaustavilo. Ta čas je bil pri mehko kuhanem jajcu 3 do 3,6—krat daljši in pri trdo kuhanem 6,2 do 6,3—krat daljši kot pri surovem. Preglednica kaže povprečje petih njegovih merjenj, ki so bila na okoli 5% natančna.

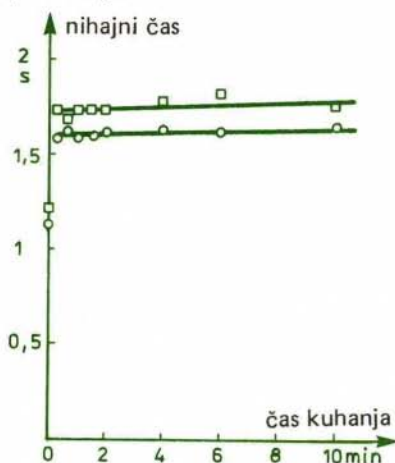
	Čas zaustavljanja		
	surovo jajce	mehko kuhano jajce (kuhano 3 minute 40 sekund in nato 5 sekund hlajeno v curku hladne vode)	Trdo kuhano jajce (kuhano 8 minut in nato 5 sekund hlaje- no v curku hladne vode)
srebrna žlica	9 s	27 s	56 s
jeklena posodica	11 s	40 s	69 s

Vprašanja se lotimo še mi, toda nekoliko drugače. Merimo s posebnima nihaloma. Tanek obroč iz stekla pleksi obesimo na tri dolge nitke. Ko ga malo zavrtimo iz ravnovesne lege in spustimo, sučno zaniha. Zaniha tudi, ko položimo na obroč jajce. Pri prvem nihalu ima obroč krožno odprtino, v katero položimo jajce z navpično geometrijsko osjo. Pri drugem pa ima obroč eliptično odprtino, v katero položimo jajce z vodoravno geometrijsko osjo. Nihajni čas obeh nihal je tem daljši, čim bolj se obroč z jajcem upira pospeševanju pri vrtenju. Kako je nihajni čas odvisen od časa kuhanja jajca?

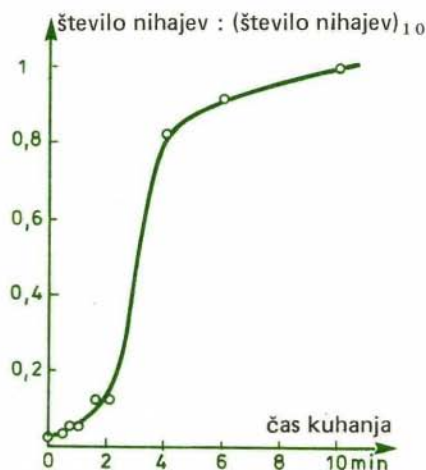
Za poskuse smo uporabili sveža jajca JATA z maso okoli 70 gramov. Jajca, ki smo jih hranili čez noč zunaj hladilnika, smo dali vsako posebej kuhati v vrelo vodo v skoraj polnem pollitrskem lončku. Jajce se je kuhalo v navpični

legi zaradi mehurjev, ki so nastajali pri vrenju. Po določenem času, ki smo ga izmerili s stoparico – 20 s, 40 s, 1 min, 1,5 min, 2 min, 4 min, 6 min in 10 min – smo jajce vzeli iz lončka in ga 5 sekund hladili pod curkom hladne vode. Z merjenjem smo počakali, dokler se ni jajce ohladilo na sobno temperaturo. Nato smo izmerili nihajni čas z geometrijsko osjo jajca v navpični legi in nato še nihajni čas z geometrijsko osjo jajca v vodoravni legi. Pri surovem jajcu smo merili čas enega nihaja; pri jajcih, ki smo ju kuhali 20 ali 40 sekund, čas dveh nihajev in pri drugih jajcih čas petih nihajev. Diagram (slika 1) kaže nihajni čas, ki smo ga dobili kot povprečje petih merenj. Večina merenj je bila na 1% natančnih. Pri različnih časih kuhanja smo merili z različnimi jajci, ki niso bila vsa natančno enako velika in niso imela natančno enakih mas. Vseeno se je zdelo, da so takšna merjenja bolj smiselna, kot da bi že ohlajeno jajce ponovno dajali v vrelo vodo.

Nihajni čas trdo kuhanega jajca je precej daljši kot nihajni čas surovega. Toda mehko kuhano jajce in jajce, ki ga damo v vrelo vodo samo za 20 sekund in ki zagotovo še ni mehko kuhano, imata domala enak nihajni čas kot trdo kuhano jajce. Tega – za načrtovalca poskusa obžalovanja vrednega izida – ni težko pojasniti. Plasti beljaka tik pod lupino, ki predvsem vplivajo na nihajni čas, se hitro segrejejo in strdijo. Zato z merjenjem nihajnega časa ni mogoče razločiti mehko kuhanega jajca od surovega. Ugotovimo lahko le, ali je bilo jajce vsaj 20 sekund v vreli vodi ali ne. To velja za nihanje z navpično in z vodoravno geometrijsko osjo jajca. Nihajni čas je pač pri nihanju z vodoravno osjo malo daljši, ker so deli jajca bolj oddaljeni od osi in se bolj upirajo pospeševanju pri vrtenju.



Slika 1



Slika 2

Uporabnejše izide je dalo drugačno merjenje. Obroč z jajcem smo zasukali za kot 30° iz ravnovesne lege okoli navpične osi. Nato smo obroč z jajcem spustili in prešteli nihaje, dokler se niso zmanjšali na dvajsetkrat manjšo vrednost. Merili smo samo z nihalom, pri katerem je bila geometrijska os jajca navpična. Diagram (slika 2) kaže to število nihajev v odvisnosti od časa kuhanja. Da ni v diagramu neprijetno velikih podatkov, smo število nihajev delili s številom nihajev (13)) pri jajcu, ki se je kuhalo 10 minut. Merjenje te vrste je bilo manj natančno, a je razločno pokazalo, da se lastnost jajca med kuhanjem v času od nekaj več kot 2 minut do 4 minut znatno spremenijo. V tem času se jajce mehko skuha.

Ko smo jajca razbili, se je pokazalo, da je bil po 4 minutah kuhanja beljak skoraj popolnoma strjen, le plast tik ob rumenjaku še ni bila čisto strjena. Rumenjak je bil še tekoč. Kaže, da se začne rumenjak strjevati šele po nekaj manj kot 6 minutah kuhanja. Pri mehko kuhanem jajcu mora vsekakor biti rumenjak še tekoč. Od okusa je odvisno, ali želimo manj ali bolj strjen beljak; v prvem primeru nam bo bolj ustrezalo mehko kuhano jajce po 3 minutah kuhanja, v drugem pa po 4 minutah.

Pri tem se je razkrilo, zakaj so se nihajni časi pri nihanju z vodoravno geometrijsko osjo med seboj bolj razlikovali kot pri nihanju z navpično osjo (slika 1). Nekatera od jajc so imela na enem od krajišč manjši ali večji zračni mehur. Merjenja z vodoravno geometrijsko osjo jajc so bila v resnici odveč. Na začetku smo pričakovali večjo razliko med obojimi merjenji, češ da pri nihanju z vodoravno osjo snov ob krajiščih zastaja. Kaže, da celo pri surovem jajcu z najmanjšo židkostjo ta pojav ni pomemben. Tudi surovo jajce je precej židko.

Opisani poskusi zagotovo še niso zadnja beseda o fiziki kuhanih jajc. Zanimivo bi bilo meriti temperaturni potek v jajcu in podrobneje raziskati, kako se strujeta beljak in rumenjak. Morda se bodo lotili naloge člani kakega fizikalnega krožka.

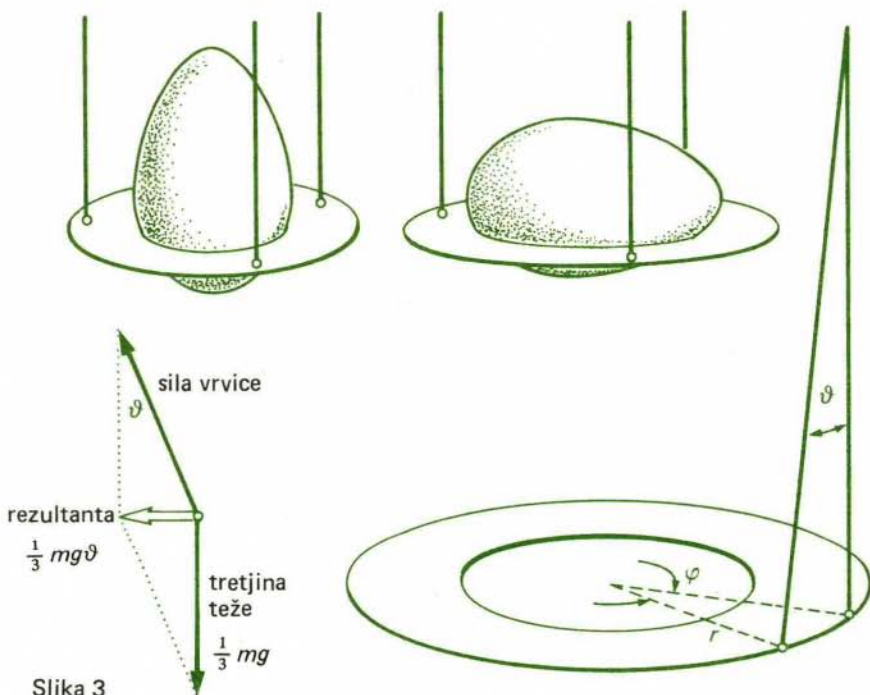
Z opravljenimi merjenji lahko izračunamo vztrajnostni moment jajca in koeficient dušenja. Najprej izpeljimo enačbo za nihajni čas. Obroč visi na nitkah z dolžino l , katerih pritrdišča so v razdalji r od njegovega središča. Ko zasučemo obroč za kot φ , se odklonijo vrvice za kot ϑ od navpičnice. Lok s , po katerem se premaknejo pritrdišča, izračunamo z enim in z drugim kotom, $s = r \varphi$ in $s = l \vartheta$, tako da velja $\vartheta = r \varphi / l$. V vsakem pritrdišču deluje na obroč vrvica s silo v svoji smeri, ki da s tretjino teže obroča $\frac{1}{3} mg$ — ta deluje navpično navzdol — rezultanto $\frac{1}{3} mg \vartheta$ v tangentsni smeri (slika 3). Ker je kot ϑ majhen, smo njegov tangens nadomestili s kotom (v ločni meri). Če zahtevamo, da mora biti kot ϑ manjši kot 5° , mora biti φ manjši kot $5^\circ l/r$, kar za naš primer pomeni 360° .

Tri rezultante delujejo v pritrdiščih na obroč s skupnim navorom $M = 3 r \cdot \frac{1}{3} mg \vartheta = mgr \vartheta = mgr^2 \varphi / l$ okoli navpične osi. Po zakonu za vrtenje $M = J \alpha$, v katerem sta J vztrajnostni moment in α kotni pospešek pri vrtenju okoli navpične osi, dobimo $- mgr^2 \varphi / l = J \alpha$. Z negativnim znakom smo upoštevali, da poskušamo navor zmanjšati zasuk iz ravnovesne lege. Iz enačbe $\alpha = -\omega^2 \varphi$, ki je značilna za sučno sinusno nihanje, razberemo, da je za naš primer krožna frekvenca $\omega = (mgr^2 / J)^{1/2}$ in nihajni čas $t_0 = 2 \pi / \omega$

$$t_0 = 2 \pi (J / mgr^2)^{1/2}$$

Nihajni čas zelo ozkega obroča pri sučnem nihanju bi se ujemal z nihajnim časom enako dolgega nitnega nihala $2\pi(l/g)^{1/2}$, saj bi v tem primeru smeli vstaviti za vztrajnostni moment obroča kar mr^2 . Pri nas pa je merjenje tako natančno, da je treba upoštevati vztrajnostni moment obroča $\frac{1}{2} m (r_2^2 + r_1^2)$ z zunanjim in notranjim radijem r_1 in r_2 :

$$t_{00} = 2\pi (l \cdot \frac{1}{2} m (r_2^2 + r_1^2) / mgr^2)^{1/2}$$



Slika 3

Za zunanji in notranji radij obroča in za razdaljo pritrdišč od središča obroča vstavimo po vrsti $r_2 = 35 \text{ mm}$, $r_1 = 22,5 \text{ mm}$ in $r = 33,2 \text{ mm}$ in dobimo z dolžino vrvic $l = 2,26 \text{ m}$ nihajni čas $t_{00} = 2,67 \text{ s}$. Toliko zares namerimo za nihajni čas praznega obroča.

Nihajni čas obroča z jajcem, ki ima vztrajnostni moment J_j in maso m_j , je

$$t_{0'} = 2\pi \left(l \left(\frac{1}{2} (r_2^2 + r_1^2) + J_j \right) / (m + m_j) g r^2 \right)^{1/2} =$$

$$= t_{00} \left((1 + J_j / \frac{1}{2} m (r_2^2 + r_1^2)) / (1 + m_j / m) \right)^{1/2}$$

Iz tega dobimo za vztrajnostni moment jajca

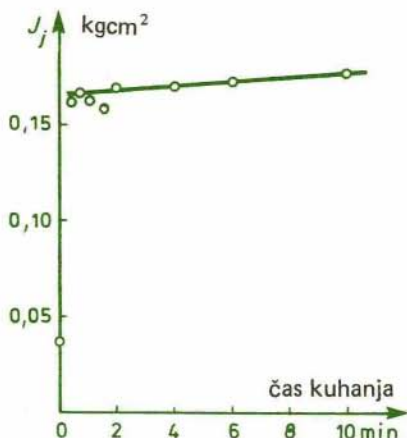
$$J_j = \frac{1}{2} m (r_2^2 + r_1^2) ((1 + m_j / m) t_{0'}^2 / t_{00}^2 - 1)$$

Masa obroča je $m = 10 \text{ g}$ in masa jajca $m_j = 70 \text{ g}$. Rezultate za nihanje z vodoravno geometrijsko osjo jajca kaže diagram (slika 4). Surovo in tudi mehko kuhano jajce nista togi telesi, tako da smo dobili nekakšen efektivni vztrajnostni moment.

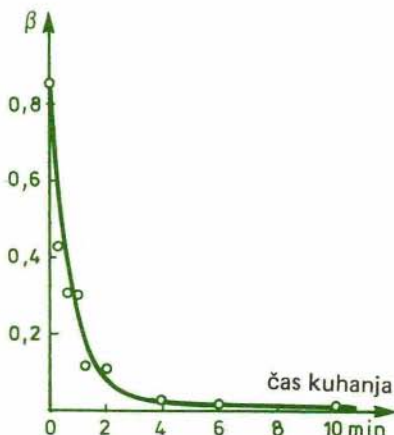
Časovno odvisnost zasuka pri dušenem nihanju podaja enačba

$$\varphi = \varphi_0 e^{-\beta t} \cos \omega_0^* t$$

v katerem je β koeficient dušenja in $\omega_0^* = (\omega_0'^2 - \beta^2)^{1/2}$. Amplituda po n nihajih je



Slika 4



Slika 5

$$\varphi_0(n) = \varphi_0 e^{-\beta n t_0} * = \varphi_0 e^{-\beta n t_0'} / (1 - (\beta t_0' / 2\pi)^2)^{1/2}$$

Za razmerje $\varphi_0/\varphi_0(n)$ postavimo 20 in dobimo

$$\beta / (1 - (\beta t_0' / 2\pi)^2)^{1/2} = \ln 20 / n t_0' \cong 3 / n t_0'$$

Koren na levi strani je treba upoštevati samo pri surovem jajcu, pri mehko ali trdo kuhanem jajcu smemo na levi strani vzeti kar β . Rezultate kaže diagram (slika 5).

Janez Strnad

REŠITVE NALOG

NAGRADNI PRAVOKOTNIK — Rešitev iz P1

Rešitve nagradne naloge o ploščini pravokotnika so nam poslali Tanja SODNIK iz Preddvora, Barbara ŠMON in Nina ŽNIDARŠIČ iz Ljubljane ter člani dodatnega krožka iz matematike OŠ Veljko Vlahović I iz Maribora.

Vse rešitve so pravilne, njihove avtorje pa smo nagradili s knjigo iz zbirke Sigma, J. Rakovec, Osnove topologije.

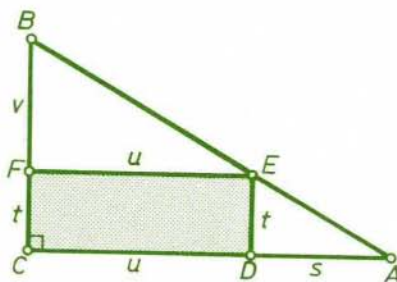
Poglejmo na sliko, zapišimo $s = \overline{AD}$, $t = \overline{DE}$, $u = \overline{EF}$, $v = \overline{BF}$ in označimo z x ploščino pravokotnika $CDEF$.

Zaradi podobnosti trikotnikov DAE in FEB velja enakost $s : u = t : v$, ki nam da zvezo $x = ut = sv$.

Ploščini trikotnika DAE in FEB merita zaporedoma $st/2$ in $uv/2$, ker pa je njun produkt enak 9, velja

$$x^2 = (u \cdot t)(s \cdot v) = 4(st/2)(uv/2) = 36$$

torej meri iskana ploščina $x = 6$.



Boris Lavrič

KVADRATNA ENAČBA PRI BABILONCIH

Današnji srednješolec se s kvadratno enačbo seznani v drugem letniku. Do nje pridemo, ko iščemo ničle kvadratne funkcije $y = ax^2 + bx + c$. Pri tem so a, b in c poljubna realna števila, le koeficient kvadratnega člena a mora biti različen od nič. Po tej poti pridemo do enačbe

$$ax^2 + bx + c = 0$$

Do njenih rešitev se dokopljemo tako, da prva dva člena dopolnimo do popolnega kvadrata in uporabimo enačbo za razcep razlike kvadratov $u^2 - v^2 = (u - v)(u + v)$:

$$\begin{aligned} a(x^2 + bx/a + c/a) &= a((x + b/2a)^2 - b^2/4a^2 + c/a) = \\ &= a(x + b/2a - \sqrt{b^2 - 4ac}/2a)(x + b/2a + \sqrt{b^2 - 4ac}/2a) = 0 \end{aligned}$$

Od tod takoj dobimo dve rešitvi

$$x_1 = (-b + \sqrt{b^2 - 4ac})/2a \quad x_2 = (-b - \sqrt{b^2 - 4ac})/2a$$

Ti sta realni in različni, če je izraz pod korenem večji od nič, ter realni in enaki, če je izraz pod korenem enak nič.

Ali ni presenetljivo, da so znali kvadratno enačbo rešiti že Babilonci sredi drugega tisočletja pred našim štetjem? To so ugotovili po babilonski klinopisni tablici, ki jo hranijo v Britanskem muzeju. Tablica vsebuje več nalog, ki ustrezajo reševanju kvadratne enačbe.

Razbiranje klinopisnih tablic je zahtevno opravilo, ker so Babilonci uporabljali šestdesetiški številski sistem, ker v zapisih niso ločevali celih mest od ulomkov in ker niso uporabljali matematičnih simbolov. Med številkami so sicer puščali razmike, niso pa poznali znaka, ki bi ustrezal naši decimalni vejici.

Tako število v šestdesetiškem sistemu 1 15 lahko prevedemo v desetiški sistem na dva načina

$$1.60^1 + 15.60^0 = 60 + 15 = 75$$

ali

$$1.60^0 + 13.60^{-1} = 1 + 15/60 = 1 \frac{15}{60}$$

Da bi ločili ti dve možnosti, so sedanji raziskovalci klinopisnih tablic uvedli dvoje ločil, vejico in podpičje. Vejica loči mesti, podpičje pa ima vlogo naše decimalne vejice, na primer:

$$3,15,17 = 3.60^2 + 15.60^1 + 17.60^0 = 11\,717,$$

$$3, 15; 17 = 3.60^1 + 15.60^0 + 17.60^{-1} = 11\,717/60$$

$$3; 15, 17 = 3.60^0 + 15.60^{-1} + 17.60^{-2} = 11\,717/3600$$

Če na klinopisni tablici naletimo na zapis 3 15 17, se moramo odločiti za eno izmed teh možnosti. Pogosto je mogoče iz zveze razbrati, katero možnost je imel v mislih davni pisec. Vedno pa to ne uspe, posebno še, ker so nekatere tablice slabo ohranjene.

Kljub temu so strokovnjaki za klinopis na eni izmed tablic iz Britanskega muzeja razbrali pravilo za reševanje kvadratnih enačb. Pravilo je navedeno ob geometrijskem zgledu: "Odvzemi stranico od ploščine kvadrata, pa dobiš 14, 30." Po naše bi to zapisali kot $x^2 - x = 870$, saj je 14, 30 enako $14 \cdot 60^1 + 30 \cdot 60^0 = 840 + 30 = 870$.

Sledimo babilonskemu navodilu: "Vzemi koeficient 1 (pri stranici kvadrata), razdeli 1 na dva dela. Del 0; 30 pomnoži samega s seboj. Dobiš 0;15. To dodaj številu 14, 30. Število 14, 30; 15 je ploščina kvadrata s stranico 29;30. Temu prištej 0; 30. Tako dobiš iskano stranico kvadrata 30."

Za bralce, ki bi si želeli utrditi znanje v reševanju kvadratnih enačb, navedimo še nekaj nalog s klinopisne tablice:

$$x^2 + x = 0; 45$$

$$x^2 - \frac{1}{3} x^2 + \frac{1}{3} x = 1; 20$$

$$x^2 - \frac{1}{3} x^2 + x = 4, 46; 40$$

$$x^2 + x + \frac{1}{3} = 0; 55$$

$$11 x^2 + 7 x = 6; 15$$

Rešijo jih lahko po babilonskem navodilu, ali pretvorijo število iz šestdesetiškega sistema v desetiški in računajo po naše. Vsebinski del prvotnih nalog je že prelit v naš algebrski zapis enačb, medtem ko so na desni po naše zapisana števila v šestdesetiškem številskem sistemu.

Prelijmo babilonsko navodilo v preglednejši zapis z enačbami. Levo so števila zapisana v šestdesetiškem, desno pa v našem, desetiškem sistemu.

$$x^2 - x = 14, 30$$

$$1 = 0; 30 + 0; 30$$

$$0; 30 \times 0; 30 = 0; 15$$

$$0; 15 + 14, 30 = 14, 30; 15$$

$$29; 30 \times 29; 30 = 14, 30; 15$$

$$29, 30 + 0, 30 = 30$$

$$x^2 - x - 870 = 0$$

$$1 = \frac{1}{2} + \frac{1}{2}$$

$$\frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2} = \frac{1}{4}$$

$$\frac{1}{4} + 870 = 870 \frac{1}{4}$$

$$29 \frac{1}{2} \times 29 \frac{1}{2} = 870 \frac{1}{4}$$

$$29 \frac{1}{2} + \frac{1}{2} = 30$$

Ali ni to rešitev naše enačbe za $a = 1$ in $c < 0$ in $b < 0$:

$$x_1 = \frac{1}{2} |b| + \sqrt{\left(\frac{1}{2} b\right)^2 + |c|}$$

Za babilonskega računarja je bilo reševanje kvadratne enačbe zahtevna naloga. Zapomniti si je moral vse korake na pamet, ne da bi poznal njihovo ozadje. Našim učencem je precej lažje. Pravila, zapisanega s simboli, jim ni težko izpeljati, četudi bi ga pozabili. Iz tega tudi izhaja, da poučevanje samo z zgledi naredi matematiko še težjo. Res pa je, da se je ta način poučevanja uporabljal na nekaterih področjih matematike vse do našega stoletja.

Milena Strnad

NOVE KNJIGE

DEVIDE V., ZABAVNA MATEMATIKA, Školska knjiga, Zagreb 1988

Kako težko je narisati "domišljajske stopnice", po katerih se stalno spuščamo, pa vseeno pridemo na isto mesto, vedo le tisti, ki so kdaj poskusili. Zelo prepričljivo je znal to narisati M.C. Escher. Risba istega avtorja nas pričakuje že na naslovnici, in če se za trenutek pomudimo ob njej, nas bodo skladni, dopolnjujoči se konjeniki prepričali, da je bil Escher pravi mojster domišljije in risanja.

Kot pravi avtor v podnaslovu, je knjiga namenjena osnovnošolcem in srednješolcem, pa tudi starejši se bodo lahko zabavali s prenekatero poučno in zabavno nalogo. Na začetku knjige je nekaj starih, marsikomu dobro znanih logičnih nalog. Zabavali se bomo s števili, srečali bomo tudi magične kvadrate in kocke, se igrali s šahovnico, vžigalicami in raznimi telesi. Srečali bomo tudi bolj "resne" matematične pojme kot so zlati rez, mnogokotniki, pravilna telesa, Möbiusov trak. Zvedeli bomo tudi nekaj o tem, kako so računali stari Egipčani in Babilonci. Knjigo zaključi avtorjevo razmišljanje o simetriji ter misli o matematiki, glasbi, poeziji, ki so jih izrekli slavni ljudje, od Leonarda da Vincija do Napoleona.

Če smo se na začetku vprašali, kakšno zvezo imajo Escherjevi konjeniki na naslovnici z matematiko, ugotovimo sedaj vsaj to, da matematika ni le računanje.

Damjan Kobal

DIOFANTSKE ENAČBE V ELEMENTARNI GEOMETRIJI

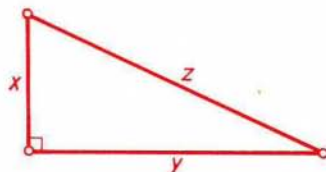
Diofantske enačbe so enačbe, ki jih rešujemo v okviru celih števil. Ogleдали si bomo nekaj takih enačb s tremi neznankami, ki imajo svoj izvor ali pa ponazoritev v elementarni geometriji. Proučili bomo nekatere nelinearne enačbe in poskušali najti vsaj nekaj rešitev za vsak primer.

V prvih petih problemih bomo naleteli na enačbe oblike

$$x^a + y^a = z^a$$

kjer bo a zavzel nekatere racionalne vrednosti.

Problem 1. Določi trojico naravnih števil (x, y, z) , ki predstavljajo dolžino stranic pravokotnega trikotnika.



Iz slike takoj razberemo enačbo za neznane količine

$$x^2 + y^2 = z^2 \quad (1)$$

Gre za iskanje znamenitih *pitagorejskih trojic*, ustreznemu trikotniku imenujemo *pitagorejski trikotnik*. Trojica (x, y, z) je primitivna, če števila v njej nimajo skupnega delitelja. Vse primitivne pitagorejske trojice dobimo iz zvez

$$\begin{aligned} x &= u^2 - v^2, & y &= 2uv, & z &= u^2 + v^2 \\ (u, v &\in \mathbb{N}, u > v \text{ in tuji}) \end{aligned} \quad (1a)$$

kjer $\mathbb{N}$ pomeni množico naravnih števil. Ker so ti obrazci zelo poznani, jih tu ne bomo izpeljevali. Nekaj takih trojic je: $(3, 4, 5)$, $(5, 12, 13)$, $(15, 8, 17)$, ... Vse pitagorejske trojice dobimo z večkratniki primitivnih. O pitagorejskih trojicah je tudi Presek že nekajkrat pisal.

Obstaja še vrsta drugih obrazcev, ki dajo nekaj rešitev zgornje enačbe. Če na primer vstavimo $z = y + k$ v zgornjo enačbo, dobimo $x^2 = 2yk + k^2$. Izberimo najprej $k = 1$, tedaj je $x^2 = 2y + 1$, torej mora biti x liho število $x = 2n + 1$

in sledi $y = (x^2 - 1)/2 = 2n^2 + 2n$, $z = y + 1 = 2n^2 + 2n + 1$. Dobimo pitagorejske trojice

$$x = 2n + 1, y = 2n^2 + 2n, z = 2n^2 + 2n + 1, n \in \mathbb{N} \quad (1b)$$

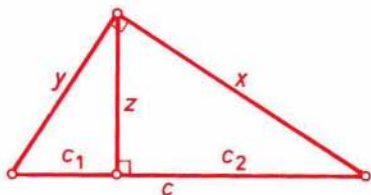
Lahko si zapomnimo tudi naslednji praktični napotek: izberi poljubno liho število $l \geq 3$ in izračunaj $x = l$, $y = (l^2 - 1)/2$, $z = (l^2 + 1)/2$. Mimogrede smo dokazali še dve trditvi:

- 1) Za vsako liho število $l \geq 3$ obstaja pitagorejski trikotnik, ki ima za dolžino katete to število.
- 2) Obstaja neskončno pitagorejskih trikotnikov, katerih hipotenuza je za 1 večja, kot meri ena od katet.

Podobno bi dobili pri $k = 2$ pitagorejske trojice

$$x = 4n, y = 4n^2 - 1, z = 4n^2 + 1, n \in \mathbb{N} \quad (1c)$$

Problem 2. Določi pravokotni trikotnik, ki bo imel za kateti in za višino na hipotenuzi celoštevilsko vrednost.



Zapišimo znane zveze za pravokotni trikotnik (glej sliko): $x^2 + y^2 = c^2$, $x^2 = c_2 c$, $y^2 = c_1 c$, $z^2 = c_1 c_2$. Iz njih sledi zveza $x^2 y^2 = c_1 c_2 c^2$ oziroma $x^2 y^2 = z^2 (x^2 + y^2)$. Po deljenju z $x^2 y^2 z^2$ (saj so vsi $\neq 0$) dobimo

$$\frac{1}{x^2} + \frac{1}{y^2} = \frac{1}{z^2} \quad (2)$$

Poiščimo nekaj trojic, ki rešijo to enačbo v naravnih številih. Iz prejšnje enačbe najprej izrazimo $z = xy/\sqrt{x^2 + y^2}$ in opazimo, da mora biti izraz $x^2 + y^2$ popoln kvadrat. Rešitev iščimo torej v obliki zvez, ki smo jih srečali v prejšnjem problemu: $x = k(u^2 - v^2)$, $y = k \cdot 2uv$, $k, u, v \in \mathbb{N}$. Sledi $z = 2uv(u^2 - v^2)k/(u^2 + v^2)$ in tudi z bo celo število, če izberemo $k = u^2 + v^2$. S tem dobimo naslednjo dvoparametrično družino rešitev

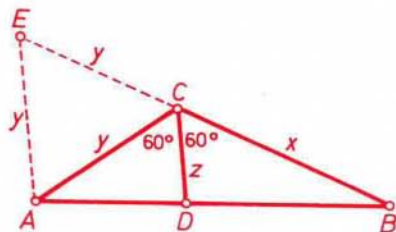
$$x = u^4 - v^4, y = 2uv(u^2 + v^2), z = 2uv(u^2 - v^2); u, v \in \mathbb{N}, u > v \quad (2a)$$

Tako sta na primer (15, 20, 12) in (65, 156, 60) dve taki rešitvi. Opazimo, da je tudi c celoštevilski, in sicer je enak $c = (u^2 + v^2)^2$. Zgoraj bi lahko uporabili

tudi nastavek, ki smo ga srečali v prejšnji točki: $x = t$, $y = t \cdot (l^2 - 1)/2$, kjer je l liho število (≥ 3) in $t \in \mathbb{N}$, nato pa $z = t \cdot (l^2 - 1)/(l^2 + 1)$. Če izberemo $t = (l^2 + 1)/2$, dobimo trojice

$$x = l(l^2 + 1)/2, \quad y = (l^4 - 1)/4, \quad z = l(l^2 - 1)/2; \quad l = 2j + 1, j \in \mathbb{N} \quad (2b)$$

Problem 3. Poišči naravna števila x, y in z tako, da bosta x in y dolžini stranic trikotnika, ki oklepata kot 120° , z pa dolžina simetrele tega kota.



Če stranico BC podaljšamo za y (glej sliko), sta očitno trikotnika ABE in DBC podobna. Sledi $z : x = y : (x + y)$ oziroma $z = xy/(x + y)$ ali

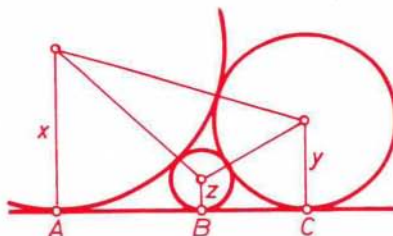
$$\frac{1}{x} + \frac{1}{y} = \frac{1}{z} \quad (3)$$

Poskusimo najti nekaj rešitev te enačbe v naravnih številih. Uvedimo novi neznanki X in Y , ki sta s prejšnjima v zvezi $X = x + y$, $Y = x - y$. Izrazimo stari spremenljivki z novima $x = (X + Y)/2$, $y = (X - Y)/2$ in izraza vstavimo v našo enačbo ($X \neq Y$, ker $y \neq 0$). Po kratkem računu dobimo $4Xz = X^2 - Y^2$ ali $Y^2 + 4z^2 = (X - 2z)^2$. Opazimo, da moramo za $Y, 2z$ in $X - 2z$ izbrati ravno pitagorejsko trojico. Ker je $2z$ sodo število, postavimo iz (1a): $Y = u^2 - v^2$, $2z = 2uv$ in $X - 2z = u^2 + v^2$. Torej $X = u^2 + v^2 + 2uv$, $Y = u^2 - v^2$, $z = uv$ in za prvotne neznanke dobimo rešitve

$$x = u(u + v), \quad y = v(u + v), \quad z = uv; \quad u, v \in \mathbb{N} \quad (3a)$$

Spotoma smo opazili, da sta X in Y že bila take parnosti, da sta tudi x in y celoštevilska. Zapišimo nekaj konkretnih rešitev za (x, y, z) : $(2, 2, 1)$, $(6, 3, 2)$, $(12, 4, 3)$, ...

Problem 4. Določi tri naravna števila, ki so enaka radijem treh krogov, ki se drug drugega dotikajo; vsi krogi pa se dotikajo še skupne premice.



Iz slike razberemo zveze:

$\overline{AC}^2 + (x - y)^2 = (x + y)^2$, $\overline{AB}^2 + (x - z)^2 = (x + z)^2$, $\overline{BC}^2 + (y - z)^2 = (y + z)^2$. Sledi $\overline{AC} = 2\sqrt{xy}$, $\overline{AB} = 2\sqrt{xz}$ in $\overline{BC} = 2\sqrt{yz}$. Prva razdalja je vsota drugih dveh, zato $\sqrt{xy} = \sqrt{xz} + \sqrt{yz}$. Po deljenju s $\sqrt{xyz}$ dobimo

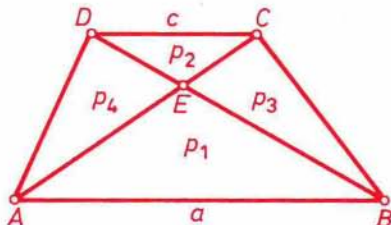
$$\frac{1}{\sqrt{x}} + \frac{1}{\sqrt{y}} = \frac{1}{\sqrt{z}} \quad (4)$$

Neskončno rešitev te enačbe v naravnih številih dobimo, če pišemo kar $x = X^2$, $y = Y^2$ in $z = Z^2$ in enačbo prevedemo na prejšnjo. Iz množice rešitev (3a) tako dobimo naslednje rešitve enačbe (4)

$$x = u^2(u + v)^2, \quad y = v^2(u + v)^2, \quad z = u^2v^2; \quad u, v \in \mathbb{N} \quad (4a)$$

Nekaj trojic za iskane radije je tako: (4, 4, 1), (36, 9, 4), (144, 16, 9), ... Seveda pa so vsi večkratniki teh rešitev zopet rešitve.

Problem 5. Trapez $ABCD$ diagonali razdelita na štiri dele. Določi naravna števila p_1, p_2, p_3, p_4 in p tako, da bodo pomenila po vrsti ploščine posameznih delov in skupno ploščino.



Očitno je, da je $p_1 + p_4 = p_1 + p_3$, torej $p_4 = p_3$. Tako zadošča poiskati le štiri med njimi. Pri tem je $p = p_1 + p_2 + 2p_3$. Hitro se lahko prepričamo, da čim dosežemo za tri med njimi, da so naravna števila, je tudi četrto tako. To ni čisto očitno le v primeru, ko zagotovimo $p_1, p_2, p \in \mathbb{N}$, p_3 pa izračunamo iz zapisane zveze. Pa vzemimo ravno ta primer. Poiščimo zvezo med p_1, p_2 in p . Če označimo z v_1 in v_2 višini trikotnikov ABE oziroma ECD (glej sliko), velja $p_1 = av_1/2$, $p_2 = cv_2/2$ in $p = (a + c)(v_1 + v_2)/2$. Upoštevajmo še podobnost omenjenih dveh trikotnikov pa dobimo $av_2 = cv_1$. Od tod sledi $p_1p_2 = av_1cv_2/4 = (av_2/2) \cdot (cv_1/2)$. Produkt enakih količin je enak izrazu p_1p_2 , zato je $av_2/2 = cv_1/2 = \sqrt{p_1p_2}$. Če to upoštevamo v izrazu za p , dobimo $p = p_1 + p_2 + 2\sqrt{p_1p_2}$, kar pa lahko zapišemo tudi v obliki $\sqrt{p_1} + \sqrt{p_2} = \sqrt{p}$. Če pišemo $x = p_1$, $y = p_2$ in $z = p$, iščemo torej rešitve diofantske enačbe

$$\sqrt{x} + \sqrt{y} = \sqrt{z} \quad (5)$$

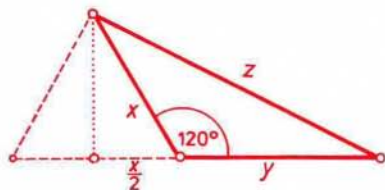
Nekaj rešitev lahko takoj zapišemo, če postavimo

$$x = u^2, y = v^2, z = (u + v)^2; u, v \in \mathbb{N} \quad (5a)$$

Večkratniki teh so seveda tudi rešitve. Izkaže se, da v resnici dobimo z zgornjimi zvezami vse primitivne trojice, če sta u in v tuji, vendar tega tu ne utegnemo dokazovati. Dolžni smo še odgovor, ali je tudi $p_3 \in \mathbb{N}$. Zanj imamo dve zvezi, ki ju opazimo zgoraj: $p_3 = (p - p_1 - p_2)/2 = \sqrt{p_1 p_2}$, od koder sledi, da je tudi $p_3 \in \mathbb{N}$. Nekaj četvork za iskane ploščine (p_1, p_2, p_3, p) je: $(1, 1, 1, 4)$, $(4, 1, 2, 9)$, $(9, 1, 3, 16)$, ...

V zadnjih dveh problemih si bomo ogledali še primer kvadratne diofantske enačbe z mešanim členom.

Problem 6. Poišči trojico naravnih števil, ki pomenijo dolžine stranic trikotnika z enim kotom 120° .



Iz slike razberemo $z^2 - (\frac{x}{2} + y)^2 = (\frac{x}{2} \cdot \sqrt{3})^2$ odkoder sledi enačba

$$x^2 + xy + y^2 = z^2 \quad (6)$$

V 3. letniku Preseka je bilo opisanih nekaj metod, ki so dale nekatere celoštevilske rešitve te enačbe. Tokrat bomo izpeljali obrazce za rešitve, ki bodo podobni obrazcem (1a). Zgornjo enačbo bomo prevedli na enačbo (1) z uvedbo novih neznank X, Y in Z , ki naj bodo s prejšnjimi v zvezi: $x = X$, $y = (-X + 2Y + Z)/2$, $z = (Y + 2Z)/2$. S preprostim računom potem preverimo zvezo

$$4(x^2 + xy + y^2 - z^2) = 3(X^2 + Y^2 - Z^2)$$

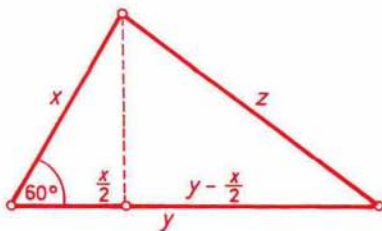
Od tod takoj sledi, da x, y in z zadoščajo enačbi (6) natanko tedaj, ko za X, Y in Z velja enačba (1). Zato iz (1a) postavimo: $X = u^2 - v^2$, $Y = 2uv$, $Z = u^2 + v^2$. Od tod po kratkem računu dobimo izraze za naše neznanke

$$x = u^2 - v^2, y = 2uv + v^2, z = u^2 + uv + v^2; u, v \in \mathbb{N}, u > v \quad (6a)$$

Naj pripomnimo, da bi bila obratna izbira za X in Y slabša, ker y in z ne bi bila

vedno celoštevilka. Nekaj konkretnih rešitev zgornje enačbe je $(x, y, z) = (3, 5, 7), (8, 7, 13), (5, 16, 19), \dots$

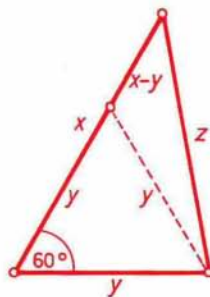
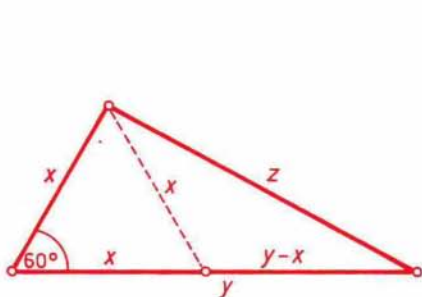
Problem 7. Določimo naravna števila x, y in z tako, da bodo dolžine stranic trikotnika z enim kotom 60° .



Iz slike takoj razberemo $x^2 - (\frac{x}{2})^2 = z^2 - (y - \frac{x}{2})^2$, kar nam po ureditvi da

$$x^2 - xy + y^2 = z^2 \quad (7)$$

Če je $x = y$, je tudi $z = y$, s čemer dobimo enakostranične trikotnike. Za $x \neq y$ bi lahko na podoben način kot v prejšnjem primeru problem prevedli na prvega. Vendar tokrat problem prevedimo neposredno na prejšnjega. Bežen pogled na spodnji sliki pove: če $x < y$, je $(x, y-x, z)$ trojica, ki pomeni rešitev proble-



ma 6 (s kotom 120°), če pa je $x > y$, je $(x-y, y, z)$ taka trojica. Torej imamo iz obrazcev (6a): $x = u^2 - v^2, y - x = 2uv + v^2, z = u^2 + uv + v^2$ ali pa $x - y = u^2 - v^2, y = 2uv + v^2, z = u^2 + uv + v^2$. Od tod dobimo skupaj z enakostraničnimi trikotniki troje obrazcev za rešitve diofantske enačbe (7)

$$x = u, y = u, z = u; u \in \mathbb{N} \quad (7a)$$

$$x = u^2 - v^2, y = u^2 + 2uv, z = u^2 + uv + v^2; u, v \in \mathbb{N}, u > v \quad (7b)$$

$$x = u^2 + 2uv, y = v^2 + 2uv, z = u^2 + uv + v^2, u, v \in \mathbb{N}, u > v \quad (7c)$$

Zapišimo nekaj rešitev, ki jih dobimo po izmenični uporabi zgornjih izrazov.
 $(x, y, z) = (1, 1, 1), (3, 8, 7), (8, 5, 7), (2, 2, 2), (8, 15, 13), (15, 7, 13), \dots$

Za konec poskusi na podlagi zgornjih ugotovitev rešiti naslednje naloge.
 Če se bi kjer zataknilo, si oglej nasvete na str. 302.

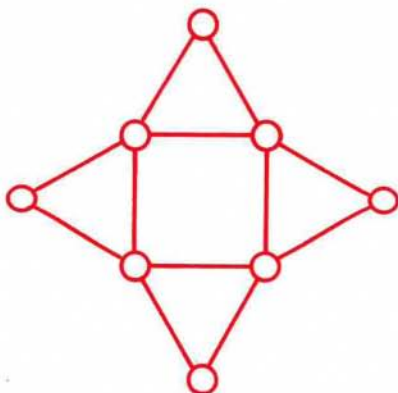
1. Pokaži, da je v pitagorejskem trikotniku tudi polmer včrtanega kroga naravno število.
2. Če je (x, y, z) pitagorejska trojica, dokaži, da je potem produkt xyz vedno deljiv s 60.
3. Poišči nekaj pitagorejskih trikotnikov, ki imajo tudi za dolžine ene od simetral ostrega kota naravno število.
4. Preveri, da naletimo na enačbo (3) tudi v primeru, ko iščemo trikotnik, ki ima za stranice naravna števila, ena njegovih višin pa je enaka vsoti drugih dveh višin.
5. Poišči nekaj celoštevilskih trikotnikov (dolžine stranic so naravna števila) z enim kotom 120° , pri katerih je tudi dolžina simetrale ob tem kotu naravno število.
6. Dokaži, da je lahko vsako liho število $n \geq 3$ dolžina stranice celoštevilskega trikotnika z enim kotom 120° .
7. Dokaži trditev: če je (x, y, z) primitivna trojica naravnih števil, ki reši enačbo (6), so vsa tri števila liha, ali pa je natanko eno med njimi večkratnik števila 8.

Edvard Kramar

1. Razvrsti števila 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7 in 8 v kroge na sliki tako, da bosta vsota števil na ogliščih kvadrata in vsota števil na ogliščih vsakega izmed štirih trikotnikov enaki.
2. Naj bodo a_1, a_2, a_3, a_4, a_5 in a_6 poljubna zaporedna cela števila. Pokaži, da teh števil ni mogoče razvrstiti v oglišča oktaedra tako, da bi bile vsote števil na ogliščih vsake izmed robnih ploskev enake.

Dragoljub M. Milošević
 prevedel *Damjan Kobal*

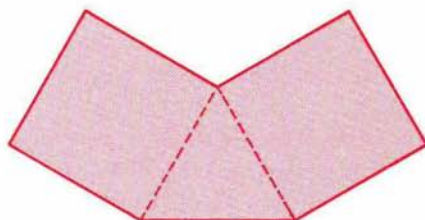
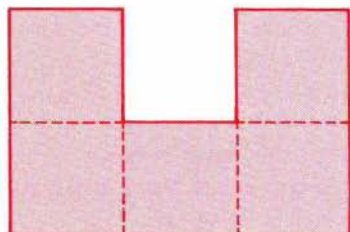
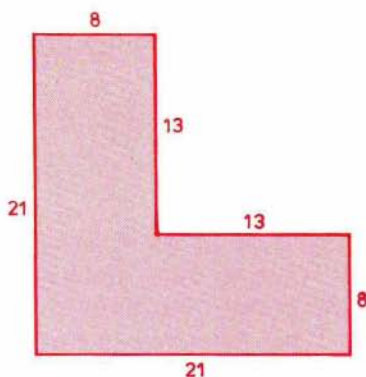
RAZVRŠČANJE ŠTEVIL



TEŽIŠČA IN RAČUNI

Leži težišče homogene ravne plošče s slike na desni na plošči ali ne?

Bi znali določiti legi težišč drugih dveh homogenih plošč, sestavljenih iz kvadratov in enakostraničnega trikotnika?



Ali lahko obe enakosti na desni veljata hkrati, če vsaka črka pomeni svojo cifro?

$$\begin{array}{r} \text{P E T} \\ \text{Š E S T} \\ \hline \text{O S E M} \end{array} \quad \begin{array}{r} \text{T R I} \\ \text{P E T} \\ \hline \text{Š E S T} \end{array}$$

Vsak znak v spodnjih računih predstavlja svojo cifro. Nadomestite znake s ciframi, tako da bodo računi pravilni.

Boris Lavič

$$\begin{array}{r} \boxed{\blacksquare} \boxed{\triangleleft} \boxed{\bullet} \boxed{\triangleleft} : \boxed{\triangleleft} \boxed{\bullet} = \boxed{\triangleleft} \boxed{\triangleleft} \\ + \quad + \quad \times \\ \boxed{\triangleleft} \boxed{\triangleleft} \boxed{\square} \boxed{\square} - \boxed{\triangleleft} \boxed{\square} \boxed{\triangleleft} \boxed{\bullet} = \boxed{\bullet} \boxed{\square} \boxed{\triangleleft} \\ \hline \boxed{\triangleleft} \boxed{\square} \boxed{\bullet} \boxed{\triangleleft} + \boxed{\triangleleft} \boxed{\square} \boxed{\bullet} \boxed{\square} = \boxed{\bullet} \boxed{\triangleleft} \boxed{\bullet} \boxed{\triangleleft} \end{array}$$

TETA AMALIJA IN KAOS

Nastopajo: teta Amalija, nje nečaki Jožica, Polonca, Tomaž in trije računalniki

Prolog

- J.: Zakaj si nas pa danes povabila? Nobenega rojstnega dne ne praznujemo.
- A.: Ne, ne, saj ne gre za rojstni dan. Le stric Alfonz, ki dela na pošti, mi je za danes posodil tri računalnike.
- T.: Oh, fino! Zelo radi se igramo Vojno zvezd, Lačnega Horaca, Smučanje in kar je še takih igrlic.
- A.: Zmotil si se! Tokrat bo igrica čisto matematična. Ustvarili bomo kaos.
- P.: Kaos? Mama vedno pravi, da imam v sobi kaos, če je ne pospravim. In kolikor te poznam, nam gotovo ne boš dovolila, da ti razmečemo stanovanje.
- A.: Priznam, kaos je nekoliko ponesrečena beseda za matematični pojav, ki ga bomo spoznali. Grška beseda $\chi\alpha\omicron\varsigma$ pomeni nered, razsulo. Stara verstva so učila, da je bil v veselju kaos, preden so bogovi vzpostavili red.
- J.: Zdaj sem pa res radovedna, kaj je to kaos!
- A.: No, najprej bomo popili čaj in pojedli pecivo, ki sem ga pripravila, potem pa lepo po vrsti. Kaos pride šele na koncu.
(Pijejo čaj in jedo pecivo.)

I. dejanje. Ponavlja se preprost račun

- A.: Preprost račun: Izberemo si X in 0 in 1 in izračunamo $X' = (1 + R)X - RX^2$
- T.: Ampak teta, kaj je tu zanimivega. Osnovne računske operacije obvladamo že vrsto let.
- P.: In kaj je tukaj R ?
- A.: Število R imenujmo parameter našega računanja. Vedno mora biti pozitivno. Ko izračunamo X' , ga postavimo na mesto X in spet računamo po istem pravilu. In ta račun ponavljamo in ponavljamo in ponavljamo.
- T.: To je vse?
- A.: Vse! In ravno v tej preprostosti je čar zadeve! Za vajo vzemi $R = 0,5$, $X = 0,7$ in napravi nekaj korakov!

T.: (računa s svinčnikom) 0.5, izračunam 0.805, naslednje število je

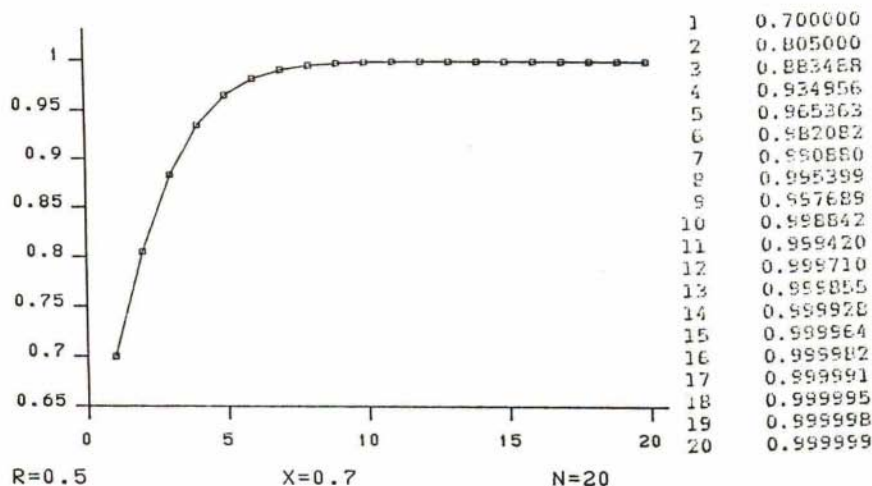
0.8834875. Joj, teta, računanje na roko je tako utrudljivo!

P.: Medtem, ko si ti računal, sem jaz že sestavila program, ki bo računal na-
mesto nas. Število N pove, kolikokrat želimo ponoviti račun.

```
10 INPUT "R, X, N"; R, X, N
20 FOR I = 0 TO N
30   PRINT I, X
40   LET X = (1 + R) X - R X X
50 NEXT I
```

A.: Sedite zdaj vsak za svoj računalnik, nakrmite ga s programom in se malo
igrajte. Vzemite različne R in X , le za začetek predlagam, da ne vzamete
prevelikega R ; manjši od 1 naj bo.

(Otroci izbirajo, računalniki računajo — glej sliko 1!)



A.: No, kaj opazite?

P.: Števila nraščajo.

T.: Vedno bliže so enojki.

J.: Če dovolj dolgo računaš, se pa kar enke ponavljajo. Ampak t je najbrž
zaradi zaokroževanja, ker se nekaj zadnjih decimal v računalniku izgubi.

A.: Res je. Zdaj pa parameter povečajte malce čez 1. Kaj opazite?

J.: Vzela sem $R = 1.2$, $X = 0.5$ in dobila (slika 2) ...

1	0.500000	11	1.000000
2	0.800000	12	1.000000
3	0.992000	13	1.000000
4	1.001523	14	1.000000
5	0.999693	15	1.000000
6	1.000061	16	1.000000
7	0.999988	17	1.000000
8	1.000002	18	1.000000
9	1.000000	19	1.000000
10	1.000000	20	1.000000

Že v četrtem koraku postane X večji od ena, nato so števila izmenoma večja in manjša od ena, a kmalu se začno ponavljati enke.

A.: Prav, poigrajte se še tako, da pri istem R izbirate različne začetne X .

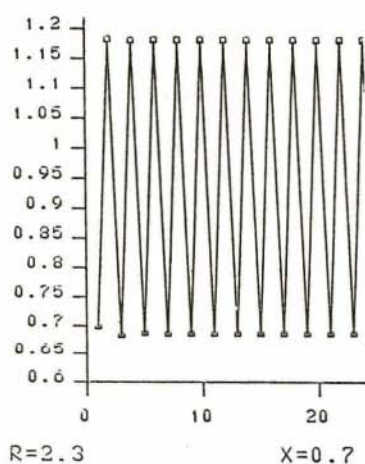
T.: Kakšne posebne razlike ne opazim, način obnašanja je vseskozi enak. Le ko sem za šalo vzel $X = 10$, je računalnik po nekaj korakih ugotovil prekoračitev obsega.

A.: Seveda. No, pravzaprav je X lahko največ $(1 + R)^2 / 4R$.

II. dejanje. Parameter narašča, dolžina se podvaja.

A.: Zdaj pa si R izberimo večji kot 2, le manjši kot 2.45 naj bo! Kaj opaziš, Jožica?

J.: $R = 2.3$, $X = 0.7$, $N = 50$: račun se ne ustali pri enki kot prej, ampak števila nekaj časa skačejo, dokler se ne začneta izmenoma ponavljati dve števili. (slika 3)



1	0.700000
2	1.183000
3	0.685075
4	1.181294
5	0.688723
6	1.181805
7	0.687631
8	1.181658
9	0.687945
10	1.181701
11	0.687853
12	1.181689
13	0.687880
14	1.181692
15	0.687872
16	1.181691
17	0.687874
18	1.181692
19	0.687873
20	1.181692
21	0.687874
22	1.181692
23	0.687874
24	1.181692

A.: Ker se števili ponavljata v vsakem drugem koraku, pravimo, da imamo cikel dolžine dva. Vzemite sedaj R malo večji od 2.45.

(Vsi računajo)

T.: Dobil sem cikel dolžine 4. Vzel sem $R = 2.48$.

P.: Jaz pa cikel dolžine 8 pri $R = 2.56$

A.: Ugotovite s poskušanjem, kdaj se cikel dolžine 2 spremeni v cikel dolžine 4 in kdaj le—ta v 8—cikel!

(To je naloga za naše bralce!)

T.: Ampak teta, kaj ni vmes še cikla dolžine 3, potem pa še ciklov dolžine 5, 6 in 7?

A.: Ne, dolžine ciklov se le podvajajo. Cikel dolžine 3 boš našel v ocvirku na koncu. Kaj pa pride za 8—ciklom?

P.: Gotovo cikel dolžine 16, pa 32 in tako naprej. In pri tem so prirastki R , ki povzročijo podvojitve dolžine, vedno manjši. Ampak zdi se mi, da bo zaradi zaokroževanja v računalniku to že težko opaziti.

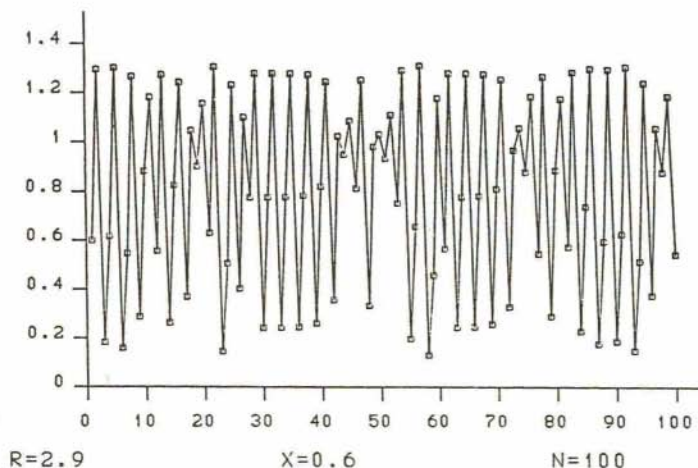
III. dejanje. Kaos

A.: Povečajmo R čez 2.57 in zašli bomo v kaos.

J.: Kaos! Takoj moram poizkusiti.

(Spet vsi računajo)

J.: Ničesar posebnega ne opazim. Vzela sem $R = 2.9$, izgleda pa tako, kot bi bila števila slučajno posejana (slika 4).



T.: Jaz pa sem vzel $R = 3.2$ in spet sem prekoračil obseg.

A.: Oh, pozabila sem reči, da ne smete s parametrom čez tri. Ta navidezna neurejenost, ki jo je opazila Jožica, je že kaos. Vendar bomo tudi v kaosu opazili nekaj pravilnosti. Najprej bomo programu vgradili zvonček, na interval širine D okrog točke S ga obesimo. In vsakič, ko pade X v to okoličino, bo zacingljal.

```
15 INPUT "S' D"; S, D
```

```
35 IF ABS(S - X) < D THEN PING
```

J.: Izbrala bom $R = 2.95$, $X = 0.6$, $N = 1000$, pa $S = 0.7$ in širino intervala 0.01 . Zanima me, kolikokrat bo zazvonilo.

(Računalnik računa in enkrat zacinglja.)

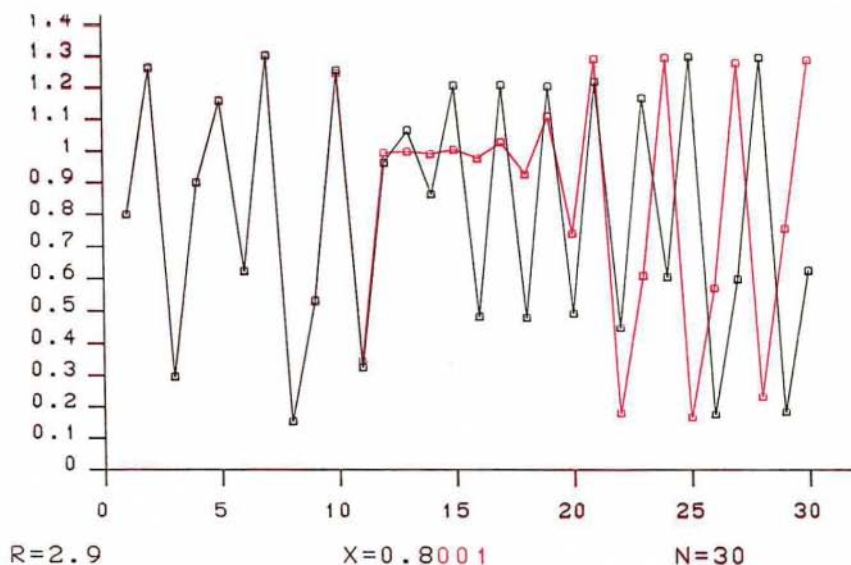
T.: Jaz bom pa le razširil interval in vzel $D = 0.1$

(Računalnik neprestano cinglja.)

A.: Kamorkoli med 0 in 1 postavite zvonček, na še tako majhen interval, prej ali slej bo zazvonilo. Seveda, če vzamete zelo ozek interval, bo treba dolgo čakati. Vzeti bo treba primerno velik N .

Druga zanimiva lastnost je pa občutljivost na začetno vrednost. Jožica in Polonca, izberita si isti R , isti N , le začetna X -a naj bosta čisto malo različna.

(Jožica in Polonca poženeta vsaka svoj program — glej sliko 5!)



T.: Dvanajst korakov še lahko nekako sledimo podobne X -e, potem se računa popolnoma razideta.

A.: Da, še tako majhna sprememba začetne vrednosti povzroči povsem drugačno zaporedje števil.

Epilog

Za konec le še ocvirek za naše bralce. Vzemite $R = 2.83$, torej sredi kaosa, in poženite program. Kaj opazite? V resnici se skriva v tej preprosti formuli še precej skrivnosti.

Peter Petek
slike *Andrej Vitek*

REŠITVE NALOG

PETKOVA PETRA (P–XV/4, str. 196)

Ker ima teden sedem dni in je vsako četrto leto prestopno, se koledar periodično ponavlja na 28 let. Petek se na enak datum ponovi zaporedoma v razmikih po 11, 6, 5 in 6 let. Šele po enajstih letih se ponovi januarja ali februarja eno leto pred prestopnim letom, v ostalih mesecih pa v prestopnem letu. Od tod vidimo, da bosta Petra in njen sin praznovala rojstni dan v petek pred letom 2000 le še januarja ali februarja leta 1998. Petra ima potemtakem 29 let, Peterček pa je bil rojen pozimi.

ZA VRAŽEVERNEŽE (P–XV/6, str. 335)

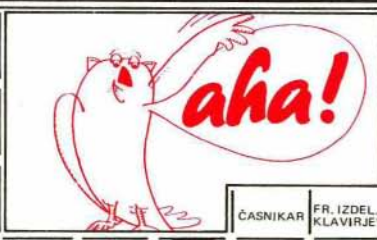
Upoštevajmo periodičnost koledarja (na 28 let) in si oglejmo obdobje od leta 1961 do 1988. V tem času le leto 1981 ustreza zahtevi, da ima en sam petek trinajstega v mesecu in da so v letih sedem pred njim in sedem potem trije takšni petki. Naslednji datum je v 21. stoletju, torej je bila zdravica izrečena 13. maja 1981, Črt pa je bil rojen 13. maja 1935.

Boris Lavrič

SLIKOVNA KRIŽANKA -

						TROS	DOMAČA ŽIVAL	UMRLI ČLAN BEATLOV	GRŠKA ČRKA	IME PEVKE HABERL	ANGL. PLOŠČ. MERA	NAŠA GLASB. SKUPINA
				IZDELOVALEC SKLED								
				NAUK O PESNIŠTVU								
				POJAVITEV								
SESTAVIL: MARJAN SKVORC		MLEČNA MASČOBA		MUSLIM. SV. PISMO AM. FILMSKI IGR. (Woody)					OCENA VLAK, KI VOZI FONOČI			
ŽENSKO IME						OSEBNI ZAIMEK HERCEGOVEC				JAUŠOVEC KAJETAN KOVIČ		
IGRALKA TKAČEVA					ANGL. ROCK GLASB. ARABSKI ŽREBEC				POLJ.-ČESKO HRIBOVJE ROM. KNJIŽ. (ALECU)			
PRODAJALEC SLIV							PIS-MENKA					
V GLASBI VEZANO							MEDMET SPODBUJ. IT. FILMSKA IGR. (Sophia)			ZASMEHOVANJE KOŽNO VNETHJE		
NEIMENOVANEC					ŠIVIC STANE	POLDRAGI KAMEN	TUJE Ž. IME GRŠKA ROGINJA				TUJE Ž. IME KRANJSKI ALPINIST	
												
										AMER. SLIKAR (THOMAS)		
				PREDEL								
				OKLEPNO VOZILO						MISTER		

Z LOGIKO V LETO 2000

		PRED- MESTJE NOVE GORICE	TROPSKA RASTLINA	LIJAK	RIMSKI DRŽAVNIK	POTKA				
RIMSKI ZALOŽNIK	GRŠKA KOLONIJA MATAVULJ							ČASNIKAR	FR. IZDEL. KLAVIRJEV	
						NADA	DALMAT. Ž. IME			
			JAPONSKI FILMSKI REŽISER				EGIPČANSKI BOG			
			APARAT				OSTANEK			
		VZKLIK PRI BIKOBORBI	KRALJEV- SKA IGRA							
						GRŠKA POKRAJINA	ODPOSILA- NEC			
PARTSKI KRALJ IZ 3. st. pr. n. št.	INDIJSKA SEKTA	OJDIPOV OČE			VOLOVSKA ANTILOPA					
		VRSTA KOSTANJA				SRBSKO M. IME				
			POŽREŠ- NICA		OPRAVILO					
		NEMŠKO ŽENSKO IME	NAPOVE- DOVALEC							
			VELE- MOJSTER							
								ATA		
							SILA			
							GALIJ			
			MESTO V USSR							
RISBA: MIHA ŠTALEC	TRETJI IN DRUGI SAMOGL.		ALUMI- NIJ			KONEC MOLITVE				

TEKMOVANJE ZAMEJSKIH SLOVENCEV IZ LOGIKE

Na tretjem republiškem tekmovanju iz logike, ki je bilo 15. oktobra v Ljubljani, so sodelovali tudi predstavniki zamejskih Slovencev. V začetku oktobra so pripravili svoja tekmovanja v Avstriji in Italiji. Naloge jim je posredovala komisija za logiko pri ZOTKS. Tekmovanje v Italiji in Avstriji se je udeležilo okoli 50 dijakov, 5 pa se jih je uvrstilo na republiško tekmovanje v Ljubljani. Tekmovanje zamejcev je potekalo v dveh kategorijah — do 15 let in nad 15 let.

Naloge za prvo kategorijo

1. naloga — Fantje tekmujejo

Andrej, Boris, Cene, Dane in Ferdo so tekmovali v teku na sto metrov. Vemo še:

Andrej ni zmagal.

Boris je bil tretji.

Ferdo je bil hitrejši kot Dane in počasnejši od Borisa.

Kdo je zmagal?

2. naloga — Poklici

Feliks, Cene in Tone so prijatelji, čeprav imajo različne poklice. Eden od njih je gasilec, eden miličnik in eden šofer. Kaj je kdo, če je izmed naslednjih štirih izjav samo ena resnična;

(1) Tone ni miličnik.

(2) Feliks ni šofer.

(3) Tone je šofer.

(4) Feliks ni miličnik.

3. naloga — Srajce

Jaklič, Breznik, Sovinc in Ribnikar so strojevodja, trgovec, čuvaj in šofer, vendar ne nujno v tem vrstnem redu. Po pravilu nosijo srajce rdeče, modre, črne in zelene barve, spet ne nujno v tem vrstnem redu.

Strojevodja redno premaguje Breznika v šahu. Sovinc in čuvaj pogosto igrata golf z osebami v črni in zeleni srajci. Jaklič in šofer ne marata osebe z zeleno srajco, rada pa imata trgovca, ki vedno nosi rdečo srajco.

Kakšen poklic opravlja kdo in kakšno srajco nosi kateri?

Naloge za drugo kategorijo

1. naloga — Poročne napovedi

Gregor, Janez, Aleš in Drago so oženjeni s Karlo, Evo, Pavlo in Reziko, vendar ne nujno v tem vrstnem redu. Pred leti so na zabavi dali različne napovedi.

Gregor je dejal, da se Janez ne bo poročil s Karlo, Janez je napovedal, da se bo Aleš oženil s Pavlo. Aleš je trdil, da se Drago gotovo ne bo poročil z Evo. Drago je bil prepričan, da bo imel veliko otrok.

Pokazalo se je, da je edini pravilno napovedal Pavlin mož.

Kdo je s kom poročen?

Ali ima Drago veliko otrok?

2. naloga — Poklici

Alenka, Biserka, Petra in Katra so mladenke, ki bi rade postale arhivistka, botaničarka, pilotka in kemik. Njihovi priimki so Amon, Božič, Petrič in Kotar, prihajajo pa iz Ajdovščine, Braslovč, Petrinj in Kranja.

Za vsako velja, da so začetnice njenega imena, priimka, domačega kraja in poklica, ki si ga želi, vse različne.

Tista, ki želi postati kemik, ni bila še nikoli v Braslovčah; tista pa, ki želi postati botaničarka, ni bila še nikoli v Petrinjah. Petra, dekle iz Ajdovščine in bodoča botaničarka so tri dobre prijateljice.

Kakšne so poklicne želje, kateri priimki in domači kraji vsake od mladenk?

3. naloga — Dekleta tekmujejo

Pet deklet, A, B, C, D in E je sodelovalo na tekmovanju, kjer med rezultati ni bilo delitve mest. Vsaka je bila seznanjena samo s svojo uvrstitvijo, B pa je poznala še uvrstitev D. Po končanem tekmovanju sta A in B dejali:

A: Nisem bila druga.

B: Bila sem za dve mesti boljša kot D.

C je slišala ti pripombi, vendar je vedela, da ena od obeh deklet vedno laže, druga pa vedno govori resnico. Po kratkem premisleku je C logično izpeljala vrstni red vseh petih.

Povejmo še, da C ni bila peta. Zdaj pa lahko sami določite vrstni red deklet.

Nežka Mramor—Kosta

Zimski popoldnevi in večeri so lahko tudi dolgočasni — ampak ne ob prebiranju Preseka. Tako nam vsaj pišeta Z. Devide iz Zagreba in B. Planinšek iz Mežice, ki nam je poslal tudi svoja razmišljanja o razstavljanju razlike kvadratov.

Radi tudi rešujete križanke. Vendar vas prosimo, da nam rešitev ne pošiljate, saj križanke niso nagradne. Lahko pa prispevate kakšno svojo, kot sta naredili Slavka in Tanja Mencin iz Grosuplja. Številska križanka je primerna za nižje razrede osnovne šole, se pravi za vaše mlajše brate in sestre. Mogoče pa bi se tudi vi preizkusili — a brez kalkulatorja in svinčnika!

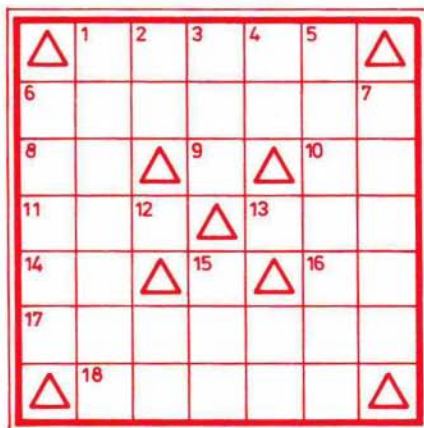
Navpično:

1. 5447 : 945
2. $3916 : x = 89$
3. $4589 - x = 4210$
4. $x \cdot 68 = 2992$
5. 315 : 16341
6. $x \cdot 56 = 3043320$
7. $478 + 14538 + 39329$
12. $891 : 99$
13. $1/3$ od 27
15. $x \cdot 27 = 26271$

PISMA BRALCEV

Vodoravno:

1. $2547 + 19642 + 32156$
6. $x : 419 = 12285$
8. $4268 : 97$
9. $x \cdot 46 + 68 = 482$
10. $1/3$ od 132
11. $21224 : 56$
13. $x : 139 + 7 = 14$
14. $2/6$ od 132
15. $19845 : 49 : 45$
16. $12403 - 12359$
17. $2095 \cdot 27 \cdot 91$
18. $x : 15 + 2623 = 6246$



Tina Barbič je s svojim pismom, ki smo ga objavili v drugi številki Preseka, vzpodbudila kar nekaj matematikov. Tako lahko preberete o tem članek Marije Vencelj — Newtonova naloga. Objavljamo pa tudi pismo avtorja učbenika, v katerem je Tina našla napako.

Dušica Boben

Draga Tina Barbič!

Prisrčna hvala za odkrito napako v MATEMATIKI ZA 6. RAZRED OŠ, pa tudi za lepo samostojno rešitev v Preseku 2 (1988) str. 95. Predlagam na videz podobno (morda lažjo?) nalogo:

Kako naj razporedimo sedem točk po sedmih premicah, tako da bodo na vsaki premici

- natanko tri točke?
- natanko tri od teh sedmih točk?

V imenu avtorjev Te lepo pozdravljam.

Ivan Pucelj

3. POLETNA ŠOLA INTERTRADE – IBM

Koncem septembra je na Fakulteti za elektrotehniko potekala 3. poletna šola, ki se jo je udeležilo 11 študentov računalništva in 2 študenta matematike.

Prva dva dneva smo obravnavali Mikroprolog na PC-jih, en dan vodenje robotskih modelov z ZX-Spectrumom, četrti dan pa smo obiskali Intertradev šolski center v Radovljici, kjer smo imeli predavanja in vaje iz CSP-ja, jezika četrte generacije.

Vsak udeleženec je prejel za spomin knjigo M. Gardnerja: AHA! PA TE IMAM. Šolanje je ob organizaciji Društva matematikov, fizikov in astronomov SR Slovenije finančno omogočilo podjetje Inettrade, TOZD Zastopstva IBM.

Izidor Hafner

JE RES $7 = 8$? (P XVI/1, str. 60)

Najbrž se mu je zdelo bolj urejeno, pa je namesto "... simetralo kota ACB" zapisal "... simetralo kota ABC".

Damjan Kobal

ZODIAK (P XV/6, str. 335 in str. 347)

Namesto 30 bi moralo pisati 31.

Boris Lavrič

RAZISKOVALNI DNEVI IZ MATEMATIKE

Društvo matematikov, fizikov in astronomov SR Slovenije je organiziralo Raziskovalne dneve iz matematike in fizike za srednješolce z namenom, da pritegne učence, ki so se posebno izkazali na matematičnih in fizikalnih tekmovanjih, in jih vzpodbudili k slasti in naporom raziskovalnega dela. Prvo vzpodbudo je dal prof. dr. Ivan Vidav, ki je velikodušno poklonil del svoje Žagarjeve nagrade in izrazil željo, da Društvo matematikov, fizikov in astronomov "kaj dobrega naredi". Ob dodatni finančni pomoči nekaterih delovnih organizacij je bil organiziran fizikalni program v času od 20. do 25. junija 1988 in matematični program v času od 5. do 9. julija 1988.

Kljub temu, da je bil matematični del Raziskovalnih dni v počitniškem času, so se povabljeni tekmovalci številno odzvali. Iz različnih krajev Slovenije so prišli: Andrej Bauer, Janez Brest, Jaka Cimprič, Timotej Ečimovič, Roman Flegar, Marjan Jerman, Alenka Kavkler, Jana Kotar, Tatjana Ozbič, Srečko Podlesnik, Primož Svetek in Marko Žerdin. V dopoldanskem času so poslušali predavanja iz naključnosti, diofantskih enačb, geometrije in Sturmovih zaporedij v zvezi z računanjem realnih ničel danega polinoma z računalnikom. Predavali so profesorji oddelka za matematiko Vladimir Batagelj, Edvard Kramar, Boris Lavrič in Andrej Kmet. Le-ti so tudi pripravili naloge s teh področij, ki so jih dijaki reševali v popoldanskem času ob pomoči asistentov Mirana Černeta, Matije Lokarja, Pavla Saksida in Petra Šemrla ter študentov Romana Drnovška in Francija Rozmana. Ob koncu raziskovalnih dni so udeleženci Raziskovalnih dni skupaj s svojimi kolegi fiziki pripravili bilten, ki ga je izdalo Društvo matematikov, fizikov in astronomov.

Trdno smo prepričani, da bodo takšni Raziskovalni dnevi postali tradicionalni. Poleg najuspešnejših tekmovalcev bi radi pritegnili tudi dijake, ki bi se posebej izkazali pri izdelavi raziskovalnih nalog za srednješolce. Ti bi s predavanji o opravljenem delu prav gotovo popestrili Raziskovalne dneve.

Na koncu tega kratkega poročila nam ostane, da se zahvalimo vsem, ki so finančno omogočili Raziskovalne dneve in vsem, ki so sodelovali pri njihovi izvedbi. Hvala tudi dijakom, ki so s svojim navdušenjem ta trud opravičili. Na svidenje prihodnje leto!

Peter Šemrl

LONEC

Na hrastovi mizi (83,5 cm x 147,3 cm) je papirnat prtiček (27,1 cm x 20,9 cm), na katerega želiš postaviti bakren lonec ($v = 87,7$ cm, $r = 14,2$ cm) tako, da se lonec nikjer ne dotika vrhnje ravne ploskve mize. Kako ti to lahko uspe?

Presekovci! anketa za vas

Vemo, da vam je Presek všeč, a se tako dobra stvar se lahko izboljša. Bi nam pomagali? Izpolnite anketo in jo oddajte učitelju, ki vam prinaša Presek. Vaše odgovore bomo temeljito proučili in morda bo že v eni od naslednjih številčk članek, ki si ga želite.

Anketa je anonimna, a vseeno bi nas zanimalo nekaj podatkov:

Šola Kraj

Smer (za srednješolce)

Spol (obkroži) M Ž Razred ... Koliko let že bereš Presek?

Katero interesno dejavnost obiskuješ ali s čim se ukvarjaš?

1. Katero rubriko najprej prebereš? (Če se težko odločiš, obkroži največ tri.)

- | | | |
|-------------------|------------------|------------------|
| a. novice | e. astronomija | i. nove knjige |
| b. * tekmovanja * | f. razvedrilo | j. pisma bralcev |
| c. naloge | g. matematika | k. |
| d. fizika | h. računalništvo | l. |

2. Katerih prispevkov tega šolskega leta se najbolj spominjaš? (Če ne veš naslova, jih na kratko opiši.)

3. V eni od naslednjih številčk Preseka bi rad prebral članek o

4. Oštevilči (uredi) področja, ki jih obravnava Presek, glede na to, kako te zanimajo:

— matematika — fizika — astronomija — računalništvo

5. Ste kdaj v tem šolskem letu uporabljali Presek (obkroži)

a. pri pouku DA NE b. pri interesni dejavnosti DA NE

6. Katere naloge najraje rešuješ? (Izberi največ tri.)

- | | |
|--|--------------------------------------|
| a. s tekmovanj iz računalništva | g. za razvedrilo |
| b. nagradne | h. ob koncu fizikalnih člankov |
| c. ob koncu člankov iz astronomije | i. s tekmovanj iz logike |
| d. z matematičnih tekmovanj | j. ob koncu člankov iz računalništva |
| e. s fizikalnih tekmovanj | k. ob koncu matematičnih člankov |
| f. sestavljene posebej za različne razrede | l. nobenih |

7. Ker je anketa kratka, mi pa bi radi izvedeli čim več vaših predlogov in mnenj, napišite še kaj. Ne bodite boječi, pišite o vsem: o vsebini, ilustracijah, težavnosti... Izvirne odgovore bomo objavili in nagradili.

Spoštovani učitelji, poverjeniki za Presek!

V Preseku objavljamo anketo za mlade bralce z željo, da bi dobili vzpodbude in ideje za še boljšo revijo. Tudi vaše mnenje bi nam zelo koristilo. Prosimo vas, da s sodelovanjem kolegov na šoli izpolnite teh nekaj vprašanj in nam jih pošljite skupaj z odgovori učencev najkasneje do 28.4.1989. Najlepša hvala!

Dušica Boben

Anketa je anonimna, a vseeno bi vas prosili za nekaj podatkov:

Šola Kraj Št. naroč.

Predmeti, ki jih poučujete (obkrožite):

- a. matematika c. fizika e.
b. računalništvo d. astronomija f.

1. katerim področjem, ki jih obravnava Presek, bi povečali ali zmanjšali obseg (obkrožite več ali manj):

- a. fizika več manj c. računalništvo več manj
b. astronomija več manj d. matematika več manj
e.

2. Kateri članek je naredil to šolsko leto na vas največji vtis?

3. Bi lahko napisali, katere prispevke pri pouku ali interesnih dejavnostih najbolj koristno uporabite?

4. Katere prispevke pogrešate?

5. Ste mnenja, da bi bilo v Preseku potrebno večje sodelovanje učiteljev (obkrožite): DA NE

6. Kaj mislite, zakaj učitelji ne pošiljajo prispevkov v Presek?

7. Vaši predlogi, mnenja

RAZVRŠČANJE ŠTEVIL — Rešitev s str. 280

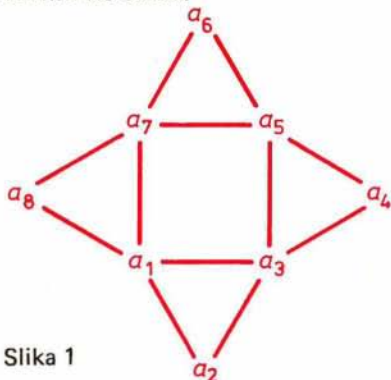
1. Z $a_1, a_2, \dots, a_8$ označimo iskana števila (slika 1). Števila a_2, a_4, a_6, a_8 , so vsako le v enem od trikotnikov, medtem ko so števila a_1, a_3, a_5 in a_7 vsako v dveh trikotnikih in kvadratu. Če z S označimo vsoto števil v vsakem izmed trikotnikov in v kvadratu, lahko zapišemo

$$a_2 + a_4 + a_6 + a_8 + 3(a_1 + a_3 + a_5 + a_7) = 5S$$

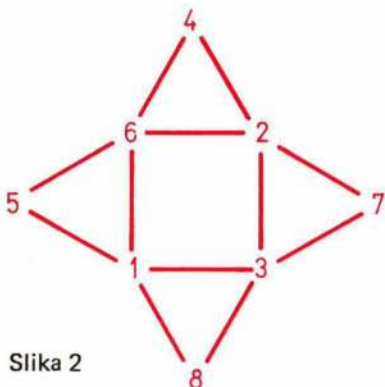
In še

$$\begin{aligned} 2(a_1 + a_3 + a_5 + a_7) &= 5S - (a_1 + a_2 + a_3 + a_4 + a_5 + a_6 + a_7 + a_8) = \\ &= 5S - 36 \end{aligned}$$

Ker je $a_1 + a_3 + a_5 + a_7 = S$, dobimo, da je $2S = 5S - 36$ in $S = 12$. Sedaj ne bo težko poiskati rešitve. Eno izmed rešitev najdemo na sliki 2, bralca pa vabimo, da razmisli, kako z "vrtenjem" in "zrcaljenjem" iz omenjene rešitve dobimo vse ostale.



Slika 1



Slika 2

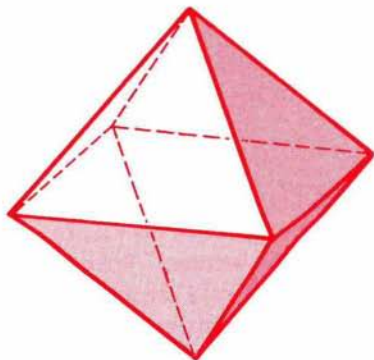
2. Naj bo S vsota števil na vsaki izmed ploskev oktaedra. Ker je vsako oglišče oktaedra hkrati oglišče štirih stranskih ploskev, velja

$$8S = 4(a_1 + a_2 + a_3 + a_4 + a_5 + a_6).$$

Če je k najmanjše izmed števil $a_1, a_2, \dots, a_6$, lahko zapišemo

$$\begin{aligned} 2S &= (k + (k+1) + (k+2) + (k+3) + \\ &\quad + (k+4) + (k+5)) = 6k + 15 \end{aligned}$$

To pa ni mogoče, ker je $2S$ sodo, $6k + 15$ pa liho število.



REŠITVE NALOG

MATEMATIČNI KROŽEK – Rešitve s str. 257

1. Označimo manjkajočo cifro na levi z x , na desni pa z y . Zapisano število je deljivo z 9 in z 11. Po kriteriju za deljivost z 9 velja $9 \mid x + y + 2$, kriterij deljivosti z 11 pa nam da $11 \mid x - y + 8$. Odtod brž dobimo rešitev $x = 5, y = 2$.

2. Poglejmo na sliko in upoštevajmo, da sta označena pravokotna trikotnika podobna. Tako dobimo $x : y = a : b$ in položaja točk X in Y na robu biljardne mize. Podobno določimo točki U in V . Iz slike razberemo enakosti

$$(3 - u) : 1 = u : v = 1 : (2 - v),$$

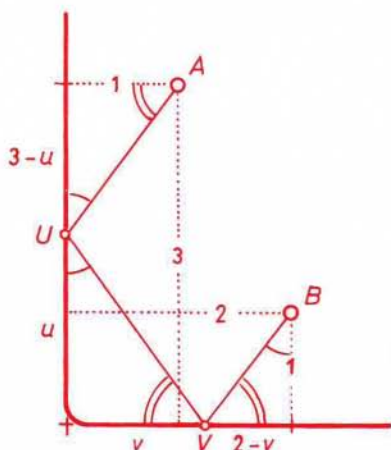
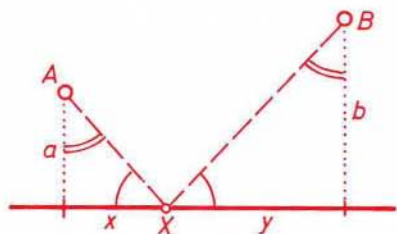
ki ju pretvorimo v

$$u = 3v - uv$$

$$v = 2u - uv$$

in nato odštejemo. Dobljeno enakost $3u = 4v$ vstavimo v eno od prejšnjih enakosti, ki jo nato rešimo. Rešitev je tedaj $u = 5/3$, $v = 5/4$.

Nalogo lahko rešujemo tudi s pomočjo zrcaljenj preko roba (robov) biljardne mize.



3. Kratek premislek nam pove, da bo naloga rešena, če dokažemo veljavnost naslednje lastnosti: Trikotnik, ki veže dve oglišči osnovne ploskve pravilnega četverca z razpoloviščem višine nanjo, je enakokrak in pravokoten. Za dokaz bosta zadostovala pogled na sliko ter Pitagorov izrek in njegov obrat.

1. kategorija

1. Ker je bil Ferdo hitrejši kot Dane in počasnejši od Borisa, je moral biti četrti, Dane pa peti. Andrej je drugi, zmagal pa je Cene.
2. Vsaj ena od izjav (1) in (4) mora biti resnična, saj Feliks in Tone nista oba miličnika. Recimo, da je resnična izjava (1), vse ostale pa so napačne. Potem bi bil Feliks hkrati šofer in miličnik, to pa ni mogoče. Resnična je torej izjava (4). Tone je miličnik, Feliks šofer, Cene pa gasilec.
3. Nalogo najlažje rešimo s tremi tabelami. Z znakom V bomo označili kombinacijo, ki velja, z znakom X pa kombinacijo, ki ne velja. Indeks pa označuje korak, na katerem smo znak vnesli v tabelo. Indeks O imajo vsi tisti znaki, ki jih lahko vnesemo neposredno iz podatkov.

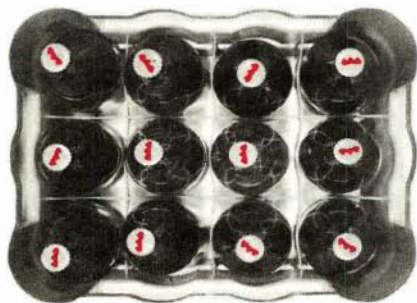
	strojevodja	trgovec	čuvaj	šofer
Jaklič		XO	V4	XO
Breznik	XO			V6
Sovinc		V5	XO	
Ribnikar	V7			
	rdeča	modra	črna	zelena
Jaklič	XO	V4		XO
Breznik			V6	
Sovinc	V5		XO	XO
Ribnikar				V7
	rdeča	modra	črna	zelena
strojevodja				V1
trgovec	VO			
čuvaj		V2	XO	XO
šofer	XO		V3	XO

Iz izpolnjenih tabel preberemo, da je Jaklič čuvaj v modri srajci, Breznik je šofer s črno srajco, Sovinc trgovec z rdečo srajco, Ribnikar pa strojevodja v zeleni srajci.

2. kategorija

1. Janez zagotovo ni Pavlin mož, saj je napovedal, da bo njen mož Aleš. Njegova napoved je torej nepravilna in tudi Aleš ni Pavlin mož. Tudi njegova napoved je nepravilna, torej se je Drago poročil z Evo. Pavlin mož je lahko edino Gregor, ki je pravilno napovedal, da se Janez ne bo poročil s Karlo. Janezu je ostala Rezka, Karla pa se je poročila z Alešem. Drago nima veliko otrok.
2. Iz zadnjih dveh podatkov sklepamo, da bodoča botaničarka ni niti iz Ajdovščine niti iz Braslovč, torej mora biti iz Kranja. Petra ni bodoča botaničarka, pa tudi iz Ajdovščine ni, torej mora biti iz Braslovč. Petra torej tudi kemik ne bo, želi si postati arhivistka. Njen priimek je Kotar. Ostalih kombinacij ni več težko določiti:
Alenka Petrič je iz Kranja, zanima pa jo botanika.
Biserka Amon je iz Petrinj in želi postati kemik.
Katra Božič iz Ajdovščine pa misli, da bo pilotka.
3. Kako je lahko C izpeljala vrstni red?
Recimo, da A govori resnico, B pa laže. V tem primeru hitro preverimo, da C nikakor ne more izpeljati vrstnega reda, ker pač nima dovolj podatkov.
Če A laže in B govori resnico, je A druga, tretje mesto pa ima B ali pa D. C bi lahko bila prva ali četrta, vendar lahko ugotovi, kako sta se uvrstili B in D samo, če je prva. Vrstni red je torej tale: C, A, B, E, D.

Nežka Mramor—Kosta

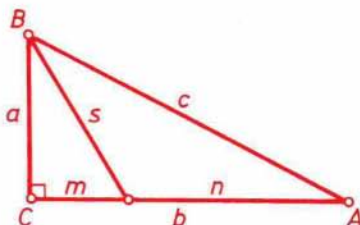


ZABOJ STEKLENIC RADENSKE

Zaboj steklenic, ki ga nesemo v eni roki, lahko držimo za krajšo (A) ali za daljšo stranico (B). Kdaj je manjša nevarnost (če sploh je), da iz zaboja pade kaka steklenico?

Ciril Velkovrh

1. Imamo $r = p/s = ab/(a + b + c) = (u^2 - v^2) \cdot 2uv / (2u^2 + 2uv) = v(u - v)$.
2. Če upoštevamo zveze (1a), sledi $xyz = 2uv(u - v)(u + v)(u^2 + v^2)$. Prepričaj se, da je za primitivno trojico v (1a) eno od števil u, v liho, eno sodo. Torej že imamo v xyz faktor 4. V naslednjem koraku ugotovi, da je od števil $u, v, u - v$ in $u + v$ vsaj eno deljivo s 3, in podobno od števil $u, v, u - v, u + v$ in $u^2 + v^2$ vsaj eno deljivo s 5 (lahko si pomagaš z ostanki po deljenju s 3 oziroma s 5).
3. Najprej se spomnimo, da simetrala deli nasprotno stranico v razmerju $n : m = c : a$ (če je kdo na to pozabil, ali še ne ve, to hitro dokaže, če skozi C potegne vzporednico k simetrali, podaljša stranico AB do presečišča s to vzporednico in prouči nastalo situacijo). Iz zveze $m + n = b$ izrazimo najprej $m = ab/(a + c)$ in nazadnje $s = \sqrt{a^2 + m^2} = a/(a + c) \cdot \sqrt{(a + c)^2 + b^2}$. Uporabi zveze (1a) pomnožene s skupnim faktorjem $a = t(u^2 - v^2), b = t \cdot 2uv, c = t(u^2 + v^2)$ in jih vstavi v zgornji izraz $s = t(u^2 - v^2) \sqrt{u^2 + v^2} / u$. Najbolje je izbrati $t = u$, u in v pa tako, da je $u^2 + v^2$ popoln kvadrat, torej prva dva člena nove pitagorejske trojice. Za $u = 4, v = 3$ dobiš na primer $a = 28, b = 96, c = 100$ in $s = 35$.
4. Upoštevaj $v_a = p/2a, v_b = p/2b$ in $v_c = p/2c$ in zahtevo $v_a + v_b = v_c$.
5. Iz izpeljave enačbe (3) vemo, da je $1/a + 1/b = 1/s_c$. Bogato množico celoštevilskih rešitev najdemo v (3a): $a = u(u + v), b = v(u + v), s_c = uv, u, v \in \mathbb{N}$. Tudi c mora biti celoštevilski in skupaj z a in b zadošča enačbi (6): $c^2 = a^2 + ab + b^2 = (u + v)^2(u^2 + uv + v^2)$. Popoln kvadrat dobimo, če bo $u^2 + uv + v^2 = r^2$, torej (u, v, r) nova trojica iz (6). Zato izberemo (glej (6a)) $u = u_1^2 - v_1^2, v = 2u_1v_1 + v_1^2, u_1, v_1 \in \mathbb{N}, u_1 > v_1$. Za najmanjši taki vrednosti dobimo za iskano četvorko $(a, b, c, s_c) = (24, 40, 56, 15)$.
6. V obrazcih (6a) postavi $v = 1$, potem $y = 2u + 1, u \in \mathbb{N}$.
7. Ker so x, y in z paroma tuji, iz enačbe $x^2 + xy + y^2 = z^2$ sledi, da je z lih. Vzemi na primer, da je $x = 2k, k \in \mathbb{N}$, potem sta ostali dve števili lihi, torej pišimo $y = 2i + 1, z = 2j + 1$. Iz zgornje enačbe potem sledi $x(x + y) = z^2 - y^2$ oziroma $2k(2k + 2i + 1) = 4(j(j + 1) - i(i + 1))$. Ker

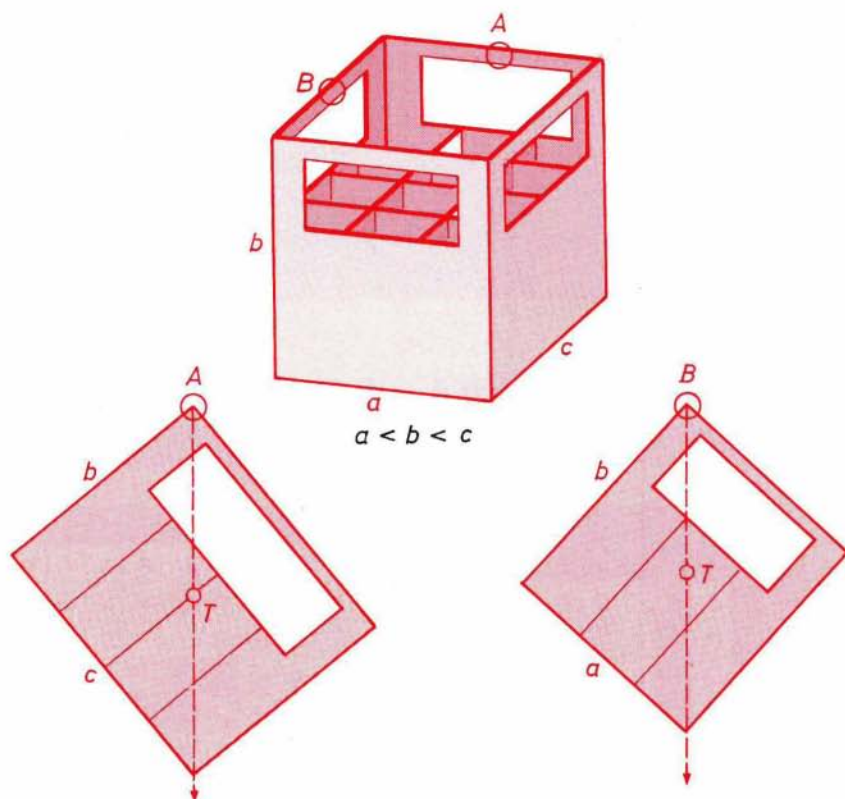


je od dveh zaporednih naravnih števil eno vedno sodo, je na desni večkratnik od 8, zato mora biti k deljiv s 4 oziroma x večkratnik od 8. Ostalo premisli sam.

Edvard Kramar

ZABOJ STEKLENIC RADENSKE

– Rešitev s str. 301



V prijemališču je os vrtenja, okrog katere se zavrti zaboj za toliko, da je težišče zaboja (T) točno pod prijemališčem (glej sliko). V drugem primeru je kot, za katerega so steklenice nagnjene proti vodoravnici, manjši. Zaboj steklenic moramo držati za daljšo stranico.

Ciril Velkovrh

PREMISLI IN REŠI – Rešitev iz P–XVI/1

Dobili smo le šest odgovorov, najbrž je bila kriva naša netočna formulacija vprašanja – zapisati bi bili morali, da sta ulomek in njegova obratna vrednost *čisto* periodična. Zato je tudi nekaj bralcev drugače razumelo vprašanje. Pisali so nam: Janez Češarek iz Ribnice na Dolenjskem, Damijan Dolinar iz Komen-de, Borut Gornik iz Šentjerneje, Milan Kambič z Jesenic, Bojan Ramšak iz Ljubljane, Bogdan Tertinek iz Limbuša.

Izžrebali smo Janeza in Milana in jima poslali knjigo M. Gardner: Pa te imam iz Državne založbe Slovenije.

Objavljamo Milanovo rešitev.

Danim pogojem ustreza ulomek $13/7$. Ostali ulomki s podobnimi lastnostmi imajo vsoto števca in imenovalca večjo od 20. (npr. ulomek $21/13$). Pri reševanju naloge sem si pomagal z računanikov ZX Spectrum.

Peter Petek

SKANDINAVSKA KRIŽANKA – Rešitev iz P–4

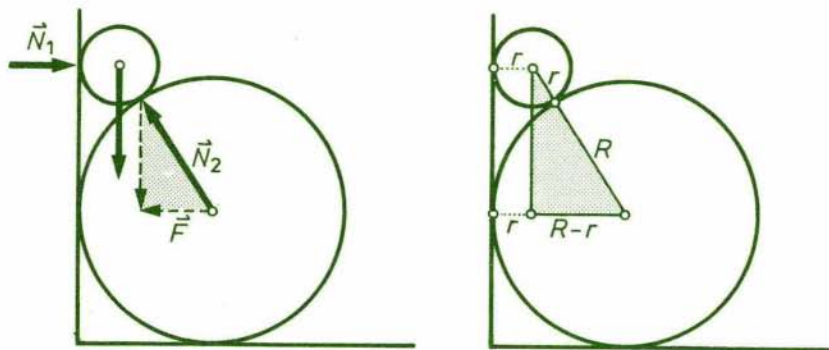
	S	L	I	K	O	V	N	A		K	R	I	Ž	A	N	K	A			
$5x - 3 = 2x - 1$ $3x = 2$ $x = \frac{2}{3}$	PREPROST PLIS	IZOLAC STROJ V PLASTNO TUNELU	NAJLJUBŠI ČRNI	REKA V RAVN STANU	NEODOLNI AFRISKI POLTNI REVOLVI	OBRODNI KOSILNI V STANU	PREKO VODNI KOSILNI STROJ	STREŠNA KROVILICA	PREKO VODNI KOSILNI STROJ	ITALI JANINA RTV	POBATELI KOCER	KABA NITNA POPEVKA	RIJAKA LAVALANA	DEL INENA KOT LARJESKI POLTNA EP-LAN	KIZJE LUNJE	NEODOLNI AFRISKI POLTNI REVOLVI	OBRODNI KOSILNI V STANU	PREKO VODNI KOSILNI STROJ		
RAVI KONCI	E	N	A	K	O	N	O	Č	J	E	R	A	D	O	M	U	R	N	I	K
KLONO KOTLA KRIŽAN	N	E	L	A	D	U	K	A	T	L	I	V	N	O	H	U	G	O		
PORTUGAL STUČE V PLASTNI	A	Z	O	R	I	R	A	T	E	Č	E	A	G	N	I	D	O	L		
ČARLI KOVIČ	Č	N	I	V	J	E	K	R	A	K	A	R	A	R	E	R	O			
NAJVEČJE MESTO NA KOSILNI	B	A	S	T	I	A	A	N	N	A	D	A	S	T	R	I	G			
PREKO KOSILNI	A	N	K	C	S	O	M	I	K	A	R	M	I	K	E	L	N			
	K	A	P	A	L	K	A	T	A	T	P	U	N	A	T					
ANI SVETLOSTNI	A	L	E	I	L	K	A	R	E	K	O	R	D	I	R	A				
	P	A	T	O	A	Z	A	N	I	N	I	R	V	I	N	G				
	N	A	S	P	R	O	T	J	E	V	A	R	I	A	N	T				
	O	R	K	T	V	O	R	A	S	A	M	G	E	L						

GLADKA NAGRADNA NALOGA – Rešitev iz P1

Prejeli smo le eno rešitev naloge o gladkih valjih, ki pa je skrbno izdelana in pravilna. Poslala jo je Vladimira HARTMANNSGRUBER iz Novega mesta, ki je za nagrado prejela knjigo iz zbirke Sigma, J. Grasselli, Diofantske enačbe.

Njeno rešitev smo priredili in se tako izognili uporabi kotnih funkcij.

Označimo z R polmer spodnjega valja in z m njegovo maso, z r pa polmer valja, ki leži na prvem. Naloga pove, da je potem $R = kr$, masa gornjega valja pa je zato enaka $m' = m/k^2$. Njegovo težo $m'g$ uravnovešata sili $\vec{N}_1$ in $\vec{N}_2$ (glej sliko).



Vodoravno komponento sile $\vec{N}_2$ prispeva iskana sila $\vec{F}$, ki je zaradi ravnovesja (Newtonov zakon) enaka $-\vec{N}_1$.

S pomočjo podobnosti in Pitagorovega izreka dobimo enakosti

$$\frac{F}{m'g} = \frac{R-r}{\sqrt{(R+r)^2 - (R-r)^2}} = \frac{k-1}{2\sqrt{k}}$$

iz katerih izpeljemo velikost iskane sile

$$F = \frac{k-1}{2\sqrt{k}} m'g = \frac{k-1}{2k^2\sqrt{k}} mg$$

S pomočjo odvoda lahko ugotovimo, da je potrebna sila F največja pri razmerju $k = 5/3$.

Boris Lavrič

IZBIRNO TEKMOVANJE IZ LOGIKE — Rešitve nalog iz P-4

7. razred

1.

Belka je rjava. Črnka je bela. Rjavka je črna.

2. Rešitev A: Imena deklet označimo z začetnimi črkami: A, B, C, D, E, F in G. Te črke nam naj pomenijo tudi že ustrezni prosti dan. Iz pogovora razberemo samo vrstni red prostih dni:

```

C   A
E   —   D
B   —   —   G
—   —   —   F   —   —   (F je četrtek)
    
```

(Predstavljamo si, da sledijo mesta "v krogu", da torej B — — G lahko razpade na konec in začetek tedna.)

Izhajamo iz pogoja, da je Fridin prosti dan na sredi med Betkinim in Cvetkinim. Poglejmo možnosti glede na razmik med temi dnevi. Po vrstico nanašajmo posledice zgornjih pogojev za C, A, E, D, B in G:

- I. a) — — B F C — — (protislovje zaradi C A in B — — G).
A G

- b) — — C F B — — (protislovje zaradi C A).
A

- II. a) B — — F — — C (protislovje zaradi B — — G).
G

- b) C — — F — — B (protislovje zaradi B — — G).
B

- III. a) — C — F — B — (protislovje zaradi B — — G).
G

- b) — B — F — C —
E D G A

Prosti dnevi deklet so takole razporejeni: pon — Eva, tor — Betka, sre — Ditka, čet — Frida, pet — Giza, sob — Cvetka, ned — Ana.

Rešitev B (pri sedmošolcih malo verjetna): Pogoje iz naloge prepisemo v enačbe, pri čemer dobijo dnevi tedna ustrezne številke: pon = 1, tor = 2, sre = 3, čet = 4, pet = 5, sob = 6, ned = 7. Anin prosti dan označimo z A, Betkin z B, Cvetkin z C, Ditkin z D, Evin z E, Fridin z F in Gizelin z G. Računamo seveda z ostanki pri deljenju s 7 (na primer $2 + 6 = 8 \equiv 1$). Ustrezne enačbe so:

- I. $A = C + 1$
- II. $D = (E - 1) + 3 = E + 2$ U $D = E + 2$
- III. $B = G - 3$ U $G = B + 3$
- IV. a) $B = F + a$, $C = F - a$
 b) $B = F - a$, $C = F + a$ pri čemer je $a \leq 3$
- V. $F = 4$

Izhajamo iz $F = 4$ in preverimo možnosti za a v IV. Ovržemo $a = 1$, $a = 3$ in možnost IV. a) za $a = 2$ (dobimo enako vrednost za različni dekleti ali pa ne zadostimo pogoju $D = E + 2$), tako da dobimo rešitev: $F = 4$, $B = 2$, $C = 6$, $G = 5$, $A = 7$, $D = 3$ in $E = 1$.

Prosti dnevi deklet so: Ana — ned, Betka — tor, Cvetka — sob, Ditka — sre, Eva — pon, Frida — čet in Gizela — pet.

3. Danica ima modro, Živa rdečo, Beba zeleno in Vesna belo majico.

8. razred

1. A je modra, B je rdeča in C bela.
2. Saš ni logik, saj ne bi napačno trdil, da je nagrado iz logike dobil nekdo drug. Je Saš lahko matematik? Potem je njegova izjava pravilna — Robert je logik in Robert lahko govori resnico: Borut je dobil nagrado iz francoščine. Borut se torej ne moti, ko trdi, da je Igor dobil nagrado iz angleščine. Vendar pa je za Igorja po vsem prejšnjem ostala le nagrada iz angleščine, kar pa je protislovje. Saš torej ni matematik. Igor ima tako prav, torej je logik ali matematik. Toda potem se moti Borut in je, tako kot Saš, dobil nagrado iz angleščine ali francoščine. Za drugega resnicoljuba velja le Robert, od njega pa izvemo, da je Borut dobil nagrado iz francoščine. Za Saša torej ostane angleščina. Ker se Saš moti, Robert ni dobil nagrade iz logike, pač pa iz matematike. Za Igorja ostane tako nagrada iz logike.
3. Prepišimo izjave treh fantov v preglednejšo simbolično obliko:
 B: $\emptyset$ $\emptyset$
 D: $\emptyset$ S
 S: S B

Oglejmo si izjave D in S: vidimo, da sta njuni mnenji komplementarni — kar trdi eden, drugi zanika in obratno. To kaže na to, da nihče od njiju ni "mešanec". Če je npr. prva izjava D-ja lažna in druga resnična, je prva izjava S-ja resnična in druga lažna — S je tudi "mešanec", kar pa nasprotuje pogojem naloge. Enako bi lahko sklepali pri drugačni razvrstitvi laži in resnic. Mešanec je torej B.

Je lahko D resnicoljub in sta obe njegovi izjavi pravilni: B je nedolžen in S

tat? S tem pa bi bili pravilni obe Borutovi izjavi, kar pa nasprotuje temu, da je Borut mešanec. D torej ne more biti resnicoljub, torej je D lažnivec. S pa je resnicoljub. Poglejmo, če se te posledice ujemajo z izjavami: D res obakrat laže, S res obakrat govori resnico, B pa se je v prvem stavku zlagal, v drugem pa govori resnico. Iz Simonovih izjav tudi izvemo za tatu — tat je "mešanec" Borut.

1. letnik

1. Za nadev je Ana uporabila orehe, s čimer je ustregla le Roku.
2. Nesposobni je Purk, Nezaželeni je Šork in govori v tem stavku resnico, Nesrečni pa je Vark.
3. Poglejmo najprej, koliko izjav je sploh lahko dalo deklet, ki je pomivalo. Iz II. vidimo, da je dalo najmanj eno; torej eno, dve ali pa vse tri. Druge izjave so zaradi III. lažne.
 - a) Vseh treh ni dala, ker bi se v tem primeru vsaj ena izjava nanašala na njo samo, kar pa nam prepoveduje I.
 - b) Ali je lahko dala natanko eno izjavo, edino resnično? Preglejmo možnosti in posledice glede na resnično izjavo v napol simbolizirani obliki, da ne bo toliko pisanja:

R1: 1. A ni pomagala.

2. B je kuhala.

3. C je pomivala.

Iz 2. in 3. dobimo, da je A pomagala, 1. je lažna. Protislovje.

1. A je pomagala.

R2: 2. B ni kuhala.

3. C je pomivala.

Iz 1. in 3. dobimo, da je B kuhala, 2. je lažna. Protislovje.

1. A je pomagala.

2. B je kuhala.

R3: 3. C ni pomivala.

Iz 1. in 2. sledi, da je C pomivala, 3. je lažna. Protislovje.

To pa so vse možnosti, ki so prišle v poštev pri natanko eni pravilni izjavi.
- c) Deklet, ki je pomivalo, je torej dalo natanko dve izjavi (ki sta zaradi III. obe resnični). Nanašati se morata (zaradi I.) na kuharico in njeno pomočnico, tretja izjava pa je lažna. Preglejmo možnosti glede na lažno izjavo:

L1: 1. Ana je pomagala.

2. B ni kuhala.

3. C ni pomivala.

Iz 1., 2. in 3. sledi, da je B pomivala in C kuhala. Pomivalka B govori o sebi. Protislovje.

1. Ana ni pomagala.

L2: 2. B je kuhala.

3. C ni pomivala.

Iz 1., 2. in 3 sledi, da je A pomivala in C pomagala. A govori o sebi. Protislovje.

1. A ni pomagala.

2. B ni kuhala.

L3: 3. C je pomivala.

To pa je možnost, ki nam daje rešitev, saj se ujema z vsemi predpostavkami: A je kuhala, B je pomagala, C pa pomivala. Tega dne je kuhala (in preveč solila) Ana.

2. letnik

1a. Beli premakne lovca na a8, edina poteza črnega je premik kmeta na h4. Beli premakne kmeta na b7 in omogoči edino potezo črnega: kralj h7 — h8. Nato beli kmet promovira v damo ali lovca in hkrati odkrije šah.

1b. Peter igra kitaro in laže, Jaka igra saksofon in govori resnico, Miha pa igra trobento in laže.

2. Iz (4) vidimo, da je "obratovalnih dni" največ pet. Iz (1), (2) in (3) sledi: trgovina dela vsak dan od teh petih, pošta štirikrat, in tako ostane za knjižnico samo en dan (to pa je ravno "Ferdov dan"), saj bi sicer kršili (1). Tako imamo že kar oprijemljivo resnico:

I. Knjižnica je odprta samo na dan, ko je pošta zaprta, pa ta dan ni sredo ali nedelja.

II. Iz (3) in (4) tudi vidimo, da je trgovina zaprta samo ob sredah in nedeljah.

Te ugotovitve zdaj uporabimo v (5) in (6) in ugotovimo, o katerih treh zaporednih dneh govori (5) in o katerih govori (6). Obe točki nam morata dati isti rezultat za knjižnico. Pomagajmo si s tabelama; izhajamo iz II.

(5)	1	2	3
	zaprta pošta	zaprta knjižnica	zaprta trgovina
	ponedeljek	torek	sreda
	petek	sobota	nedelja

Ugotovitev v I. nam da možna dneva, ko je odprta knjižnica: ponedeljek ali petek.

(6)	1	2	3
	zaprta knjižnica	zaprta trgovina	zaprta pošta
	torek	sreda	četrtek
	sobota	nedelja	ponedeljek

Spet sklepamo s pomočjo I., da je knjižnica odprta v četrtek ali ponedeljek. Iz (5) in (6) moramo dobiti isto rešitev — to pa je presek obeh rešitev, torej ponedeljek.

Ferdo je bil v Žabji vasi v ponedeljek.

3. Dare, Matic in Tomaž imajo črne kape (in lažejo), Primož in Andrej pa imata beli kapi (in govorita resnico).

3. letnik

- Resnična je Daretova trditev. Prepir poteka na nedeljo.
 - Rešitev prikažimo v lahko razumljivi shematizirani obliki, zahteve iz a), b), c) pa prevedimo v jezik (1), (2) in (3).
- a) Star več kot 70, ni član Bimbom, ni član Namnum.

Iz (1) sledi, da je brezzob.

Iz (2) sledi, da je član Bimbom.

Protislovje. V primeru, ko predpostavimo, da je član Namnum, nikjer ne zadenemo v protislovje, saj nobena od predpostavk za članstvo Bimbom ne vključuje "več kot 70 in je član Namnum" hkrati.

- b) Ni star več kot 70, ni brezzob, ni član Bimbom, je član Namnum.

Iz (3) sledi, da je član Bimbom.

Spet smo zašli v protislovje. Možnost, da ni član Namnum, nas ne zapelje v protislovje, saj se nečlanstvo v Namnum pojavlja samo v 2), in sicer skupaj z "je brezzob", s tem pa v b) nimamo opravlja.

- c1) Ni star več kot 70 let, je brezzob, je član Bimbom, je član Namnum.

Iz (3) sledi, da je član Bimbom, pa karkoli je že z njegovimi zobmi.

- c2) Ni star več kot 70, je brezzob, je član Bimbom, ni član Namnum.

Iz (3) sledi članstvo v Bimbom, pa kolikor let že ima.

V tem primeru torej o članstvu Namnum ne moremo reči nič določenega.

Če nekdo izpolnjuje pogoje iz a), je član kluba Namnum; če izpolnjuje tiste iz b), ni član kluba Namnum, v primeru pogojev iz c) pa je možno oboje: ali je član kluba Namnum ali pa ne.

3. Prepišimo trditve v bolj pregleden jezik — jezik enačb in obnje zapišimo tudi najbolj očitne posledice: $31 \leq A, B, C \leq 43$

A: $B = A + 3$

$C = A - 4$

B: $A = 6k$; zaradi omejitev je A ali 36 ali 42

$C > A$

C: $C = A + 1$

$A = 7k$; zaradi omejitev je A ali 35 ali 42.

Nekaj vidimo takoj: A ni najstarejši, saj ne bi lagal in govoril, da je B starejši od njega. Zato se je A vsaj enkrat zlagal. Ker je najstarejši oziroma resnicoljubnež B ali C, vemo: A je 35, 36 ali pa 42.

Denimo, da je najstarejši C in je torej obakrat govoril resnico, vendar imamo zaradi neznane starosti A dve možnosti:

a) $A = 35, C = 36$

b) $A = 42, C = 43$

Poglejmo, da nas obe peljeta v protislovje.

- a) $A = 35, C = 36$. Druga izjava B-ja ($C > A$) je tako resnična, prva pa ne, gre torej za srednjega po starosti, kar pa nam preprečuje premajhen razmik med starostima A in C. Protislovje.

- b) $A = 42, C = 43$. Poti v protislovje sta kar dve: ali zgornji premislek ali pa dejstvo, da sta v tem primeru kar obe B-jevi izjavi resnični.

Torej C ni najstarejši. Najstarejši je B in obakrat govori resnico; A je 36 ali 42. Vidimo, da A ni 42, saj bi potem dobili iz $C > A$ le še $C = 43$, B kot najstarejši pa pade izven predpisanih omejitev za starost.

A je torej 36: C je od njega starejši ($C > A$) in torej srednji po starosti: enkrat laže in enkrat govori resnico. Ker A ni večkratnik številke 7, je torej pravilna C-jeva prva trditev: $C = A + 1 = 37$, C je 37. In kaj lahko rečemo za B? Iz dejstva, da A kot najmlajši obakrat laže, izvemo samo še $B < > A + 3 = 39$, torej je B-jeva starost lahko 38, 40, 41, 42 ali 43 let, kaj več pa ne moremo reči.

Alfred je najmlajši in ima 36 let, Ciril je s 37 leti srednji po starosti, za Bogdana pa vemo le to, da je najstarejši in da je njegova starost 38, 40, 41, 42 ali pa 43 let.

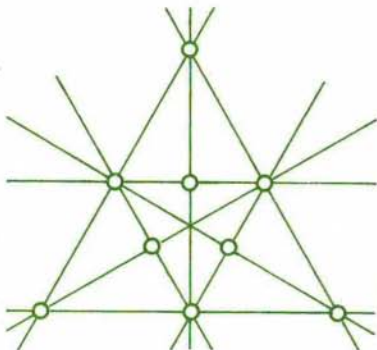
prev. in pripr. *Marta Zabret*

NEWTONOVA NALOGA

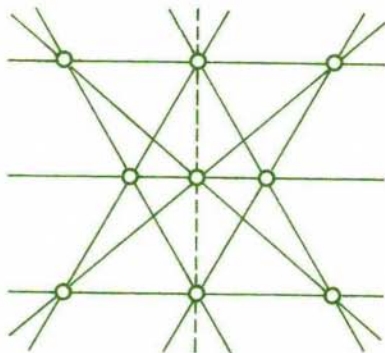
V letošnji 2. številki Preseka osnovnošolka Tina v pisnih bralcev opozarja na napako v rezultatu 356. naloge matematičnega učbenika za šesti razred. Na vprašanje: kako naj zasadimo devet dreves vzdolž *devetih* premic tako, da bodo na vsaki premici natanko tri drevesa, ponuja knjiga rešitev z *desetimi* premicami.

V knjigi torej napaka res je, toda ne v rezultatu, ampak v vprašanju. Isaac Newton je namreč zastavil takole nalogo: *Kako naj zasadimo 9 dreves vzdolž desetih premic tako, da bodo na vsaki premici natanko tri drevesa.* Torej je bil na delu tiskarski škrat, ki je črko *s* spremenil v *v*. A kaj, ko se škratje odraslim (to pot avtorjem) tako radi skrijejo.

Ko se je že ponudila prilika, si obe nalogi malo pozorneje oglejmo. Lažja je tista z devetimi drevesi vzdolž devetih premic. Rešimo jo lahko na veliko zelo raznolikih načinov. Ena od rešitev je npr. Tinina (slika 1), drugo dobimo, če v rešitvi iz učbenika opustimo edino navpično premico (na sliki 2 je lega opuščene premice črtkana).



Slika 1

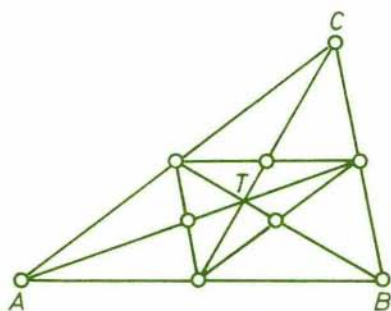


Slika 2

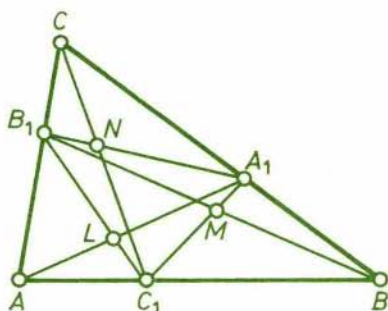
Rešitvi sta tipično različni. Na sliki 1 je poseben primer rešitve s slike 3, kjer je ABC poljuben trikotnik in T njegovo težišče. Zaradi preglednosti so namesto premic narisane le potrebne daljice. Pri tem ne spreglejmo, da težišče T ni "drevo" in da ni prav nič pomembno, da je tam ravno težišče. Enako dobro bi rešili nalogo, če bi imeli namesto težiščnic na primer višine in namesto težišča višinsko točko. Poleg tega pa sploh ni potrebno, da se premice, ki potekajo skozi oglišča in točke na nasprotnih straneh, sekajo v isti točki. Očitno to za rešitev naloge ni potreben pogoj.

ln že je tu splošna ideja: vzamemo poljuben trikotnik ABC , na vsaki od

njegovih stranic izberemo poljubno točko, različno od oglišč, recimo A_1 , B_1 , C_1 , ter narišemo figuro, kot na sliki 4. Kar malo preveč preprosto, kajne?



Slika 3

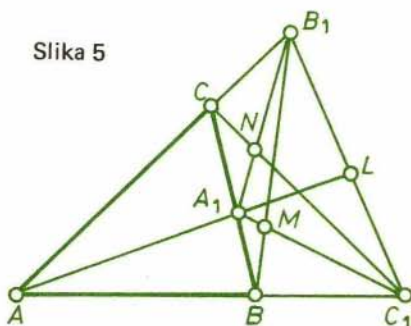


Slika 4

Točke A_1 , B_1 , C_1 si lahko izberemo tudi na podaljških trikotniških stranic, da le leže na njihovih nosilkah (slika 5).

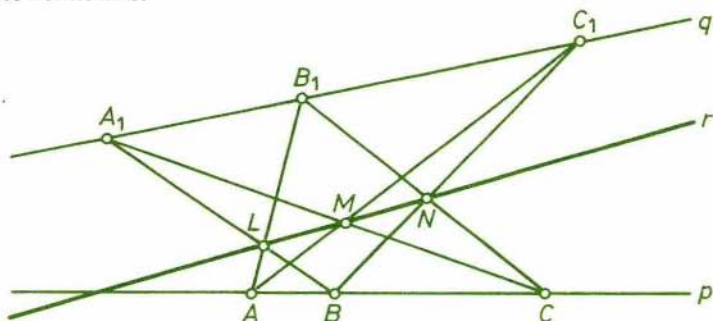
Poglejmo sedaj rešitev na sliki 2. Njeno posplošitev daje izrek, ki mu pravimo *Pappus – Pascalov izrek* in se glasi:

Slika 5



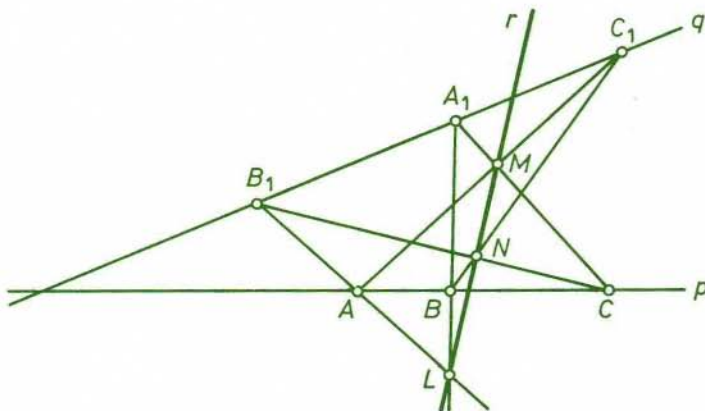
Naj bosta p in q poljubni različni premici v ravnini. Nadalje naj bodo A , B , C tri različne točke premice p in A_1 , B_1 , C_1 tri različne točke premice q (slika 6). Če je L presečišče premic $p(A, B_1)$ in $p(A_1, B)$, M presečišče premic $p(A, C_1)$ in $p(A_1, C)$ ter N presečišče premic $p(B, C_1)$ in $p(B_1, C)$, potem so točke L , M , N kolinearne.

Slika 6



Na sliki 6 smo njihovo nosilko označili z r . S slike je tudi razvidno, da smo dobili precej splošno rešitev naše naloge. Na sliki 2 je le njen poseben primer.

Pappus — Pascalov izrek velja tudi v primeru, če sta vrstna reda točk A, B, C na premici p in A_1, B_1, C_1 na premici q drugačna kot na sliki 6. Prav nič ni namreč pomembno, katera od danih treh točk na posamezni premici leži med drugima dvema. Tak drugačen primer je narisana na sliki 7.



Slika 7

Izreka ne bomo dokazovali. Lahko pa si za ilustracijo izreka in v njegovo potrditev sami narišete še nekaj primerov.

Poglejmo sedaj pravo *Newtonovo nalogo*: *razporediti devet točk na deset premic, natanko po tri na vsako*. Ena od rešitev je narisana v učbeniku za 6. razred na strani 190 (ali na naši sliki 2, če dodamo tudi navpično črtkano premico).

Naloga je težja od prejšnje in so jo najbrž avtorji učbenika zastavili bolj za razvedrilo, za "kviz", ker se pač da rešitev s strani 190 zaradi njene simetrije z malo sreče uganiti.

Poglejmo, kako lahko nalogo rešimo z uporabo Pappus — Pascalovega izreka. Izrek nam devet točk lepo razporeja na devet premic, po tri na vsako. Newtonova naloga bo rešena, če bodo tri od teh devetih točk ležale vse še na neki dodatni premici. Poglejmo sliko 6! Točka L že ima skupne premice z vsemi točkami, razen z C in C_1 , M z vsemi, razen z B in B_1 , ter N z vsemi, z izjemo A in A_1 . Če na enak način premislimo še za ostale točke, vidimo, da bo naloga rešena, če bo izpolnjen eden od naslednjih pogojev:

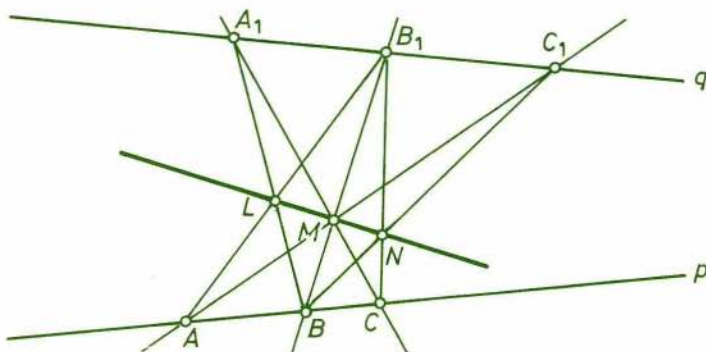
ali $L \in p(C, C_1)$

ali $M \in p(B, B_1)$

ali $N \in p(A, A_1)$

Tak pogoj pa še zlahka ustvarimo. Kako, pogledjmo kar ob konstrukciji rešitve!

V ravnini izberimo poljubni različni premici p in q in poljubno točko M , ki ne leži na nobeni od izbranih premic. Skozi M narišimo tri različne premice, od katerih naj vsaka seka tako p kot q . Označimo presečišča kot na sliki 8.



Slika 8

Nato za kolinearni trojici točk A, B, C in A_1, B_1, C_1 uporabimo Pappus – Pascalov izrek. Po konstrukciji je ena od presečnih točk, ki so po trditvi tega izreka kolínearne, kar naša na začetku izbrana točka M . Ostali dve označimo z L in N . Tako je Newtonova naloga rešena. Imamo deset premic, na katerih leži devet točk $A, B, C, A_1, B_1, C_1, L, M, N$, natanko po tri na vsaki premici.

Seveda bi namesto s točko M lahko konstrukcijo začeli tudi s točko L ali z N .

Marija Vencelj

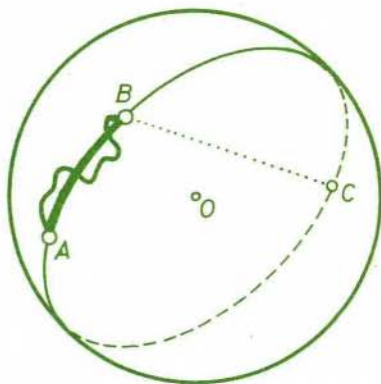
TEŽKA LAHKA NALOGA – Rešitev s str. 299

Mati bo stara dvakrat toliko kot hči takrat, ko bo hči toliko stara, kot je bila mati ob hčerinem rojstvu.

Ciril Velkovrh

BLIŽE K RAZDALJI

Ko govorimo o razdalji med dvema krajema na Zemlji, navadno mislimo s tem dolžino najkrajše prometne poti, ki ju povezuje (kraja pri tem nadomestimo z določenima točkama). A ne vedno. Dobro vemo, da obstajajo bližnjice, pri iskanju teoretično najkrajše poti pa se za hip pomudimo ob pojmu zračna razdalja. Zaradi enostavnosti privzemimo, da ima Zemlja obliko krogle. Potem je *zračna razdalja* med dvema točkama (krajema) na njej dolžina najkrajše poti, ki ju veže in leži na površju krogle. Torej je to dolžina krajšega od obeh lokov, na katera razdelita točki glavni krogelni krog $\star$, ki poteka skozi njiju. Zračna razdalja je seveda največkrat krajša od "prometne", ni pa najkrajša mogoča razdalja. Če sta kraja daleč narazen, brž opazimo, da bi raven predor skozi Zemljo meril dosti manj kot zračna razdalja med njima. V slednjem primeru smo za razdaljo med točkama vzeli dolžino daljice, ki ju veže. S tem smo že na tretji način opredelili razdaljo. Vsakič smo (nasploh) namerili različno dolžino, čeprav smo v vseh treh primerih iskali najkrajšo pot. Različnost je posledica različnih prostorov, po katerih smo smeli potovati. V prvem primeru smo se gibal le po prometnih poteh, v drugem po vsem površju krogle, v tretjem pa povsod.



Zaznamujmo z $\mathcal{M}$ množico točk v prostoru in povzemimo povedano v bolj splošno opredelitev.

Razdalja v $\mathcal{M}$ (ali *notranja razdalja*) med točkama A in B množice $\mathcal{M}$ je dolžina najkrajše poti od A do B , ki v celoti poteka po množici $\mathcal{M}$. Označimo jo z $d_{\mathcal{M}}(A, B)$. Če je $\mathcal{M}$ ves prostor, znak poenostavimo in pišemo le $d(A, B)$.

Pot v $\mathcal{M}$ lahko ponazorimo s sledjo točke, ki se giblje po množici $\mathcal{M}$, ali z nepretrgano vrstico, položeno v $\mathcal{M}$ — dolžina poti je tedaj dolžina napete ne-

$\star$ Glavni krogelni krog je presek površja krogle z ravnino, ki gre skozi središče krogle.

raztegljive vrvice.

Za množico $\mathcal{M}$ je seveda smiselno zahtevati, da je iz enega kosa, še bolje pa, da sta poljubni dve točki iz $\mathcal{M}$ povezani s potjo, ki ima končno dolžino in poteka po $\mathcal{M}$.

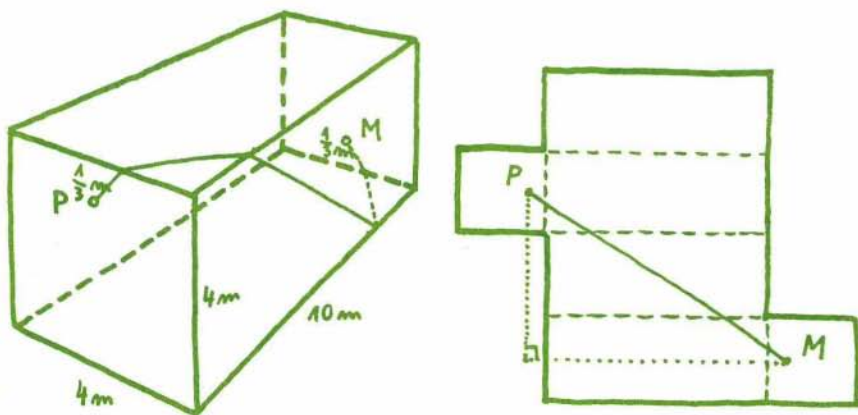
Za poljubni točki $A, B \in \mathcal{M}$ očitno velja neenakost $d(A, B) \leq d_{\mathcal{M}}(A, B)$, če pa je množica $\mathcal{M}$ konveksna, so najkrajše poti po $\mathcal{M}$ daljice, torej razdalji d in $d_{\mathcal{M}}$ sovpadata.

Kadar je $\mathcal{M}$ ploskev, najkrajše povezave med njenimi točkami imenujemo *geodetične krivulje* (v geodeziji — vedi o obliki in razsežnostih Zemlje — igrajo najkrajše poti pomembno vlogo). Na krogli so geodetične krivulje ('geodetke') loki glavnih krogelnih krogov. Tudi na plašču valja se je preprosto znati: če ga odvijemo na ravnino, geodetke postanejo daljice. Najkrajše poti na plašču so torej deli vijačnic. Na manj preprostih ploskvah geodetične krivulje precej težje določimo. Že na površju kvadra pogosto najkrajše poti ne vidimo na prvi pogled, čeprav vemo, da je na posamezni stranski ploskvi le-ta daljica.

Za ilustracijo si oglejmo znano Dudeneyevo uganko o muhi in pajku, objavljeno leta 1903.

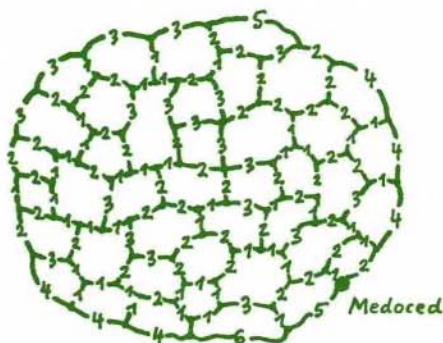
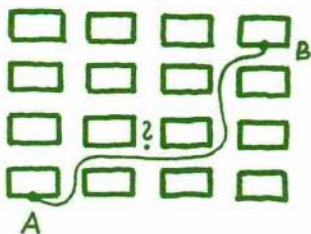
Prednja in zadnja stena kvadraste 10 m dolge sobe sta kvadrata s 4 m dolgo stranico. Na prednji steni je $1/3$ m od stropa in po 2 m od obeh stranskih sten oddaljen pajek, ki je opazil muho, ujeta na zadnji steni sobe $\frac{1}{3}$ metra od tal in po 2 m oddaljeno od stranskih sten. Kako naj pajek pride do muhe po najkrajši poti?

Površje kvadra (sobe) razgrnimo na ravnino. Če to storimo na pravi način, se najkrajša pot pokaže kot daljica od pajka do muhe. Med maloštevilnimi mrežami kvadra (ki jih dobimo, ko razgrnemo njegovo površje) ni težko najti



ustrezne. Narisana je na sliki, ki nam pomaga določiti tudi iskano razdaljo, ta meri $13\frac{1}{3}$ m. Pajek se sprehodi kar po petih mejnih ploskovah sobe.

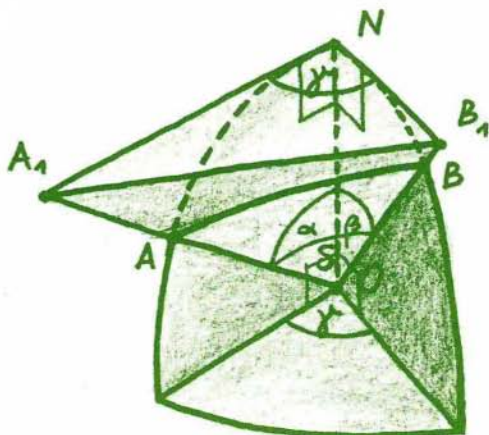
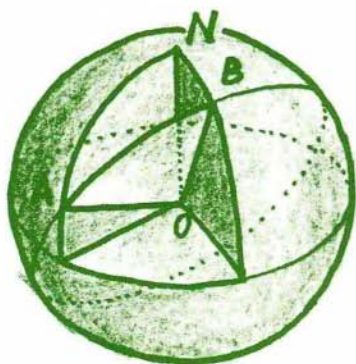
Tudi pri ravninskih množicah včasih ni preprosto določiti najkrajše razdalje med dvema točkama. Naj bosta za zgled naslednji vprašanji ob slikah. Na levi sliki je načrtan tloris pretirano urejenega dela velemesta, na desni pa z danimi razdaljami mreža poti med vasmí v Koromandiji.



Kje vodi najkrajša pot med točkama A in B ?

Katera vas leži najdlje od
Medoceda?

Vrnimo se spet na Zemljo, poenostavljeno v kroglo. Najkrajše poti po njej že poznamo. Kako bi določili razdaljo med dvema krajema, če poznamo njuna zemljepisna položaja — torej njuni geografski dolžini in širini? Za izračun bomo potrebovali nekaj znanja o osnovnih lastnostih kotnih funkcij. Za



bralca, ki mu je ta snov domača, bosta zadostovali sliki in kratek komentar k njima.

$$\overline{OA_1} = \frac{R}{\cos \alpha}, \quad \overline{OB_1} = \frac{R}{\cos \beta} \quad (1)$$

$$\overline{NA_1} = R \operatorname{tg} \alpha, \quad \overline{NB_1} = R \operatorname{tg} \beta \quad (2)$$

Tu je R polmer Zemlje, α zemljepisna širina točke A , β zemljepisna širina točke B , γ pa označimo razliko zemljepisnih dolžin točk A in B .

Kosinusni izrek za trikotnik NA_1B_1 in OA_1B_1 nam da enakosti

$$\overline{A_1B_1}^2 = \overline{NA_1}^2 + \overline{NB_1}^2 - 2 \overline{NA_1} \cdot \overline{NB_1} \cos \gamma$$

$$\overline{A_1B_1}^2 = \overline{OA_1}^2 + \overline{OB_1}^2 - 2 \overline{OA_1} \cdot \overline{OB_1} \cos \delta$$

Če vstavimo vanju zvezi (1) in (2), po kratkem računu dobimo

$$\cos \delta = \cos \alpha \cos \beta + \sin \alpha \sin \beta \cos \gamma$$

odkoder lahko izračunamo kot δ in dolžino loka AB , ki meri $R \delta$ (δ v radianih).

Na krogli ima vsaka točka svojo najbolj oddaljeno družico – imenujemo jo antipodna točka. Razdalja med njima je poleg tega tudi največja mogoča oddaljenost med dvema točkama na krogli.

Kako je s podobnimi lastnostmi pri splošni prostorski množici $\mathcal{M}$?

Če obstaja tako število $p \geq 0$, da razdalja d (oziroma $d_{\mathcal{M}}$) med poljubnima točkama iz $\mathcal{M}$ ne presega p , rečemo, da je $\mathcal{M}$ omejena za razdaljo d (oziroma $d_{\mathcal{M}}$). Sfera je omejena za obe razdalji. Če je r polmer sfere $\mathcal{S}$, lahko vzamemo $p = 2r$ pri razdalji d in $p = \pi r$ pri razdalji $d_{\mathcal{S}}$. Pri tem smo za p izbrali najmanjše število, ki še zadošča zahtevi za omejenost množice. Številu p z navedeno lastnostjo rečemo *premer* $\star$ (ali *diameter*) množice in ga označimo z $d(\mathcal{M})$, če merimo z razdaljo d ; če pa imamo v mislih razdaljo $d_{\mathcal{M}}$, p imenujemo *notranji premer* in ga zaznamujemo z $d_n(\mathcal{M})$. Torej za sfero $\mathcal{S}$ s polmerom r velja $d(\mathcal{S}) = 2r$ in $d_n(\mathcal{S}) = \pi r$.

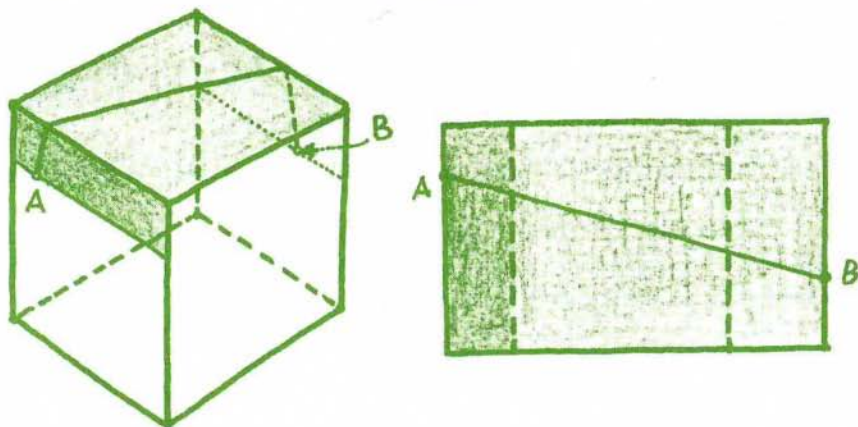
Za zgled izračunajmo premera dveh preprostih ploskev. Najprej se lotimo površja $\mathcal{P}$ kocke z robom dolžine a .

S premerom $d(\mathcal{P})$ ni težav. Na kocki sta prostorsko najbolj vsaksebi krajšiči glavne diagonale, torej velja $d(\mathcal{P}) = a\sqrt{3}$.

* Premer $d(\mathcal{K})$ kroga $\mathcal{K}$ s polmerom r meri $2r$.

Nekoliko več dela je z določanjem notranjega premera $d_n(\mathcal{P})$. Vsaka točka na kocki je dostopna z vsakega njenega oglišča preko dveh sosednjih stranskih ploskev, zato je oddaljena od oglišča največ $a\sqrt{5}$. Dokažimo, da velja $d_n(\mathcal{P}) = a\sqrt{5}$.

Dovolj je ugotoviti, da sta poljubni točki A in B , ki ležita na nasprotnih stranskih ploskvah kocke, oddaljeni med seboj največ $a\sqrt{5}$. Od provrša kocke odstranimo dve nasproti ležeči stanski ploskvi (brez roba), ki ne vsebujeta točk A in B . Dobljeni plašč nato prerežemo kot kaže slika, razgrnemo v dva pravokotnika in na manjšem z daljico povežemo točki A in B . Ena od stranic tega pravokotnika je dolga a , druga pa ne presega $2a$, zato dolžina poti med A in B ni večja od $a\sqrt{5}$. Kratek premislek pove tudi to, da le razdalja med nasprotnima ogliščema kocke meri $a\sqrt{5}$, vse druge pa so krajše.



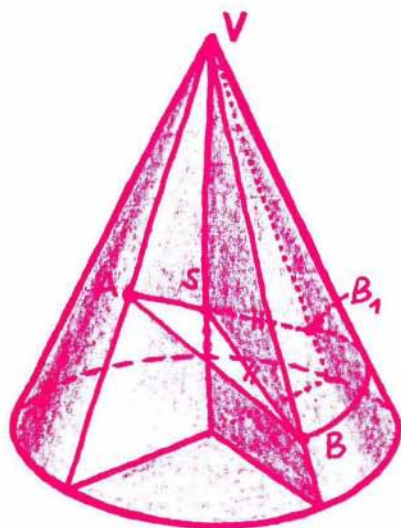
Določimo zdaj še oba premera plašča stožca $\mathcal{S}$ s stranico s in s polmerom r osnovne ploskve.

Vzemimo poljubni točki $A, B \in \mathcal{S}$ in zavrtimo B okrog osi stožca, tako da preide v točko B_1 , ki leži na nasprotni ležeči stranici stožca kot A (glej sliko na naslednji strani). Potem velja

$$d(A, B_1) = d(A, S) + d(S, B_1) = d(A, S) + d(S, B) \geq d(A, B)$$

Odtod vidimo, da je največja mogoča razdalja $d(A, B)$ med točkama dosežena za točki A, B na osnem preseku stožca, torej na enakokrakem trikotniku z osnovnico $2r$ in krakom dolžine s . Tako velja

$$d(\mathcal{S}) = \begin{cases} s, & \text{če je } s \geq 2r \\ 2r, & \text{če je } s < 2r \end{cases}$$



Ob skici z leve ponudimo bralcu še naslednje vprašanje.

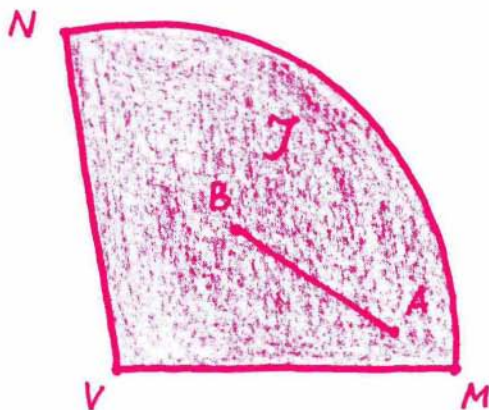
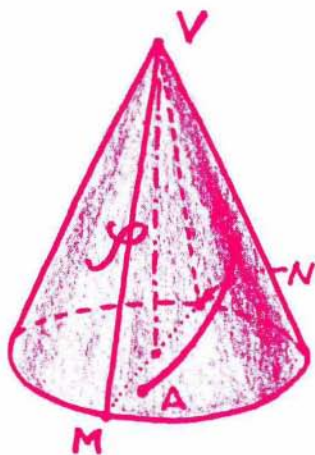
Koliko meri razdalja $d(A, B)$, če velja

$$d(A, V) = a$$

$$d(B, V) = b$$

ravnini VAS in VBS pa oklepata med seboj kot γ ?

Izračunajmo še premer $d_n(\mathcal{J})$. V ta namen prerežemo plašč vzdolž osi stožca na dva enaka dela in enega odvijemo na ravnino v krožni izsek $\mathcal{J}$ (glej sliko). Naj bo t razdalja med M in N v $\mathcal{J}$.

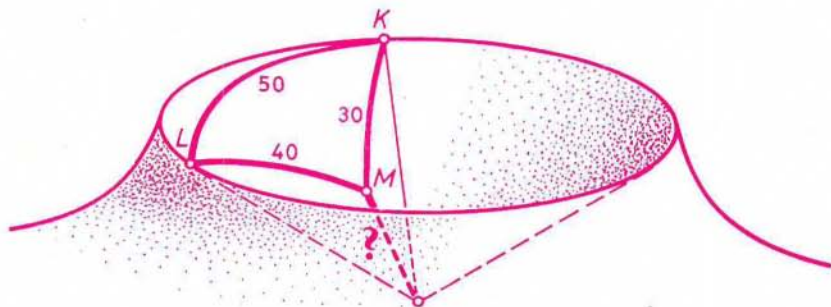


Bralec se bo brez težav prepričal, da velja enakost $d_n(\mathcal{J}) = d(\mathcal{J})$, in ugotovil, da iskani premer pri $s \geq t$ (ali ekvivalentno: pri $s \geq 3r$) meri $d_n(\mathcal{J}) = s$, pri $s < t$ (ali ekvivalentno $s < 3r$) pa je $d_n(\mathcal{J}) = t = 2s \sin \frac{\pi r}{2s}$. Torej imamo

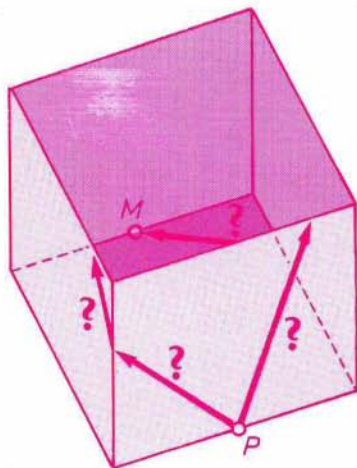
$$d_n(\mathcal{J}) = \begin{cases} s, & \text{če je } s \geq 3r \\ t, & \text{če je } s < 3r \end{cases}$$

Sklenimo prispevek z nalogami.

1. Klemen in Lojze stojita na robu stožčastega kraterja. Med seboj sta oddaljena (po kraterju) 50 m, prav toliko pa tudi od dna, kamor se namerava spustiti Miha. Ta je že v kraterju in ima do Klemna 30 m, do Lojzeta pa 40 m dolgo pot. Kako dolg spust do dna ga čaka?



2. V prostoru je dana premica p in dve točki A, B , ki ne ležita na njej. Za katero točko T na premici p je vsota razdalj $\overline{AT}$ in $\overline{BT}$ najmanjša?
3. Označimo s $\mathcal{T}$ plašč valja z višino v in s polmerom r osnovne ploskve. Koliko merita premera $d(\mathcal{T})$ in $d_n(\mathcal{T})$?
4. Izračunaj zračno razdaljo med Leningradom (30° vzhodne geografske dolžine, 60° severne geografske širine) in New Orleansom (90° zahodne geografske dolžine, 30° severne geografske širine).
5. Na sredini enega od robov na dnu v kockasti škatli brez pokrova je ujeta muha, na sredini nasproti ležečega roba dna na zunanji strani škatle pa preži pajek. Pomagaj mu najti najkrajšo pot do žrtve.



Boris Lavrič