

PRESEK 3

DRUŠTVO MATEMATIKOV, FIZIKOV IN ASTRONOMOV SRS LETNIK 16, 1988-89

KRATKOČASNE VŽIGALICE

67. Sestavi tri kvadrate iz 10 vžigalic, nato še iz 11, 12, 13, ... Vsakokrat moraš, kot smo domenjeni, porabiti vse vžigalice, kvadrati pa so lahko različno veliki!

68. Položi na mizo v ravni vrsti osem vžigalic:



Prestavljaj po eno vžigalico na levo ali na desno, in sicer vedno čez dve vžigalici na tretjo, tako da dobiš 4 pare prekržanih vžigalic.



Par prekržanih vžigalic šteje seveda dve vžigalici. Dokaži, da je 8 najmanjše število vžigalic, za katero je igra sploh mogoča! Kako najlažje ugotoviš, kako moraš prestavljati vžigalice?

69. Položi na mizo v ravni vrsti 12 vžigalic! Prenašaj po eno vžigalico čez tri vžigalice na četrto, da dobiš 4 trojice prekržanih vžigalic:

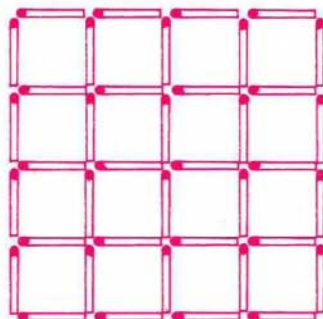


Dokaži, da je 12 najmanjše število vžigalic, za katero je igra sploh mogoča!



70. Poskusimo nalogi 68 in 69 posplošiti! Najmanj koliko vžigalic moraš imeti, da jih lahko preurediš v nekaj skupin po n vžigalic, tako da prenašaš po eno vžigalico čez n vžigalic na naslednjo, na levo ali desno stran?

71. Sestavi vzorec, v katerem bo 30 kvadratov! Kolikšno je najmanjše število vžigalic, ki jih moraš vzeti iz vzorca, da v njem ne bo več nobenega kvadrata?



72. (Besedilo glej na str. 191)

V tretji številki devetega letnika smo začeli po delih objavljati to zbirko nalog, ki jo je za Presek napisal Roman Rojko. Naloge bomo objavljali tudi v prihodnjih številkah Preseka.

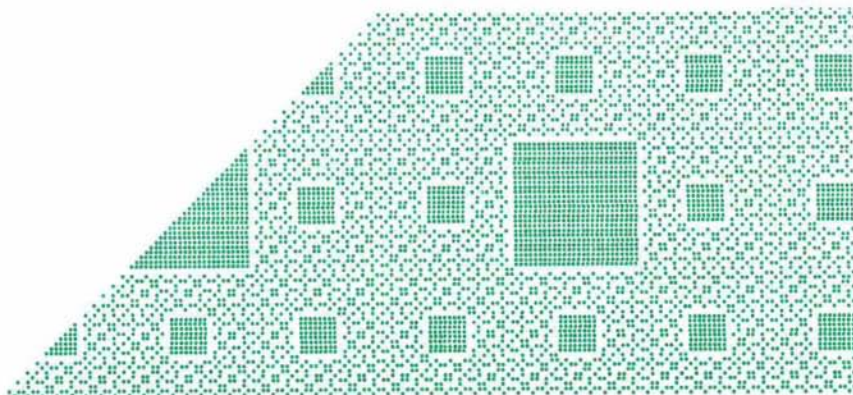
VSEBINA

MATEMATIKA	Šahovski kralj izbira vzorec (Marko Razpet)	I, 130
FIZIKA	Jojo (Janez Strnad)	132
ASTRONOMIJA	Opazuj šestzvezdje (Marijan Prosén)	138
NOVICE	Turingova nagrada (Sandi Klavžar)	140
	Srečanje mladih raziskovalcev (Pavla Ranzinger, Marija Vencelj, Anton Moljk)	141
	Profesor Ivan Vidav — častni član slovenskega društva matematikov, fizikov in astronomov (Peter Legiša)	146
NOVE KNJIGE	Gardner M., Ahal Pa te imam (Zvonimir Bohte)	149
	Strnad J., Iz take so snovi kot sanje (Norma Mankoč — Borštnik)	150
	Naše nebo in Zemlja 1989	163
RAČUNALNIŠTVO	Šahovski kralj izbira vzorec na zaslonu (Marko Razpet)	152
	Želva gre na sprehod (Matija Lokar)	154
	O igri petnajst in permutacijah (Sandi Klavžar)	159
TEKMOVANJA	32. republiško tekmovanje srednješolcev iz matematike (Angelca Jaklič)	164
	19. zvezno tekmovanje osnovnošolcev iz matematike * — (Aleksandar Jurišič) —	
	Rešitve str. 184 (Aleksander Potočnik)	168
	26. republiško tekmovanje srednješolcev iz fizike (Iztok Kukman)	170
	3. republiško tekmovanje iz računalništva za osnovnošolce (Ivan Gerlič)	176
NALOGE	Naloge bralcev — Rešitev str. 189 (Dragoljub M. Milošević, prev. Peter Petek)	137
	Matematični krožek — Rešitev str. 190 (Boris Lavrič)	152
REŠITVE NALOG	4. šolsko tekmovanje iz matematike za srednješolce — Rešitve iz P-1, str. 48 (Darjo Felda)	186
	Odgovor na nagradno vprašanje iz P-IV/5, str. 265 (Boris Lavrič)	188
	Slikovna križanka Področja Preseka — rešitev iz P-2 (Bruno Gričar)	189
RAZVEDRILO	Brez besed — Rešitev str. 152 (Boris Lavrič)	148
	ANEKDOTA — Einstein (Iz Biltene rep. tekm. iz fizike)	158
	KRIŽANKA — Častni član društva (Marko Bokalič)	183
	Kratkočasne vžigalice — Rešitev str. 191 (Roman Rojko)	II
NA OVITKU	Šahovski kralj je izbral naslovnico — glej članek na str. 130	I
	Ponatisi knjig iz Knjižnice Sigma	IV
	(Foto Marjan Smerke)	

$q(x, y)$, ki so deljiva s kakšnim številom p , $p \geq 3$. Najzanimivejši so primeri, ko je p praštevilo.

Pretežko bi bilo odgovoriti na vprašanje, ali je na primer število $q(3535, 2525)$ deljivo s številom $p = 17$. Pač pa lahko sestavimo tabelo ostankov pri deljenju števil $q(x, y)$ s številom p . Tako kot smo sestavili prejšnjo tabelo, naredimo novo po formuli (1), čim pa vsota preseže p , odštejemo od nje tolikokrat p , da dobimo rezultat med 0 in $p - 1$. Za $p = 3$ pa dobimo sliko 2. Če je na mestu (x, y) število 0, potem je število $q(x, y)$ deljivo s p .

Na prvi pogled to ni nič posebnega, to pa zato, ker je številski trikotnik na sliki 2 premajhen. Toda z računalnikom si lahko privoščimo precej večji trikotnik. Napisati je treba program, ki nariše točko (x, y) , če je število $q(x, y)$ deljivo s p , sicer pa naj ne nariše ničesar. Na ta način dobimo zanimive vzorce. Za $p = 3$, $0 \leq x \leq 250$, $0 \leq y \leq x$ dobimo na primer (temnim področjem ustrezajo števila $q(x, y)$, ki so deljiva s 3):



Slika 3

Podobno lahko sestavimo sliko deljivosti števil $q(x, y)$ tudi za druga števila. Prav tako bi lahko raziskovali Pascalov in Stirlingov, pa morda še kakšen številski trikotnik. Prva dva sta obširno obdelana v članku Marte Sved: *Divisibility — With Visibility*. Objavljen je v reviji *The Mathematical Intelligencer*, letnik 10 (1988), številka 2.

Naš šahovski kralj je bil celo tako prijazen, da je sodeloval pri izbiri naslovne strani ovitka. Za $p = 7$ smo dobili spodnji, za $p = 5$ pa zgornji trikotnik. Pri tem je spodnji rob osnovnica spodnjega, zgornji rob pa osnovnica zgornjega trikotnika, tako da je najbolje, da pri gledanju zgornjega Presek obrnete.

Marko Razpet

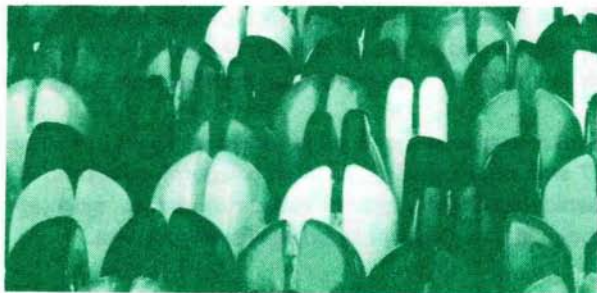
JOJO

Le kdo ne pozna igrače jojo (slika 1)? Vrvico navijemo na vreteno med kolesoma iz lesa ali iz kake druge snovi. Nato krajšiče vrvice držimo v roki in jojo spustimo z vretenom v vodoravni legi. Jojo se spusti in zopet dvigne skoraj do enake višine. Igra se ponavlja, dokler jojo ne obmiruje. Po tem spominja jojo na žogo, ki odskakuje od tal do vse manjše višine. Ne samo, da je jojo počasnejši kot žoga; kar smo rekli, velja le, če roka, s katero držimo vrvico, miruje. Z gibanjem roke lahko dosežemo, da se jojo giblje zelo zapleteno.

Jojo ni edina igrača, katere delovanje lahko pojasnimo s fiziko. V času, v katerem očitajo fiziki, da se vse bolj oddaljuje od vsakdanjega življenja, utegne biti razpravljanje o jojoju prav osvežilno. Toda v fiziki vsakdanjega življenja in v fiziki igrač postanejo pojavi hitro preveč zapleteni.

Preden se lotimo gibanja jojoja, povejmo nekaj iz njegove zgodovine. Z njim so se igrali vsaj že v stari Grčiji pred okoli dva tisoč leti (slika 2). Poznali pa so ga tudi na Kitajskem. Od tam so ga v 18. stoletju zanesli najprej v Anglijo, nato v Francijo in Nemčijo. Tedanji jojoji iz stekla ali slonovine so bili precej dragoceni.

Ime jojo je skoval v prijavi patentnemu uradu ameriški poslovnež šele leta 1930. V sodelovanju z lastnikom časopisov je tedaj povzročil največjo jojojevsko mrzlico vseh časov. Časopisi so vsiljivo vabili na tekmovanja z jojojem; na tekmovanje pa se je lahko prijavil samo tisti, ki je pridobil tri nove časopisne naročnike. Poročajo, da so leta 1931 v tridesetih dneh v Philadelphii prodali kar tri milijone jojojev. Dandanes je mogoče kupiti jojo kot dokaj ceneno otroško igračo, nekatera podjetja pa jojoje z znamenji svojih izdelkov delijo v reklamne namene. Današnji jojoji so navadno iz lesa ali iz plastične snovi.

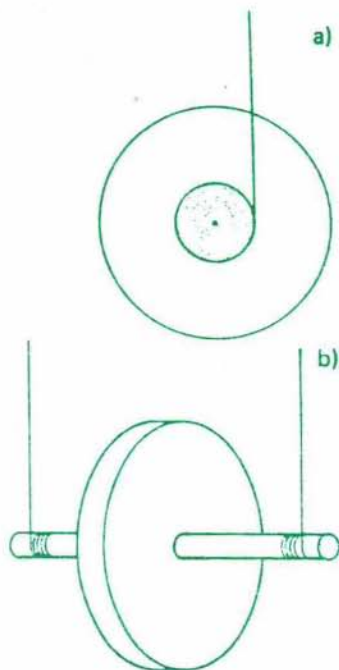


Slika 1. Jojoji iz zbirke profesorja W. Bürgerja. Iz njegovih člankov *Das Jojo – ein physikalisches Spielzeug*, *Physikalische Blätter* **39** (1983) 401 in *The Yo-yo: A toy flywheel*, *American Scientist* **72** (1984) 137 so prevzete slike tega prispevka.



Slika 2. Jojo na antični grški posodi (okoli leta 450 pred našim štetjem).

Slika 3. Jojo s tanko vrvico (a). Maxwelllovo kolo lahko obravnavamo kot jojo s tanko vrvico (b).

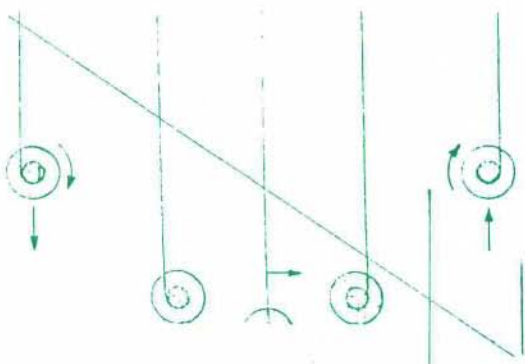


Najlažje je obravnavati jojo, če ima tako tanko vrvico, da lahko zanemarimo njeno debelino (slika 3). Tedaj lahko privzamemo, da se vrvica ves čas navija na vreteno z enako debelino, na katero je pritjena, ali se z njega odvija.

Najglobljo točko doseže jojo, ko se odvije vsa vrvica. V bližini najnižje točke preide vrvica z ene strani vretena na drugo, ko se jojo preneha spuščati in se začne dvigati (slika 4). To se zgodi tako hitro – v nekaj stotinkah sekunde – da lahko obravnavamo pojav kot trk, podobno kot odboj žoge od tal.

Nekoliko bolj zapleteno je obvladati jojo z debelo vrvico. Upoštevati moramo, da se vrvica pri dvigovanju jojoja navija na vreteno, na katerem je je navite čedalje več (slika 5). Tako z dvigovanjem narašča navidezna debelina vretena. Tudi v tem primeru je hitrost v najvišji točki enaka nič in v najnižji največja, in to enaka kot pri enakem jojoju z enako dolgo tanko vrvico. V vmesnih točkah pa je hitrost jojoja z debelo vrvico večja, zato pride ta hitreje iz najvišje točke v najnižjo in spet nazaj v najvišjo.

Novejši jojoji nimajo vrvice pritrjene na vreteno, ampak imajo okoli vretena navito zanko (slika 6). Zaradi tega se jojo v najnižji točki vrti, ne da bi se

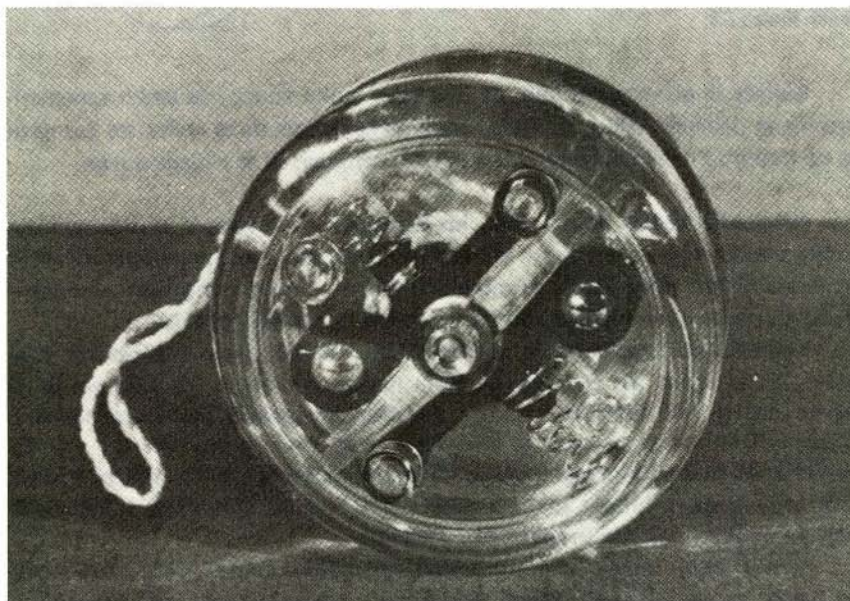
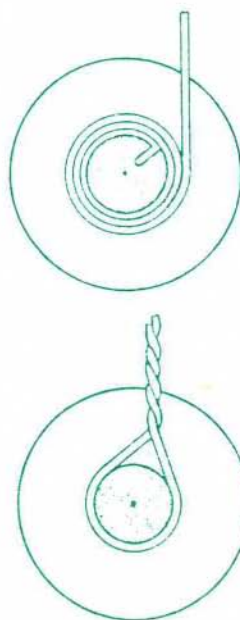


Slika 4. Gibanje jojoja v bližini najnižje točke lahko obravnavamo kot trk. (zgoraj)

Slika 5. Jojo z debelo vrvico. (desno zgoraj)

Slika 6. Novejši jojo z zanko. (desno)

Slika 7. "Jomega, jojo z možgani." (spodaj)



spuščal ali dvigal. V tej točki jojo "spi" — je "len". "Zbudimo" ga tako, da se udarimo po roki ali hitro sunemo z roko navzgor, in s tem povečamo trenje med vrstico in vretenom. Zanka tedaj neha drseti po vretenu, se navije nanj in jojo se začne dvigati enako kot navadni jojo. Tako ima izkušen igralec več možnosti pri izbiri gibanja jojoja. Ker ni lahko z nenadnim gibom roke "zbuditi" jojo, so si zamislili leni jojo s centrifugalno sklopko. Pod imenom jomega ga prodajajo v ZDA za okoli 10 dolarjev (slika 7). Vrvica je pritrjena na zunanji del ležaja, v katerem se vrti vreteno v najnižji točki. Dokler se jojo hitro vrti, je torej sklopka odprta. Ko postane vrtenje dovolj počasno, se sklopka zapre, prepreči vrtenje vretena v ležaju in jojo se začne dvigati.

To še ni vse. Patentni uradi dobivajo nove prijave. Poleg jojoja s trakom namesto vrvice so začeli izdelovati še druge, bolj zapletene vrste. Razmišljanje o jojoju ni samo igračkanje, saj so jojoju podobno napravo uporabili pri evropskih umetnih satelitih ESRO I in ESRO II. Raketa, ki je dvignila satelit, se je zavrtela stokrat v minuti. To je bilo za satelit sam preveč, ta naj bi se zavrtel samo dvajsetkrat v minuti. Po ločitvi od rakete so zadnjo stopnjo zavrtli z napravo podobno jojoju. Okoli nje sta bili naviti vrvici s telesoma na krajiščih. Satelit se je začel vrteti počasneje, ko sta se vrvici odvila in telesi odleteli v vesolje.

Izkušeni igralci z jojojem se ravnaajo po občutku. Glavni podatek zanje je napetost vrvice. Jojoju dovajajo energijo tako, da roko pospešeno premikajo navzgor, ko se jojo spušča, in navzdol, ko se jojo dviga. Pri tem zmorejo vragolije, ki jim celo z zapletenimi računi ni lahko slediti (slika 8).



Pospremimo prejšnje razmišljanje z nekaj enačbami. Izhajamo od izreka o kinetični in potencialni energiji. Če zanemarimo trenje in upor, ne opravlja dela nobena zunanja sila razen teže. Zato je vsota kinetične in potencialne energije konstantna. Če spustimo jojo, ko miruje, vzamemo, da je vsota kinetične in potencialne energije enaka nič:

$$\frac{1}{2}mv^2 + \frac{1}{2}J\omega^2 - mgz = 0$$

Pri tem v potencialni energiji — mgz merimo globino $z > 0$ navpično navzdol. $\frac{1}{2}mv^2$ je translacijska kinetična energija, v kateri je m masa jojoja in v hitrost njegovega težišča. $\frac{1}{2}J\omega^2$ je vrtilna kinetična energija, v kateri je J vztrajnostni moment jojoja okoli osi vretena in ω kotna hitrost okoli te osi.

Najprej obdelajmo jojo s tanko vrstico z vretenom s konstantnim radijem r_0 . Hitrost težišča določa enačba $v = \omega r_0$. Dobimo jo, ko upoštevamo, da se

vrvica odvijae za obseg vretena, ko se vreteno enkrat zavrti: $v = 2\pi r_0/t_0$. Pri tem je t_0 čas enega vrtljaja in $\omega = 2\pi/t_0$ kotna hitrost.

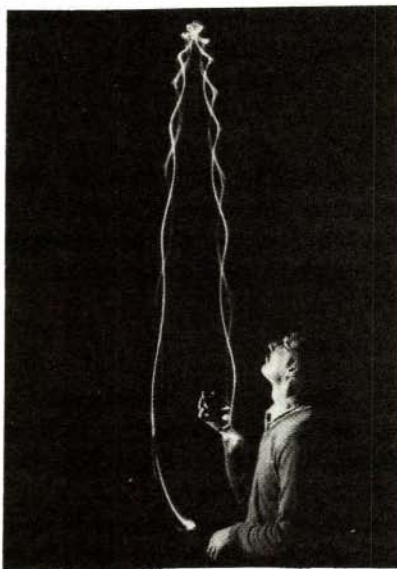
Iz zapisanih enačb sledi preprosta zveza med hitrostjo težišča in globino

$$v^2 = 2gz/(1 + J/mr_0^2)$$

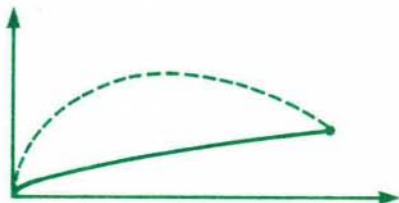
Enačba se le po dodatku v imenovalcu loči od zveze med hitrostjo in globino pri prostem padanju. Težišče jojoja se spušča ali dviga s pospeškom $g/(1 + J/mr_0^2)$, ki je manjši od pospeška prostega padanja g .

Najglobljo točko doseže jojo, ko se odvijae vsavrvica z dolžino l in je $z = l$. V tej točki se gibanje težišča sunkovito obrne. Pri tem debelina vrvice ni pomembna.

Pač pa je treba pri jojoju z debelo vrvico upoštevati debelino vrvice pri dvigovanju iz najnižje lege. Razmik med kolesoma je navadno precej večji od širine vrvice, zato moramo vpeljati efektivno debelino vrvice d . Dobimo jo tako, da ploščino efektivnega osnega preseka vrvice ld izenačimo s ploščino kolo-barja med vretenom z radijem r_0 in največjim krogom, ki ga pokrije vrvica, z radijem r_1 . Velja torej $ld = \pi r_1^2 - \pi r_0^2$. S tem postane efektivna debelina vretena r odvisna od globine. V najnižji točki velja enačba $\pi r^2 = \pi r_0^2$ in je $r = r_0$, v najvišji točki enačba $\pi r^2 = \pi r_0^2 + ld$ in je $r = r_1$, vmes, v globini z , pa enačba $\pi r^2 = \pi r_0^2 + d(l - z)$ in je $r = \sqrt{r_1^2 - zd/\pi}$ (slika 10).



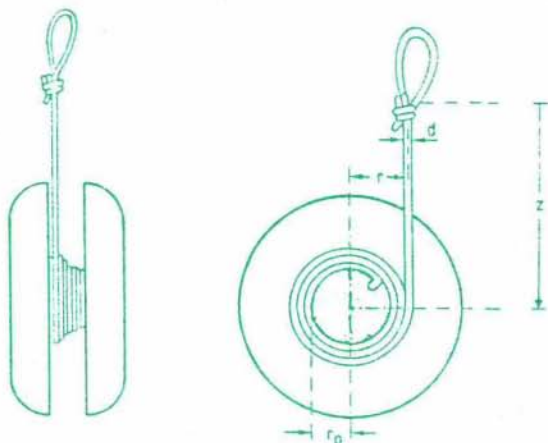
Slika 8. Figura z jojojem, znana kot "nebeška raketa".



Slika 10. Efektivni radij vretena r in efektivna debelina vrvice d .

Za jojo z debelo vrvico velja tedaj enačba

$$v^2 = 2gz / (1 + J/mr^2)$$



Slika 9. Odvisnost hitrosti od globine za jojo s tanko vrvico (sklenjeno) in za jojo z debelo vrvico (črtkana). Sklenjena krivulja je parabola
 $v = \sqrt{2gz / (1 + J/mr_0^2)}$,
 črtkana krivulja je precej bolj zapletena.

Upoštevati je potrebno spremenljivi radij vretena r . V zapleteno računanje se ne moremo spuščati, zato raje premislimo. Hitrost težišča je v najvišji točki enaka nič, ker je globina enaka nič. To velja za jojo s tanko vrvico in za jojo z debelo vrvico. Hitrost težišča je enaka za obe vrsti jojoja tudi v najnižji točki, saj je tedaj $r = r_0$. V vmesnih točkah pa je hitrost jojoja z debelo vrvico večja od hitrosti jojoja s tanko vrvico. Jojo z debelo vrvico torej v krajšem času pride iz najvišje točke v najnižjo kot jojo s tanko vrvico, če ima sicer enake lastnosti (slika 9). Pospešek pri jojoju z debelo vrvico najprej močno naraste, pade na nič in je naposled celo negativen, ne ostane pa konstanten kot pri jojoju s tanko vrvico.

Janez Strnad

NALOGE BRALCEV

1. Kako bomo z dvema loncema, šestlitrskim in osemilitrskim, zajeli iz reke 1 liter vode?
2. Kako je sestavljena tabela števil? Katero število še manjka?

7	7	1
6		2
5	125	3
4	256	4

Dragoljub M. Milošević
 Prev. Peter Petek

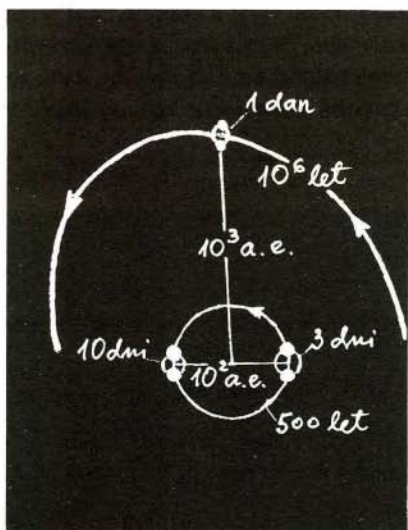
ASTRONOMIJA

OPAZUJ ŠESTZVEZDJE

V jasnih zimskih večerih in nočeh lahko občuduješ lepoto zvezdnega neba. Če te lepote še nisi opazoval, to stori čim prej. Predno pa greš na sveži zrak, se toplo obleci, sicer te bo mraz kmalu prisilil, da boš z opazovanjem prenehal.

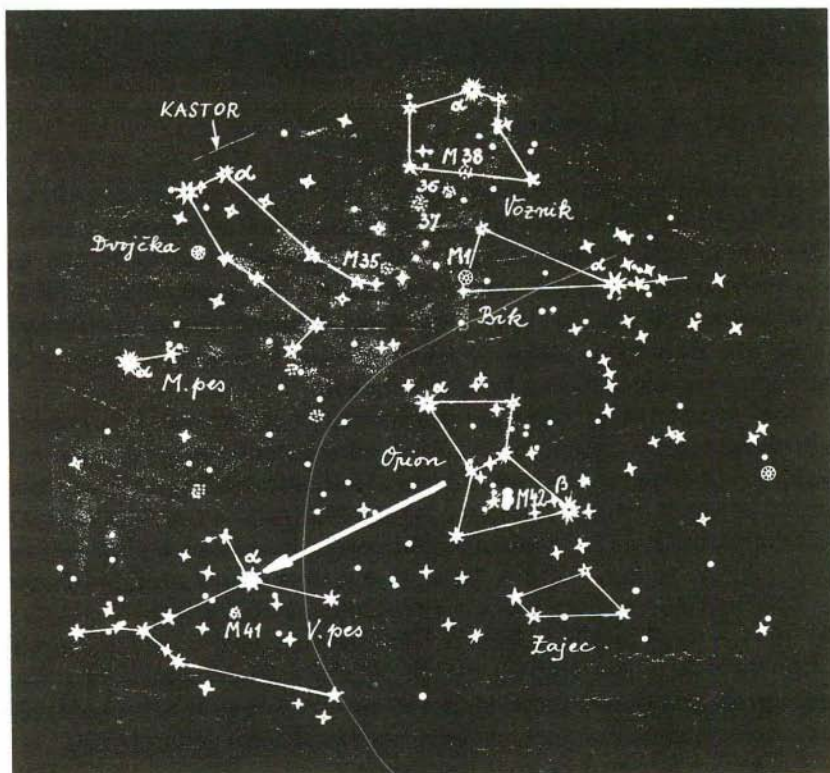
Poglejmo prvo sliko. Prikazuje značilna zimska ozvezdja, kot jih vidiš sredi decembra okoli polnoči, januarja in februarja pa v večernih urah. V sliko smo vrisali nekaj vesoljskih objektov, ki so zanimivi za opazovanje z daljnogledom. Od teh se nekoliko поблиže seznanimo z zvezdo *Kastor*, drugo najsvetlejšo zvezdo v ozvezdju Dvojčkov. Dobro si vtisni v spomin sliko zimskih ozvezdij, posebno pa ozvezdja Dvojčkov, da boš to zvezdo znal hitro in brez težav izslediti na nebu.

S prostim očesom vidiš zvezdo *Kastor* kot enojno. Če pa jo pogledaš z 10-centimetrskim daljnogledom, jo vidiš dvojno. *Dvojna zvezda* je tak sestav dveh zvezd, v katerem krožita zvezdi zaradi medsebojne privlačnosti druga okoli druge, kot na primer plesalec in plesalka. Takih zvezd je v vesolju mnogo. Skoraj vsaka druga ali tretja zvezda je dvojna. Zvezdi, ki sestavljata *Kastor*, se gibljeta druga okoli druge v razdalji okoli sto astronomskih enot, to



Slika 1. Značilna ozvezdja, ki jih opazuješ sredi zime v večernih urah. Z daljnogledom lahko opazuješ naslednje vesoljske objekte: M 35, M 36, M 37, M 38, M 41 – razsute ali odprte zvezdne kopice; M 42 – Orionova meglica, v odličnih opazovalnih razmerah vidna celo s prostim očesom; α Dvojčkov (*Kastor*) – trizvezdje (sicer šestzvezdje), kotni razmik med notranjima dvema spektralno dvojnima zvezdama $2''$, oddaljenost 45 svetlobnih let. Glej še knjižico *Preseкова zvezdna karta*, Presekova knjižnica 8, 1981. (desno)

Slika 2. Zgradba zvezde *Kastor* – shema. Sestavljajo jo tri spektralno dvojne zvezde. Notranja para zvezd opazujemo s prostimi očmi kot eno zvezdo, z 8 do 10-centimetrskim daljnogledom pa kot dvojno zvezdo; a.e. pomeni okrajšavo za astronomsko enoto, ki meri $150 \cdot 10^6$ km.



je sto razdalj med Zemljo in Soncem, druga drugo pa obkrožita približno v 500 letih. Natančne raziskave so pokazale, da je vsaka izmed teh zvezd spet dvojna; zvezdi v tem paru krožita druga okoli druge v razdalji komaj nekaj stotink astronomske enote in se obkrožita le v nekaj dneh. Gre torej za tesne dvojne zvezde, ki pa jih ti s svojim daljnogledom ne moreš odkriti. Da pa so take zvezde res v vesolju, astronomi odkrijejo s posebnimi daljnogledi. Z njimi fotografirajo spektre zvezd in jih natančno pregledajo. Dve zvezdi, ki sta zelo blizu skupaj, od Zemlje pa sta zelo oddaljeni, dajeta namreč dva spektra. Ta fotografirajo in tako odkrijejo sestave dveh zvezd, ki jih prav zato imenujemo *spektralno dvojne zvezde*.

Posebno zanimivo za zvezdo Kastor je še, da ni sestavljena samo iz dveh spektroskopskih zvezd, torej ni le štirizvezdje, pač pa kar šestzvezdje (slika 2). Vključuje namreč še tretjo spektralno dvojno zvezdo, ki kroži okrog težišča prvih dveh spektroskopskih zvezd v razdalji okoli tisoč astronomskih enot.

TURINGOVA NAGRADA

Vsi prav gotovo poznate *Nobelovo nagrado*. Od 1901 jo podeljujejo za fiziko, kemijo, medicino, literaturo in mir, od leta 1969 pa tudi za dosežke v ekonomiji. Ste se že vprašali, zakaj ne obstaja Nobelova nagrada za matematiko? Pravijo, da je razlog povsem preprost. Ustanovitelj nagrade, A. Nobel (1833 – 1896), naj bi namreč imel zasebne težave z nekim matematikom. Seveda pa matematiki zato niso brez nagrad. Največje priznanje zanje je *Fieldsova medalja* in ta matematiku pomeni toliko kot Nobelova nagrada.

Tudi za dosežke na področju računalništva ne obstaja Nobelova nagrada. To je seveda povsem razumljivo, saj za časa Alfreda Nobela ne moremo govoriti o kakšnem razcvetu računalniške znanosti. Zanje obstajajo druge nagrade, med katerimi je najbolj cenjena *Turingova*. Od leta 1966 dalje jo podeljuje organizacija ACM (Association for Computing Machinery), imenuje pa se po angleškem matematiku A. Turingu (1912 – 1954), ki se je ukvarjal tudi z računalništvom (pa naj še kdo reče, da matematika in računalništvo nista v sorodu). Turing je v letih 1936 – 1938 delal na Univerzi v Princetonu skupaj z znanim logikom A. Churchem in iz tega obdobja izvirajo njegova najpomembnejša dela. Med drugim je vpeljal koncept stroja, ki ga imenujemo *Turingov stroj* in predstavlja enega najpomembnejših konceptov sodobnega teoretičnega računalništva.

Poglejmo si seznam dosedanjih nagrajencev.

1966	A. Perlis	1977	J. W. Backus
1967	M. V. Wilkes	1978	R. W. Floyd
1968	R. M. Hamming	1979	K. E. Iverson
1969	M. Minsky	1980	C. A. R. Hoare
1970	J. H. Wilkinson	1981	E. F. Codd
1971	J. McCarthy	1982	S. A. Cook
1972	E. Dijkstra	1983	D. M. Ritchie in K. Thompson
1973	C. Bachman	1984	N. Wirth
1974	D. Knuth	1985	R. M. Karp
1975	A. Newell in H. Simon	1986	J. Hopcroft in R. Tarjan
1976	M. Rabin in D. Scott	1987	J. Cocke

Med nagrajenci so mnoga znana imena. Pri nas je verjetno še najbolj znan N. Wirth, saj sta v slovenščino prevedeni dve njegovi knjigi: "Računalniško pro-

gramiranje" in "Računalniško programiranje, 2. del", ki sta pri DMFA SRS izšli v zbirki Izbrana poglavja iz matematike. Če pazljivo berete Presek, ste spoznali tudi D. Knutha. M. Lokar je v 6. številki lanskega Preseka na kratko opisal enega najboljših urejevalnikov besedil T_EX, katerega avtor je sam Knuth. Za konec na kratko predstavimo še nagrajenca za leto 1987. J. Cocke je doktoriral iz matematike (kaj sem rekel!) leta 1956 in od tedaj dela v raziskovalnih laboratorijih IBM. Njegovi glavni področji raziskovanja sta teorija prevajalnikov in arhitektura zmogljivih računalnikov. Na obeh področjih je dosegel nekaj temeljnih rezultatov.

Sandi Klavžar

SREČANJE MLADIH RAZISKOVALCEV

3. junija 1988 je bilo v Ljubljani 22. srečanje mladih raziskovalcev in inovatorjev Slovenije, ki ga organizira Zveza organizacij za tehnično kulturo – gibanje Znanost mladini.

Iz astronomije so predstavili šest nalog. Najštevilnejša je bila udeležba iz Srednje šole tehniških usmeritev in družboslovja iz Kočevja, kjer je pet dijakov pod vodstvom profesorice Darje Žužek – Delač obdelovalo tri teme.

Emil Žagar je izdelal nalogo **Merjenje svetlobne hitrosti**. Meril je čase izstopov Jupitrovega satelita lo iz planetove sence. Hitrost svetlobe je določal iz razlik med merjenim časom med dvema izstopoma in dejanskim časom. Do razlik pride, ker se razdalja med Zemljo (opazovalcem) in Jupiterom stalno spreminja in ker je hitrost svetlobe sicer velika, pa vendarle končna. Tako je ponovil poskus danskega astronoma Olafa Römerja iz leta 1676, toda z natančnejšimi podatki, pri izračunu pa si je pomagal z računalnikom. Emilova naloga je bila ocenjena kot najboljša, zato smo mu predlagali, da se udeleži zveznega tekmovanja mladih raziskovalcev v Peči, kjer je dobil zlato medaljo.

Karmen Skender in Toni Kavčič sta se lotila **Izdelave vertikalne sončne ure**. Vodilo naloge je bila ideja, da bi na šoli naredili sončno uro. S pomočjo gnomona sta izmerila zemljepisno širino za šolo in azimut stene, kjer bo ura, ter za te vrednosti izračunala lege časovnih črt za številčnico. Naredila sta tudi pomožno piramido za postavitve kazalca. Dokončna izdelava ure je sedaj v rokah obrtnika.



Andreja Drobnič in **Saša Mlekuž** sta dali svojemu delu naslov **Opazovanje sončnih peg v obdobju pol leta**. Vsak dan, ko so vremenske prilike dopuščale, sta opazovali sliko Sonca na zaslonu šolskega daljnogleda. Risali sta lege peg, določali njihove heliografske koordinate in ugotavljali Wolfovo relativno število, ki je dokaj zanesljiva mera Sončeve dejavnosti.

Jure Dobnikar, **Marijan Adam** in **Denis Džongalič**, dijaki Srednje naravoslovne šole **Miloš Zidanšek** iz Maribora, so izdelali nalogo **Merjenje spektra sončne svetlobe po prehodu skozi atmosfero**. S počrtno termobaterijo in barvnimi filtri so merili gostoto svetlobnega toka v posameznih delih spektra sončne svetlobe v odvisnosti od višine Sonca tekom dneva. Dobljene rezultate so skušali razložiti z absorpcijo in sipanjem v Zemljinem ozračju.

Boštjan Košir, dijak Srednje naravoslovne šole iz Ljubljane, je pod vodstvom **Aleša Dolžana**, inženirja fizike, ugotavljal **Albedo Jupitrovih satelitov**. S fotoelektričnim fotometrom je izmeril navidezne sije štirih velikih Jupitrovih satelitov. Izmeril je tudi večino drugih podatkov, ki jih je potreboval pri izračunu albeda. Rezultati se ujemajo z vrednostmi iz literature v mejah natančnosti meritev.

Tonček Žižek, dijak Srednješolskega centra iz Murske Sobote, je v svoji

nalogi **Libracija** obravnaval libracijo Lune. To so navidezna in prava nihanja Lune, ki omogočajo, da vidimo z Zemlje $4/7$ Lunine površine, čeprav obrača Luna Zemlji le eno stran. Tonček je obravnaval navidezna nihanja, ki jih je prikazal z lastnima posnetkoma Lune. Njegov mentor je bil profesor Edo Dečko.

Z veseljem ugotavljamo, da se zanimanje za tovrstno dejavnost med dijaki povečuje. Če je tu še prizadeven mentor, uspeh ne more izostati.

Pavla Ranzinger

Prvič so v okviru te akcije raziskovali in se predstavili tudi mladi matematiki z desetimi raziskovalnimi nalogami. Večino nalog — kar devet — so prispevali učenci Srednje naravoslovne šole v Ljubljani, ena (z dvema avtorjema) pa je prišla s Srednje družboslovne, ekonomske in matematično naravoslovne šole "Jože Lacko" na Ptuju.

Ledino so orali: tretješolca s Ptuja Andreja Čič in Andrej Mršek z mentorjema prof. Vlasto Kokol — Voljčev in prof. Stanetom Šenvetrom ter Ljubljanci: tretješolec Jaka Cimprič in drugošolec Martin Raič pod vodstvom prof. Ivana Puclja; drugošolci Barbara Drinovec z mentorico prof. Olgo Arnušev, Anamarija Borštnik z mentorico prof. Mileno Strnadovo, Andrej Bauer, Primož Potočnik, Renata Novak, Boštjan Račič in Gregor Kamnikar pa pod vodstvom mag. Marije Vencelj.

Predstavimo na kratko njihove naloge:

Andreja Čič, Andrej Mršek: **Algebra matrik s programsko knjižnico.** Naloga obravnava algebro matrik višjih redov. Izdelani so tudi nekateri ustrezní programi v Turbo Pascalu 4.0.

Jaka Cimprič: **Apolonijeva naloga.** Prikazani so trije načini (algebraičen, z inverzijo in s ciklografsko projekcijo) reševanja Apolonijeve naloge — poiskati vse krožnice, ki se dotikajo treh danih krožnic.

Martin Raič: **Uporaba kompleksnih, dualnih in dvojnih števil v geometriji.** Naloga predstavi in geometrijsko ponazori kompleksna, dualna in dvojna števila. Izpeljani so pogoji za kolinearnost in koncikličnost točk v ravnini. Navaja nekaj splošnejših primerov uporabe.

Barbara Drinovec: **Logistična krivulja.** V nalogi je predstavljena logistična funkcija, ki verneje opisuje naravno rast kot eksponentna funkcija. Ilustrirana je s primerom širjenja novic v šoli.

Anamarija Borštnik: **Gibanja v ravnini.** Poleg gibanj v ravnini naloga obravnava in s primeri ilustrira tudi raztege. Uporabi jih pri geometrijski razlagi strukture Mandelbrotove množice z zaporednimi preslikavami osnovnega vzorca.

Gregor Kamnikar: Praktična pravila za računske operacije. Vsebina te naloge je poiskati in razložiti ozadje nekaterih računskih pravil, ki jih poznamo že iz osnovne šole (npr. deljivost števil), ter poiskati njihove posplošitve.

Renata Novak: Eulerjeva premica in znamenite točke trikotnika. Znano je, da so v poljubnem trikotniku središče očrtane krožnice, težišče in višinska točka kolinearne točke. Naloga se ukvarja s potrebnim in zadostnim pogojem za to, da bo tudi "četrta znamenita točka", to je središče vrčane krožnice, ležala na premici skozi prve tri točke.

Primož Potočnik: Posplošitve Pitagorovega in sorodnih izrekov v $\mathbb{R}_2$ in $\mathbb{R}_3$. Naloga pokaže, da je Pitagorov izrek le poseben primer splošnejšega izreka v ravnini. Nato išče in najde tudi njegovo posplošitev v 3—dimenzionalnem prostoru, kjer pravokotni trikotnik nadomesti pravokotni tetraeder. Posploši tudi Evklidov in višinski izrek.

Boštjan Račič: Težišče sistema točk. V nalogi je z več vidikov obravnavano težišče sistema točk. Poseben poudarek je na geometrijski določitvi težišča s pomočjo težiščnic poljubnega reda.

Andrej Bauer: Višinska točka, Eulerjeva krožnica in Eulerjeva premica v tetivnih večkotnikih. Naloga se najprej ukvarja z zanimivimi lastnostmi višinske točke, Eulerjeve premice in Eulerjeve krožnice v trikotniku. Nato išče in najde presenetljivo smiselno posplošitev teh pojmov za tetivne večkotnike.

Marija Vencelj

Prijetno je bilo gledati in poslušati dijake s sedmih srednjih šol, ki so z navdušenjem kazali fizikalne poskuse in meritve, in razlagali rezultate, ki so jih dosegli.

B. Peček je zgradil ultrazvočni detektor za snemanje zvočnih signalov nepotirjev in žuželk (SŠEN Ljubljana, mentor prof. dr. M. Gogala in D. Knific).

M. Hočevár, J. Prudič in D. Pavlin so pokazali superprevodnost keramične tablete, ki so jo sami pripravili. Tableta je lebdela nad magnetom v tekočem dušiku zaradi Meissnerjevega efekta. (SŠEN Ljubljana, mentorji ing. S. Bernik, dr. M. Hrovat, N. Kastelič in M. Kneževič).

J. Kraševac in B. Kirn sta študirala vpliv prevodnosti med elektrodama pri elektroerozijskem procesu obdelave površin in sta zgradila ustrezno vezje (SNS Ljubljana, mentorja ing. G. Lakovič in prof. C. Dominko).

D. Dolenc, Ž. Kušar in N. Schweiger sta določila spekter žarkov beta iz stroncija 90 z merjenjem sevanja Čerenkova v steklu pleksi (SNS Ljubljana, mentorja dr. D. Zavrtanik in M. Starič).

Pri naslednjih petih nalogah je bil mentor prof. V. Petruna (SŠTUDU Črno-

melj): F. Flek in M. Sajovic sta proučevala podhlajevanje fiksirja po posnetem računalniškem grafu časovnega poteka merjene temperature .

S. Samarin in L. Vraničar sta merili težnostni pospešek na sedem načinov in ocenili njihovo uporabnost za šolo.

S. Blažič, J. Fir, R. Jakša in M. Pavličič so posneli računalniške grafe uklonskih in interferenčnih pojavov z lasersko in belo svetlobo.

M. Skala in T. Trček sta napisala programe za risanje električnih silnic okrog točkastih nabojev in izdelala slike nekaterih polj.

M. Mesarič in I. Zrinski sta proučevala kotaljenje valja po klancu in vpliv trenja in lepenja ter določala čas gibanja valja s pomočjo fotodiode, ustreznega vezja in računalnika (SCTPU Murska Sobota, mentorja prof. E. Dečko in prof. A. Kuhar).

M. Kristan je izdelal računalniško simulacijo valovnih pojavov na vrvi (SŠPRNMU Kranj, mentor prof. D. Zupan).

B. Arbiter, D. Donlagič, B. Lorgar, B. Peršak in E. Poš so obravnavali in demonstrirali prenos informacij z laserskimi curki (SNŠ Miloš Zidanšek Maribor, mentor prof. I. Dregarič).

U. Stritih in R. Poljak sta izdelala merilnik človekovih skokov s tenziometrijsko ploščo in vezje za računalniški prikaz poteka značilnih količin. Predstavila sta analizo nekaterih skokov športnikov (SŠPRNMU Kranj, mentorja prof. S. Kocijančič in V. Strojnik).

Eksperimente in meritve so dijaki izvajali z novimi senzorji, ustrezno prirejenimi vezji in z računalnikom. Udeleženci srečanja so si pridobili nova znanja in spretnosti in so prepričljivo predstavili svoje naloge. Na postavljena vprašanja so v splošnem dobro odgovarjali. Dobra je tudi večina poročil pisanih na okrog 20 straneh tipkopisa v ustrezni strokovni obliki. Po mnenju komisije (A. Likar, M. Hribar, B. Golli, M. Javornik, A. Moljk) zaslužijo dijaki, profesorji in drugi mentorji pohvalo in priznanje.

Če bi imeli mentorji čas za ponovne popravke in izboljšave rokopisov in za utrjevanje razumevanja fizikalnih osnov, bi se dijaki še več naučili in poročila bi bila lahko širše koristna. Sploh je škoda, da predstavitev nalog ni bolj javna in bi ji prisostvovalo več dijakov. Opis eksperimentov bi lahko predstavili tudi v Preseku. Gotovo bi bilo spodbudno, da bi vsaj na svojih šolah dijaki predstavili v več razredih svoje raziskave.

Letos je 12 nalog predstavilo 29 dijakov. To je razveseljivo, glede na preko tri tisoč dijakov naravoslovne usmeritve pa je število skromno. Vsaj nekaj procentov naj bi jih bilo, da bi bil zagotovljen znanstveni podmladek za naš razvoj. Saj so dijaki, ki sodelujejo pri razpisanih raziskovanjih, verjetno bodoči inventivni fiziki.

Anton Moljk

PROFESOR IVAN VIDAV – ČASTNI ČLAN SLOVENSKEGA DRUŠTVA MATEMATIKOV, FIZIKOV IN ASTRONOMOV

Profesor Ivan Vidav je osrednja osebnost slovenske povojne matematike. Več desetletij je s poučevanjem, raziskovanjem, pisanjem knjig in vzgojo novih srednješolskih in univerzitetnih učiteljev utiral pot razvoju matematičnih znanosti pri nas. Vsem, ki so v tem času študirali na matematičnem oddelku (in nekaterih drugih tehničnih smereh), njegovih zaslug skoraj ni treba predstavljati – tako očitne so in splošno priznane.

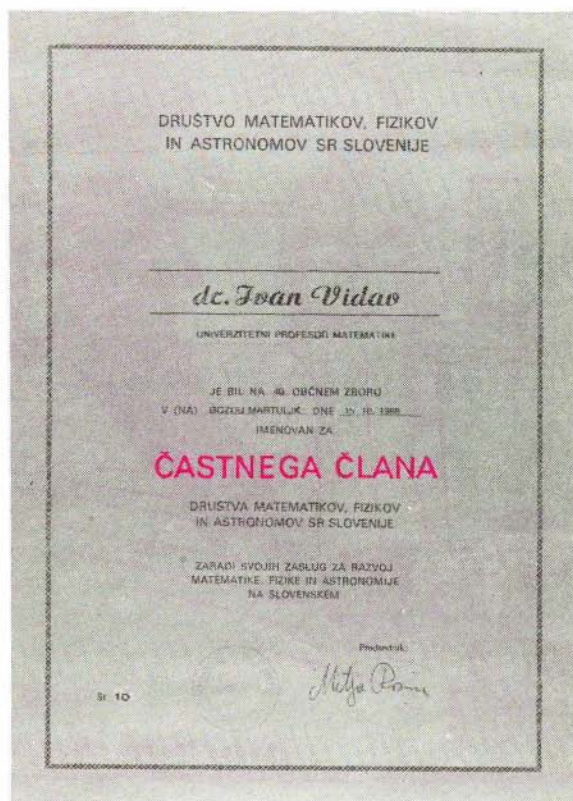
Širša javnost pa o vsem tem morda ni najbolje seznanjena. Glavni vzrok za to je že kar prislovična skromnost profesorja Vidava. Prav ta nam je preprečila, da bi letos skupaj praznovali njegovo sedemdesetletnico. Ivan Vidav se je namreč rodil leta 1918 na Opčinah nad Trstom. Klasično gimnazijo je končal v Mariboru (kamor so se v času fašizma zatele mnoge primorske družine). Leta 1941 je diplomiral na ljubljanski univerzi. Že mesec dni kasneje je obranil doktorsko disertacijo, pri kateri mu je bil mentor znani matematik Josip Plemelj. Leta 1946 je postal docent, leta 1953 pa redni profesor na oddelku za matematiko ljubljanske univerze. Dolga leta je bil predstojnik tega oddelka. Pred dvema letoma je odšel v pokoj, vendar kot zaslužni profesor še naprej predava našim študentom matematike na dodiplomskem in podiplomskem študiju.

Profesor Vidav je znanstveno deloval na več področjih, kar je danes že redkost. Njegova disertacija obravnava snov, s katero se je proslavil tudi Josip Plemelj. Pozneje se je Vidavovo zanimanje preusmerilo na nova področja matematične analize in algebre. Odkril je več izrekov; nekateri se zdaj po njem tudi imenujejo. Leta 1970 je profesor Vidav prejel Kidričevo nagrado za delo iz matematične fizike, povezano z nekaterimi problemi jedrske fizike.

Neizbrisen vpliv profesorja Vidava na slovensko matematiko kaže tudi podatek, da je bil mentor kar petnajstim doktorantom. Toliko in še več ljudi je vpeljal v znanstveno delo in jim v ta namen našel plodne teme na najrazličnejših matematičnih področjih.

Profesor Vidav je znan tudi kot odličen pisec knjig. Njegova Višja matematika I je doživela mnogo ponatisov. Zelo uporabljan univerzitetni učbenik je tudi njegova Algebra. Javnosti je predstavil življenje in delo svojega učitelja Josipa Plemelja. Največ Vidavovih knjig pa obravnava teme s podiplomskega študija. Mladim bralcem priporočam knjižici Števila in matematične teorije ter Rešeni in nerešeni problemi matematike (zbirka Sigma), ki ne zahtevata posebne matematične izobrazbe in sta prava mala bisera.

Kot predavatelj je profesor Vidav vzor. Zmerraj je odlično pripravljen, zapiskov skoraj nikoli ne uporablja. Dokaze podaja kolikor mogoče kratko in



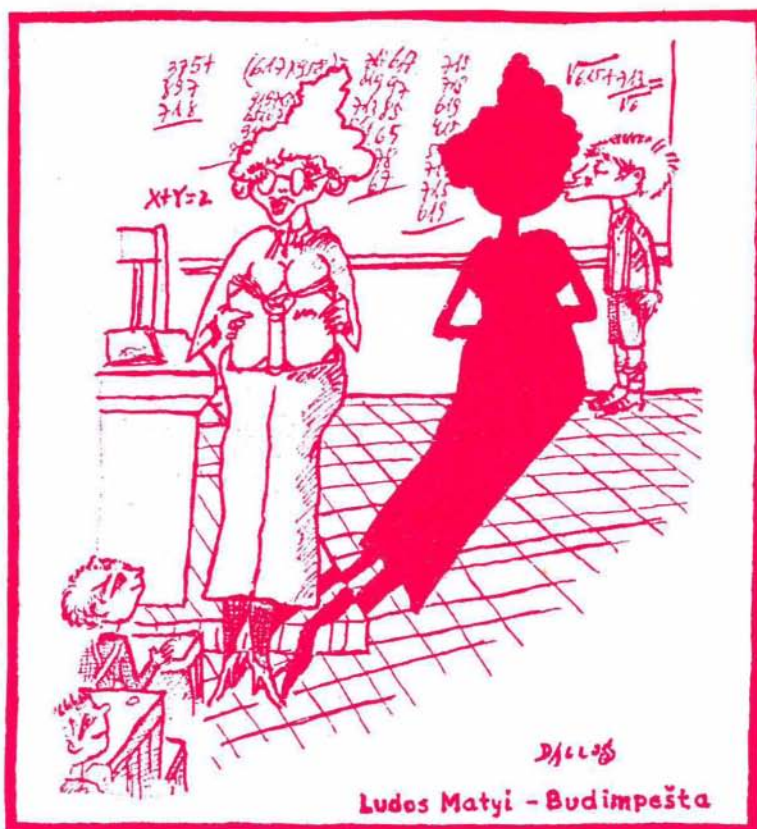
enostavno, pri odgovorih poslušalcem pa zmeraj pride do izraza jasnost in hitrost njegove misli.

Končno naj povem, da je profesor Vidav tudi prijeten sogovornik, ki zna s primerne oddaljenosti ocenjevati položaj okrog nas in tudi dlje od nas.

Profesor Vidav je največji del svojega življenja posvetil matematiki. Njegova delavnost in požrtvovalnost sta že obrodili lepe uspehe in tudi priznanja (Avnojska nagrada leta 1981, Žagarjeva nagrada leta 1988). Profesor Vidav je redni član Slovenske akademije znanosti in umetnosti.

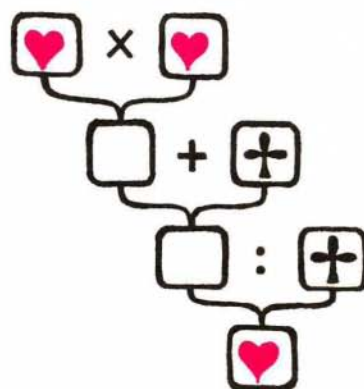
Z željo, da bi nam in matematični vedi še mnogo dal, se tudi ta zapis pridružuje čestitkam ob profesorjevem življenjskem jubileju in imenovanju za častnega člana slovenskega Društva matematikov, fizikov in astronomov.

Peter Legiša



Ludo Matyi - Budimpešta

**BREZ
BESED**



Boris Lavrič

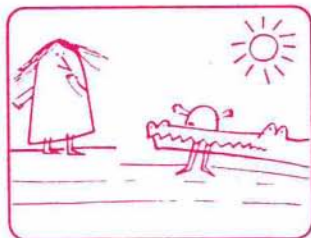
$\heartsuit \in \mathbb{N} \quad \oplus \in \mathbb{N}$

NOVE KNJIGE

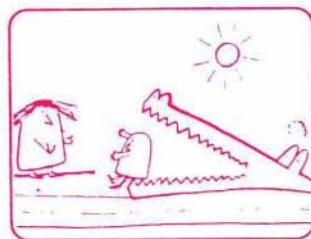
Gardner M., AHA! PA TE IMAM: Paradoksi za napenjanje možganov in razvedrilo, Državna založba Slovenije, Ljubljana 1988, 227 str. (Z logiko v leto 2000)

Pred kratkim je izšla pri Državni Založbi Slovenije v zbirki Z LOGIKO V LETO 2000 v prevodu Tamare Bohte zanimiva poljudna knjižica Martin Gardner: Aha! Gotcha — paradoxes to puzzle and delight. V tej knjigi priznanega avtorja del s področja rekreacijske matematike so zbrani mnogi bolj ali manj znani paradoksi z raznih področij matematike. Naslovi poglavij so : Logika, Število, Geometrija, Verjetnost, Statistika in Čas.

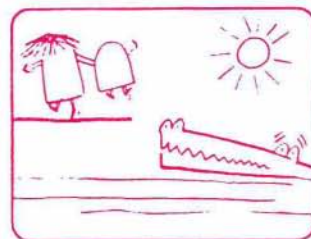
Krokodil in otrok



Grški filozofi so radi pripovedovali o krokodilu, ki je materi iztrgal otroka.
Krokodil: Ali bom pojedel tvojega otroka? Če boš odgovorila pravilno, ti bom otroka vrnil nepoškodovanega.
Mati: Ojoj! Mojega otroka boš pojedel.



Krokodil: Hm. Kaj naj storim? Če ti otroka vrnem, pomeni, da nisi povedala pravilno. Moral bi ga bil pojesti... Dobro, torej ti ga ne bom vrnil.
Mati: Pa ga moraš. Če boš mojega otroka pojedel, sem povedala pravilno, torej mi ga moraš vrniti.



Ubogi krokodil je bil tako osupel, da je otroka izpustil. Mati ga je zgrabila in stekla proč.
Krokodil: Presneto! Ko bi bila rekla, da bom otroka vrnil, bi bil imel slasten obed.

O tem, kaj so paradoksi in kakšen pomen so imeli za razvoj matematike, najlepše govori avtor sam v predgovoru, ki ga navajamo v celoti (str. 151).

Knjiga je primerno čtivo za vsakega bralca, ki ima osnovno izobrazbo iz elementarne matematike. Napisana je na nešolski in nesuhoparen način. Paradoksi so vpeljeni v obliki vprašanj, preprostih trditev in vsi so ilustrirani kot nekakšen strip (glej primer na prejšnji strani). Temu vedno sledi jasna razlaga.

Zvonimir Bohte

Strnad J., IZ TAKE SO SNOVI KOT SANJE -- Od atomov do kvarkov. Mladinska knjiga, Ljubljana 1988, 153 str.

Knjiga s poetičnim naslovom *Iz take so snovi kot sanje* ima ilustrativni podnaslov *Od atoma do kvarkov*. Avtor jo je namenil tistemu radovednemu in zahtevnemu bralcu, ki bi rad razumel zgradbo narave od najmanjših gradnikov do nastanka in razvoja vesolja.

Poleg poljudnega teksta prinaša knjiga številne slike, diagrame in preglednice z opisi poskusov ter pojavov. Tekst je Strnad podkrepil s številnimi podatki ter dodal še zadnje novosti iz sveta fizike, tik preden je odnesel rokopis v uredništvo.

Knjiga popelje bralca skozi zgodovino fizike ter mu poskuša približati razburljivo življenje raziskovalcev, ki se jim z vsakim odgovorom porajajo nova, številnejša vprašanja. Nikoli doslej ni bila fizika tako ambiciozno neučakana v želji, da bi s poskusi in teorijami pogledala naravi kar najgloblje v nederje.

Posebna odlika knjige so skrbno zbrani in urejeni podatki ter bogate ilustracije. Prevedene pesmi pa vzbujajo prijetno misel, da je tudi znanost poezija, četudi posebne vrste.

Avtorjeva uvodna beseda, ki nosi datum februar 1986, trpko izzveni v tožbo, ker je knjiga čakala na izid poltretje leto. V svetu znanosti se v dveh in pol letih mnogo zgodi. V tem času sta teorija in eksperiment utirala pot ideji, da seže naš svet več kot samo v štiri dimenzije in da z razsežnimi kvantnimi delci mnogo lažje poenotimo zakone narave kot s točkastimi.

Doslej so take vrste knjige izhajale le v jezikih, ki dopuščajo velike naklade. Naše založbe so se odločale le za prevode in ponatise. Zato sprejemamo poljudno knjigo izpod peresa domačega znanstvenika še posebej navdušeno.

Norma Mankoč Borštnik

Če spremenimo opazko Desdemone v »To so stari in novi paradoksi, ki nas zabavajo med odmorom za kosilo«, potem to ni slab opis te knjige. Beseda *paradoks* ima mnogo pomenov, tu pa jo uporabljam v širšem smislu, tako da je paradoks vsak rezultat, ki je tako nasproten zdravi pameti in intuiciji, da sproži takojšnje presenečenje. Obstajajo štirje glavni tipi takih paradoksov:

1. Trditev, ki je videti napačna, a je dejansko resnična.
2. Trditev, ki je videti resnična, a je dejansko napačna.
3. Dokazovanje, ki se zdi brezhibno, ki pa vodi v logično protislovje. (Ta tip paradoksa običajno imenujemo *zmota*.)
4. Trditev, katere točnost ali napačnost je neodločljiva.

Paradoksi v matematiki, kakor tudi v znanosti, so lahko veliko več kot šale. Vodijo lahko do globokega razumevanja. Za prve grške mislece je bil nadležen paradoks, da niso mogli natančno izmeriti diagonale kvadrata s stranico 1, pa če so imeli še tako fino razdeljeno ravnilo. To vznemirjajoče dejstvo je odprlo velikansko področje teorije iracionalnih števil. Matematikom 19. stoletja se je zdelo izredno paradokсно, da se dajo vsi člani neskončne množice postaviti v enolično in povratno enolično korespondenco s člani ene od njenih pravih podmnožic in da lahko obstajata dve neskončni množici, katerih člani se ne dajo postaviti v enolično in povratno enolično korespondenco. Ti paradoksi so vodili do razvoja moderne teorije množic, ki pa je imela močan vpliv na filozofijo znanosti.

Od paradoksov se lahko veliko naučimo. Presenetljivi so kot dobri čarovniški triki, tako da hočemo takoj vedeti, kako so narejeni. Čarovniki nikoli ne izdajo, kako kaj naredijo, matematiki pa nimamo potrebe po tem, da bi imeli skrivnosti. Vseskozi sem se zelo trudil, da sem razlagal v netehničnem jeziku in čim krajše, zakaj je vsak paradoks paradoksen. Če vam to vzbudi željo po branju drugih knjig in člankov, iz katerih bi se še več naučili, ne boste osvojili samo veliko pomembne matematike, ampak se boste pri tem tudi zabavali. V Literaturi in priporočljivem branju na koncu knjige je z zvezdico označenih nekaj lahko razumljivih beril.

ŠAHOVSKI KRALJ IZBIRA VZOREC NA ZASLONU

Računalnik je idealno sredstvo, s katerim lahko pričaramo na prikazovalniku deljivost števil $q(x, y)$. Ta števila na dokaj naraven in enostaven način definira šahovski kralj, ki se lahko premika le v treh dovoljenih smereh. Tu je program, ki v črno-beli tehniki nariše prelepe vzorce. Če je število $q(x, y)$ deljivo z danim številom p , program nariše točko (x, y) , sicer pa jo pusti belo. Za primerjavo lahko občudujemo dva vzorca hkrati, za modula p_1 in p_2 . S preprosto spremembo lahko gledamo le en vzorec, ki ga lahko še primerno povečamo. Program je narejen za računalnik Spectrum 48K v Hisoftovem pascalu HP4T (ali druge izboljšane verzije). Kdor ima priložnost delati na kakem dobrem osebnem računalniku, opremljenim z barvnim ekranom, naj poskusi obarvati vsako točko drugače, odvisno od števila $q(x, y) \pmod{p}$. Dobil bo lepe reči. Zanimivo je morda to, da so slike najlepše, vsaj za avtorjev okus, ko je p praštevilo (glej naslovno stran, $p_1 = 5, p_2 = 7$). Sam program je morda zanimiv, ker skrbno varčuje s pomnilnikom, potrebuje samo dva celoštevilska vektorja. Program je na naslednji strani.

Marko Razpet

MATEMATIČNI KROŽEK

1. Množico P naj tvorijo vsi pravokotniki, pri katerih ena od stranic meri največ 10, druga najmanj 50, dolžini obeh pa sta naravni števili. Dokaži, da sta dva pravokotnika iz P skladna tedaj in le tedaj, kadar imata enako dolgo diagonalo.
2. Janez in Micka z brega okroglega jezera opazujeta kvadratast otok na sredi jezera. Micka stoji najbližje otoku, Janez pa najdlje od njega, a kljub temu ga oba vidita pod enakim kotom. Koliko meri otok, če je od Micke oddaljen 100 m?
3. V kakšnem zaporedju si sledijo cifre na mestu enic v desetiškem zapisu števil

$$a_n = \left. n^n \cdots^n \right\}^n \quad n = 1, 2, 3, \dots$$

Boris Lavrič

```

10 PROGRAM KINGPATH;
20 ( * program rise tocke * )
30 ( * deljivosti števil * )
40 ( * q(x, y) s številom P * )
50 CONST M = 127;
60 VAR J, P1, P2, P, X, Y: INTEGER;
70 C: CHAR;
80 A, B: ARRAY [ 0 .. M ] OF INTEGER;
90 ( * A — prvotno zaporedje * )
100 ( * B — novo zaporedje * )
110 PROCEDURE PLOT (U, V: INTEGER); ( * narise točko * )
120 BEGIN
130   INLINE (253, 33, 58, 92, 221, 70, 2, 221, 78, 4, 205, 229, 34);
140 END;
150 BEGIN
160   REPEAT
170     PAGE;
180     WRITELN ('Ko bo slika narisana, pritisni K');
190     WRITELN ('za konec in drugo tipko za nov primer!');
200     WRITELN ('Vnesi modul P1'); READ (P1);
210     WRITELN ('Vnesi modul P2'); READ (P2);
220     PAGE;
230     FOR J := 0 TO 1 DO
240       BEGIN
250         IF J = 0 THEN P := P1
260         ELSE P := P2;
270         ( * postavi prvo zaporedje na 1 * )
280         FOR X := 0 TO M DO A [ X ] := 1;
290         FOR Y := 0 TO M - 1 DO
300           BEGIN
310             B [ 0 ] := 1;
320             ( * odpiramo zanko, v kateri iz * )
330             ( * starega zaporedja dobimo novo * )
340             FOR X := Y + 1 TO M DO
350               BEGIN
360                 B [ X ] := (A [ X ] + A [ X - 1 ] + B [ X - 1 ]) MOD P;
370                 IF B [ X ] = 0 THEN
380                   CASE J OF
390                     0: PLOT (X, Y); ( * prvi modul * )
400                     1: PLOT (X + M + 1, Y) ( * drugi modul * )
410                   END
420                 END;
430               END;
440             ( * postavi novo prvo zaporedje * )
450             FOR X := Y TO M DO A [ X ] := B [ X ];
460           END;
470         END;
480       END;
490       ( * caka, da gledamo sliko * )
500       REPEAT C := INCH UNTIL C <> CHR(0);
510       UNTIL C = 'K';
520 END.

```


poglejmo" in na zaslonu je zagledala sliko 2.

"Očitno moram to ponoviti večkrat! **FD 10, RT 90, FD 20, RT 90, FD 30, RT 90, ...**"

In končno je bil pred želvo vzorec, kot ga je naredila na sprehodu.

Vzorec ji je bil tako všeč, da ga je risala vedno znova. A kmalu jo je motilo, da mora natipkati toliko ukazov, preden ga nariše. Razmišljala je in razmišljala in — končno!

"Osnovni vzorec moram vendar ponoviti štirikrat, da dobim celo sliko. Ponavljanje ukazov mi omogoča ukaz **REPEAT**. Ampak, kako ga že napišem prav? Aha! Tule v Preseku bo pisalo. Torej **REPEAT**, presledek, število ponovitev, zame 4, nato pa seznam ukazov, ki naj se ponove. Kje je že oglati predklepaj, da označim začetek seznama? Sedaj pa **FD 10, RT 90, FD 20, RT 90**. Dobro, da hodim na tečaj angleščine. Sicer si nikoli ne bi zapomnila, da je **RT** zasuk v desno. Tako se le spomnim na right. Kje sem že ostala? **FD 30, RT 90, ...** Še oglati zaklepaj za konec seznama ukazov in končano."

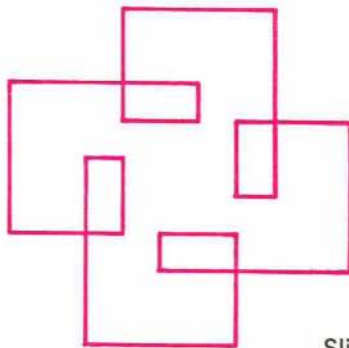
Na ekranu je bil naslednji program

```
REPEAT 4 [ FD 10 RT 90 FD 20 RT 90
           FD 30 RT 90 FD 40 RT 90 FD 50 RT 90 ]
```

Želvi pa žilica ni dala miru. Tipkanja ji je bilo že vedno preveč. Spomnila se je, da lahko več ukazov združi v enega in ga nato lahko uporablja kot vgrajene ukaze, npr. **FD, RT 90, REPEAT**. To v logu naredimo tako, da za ukazom **TO** navedemo ime novega ukaza in natipkamo ukaze, ki naj ta novi ukaz sestavljajo. Da smo z določitvijo novega ukaza končali, povemo tako, da uporabimo ukaz **END**. Ko je želva natipkala

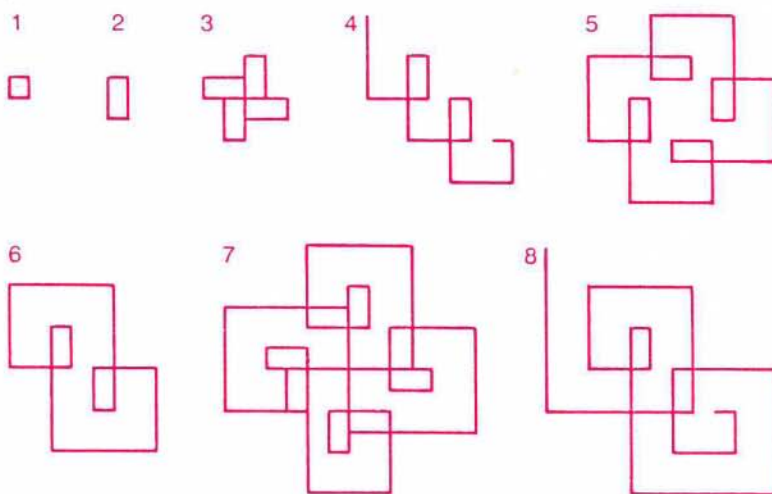
```
TO VZOREC
  REPEAT 4 [ FD 10 RT 90 FD 20 RT 90
            FD 30 RT 90 FD 40 RT 90 FD 50 RT 90 ]
END
```

je njen logo sedaj poznal poleg ostalih še ukaz **VZOREC**, ki je narisal sliko. Želva je morala sedaj natipkati le še **VZOREC** in slika se je prikazala na zaslonu.



Slika 3

Vzorec, ki ga je želva tako risala, je le eden iz skupine geometrijskih vzorcev, ki jih imenujemo *spirolaterali*, in sicer spirolateral petega reda. Vpeljal jih je angleški biokemik Frank Odds. Njihovo ime izvira iz dveh korenov: *lateral*, ki označuje ravno površino, in *spiro* za spirale, ki tvorijo osnovni vzorec. Spirolaterali so ravninski vzorci, ki jih dobimo s pomočjo enostavnih pravil. Najlažje jih opišemo s pomočjo želvine grafike. Želva se premakne za enoto naprej, se obrne za določeni kot, premakne za dve enoti, obrne, premakne za tri enote in tako naprej, dokler dolžina premika ne doseže določenega naravnega števila n , ko postopek ponovimo. Kot sukanja je vedno isti. Število n imenujemo red spirolaterala. Na sliki so spirolaterali reda 1 – 8.

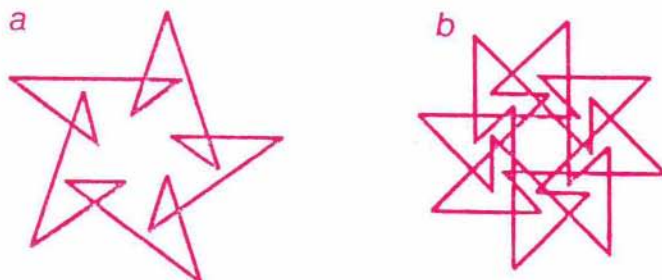


Slika 4

Kot vidimo, so nekateri spirolaterali zaključeni in drugi spet ne. Tako spirolateral reda 4 in 8 nista zaključena (se ne vrneta v izhodišče). Ni težko pokazati, da ne dobimo zaprtih likov za rede 4, 8, 12, 16, ..., torej za večkratnike 4. Da se vrnemo v izhodišče pri redih 2, 6, 10, 14, ..., potrebujemo dve ponovitvi osnovnega vzorca, pri lihih redih pa potrebujemo po štiri ponovitve.

Nobenega razloga ni, da se vedno obrnemo za 90° . Prav tako zanimive like dobimo, če vzamemo npr. kote 36° , 45° (glej sliko 5).

Da ločimo med posameznimi spirolaterali, moramo te ustrezno označiti. Med različnimi predlogi se je uveljavila oznaka R_K , kjer R označuje red spirolaterala in K kot obračanja. Tako npr. 7_{45} označuje spirolateral sedmega reda s



Slika 5

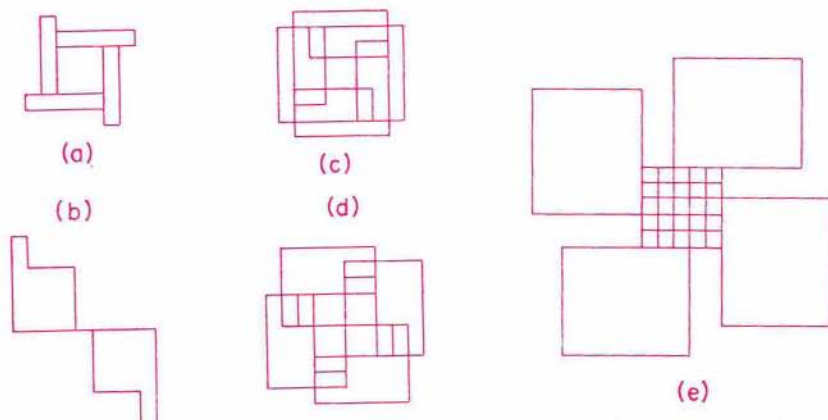
kotom obračanja 45 stopinj. Napišimo v LOGU program, ki bo narisal poljuben osnovni vzorec spirolateralala

```

TO SPIRO :RED :KOT :ENOTA
  MAKE "EN :ENOTA
  REPEAT :RED [ FD :EN
                 RD :KOT
                 MAKE "EN :EN + :ENOTA ]
END

```

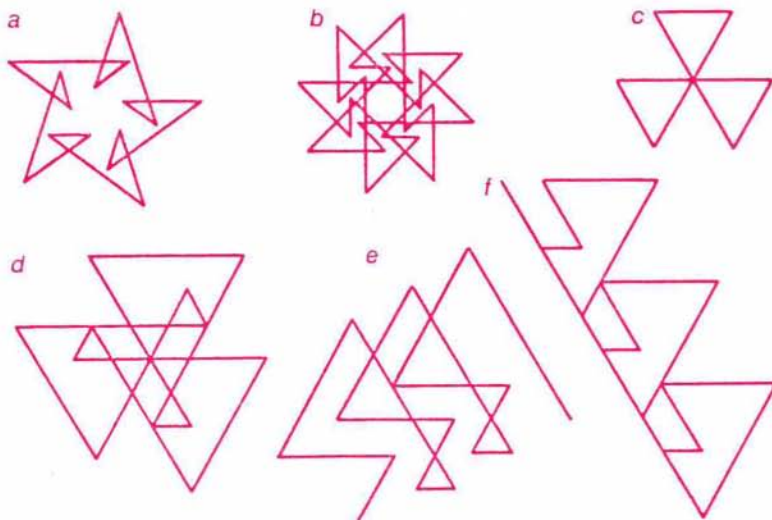
Še zanimivejše vzorce dobimo, če dovolimo enega ali več zasukov v nasprotno smer. Tako na sliki vidimo nekaj zanimivih vzorcev, ki so nastali na ta način.



Slika 6. (a) red 5, črta 3 gre v levo (b) red 6, črti 3 in 5 gresta v levo (c) red 7, črta 7 gre v levo (d) red 7, črte 1, 2 in 3 gredo v levo (f) red 9, le črta 6 gre v desno

Označevanje je sedaj nekoliko zapletenejše, saj moramo določiti še smeri. To storimo z zgornjimi indeksi. Če jih pišemo levo od reda, pomenijo, da gredo te črte v levo, ostale pa v desno. Tako oznaka $^{1,7}9_{90}$ označuje spirolateral devetega reda z zasuki za 90° , pri katerem gresta črti 1 in 7 v levo, ostale pa v desno. Zgornje indekse pišemo vedno le na eni strani. Čeprav oznaki $^{1,2,4}4_{45}$ in 4_{45}^3 označujeta isti spirolateral, uporabljamo zadnjo, ker zahteva manj pisanja.

Kako bi sedaj sestavili program za risanje spirolaterala? Pošljite nam svoje rešitve, prav tako pa slike spirolateralov, ki so vam najbolj všeč. Za konec pa še nekaj spirolateralov.



Slika 7. Spirolaterali (a) 3_{36} (b) $^13_{45}$ (c) 2_{60} (d) $^{1,2}5_{60}$ (e) $^35_{60}$ (f) $^25_{60}$

Matija Lokar ?

EINSTEIN

Nemški fizik in matematik Albert Einstein je potoval z vlakom. V oddelek pride sprevodnik in zahteva vozne listke. Einstein išče po vseh žepih, po prtljagi, na klopi in pod njo, toda listka nikjer.

"Bom pa malo pozneje prišel!" reče ljubeznivi sprevodnik, ki je prepoznal učenjaka.

"S tem mi ne bo dosti pomagano," odgovori resno ustanovitelj relativnostne teorije, "če ne najdem voznega listka, ne bom vedel, kam potujem."

O IGRI PETNAJST IN PERMUTACIJAH

Igra Petnajst je bila včasih zelo priljubljena. Okrog leta 1880 so jo igrali prav vsi, tako kot pred časom razvpito Rubikovo kocko. Najbolj vneti reševalci so se lahko celo preizkušali na številnih tekmovanjih. Med vrhuncema popularnosti igre Petnajst in Rubikove kocke je poteklo približno 100 let in če bi zlorabili matematično indukcijo, bi lahko zaključili, da se bo naslednja igra, ki bo preplavila svet, spet pojavila čez približno 100 let. Če danes pogledamo, kako je z obema igrama, ugotovimo, da ju skoraj ne srečamo več. Le tu in tam se še pojavita. Ravno pred kratkim sem v trafiki videl igro "Enaintrideset", ki je igra Petnajst z nekaj več ploščicami.

O igri Petnajst je Presek že pisal (Tomaž Pisanski: Petnajst in podobne igre, Presek 1982–83, št. 4). Najprej se spomnimo, za katero igro gre. Na kvadratu 4×4 so razporejene ploščice, ki so označene s števili od 1 do 15, eno mesto pa je prazno. Z zaporednim premikanjem poskušamo ploščice spraviti v urejen položaj. V vsakem koraku lahko premaknemo le eno izmed ploščic, ki so po strani sosednje praznemu prostorčku. Na sliki 1a je primer začetne razporeditve, ki jo moramo spraviti v končno razporeditev na sliki 1b. Znak * na sliki označuje prazno mesto. V prvem koraku lahko premaknemo le ploščico 3 ali pa 9. Če premaknemo ploščico 3, lahko v naslednjem koraku premaknemo ploščico 5, 15 ali pa 3. Tako premikamo ploščice, dokler ne pridemo do končne razporeditve ali dokler ne obupamo.

7	14	1	11
12	2	6	8
13	4	15	9
10	5	3	*

Slika 1a

1	2	3	4
5	6	7	8
9	10	11	12
13	14	15	*

Slika 1b

Končna razporeditev je vedno taka, kot je prikazano na sliki 1b. Ker lahko vsako razporeditev ploščic preprosto prevedemo v obliko, kjer je prazno mesto v spodnjem desnem kotu, privzemimo, da je tudi v začetni razporeditvi prazno mesto v spodnjem desnem kotu. V omenjenem članku Tomaža Pisanskega je opisan algoritem, kako iz poljubne začetne razporeditve poskušamo priti do končne razporeditve. Včasih postopek uspe, drugič pa ne. V resnici algoritem pripelje do končne razporeditve v natanko polovici primerov in to so vsi primeri, ko je igra rešljiva. Algoritem je naslednji: Najprej uredimo ploščice 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7 in 8. Teh ploščic ne bomo več premikali. Nato uredimo še ploščici 9 in 13, nato še 10 in 14. Tudi teh ploščic ne premikamo več. Za urejanje nam pre-

ostanejo samo še ploščice 11, 12 in 15. V polovici primerov jih lahko uredimo, v ostalih pa ne.

Vprašajmo se, kako bi lahko iz začetne razporeditve ugotovili, ali je igra rešljiva ali ne. Z nekaj znanja o permutacijah bo odgovor preprost. To pa je tudi zadosten razlog, da si najprej ogledamo nekaj osnovnih dejstev o permutacijah, ki so eden najpomembnejših pojmov v kombinatoriki.

O permutacijah

Imejmo n elementov, ki so urejeni v določenem vrstnem redu. Imena Ana, Kristina, Peter, Simon in Žiga so na primer urejena po abecedi. Če ta imena premešamo, na primer Simon, Žiga, Peter, Kristina, Ana, potem smo napravili *permutacijo* teh imen. Odslej bomo identificirali elemente, ki jih permutiramo, kar s prvimi n naravnimi števili. Če permutacija elemente 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7 razporedi v vrstni red 3, 5, 7, 1, 2, 4, 6 bomo to krajše zapisali:

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 \\ 3 & 5 & 7 & 1 & 2 & 4 & 6 \end{pmatrix}$$

V zapisu permutacije torej v zgornjo vrstico zapišemo števila od 1 do n , v spodnjo pa njihovo razporeditev. Permutacijo, kjer so elementi tudi v spodnji vrstici razporejeni od 1 do n , imenujemo *identična permutacija*.

Koliko je vseh permutacij n elementov? Takole razmislimo. Na prvem mestu lahko stoji katerokoli izmed n števil. Ko na prvem mestu stoji neko število, je na drugem mestu lahko katerokoli izmed preostalih $n - 1$ števil. Ko postopek nadaljujemo, imamo na predzadnjem mestu na izbiro še dve števili, na zadnjem pa le še eno samo. Vseh možnih permutacij je torej $n \cdot (n - 1) \cdot (n - 2) \dots 2 \cdot 1$. Dobljeno število označimo z $n!$ (izgovarjamo *n-fakulteta*).

Za vajo izpiši vse permutacije treh in štirih elementov!

Če v permutaciji med seboj zamenjamo dva elementa, potem pravimo, da smo napravili *transpozicijo*. Z zaporedjem transpozicij lahko vsako permutacijo prevedemo na identično permutacijo. Če drugače ne, potem najprej zamenjamo element, ki je na prvem mestu, z enico; nato element, ki je na drugem mestu, z dvojko in tako do konca, dokler niso vsi elementi v spodnji vrstici na pragem mestu. Na sliki 2 je primer zaporedja transpozicij, ki permutacijo $\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \\ 3 & 4 & 1 & 2 & 5 \end{pmatrix}$ prevede v identično permutacijo.

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \\ 3 & 4 & 1 & 2 & 5 \end{pmatrix} \rightarrow \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \\ 3 & 1 & 4 & 2 & 5 \end{pmatrix} \rightarrow \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \\ 3 & 2 & 4 & 1 & 5 \end{pmatrix} \rightarrow \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \\ 1 & 2 & 4 & 3 & 5 \end{pmatrix} \rightarrow \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \\ 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \end{pmatrix}$$

V našem primeru smo začetno permutacijo privedli do identične s štirimi transpozicijami. Seveda bi lahko to naredili tudi drugače. Najmanj transpozicij bi naredili, če bi najprej zamenjali 1 in 3, nato pa še 2 in 4. Poskušaj sedaj še nekaj drugih zaporedij in preštej, koliko transpozicij si napravil! Gotovo si opazil, da si vedno potreboval sodo število transpozicij. To ni nič presenetljivega. Dokažemo namreč lahko, da če dano permutacijo pretvorimo v identično permutacijo s sodim številom transpozicij, potem je na noben način ne moremo z lihim in obratno. Tega ne bomo dokazovali. Dokaz lahko najdemo v knjigi Ivana Vidava *Algebra*, Ljubljana 1980, na strani 63. Zaradi te lastnosti pravimo permutacijam, ki jih spravimo do identične s sodim številom transpozicij, *sode permutacije*, ostalim pa *lihe permutacije*. Sodih permutacij je ravno toliko, kot je lihih.

Vprašajmo se, kako učinkovito določimo parnost permutacije, t.j. ali je permutacija soda ali liha. Ugotavljanje parnosti po zgornji definiciji gotovo ni najprimernejše; če je permutacija nekoliko daljša, moramo prepisovati vrstice kot nori, pa še zmotimo se lahko (če se sodekrat ni nič hudega). Vzemimo naslednjo permutacijo: $\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & 8 & 9 \\ 7 & 9 & 6 & 3 & 1 & 4 & 5 & 8 & 2 \end{pmatrix}$. Po vrsti zasledujemo, kam "gredo" elementi permutacije: 1 gre v 7, 7 v 5 in 5 v 1. Krog je sklenjen. Naprej: 2 gre v 9 in 9 v 2. 3 gre v 6, 6 v 4 in 4 v 3. Element 8 pa gre kar sam vase. Račun zapišemo takole:

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & 8 & 9 \\ 7 & 9 & 6 & 3 & 1 & 4 & 5 & 8 & 2 \end{pmatrix} = (175)(29)(364)(8).$$

Pravimo, da smo permutacijo zapisali s *tujimi cikli*. Cikle imenujemo tuje, ker vsak element permutacije nastopa v natanko enem ciklu. Vsak cikel zase je tudi permutacija. Cikel (1 7 5) moramo razumeti takole: 1 gre v 7, 7 v 5, 5 v 1, vsi ostali elementi: 2, 3, 4, 6, 8 in 9 pa se preslikajo vase. Skoraj očitno je, da se da vsaka permutacija zapisati s tujimi cikli, zato tega ne bomo dokazovali.

Kako ugotovimo parnost cikla? Število elementov, ki nastopajo v zapisu cikla, imenujemo *dolžina cikla*. Dokaži, ali pa vsaj na primerih preizkusi, da velja: če je dolžina cikla sodo število, potem je cikel liha permutacija, sicer pa je soda. V našem primeru so vsi cikli sodi, izjema je le cikel (2 9). Za vsak posamezen cikel znamo določiti njegovo parnost. Kako pa iz dolžin tujih ciklov permutacije ugotovimo parnost permutacije? Ko urejamo elemente v nekem ciklu, so elementi ostalih ciklov nedotaknjeni, saj so cikli tuji! Torej uredimo prvi cikel, drugi cikel in tako do konca. Število vseh opravljenih transpozicij je enako vsoti števil transpozicij po posameznih tujih ciklih.

Izpeljali smo naslednji recept za ugotavljanje parnosti. Najprej permutacijo

zapišemo s tujimi cikli in vsakemu ciklu priredimo njegovo dolžino zmanjšano za 1. Nato števila seštejemo in če je vsota sodo število, je permutacija soda, sicer pa liha. Na prvi pogled morda nekoliko zapleteno, ko pa napravite nekaj primerov, postane postopek zelo enostaven. V gornjem primeru imamo račun: $2 + 1 + 2 + 0 = 5$, torej je permutacija liha. Še en primer: permutacijo s slike 2 zapišemo s cikli $(1\ 3)(2\ 4)(5)$, otrej računamo $1 + 1 + 0 = 2$, zato je permutacija soda.

Nazaj k igri Petnajst

Sedaj že dovolj vemo o permutacijah, da uženemo igro Petnajst. Najprej začetni razporeditvi ploščic priredimo permutacijo. To napravimo tako, da po vrsticah preberemo števila na kvadratu. Začetni razporeditvi s slike 1 pripada permutacija

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & 8 & 9 & 10 & 11 & 12 & 13 & 14 & 15 & * \\ 7 & 14 & 1 & 11 & 12 & 2 & 6 & 8 & 13 & 4 & 15 & 9 & 10 & 5 & 3 & * \end{pmatrix}$$

Če koga moti $*$ kot element permutacije, lahko $*$ mirno zamenja s številom 16. Kaj se zgodi s to permutacijo, ko napravimo en premik ploščice? Natanko ena transpozicija, kjer se zamenjata element $*$ in neka ploščica. In kako pridemo od začetne razporeditve do končne? Z zaporedjem transpozicij, ki pa seveda niso poljubne, saj vedno premaknemo $*$. Če smo prišli do končne razporeditve, potem trdimo, da smo napravili sodo število premikov prazne ploščice. Res! Prazna ploščica je na koncu na istem mestu kot na začetku. Zato se je morala pomakniti navzgor tolikokrat kot navzdol in levo tolikokrat kot desno. Torej zaključimo. *Če je permutacija, ki pripada začetni razporeditvi (z $*$ v spodnjem desnem kotu), liha, potem igra Petnajst nima rešitve.*

Permutacijo k začetni razporeditvi s slike 1 zapišemo s tujimi cikli:

$$(17621451291310411153)(8)(*)$$

Račun $13 + 0 + 0 = 13$ nam pove, da je permutacija liha, torej naloga s slike 1 nima rešitve.

Igro Petnajst tako povsem obvladamo. Algoritem reševanja je naslednji:

1. Če $*$ ni v spodnjem desnem kotu, razporeditev popravi v tako obliko.
2. Začetni oz. dobljeni razporeditvi priredi permutacijo.
3. Ugotovi parnost permutacije.
4. Če je permutacija liha, igra nima rešitve, sicer pa z algoritmom z začetka članka reši nalogo.

Za konec pa tole. Nekateri so konec prejšnjega stoletja mirne duše ponujali 1000 \$ (kar je bil tedaj še veliko večji denar kot danes) vsem, ki bi rešili začetni položaj igre Petnajst, v katerem sta med seboj zamenjani le ploščici 14 in 15. Kdor je članek razumel, bo takoj ugotovil: ustrezna permutacija je liha, torej rešitve ni. Vsi reševalci so se torej trudili zaman in zastonj.

Sandi Klavžar

NAROČILNICA

**DRUŠTVU MATEMATIKOV, FIZIKOV
IN ASTRONOMOV SR SLOVENIJE**
61111 Ljubljana, pp 64

Za našo šolo naročamo izvodov brošure

NAŠE NEBO IN ZEMLJA 1989

Brošura vsebuje, kot vsako leto tudi letos, množico tabelaričnih podatkov o nebesnih telesih: Soncu, Luni, planetih, kometih, satelitih (naravnih in umetnih) ter vidnejših zvezdah. Opisani so nekateri nebesni pojavi s pripombami, ki so koristni astronomom—amaterjem pri šolskih krožkih in domači zabavi. V dodatku pa so kronološki pregledi potresov v minulem letu na področju Slovenije, Jugoslavije ter močnejših potresov drugod po svetu. Na naslovni strani je znana in že večkrat uporabljena fotografija E. Aldrina, ki je 20. julija 1969 skupaj z N. Armstrongom kot prvi človek stopil na Lunina tla. Prihodnje leto bo torej minilo že dvajset let od tega za človeštvo tako pomembnega dogodka. Knjigotržka cena brošure je 10.000 din (8.000 din).

Kraj in datum Podpis

Šola

Točen naslov

32. REPUBLIŠKO TEKMOVANJE SREDNJEŠOLCEV IZ MATEMATIKE

To pomlad so mladi matematiki slovenskih srednjih šol pomerili svoje moči v Kranju. ISKRA — srednja šola je prevzela organizacijo tekmovanja, ISKRA SOZD pa pokroviteljstvo. Nekateri tekmovalci so prišli v Kranj že v petek, 1. aprila in prespali v dijaškem domu.

Popoldne je v Iskrinem šolskem centru Jože Vrabec predaval za učence kranjskih srednjih šol.

V soboto je po skromni zakuski vse udeležence tekmovanja in goste pozdravil ravnatelj šole Franc Lebar, nekaj vzpodbudnih besed pa jim je namenil član kolegijskega poslovnega organa ISKRE Jože Godec. Tudi predstavniki radia in televizije so bili prisotni in po Valu 202 obveščali o tekmovanju in okrogli mizi. Ko so se učenci ubadali z nalogami, so namreč spremljevalci spregovorili o tekmovanjih srednješolcev iz matematike v naslednjih letih.

Vseh tekmovalcev je bilo 161 in to 49 prvošolcev, 43 drugošolcev, 36 tretješolcev in 33 četrtošolcev. Za reševanje nalog, ki jih je izbrala republiška tekmovalna komisija, so imeli dve uri in pol časa.

Naloge za prvi letnik

1. Šestmestno število se začne s cifro 1. Če to enko prestavimo na zadnje mesto, je novo šestmestno število trikrat večje od prvotnega. Poišči prvotno število.
2. Pokaži, da je $\sqrt{a-1} + \sqrt{b-1} + \sqrt{c-1} < \sqrt{c(ab+1)+1}$, če so a , b in c poljubna realna števila, ki niso manjša od 1.
3. Pet športnikov je sodelovalo na namiznoteniškem turnirju, vsak je z vsakim igral po eno tekmo. Prvi igralec je x_1 —krat zmagal in y_1 —krat izgubil, drugi x_2 —krat zmagal in y_2 —krat izgubil, ..., peti x_5 —krat zmagal in y_5 —krat izgubil. Pokaži, da velja:

$$x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 + x_4^2 + x_5^2 = y_1^2 + y_2^2 + y_3^2 + y_4^2 + y_5^2$$

4. V poljubnem trikotniku ABC naj bo M razpolovišče stranice AB , P pa poljubna točka med A in M . Vzporednica k zveznici PC skozi M seka stranico BC v točki D . Za razmerje r med ploščinama trikotnikov PBD in ABC velja:

- a) $1/2 < r < 1$, odvisno od položaja točke P
 - b) $r = 1/2$, ne glede na položaj točke P
 - c) $1/2 \leq r < 1$, odvisno od položaja točke P
 - d) $1/3 < r < 2/3$, odvisno od položaja točke P
 - e) $r = 1/3$, ne glede na položaj točke P
- Utemelji svojo izbiro!

Naloge za drugi letnik

1. Naj bosta a in b zaporedni naravni števili, c pa njun produkt. Če je $D = a^2 + b^2 + c^2$, je $\sqrt{D}$:
 - a) v vsakem primeru iracionalno število,
 - b) v nekaterih primerih iracionalno, v drugih racionalno število,
 - c) vedno liho število,
 - d) vedno naravno število; toda včasih liho, včasih pa sodo,
 - e) vedno sodo število.

Utemelji svojo izbiro!
2. Reši enačbo:

$$\log_3 x \cdot \log_4 x \cdot \log_5 x = \log_3 x \cdot \log_4 x + \log_4 x \cdot \log_5 x + \log_5 x \cdot \log_3 x$$

3. Dan je krog s središčem S in polmerom r . V njegovi notranjosti leži točka M .
 - a) Kje naj leži točka M , če moremo krogu včrtati kvadrat, ki ima točko M na eni od stranic?
 - b) Točka M je postavljena tako, da se da včrtati kvadrat, ki ima M na eni od stranic. Načrtaj ta kvadrat!
4. Včrtani krog trikotnika ABC ima središče v točki S , očrtani pa v točki T . Podaljšek daljice AS seka očrtano krožnico v točki D . Kateri odgovor velja za poljuben trikotnik:
 - a) $CD = BD = TD$
 - b) $AS = CS = SD$
 - c) $CD = CS = BD$
 - d) $CD = SD = BD$
 - e) $TB = TC = SD$

Utemelji svojo izbiro!

Naloge za tretji letnik

1. Pokaži: izmed štirih poljubnih realnih števil lahko izberemo dve taki (označimo ju na primer z x in y), da velja

$$0 \leq \frac{y - x}{1 + xy} \leq 1$$

2. Dana je enačba $x + \sqrt{x + \frac{1}{2}} + \sqrt{x + \frac{1}{4}} = a$. Ugotovi, pri katerih realnih a je rešljiva in jo reši.
3. Stranico BC pravilnega petkotnika $ABCDE$ podaljšamo do točke F , tako da je C med B in F in da je $CF = d$. Zveznica AF seka stranico CD v točki G . Izrazi dolžino CG z dolžino stranice petkotnika a in razdaljo d !
4. Skozi točko T , ki leži v notranjosti trikotnika ABC , načrtamo premico p , tako da seka stranici AC in AB in da ne gre skozi nobeno oglišče trikotnika. Naj pomenijo h_a , h_b in h_c oddaljenosti točk A , B in C od premice p . Dokaži, da velja

$$h_a \cdot S_{BCT} = h_b \cdot S_{ATC} + h_c \cdot S_{ABT}$$

(Pri tem pomeni na primer S_{BCT} ploščino trikotnika BCT , analogno velja za druge trikotnike).

Naloge za četrti letnik

1. Dana je kvadratna parabola $y = x^2$ in točka $T(2, 0)$. Poišči krivuljo, na kateri ležijo temena kvadratnih parabol, ki gredo skozi T in se dotikajo dane parabole!
2. V kakšnem razmerju so stranice pravokotnega trikotnika, če tvorijo sinusi notranjih kotov aritmetično zaporedje?
3. Naj bo n poljubno naravno število in $x_1, x_2, \dots, x_n$ realna števila, večja od $1/2$. Dokaži, da velja:

$$\sqrt{x_1} + \sqrt{x_2} + \dots + \sqrt{x_n} \geq \sqrt{x_1 + x_2 + \dots + x_n + n - 1}$$

4. V deželi oblike kvadrata s stranico 2 km je vladal kralj, ki se je nekega dne pet minut pred dvanajsto odločil, da bo ob sedmih zvečer priredil sprejem za vse prebivalce svoje kraljevine. Točno opoldne je poslal kurirja, da ponesse novico med ljudi. Vsak, ki je zvedel za povabilo, je nemudoma sklenil, da bo pomagal kurirju pri obveščanju sodeželanov.

Kurir je bil vaje "hitrih" kraljevih odločitev, zato je znal organizirati prenašanje sporočil tako, da so prišli vsi prebivalci pravočasno na sprejem. Pa še to: vedel je, da vsi (tudi on sam) prehodijo 3 km na uro.

Bi tudi ti znal organizirati obveščanje tako, da ljudje ne bi zamudili?

Po tekmovanju so odšli vsi udeleženci tekmovanja na kosilo v dijaški dom blizu šole, nato pa na Bled, kjer so si ogledali Plemljevo hišo in grad. Da so nekateri matematiki zelo življenjski, so dokazali z vprašanjem, ki so ga postavili ob prihodu na Bled. Zanimalo jih je, kje je biljard.

Proti večeru smo se spet zbrali v šoli v Kranju. Člani komisije in spremlje-

valci so medtem pregledali naloge, zato so si lahko tekmovalci ogledali rezultate in se pritožili. Umestne pripombe so pregledovalci upoštevali.

Letošnje tekmovanje je bilo prvič podaljšano na dva dneva. Preko Izobraževalne skupnosti smo uspeli dobiti dovolj sredstev, da smo vsem tekmovalcem, ki so ostali čez noč v Kranju, omogočili brezplačno večerjo, prenočišče in zajtrk.

Skupaj z učenci Šolskega centra Iskra smo še pozno v noč urejali vse potrebno za uradno razglasitev, ki je bila v nedeljo, 3. aprila. Žal je večina tekmovalcev že odpotovala domov in so na razglasitev prišli le predstavniki posameznih šol.

Priznanja so osvojili:

1. letnik

2. nagrada: Blaž KORITNIK (SNŠ Ljubljana), Marko PETRUŠIČ (SNŠ Ljubljana), Marko PAVLIŠIČ (SŠEK Črnomelj), Dušanka KOCIĆ (STŠMT Celje), Bogdan TERTINEK (SNŠMZ Maribor);

pohvale: Polona PETERLE (SŠPTNU Novo mesto), Tomislav LUŠIČ (SŠNMEU Trbovlje), Tobi PUTRIH (SNŠ Ljubljana), Primož ŠKULJ (SNŠ Ljubljana), Urška DEMŠAR (SŠEN Ljubljana), Boštjan DRINOVEC (SNŠ Ljubljana), Aleksander URŠIČ (NSC Nova Gorica), Matjaž KOBAL (SNŠ Ljubljana)

2. letnik

1. nagrada: Andrej BAUER (SNŠ Ljubljana)

3. nagrada: Renata NOVAK (SNŠ Ljubljana), Marko KERN (SŠPRNMU Kranj), Gregor DOLINAR (SŠPRNMU Kranj), Marko ŽERDIN (SNŠMZ Maribor);

pohvale: Alenka KAVKLER (SNŠMZ Maribor), Martin RAIČ (SNŠ Ljubljana), Sašo JEZERNIK (SNŠMZ Maribor), Borut LESJAK (SŠPRNMU Kranj), Borut NOVAK (CSUI Jesenice), Gašper FIJAVŽ (SNŠ Ljubljana), Roman MODIČ (SNŠ Ljubljana), Klemen ČAS (CSŠ Titovo Velenje), Mateja ŽEPIČ (SŠPRNMU Kranj), Tadej ŽANCER (SNŠ Ljubljana)

3. letnik

1. nagrada: Andraž OBLAK (SNŠ Ljubljana)

3. nagrada: Zoran SLANIČ (SNŠMZ Maribor)

pohvale: Tatjana OZBIČ (STNŠ Postojna), Marjan JERMAN (SŠNMEU Trbovlje), Matej KLEMENČIČ (SNŠ Ljubljana), Jaka CIMPRIČ (SNŠ Ljubljana), Timotej EČIMOVIČ (SNŠ Ljubljana), Andrej VILFAN (SNŠ Ljubljana)

4. letnik

1. nagrada: Matej KOLAR (STŠMT Celje)
3. nagrada: Edi VOVK (ISKRA SŠ Kranj), Ambrož PONDELEK (SNŠ Ljubljana), Gregor SMREKAR (SŠR Ljubljana), Andrej FAJFAR (SNŠ Ljubljana)
- pohvale: Andrej LAMOVEC (SNŠ Ljubljana), Renato BERTALANIČ (SCTPU M. Sobota), Tomaž VOLK (SNŠ Ljubljana), Božo SKOK (SPNMŠ Koper), Mitja ŠTERMAN (NSC Nova Gorica), Emil ŽAGAR (SŠTUD Kočevje), Bor PLESTENJAK (SNŠ Ljubljana), Tomaž SLIVNIK (SNŠ Ljubljana), Dušan PETROVIČ (CSŠ Titovo Velenje), Robert JERAJ (SŠPRNMU Kranj), Simon ABOLNAR (TSCBB Nova Gorica), Marko ROBNIK (SEKRŠ Titovo Velenje), Jerica MAVER (NSC Nova Gorica), Andreja DROBNIČ (SŠTUD Kočevje), Andreja GOMBOC (SCTPU Murska Sobota).

Vredne praktične nagrade sta prispevala pokrovitelj ISKRA SOZD in združeno delo Gorenjske. Ob odhodu so tekmovalci dobili še bilten, ki ga je pripravil organizator. Upamo, da so ti dnevi vsem ostali v prijetnem spominu.

Angelca Jaklič

19. ZVEZNO TEKMOVANJE OSNOVNOŠOLCEV IZ MATEMATIKE

Zvezno tekmovanje mladih matematikov osnovnošolcev je bilo v soboto, 4. julija 1988, v osnovni šoli Heroj Ivan Muker v Smederevski Palanki. Tekmovalci so se tu zbrali že v petek popoldne. V soboto je bila ob 9. uri najprej svečana otvoritev tekmovanja, nato pa so učenci dve uri in pol reševali precej zahtevne naloge, njihovim mentorjem pa so organizatorji medtem pripravili kratek seminar o delu z nadarjenimi matematiki. Po kosilu so si tekmovalci in mentorji ogledali mesto, tekmovalna komisija pa je medtem pregledala izdelke.

Tekmovalo je 40 sedmošolcev in 55 osmošolcev. Med njimi so po sklepu republiške tekmovalne komisije Slovenijo zastopali: sedmošolca Karmen Flis (OŠ Danila Kumar, Ljubljana) in Mitja Štrukelj (OŠ IX. korpusa NOVJ, Nova Gorica) ter osmošolci Sašo Dolenc (OŠ Majde Verhovnik, Ljubljana), Mojca Vilfan (OŠ Maks Pečar, Ljubljana), Janez Viher (OŠ Slavko Šlander, Maribor), Jernej Stare (OŠ Prežihov Voranc, Ljubljana) in Tomaž Cedilnik (OŠ Ledina, Ljubljana).

Naši tekmovalci so se na tekmovanju solidno odrezali, saj je Sašo Dolenc osvojil III. nagrado, Janez Viher pa pohvalo.

7. razred

1. Šestino skupne količine nekega blaga so prodali z 20% dobičkom, polovico pa z 10% izgubo. Z najmanj koliko odstotnim dobičkom morajo prodati ostanek blaga, da bodo pokrili izgubo?
2. Naravno število n je zapisano v desetiškem sestavu s šestdesetimi sedmicami in z nekaj ničlami. Dokaži, da je vrednost ulomka $\frac{n-27}{3}$ celo število in da vrednost ulomka $\frac{n+27}{9}$ ni celo število.
3. Določi naravna števila $n_1, n_2, \dots, n_k$ (ni nujno, da so med seboj različna), tako da bo $n_1 \cdot n_2 \cdot \dots \cdot n_k = 1988$ in $n_1 + n_2 + \dots + n_k = 1988$ ($k > 1$). Koliko je različnih rešitev?
4. Na simetrali zunanega kota ob oglišču C trikotnika ABC je izbrana poljubna točka M . Dokaži, da je $\overline{MA} + \overline{MB} \geq \overline{AC} + \overline{BC}$.
5. V notranjosti enakokrakega trikotnika $\triangle ABC$ ($\overline{AC} = \overline{BC}$, $\sphericalangle ACB = 80^\circ$) je dana točka O , tako da je $\sphericalangle BAO = 10^\circ$ in $\sphericalangle ABO = 30^\circ$. Izračunaj kot $\sphericalangle ACO$.

8. razred

1. Dve ladji kreneta istočasno iz krajev A in B druga drugi naproti. Vsaka od njih se, takoj ko pride v drugi kraj, obrne in vrne v prvotni kraj. Prvič se ladji srečata 5 km od kraja A , drugič pa 3 km od kraja B . Kolikšna je razdalja med A in B ?
2. Dane so linearne funkcije $y = -1$, $y = \frac{3}{2}x - 4$, $y = \frac{1}{4}x + \frac{7}{2}$ in $y = 2x + 7$. Izračunaj koordinate oglišč in ploščino štirikotnika, ki ga omejujejo grafi danih funkcij.
3. Dokaži, da je razlika števila, ki je zapisano s sto enicami, in števila, ki je zapisano s petdesetimi dvojkami, kvadrat naravnega števila.
4. Na stranici CD pravokotnika $ABCD$ je izbrana točka M , tako da je $\overline{DM} = 2 \cdot \overline{CM}$. Premici AC in BM se sekata pravokotno. Izračunaj kot $\sphericalangle BOM$, kjer je točka O presečišče diagonal.
5. V notranjosti trikotnika ABC je izbrana poljubna točka M . Dokaži, da je $\overline{AM} \cdot \overline{BC} + \overline{BM} \cdot \overline{AC} + \overline{CM} \cdot \overline{AB} \geq 4p$, kjer je p ploščina trikotnika ABC .

Aleksander Potočnik

26. REPUBLIŠKO TEKMOVANJE SREDNJEŠOLCEV IZ FIZIKE

Letos je bilo republiško tekmovalstvo iz fizike 7. maja v Mariboru. Organizirala ga je Srednja naravoslovna šola Miloša Zidanška, potekalo pa je v prostorih Višje ekonomske komercialne šole. Ob otvoritvi sta tekmovalce in njihove mentorje pozdravila ravnatelj šole ter dekan mariborske fakultete.

Od 159 tekmovalcev iz 19 srednjih šol jih je v skupini A (mekanika) tekmovalo 62, v skupini B (energija) 47, v skupini C (elektromagnetika) 42 in v skupini D (optika) 8. Medtem, ko so učenci reševali zahtevne teoretične naloge, so se njihovi mentorji ter člani tekmovalne komisije zbrali na posvetu o vsebini in obliki prihodnjih republiških tekmovanj iz fizike. Po daljši razpravi, v kateri je sodeloval tudi prof. dr. Anton Moljk, so udeleženci prišli do zaključka, da je potrebno na novo oblikovati program za skupini B in D.

Ob zaključku je tekmovalna komisija razglasila rezultate in podelila priznanja naslednjim tekmovalcem:

Skupina A:

- 2. nagrada: Matjaž PIHLER (SNŠ Ljubljana)
- 3. nagrada: Bojan RAMŠAK (SEŠ Ljubljana)
Aleš ČASAR (SCTPU Murska Sobota)
- pohvale: Jože ROVTAR, Gregor MALI (SŠPRNMU Kranj), Rok PESTOTNIK, Aleš TOMAŽEVIČ, Matej ŠIKOVEC (SNŠ Ljubljana),
Tine TRETJAK (SŠTNPU Ravne na Koroškem)

Skupina B:

- 1. nagrada: Andrej VILFAN (SNŠ Ljubljana)
- 2. nagrada: Igor ZRINSKI (SCTPU Murska Sobota)
- 3. nagrada: Marijan ADAM (SNŠ Maribor), Andrej ZRIMŠEK, Gregor ČERNE, Janez VENCELJ (SŠPRNMU Kranj)
- pohvale: Vid BOBNAR, Griša OGRIZEK, Tadej ŽONTAR (SŠPRNMU Kranj), Jaka CIMPRIČ, Andrej PANGERŠIČ, Andraž OBLAK (SNŠ Ljubljana), Marko GORČENKO, Janez BREST (SNŠ Maribor), Miha MESARIČ (CSUI Murska Sobota)

Skupina C:

- 1. nagrada: Andrej LAMOVEC (SNŠ Ljubljana)
- 2. nagrada: Krištof OŠTIR SEDEJ (SŠPRNMU Kranj), Andrej FAJFAR (SNŠ Ljubljana)
- 3. nagrada: Aleš MOHORIČ (SŠPRNMU Kranj), Tomaž VOLK (SNŠ Ljubljana)

pohvale: Gregor SMREKAR (SŠR Ljubljana), Igor GREŠOVNIK (SŠTNPU
Ravne na Koroškem), Edvin DURIČ (SEŠ Ljubljana), Beno
ARBITER (SNŠ Maribor)

"O, čudo!

Kaj tukaj je odličnih bitij zbranih!

Kako je človek lep!

O krasni novi svet, kjer biva takšen rod!"

(Shakespeare: Vihar)



Skupina D:

2. nagrada: Andreja GOMBOC (SCTPU Murska Sobota)

3. nagrada: Robert JERAJ (SŠPRNMU Kranj)

pohvale: Blaž LONGER (SNŠ Maribor), Mitja ŠTERMAN (NSC Nova Gorica), Anton KOS (CSUI Jesenice), Lars KRISTAN (SNŠ Ljubljana)

Komisija je določila ekipo za zvezno tekmovanje iz fizike v Zagrebu. Tekmovanja so se udeležili: Matjaž Pihler, Andrej Vilfan, Igor Zrinski, Marijan Adam, Gregor Černe, Andrej Lamovec, Krištof Oštir Sedej, Andrej Fajfar, Aleš Mohorič, Tomaž Volk, Andreja Gomboc in Robert Jeraj.

Skupina A – mehanika

1. Motorist vozi motorno kolo, ki ima kolesa s premerom 0,6 m, razdalja med njunima osema pa je 1,5 m. Skupno težišče motorja in motorista je po višini trikrat višje od razdalje osi koles nad tlemi, v vzdolžni smeri pa se nahaja na sredini med osema. Koeficient trenja med gumo in cesto je 0,9. Izračunaj razmerje zavornih poti pri maksimalnem možnem zaviranju, če motorist zavira samo z zadnjo ali samo s prednjo zavoro.

2. Kolikšna sme biti hitrost motorista iz prejšnje naloge, da se zračnica med vožnjo ne bo praznila? Ventil na motornem kolesu kaže slika 1. Koeficient zemti, ki potiska ventil proti osi kolesa, je 75 N/m, vzmet je stisnjena na dolžino 1,5 cm, neobremenjena pa je dolga 3,5 cm. Maso vzmeti zanemarimo, masa ventila pa je 0,2 g. Sila, s katero plin v zračnici pritiska na ventil, je 1 N.



Slika 1



Slika 2

3. Na klancu z nagibom 30° sta povezani preko škripca utež z maso M in posoda v obliki kocke, ki je do polovice napolnjena z vodo. Masa vode v posodi je m , maso posode pa zanemarimo. Posoda z vodo se giblje po klancu navzgor (slika 2).

a) Določi največje možno razmerje M/m tako, da bo voda ostala v posodi, če ni trenja med posodo in klancem.

b) Kolikšno pa je to razmerje, če upoštevamo, da je koeficient trenja med posodo in klancem 0,2?

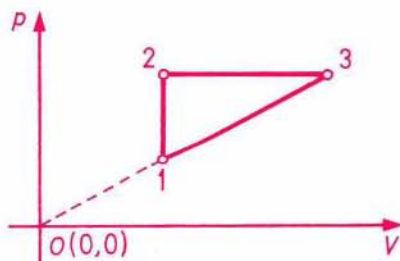
4. Okrogla plošča z radijem 5 m in z maso 100 kg se vrti okoli svoje geometrijske osi. Po njej hodi mož z maso 60 kg s konstantno hitrostjo 1 m/s glede na ploščo, tako da se ves čas giblje po isti ravni črti, ki gre skozi središče plošče. Ob času $t = 0$, ko mož krene iz središča, se plošča vrti s frekvenco $0,1 \text{ s}^{-1}$. Ko pride do roba, se v trenutku obrne in nadaljuje hojo po isti črti.

- Kako se frekvenca vrtenja plošče spreminja s časom? Kolikšna je največja in kolikšna najmanjša frekvenca? Nariši graf odvisnosti frekvence od časa.
- Zapiši, kako se kotni pospešek spreminja s časom.
- Določi silo, s katero mož pri hoji odriva ploščo v prečni smeri. Kolikšna je ta sila, ko gre mož skozi središče plošče, kolikšna tik preden doseže rob in kolikšna takoj po obratu? Nariši graf odvisnosti sile od časa. (Napotek: za piši enačbo gibanja samo za ploščo, tako da moža šteješ k okolici.)
- Določi časovni potek sile, s katero mož odriva ploščo v smeri hoje.
- Skiciraj pot moža po plošči, ki bi imela idealno gladko površino (brez trenja), če bi imel mož v središču hitrost 1 m/s v radialni smeri:
 - za opazovalca, ki se vrti hkrati s ploščo in
 - za opazovalca, ki miruje glede na okolico.
 Na skici jasno označi smer vrtenja plošče.

Skupina B – energija

1. Zračni tlak ob morju je 1010 mbara, temperatura zraka in vode je 25°C . Litrsko steklenico zamašimo, jo potopimo 5 m pod vodno gladino z vratom navzdol ter jo odpremo tako, da voda vdre v steklenico. Koliko vode je v steklenici kmalu potem, ko smo jo odprli? Koliko vode je v steklenici po daljšem času? Gostota morske vode je $1,1 \text{ kgdm}^{-3}$, razmerje specifičnih toplot za zrak pa je 1,4.

2. Na diagramu $p(V)$ je narisana krožna sprememba (1–2–3–1) idealnega plina. Stanje plina v točki 1 je: $p_0 = 1 \text{ bar}$, $V_0 = 1 \text{ m}^3$, $T_0 = 0^{\circ}\text{C}$. Volumen plina v točki 3 je 2 m^3 . Isto krožno spremembo nariši na diagramu $V(T)$ in diagramu $p(T)$! Značilne točke na diagramih (1, 2, 3) opremi s podatki, ki opišejo stanje plina v teh točkah!



3. Ladja ima ravno dno in v njem luknjo veliko $1/1000$ celotne površine dna. Stene ladje so navpične in visoke 20 m. Ali lahko doseže 1,5 km oddaljeno obalo, če je sprva potopljena za 15 m? Kljub potapljanju ves čas vozi s hitrostjo 5 m/s.

4. Na testu avtomobila UNO 60 so dobili naslednje rezultate:

masa vozila z voznikom 900 kg

največja moč 43 kW

največja hitrost 157 km/h (v IV prestavi)

moč, potrebna za konstantno hitrost 100 km/h: 12,50 kW

poraba pri hitrosti 100 km/h: 5,3 l

pospešek 0 – 80 km/h: 8,7 s

pospešek 0 – 100 km/h: 13,8 s

- Določi, kako se moč motorja pri enakomerni vožnji spreminja s hitrostjo. Predpostavi, da je upor vsota sile, ki je neodvisna od hitrosti, in sile, ki narašča s kvadratom hitrosti.
- Določi koeficient zračnega upora C_u , če je prečni presek avtomobila $2,2 \text{ m}^2$ in gostota zraka $1,20 \text{ kg/m}^3$.
- Določi mehanski izkoristek motorja pri hitrosti 100 km/h, če je sežigna toplota bencina 43,1 MJ/kg in gostota 0,731 kg/l.
- Izračunaj pospešek pri hitrosti 90 km/h v III prestavi, če je razmerje prenosov med III in IV prestavo 1,374 in če je navor motorja skoraj neodvisen od števila vrtljajev. Izračunani pospešek primerjaj z izmerjenim.

Skupina C – elektromagnetika

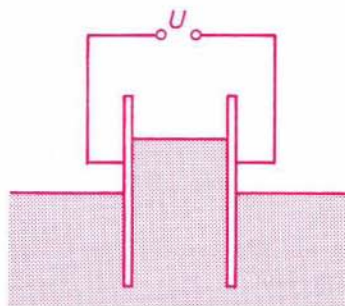
1. Statični voltmeter kaže napetost 1000 V. Z njega prenašamo naboj na enak, vendar v začetku nenaelektren voltmeter, s kroglico na izoliranem držaju. Ko se s kroglico prvič dotaknemo voltmetra, pade napetost s 1000 V na 800 V. Kolikšno napetost kažeta voltmetra po daljšem času? Izgube naboja pri prenašanju zanemarimo.

2. Osem ravnih žic z uporom 1 ohm na meter zvarimo v obliko piramide z osnovno ploskvijo $20 \times 20 \text{ cm}$ in višino 30 cm. Magnetno polje je vzporedno z višino in vsako sekundo naraste za 0,1 T. Kolikšen tok teče v stranicah, ki tvorijo osnovno ploskev?

3. Konstruiraj tuljavo, v kateri naj bo v 4 dm^3 prostornine približno homogeno magnetno polje z gostoto 500 gaussov. Na voljo imaš bakreno žico s premerom 0,8 mm in specifičnim uporom $17,5 \cdot 10^{-9} \Omega \text{m}$ ter izvor napetosti z močjo 200 W. Če hočemo imeti približno homogeno magnetno polje v sredini tuljave na dolžini enega premera tuljave, mora biti razmerje med dolžino in premerom tuljave vsaj 3 : 1. Porabiti želimo čim manj bakrene žice.

4. Dve dolgi planparalelni kovinski plošči, ki sta razmaknjeni za 2 mm, potopimo v vodo, kot kaže slika. Za koliko se dvigne voda med ploščama, ko priključimo med plošči napetost 700 V?

$$\epsilon_v = 80, \rho_v = 1000 \text{ kg/m}^3, \\ \epsilon_0 = 8,85 \cdot 10^{-12} \text{ AsV}^{-1} \text{ m}^{-1}$$



Skupina D – optika

1. 1 cm debela steklena plošča ima na eni ploskvi vzporedne ravne zareze v razdalji 10^{-6} m . Na drugo gladko ploskev pada snop enobarvne svetlobe z valovno dolžino 500 nm pod kotom 45° tako, da so zareze pravokotne na ravnino žarka in vpadne pravokotnice. Pod kakšnimi koti glede na vstopajočo snop žarkov izstopa svetloba na drugi strani plošče?

2. Ob jasnem, sončnem dnevu se igramo z zbiralno lečo. V gorišče leče postavimo na obeh straneh počrtnjeno krožno ploščico, tako da slika sonca nastane na sredini ploščice. Do katere temperature bi se ploščica segreela, če bi se hladila samo s sevanjem? Sonce vidimo pod zornim kotom $0,5^\circ$, gostota svetlobnega toka je 1 kW/m^2 , leča ima premer 0,2 m in goriščno razdaljo 0,5 m, premer črne ploščice pa je 1 cm.

$$\sigma = 5,67 \cdot 10^{-8} \text{ Wm}^{-2} \text{ K}^{-4}$$

3. Pravokotno na planparalelno ploščo pada enobarvna svetloba. Spodnja in zgornja površina imata z obeh strani enako odbojnost. Izračunaj koeficient odbojnosti površine, če plošča prepusti 90% vpadne svetlobe. Zanimari absorpcijo svetlobe v plošči.

4. Pri nočnem lovu si ribič sveti s svetilko, katere snop ima gostoto energijskega toka 200 W/m^2 . Spekter svetilke je približno enakomeren na intervalu valovnih dolžin med 400 nm in 500 nm, drugod pa je zanemarljivo majhen. Med malico je ribič nepazljiv in v vodo mu pade nož. Do kolikšne globine ga s svojo svetilko lahko še vidi, če ima rezilo odbojnost 1? Kakšne barve je takrat? Nariši približen spekter svetlobe, ki jo oko takrat zazna!

Absorpcijski koeficient za svetlobo pri 400 nm je $0,15 \text{ m}^{-1}$, pri 500 nm je $0,2 \text{ m}^{-1}$, vmes pa se spreminja linearno. Relativna občutljivost očesa pri 400 nm je 0 in linearno narašča do 1 pri 500 nm. Oko še zazna energijski tok z gostoto $3 \cdot 10^{-9} \text{ W/m}^2$ pri 500 nm.

Transcendentno enačbo za globino reši iterativno.

Iztok Kukman

3. REPUBLIŠKO TEKMOVANJE IZ RAČUNALNIŠTVA ZA OSNOVNOŠOLCE

V prostorih Srednje šole za Računalništvo v Ljubljani je konec aprila 1988 potekalo 3. republiško tekmovanje iz znanja računalništva za osnovnošolce. Tekmovanja se je udeležilo 57 učencev iz vse Slovenije. Tekmovali so v treh skupinah, in sicer:

- najmlajši tekmovalci (1. do 4. razred OŠ) so tekmovali v reševanju nalog v jeziku logo;
- srednja skupina (5. do 6. razred OŠ) je tekmovala iz osnov znanja računalniške tehnike, algoritmov in obvladanja jezika basic in pascal;
- starejša skupina (7. in 8. razred OŠ) je reševala zahtevnejše naloge s pomočjo osebnih računalnikov Partner in Sokol.

Tekmovali so učenci, ki so že predhodno dokazali svoje znanje s področja računalništva na šolskih (136 šol in okoli 3500 učencev) in regijskih tekmovanjih v Mariboru, Novem mestu, Kranju, Ljubljani, Kopru, Celju in Novi Gorici (okoli 200 učencev).

Ob samem tekmovanju je bila zanimiva in privlačna tudi predstavitev strojne in programske opreme slovenskih proizvajalcev, še posebej pa je pritegnil pozornost prenosni računalnik GEPARD z zaslonom na tekoče kristale. Udeleženci tekmovanja so tudi z zanimanjem prisostvovali demonstraciji Radio kluba Triglav Ljubljana in programom za računalnik ATARI.

Organizator tekmovanja je bila ponovno ZOTK Slovenije ob pomoči Fakultete za elektrotehniko Ljubljana, Pedagoške fakultete iz Maribora, Srednje šole za računalništvo Ljubljana in Zavoda za šolstvo SRS.

Tekmovanje so podprli: Iskra Delta, Intertrade, revija MOJ MIKRO, Avto-tehna, Paralele Ljubljana, Institut Jože Štefan. Še posebej se je izkazal KONIM, ki je z lepimi nagradami (mikroračunalniki za najboljše) podprl izvedbo tekmovanja.

Na tekmovanju so bili doseženi naslednji rezultati:

- | | | |
|-------------|-----------|------------------------|
| 1. skupina: | 1. mesto: | Gorazd GERLIČ, Maribor |
| | 2. mesto: | Mitja ŠLENC, Ljubljana |
| | 3. mesto: | Žiga RAMŠAK, Ljubljana |
| 2. skupina: | 1. mesto: | Damjan LANGO, Koper |
| | 2. mesto: | Marko MAČEK, Ljubljana |
| | 3. mesto: | Boris NOVAK, Žiri |
| 3. skupina: | 1. mesto: | Miha PETERNELJ, Kranj |
| | 2. mesto: | Gregor ŠEGA, Ljubljana |
| | 3. mesto: | Uroš MIDIČ, Ljubljana. |

Med šolami je po številu doseženih točk na prvem mestu OŠ 15. DIVIZIJE, Novo mesto, kateri je KONIM podaril eno izmed glavnih nagrad — to je osebni računalnik AMIGA 1000. Tudi ostali udeleženci so prejeli priznanja in lepe nagrade, npr. Commodore 4 plus, Galaksija ipd.

Strokovna komisija, ki je ocenjevala izdelke tekmovalcev je mnenja, da je prikazano znanje na zadovoljivo visokem nivoju. Doseženi rezultati so vzpodbudili vsem mladim, mentorjem, šolam in organizatorjem tekmovanja navkljub mačehovskemu odnosu družbe do opremljanja šol z računalniki.

Ivan Gerlič

Naloge za jezik logo

1. Angleški jezik, ki ga uporabljamo v logu, nekatere moti, saj bi raje uporabljali ukaze za želvo v slovenskem jeziku. Sestavi postopek (proceduro — podprogram) za ukaz FORWARD oz. FD, ki ju prevedi v NAPREJ in NP.
2. Gorazd je za svojega bratca Marka pripravil programa OBZIDJE in ŽAGA, katerih rezultat lahko vidiš na spodnji sliki. Toda, pravilno zapisana programa je pomešal z nepravilnimi. Pomagaj mu med spodaj zapisanimi programi izbrati pravilne (PRAVILNE OBKROŽII!).



```
TO OBZIDJE
  REPEAT 5 [ STOLP ]
END
```

```
TO ŽAGA
  REPEAT 5 [ ZOB ]
END
```

```
TO STOLP
  REPEAT 2 [ FD 15 RT 90 ]
  REPEAT 4 [ FD 15 RT 90 ]
END
```

```
TO ZOB
  RT 30
  FD 10 RT 120 FD 10
  LT 150
END
```

```
TO OBZIDJE
  REPEAT 7 [ STOLP ]
END
```

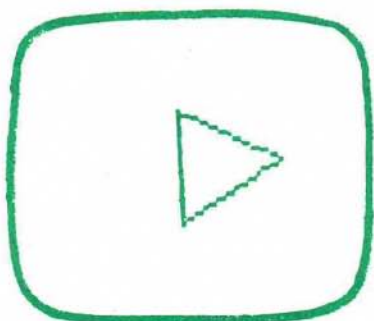
```
TO ŽAGA
  REPEAT 3 [ ZOB ZOB ]
END
```

```
TO STOLP
  REPEAT 2 [ FD 15 RT 90 ]
  REPEAT 2 [ FD 15 LT 90 ]
END
```

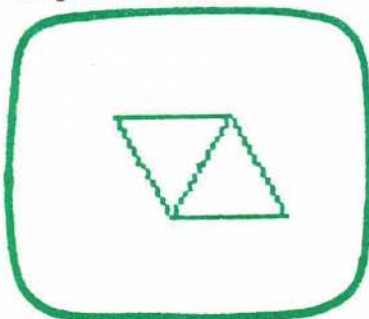
```
TO ZOB
  REPEAT 10 [ FD 10 RT 60 ]
END
```

3. Dobro si oglej spodnje slike in zanje zapiši oz. dopolni programe!

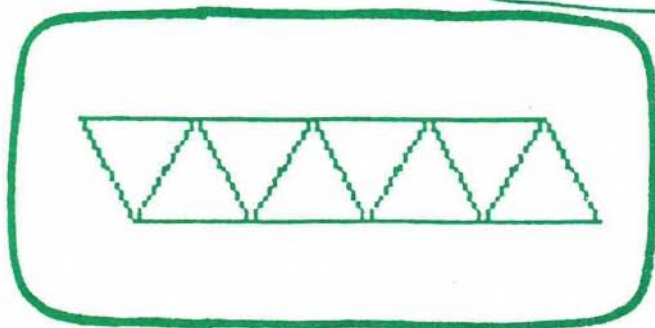
TO TRIKOTNIK: A



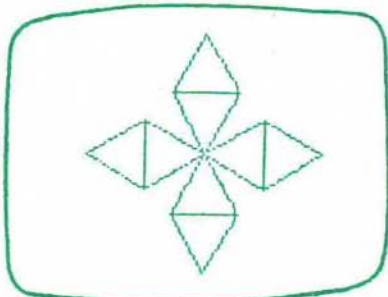
Iz dveh trikotnikov sestavi romb, kot ga vidiš na sliki!



Iz štirih rombov nariši trak!



Iz trikotnikov lahko izrišeš tudi program OKRASEK, ki ga prikazuje slika! Napiši program!

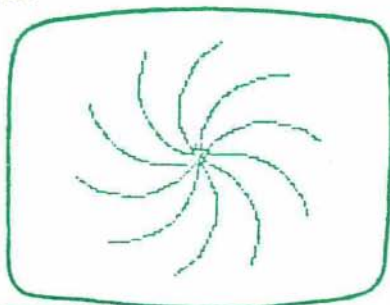


4. S podprogramom (proceduro) LOK lahko napišeš program VETERNICA, ki izriše spodnjo sliko. Opravi to!

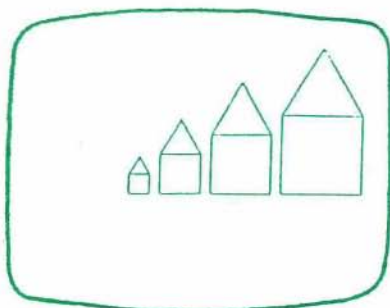
TO LOK : R

REPEAT 9 [FD :R RT 10]

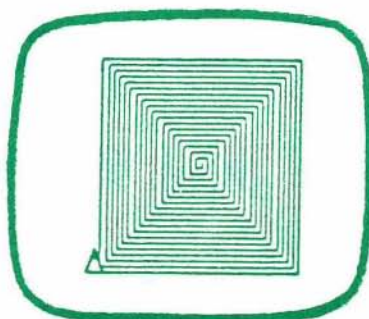
END



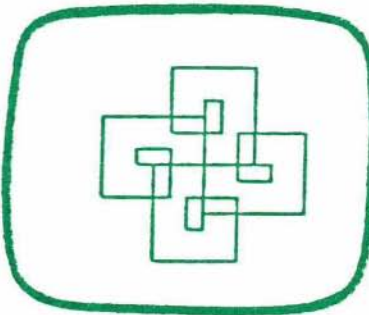
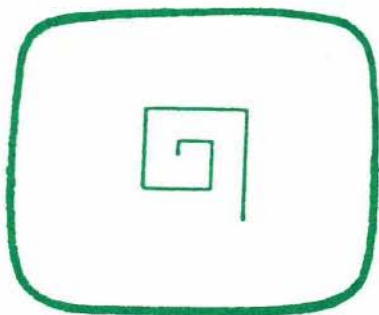
5. Marko je želel narisati hiše, kot to prikazuje spodnja slika. Pomagaj mi pri tem delu!



6. Marku sta bili zelo všeč spodnji sliki, toda ni in ni ju znal narisati. Za pomoč je poprosil brata Gorazda, ki je nekaj časa razmišljal in opazoval sliki, nato pa vskliknil: "Seveda, z rekurzijo je to zelo enostavno!"
S pomočjo rekurzije tudi ti reši ta dva problema!

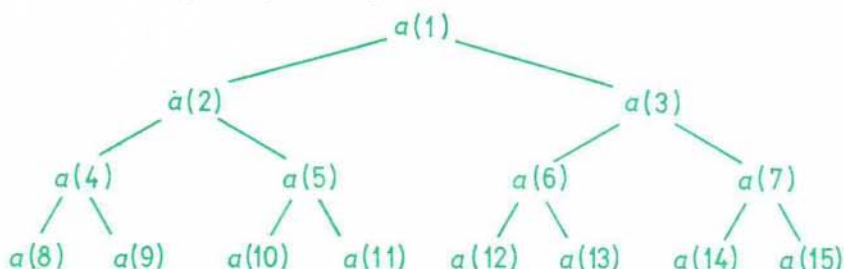


7. S pomočjo rekurzije (torej brez ukaza REPEAT) napiši tudi program iz naloge 5!
8. Dobro si oglej spodnja okrasa in zanju zapiši program!



Naloge za 5.–6. razred

- Napiši program, ki prečita dolžino stranic pravokotnika A in B na eno decimalno natančno. Pravokotnik pričnemo barvati s kvadrati 3×3 mm v levem spodnjem vogalu pravokotnika. Barvni kvadrati vključimo v pravokotnik, če je več kot polovica površine kvadrata znotraj pravokotnika. Program naj izpiše število potrebnih kvadratov, da pravokotnik čim bolj izpolnimo.
- Založba takole izračuna ceno knjige:
 - osnovna cena broširane knjige je 2500 din in še po 90 din za vsako stran;
 - če število strani prekorjači 300 strani, je potrebno uporabiti močnejšo vezavo, kar poveča ceno knjige še za 1200 din;
 - če je število strani večje od 550 strani, je potrebna še kvalitetnejša vezava, kar poveča ceno knjige še za 1000 din.
 Sestavi program, ki bo prebral število strani in izpisal ceno knjige.
- Zamislmo si drevo, sestavljeno iz elementov od $a(1)$ do $a(N)$. Sliko drevesa za $N = 15$ prikazuje naslednja slika:



Sestavi program, ki prebere, v kateri vrstici in na katerem mestu v vrstici se nahaja element ter izračuna in izpiše indeks elementa na tem mestu.

Primer: 2. element v 3. vrstici ima indeks 5.

- Smučarske skoke ocenjuje 5 sodnikov, z ocenami od 1 do 20. V skupni oceni se najmanjša in največja ocena ne upoštevata, iz ostalih pa izračunamo povprečno oceno.

Napiši program, ki prebere vse ocene in izpiše skupno oceno skoka.

- Napiši program, ki prebere liho število N , ki ni večje od 71, in izriše spodnji lik v N vrsticah.

Primer: $N = 11$



Naloge za 7.—8. razred

1. Imamo tarčo, sestavljeno iz treh krogov s središčem v koordinatnem izhodišču. Napiši program, ki bo prečital 10 strel v obliki podanih koordinat x , y in izračunal rezultat v točkah. Zadelek na krožnico se šteje k notranjemu krogu.

Premeri krogov so 5, 15 in 25 centimetrov. Zadelek v notranji krog prinese 10 točk, v srednji krog 5 točk in v zunanji krog 3 točke.

2. Podjetje za prodajo sladoleda je postavilo prodajna mesta ob križiščih 8 ulic. Ulice so oštevilčene s števkami od 1 do 8. Število prodanih sladole-
dov na posameznem križišču si vsakodnevno zapisujemo.

Napiši program, ki bo prebral enodnevne podatke o prodaji sladoleda in izpisal, na kateri ulici so prodali največ sladoleda. Če je takih ulic več, naj izpiše vse. Razpored ulic prikazuje slika.

	ulica 1		ulica 2		ulica 3		ulica 4	
ulica 5								
ulica 6								
ulica 7								
ulica 8								

- Ob prihodu avtobusa na postajo vtipkamo v računalnik čas prihoda in čas postanka avtobusa na postaji. Napiši program, ki izračuna in izpiše čas odhoda avtobusa z avtobusne postaje.

Primer:	prihod	postanek	odhod
	10 30	1 50	12 20
	23 50	0 15	0 05

Podatek 10 30 pomeni, da je ura 10 in 30 minut.

- Zamislimo si drevo, sestavljeno iz elementov od $a(1)$ do $a(N)$. Sliko drevesa za $N = 15$ prikazuje slika pri 3. nalogi za 5.–6. razred. Sestavi program, ki prebere zaporedno številko elementa in izpiše, v kateri vrsti se ta element nahaja in na katerem mestu v tej vrsti se ta element nahaja.
- Ozek most so opremili s semaforjem in senzorjem. Klic funkcije SEMAFOR vrne vrednost 1, če gori zelena luč, in vrednost 0, če gori rdeča luč. Klic funkcije SENZOR vrne vrednost 1, če je avtomobil ob semaforju, in vrednost 0, če avtomobila ni ob semaforju. Napiši program, ki bo ob koncu vsakega zelenega intervala izpisal število avtomobilov, ki so prečkali reko.

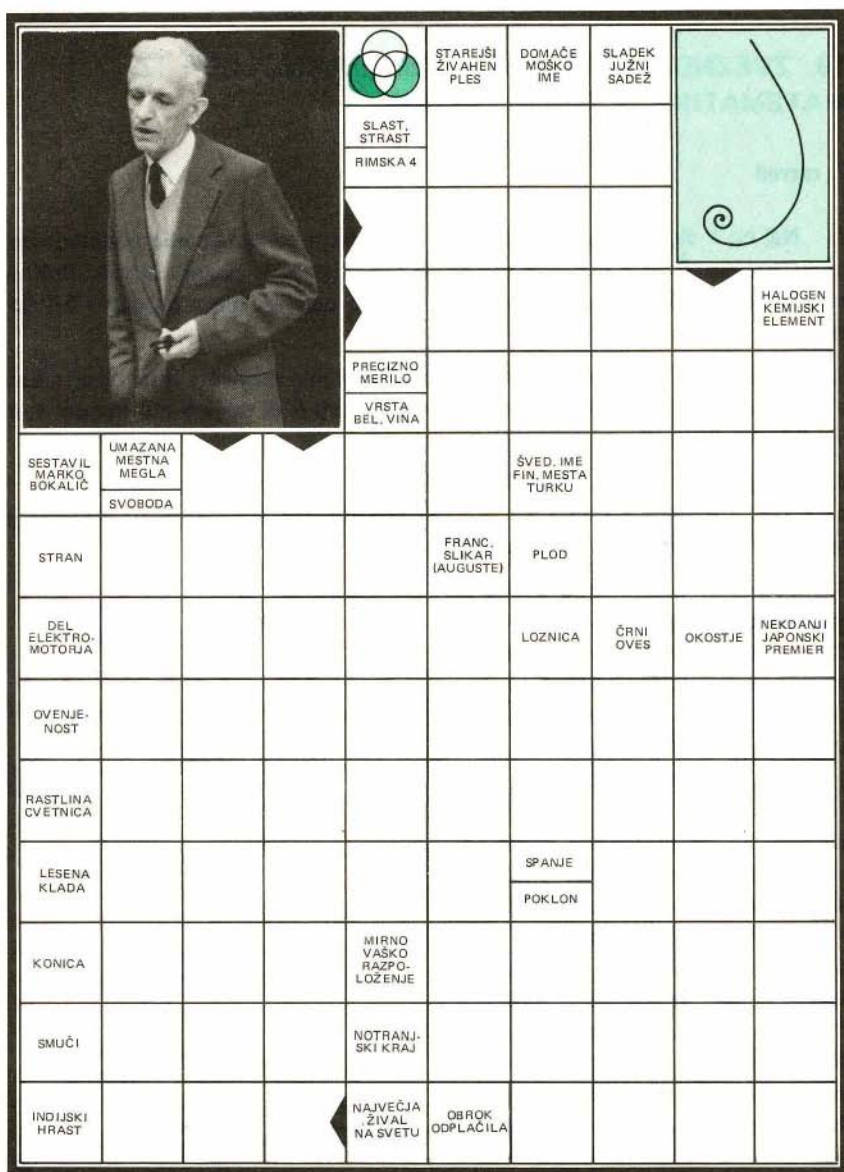
PRESEK — list za mlade matematike, fizike, astronome in računalnikarje 16. letnik, šolsko leto 1988/89, številka 3, strani 129 — 192

UREDNIŠKI ODBOR: Vladimir Batagelj, Dušica Boben (pisma bralcev, stavljenje teksta), Darjo Felda (tekmovanja iz matematike), Franci Forstnerič, Bojan Golli (tekmovanja iz fizike), Marjan Hribar, Damjan Kobal (razvedrilo), Jože Kotnik, Edvard Kramar, Sandi Klavžar (računalništvo), Andrej Kmet, Peter Križan (fizika), Boris Lavrič (matematika, odgovorni urednik), Gorazd Lešnjak, Matija Lokar, Franci Oblak, Peter Petek (premisli in reši), Pavla Ranzinger (astronomija), Tomaž Skulj, Marjan Smerke (svetovalec za fotografijo), Niko Prijatelj (glavni urednik), Tanja Bečan (jezikovni pregled), Miha Štalec (risbe), Ciril Velkovich (urednik, nove knjige, novice).

Dopise pošiljajte in list naročajte na naslov: Društvo matematikov, fizikov in astronomov SRS — Podružnica Ljubljana — Komisija za tisk, Presek, Jadranska c. 19, 61111 Ljubljana, p.p. 64, tel. (061) 265–061/53, št. žiro računa 50101–678–47233. Naročnina za šolsko leto 1988/89, vplačana do 31. 12. 1988, je za posamezne naročnike 10.000.— din, za člane društva 8000.— din, za skupinska naročila šol 5000.— din, posamezna številka 2000.— din (1500.— din).

List sofinancirajo Izobraževalna, Kulturna in Raziskovalna skupnost Slovenije
Ofset tisk Časopisno in grafično podjetje DELO, Ljubljana
© 1988 Društvo matematikov, fizikov in astronomov SRS — 930

SLIKOVNA KRIŽANKA – ČASTNI ČLAN DRUŠTVA



19. ZVEZNO TEKMOVANJE OSNOVNOŠOLCEV IZ MATEMATIKE — Rešitev s str. 168

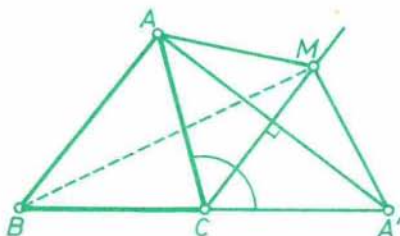
7. razred

1. Naj bo k skupna količina blaga in c planirana cena. Iz danih podatkov dobimo enačbo $\frac{k}{6} \cdot 0,2c + \frac{k}{3} \cdot x \cdot c = \frac{k}{2} \cdot 0,1c$, kjer je x iskani ulomek. Rešitev enačbe je $x = 0,05$, kar pomeni, da morajo ostanek blaga prodati s 5% dobičkom.

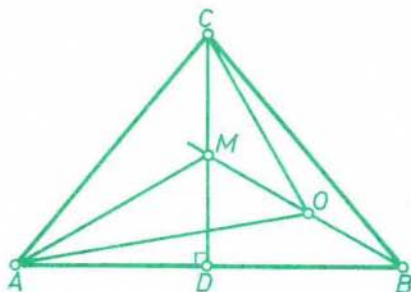
2. Vsota cifer števila n je $6+0+7 = 420$. Torej je n deljivo s 3 in zato je tudi $n - 27$ deljivo s 3. Ker 420 ni deljivo z 9, tudi n ni deljivo z 9 in zato tudi $n + 27$ ni deljivo z 9.

3. Ker je $1988 = 2 \cdot 2 \cdot 7 \cdot 71$ in $2 + 2 + 7 + 71 = 82$ je ena izmed rešitev $n_1 \cdot n_2 \dots \cdot n_k = 2 \cdot 2 \cdot 7 \cdot 71 \cdot 1 \cdot 1 \dots \cdot 1$ (1906 enic). Rešitev je 10 (kolikor je različnih načinov razcepa števila 1988).

4. Točko A prezrcalimo preko simetrale zunanega kota ob C , zato je $\overline{CA'} = \overline{CA}$. Lahko je dokazati, da sta trikotnika $\triangle ACM$ in $\triangle A'MC$ skladna, zato je $\overline{A'M} = \overline{AM}$. Odtod dobimo $\overline{MA} + \overline{MB} = \overline{MA'} + \overline{MB} > \overline{BA'} = \overline{BC} + \overline{CA'} = \overline{BC} + \overline{AC}$



5. Naj bo M presečišče višine CD trikotnika in premice BO . Trikotnik ABM je enakokrak, zato je $\sphericalangle MAB = \sphericalangle MBA = 30^\circ$. Tako je tudi $\sphericalangle CAM = 20^\circ = \sphericalangle MAO$. Poleg tega je $\sphericalangle ACD = 40^\circ$ in $\sphericalangle AOM = \sphericalangle OAB + \sphericalangle OBA = 40^\circ$. Trikotnika AOM in AMC imata po dva enaka kota in skupno stranico $\overline{AM}$, zato sta skladna. Torej velja $\overline{AO} = \overline{AC}$ in zaradi $\sphericalangle CAO = 40^\circ$ dobimo $\sphericalangle ACO = 70^\circ$.

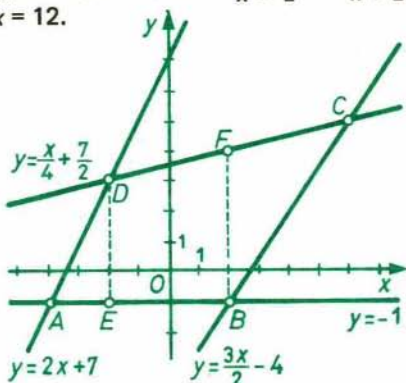


8. razred

1. Označimo razdaljo med A in B z x , hitrost ladij z v_1 in v_2 , čas do prvega srečanja s t_1 in čas od prvega do drugega srečanja s t_2 . Tedaj je $v_1 t_1 = 5$, $v_2 t_1 = x - 5$, $v_1 t_2 = 3 + (x - 5)$ in $v_2 t_2 = 5 + (x - 3)$. Iz $\frac{5}{x-2} = \frac{x-5}{x+2}$ dobimo $12x - x^2 = 0$ in zaradi $x > 0$, $x = 12$.

2. Označimo oglišča z A, B, C in D . Njihove koordinate so $A(-4, -1)$, $B(2, -1)$, $C(6, 5)$ in $D(-2, 3)$.

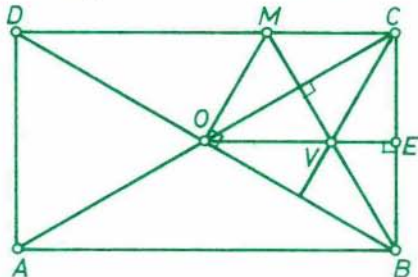
$$\begin{aligned} p &= \frac{1}{2} \overline{AE} \cdot \overline{ED} + \frac{1}{2} (\overline{ED} + \overline{BF}) \cdot \overline{EB} + \\ &+ \frac{1}{2} \overline{BF} \cdot \overline{v_{BF}} = \frac{2 \cdot 4}{2} + \frac{4+5}{2} \cdot 4 + \\ &+ \frac{5 \cdot 4}{2} = 32. \end{aligned}$$



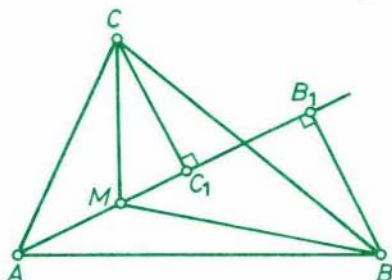
$$\begin{aligned} 3. \quad 111 \dots 11 - 222 \dots 22 &= \frac{1}{9} (10^{100} - 1) - \frac{1}{9} (10^{50} - 1) = \\ &= \frac{1}{9} (10^{100} - 1 - 2 \cdot 10^{50} + 2) = \frac{1}{9} (10^{2 \cdot 50} - 2 \cdot 10^{50} + 1) = \left(\frac{10^{50} - 1}{3} \right)^2 \end{aligned}$$

Ker je $10^{50} - 1$ deljivo z 9, je deljivo tudi s 3 in je s tem trditev dokazana.

4. Naj bo E središče stranice BC . Tedaj je $OE \perp BC$. Točka V (glej sliko) je višinska točka trikotnika OBC , zato je tudi $CV \perp OB$. OV je tudi srednjica trikotnika DBM , zato $OV = \frac{1}{2} DM = MC$. Štirikotnik $OVCM$ je tedaj paralelogram, zato $OM \parallel CV$ in odtod $OM \perp OB$.



5. Naj bosta B_1 in C_1 nožišči pravokotnic iz B in C na premico AM . Tedaj je $p_{ABM} = \frac{1}{2} \overline{AM} \cdot \overline{BB_1}$ in $p_{ACM} = \frac{1}{2} \overline{AM} \cdot \overline{CC_1}$, odtod pa $p_{ABM} + p_{ACM} = \frac{1}{2} \overline{AM} (\overline{BB_1} + \overline{CC_1}) \leq \frac{1}{2} \overline{AM} \cdot \overline{BC}$. Podobno dobimo $p_{ACM} + p_{BCM} \leq \frac{1}{2} \overline{CM} \cdot \overline{AB}$ in $p_{ABM} + p_{BCM} \leq \frac{1}{2} \overline{BM} \cdot \overline{AC}$.



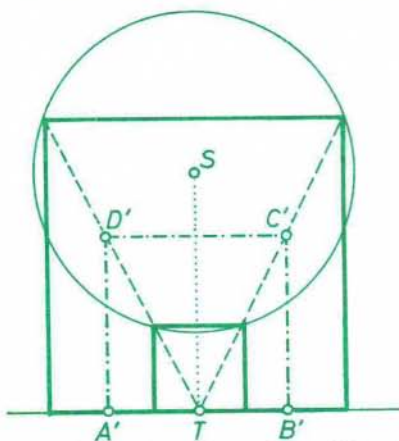
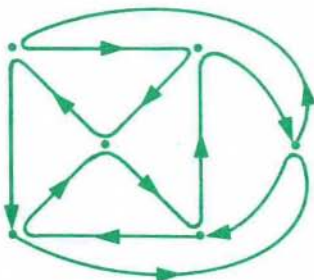
Ko seštejemo zadnje tri ocene, dobimo neenakost, ki jo je bilo treba dokazati.

Prvi letnik

- Opazimo, da so faktorji simetrični glede na število 1240, zato izberemo $x = 1240$ in pišemo

$$(x-2)(x-5)(x+2)(x+5) - (x-1)(x-6)(x+1)(x+6) - 8(x-3)(x+3) = \\ = (x^2-4)(x^2-25) - (x^2-1)(x^2-36) - 8x^2+72 = 136$$

- Štirimestno število, v katerem je prva cifra enaka tretji, druga pa četrti, je vedno deljivo s 101, kar se vidi iz: $1000a + 100b + 10a + b = 101(10a + b)$.
- Če z x označimo delež, ki ga v enem dnevu opravi človek, in z y delež, ki ga prispeva traktor, velja: $12(30x + 2y) = 1$ in $10(20x + 3y) = 1$. Rešitev sistema je $x = 1/1000$ in $y = 2/75$. Odtod sklepamo, da opravi 40 ljudi z enim traktorjem v enem dnevu $1/15$ dela, torej pospravijo krompir v 15 dneh.
- Nalogo prevedemo v ravninski problem, če ene od stranskih robov piramide zamenjamo s polovicami diagonal kvadrata, druge pa s krivuljami od oglišč kvadrata do neke točke zunaj kvadrata.



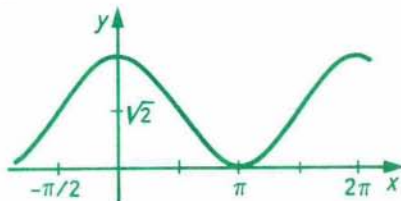
Drugi letnik

- Najprej načrtamo pravokotnico na dano premico iz središča kroga. Denimo, da ta seka premico v točki T . Izberimo točki A' in B' na premici tako, da je T razpolovišče daljice $A'B'$, in načrtajmo kvadrat $A'B'C'D'$, ki ga podobnostno povečamo oziroma zmanjšamo.

- Rešimo sistem $2x + 3y - 13 = 0$, $x - y + 1 = 0$, pa imamo $a = (2, 3, 1)$.
- Dolžina vektorja a je $\sqrt{3}$, dolžina b pa 3, skalarni produkt $a \cdot b = -9/2$. Vektor $s = (b - 5a)/6$, zato $s \cdot s = (b \cdot b - 10a \cdot b + 25a \cdot a)/36$ in odtod dobimo dolžino vektorja $s : \sqrt{129}/6$.
- Isto kot 4. naloga za prvi letnik.

Tretji letnik

1. Ker ne gre skozi izhodišče, je $a \neq -1/4$. Druga koordinata temena mora biti 4, zato $-(4 + 4a(4a + 1))/(4a) = 4$, kar da $a = -1$.
2. Dano enačbo kvadriramo: $\sin^2(a/2) + 2 \sin(a/2) \cos(a/2) + \cos^2(a/2) = 5/9$, od koder dobimo $\sin a = -4/9$.
3. a) Ker je $y = 3 + 4 \cos x + \cos 2x = 3 + 4 \cos x + \cos^2 x - \sin^2 x = 2(1 + 2 \cos x + \cos^2 x) = 2(1 + \cos x)^2$, funkcija ne zavzema negativne vrednosti.
b) Upoštevajmo točko a), pa imamo $y = (1 + \cos x) \cdot \sqrt{2}$
4. Za pravilno šeststrano pokončno piramido z osnovnim robom a in višino v je prostornina $V_p = a^2 v \sqrt{3}/2$, njej včrtan stožec pa ima prostornino $V_s = \pi r^2 v/3 = \pi a^2 v/4$. Torej je razmerje $V_s/V_p = \pi \sqrt{3}/6$. Poglejmo še, kako je s površinama: $P_p = 3a(a \sqrt{3}/2 + v_1)$ in $P_s = \pi r(r + s) = \pi a \sqrt{3} (a \sqrt{3}/2 + v_1)/2$ ter $P_s/P_p = \pi \sqrt{3}/6$ (tu je v formulah uporabljena oznaka v_1 za stransko višino piramide in s za stranico stožca).



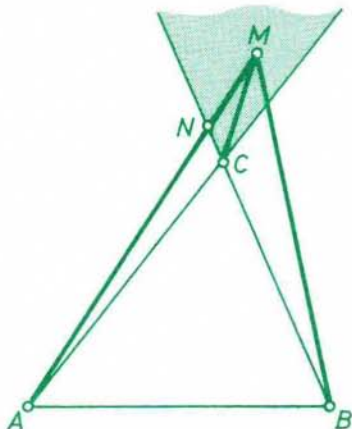
Četrti letnik

1. Iz pogojev naloge dobimo $b = a + d$ in $c = a + 2d$ (aritmetično zaporedje). Diskriminanta enačbe je zato $D = 4(a^2 + 2ad + d^2) - 4a(a + 2d) = 4d^2 \geq 0$, zato ima enačba realne rešitve.
2. Členi zapredja b_n se končajo s cifro 4 ali 9, zato so skupni členi vsi kvadrati naravnih števil, ki se končajo s 4 ali 9. Izbrati moramo torej $n = 10k + 2$, $10k + 3$, $10k + 7$ ali $10k + 8$ ($k \geq 0$) v a_n , če dopuščamo možnost $b_0 = 4$, sicer pa a_2 izvajamo.
3. Če s p in q označimo koordinati središča, z r pa polmer krožnice, potem velja: $p = (x_1 + x_2)/2$, $q = (y_1 + y_2)/2$ in $r^2 = (x_2 - x_1)^2/4 + (y_2 - y_1)^2/4$. To upoštevamo v enačbi krožnice $(x - p)^2 + (y - q)^2 = r^2$, združimo člene, ki vsebujejo x , x_1 in x_2 , in člene, ki vsebujejo y , y_1 in y_2 , razstavimo razliki kvadratov (npr. $(x - (x_1 + x_2)/2)^2 - (x_2 - x_1)^2/4 = (x - x_2)(x - x_1)$ in podobno za y). Pa je rezultat tu.
4. Najprej izračunamo dolžino katete BD v trikotniku ABD in ugotovimo, da je $BD = AC$, zato sta AB in CD vzporedni. Poleg tega je ploščina trikotnika ADC enaka ploščini trikotnika SDC , kjer S pomeni središče daljice AB . Naloga se torej prevede v iskanje ploščine deltoida $SDTC$, za katero pa lahko z uporabo trigonometrije ali podobnosti ugotovimo, da meri $175/6$.

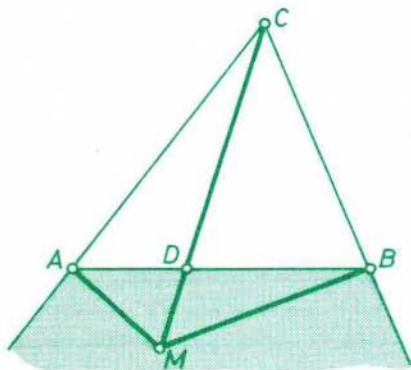
ODGOVOR na nagradno vprašanje iz P–XV/5, str. 265

Z nagrado ne bo nič, saj tudi z odgovori tokrat ni bilo nič. Zato skupaj razmislimo o postavljenih vprašanjih.

Dokažimo najprej, da točka M ne more ležati zunaj trikotnika. Na slikah 1

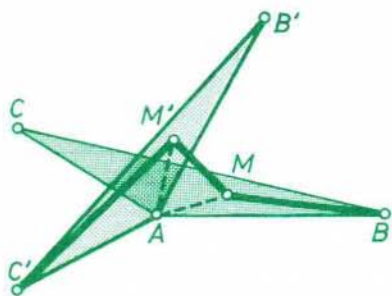


Slika 1

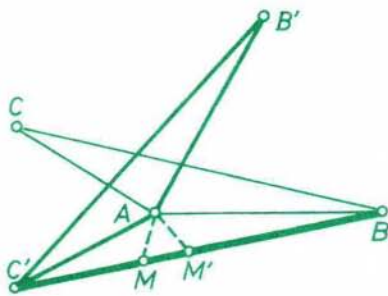


Slika 2

in 2 sta narisana oba značilna položaja točke M zunaj trikotnika ABC . V prvem primeru nam trditev potrjujejo ocene



Slika 3



Slika 4

$$\overline{AM} + \overline{BM} + \overline{CM} > \overline{AM} + \overline{BM} \geq \overline{AN} + \overline{BN} \geq \overline{AC} + \overline{BC} + \overline{CC}$$

v drugem pa jo dokazuje očitna neenakost

$$\overline{AM} + \overline{BM} + \overline{CM} > \overline{AD} + \overline{BD} + \overline{CD}$$

Denimo, da velja $\angle CAB > 120^\circ$. Iskana točka M po prejšnjem leži v trikotniku ABC (ali na njegovem robu), M' pa v trikotniku $AB'C'$. Zato velja (glej sliko 3) ocena

$$\overline{AM} + \overline{BM} + \overline{CM} = \overline{BM} + \overline{MM'} + \overline{M'C} \geq \overline{AA'} + \overline{BA'} + \overline{CA'}$$

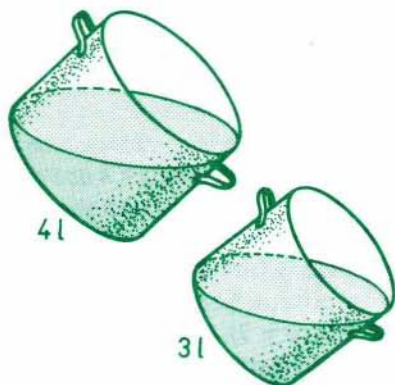
torej M sovпада z ogliščem A .

Če naj bi točki M in M' (v tem primeru) ležali na daljici BC , kot je zapisano v dokazu (P–XV/5, str. 264), bi bili razvrščeni v "napačnem" zaporedju. Vsota $\overline{AM} + \overline{BM} + \overline{CM}$ bi bila tako za dolžino $2 \cdot \overline{MM'}$ daljša od $\overline{BC'}$ (glej sliko 4).

Boris Lavrič

DVE NALOGE – Rešitev s str. 137

- Na sliki je prikazano, kako dobimo polovico prostornine lonca vode. Potem le še dopolnimo iz večjega manjši lonec do vrha in v večjem loncu ostane želen 1 liter vode.



- Števila iz srednje kolone so potence, katerih osnove so v prvi koloni, eksponenti pa v tretji. Zato manjka $6^2 = 36$.

Dragoljub M. Milošević
prev. Peter Petek

SLIKOVNA KRIŽANKA PODROČJA PRESEKA – Rešitev iz P–2

KRIŽANKA						Slučajno Slovo	MOČNOST JAVNA JEZ	VERIGI KROVI ZA KROVI
 1. PREDSTAVLJENJE 2. PREDSTAVLJENJE 3. PREDSTAVLJENJE 4. PREDSTAVLJENJE 5. PREDSTAVLJENJE 6. PREDSTAVLJENJE 7. PREDSTAVLJENJE 8. PREDSTAVLJENJE 9. PREDSTAVLJENJE 10. PREDSTAVLJENJE 11. PREDSTAVLJENJE 12. PREDSTAVLJENJE 13. PREDSTAVLJENJE 14. PREDSTAVLJENJE 15. PREDSTAVLJENJE 16. PREDSTAVLJENJE 17. PREDSTAVLJENJE 18. PREDSTAVLJENJE 19. PREDSTAVLJENJE 20. PREDSTAVLJENJE 21. PREDSTAVLJENJE 22. PREDSTAVLJENJE 23. PREDSTAVLJENJE 24. PREDSTAVLJENJE 25. PREDSTAVLJENJE 26. PREDSTAVLJENJE 27. PREDSTAVLJENJE 28. PREDSTAVLJENJE 29. PREDSTAVLJENJE 30. PREDSTAVLJENJE 31. PREDSTAVLJENJE 32. PREDSTAVLJENJE 33. PREDSTAVLJENJE 34. PREDSTAVLJENJE 35. PREDSTAVLJENJE 36. PREDSTAVLJENJE 37. PREDSTAVLJENJE 38. PREDSTAVLJENJE 39. PREDSTAVLJENJE 40. PREDSTAVLJENJE 41. PREDSTAVLJENJE 42. PREDSTAVLJENJE 43. PREDSTAVLJENJE 44. PREDSTAVLJENJE 45. PREDSTAVLJENJE 46. PREDSTAVLJENJE 47. PREDSTAVLJENJE 48. PREDSTAVLJENJE 49. PREDSTAVLJENJE 50. PREDSTAVLJENJE 51. PREDSTAVLJENJE 52. PREDSTAVLJENJE 53. PREDSTAVLJENJE 54. PREDSTAVLJENJE 55. PREDSTAVLJENJE 56. PREDSTAVLJENJE 57. PREDSTAVLJENJE 58. PREDSTAVLJENJE 59. PREDSTAVLJENJE 60. PREDSTAVLJENJE 61. PREDSTAVLJENJE 62. PREDSTAVLJENJE 63. PREDSTAVLJENJE 64. PREDSTAVLJENJE 65. PREDSTAVLJENJE 66. PREDSTAVLJENJE 67. PREDSTAVLJENJE 68. PREDSTAVLJENJE 69. PREDSTAVLJENJE 70. PREDSTAVLJENJE 71. PREDSTAVLJENJE 72. PREDSTAVLJENJE 73. PREDSTAVLJENJE 74. PREDSTAVLJENJE 75. PREDSTAVLJENJE 76. PREDSTAVLJENJE 77. PREDSTAVLJENJE 78. PREDSTAVLJENJE 79. PREDSTAVLJENJE 80. PREDSTAVLJENJE 81. PREDSTAVLJENJE 82. PREDSTAVLJENJE 83. PREDSTAVLJENJE 84. PREDSTAVLJENJE 85. PREDSTAVLJENJE 86. PREDSTAVLJENJE 87. PREDSTAVLJENJE 88. PREDSTAVLJENJE 89. PREDSTAVLJENJE 90. PREDSTAVLJENJE 91. PREDSTAVLJENJE 92. PREDSTAVLJENJE 93. PREDSTAVLJENJE 94. PREDSTAVLJENJE 95. PREDSTAVLJENJE 96. PREDSTAVLJENJE 97. PREDSTAVLJENJE 98. PREDSTAVLJENJE 99. PREDSTAVLJENJE 100. PREDSTAVLJENJE 101. PREDSTAVLJENJE 102. PREDSTAVLJENJE 103. PREDSTAVLJENJE 104. PREDSTAVLJENJE 105. PREDSTAVLJENJE 106. PREDSTAVLJENJE 107. PREDSTAVLJENJE 108. PREDSTAVLJENJE 109. PREDSTAVLJENJE 110. PREDSTAVLJENJE 111. PREDSTAVLJENJE 112. PREDSTAVLJENJE 113. PREDSTAVLJENJE 114. PREDSTAVLJENJE 115. PREDSTAVLJENJE 116. PREDSTAVLJENJE 117. PREDSTAVLJENJE 118. PREDSTAVLJENJE 119. PREDSTAVLJENJE 120. PREDSTAVLJENJE 121. PREDSTAVLJENJE 122. PREDSTAVLJENJE 123. PREDSTAVLJENJE 124. PREDSTAVLJENJE 125. PREDSTAVLJENJE 126. PREDSTAVLJENJE 127. PREDSTAVLJENJE 128. PREDSTAVLJENJE 129. PREDSTAVLJENJE 130. PREDSTAVLJENJE 131. PREDSTAVLJENJE 132. PREDSTAVLJENJE 133. PREDSTAVLJENJE 134. PREDSTAVLJENJE 135. PREDSTAVLJENJE 136. PREDSTAVLJENJE 137. PREDSTAVLJENJE 138. PREDSTAVLJENJE 139. PREDSTAVLJENJE 140. PREDSTAVLJENJE 141. PREDSTAVLJENJE 142. PREDSTAVLJENJE 143. PREDSTAVLJENJE 144. PREDSTAVLJENJE 145. PREDSTAVLJENJE 146. PREDSTAVLJENJE 147. PREDSTAVLJENJE 148. PREDSTAVLJENJE 149. PREDSTAVLJENJE 150. PREDSTAVLJENJE 151. PREDSTAVLJENJE 152. PREDSTAVLJENJE 153. PREDSTAVLJENJE 154. PREDSTAVLJENJE 155. PREDSTAVLJENJE 156. PREDSTAVLJENJE 157. PREDSTAVLJENJE 158. PREDSTAVLJENJE 159. PREDSTAVLJENJE 160. PREDSTAVLJENJE 161. PREDSTAVLJENJE 162. PREDSTAVLJENJE 163. PREDSTAVLJENJE 164. PREDSTAVLJENJE 165. PREDSTAVLJENJE 166. PREDSTAVLJENJE 167. PREDSTAVLJENJE 168. PREDSTAVLJENJE 169. PREDSTAVLJENJE 170. PREDSTAVLJENJE 171. PREDSTAVLJENJE 172. PREDSTAVLJENJE 173. PREDSTAVLJENJE 174. PREDSTAVLJENJE 175. PREDSTAVLJENJE 176. PREDSTAVLJENJE 177. PREDSTAVLJENJE 178. PREDSTAVLJENJE 179. PREDSTAVLJENJE 180. PREDSTAVLJENJE 181. PREDSTAVLJENJE 182. PREDSTAVLJENJE 183. PREDSTAVLJENJE 184. PREDSTAVLJENJE 185. PREDSTAVLJENJE 186. PREDSTAVLJENJE 187. PREDSTAVLJENJE 188. PREDSTAVLJENJE 189. PREDSTAVLJENJE 190. PREDSTAVLJENJE 191. PREDSTAVLJENJE 192. PREDSTAVLJENJE 193. PREDSTAVLJENJE 194. PREDSTAVLJENJE 195. PREDSTAVLJENJE 196. PREDSTAVLJENJE 197. PREDSTAVLJENJE 198. PREDSTAVLJENJE 199. PREDSTAVLJENJE 200. PREDSTAVLJENJE 201. PREDSTAVLJENJE 202. PREDSTAVLJENJE 203. PREDSTAVLJENJE 204. PREDSTAVLJENJE 205. PREDSTAVLJENJE 206. PREDSTAVLJENJE 207. PREDSTAVLJENJE 208. PREDSTAVLJENJE 209. PREDSTAVLJENJE 210. PREDSTAVLJENJE 211. PREDSTAVLJENJE 212. PREDSTAVLJENJE 213. PREDSTAVLJENJE 214. PREDSTAVLJENJE 215. PREDSTAVLJENJE 216. PREDSTAVLJENJE 217. PREDSTAVLJENJE 218. PREDSTAVLJENJE 219. PREDSTAVLJENJE 220. PREDSTAVLJENJE 221. PREDSTAVLJENJE 222. PREDSTAVLJENJE 223. PREDSTAVLJENJE 224. PREDSTAVLJENJE 225. PREDSTAVLJENJE 226. PREDSTAVLJENJE 227. PREDSTAVLJENJE 228. PREDSTAVLJENJE 229. PREDSTAVLJENJE 230. PREDSTAVLJENJE 231. PREDSTAVLJENJE 232. PREDSTAVLJENJE 233. PREDSTAVLJENJE 234. PREDSTAVLJENJE 235. PREDSTAVLJENJE 236. PREDSTAVLJENJE 237. PREDSTAVLJENJE 238. PREDSTAVLJENJE 239. PREDSTAVLJENJE 240. PREDSTAVLJENJE 241. PREDSTAVLJENJE 242. PREDSTAVLJENJE 243. PREDSTAVLJENJE 244. PREDSTAVLJENJE 245. PREDSTAVLJENJE 246. PREDSTAVLJENJE 247. PREDSTAVLJENJE 248. PREDSTAVLJENJE 249. PREDSTAVLJENJE 250. PREDSTAVLJENJE 251. PREDSTAVLJENJE 252. PREDSTAVLJENJE 253. PREDSTAVLJENJE 254. PREDSTAVLJENJE 255. PREDSTAVLJENJE 256. PREDSTAVLJENJE 257. PREDSTAVLJENJE 258. PREDSTAVLJENJE 259. PREDSTAVLJENJE 260. PREDSTAVLJENJE 261. PREDSTAVLJENJE 262. PREDSTAVLJENJE 263. PREDSTAVLJENJE 264. PREDSTAVLJENJE 265. PREDSTAVLJENJE 266. PREDSTAVLJENJE 267. PREDSTAVLJENJE 268. PREDSTAVLJENJE 269. PREDSTAVLJENJE 270. PREDSTAVLJENJE 271. PREDSTAVLJENJE 272. PREDSTAVLJENJE 273. PREDSTAVLJENJE 274. PREDSTAVLJENJE 275. PREDSTAVLJENJE 276. PREDSTAVLJENJE 277. PREDSTAVLJENJE 278. PREDSTAVLJENJE 279. PREDSTAVLJENJE 280. PREDSTAVLJENJE 281. PREDSTAVLJENJE 282. PREDSTAVLJENJE 283. PREDSTAVLJENJE 284. PREDSTAVLJENJE 285. PREDSTAVLJENJE 286. PREDSTAVLJENJE 287. PREDSTAVLJENJE 288. PREDSTAVLJENJE 289. PREDSTAVLJENJE 290. PREDSTAVLJENJE 291. PREDSTAVLJENJE 292. PREDSTAVLJENJE 293. PREDSTAVLJENJE 294. PREDSTAVLJENJE 295. PREDSTAVLJENJE 296. PREDSTAVLJENJE 297. PREDSTAVLJENJE 298. PREDSTAVLJENJE 299. PREDSTAVLJENJE 300. PREDSTAVLJENJE 301. PREDSTAVLJENJE 302. PREDSTAVLJENJE 303. PREDSTAVLJENJE 304. PREDSTAVLJENJE 305. PREDSTAVLJENJE 306. PREDSTAVLJENJE 307. PREDSTAVLJENJE 308. PREDSTAVLJENJE 309. PREDSTAVLJENJE 310. PREDSTAVLJENJE 311. PREDSTAVLJENJE 312. PREDSTAVLJENJE 313. PREDSTAVLJENJE 314. PREDSTAVLJENJE 315. PREDSTAVLJENJE 316. PREDSTAVLJENJE 317. PREDSTAVLJENJE 318. PREDSTAVLJENJE 319. PREDSTAVLJENJE 320. PREDSTAVLJENJE 321. PREDSTAVLJENJE 322. PREDSTAVLJENJE 323. PREDSTAVLJENJE 324. PREDSTAVLJENJE 325. PREDSTAVLJENJE 326. PREDSTAVLJENJE 327. PREDSTAVLJENJE 328. PREDSTAVLJENJE 329. PREDSTAVLJENJE 330. PREDSTAVLJENJE 331. PREDSTAVLJENJE 332. PREDSTAVLJENJE 333. PREDSTAVLJENJE 334. PREDSTAVLJENJE 335. PREDSTAVLJENJE 336. PREDSTAVLJENJE 337. PREDSTAVLJENJE 338. PREDSTAVLJENJE 339. PREDSTAVLJENJE 340. PREDSTAVLJENJE 341. PREDSTAVLJENJE 342. PREDSTAVLJENJE 343. PREDSTAVLJENJE 344. PREDSTAVLJENJE 345. PREDSTAVLJENJE 346. PREDSTAVLJENJE 347. PREDSTAVLJENJE 348. PREDSTAVLJENJE 349. PREDSTAVLJENJE 350. PREDSTAVLJENJE 351. PREDSTAVLJENJE 352. PREDSTAVLJENJE 353. PREDSTAVLJENJE 354. PREDSTAVLJENJE 355. PREDSTAVLJENJE 356. PREDSTAVLJENJE 357. PREDSTAVLJENJE 358. PREDSTAVLJENJE 359. PREDSTAVLJENJE 360. PREDSTAVLJENJE 361. PREDSTAVLJENJE 362. PREDSTAVLJENJE 363. PREDSTAVLJENJE 364. PREDSTAVLJENJE 365. PREDSTAVLJENJE 366. PREDSTAVLJENJE 367. PREDSTAVLJENJE 368. PREDSTAVLJENJE 369. PREDSTAVLJENJE 370. PREDSTAVLJENJE 371. PREDSTAVLJENJE 372. PREDSTAVLJENJE 373. PREDSTAVLJENJE 374. PREDSTAVLJENJE 375. PREDSTAVLJENJE 376. PREDSTAVLJENJE 377. PREDSTAVLJENJE 378. PREDSTAVLJENJE 379. PREDSTAVLJENJE 380. PREDSTAVLJENJE 381. PREDSTAVLJENJE 382. PREDSTAVLJENJE 383. PREDSTAVLJENJE 384. PREDSTAVLJENJE 385. PREDSTAVLJENJE 386. PREDSTAVLJENJE 387. PREDSTAVLJENJE 388. PREDSTAVLJENJE 389. PREDSTAVLJENJE 390. PREDSTAVLJENJE 391. PREDSTAVLJENJE 392. PREDSTAVLJENJE 393. PREDSTAVLJENJE 394. PREDSTAVLJENJE 395. PREDSTAVLJENJE 396. PREDSTAVLJENJE 397. PREDSTAVLJENJE 398. PREDSTAVLJENJE 399. PREDSTAVLJENJE 400. PREDSTAVLJENJE 401. PREDSTAVLJENJE 402. PREDSTAVLJENJE 403. PREDSTAVLJENJE 404. PREDSTAVLJENJE 405. PREDSTAVLJENJE 406. PREDSTAVLJENJE 407. PREDSTAVLJENJE 408. PREDSTAVLJENJE 409. PREDSTAVLJENJE 410. PREDSTAVLJENJE 411. PREDSTAVLJENJE 412. PREDSTAVLJENJE 413. PREDSTAVLJENJE 414. PREDSTAVLJENJE 415. PREDSTAVLJENJE 416. PREDSTAVLJENJE 417. PREDSTAVLJENJE 418. PREDSTAVLJENJE 419. PREDSTAVLJENJE 420. PREDSTAVLJENJE 421. PREDSTAVLJENJE 422. PREDSTAVLJENJE 423. PREDSTAVLJENJE 424. PREDSTAVLJENJE 425. PREDSTAVLJENJE 426. PREDSTAVLJENJE 427. PREDSTAVLJENJE 428. PREDSTAVLJENJE 429. PREDSTAVLJENJE 430. PREDSTAVLJENJE 431. PREDSTAVLJENJE 432. PREDSTAVLJENJE 433. PREDSTAVLJENJE 434. PREDSTAVLJENJE 435. PREDSTAVLJENJE 436. PREDSTAVLJENJE 437. PREDSTAVLJENJE 438. PREDSTAVLJENJE 439. PREDSTAVLJENJE 440. PREDSTAVLJENJE 441. PREDSTAVLJENJE 442. PREDSTAVLJENJE 443. PREDSTAVLJENJE 444. PREDSTAVLJENJE 445. PREDSTAVLJENJE 446. PREDSTAVLJENJE 447. PREDSTAVLJENJE 448. PREDSTAVLJENJE 449. PREDSTAVLJENJE 450. PREDSTAVLJENJE 451. PREDSTAVLJENJE 452. PREDSTAVLJENJE 453. PREDSTAVLJENJE 454. PREDSTAVLJENJE 455. PREDSTAVLJENJE 456. PREDSTAVLJENJE 457. PREDSTAVLJENJE 458. PREDSTAVLJENJE 459. PREDSTAVLJENJE 460. PREDSTAVLJENJE 461. PREDSTAVLJENJE 462. PREDSTAVLJENJE 463. PREDSTAVLJENJE 464. PREDSTAVLJENJE 465. PREDSTAVLJENJE 466. PREDSTAVLJENJE 467. PREDSTAVLJENJE 468. PREDSTAVLJENJE 469. PREDSTAVLJENJE 470. PREDSTAVLJENJE 471. PREDSTAVLJENJE 472. PREDSTAVLJENJE 473. PREDSTAVLJENJE 474. PREDSTAVLJENJE 475. PREDSTAVLJENJE 476. PREDSTAVLJENJE 477. PREDSTAVLJENJE 478. PREDSTAVLJENJE 479. PREDSTAVLJENJE 480. PREDSTAVLJENJE 481. PREDSTAVLJENJE 482. PREDSTAVLJENJE 483. PREDSTAVLJENJE 484. PREDSTAVLJENJE 485. PREDSTAVLJENJE 486. PREDSTAVLJENJE 487. PREDSTAVLJENJE 488. PREDSTAVLJENJE 489. PREDSTAVLJENJE 490. PREDSTAVLJENJE 491. PREDSTAVLJENJE 492. PREDSTAVLJENJE 493. PREDSTAVLJENJE 494. PREDSTAVLJENJE 495. PREDSTAVLJENJE 496. PREDSTAVLJENJE 497. PREDSTAVLJENJE 498. PREDSTAVLJENJE 499. PREDSTAVLJENJE 500. PREDSTAVLJENJE 501. PREDSTAVLJENJE 502. PREDSTAVLJENJE 503. PREDSTAVLJENJE 504. PREDSTAVLJENJE 505. PREDSTAVLJENJE 506. PREDSTAVLJENJE 507. PREDSTAVLJENJE 508. PREDSTAVLJENJE 509. PREDSTAVLJENJE 510. PREDSTAVLJENJE 511. PREDSTAVLJENJE 512. PREDSTAVLJENJE 513. PREDSTAVLJENJE 514. PREDSTAVLJENJE 515. PREDSTAVLJENJE 516. PREDSTAVLJENJE 517. PREDSTAVLJENJE 518. PREDSTAVLJENJE 519. PREDSTAVLJENJE 520. PREDSTAVLJENJE 521. PREDSTAVLJENJE 522. PREDSTAVLJENJE 523. PREDSTAVLJENJE 524. PREDSTAVLJENJE 525. PREDSTAVLJENJE 526. PREDSTAVLJENJE 527. PREDSTAVLJENJE 528. PREDSTAVLJENJE 529. PREDSTAVLJENJE 530. PREDSTAVLJENJE 531. PREDSTAVLJENJE 532. PREDSTAVLJENJE 533. PREDSTAVLJENJE 534. PREDSTAVLJENJE 535. PREDSTAVLJENJE 536. PREDSTAVLJENJE 537. PREDSTAVLJENJE 538. PREDSTAVLJENJE 539. PREDSTAVLJENJE 540. PREDSTAVLJENJE 541. PREDSTAVLJENJE 542. PREDSTAVLJENJE 543. PREDSTAVLJENJE 544. PREDSTAVLJENJE 545. PREDSTAVLJENJE 546. PREDSTAVLJENJE 547. PREDSTAVLJENJE 548. PREDSTAVLJENJE 549. PREDSTAVLJENJE 550. PREDSTAVLJENJE 551. PREDSTAVLJENJE 552. PREDSTAVLJENJE 553. PREDSTAVLJENJE 554. PREDSTAVLJENJE 555. PREDSTAVLJENJE 556. PREDSTAVLJENJE 557. PREDSTAVLJENJE 558. PREDSTAVLJENJE 559. PREDSTAVLJENJE 560. PREDSTAVLJENJE 561. PREDSTAVLJENJE 562. PREDSTAVLJENJE 563. PREDSTAVLJENJE 564. PREDSTAVLJENJE 565. PREDSTAVLJENJE 566. PREDSTAVLJENJE 567. PREDSTAVLJENJE 568. PREDSTAVLJENJE 569. PREDSTAVLJENJE 570. PREDSTAVLJENJE 571. PREDSTAVLJENJE 572. PREDSTAVLJENJE 573. PREDSTAVLJENJE 574. PREDSTAVLJENJE 575. PREDSTAVLJENJE 576. PREDSTAVLJENJE 577. PREDSTAVLJENJE 578. PREDSTAVLJENJE 579. PREDSTAVLJENJE 580. PREDSTAVLJENJE 581. PREDSTAVLJENJE 582. PREDSTAVLJENJE 583. PREDSTAVLJENJE 584. PREDSTAVLJENJE 585. PREDSTAVLJENJE 586. PREDSTAVLJENJE 587. PREDSTAVLJENJE 588. PREDSTAVLJENJE 589. PREDSTAVLJENJE 590. PREDSTAVLJENJE 591. PREDSTAVLJENJE 592. PREDSTAVLJENJE 593. PREDSTAVLJENJE 594. PREDSTAVLJENJE 595. PREDSTAVLJENJE 596. PREDSTAVLJENJE 597. PREDSTAVLJENJE 598. PREDSTAVLJENJE 599. PREDSTAVLJENJE 600. PREDSTAVLJENJE 601. PREDSTAVLJENJE 602. PREDSTAVLJENJE 603. PREDSTAVLJENJE 604. PREDSTAVLJENJE 605. PREDSTAVLJENJE 606. PREDSTAVLJENJE 607. PREDSTAVLJENJE 608. PREDSTAVLJENJE 609. PREDSTAVLJENJE 610. PREDSTAVLJENJE 611. PREDSTAVLJENJE 612. PREDSTAVLJENJE 613. PREDSTAVLJENJE 614. PREDSTAVLJENJE 615. PREDSTAVLJENJE 616. PREDSTAVLJENJE 617. PREDSTAVLJENJE 618. PREDSTAVLJENJE 619. PREDSTAVLJENJE 620. PREDSTAVLJENJE 621. PREDSTAVLJENJE 622. PREDSTAVLJENJE 623. PREDSTAVLJENJE 624. PREDSTAVLJENJE 625. PREDSTAVLJENJE 626. PREDSTAVLJENJE 627. PREDSTAVLJENJE 628. PREDSTAVLJENJE 629. PREDSTAVLJENJE 630. PREDSTAVLJENJE 631. PREDSTAVLJENJE 632. PREDSTAVLJENJE 633. PREDSTAVLJENJE 634. PREDSTAVLJENJE 635. PREDSTAVLJENJE 636. PREDSTAVLJENJE 637. PREDSTAVLJENJE 638. PREDSTAVLJENJE 639. PREDSTAVLJENJE 640. PREDSTAVLJENJE 641. PREDSTAVLJENJE 642. PREDSTAVLJENJE 643. PREDSTAVLJENJE 644. PREDSTAVLJENJE 645. PREDSTAVLJENJE 646. PREDSTAVLJENJE 647. PREDSTAVLJENJE 648. PREDSTAVLJENJE 649. PREDSTAVLJENJE 650. PREDSTAVLJENJE 651. PREDSTAVLJENJE 652. PREDSTAVLJENJE 653. PREDSTAVLJENJE 654. PREDSTAVLJENJE 655. PREDSTAVLJENJE 656. PREDSTAVLJENJE 657. PREDSTAVLJENJE 658. PREDSTAVLJENJE 659. PREDSTAVLJENJE 660. PREDSTAVLJENJE 661. PREDSTAVLJENJE 662. PREDSTAVLJENJE 663. PREDSTAVLJENJE 664. PREDSTAVLJENJE 665. PREDSTAVLJENJE 666. PREDSTAVLJENJE 667. PREDSTAVLJENJE 668. PREDSTAVLJENJE 669. PREDSTAVLJENJE 670. PREDSTAVLJENJE 671. PREDSTAVLJENJE 672. PREDSTAVLJENJE 673. PREDSTAVLJENJE 674. PREDSTAVLJENJE 675. PREDSTAVLJENJE 676. PREDSTAVLJENJE 677. PREDSTAVLJENJE 678. PREDSTAVLJENJE 679. PREDSTAVLJENJE 680. PREDSTAVLJENJE 681. PREDSTAVLJENJE 682. PREDSTAVLJENJE 683. PREDSTAVLJENJE 684. PREDSTAVLJENJE 685. PREDSTAVLJENJE 686. PREDSTAVLJENJE 687. PREDSTAVLJENJE 688. PREDSTAVLJENJE 689. PREDSTAVLJENJE 690. PREDSTAVLJENJE 691. PREDSTAVLJENJE 692. PREDSTAVLJENJE 693. PREDSTAVLJENJE 694. PREDSTAVLJENJE 695. PREDSTAVLJENJE 696. PREDSTAVLJENJE 697. PREDSTAVLJENJE 698. PREDSTAVLJENJE 699. PREDSTAVLJENJE 700. PREDSTAVLJENJE 701. PREDSTAVLJENJE 702. PREDSTAVLJENJE 703. PREDSTAVLJENJE 704. PREDSTAVLJENJE 705. PREDSTAVLJENJE 706. PREDSTAVLJENJE 707. PREDSTAVLJENJE 708. PREDSTAVLJENJE 709. PREDSTAVLJENJE 710. PREDSTAVLJENJE 711. PREDSTAVLJENJE 712. PREDSTAVLJENJE 713. PREDSTAVLJENJE 714. PREDSTAVLJENJE 715. PREDSTAVLJENJE 716. PREDSTAVLJENJE 717. PREDSTAVLJENJE 718. PREDSTAVLJENJE 719. PREDSTAVLJENJE 720. PREDSTAVLJENJE 721. PREDSTAVLJENJE 722. PREDSTAVLJENJE 723. PREDSTAVLJENJE 724. PREDSTAVLJENJE								

1. Označimo dolžino dveh pravokotnikov iz P z a_1, b_1 in a_2, b_2 ter brez škode predpostavimo, da je $a_1 \leq b_1, a_2 \leq b_2$ in $a_1 \leq a_2$. Če sta diagonalni obeh pravokotnikov enako dolgi, velja $a_1^2 + b_1^2 = a_2^2 + b_2^2$, torej

$$a_2^2 - a_1^2 = b_1^2 - b_2^2 = (b_1 - b_2)(b_1 + b_2)$$

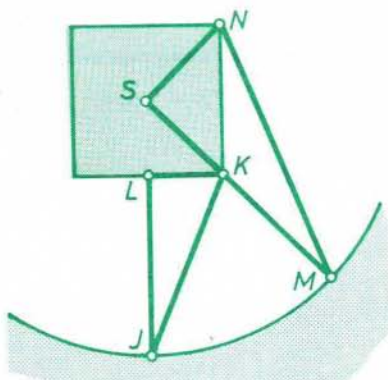
Leva stran enakosti zaradi predpostavke za P ne presega 99. Če velja $b_1 \neq b_2$, na desni dobimo več kot 100, torej pridemo do protislovja. Zato je $b_1 = b_2$ in tedaj še $a_1 = a_2$.

2. Pogledimo na sliko, kjer točka J označuje Janezov, točka M pa Mickin položaj. Zaradi podobnosti pravokotnih trikotnikov JKL , MNS in enakosti

$$r = \overline{SJ} = \overline{SM}, m = \overline{SL} = \overline{LK}$$

velja

$$\frac{r}{m\sqrt{2}} = \frac{\overline{SM}}{\overline{SN}} = \frac{\overline{LJ}}{\overline{LK}} = \frac{r-m}{m}$$

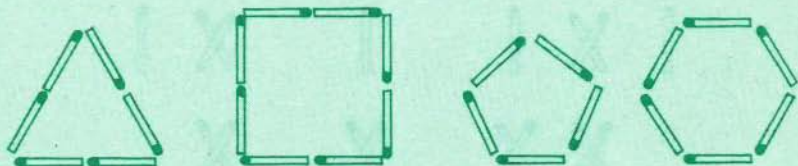


Od tod dobimo $r = (2 + \sqrt{2})m$ in nato $\overline{KM} = 2m = r - \sqrt{2}m = \overline{SM} - \overline{SK} = \overline{KM} = 100$ m.

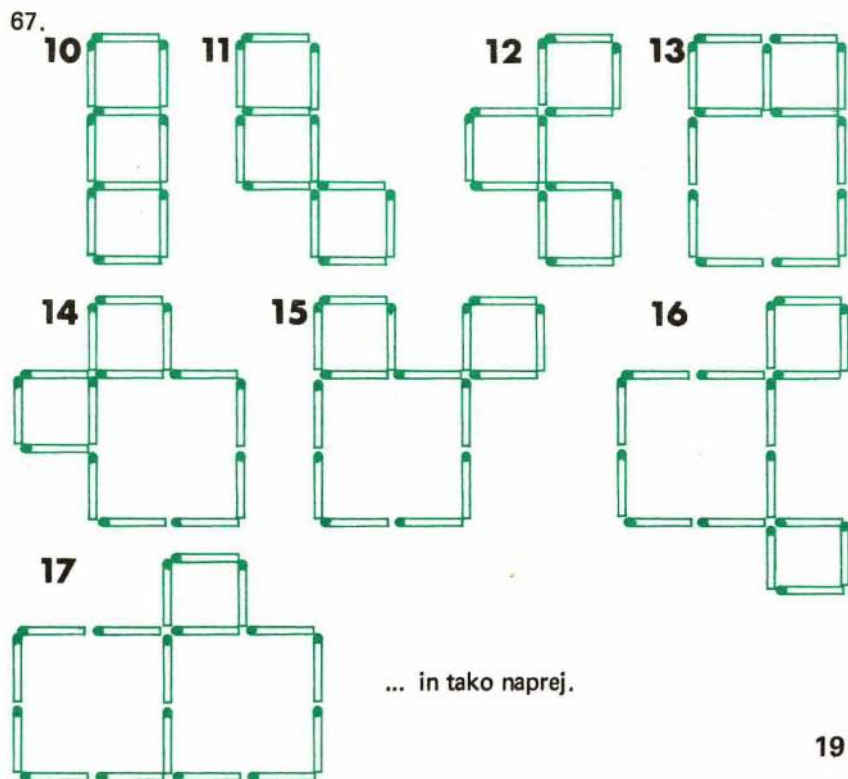
3. Zaznamujmo zadnjo cifro v desetiškem zapisu števil n in a_n zaporedoma z x in y . Če je $x \in \{0, 1, 5, 6\}$, potem je očitno $y = x$. Za $x = 4$ dobimo $y = 6$, ker je eksponent m izraza $a_n = n^m$ v tem primeru sodo število. Podobno ugotovimo, da pri $x = 9$ velja $y = 9$. Pri pogoju $n > 2$ za $x \in \{2, 8\}$ najdemo $y = 6$, ker je eksponent m tedaj deljiv s štiri. Za $x = 3$ in $x = 7$ je nekoliko več dela. Tudi tu je y odvisen od ostanka, ki ga da pri deljenju s štiri eksponent m . V obeh primerih ($x = 3, x = 7$) je n lih, zato velja $m = n^{2k-1}, k \in \mathbb{N}$. Brž vidimo, da tedaj m in n dasta pri deljenju s štiri ista ostanka (1 ali 3). Od tod najdemo iskani y . Če je $x = 3$, za $n = 3, 13, 23, 33, \dots$ dobimo izmenoma $y = 7, 3, 7, 3, \dots$, pri $x = 7$ pa imamo za $n = 7, 17, 27, 37, \dots$ zaporedoma $y = 3, 7, 3, 7, \dots$. Zaporedje ostankov y se torej od tretjega člena a_3 naprej periodično ponavlja s periodo 20:

x	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	16	17	18	19	20	21	22	23	...
y	1	4	7	6	5	6	3	6	9	0	1	6	3	6	5	6	7	6	9	0	1	6	7	...

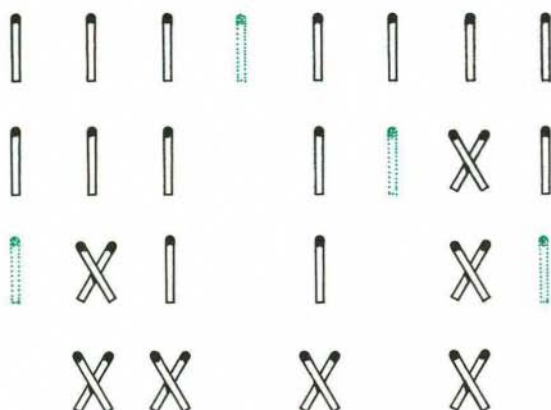
72. V škatli imamo toliko vžigalic, da lahko iz njih sestavimo katerikoli par pravilnih likov, ki so spodaj narisani, pri čemer vsakokrat porabimo vse vžigalice. Stranice likov niso predpisane, torej so kakršnekoli. Za lažje razmišljanje si oglejmo primer, ko je v škatlici enajst vžigalic! Iz njih bi lahko sestavili trikotnik (iz 6 vžigalic) in petkotnik (iz 5 vžigalic), petkotnik (5) in šestkotnik (6), kvadrat (8) in trikotnik (3), ne moremo pa sestaviti kvadrata in petkotnika, niti trikotnika in šestkotnika. Ugotovi zdaj, najmanjše število vžigalic v škatlici, da bomo še lahko sestavili vsak par likov!



KRATKOČASNE VŽIGALICE — Rešitev z II. str. ovitka



68. Nalogo najlažje rešimo tako, da gremo nazaj od končnega vzorca k začetnemu in si zapomnimo poteze. Potek pa je takle:



Rešitev je lahko seveda več. Premikamo rdečo vžigalico. Igra je mogoča z najmanj 8 vžigalicami. To bomo dokazali tako, da bomo šli nazaj od dveh in treh prekrizanih vžigalic.

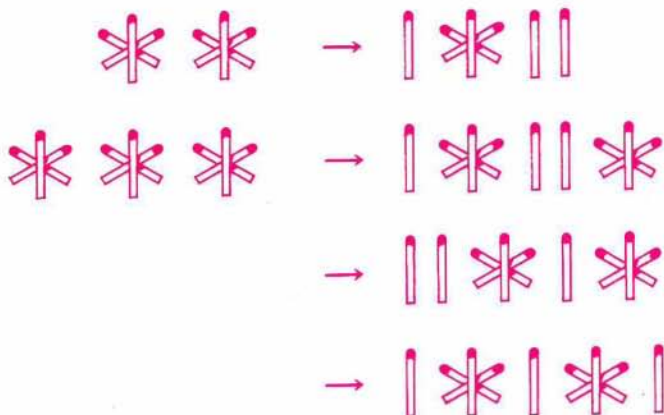
- Očitno ne more nobena vžigalica skočiti čez dve.
- Tudi tu ne more nobena vžigalica čez dve.



Tu moramo opozoriti, da mora vsaka vžigalica pristati na tretji, ko igramo naprej, oziroma lahko premaknemo le tako vžigalico, ki je na drugi vžigalici, ko igramo nazaj.

69. Potek reševanja bomo tokrat opisali drugače (tudi prej bi lahko storili tako). Vžigalice oštevilčimo s številkami od 1 do 12, nato pa premikamo: 7 na 11, 6 na 11, 8 na 2, 9 na 2, 10 na 12, 5 na 12, 3 na 1, 4 na 1. Da je 12 najmanjše število vžigalic, pri katerem je igra še mogoča, bomo zopet dokazali z razmišljanjem v obratni smeri. Začnimo z eno samo trojico, tu ni mogoča nobena poteza. Dve in tri trojice pa se ustavijo po dveh potezah:

69.



70. Ko smo nalogo posplošili, smo na lepem začeli govoriti o skupinah namesto o prekrizanih vžigalicah. Zakaj? Kar poskusi prekrizati 20 vžigalic! Poskusi to še narisati! Torej bomo imeli namesto n prekrizanih vžigalic skupino z n vžigalicami. Premišljujemo spet nazaj. Pri eni skupini z n vžigalicami ni mogoča nobena poteza. Pri dveh skupinah lahko naredimo le $n - 1$ potez (dobimo $n - 1$ krat po eno vžigalico, skupino z n vžigalicami in eno vžigalico), potem pa se stvar ustavi. Tudi pri treh skupinah se ustavi po $n - 1$ potezah, le da pridemo tu do teh vzorcev:

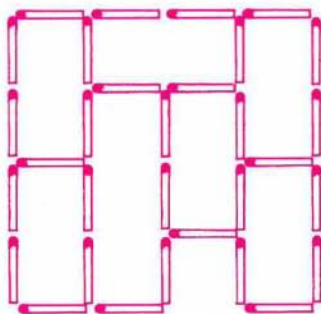
$$\begin{array}{l} n, n-1 \text{ krat } 1, n, 1 \\ i, n, 1, n, n-i-1 \quad (0 \leq i \leq n-1) \end{array}$$

V nobenem primeru ni več mogoče narediti poteze. Če pa imamo vsaj 4 skupine, lahko zmeraj naredimo v n potezah zaporedje n samostojnih vžigalic, čez katere potem nosimo vžigalice iz drugih skupin. Prepričaj se o tem še praktično! Vzemí najprej tri skupine po 5 vžigalic, nato jim pa dodaj še četrto!

71. Odstraniti je treba najmanj 9 vžigalic:

72. V škatlici imamo 36 vžigalic. Sestavljamo pa takole:

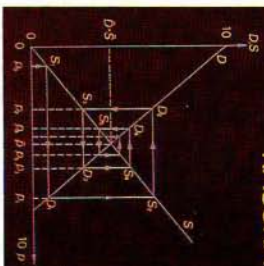
trikotnik (12) in kvadrat (24),
trikotnik (6) in petkotnik (30),
trikotnik (6) in šestkotnik (30),
kvadrat (16) in petkotnik (20),
kvadrat (12) in šestkotnik (24),
petkotnik (30) in šestkotnik (6).



IVAN GAZDAR
ZBIRKA VAJ
IZ ARITMETIKE, ALGEBRE IN ANALIZE
ZA IV. RAZRED SREDNJE ŠOLE

ZBIRKA VAJ
IZ ARITMETIKE, ALGEBRE IN ANALIZE
ZA IV. RAZRED SREDNJE ŠOLE

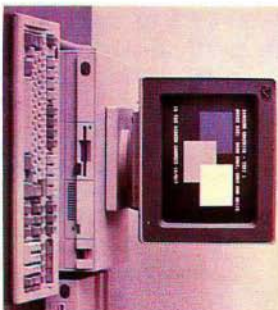
Aljožij Vachdal
**OSNOVE
DIFERENČNEGA
RACUNA**



**NAŠE NEBO IN
ZEMLJA 1989**



Robert Mober, Egon Zakovšek
**PROGRAMSKI JEZIK
PASCAL**



Rejko Jermak
**elementi
teorije
informacije**



NIKO PRILATELJ
**MATEMATIČNE
STRUKTURE I**

