

DRUŠTVO MATEMATIKOV, FIZIKOV IN ASTRONOMOV SRS LETNIK 16, 1988-89,

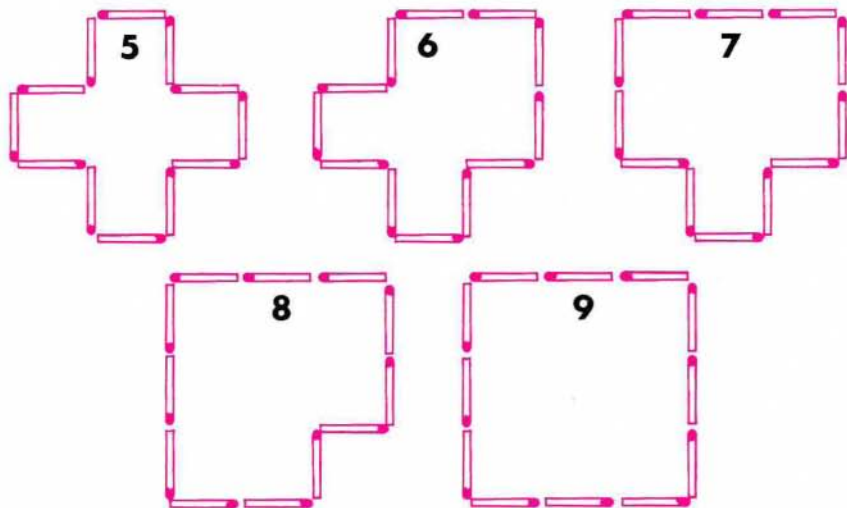
# PRESEK

## 2



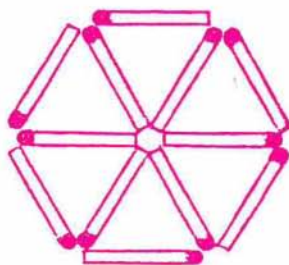
## KRATKOČASNE VŽIGALICE

65. Iz 12 vžigalic lahko sestaviš križ s ploščino petih "kvadratnih vžigalic". Prav nič težko ni iz tega križa narediti like z istim obsegom in ploščinami 6, 7, 8 ali 9 *vžigalica*<sup>2</sup>. Kako to naredimo, kaže slika:



Poskusi sedaj sestaviti lik z istim obsegom (dvanajest vžigalic) in ploščino 4 *vžigalica*<sup>2</sup>! Nato sestavi še lik z istim obsegom in ploščino 3 *vžigalica*<sup>2</sup>!

66. Sestavi šesterokotnik s šestimi enakostraničnimi trikotniki! Začni prestavljati po dve vžigalici naenkrat, tako da boš imel po vsakem premiku same enakostranične trikotnike! Končni cilj sta dva enaka enakostranična trikotnika s stranico dveh vžigalic.



V tretji številki devetega letnika smo začeli po delih objavljati to zbirko nalog, ki jo je za Presek napisal Roman Rojko. Naloge bomo objavljali tudi v prihodnjih številkah Preseka.

**PRESEK — list za mlade matematike, fizike, astronome in računalnikarje**  
**16. letnik, leto 1988/89, številka 2, strani 65 — 128**

**VSEBINA**

|                      |                                                                                                                                                   |         |
|----------------------|---------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------|---------|
| <b>MATEMATIKA</b>    | Glasbena lestvica, 2. del (Marija Vencelj) . . . . .                                                                                              | 66      |
|                      | O čem v televizijskem dnevniku ni moč slišati?<br>(Vilko Domanjko) . . . . .                                                                      | 75      |
|                      | Geometrijska ponazoritev skrčenja dolžine in podaljšanja časa<br>(Marko Razpet) . . . . .                                                         | 80      |
|                      | O praštevilih — Rešitve nalog str. 117 (Boris Lavrič,<br>ilustracija Boris Lavrič) . . . . .                                                      | 82      |
| <b>FIZIKA</b>        | Dogodek v ploščatem kondenzatorju (Gorazd Planinšič) . . . . .                                                                                    | 90      |
| <b>PISMA BRALCEV</b> | (Tine Barbič, Dušica Boben) . . . . .                                                                                                             | 95      |
| <b>ASTRONOMIJA</b>   | Merjenje višine Severnice (Marijan Prosen) . . . . .                                                                                              | 96      |
| <b>RAČUNALNIŠTVO</b> | Izpopolnilno Logo na mavrici (Vladimir Batagelj) . . . . .                                                                                        | 100     |
| <b>NOVICE</b>        | Spominske znamke leta 1987 (Janez Strnad) . . . . .                                                                                               | 103     |
|                      | Pavel Kunaver (Bogdan Kilar) . . . . .                                                                                                            | 104     |
|                      | Presek v letu 1989 (Ciril Velkovrh, Boris Lavrič) . . . . .                                                                                       | 111     |
| <b>TEKMOVANJA</b>    | 23. tekmovanje za srebrno Vegovo priznanje<br>(Aleksander Potočnik) — Rešitve str. 114 . . . . .                                                  | 106     |
|                      | 24. republiško tekmovanje osnovnošolcev iz matematike —<br>Rešitve str. 116 (Aleksander Potočnik) . . . . .                                       | 108     |
| <b>REŠITVE NALOG</b> | Izbirno tekmovanje iz matematike za srednješolce                                                                                                  |         |
|                      | Rešitev iz P-1, str. 48 (Darjo Felda) . . . . .                                                                                                   | 118     |
|                      | Številska križanka — Rešitev iz P-1 (Bruno Gričar) . . . . .                                                                                      | 125     |
|                      | Slikovna križanka — Rešitev iz P-1 (Marko Bokalič) . . . . .                                                                                      | 125     |
| <b>MATEMATIKA</b>    | Matematične neenakosti pod napetostjo (Miran Černe,<br>Igor Kukavica) . . . . .                                                                   | 126     |
| <b>RAZVEDRILO</b>    | Križanka — Presekove rubrike (Bruno Gričar) . . . . .                                                                                             | 74      |
|                      | Anekdote in vinjete so iz Biltena 26. republiškega tekmovanja<br>srednješolcev iz fizike v Mariboru . . . . .                                     | 124, 95 |
|                      | Kratkočasne vžigalice — Rešitve str. III (Roman Rojko) . . . . .                                                                                  | II      |
| <b>NALOGE</b>        | Tri naloge — Rešitve str. 122 (Boris Lavrič) . . . . .                                                                                            | 89      |
|                      | Matematični krožek — Rešitve str. 124 (Boris Lavrič) . . . . .                                                                                    | 99      |
|                      | Eksistenca — Rešitev str. 115 (Boris Lavrič) . . . . .                                                                                            | 102     |
|                      | Uloemek z najdaljšo periodo (Matija Lokar) . . . . .                                                                                              | 105     |
|                      | Naloge bralcev (Izbral Damjan Kobal) . . . . .                                                                                                    | 112     |
| <b>NA OVITKU</b>     | Orkester Slovenske filharmonije v Cankarjevem domu v Ljubljani —<br>Pianist Aci Bertonec, dirigent Uroš Lajovic<br>(foto Marjan Smerke) . . . . . | I       |

## GLASBENA LESTVICA, 2. del

V uvodnem delu članka o glasbeni lestvici, ki je izšel v prvi letošnji številki Preseka, smo spoznali ozadje evropskega tonskega sistema. Osnovno načelo njegove izgradnje je, da hkrati z nekim tonom v glasbeno lestvico vključi tudi tone, ki skupaj z njim najlepše zvane. To so tudi delni ali alikvotni toni, katerih frekvenca je cel večkratnik frekvence danega tona. Izoblikovali smo prvi pogoj: če neki ton nastopa v skali, potem morata biti v njej tudi tona dvojne in polovične frekvence. Druga zahteva je bila, naj skala dopušča prenos vsake melodije višje ali nižje, ne da bi melodijo s tem skvarili. Ugotovili smo, da temu pogoju ustrezajo le enakorazmerne skale. To pomeni, da mora biti zaporedje frekvenc vseh tonov glasbene skale geometrijsko.

Geometrijsko zaporedje navadno podamo z začetnim členom, količnikom in številom členov. Pri glasbeni lestvici je naravneje podati namesto začetnega člena kakšen ton iz dobro slišnega območja, takšen, ki ga lahko zaigramo na večino inštrumentov in ki ga lahko zapoje večina ljudi. Po mednarodnih standardih je to ton  $a_1$ , ki ima frekvenco 440 Hz. Legenda pripoveduje, da je v starem veku vsako jutro ob zori oddajal ta ton ogromen Memnonov steber v bližini egipčanskih Teb, tako da so po njem glasbeniki lahko uglaševali svoje inštrumente. Steber naj bi prenehal zveneti ob začetku našega štetja. Dandanašnji pa ta ton oddajajo običajno glasbene vilice, ki jih uporabljajo uglaševalci.

Od tona  $a_1$  navzdol in navzgor je nato zgrajeno geometrijsko zaporedje — teoretično smiselno do mej našega slušnega območja.

Že v uvodnem članku smo povedali, da ustreza količnik tega zaporedja enačbi

$$q^m = 2 \quad (1)$$

kjer je  $m$  naravno število, ki pove, na koliko delov je razdeljen oktavni interval. Število  $m$  ne sme biti preveliko, ker bi bila potem tudi nekatera glasbila prevelika; prav tako ne more biti enako ena, ker bi bila glasba s samimi oktavnimi intervali revna. Število  $m$  pa je sicer lahko še poljubno, kar nam omogoča, da za glasbeno skalo postavimo še kakšno dodatno zahtevo. Lahko bi npr. v glasbeno lestvico na intervalu  $(f, 2f)$  uvedli kakšen tak ton, ki bi bil lepoti glasbe posebej v prid. Sama od sebe pa se ponuja tudi misel, naj bi bil v skali razen  $2f$  denimo še alikvotni ton  $3f$  (ton frekvence  $4f$  je kot dvakratnik  $2f$  že

vključen). Videli bomo, da si želji pravzaprav ne nasprotujeta. Poleg pogojev a) in b), ki smo ju postavili v prvem delu, postavimo torej še pogoj

c) hkrati s tonom frekvence  $f$  naj vsebuje skala tudi ton frekvence  $3f$ .

Ker mora zaradi pogoja a) skala z vsakim tonom vsebovati tudi ton polovične frekvence, to pomeni prisotnost tona  $\frac{3}{2}f$  v skali. Ta ton pa leži med  $f$  in  $2f$ . Interval  $(f, \frac{3}{2}f)$  se imenuje *čista kvinta*, harmoničen (sočasen) zveni posebej lepo. Dejstvo, da človeškemu ušesu čista kvinta lepo zveni, potrjujejo tudi analize narodne glasbe. To je eden intervalov, ki najpogosteje nastopajo v narodni glasbi večine evropskih narodov.

Zdi se, kot da smo pri koncu naše naloge. S pomočjo pogoja c) bomo določili še eksponent  $m$  iz enačbe (1) in delo bo opravljeno!

Pa temu ni tako! Vse skupaj se šele sedaj prav zaplete: *Čiste kvinte v enakorazmerni razdelitvi oktavnega intervala ni mogoče realizirati.*

Nobeno geometrijsko zaporedje namreč ne more hkrati vsebovati členov  $f, \frac{3}{2}f$  in  $2f$ . Res! Za vsako geometrijsko zaporedje s količnikom  $q$ , katerega člena sta  $f$  in  $2f$ , velja enačba (1) za neki  $m \in \mathbb{N}$ . Če bi tako zaporedje vsebovalo še člen  $\frac{3}{2}f$ , bi to pomenilo, da obstaja tako naravno število  $k$ , za katerega je

$$fq^k = \frac{3}{2}f$$

torej

$$q^k = \frac{3}{2} \quad (2)$$

za neki  $k \in \mathbb{N}$ . S potenciranjem dobimo iz enačbe (1)

$$q^{km} = 2^k$$

in iz enačbe (2)

$$q^{km} = \left(\frac{3}{2}\right)^m$$

To da

$$2^k = \left(\frac{3}{2}\right)^m \quad (3)$$

oziroma

$$2^{k+m} = 3^m \quad (4)$$

Enačba (4) pa je za  $k, m \in \mathbb{N}$  protislovna, saj imamo na levi sodo, na desni pa liho število. Čiste kvinte torej v enakorazmerni skali ni!

Kaj sedaj? Treba se bo nečemu odpovedati. Enakorazmerni skali bi se zaradi prenosa melodij težko, lažje se odpovemo čisti kvinti. Natančneje povedano, odpovemo se njeni čistosti, kvinti sami pa pravzaprav ne. To naredimo z izbiro takega  $m$  v enačbi (1), da bo v enakorazmerni skali nastopal tudi ton, ki bo dober približek za  $\frac{3}{2}f$ . Dober približek pomeni to, da naše uho ne bo zaznalo razlike, torej se bo moral ta približek v slušno najbolj občutljivem območju

razlikovati od  $\frac{3}{2}f$  za manj kot 1 Hz. Videli bomo, da se to res da doseči in to pri relativno majhnem  $m$ . Poglejmo!

Potrebovali bomo nekaj več matematičnega znanja kot doslej. Nadomestimo obe strani enačbe (3) z njunima logaritmoma z osnovo 2. Če nato še delimo z  $m$ , dobimo

$$\frac{k}{m} = \log_2 \frac{3}{2} \quad (5)$$

Ker ni takih naravnih števil  $k$  in  $m$ , ki bi ustrezali enačbi (3), sledi, da ni takega ulomka  $\frac{k}{m}$ , da bi bila izpolnjena enačba (5). Lepše povedano:  $\log_2 \frac{3}{2}$  ni racionalno število. So pa racionalna števila povsod gosta v množici realnih števil. To pomeni, da lahko k vsakemu realnemu številu najdemo tak racionalen približek, da bo razlika med njima poljubno majhna. Torej obstaja tudi tak ulomek  $\frac{k}{m}$ , ki bo za naše potrebe dovolj blizu števila  $\log_2 \frac{3}{2}$ .

Za konstrukcijo racionalnih približkov iracionalnih števil so zelo dobro sredstvo tako imenovani *verižni ulomki*, to so izrazi oblike



$$a_1 + \frac{1}{a_2 + \frac{1}{a_3 + \frac{1}{a_4 + \dots}}}$$

kjer so  $a_1, a_2, a_3, \dots$  naravna števila,  $a_1$  pa je lahko tudi 0. Vsako pozitivno realno število lahko na en sam način razvijemo v verižni ulomek – neskončen, če je število iracionalno. Najnужnejše informacije o verižnih ulomkih, kakor tudi to, kako pridemo do razvoja števila  $\log_2 \frac{3}{2}$  v verižni ulomek, boste našli v dodatku ob koncu tega sestavka. Zapišimo nekaj prvih členov tega razvoja:

$$\log_2 \frac{3}{2} = \cfrac{1}{1 + \cfrac{1}{1 + \cfrac{1}{2 + \cfrac{1}{2 + \cfrac{1}{3 + \dots}}}}} \quad (6)$$

Vrednosti zaporednih delnih ulomkov

$$\begin{aligned} \frac{1}{1} &= 1, \quad \frac{1}{1 + \frac{1}{1}} = \frac{1}{2}, \quad \frac{1}{1 + \cfrac{1}{1 + \cfrac{1}{2}}} = \frac{3}{5}, \\ \frac{1}{1 + \cfrac{1}{1 + \cfrac{1}{2 + \cfrac{1}{2}}}} &= \frac{7}{12}, \quad \frac{1}{1 + \cfrac{1}{1 + \cfrac{1}{2 + \cfrac{1}{2 + \cfrac{1}{3}}}}} = \frac{24}{41} \text{ itd} \end{aligned}$$

so čedalje boljši racionalni približki števila  $\log_2 \frac{3}{2}$ . Povejmo še to, da so približki, ki jih dajejo delni ulomki verižnega ulomka, v nekem smislu najpreprostejši racionalni približki danega števila. Velja namreč, da ima vsak ulomek, ki dano število aproksimira bolje kot neki delni ulomek temu številu prirejenega verižnega ulomka, imenovalce večji od imenovalca tega delnega ulomka. Za nas je ta vidik še kako pomemben. Imenovalce ulomka  $\frac{k}{m}$ , ki ga bomo vzeli za približek števila  $\log_2 \frac{3}{2}$ , bo, kot vemo, pomenil število tonov v eni oktavi. Torej bomo dobili z verižnimi ulomki optimalno aproksimacijo kvinte glede na število tonov v eni oktavi.

Poglejmo zaporedne približke! Prva dva: 1 in  $1/2$  sta pregroba že na prvi pogled. Izračunajmo, kako natančen približek čiste kvinte v prvi oktavi dajejo

naslednji ulomki. Prva oktava začenja s tonom  $c_1$ , ki ima frekvenco 262 Hz. Torej nas zanima aproksimacija tona s frekvenco  $\frac{3}{2} \cdot 262 \text{ Hz} = 393 \text{ Hz}$ . Če vzamemo tretji približek, torej  $\log_2 \frac{3}{2} \approx \frac{3}{5}$ , je  $\frac{3}{2} \approx 2^{3/5}$ . Hitro lahko izračunamo, da je  $2^{3/5} \cdot 262 \text{ Hz} = 397 \text{ Hz}$ . To pa je preslab približek za 393 Hz, saj je razlike kar za 4 Hz. Po teoriji mora biti naslednji približek boljši. Res dobimo za  $\frac{k}{m} = \frac{7}{12}$  vrednost  $2^{7/12} \cdot 262 \text{ Hz} = 392,5 \text{ Hz}$ , kar pomeni aproksimacijo čiste kvinte na 0,5 Hz natančno. Zato se bomo odločili za približek  $\frac{7}{12}$ . To sicer pomeni, da bo napaka čiste kvinte v drugi oktavi, kjer so vse frekvence pomnožene z dva, že enaka 1 Hz. Toda raje se bomo sprijaznili s tem, kot da bi vzeli naslednji približek, ki nam ponuja kar 41 stopenj v eni oktavi.

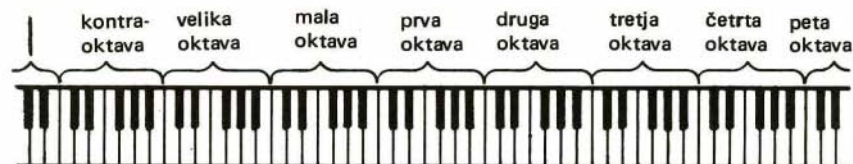
Vidimo torej, da tako imenovana *dvanaajststopenjska enakorazmerna lestvica* uspešno reši naš problem. Omeniti pa moramo še nekaj. Iz analize narodne in umetne glasbe sledi, pa tudi teoretično lahko spoznamo, da so poleg oktave in kvinte v glasbi pomembni še nekateri intervali, npr.: *velika sekunda* ( $f, \frac{9}{8} f$ ), *mala terca* ( $f, \frac{6}{5} f$ ), *velika terca* ( $f, \frac{5}{4} f$ ), *kvarta* ( $f, \frac{4}{3} f$ ), *mala seksta* ( $f, \frac{8}{5} f$ ), *velika seksta* ( $f, \frac{5}{3} f$ ), *velika septima* ( $f, \frac{15}{8} f$ ). Tudi ti intervali so v dvanaajststopenjski lestvici dokaj dobro aproksimirani, čeprav ne tako zelo dobro kot kvinta. Še najbolj moti slaba velika terca, pomemben interval, aproksimiran v prvi oktavi le z natančnostjo 2,5 Hz.

Tako smo matematični del naloge opravili. Glasbena lestvica je torej zaporedje tonov, katerih frekvence tvorijo geometrijsko zaporedje s členom  $a_1$ , ki ima frekvenco 440 Hz, in količnikom  $q = \sqrt[12]{2}$ , kar za  $m = 12$  izračunamo iz (1). Glasbeniki tako izbirajo osnovnih zidakov glasbe imenujejo tudi *dvanaajststopenjska temperirana uglasitev*.

Frekvenci dveh sosednjih tonov v skali se torej razlikujeta za faktor  $\sqrt[12]{2}$ . Ta najmanjši možni zvočni interval imenujemo *polton*. Interval, ki sestoji iz dveh sosednjih poltonov, se imenuje *cel ton*.

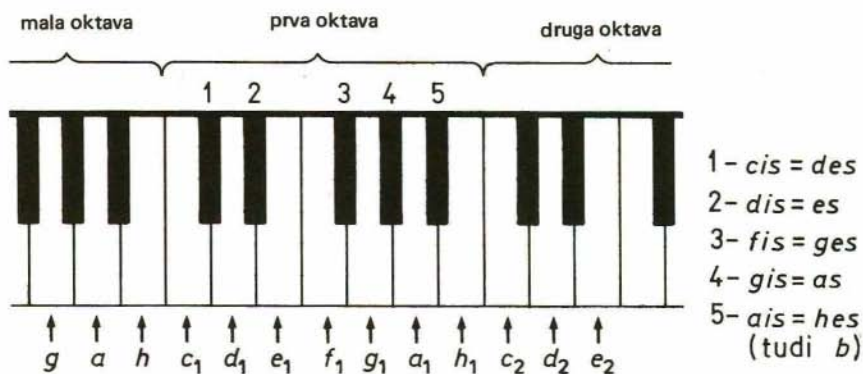
Poleg tona  $a_1$  imajo imena tudi drugi toni glasbene lestvice. Vsa skala je razdeljena na oktave, istoležni toni v posameznih oktavah imajo isto ime. Iz katere oktave so, ločimo z indeksi ali velikostjo črke, npr.  $A, a, a_1, a_2, \dots$ . Razdelitev na oktave je prikazana na sliki 1.

subkontraoktava



Slika 1

Poimenujmo sedaj tone prve oktave. V njej leži tudi ton  $a_1$ , in sicer devet poltonskih stopenj za začetnim tonom. Začetni ton se imenuje  $c_1$ . Najprej poimenujemo osnovne tone, to so toni, ki so v naši lestvici približki za veliko sekundo, veliko terco, kvarto, kvinto, veliko seksto in veliko septimo. V razdalji celega tona od  $c_1$  je ton  $d_1$ , še cel ton dalje je  $e_1$  in še pol tona višje  $f_1$ . Ti štirje osnovni toni tvorijo tako imenovani *tetrakord*. V drugem delu oktave imamo drugi tetrakord, kot melodija identičen s prvim. Začenja z  $g_1$ , ki tvori s  $c_1$  kvinto, čez cel ton imamo  $a_1$ , še čez cel ton  $h_1$  in nato še polton do  $c_2$ . To pa je že oktavni dvakratnik  $c_1$  in smo ga zato spet imenovali  $c$ . To so toni, za katere smo navedli frekvence v tabeli v prvem delu sestavka o glasbeni lestvici. Zaigramo jih lahko z belimi tipkami na klavirju. Ostalo nam je še pet tonov. Tem damo imena po sosednjih osnovnih tonih z dodajanjem besedice *is* ali *es*, kar pomeni za polton višje ali za polton nižje od ustreznega osnovnega tona. Na klavirju jih predstavljajo črne tipke. Slika 2.



Slika 2

"Melodija" iz osnovnih tonov  $c, d, e, f, g, a, h, c$  se imenuje *C-durova* lestvica. Če to melodijo prenesemo nespremenjeno navzgor, z začetki na različnih mestih v oktavi, dobimo še 11 durovih lestvic. Vsaka nosi ime po svojem začetnem tonu. Obstaja pa še 12 tako imenovanih molovih lestvic. Tako ima *c-molova* lestvica melodijo:  $c, d, es, f, g, as, b, c$ . Ostale dobimo z ustreznim prenosom. Medtem ko je intervalni sestav durovih lestvic: cel ton, cel ton, polton, cel ton, cel ton, polton, imamo za molove lestvice: cel ton, polton, cel ton, cel ton, polton, cel ton, cel ton. Praviloma so skladbe pisane v nekem izbranem duru ali molu, pri čemer — razen morda na redkih posamičnih mestih — uporabljajo le tone ustrezne lestvice. Drugače izbrani osnovni

toni molskih tonalitet vnašajo v melodije neko prikrito disonanco, zato imajo v molu pisane skladbe značilen mehko otožen značaj.

Za zaključek omenimo še nekaj, česar glasbena teorija doslej še ni povsem razjasnila. Naša zgornja premišljanja nas silijo k zaključku, da vseh 12 durovih tonalitet identično zveni, podobno vseh 12 molovih. Vendar glasbeniki ugotavljajo, da imajo posamezne tonalitete individualne lastnosti. Tako npr. *C—dur* ustvarja sončne, jasne, spokojne občutke (Bethovnova "*Aurora*"), *E—dur* strastno napeto pričakovanje (številna Lizstova dela, Čajkovskega "*Bo prevladal dan*") in *Fis—dur* romantično veselje (Griegova "*Pomlad*"). Možato žalost oznanja *c—mol* ("*Posmrtna koračnica*" iz Bethovnove simfonije "*Eroica*"), globoko tragiko *es—mol* (arija Pauline iz Čajkovskega opere "*Pikova dama*"). Ni povsem jasno, ali gre pri tem za ustaljeno tradicijo ali za kako objektivno zakonitost.

## DODATEK

*Verižni ulomki.* Verižni ulomki so bili in so še predmet številnih matematičnih raziskav. Obstajajo cele knjige, ki obravnavajo le verižne ulomke.

Če zapišemo neko pozitivno realno število  $a$  v obliki

$$(7) \quad a = a_1 + \frac{1}{a_2 + \frac{1}{a_3 + \frac{1}{a_4 + \dots}}}$$

kjer so členi  $a_1, a_2, a_3, \dots$  naravna števila,  $a_1$  pa je lahko tudi 0, pravimo, da smo število  $a$  *razvili v verižni ulomek*. Tako je npr.



Tomaž Domicelj

$$\frac{7}{4} = 1 + \frac{1}{1 + \frac{1}{3}} \quad \text{in} \quad \sqrt{2} = 1 + \frac{1}{2 + \frac{1}{2 + \frac{1}{2 + \dots}}}$$

kjer se člen 2 ponavlja v nedogled. Verižni ulomek je torej lahko končen ali neskončen. Ni pa nujno, da je periodičen, kot je naš drugi zgled. Končne verižne ulomke imajo racionalna števila, neskončne vsa ostala.

Verižne ulomke  $a_1, a_1 + \frac{1}{a_2}, a_1 + \frac{1}{a_2 + \frac{1}{a_3}}, \dots$  imenujemo *delni ulomki*

verižnega ulomka (7). Njihove vrednosti so očitno racionalna števila. Te vrednosti konvergirajo k številu  $a$ , vsaka naslednja je bližje  $a$  od vseh prejšnjih. Kot zanimivost povejmo še, da so izmenično ena manjša, druga večja od  $a$ .

Kako poiščemo nekaj začetnih členov verižnega ulomka, če je število  $a$  iracionalno, ilustrirajmo na primeru  $a = \log_2 \frac{3}{2}$ . Po definiciji logaritma je

$$2^a = \frac{3}{2} \quad (8)$$

Ker je  $a < 1$ , je  $a_1 = 0$ . Člen  $a_2$  bomo dobili kot celi del števila  $x = \frac{1}{a}$ . Iz (8) dobimo

$$\left(\frac{3}{2}\right)^x = 2 \quad (9)$$

Ker je

$$\left(\frac{3}{2}\right)^1 = \frac{3}{2} < 2 \quad \text{in} \quad \left(\frac{3}{2}\right)^2 = \frac{9}{4} > 2$$

leži  $x$  med 1 in 2, torej je  $a_2 = 1$ . Zapišimo sedaj  $x = 1 + \frac{1}{y}$ . Izračunajmo  $a_3$ , ki mora biti celi del števila  $y$ . V ta namen preoblikujmo enačbo (9) v

$$\frac{3}{2} \cdot \left(\frac{3}{2}\right)^{1/y} = 2$$

od koder dobimo  $\left(\frac{4}{3}\right)^y = \frac{3}{2}$ . Spet ugotovimo, da je  $\left(\frac{4}{3}\right)^1 < \frac{3}{2} < \left(\frac{4}{3}\right)^2 = \frac{16}{9}$ , kar pomeni, da je  $a_3 = 1$ . Če tako nadaljujemo, dobimo še  $a_4 = a_5 = 2$  in  $a_6 = 3$ , tako, da je začetek razvoja števila  $\log_2 \frac{3}{2}$  tak, kot ga kaže formula (6).

## LITERATURA

- [ 1 ] G.E. Šilov, *Prostaja gama – Ustrojstvo muzykal'noj škaly*, Moskva, 1980.
- [ 2 ] Leksikon CZ, *Glasba*, Ljubljana 1980
- [ 3 ] H. Davenport, *The higher arithmetic*, New York, 1960
- [ 4 ] J. Grasselli, *Diofantske enačbe*, DMFA SRS, Ljubljana 1984 (Knjižnica Sigma ; 38)

# SLIKOVNA KRIŽANKA – PRESEKOVE RUBRIKE

| K R I Ž A N K A                                                                                                        |                         |                                 |                     |                                              |                                   | Mesto v Transilvaniji v Romuniji | MOČNATA JAJČNA JED      | KEMIJSKI SIMBOL ZA NATRIJ |
|------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------|-------------------------|---------------------------------|---------------------|----------------------------------------------|-----------------------------------|----------------------------------|-------------------------|---------------------------|
| <br><b>LIST ZA MLADE</b><br><b>MATEMATIKE</b><br><b>FIZIKE</b><br><b>ASTRONOME</b><br><small>IZDAJA DNEVA 3/95</small> |                         |                                 |                     | Povišani<br>bralni<br>odir v Rom.<br>cerkvah |                                   |                                  |                         |                           |
|                                                                                                                        |                         |                                 |                     | Jed z zeljem,<br>mesom, rižem                |                                   |                                  |                         |                           |
|                                                                                                                        |                         |                                 |                     | PRIPOV.<br>PESNITEV                          |                                   |                                  |                         |                           |
| <br><b>OPATIJA</b><br><b>NA GORNJEM</b><br><b>BAVARSKEM</b>                                                            |                         |                                 |                     |                                              |                                   |                                  |                         | OCET                      |
|                                                                                                                        |                         |                                 |                     |                                              |                                   |                                  |                         |                           |
| RISBA<br>MIHA<br>STALEC                                                                                                | BORIS<br>CAVAZZA        | DEL<br>OTROŠKE-<br>GA<br>TELESA | OVOJI,<br>ZAVITKI   |                                              |                                   |                                  |                         |                           |
| KRAJ PRI<br>MOKRO-<br>NOGU<br>Iv sintagmi<br>"burna vsa"<br>prestavite v<br>vsaki besedi<br>eno črko                   |                         |                                 | Ijubkovalno<br>UREZ |                                              |                                   |                                  |                         |                           |
| FRANCOSKI<br>SLIKAR<br>(CAMILLE)                                                                                       |                         |                                 |                     |                                              |                                   |                                  |                         |                           |
| SESTAVIL<br>BRUNO<br>GRİČAR                                                                                            | Strokovnjak<br>v kemiji |                                 |                     |                                              |                                   |                                  |                         |                           |
|                                                                                                                        | FINANČNI<br>SEKTOR      |                                 |                     |                                              |                                   |                                  |                         |                           |
|                                                                                                                        |                         |                                 |                     |                                              |                                   |                                  | KRATICA<br>ZA<br>JUNIOR | EMIL<br>ADAMIČ            |
| ODCEDI-<br>TEV, SCEJA-<br>TI SE                                                                                        |                         |                                 |                     |                                              |                                   |                                  |                         |                           |
| <br>HAIFA<br>IZRAEL                                                                                                    |                         |                                 |                     |                                              | NAPRAVA<br>ZA<br>MERJENJE<br>ČASA |                                  |                         |                           |

## O ČEM V TELEVIZIJSKEM DNEVNIKU NI MOČ SLIŠATI?

Ondan je spet zasedala *Sekcija za alternativno filozofsko matematiko* v bližnjem živalskem vrtu. Trenutno je prav opičji rod med njihovimi najvnetejšimi člani in razpravljalci so po pravilu večinoma prav iz njihovih vrst.

Tokrat so reševali problem o uravnoteženju kocke. O njem nam je zaenkrat znano le tole:

*Prva definicija:*

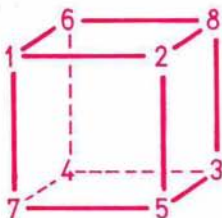
Uteži za kocko imenujem naravna števila od 1 do 8.

*Druga definicija:*

Kocka je obtežena, če v vsako njeno oglišče postavimo po eno utež.

*Tretja definicija:*

Obtežena kocka je uravnotežena, če so vsote vseh uteži po ploskvah med seboj enake.

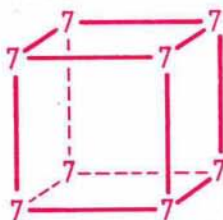


*Naloga:* Razmišljaj o problemu uravnotežene kocke! Kocko, ki ni uravnotežena, pa lahko opaziš na prvi sliki.

K razpravi se je prijavilo osem opic, vsaka s po enim prispevkom (če vam je mileje — izrekom) k zadani temi. Na naših straneh objavljamo tokrat le kratek povzetek njihovih bistvenih pogruntavščin.

Torej — z besedo na papir:

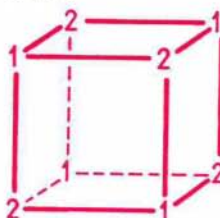
*Prvi  
izrek  
in  
njegov  
dokaz*



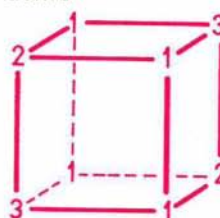
Uravnoteženje kocke s samimi enakimi utežmi je zmeraj nezanimivo.

Karkoli že postavim na oglišča, zmeraj je kocka povsem uravnotežena, če postavim tja same enake uteži. In to je tisto, kar je nezanimovo — ta *zmeraj*. Razen tega pa — ker je dokaz enako nezanimiv kakor izrek sam, mu seveda v celoti pritrjuje, in je od tod naprej vsaka beseda še bolj odveč. Zatorej poglej raje drugo sliko!

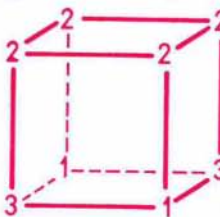
Drugi  
izrek  
in  
njegov  
dokaz



Tretji  
izrek  
in  
njegov  
dokaz



Četrta  
izrek  
in  
njegov  
dokaz



Izjava o uravnoteženju kocke z dvema različnima utežma ni negacija prejšnjega izreka.

Tista negacija se pove tako:

Uravnoteženje kocke s samimi enakimi utežmi ni zmeraj nezanimivo

ali

Uravnoteženje kocke s samimi enakimi utežmi je vsaj v enem primeru zanimivo.

Kdaj — to je zdaj še težko reči, toda dokaz se je dovolj izkazal že s povedanim in smemo iti dalje (če spotoma pogledamo še v tretjo sliko).

Problem uravnoteženja kocke s tremi različnimi utežmi ni *eno-staven* problem.

To pomeni, da mora biti vsaj *dvo-postaven*. In da je izrek izgubil zlog *po*. Torej:

dokazali bomo *dvo-postavnost* problema in pa neodvisnost trditve od izgubljenih zlogov! V tem primeru nam gre za zlog *po*.

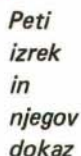
Prva *postavnost*: najdeš jo na četrti sliki.

Druga *postavnost*: najdeš jo takoj za prejšnjo.

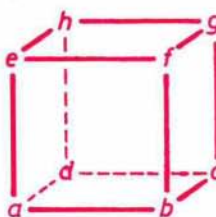
Tretja *postavnost*: zakon je postava in postava je lahko vitka ali pa suha, kar pomeni, da zmeda ostane, pa četudi tisti sakramentski zlog *po* čisto nalašč izgubimo iz besede.

Kar misliš, da je štiri, je deset in takodalje.

I, seveda, saj je natanko to trdil tudi že stari in od sile Grk *Pitagora*. Kar poglej v Lukijanove *Filozofe na dražbi*! *Pitagora* je zgruntal lepoto pravila  $1 + 2 + 3 + 4 = 10$ . In to se v mojem primeru kar presneto dobro uje! Namreč, štiri različne uteži mi dajo na uravnoteženi kocki ploskovno vsoto 10, kar je lepo videti na



šesti sliki. In to ni nič drugega, kakor nadaljevanje pravila, ki teče tiho že od prvega izreka naprej: ploskovne vsote uravnoteženih kock se v vsakem izreku povečajo za 1! Če sem dovolj bister, začnem na začetku s 6, nadaljujem pa s 7 in z 8 na ploskvah iz naslednjih dveh izrekov. In zdaj imam 10. In kdor trdi, da tukaj vmes nekaj manjka (enako 9), tiči v rahli zmoti. Poglej naslednjo sliko! Velja si zapomniti: ne meči v nič dokaza prej, preden ga ne prebereš do konca.


$$a + b + c + d = k$$
$$a + b + e + f = k$$
$$a + d + e + h = k$$

ali  $3(a+b+c+d+e+f+g+h) = 6k$

$$b + c + f + g = k$$

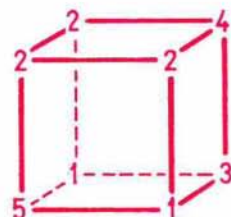
ali  $k = (a+b+c+d+e+f+g+h)/2$

$$c + d + g + h = k$$
$$e + f + g + h = k$$

V našem primeru to pomeni

$$k = (1 + 2 + 3 + 4 + 5 + x + y + z)/2, \text{ kjer je}$$
$$1 \leq x, y, z \leq 5.$$

Toda predlog  $x = 1$ ,  $y = 2$  in  $z = 4$  ostane neuresničen, kajti


$$5 + 4 + 1 + 1 = 11$$

vso†

$$5 + 3 + 2 + 1 = 11$$

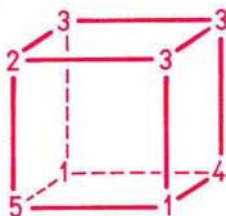
ni mogoče

$$4 + 4 + 2 + 1 = 11$$

uravnoteženo

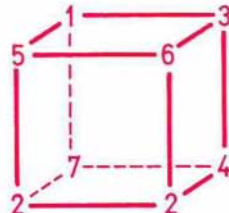
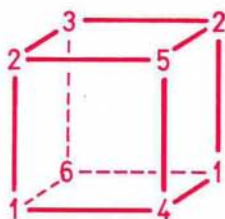
$$4 + 3 + 2 + 2 = 11$$

obesiti na kocko.



*Šesti  
izrek  
in  
njegov  
dokaz*

Na srečo me zadnji hip reši preblisk  $x = 1, y = 3$  in  $z = 3$ . Tako dobim spet  $k = 11$  in pa deveto sliko. Moje zaporedje lepo naraščajočih vsot je s tem rešeno, dokaz pokazan, čudna podoba z osme slike pa zamolčana.



*Sedmi  
izrek  
in  
njegov  
dokaz*

*Osmi  
izrek  
in  
njegov  
dokaz*

Če poznam enega, poznam vse (ali)  
važno je pogruntati pravilo (ali)  
za petico pride prvič šest.

Že iz prejšnjega pod—uka vemo, da je ploskovna vsota uravnotežene kocke v tem primeru

$k = (a + b + c + d + e + f + x + y)/2$ , kjer je  $1 \leq x, y \leq 6$   
ali

$k = (21 + x + y)/2$ .

Vsota  $x + y$  mora biti torej liho število. Recimo 3. Tedaj dobimo te načine:

$$6 + 4 + 1 + 1 = 12$$

$$6 + 3 + 2 + 1 = 12$$

$$5 + 4 + 2 + 1 = 12$$

$$5 + 3 + 2 + 2 = 12$$

in jih obesimo na kocko tako,  
kakor pokaže deseta slika.

Še pred piko za dokaz pa tole:

Vsota  $x + y$  bi lahko bila tudi  $2 + 3$  ali pa  $3 + 4$  ali pa  $4 + 5$  ali pa  $5 + 6$ . Toda naslednji dokaz bo na skrit način pokazal, da zadnji dve vsoti na že kar nesramen način presegata vse meje pristojnosti. In s tem (in pa s čudno zadevo iz prejšnjega dokaza) je dvom v univerzalno lepoto opičjih problemov posejan. Pika.

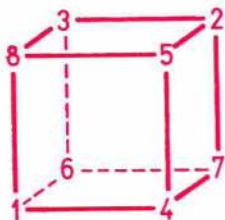
Problem uravnoteženja kocke s sedmimi različnimi utežmi je že na prejšnjih primerih *načelno* do dobrega obdelan.

Poglejmo enajsto sliko!

Izjava o uravnoteženju kocke z osmimi med seboj različnimi utežmi ni negacija drugega izreka.

Negacija drugega izreka je:

Izjava o uravnoteženju kocke z dvema različnima utežma je negacija prejšnjega izreka.



Toda — ta negacija je zelo sumljive vrste, kajti zaenkrat še ni znano, kaj naj pomeni to — prejšnji izrek. Je to prvi ali pa sedmi izrek? In dokler se ta stvar ne razčisti, to negacijo enostavno prepovem! Kakopak!

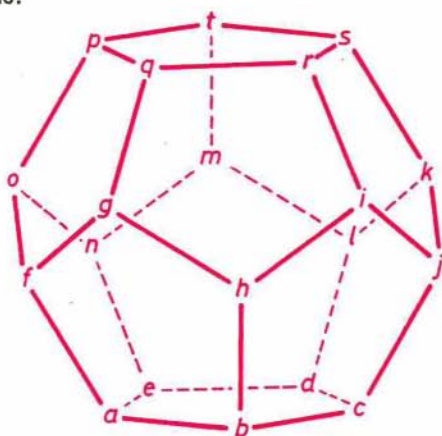
Potem pa moja izjava ne more biti nekaj, česar ni. Ne more biti negacija, s čimer je izrek že dokazan, pač pa je lahko potemtakem kvečjemu negacija te negacije. *Začuda!* Kdor ne verjame, pa naj pogleda še naslednjo sliko.

Tako. S tem smo bralcem Preseka omogočili vpogled v delo te zanimive Sekcije. Če se vam zdi poročilo kdaj pa kdaj tudi nekoliko nerazumljivo, je to najbrž samo zato, ker ste ga *le prebrali*. Svetujem vam, da vzamete v roke svinčnik in papir in se omenjenih problemov tudi sami lotite. Saj sedaj ne bo več težko, hkrati pa bo postal razumljiv še marsikateri skriti namig iz skopega besedila.

Na koncu je, kakor je pač ponavadi to v navadi, predsednica Sekcije povzela:

” Lepo. Zdi se mi, da nam prikazane rešitve lahko prinesejo mirnega sna. Vendar pa vem, da vaši nemirni duhovi nikdar ne spe. Njim in izključno njim, dragi bralci, zastavljam novo nalogo. Vzemite v roko dodekaeder, kakor je narisana na zadnji sliki, in ga poskušajte uravnotežiti z utežmi. Vendar pa vam že sedaj namignem, da močno sumim, da bi kdo uspel rešiti nalogo s samimi med seboj različnimi utežmi. Precej lažje je to stvar uravnotežiti, če je nekaj uteži med seboj enakih. Vendar pa — čim manj, tem bolje!”

Torej — ne prezrite! In pošljite nam rešitve. Kar na Presekov naslov. Nagrade ne bodo ušle.



*Vilko Domanjko*

## GEOMETRIJSKA PONAZORITEV SKRČENJA DOLŽINE IN PODALJŠANJA ČASA

V posebni teoriji relativnosti sta znani formuli za skrčenje dolžine (kontrakcija dolžine)

$$l' = l \sqrt{1 - (v/c)^2} \quad (1)$$

in podaljšanje časa (dilatacija časa)

$$t' = \frac{t}{\sqrt{1 - (v/c)^2}} \quad (2)$$

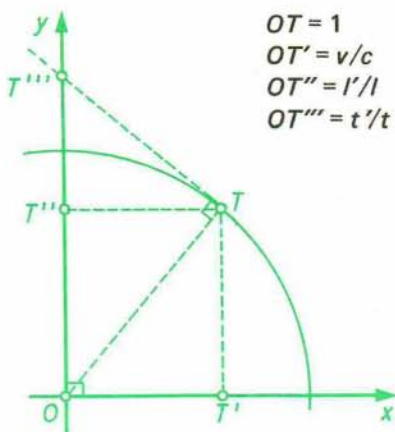
Omenjena pojava sta posledici Lorentzove transformacije. V formulah (1), (2) pomenijo:  $c$  – hitrost svetlobe v vakuumu;  $v$  – hitrost telesa za opazovalca, ki miruje;  $l$  – lastna dolžina telesa v smeri gibanja, to je tista dolžina, ki bi jo izmeril opazovalec, ki sedi na telesu;  $t$  – čas med dvema dogodkoma za opazovalca, sedečega na telesu;  $l'$  – dolžina telesa v smeri gibanja, ki jo izmeri mirujoči opazovalec in  $t'$  čas med prej omenjenima dogodkoma, ki ga izmeri mirujoči opazovalec. Natančno razlago o vsem tem najde bralec že v Presekovi knjižnici: Janez Strnad, *Relativnost za začetnike*. Naš namen ni ta, da bi se spuščali v fizikalne podrobnosti, ampak da s preprosto geometrijsko konstrukcijo ponazorimo skrčenje dolžine in podaljšanje časa. Prepišimo formuli (1), (2) v obliko

$$l'/l = \sqrt{1 - (v/c)^2}, \quad t'/t = \frac{1}{\sqrt{1 - (v/c)^2}}$$

Podali bomo geometrijsko povezavo med števili  $v/c$ ,  $l'/l$  in  $t'/t$ . V ta namen vzemimo pravokotni koordinatni sistem  $Oxy$  (dovolj je že prvi kvadrant) in v njem enotsko krožnico z enačbo  $x^2 + y^2 = 1$ . Točka  $T(v/c, l'/l)$  leži na enotski krožnici, ker velja  $(v/c)^2 + (l'/l)^2 = 1$ . Na abscisni osi je torej treba vzeti točko  $T'(v/c, 0)$ , potegniti vzporednico z ordinatno osjo do točke  $T$  in število  $l'/l$  je ordinata točke  $T$ . Točka  $T''(0, l'/l)$  je pravokotna projekcija točke  $T$  na ordinatno os. Tangenta na krožnico v točki  $T$  seka ordinatno os v točki  $T'''(0, t'/t)$ . Zakaj? Točka  $T'''$  ima pri danem razmerju  $v/c$  koordinati  $0$  in  $t'/t$ . Trikotnika  $OTT'''$  in  $OT''T$  sta si podobna, saj se ujemata v dveh kotih: pravem in tistem z vrhom v točki  $O$ . Zato velja razmerje  $OT''' : OT = OT : OT''$ . Ker je  $OT = 1$  in  $OT'' = t'/t$ , dobimo takoj iskani rezultat:  $OT''' = t'/t$ .

Iz konstrukcije je razvidno, da je  $l' \leq l$  in  $t' \geq t$ . Pri hitrostih  $v$ , ki so majhne v primerjavi s hitrostjo svetlobe, je kvocient  $v/c$  majhen, točke  $T$ ,  $T''$  in  $T'''$  so si blizu in zato se  $l'$  malo razlikuje od  $l$ ,  $t'$  pa od  $t$ . Razlike so opazne šele pri hitrostih, ki so velike v primerjavi s hitrostjo svetlobe. Če se hitrost  $v$  približuje hitrosti  $c$ , ko torej kvocient  $v/c$  raste proti 1, gre  $l'$  proti 0,  $t'$  pa neomejeno narašča.

Marko Razpet



## PONATISI ZBIRKE VAJ

Ivan Štalec

ZBIRKA VAJ  
IZ  
ARITMETIKE  
ALGEBRE IN  
ANALIZE  
za 1. razred  
srednjih šol

2. razred

3. razred

4. razred

Enotne cene 10.000.— din (8.000.— din)

## O PRAŠTEVILIH

Dogovorimo se, da bomo tu z besedo število razumeli naravno število, torej element množice  $\mathbb{N} = \{1, 2, 3, \dots\}$ . Ukvarjali se bomo namreč le z naravnimi števili. Brž ko želimo bolje spoznati njihove lastnosti, se srečamo s pomembno družino števil, ki jim rečemo praštevila. Zanje je značilno, da imajo v množici  $\mathbb{N}$  natanko po dva delitelja. Število  $n$  je torej praštevilo, če je večje od 1 in ni produkt dveh od 1 različnih števil. Druga števila, razen 1, tedaj lahko razstavimo v produkt z manjšima faktorjema in jih zato imenujemo sestavljena števila. Z zaporednim razstavljanjem faktorjev v produkt, če je to potrebno, pridemo do naslednje znane in pomembne ugotovitve:

Vsako naravno število razen števila 1 je produkt samih praštevil.

Dognali bi lahko celo to, da je takšna razstavitev le ena, če ne gledamo na vrstni red faktorjev v njej.

Praštevila so potemtakem osnovni sestavni deli vsakega naravnega števila, zato jim namenimo nekaj več pozornosti.

Zapišimo po velikosti nekaj najmanjših zaporednih praštevil:

2, 3, 5, 7, 11, 13, 17, 19, 23, 29, 31, 37, 41, ...

in se za hip pomudimo ob vprašanju, ali je vseh praštevil končno mnogo ali ne. Že znameniti grški matematik *Evklid* se je ubadal s tem problemom in ga tudi rešil. Dokazal je, da je praštevil brez konca, in to tako mojstrsko utemeljil, da bomo ponovili njegov dokaz. Takole teče:

Denimo, da so 2, 3, 5, ...,  $p$  zaporedna praštevila, in postavimo  $n = 2 \cdot 3 \cdot 5 \cdots p + 1$ . Potem  $n$  očitno ni deljiv z nobenim od praštevil 2, 3, 5, ...,  $p$ . Zato je  $n$  bodisi praštevilo ali pa je deljiv s praštevilom, ki je večje od  $p$ . V obeh primerih obstaja praštevilo, večje od  $p$ , torej praštevil ni končno mnogo.

Veliko težje je zvedeti kaj več o gostoti porazdelitve praštevil v zaporedju vseh naravnih števil. Kljub temu poznamo nekaj pomembnih rezultatov v tej smeri, med katerimi je zelo lep naslednji.

*IZREK: Naj bo naravno število  $n$  večje od 1. Potem med  $n$  in  $2n$  obstaja vsaj eno praštevilo.*

Dokaz je prezahteven za naš list, iznašel pa ga je ruski matematik *P.L. Čebišev* leta 1850, to je pet let po tem, ko je francoski matematik *J. Bertrand* postavil domnevo, da navedeni izrek velja. Danes vemo, da za  $n > 5$  med  $n$  in  $2n$  obstajata vsaj dve praštevili.

Za svoja dela je Čebišev žel priznanja doma in v tujini, bil je član več akademij, v Franciji pa tudi vitez Legije časti. Med obiski v Parizu je večkrat predaval v Association Française pour l'avancement des sciences. Eno njegovih predavanj, *O krojenju oblek*, je privabilo res številno in, lahko si mislimo, izbrano poslušalstvo, snovalce in nosilce modnih krikov. Po prvem stavku so se kot en mož dvignili in zapustili dvorano. Čebišev je predavanje začel takole: Zaradi enostavnosti privzemimo, da ima človeško telo obliko krogle. V resnici je šlo za nalogo iz diferencialne geometrije, kako iz kosa ravnine (blaga) napraviti lupino, ki se bo najbolje prilagala danemu telesu.

Anekdotno smo prepisali iz Križaničeve knjige *Nihalo, prostor in delci*, Slovenska Matica (1982).

Ozrimo se spet na zaporedje vseh praštevil. Hitro opazimo, da si praštevila ne sledijo enakomerno. Z izjemo para 2, 3 je razlika med sosednjima prašteviloma tega zaporedja vedno sodo število, saj so vsa od 2 različna praštevila liha. Že na kratkem odseku zaporedja vseh praštevil najdemo sosednji praštevili, ki se razlikujeta za 2, 4, 6 ali 8, te razlike pa so neenakomerno posejane. Ponujata se naslednji vprašanji:

1. Kako na preprost način najti vsa praštevila, manjša od danega števila  $n$ ?
2. Ali so razlike med sosednjimi praštevili lahko poljubno velike?

Zanimivo je odgovoril na prvo vprašanje grški astronom *Eratosten(es)* že pred približno dva tisoč leti. Stopimo po njegovi poti.

Naravna števila od 2 do  $n$  razvrstimo po velikosti v naraščajoče zaporedje in najprej obkrožimo praštevilo 2 ter prečrtamo vse druge večkratnike števila 2. Najmanjše neoznačeno število je zdaj praštevilo 3. Zato obkrožimo 3 in prečrtamo vse tiste njegove večkratnike, ki še niso prečrtani ali obkroženi. Najmanjše neoznačeno število je zdaj praštevilo 5, ki ga obkrožimo in nato prečrtamo vse njegove večje večkratnike. Če nadaljujemo na enak način, bomo obkrožili natanko vsa praštevila do  $n$ .

Pravkar opisani postopek imenujemo *Eratostenovo rešeto*. Ni težko videti, da seje precej hitro — brž ko smo obkrožili prvo praštevilo, ki presega  $\sqrt{n}$ , nam ostanejo neoznačena v zaporedju le še praštevila.

Enostavno konstrukcijo Eratostenovega rešeta, posebno pripravno za praštevila do 120, najdemo v eni od Gardnerjevih knjig iz rekreacijske matematike.

Števila od 1 do 120 zapišemo v pravokotno tabelo  $20 \times 6$ , kot kaže slika. Nato pri sejanju upoštevamo, da soda števila ležijo v drugem, četrtem in šestem stolpcu, večkratniki števila tri v tretjem (in šestem), petkratniki na vsaki peti "naraščajoči" diagonalni, večkratniki števila 7 pa na vsaki sedmi "padajoči"

|     |     |     |     |     |     |
|-----|-----|-----|-----|-----|-----|
| 1   | 2   | 3   | 4   | 5   | 6   |
| 7   | 8   | 9   | 10  | 11  | 12  |
| 13  | 14  | 15  | 16  | 17  | 18  |
| 19  | 20  | 21  | 22  | 23  | 24  |
| 25  | 26  | 27  | 28  | 29  | 30  |
| 31  | 32  | 33  | 34  | 35  | 36  |
| 37  | 38  | 39  | 40  | 41  | 42  |
| 43  | 44  | 45  | 46  | 47  | 48  |
| 49  | 50  | 51  | 52  | 53  | 54  |
| 55  | 56  | 57  | 58  | 59  | 60  |
| 61  | 62  | 63  | 64  | 65  | 66  |
| 67  | 68  | 69  | 70  | 71  | 72  |
| 73  | 74  | 75  | 76  | 77  | 78  |
| 79  | 80  | 81  | 82  | 83  | 84  |
| 85  | 86  | 87  | 88  | 89  | 90  |
| 91  | 92  | 93  | 94  | 95  | 96  |
| 97  | 98  | 99  | 100 | 101 | 102 |
| 103 | 104 | 105 | 106 | 107 | 108 |
| 109 | 110 | 111 | 112 | 113 | 114 |
| 115 | 116 | 117 | 118 | 119 | 120 |



diagonali, začenši z drugo. V nekaj potezah nam tako na rešetku ostanejo natančno vsa praštevila, manjša od 127.

Matematik S. Ulam si je na nekem dolgem sestanku preganjal dolgčas s tem, da je na list narisal kvadratno mrežo in vanjo razvrščal po spirali zaporedna naravna števila podobno kot na sliki 1. Nato se je pozabaval z obkroževanjem vseh vpisanih praštevil in presenečen opazil, da se večinoma nahajajo vzdolž nekaterih diagonalnih premic. Blizu središča ta lastnost še ni tako izrazita kot dlje od njega, kjer se tudi ohranja. Ulam je s pomočjo računalnika in znane tabele praštevil uspel v laboratoriju izdelati sliko spirale, na kateri je

prvih 65 000 naravnih števil. Izsek tega vzorca, ki ga imenujemo *Ulamov prt*, je na sliki 2.

|    |    |    |    |    |    |    |    |    |
|----|----|----|----|----|----|----|----|----|
| 65 | 64 | 63 | 62 | 61 | 60 | 59 | 58 | 57 |
| 66 | 37 | 36 | 35 | 34 | 33 | 32 | 31 | 56 |
| 67 | 38 | 17 | 16 | 15 | 14 | 13 | 30 | 55 |
| 68 | 39 | 18 | 5  | 4  | 3  | 12 | 29 | 54 |
| 69 | 40 | 19 | 6  | 1  | 2  | 11 | 28 | 53 |
| 70 | 41 | 20 | 7  | 8  | 9  | 10 | 27 | 52 |
| 71 | 42 | 21 | 22 | 23 | 24 | 25 | 26 | 51 |
| 72 | 43 | 44 | 45 | 46 | 47 | 48 | 49 | 50 |
| 73 | 74 | 75 | 76 | 77 | 78 | 79 | 80 | 81 |

Slika 1



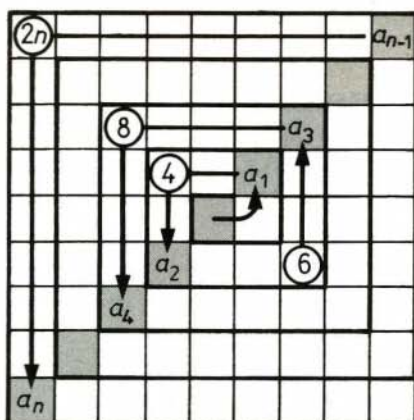
Slika 2

Števila na diagonali prta lahko izrazimo s preprosto formulo, ki jo dobimo takole. Krenimo po spiralni poti iz sredine. Prvo število, ki ga srečamo na "naraščajoči" glavni diagonali, zaznamujemo z  $a_1$ , naslednje z  $a_2$  in tako nadaljujmo (torej je  $a_1 = 3$ ,  $a_2 = 7$ ,  $a_3 = 13$ , ...). Od središča do  $a_1$  smo napravili en ovinek in prešli dve polji, od  $a_1$  do  $a_2$  smo spet enkrat zavili in prešli štiri polja, nato pa smo od  $a_2$  do  $a_3$  potrebovali šest polj, od  $a_{n-1}$  do  $a_n$  pa je tedaj pot dolga  $2n$  kvadratov. Torej velja zveza  $a_n = a_{n-1} + 2n$ . Če jo zaporedoma uporabimo za  $n$ ,  $n-1$ ,  $n-2$ , ..., dobimo:

$$\begin{aligned} a_n &= a_{n-1} + 2n = a_{n-2} + 2(n-1) + 2n = \dots \\ &= a_1 + 2(2 + 3 + \dots + n) = n^2 + n + 1 \end{aligned}$$

in formula je tu:  $a_n = n^2 + n + 1$ .

Če namesto z 1 v sredini začnemo z  $m$ , za števila na diagonali dobimo formulo  $a_n = n^2 + n + m$ . Pri  $m = 17$  in pri  $m = 41$  dobimo dve izmed mnogih "formul za praštevila", ki jih je že v 18. stoletju odkril veliki švicarski matematik *Leonhard Euler*. Prva da praštevila za vsak  $n \in \{0, 1, 2, \dots, 15\}$ , druga (ki je najbolj znana) pa celo za vsak  $n \in \{0, 1, \dots, 39\}$ . To pomeni, da je diagonala kvadrata velikosti  $40 \times 40$  na Ulamovem prt, ki se začne v sredini z 41, v celoti zapolnjena s praštevili.



|     |     |     |  |     |     |     |    |     |     |     |    |     |    |    |     |     |     |     |     |
|-----|-----|-----|--|-----|-----|-----|----|-----|-----|-----|----|-----|----|----|-----|-----|-----|-----|-----|
|     |     |     |  | 293 |     |     |    |     |     |     |    |     |    |    |     |     | 283 |     | 281 |
|     |     |     |  |     | 233 |     |    |     |     | 229 |    | 227 |    |    |     |     |     | 223 |     |
|     |     |     |  |     |     | 181 |    |     | 179 |     |    |     |    |    |     |     | 173 |     |     |
|     | 239 |     |  |     |     | 139 |    | 137 |     |     |    |     |    |    |     |     | 131 |     |     |
|     |     |     |  |     |     | 103 |    | 101 |     |     |    |     |    | 97 |     |     |     |     | 277 |
|     | 241 |     |  |     |     |     |    |     |     | 73  |    | 71  |    |    |     |     |     |     |     |
|     |     |     |  |     | 107 |     |    |     |     |     |    | 53  |    |    |     |     |     |     |     |
|     |     |     |  |     |     | 79  |    |     |     |     | 43 |     |    |    |     | 127 |     |     |     |
|     |     | 191 |  | 109 |     |     | 59 |     | 41  |     |    |     |    |    |     |     | 167 |     |     |
|     |     |     |  |     |     |     |    | 47  |     |     |    |     | 67 |    |     |     |     |     |     |
| 307 |     | 193 |  |     |     |     | 61 |     |     |     |    |     |    |    |     |     |     |     | 271 |
|     |     |     |  | 149 |     | 83  |    |     |     |     |    |     | 89 |    |     |     |     |     |     |
|     |     |     |  |     | 113 |     |    |     |     |     |    |     |    |    |     |     | 163 |     | 269 |
|     |     |     |  |     | 151 |     |    |     |     | 157 |    |     |    |    |     |     |     | 211 |     |
| 311 |     | 197 |  | 199 |     |     |    |     |     |     |    |     |    |    |     |     |     |     |     |
|     | 251 |     |  |     |     |     |    | 257 |     |     |    |     |    |    | 263 |     |     |     |     |
| 313 |     |     |  |     | 317 |     |    |     |     |     |    |     |    |    |     |     |     |     |     |

Poslovimo se zdaj od prvega vprašanja in odgovorimo na drugo. V ta namen vzemimo poljubno število  $n > 2$ , zapišimo  $m = 2 \cdot 3 \cdots n$  in si oglejmo zaporedje  $m + 2, m + 3, \dots, m + n$ . Število  $m + 2$  je deljivo z 2,  $m + 3$  s 3, ...,  $m + n$  pa z  $n$ , torej so vsa sestavljena. Razlika med sosednjima prašteviloma (pred in po navedenem zaporedju) je vsaj  $n$ , nasploh pa poljubno velika.

Zanimiva je tudi druga skrajnost. Le praštevili 2 in 3 sta sosedni naravni števili, parov praštevil, ki se razlikujeta za dve, pa je več. Rečemo jim pari praštevil dvojčkov. Naštejmo nekaj najmanjših:

3, 5; 5, 7; 11, 13; 17, 19; 29, 31; 41, 43; 59, 61; 71, 73; ...

in povejmo, da je eden največjih znanih dvojčkov par  $9 \cdot 2^{211} - 1, 9 \cdot 2^{211} + 1$  (števili imata v desetiškem zapisu po 65 cifer).

Je tudi teh parov brez konca, tako kot vseh praštevil? Vprašanje zveni preprosto in je znano pod imenom problem praštevil dvojčkov, odgovora nanj pa do danes še ne poznamo. Uvrščamo ga med najslavnejše nerešene matematične probleme.

Kljub tem težavam o parih praštevil dvojčkov vendarle lahko nekaj povejmo. Poglejmo spet zaporedje praštevil in označimo pare dvojčkov:

**2, 3, 5, 7, 11, 13, 17, 19, 23, 29, 31, 37, 41, 43, 47, 53, 59, 61, 67..**

Opazili ste, da edino 5 nastopa v dveh parih dvojčkov. Dokažimo, da ima res samo praštevilo 5 to lastnost.

Števila  $p, p + 2$  in  $p + 4$  pri deljenju s 3 dajo različne ostanke, zato je eno od njih deljivo s 3. Če hočemo, da so vsa tri praštevila, mora biti  $p = 3$ , odkoder sledi naša trditev.

Podobno doženemo naslednjo lastnost. Če sta prvo in zadnje število trojice  $p, p + 1, p + 2$  praštevili (dvojčka) in velja  $p > 3$ , potem je vmesno število  $p + 1$  deljivo s 6. Dokaz prepustimo bralcu. Razen v primeru (3, 5) je par dvojčkov torej vedno oblike  $(6k - 1, 6k + 1)$ ,  $k \in \mathbb{N}$ .

O tem, kako gosto so posejani pari dvojčkov v zaporedju vseh praštevil, vemo bolj malo. Na začetku zaporedja jih srečamo mnogo, obsežnejša preglednica praštevil pa pokaže, da kasneje pari dvojčkov nastopajo vedno redkeje. Pokažimo, da je med pari zaporednih praštevil neskončno takšnih, ki niso pari dvojčkov.

Res, če je parov praštevil dvojčkov končno mnogo, potem to očitno drži. V nasprotnem primeru pa pogledjmo tiste pare zaporednih praštevil  $(p, q)$ , pri katerih so  $(p - 2, p)$  pari dvojčkov. Takšnih parov je (po predpostavki) neskončno in očitno, razen pri  $p = 5$ , nobeden ni par dvojčkov.

S tem smo trditev dokazali, toda žal nam pove bore malo. Vsaj to bi še radi vedeli, če je praštevil, ki niso vključena v pare dvojčkov, tudi neskončno mnogo. Če bi jih bilo le končno število, potem bi moralo biti parov praštevil

dvojčkov brez konca (vseh praštevil je neskončno), s tem pa "rešen" problem praštevil dvojčkov. Toda ta je še nerešen, zato jih je končno mnogo. Je to res dokaz? Seveda ne.

Za tehten odgovor na vprašanje, ki smo si ga postavili, bomo potrebovali kanček znamenitega Dirichletovega izreka.

**IZREK:** Naj bosta  $a$  in  $b$  tuji naravni števili. Potem je v množici  $\{ak + b : k \in \mathbb{N}\}$  neskončno praštevil.

Dokaz tega izreka, ki ga je nemški matematik *P.G. Lejeune–Dirichlet* objavil leta 1837, je težak in ni elementaren. Kasneje so ga drugi poenostavili, toda tudi najpreprostejši znani dokaz je še vedno zelo zapleten in krepko presega Presekov okvir. Za nekatere posebne primere, npr.  $a = 4$ ,  $b = 3$  ali  $a = 6$ ,  $b = 5$ , je izrek vendarle mogoče preprosto dokazati. Ob tem se ne bomo zadrževali, pač pa se lotimo zadane naloge.

Preverimo, da nobeno število oblike  $21k + 5$ ,  $k \in \mathbb{N}$ , ne more biti udeleženo v paru praštevil dvojčkov. Res, za dve manjše število  $21k + 3$  je deljivo s 3, za dve večje število  $21k + 7$  pa je deljivo s 7. Obe sta večji od 7 in zato ne moreta biti praštevili. Po Dirichletovem izreku (za  $a = 21$  in  $b = 5$ ) je med števili  $21k + 5$ ,  $k \in \mathbb{N}$ , neskončno praštevil, ki po prejšnjem ne pripadajo parom dvojčkov. Z enako lastnostjo se odlikujejo še mnoga druga zaporedja.

Naloga je rešena, naš izlet v svet praštevil pa sklenimo s preglednico praštevil (z označenimi pari dvojčkov) in s kopico vprašanj.

|    |    |     |     |     |     |     |     |     |     |     |     |     |     |     |     |
|----|----|-----|-----|-----|-----|-----|-----|-----|-----|-----|-----|-----|-----|-----|-----|
| 2  | 31 | 73  | 127 | 179 | 233 | 283 | 353 | 419 | 467 | 547 | 607 | 661 | 739 | 811 | 877 |
| 3  | 37 | 79  | 131 | 181 | 239 | 293 | 359 | 421 | 479 | 557 | 613 | 673 | 743 | 821 | 881 |
| 5  | 41 | 83  | 137 | 191 | 241 | 307 | 367 | 431 | 487 | 563 | 617 | 677 | 751 | 823 | 883 |
| 7  | 43 | 89  | 139 | 193 | 251 | 311 | 373 | 433 | 491 | 569 | 619 | 683 | 757 | 827 | 887 |
| 11 | 47 | 97  | 149 | 197 | 257 | 313 | 379 | 439 | 499 | 571 | 631 | 691 | 761 | 829 | 907 |
| 13 | 53 | 101 | 151 | 199 | 263 | 317 | 383 | 443 | 503 | 577 | 641 | 701 | 769 | 839 | 911 |
| 17 | 59 | 103 | 157 | 211 | 269 | 331 | 389 | 449 | 509 | 587 | 643 | 709 | 773 | 853 | 919 |
| 19 | 61 | 107 | 163 | 223 | 271 | 337 | 397 | 457 | 521 | 593 | 647 | 719 | 787 | 857 | 929 |
| 23 | 67 | 109 | 167 | 227 | 277 | 347 | 401 | 461 | 523 | 599 | 653 | 727 | 797 | 859 | 937 |
| 29 | 71 | 113 | 173 | 229 | 281 | 349 | 409 | 463 | 541 | 601 | 659 | 733 | 809 | 863 | 941 |

1. Katera od števil 101, 1001, 10001 in 100001 so praštevila?
2. Ali obstaja tak  $n \in \mathbb{N}$ , da so  $n$ ,  $2n + 1$  in  $5n - 1$  hkrati praštevila?
3. H.E. Dudeney je leta 1907 ugotovil, da ima od (tedaj) znanih praštevil le 11 v desetiškem zapisu samo enke. Dokazal je, da so števila  $a_k = \underbrace{11 \dots 1}_k$ ,

kjer je  $3 \leq k \leq 18$ , vsa sestavljena, in objavil vprašanje, če je katero od števil  $a_k$ ,  $k > 18$ , praštevilo. Eden od bralcev je kmalu ugotovil, da je že  $a_{19}$  praštevilo. Tudi  $a_{23}$  je praštevilo, ni pa znano, če je med števili  $a_k$  neskončno praštevil. In navsezadnje še naloga. Dokaži, da velja sklep: Če je  $a_n$  praštevilo, je tudi  $n$  praštevilo.

4. Dokaži, da sta enakovredni trditvi:
  - a) Parov praštevil dvojčkov je končno mnogo.
  - b) Le končno mnogo števil iz množice  $\{n^2 - 1 : n \in \mathbb{N}\}$  ima natanko štiri delitelje v  $\mathbb{N}$ .
5. Dokaži, da produkt praštevil dvojčkov pri deljenju s 36 da ostanek 35, če le ni to par (3, 5).
6. Poišči med zaporedji  $\{ak + b : k \in \mathbb{N}\}$ , kjer sta na voljo tuji naravni števili  $a$  in  $b$ , neskončno takih, ki ne vsebujejo nobenega praštevila iz parov dvojčkov.

Odgovore in rešitve najdete na strani 117.

*Boris Lavrič*

## TRI NALOGE

### DOTIKANJA

Na stranici  $AB$  trikotnika  $ABC$  leži točka  $D$ . Dokaži, da se kroga  $k_1$  in  $k_2$ , včrtana v trikotnika  $ADC$  in  $BCD$ , dotikata natanko takrat, kadar se v trikotnik  $ABC$  včrtani krog v točki  $D$  dotakne stranice  $AB$ . Kdaj se med sabo dotikata kroga, ki sta pričrtana trikotnikoma  $ADC$  in  $BCD$  ob stranicah  $AD$  in  $DB$ ?

### PLAŠČA

Stožec in valj imata skupno osnovno ploskev in enako višino. Kateri od obeh ima večji plašč, če stranica stožca oklepa z osnovno ploskvijo kot  $\alpha$ ? Za reševanje naloge ni nujno poznavanje kotnih funkcij.

### PROJEKCIJA

Kako naj obrnemo kvader, ki ga projiciramo pravokotno na ravnino  $\Pi$ , da bo ploščina projekcije največja? Kolikšna je ta ploščina, če robovi kvadra merijo  $a$ ,  $a$  in  $2a$ ?

*Boris Lavrič*

## DOGODEK V PLOŠČATEM KONDENZATORJU

### Elektron

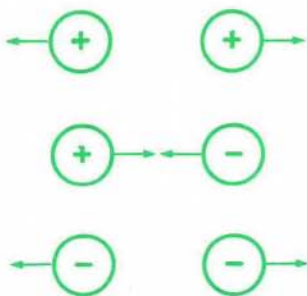
Predstavimo najprej glavnega junaka zgodbe. Nekateri izmed vas ga že dobro poznajo, za druge pa povejmo samo nekaj besed o elektronu in o drugih nastopajočih.

Elektron je nenavadna oseba, ki se pojavi zdaj v tej, zdaj v oni preobleki. Nam se bo predstavil kot majhen delec, manjši, kot si lahko predstavljamo. Mislimo si, da bi vse razdalje biljonkrat povečali, tako da bi se metrska palica povečala na sedemkratno razdaljo od Zemlje do Sonca. Elektroni bi bili v tem primeru vsekakor manjši kot bakterije.

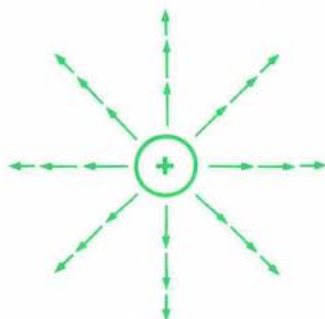
Kjub temu, da ima elektron majhno maso, je "vplivna oseba". Ima namreč naboj. Nastopajoči imajo eni pozitiven, drugi negativen naboj. Elektron ima negativen naboj. Da je zgodba bolj napeta, se delci z nabojem istega znaka odbijajo, nasprotno naelektreni pa se privlačijo. Sila je velika, če sta "osebi" blizu skupaj, z oddaljenostjo pa pojema.

### Električno polje

Med pohajkovanjem naokrog se lahko elektronu marsikaj pripeti. Če zagleda pozitivno naelektren predmet, bo pohitel proti njemu, negativno naelektrenemu pa se bo izognil. V prostor postavimo naelektrena telesa. V vsaki točki prostora bo na elektron delovala sila kot posledica privlačanja in odbijanja oko-



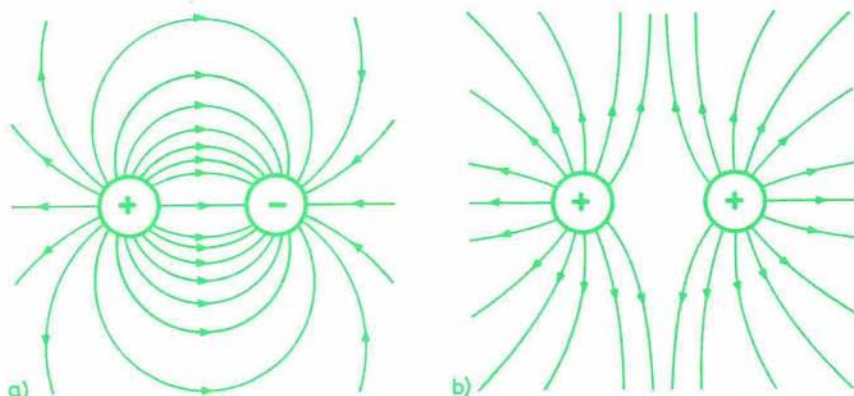
Slika 1. Sile med naelektrenimi delci



Slika 2. Sile na pozitivno naelektren delec v okolici pozitivno naelektrenega valja.

liških teles. Če v vsaki točki prostora zapišemo smer in velikost te sile, nastane pred nami nekakšen vodič za elektrone po prostoru. Sile povežemo v neprekinjeno črto in tako dobimo krivulje, imenovane silnice. Zaradi naelektrenih teles je gibanje elektrona v prostoru popolnoma drugačno, kot bi bilo brez njih. Pravimo, da naelektrena telesa ustvarijo okrog sebe električno polje. Dogovorjeno je, da smer silnic električnega polja v okolici naelektrenega telesa določa sila, ki bi delovala na pozitivno naelektren delec, na las podoben elektronu.

Na sliki 2 so narisane silnice za naelektren valj na ravnini, ki valj povprek prereže (pogled od zgoraj). Če vzamemo namesto pozitivno naelektrenega delca elektron, se spremeni le smer silnic. Smer sile na elektron v neki točki je določena s smerjo tangente na silnico v tej točki. Zanimiva sta naslednja primera:



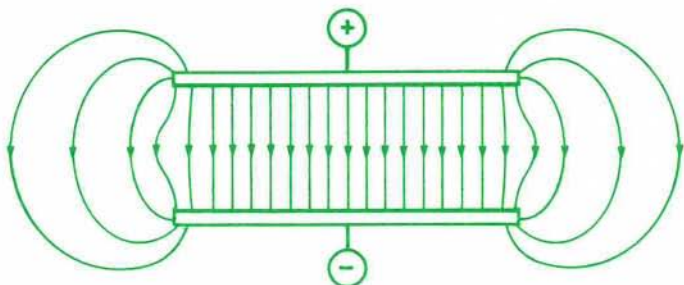
Slika 3. a) Silnice električnega polja dveh nasprotno naelektrenih valjev, b) silnice električnega polja dveh enako naelektrenih valjev.

### Ploščati kondenzator

Kot ni kavbojev in Indijancev brez saloona, ni elektronov brez ploščatega kondenzatorja. Dve vzporedni kovinski plošči, ki sta nasprotno naelektreni, sta ploščati kondenzator. Poizkusimo narisati silnice električnega polja ploščatega kondenzatorja (slika 4).

Opazimo, da je sila na elektron med ploščama enako velika v vsaki točki in kaže povsod v isto smer; negativna plošča odbija elektron, pozitivna ga privlači. Če se pomaknemo bliže k prvi plošči, se pri tem oddaljimo od druge. Takšno električno polje zasluži posebno ime – imenujemo ga homogeno ele-

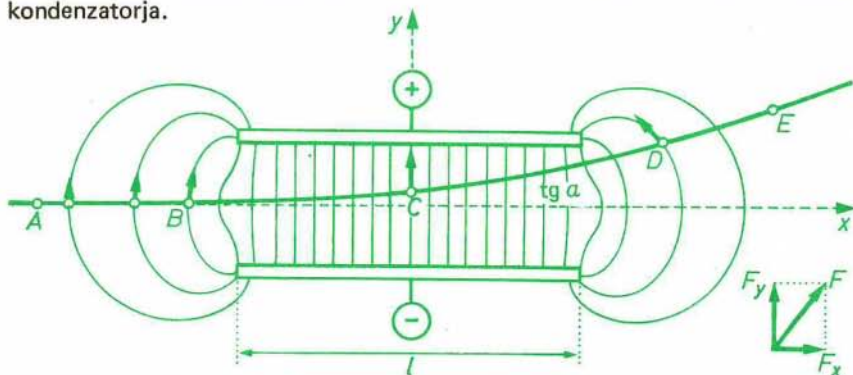
Slika 4. Električne silnice ploščatega kondenzatorja.



ktrično polje. Razmere pa se spremenijo, če se pomaknemo proti robovoma plošče. Sila ne kaže več povsod v isto smer, silnice se prično kriviti. Zunaj ploščatega kondenzatorja so silnice že podobne napihnjeni črki C. Z oddaljevanjem od plošč sila pojema. Zelo daleč od plošč sile ne bi mogli več izmeriti; za oddaljenega opazovalca se namreč zdi ploščati kondenzator kot škatlica, v kateri je enako pozitivno in negativno naelektrenih delcev – kot da v škatlici ne bi imeli naboja.

### Gibanje elektrona skozi ploščati kondenzator

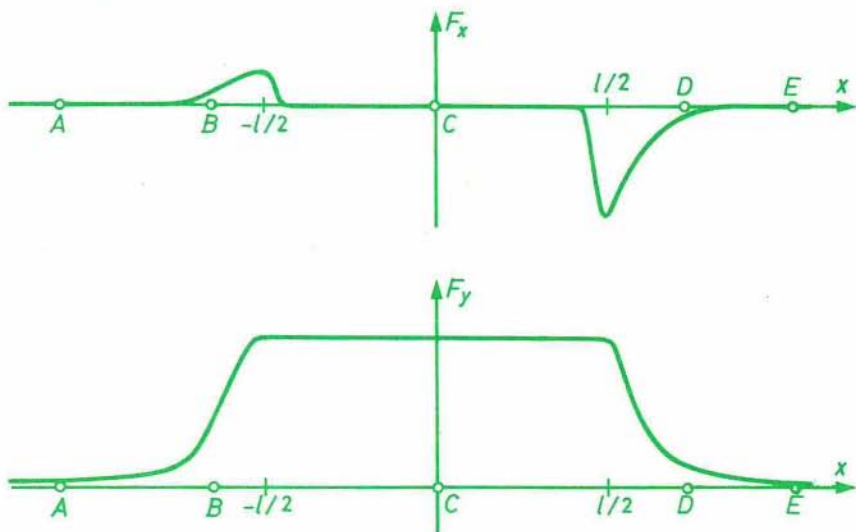
V tem dejanju doseže zgodba vrhunec. Elektron prihaja od zelo daleč in hiti naravnost proti sredi naelektrenega kondenzatorja (točka A na sliki 5). Zasledujmo njegovo gibanje! Da bomo opisu lažje sledili, postavimo dogajanje v neko mesto. Med seboj pravokotne ulice naj potekajo po osi  $x$  in po osi  $y$ , središče mesta (izhodišče koordinatnega sistema), pa naj bo na sredi ploščatega kondenzatorja.



Slika 5. Sila na elektron pri preletu skozi ploščati kondenzator.

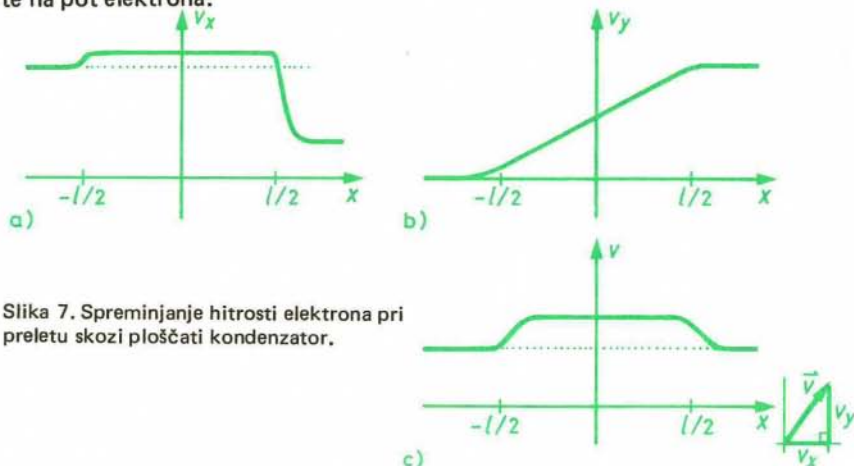
S slike razberemo, da deluje na elektron šibka sila v smeri osi  $y$ , ko je ta še daleč. Sila odklanja elektron iz smeri, v katero se je nameril. Ko se spreminja lega elektrona, se spreminja tudi smer sile. Obenem sila narašča, ker se elektron približuje naelektrenima ploščama. Sila v točki B ni več usmerjena po osi  $y$  — razstavimo jo lahko na pravokotni komponenti, v smeri osi  $y$  in v smeri osi  $x$ . Zdaj elektron zaide med plošči kondenzatorja (točka C). Silnice se zravnajo, sila je tu največja, ima zopet smer osi  $y$  in je povsod enaka. Na tem delu potovanja se elektronu pot najbolj ukrivi. In že se bližamo izhodu iz ploščatega kondenzatorja. Silnice se tu zopet ukrivijo prav tako kot pri vstopu v kondenzator, le da je sila v tem delu obrnjena nazaj, proti ploščam kondenzatorja. Na poti, po kateri elektron zapušča kondenzator, so sile že močno nagnjene glede na os  $y$  (točka D). Njihova komponenta v smeri osi  $x$  je zato večja kot na primer v točki B ter kaže v nasprotno smer. Z oddaljevanjem od kondenzatorja sila pojema, elektron se vse manj odklanja (točka E); njegova pot postaja vse bolj prema, dokler popolnoma ne pozabi na pripetljaj v kondenzatorju in se zopet giblje po premici.

Strnimo razmišljanje iz prejšnjega odstavka v pregledna grafa. Zabeležimo, kako sta se na poti elektrona spreminjali komponenti sile. Pri risanju vzamemo, da imajo sile v smereh koordinatnih osi pozitiven predznak, sile v nasprotnih smereh pa negativen predznak.



Slika 6. Spreminjanje komponente  $x$  sile (a) in spreminjanje komponente  $y$  sile (b) pri preletu elektrona skozi kondenzator.

Zdaj, ko poznamo potek sile, lahko narišemo še, kako so se komponenti hitrosti in hitrost elektrona spreminjale na poti skozi kondenzator. Spomnimo se drugega Newtonovega zakona, ki pravi: telo se giblje pospešeno, če nanj deluje stalna sila ( $F = ma$ ). Podobno kot smo razstavili silo na dva pravokotna prispevka, lahko razstavimo tudi hitrost. V vsaki točki ima hitrost smer tangente na pot elektrona.



Slika 7. Spreminjanje hitrosti elektrona pri preletu skozi ploščati kondenzator.

Elektron prihaja od daleč s hitrostjo v smeri osi  $x$  (slika 7). Najprej začne naraščati hitrost v smeri osi  $y$ , saj v točki A že deluje sila  $F_y$ . V bližini vstopnega dela kondenzatorja deluje na elektron krajši čas pozitivna sila  $F_x$ ; hitrost v smeri osi  $x$  se v tem delu rahlo poveča. V področju med ploščama deluje na elektron močna, stalna sila  $F_y$ . Gibanje je enakomerno pospešeno – hitrost se enakomerno veča v smeri osi  $y$ . Na izstopnem robu kondenzatorja doživi elektron močnejši sunek negativne sile  $F_x$ , ki ga zavira, zmanjša se mu hitrost v ustrezni smeri. Šibka sila  $F_y$ , ki jo čuti še nekaj časa po tem, ko je zapustil kondenzator, počasi pojema. Slika 7a in 7b kažeta spreminjanje komponent hitrosti elektrona pri preletu skozi ploščati kondenzator. Spreminjanje velikosti hitrosti lahko izračunamo z uporabo Pitagorovega izreka. Seštetiti moramo kvadrata obeh komponent in rezultat koreniti (glej sliko 7c). Na tak način dobimo s slik 7a in 7b sliko 7c. S slike 7c je razvidno, da potuje elektron naprej z enako hitrostjo, kot je priletel v ploščati kondenzator. Smer gibanja je odklonjena, glede na prvotno smer, za kot  $\alpha$ . (Glej sliko 5.)

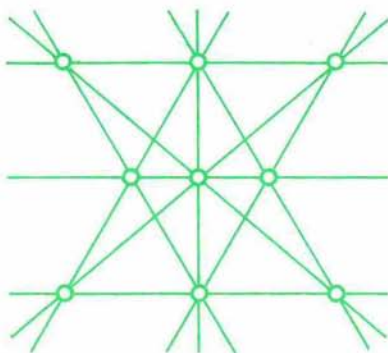
Zgodbe je tukaj konec. Glavni junak jo odkuri po premici, kot je prišel, ploščati kondenzator ostane in čaka na druge naelektrene prišleke. Podobnost s kavboji in Indijanci ni tako popolna, kot se je zdelo na začetku. Če le ti že pridejo v saloon po premici, njihova pot po izstopu zagotovo ni prema...

## PISMA BRALCEV

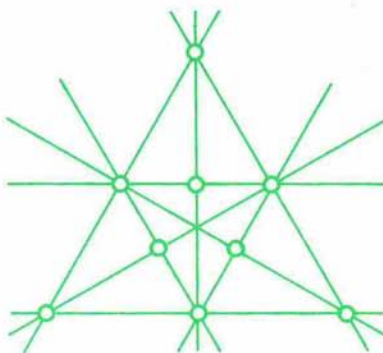
Dragi urednik!

V knjigi MATEMATIKA ZA 6. RAZRED OŠ sem na strani 101 naletela na nalogo, ki jo avtorji pripisujejo Isaacu Newtonu: *Kako naj zasadimo 9 dreves vzdolž devetih premic tako, da bodo na vsaki premici natanko tri drevesa?* (Naloga 356.) Na strani 190 iste knjige je omenjena rešitev, ki je po mojem mnenju napačna (slika 1). Rešitev, ki sem jo našla, ti pošiljam na sliki 2. Lepo te pozdravljam!

Tina Barbič



Slika 1



Slika 2

Tina tudi predlaga, da poiščete napako. Premislite! Ali je morda besedilo naloge premalo natančno? Poskusite tudi sami "posaditi drevesa". Bi lahko na pomoč poklicali računalnik?

Dušica Boben

## ANEKDOTE

**Johnov zakon:**

Človek, ki se ob nastopu težav smehlja, prav gotovo ve za koga, na kogar bo lahko zvrnil krivdo.

**Pravilo ažurnosti:**

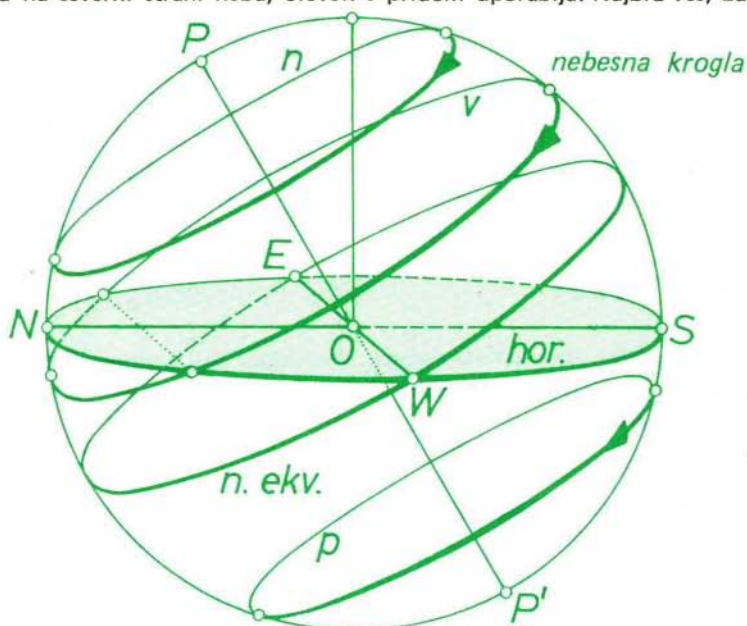
Ko si prizadevaš za rešitev kakega problema, vedno pomaga, če poznaš odgovor.

# ASTRONOMIA

### MERJENJE VIŠINE SEVERNICE

V naših krajih večina zvezd vzhaja in zahaja, kot vzhajata in zahajata Sonce in Luna. Mnogo zvezd navidezno kroži nad našim obzorjem, mnogo pa se jih navidezno giblje tudi pod njim; te zvezde ne vzidejo in jih nikoli ne vidimo (slika 1).

Zvezda Severnica je stalno nad našim obzorjem. Zanj je značilno še to, da med dnevom skoraj ne spreminja svoje lege na nebu, medtem ko se drugim zvezdam lega spreminja. Lastnost Severnice, da je praktično ves čas na istem mestu na severni strani neba, človek s pridom uporablja. Najbrž veš, da se v

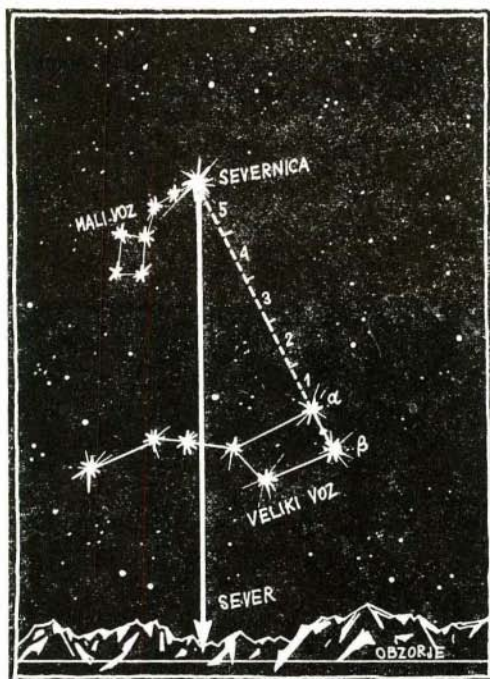


Slika 1. Zaradi vrtenja Zemlje zvezde (in tudi druga vesoljska telesa) navidezno krožijo okrog nebesne osi. Točki, kjer nebesna os prebode nebesno kroglo, imenujemo nebesna pola ali tečaja.  $P$  – severni nebesni pol, v bližini katerega leži Severnica (Polarnica),  $P'$  – južni nebesni pol,  $O$  – opazovališče,  $n$  – dnevna pot nadobzorniške zvezde,  $v$  – dnevna pot vzhajalke,  $p$  – dnevna pot podobzorniške zvezde. Puščica kaže smer navideznega vrtenja nebesne krogle oziroma kroženja zvezd.

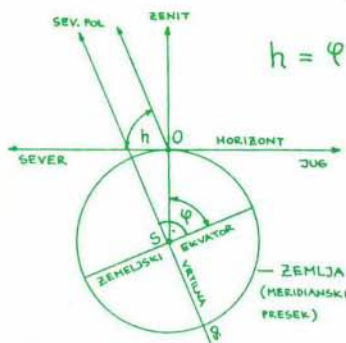
jasnih večerih in nočeh po Severnici preprosto in zanesljivo *orientiraš*, to je, ugotoviš glavne strani neba: sever, jug, vzhod in zahod. Če še ne veš ali pa si morda že pozabil, kako po Velikem vozu izslediš Severnico in se po njej orientiraš, si pozorno oglej sliko 2. Le obnovi znanje! Nikoli ne veš, kdaj ti bo koristilo.

Kakšna zvezda je Severnica in kakšne astronomske zanimivosti se pletejo okoli nje, tu ne nameravamo razpredati, saj je o tem Presek pisal že pred leti.\* V tem prispevku te želimo seznaniti le še z eno praktično uporabo Severnice: z merjenjem njene višine nad obzorjem lahko bolj ali manj natančno določimo zemljepisno širino svojega kraja (opazovališča).

Najprej poglejmo, kako približno določimo zemljepisno širino. Izhajamo iz spoznanja, da je na severni zemeljski polobli višina nebesnega pola nad obzorjem enaka zemljepisni širini kraja (slika 3). Ker leži Severnica v nepo-



Slika 2. Takole po Velikem vozu izslediš Severnico in se orientiraš po njej. Če gledaš proti Severnici, je pred teboj sever, za teboj jug, desno vzhod, levo pa zahod.



Slika 3. Višina  $h$  severnega nebesnega pola v kraju  $O$  na severni zemeljski polobli je enaka zemljepisni širini  $\varphi$  kraja. (Kota  $\varphi$  in  $h$  sta enaka, ker sta kota s pravokotnima krakoma drug na drugem). Severnica leži v neposredni bližini pola (le slabo  $1^\circ$  stran). Zato je višina Severnice približno enaka zemljepisni širini kraja.

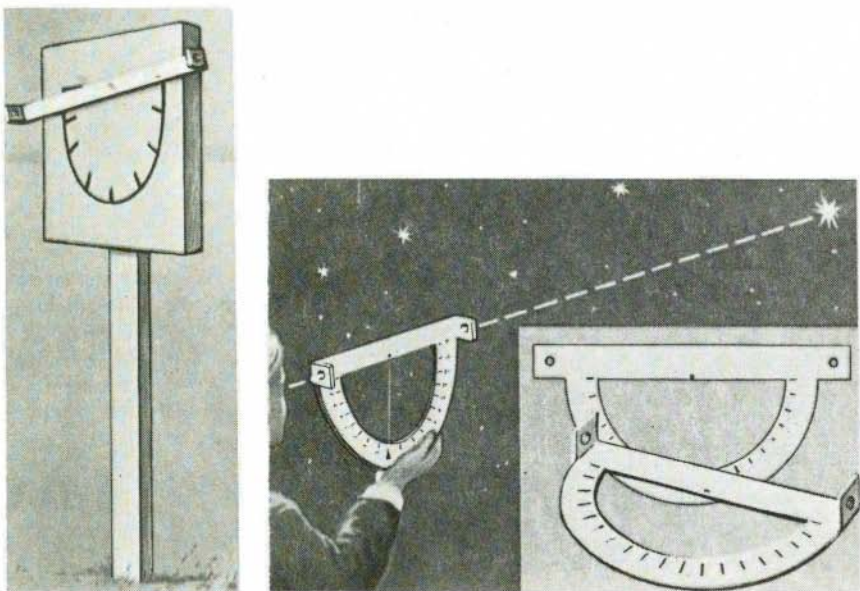
\* O Severnici, Presek 1 (1973/74), 146.

sredni bližini severnega nebesnega pola, je njena višina približno enaka zemljepisni širini opazovališča. Če nismo preveč zahtevni, z višinomerom, ki si ga izdelamo kar sami ★★, večkrat (najmanj pa desetkrat) izmerimo višino Severnice. Približna zemljepisna širina je povprečna vrednost

$\bar{\varphi} = (h_1 + h_2 + \dots + h_{10})/10$ , če so  $h_1, h_2, \dots, h_{10}$  posamične meritve višine Severnice. Ocena je odvisna od tega, kako natančno smo merili višino Severnice, natančnost meritev pa od kakovosti izdelave višinomera. Zato čim bolje izdelajmo višinomer.

Za šolske namene je omenjeni način določitve zemljepisne širine zelo pripraven in dovolj natančen. Pri natančnejšem določevanju pa moramo upoštevati, da leži Severnica 47 kotnih minut ( $0^0 47'$ ) stran od severnega nebesnega pola. To pomeni, da tudi Severnica, prav tako kot druge zvezde, navidezno kroži okrog severnega nebesnega pola. Seveda se navidezno giblje po zelo majčkeni krožnici, kar vidimo z zmogljivejšimi daljnogledi, še bolje pa na fotografiji.

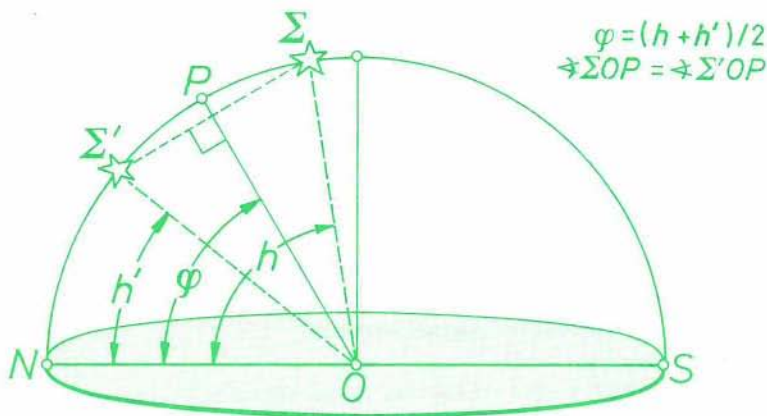
Zaradi kroženja je tako Severnica glede na naše obzorje enkrat najvišje, drugič (čez 12 ur) pa najnižje. Če bi z zmogljivim daljnogledom (takega imajo



Slika 4. Preprost višinomer, ki ga izdelamo sami.

★★ Glej knjižico *Astronomska opazovanja*, Presekova knjižnica 3 (1978), 231, 233, 234.

Slika 5. Natančno določanje zemljepisne širine kraja z merjenjem največje in najmanjše višine  $h$  in  $h'$  Severnice. Zaradi večje nazornosti sta višini (kota)  $h$  in  $h'$  narisani pretirano.  $\Sigma$  — lega Severnice, ko je najvišje na nebu,  $\Sigma'$  — lega Severnice, ko je najnižje. Za Ljubljano na primer velja:  $h = 46^\circ 50'$ ,  $h' = 45^\circ 16'$ . Sledi  $\varphi = \frac{1}{2}(h + h') = 46^\circ 3'$ . *Opomba:* Astronomi izmerijo zemljepisno širino še mnogo natančneje, kot smo omenili.



le astronomi) izmerili največjo višino  $h$  Severnice nad obzorjem in njeno najmanjšo višino  $h'$ , bi določili natančno vrednost zemljepisne širine z aritmetično sredino obeh višin, torej  $\varphi = \frac{1}{2}(h + h')$  (slika 5). Predlagam, da z višinomerom na opisani način oceniš zemljepisno širino svojega domačega kraja. Natančne meritve zemljepisne širine pa prepusti astronomom.

*Marijan Prosen*

## MATEMATIČNI KROŽEK

1. Srečko je letos dopolnil toliko let, kolikor znaša vsota cifer njegove rojstne letnice. Koliko je star?
2. Na simetrali vsake daljice, ki veže dve točki ravninske množice  $M$ , ležita natančno dve drugi točki iz  $M$ . Poskusi najti  $M$ , če veš, da ta vsebuje le končno mnogo točk.
3. Sešteli smo več kot deset zaporednih naravnih števil in dobili 1988. Katera števila smo sešteli?

*Boris Lavrič*

## IZPOPOLNIMO LOGO NA MAVRICI

V tem sestavku bomo spoznali, kako lahko logo na mavrici (Spectrum) dopolnimo z novimi možnostmi.

V logu prižigamo pike na zaslonu z ukazom DOT. Logo na mavrici pa ne pozna ukaza, ki bi nam povedal, ali je neka pika prižgana. Zato si pogledjmo, kako bi v logo vgradili ukaz DOT "nasprotni" ukaz DOTP [ :x :y ], ki vrne vrednost TRUE, kadar je pika s koordinatama x in y ( $-128 \leq x \leq 127$ ,  $-88 \leq y \leq 97$ ) črna (prižgana).

Kot vemo, vsaki piki ustreza bit v slikovnem pomnilniku. Z ukazom ZLOG izračunamo naslov zloga v slikovnem pomnilniku, v katerem je ta bit, in nato z ukazom BIT pogledamo njegovo vrednost.

```

TO DOTP :t
  OUTPUT 1 = BIT ( .EXAMINE ZLOG 128 + FIRST :t 87 - LAST :t )      !
    7 - REMAINDER (128 + FIRST :t ) 8
END
TO DINT :a :b
  OP INT ( :a / :b )
END
TO ZLOG :x :z
  OP 16384 + 32 * ((REMAINDER DINT :z 8 8) + 8 * (REMAINDER      !
    :z 8) + 64 * DINT :z 64) + DINT :x 8
END
TO BIT :w :b
  IF :b = 0 [ OP REMAINDER :w 2 ]
  OP BIT DINT :w 2 :b - 1
END

```

Opisana rešitev je razmeroma počasna. Precej učinkovitejšo rešitev dobimo, če uporabimo sistemsko rutino, ki pripada basiškemu ukazu POINT. Opišimo še, kako dopolnimo logo s to rutino. Takoj na začetku, ko vnesemo logo v računalnik, z ukazom .RESERVE 100 zasežemo del delovnega prostora. Z ukazom PRINT .RESERVED izvemo, da imamo na voljo zloge od naslova 64924 do 65024.

Ker ne poznamo načina prenosa parametrov v logovih ukazih, bomo za zvezo med logom in podprogramom v strojnem jeziku uporabili "nabiralnike". Podatke o piki bomo pustili v zlogih 65000 (x) in 65001 (y); rezultat pa bomo dobili v zlogu 65002. Nekoliko prirejen ukaz POINT pa bomo namestili od naslova 64924 naprej:

| naslov | prevod         | zbirnik        |                     |
|--------|----------------|----------------|---------------------|
| 64924  | 237 75 232 253 | LD BC, (65000) | (x, y) v BC         |
| 64928  | 205 170 34     | CALL 08874     | določi naslov zloga |
| 64931  | 71             | LD B, A        |                     |
| 64932  | 4              | INC B          | izloči              |
| 64933  | 126            | LD A, (HL)     | bit, ki             |
| 64934  | 7              | RLCA           | pripada             |
| 64935  | 16 253         | DJNZ 64934     | piki                |
| 64937  | 230 1          | AND +01        |                     |
| 64939  | 50 234 253     | LD (65002), A  | vrni vrednost bita  |
| 64942  | 201            | RET            |                     |

To storimo z ukazom MCDOTP:

```

TO MCDOTP
  MPUT 64924 [ 237 75 232 253 205 170 34 71 4 126 7 16 253 230 !
    1 50 234 253 201 ]
END
TO MPUT :nas :koda
  IF EMPTYP :koda [ STOP ]
  .DEPOSIT :nas FIRST :koda
  MPUT :nas + 1 BF :koda
END

```

Vnesemo še ukaz DOTP.

```

TO DOTP :t
  .DEPOSIT 65000 128 + FIRST :t
  .DEPOSIT 65001 88 + LAST :t
  .CALL 64924
  OP 1 = .EXAMINE 65002
END

```

**Pozor!** Ukaz DOTP ne preverja, ali je pika (x, y) res na zaslonu. Če ga izvedemo za podatke, ki ne določajo pike na zaslonu, logo prekine delo s sporočilom:

BASIC SYSTEM ERROR ? ? ? ? in DOTP

Vsakokratnemu vnašanju podprograma v strojnem jeziku se lahko izognemo, če ga shranimo na trak

```
.BSAVE "dotp [ 64924 20 ]
```

Tedaj na začetku za ukazom .RESERVE 100 zahtevamo še .BLOAD "dotp.

Opišimo še, kako lahko sestavimo svoje znake. Pokažimo to s primerom. Z ukazom MPUT shranimo v področje za uporabniške znake (kode 144 do



## SPOMINSKE ZNAMKE LETA 1987



Pošta Sovjetske zveze je lani počastila obletnice znanih znanstvenikov.

Leta 1437 — pred 550 leti — so izšle *Nove astronomske tablice* zvezdoslovca **Ulugbeka** (1392 — 1449). Timurlenkovega vnuka, edinega od mongolskih znanstvenikov, poznajo tudi zunaj njegove dežele. Okoli leta 1428 je v Samarkandu, v današnji Uzbeški SSR, zgradil zvezdar-no, ki je bila tedaj najimenitnejša na svetu.



Leta 1687 — pred 300 leti — so izšla *Mate-matična načela filozofije narave* (*Principia mathematica philosophiae naturalis*) Isaaca **Newtona** (1643 — 1727). To je bila ena od najpomembnejših knjig vseh časov. Vsebovala je osnove mehanike, ki velja še danes za dovolj velika in dovolj počasna telesa. To obletnico so počastile pošte več držav (fotografijo serije angleških znamk najdete v 5. številki 15. letnika Preseka).



Leta 1867 — pred 120 leti — je bila rojena **Marija Skłodowska — Curie** (umrla 1934). Dvakrat je dobila Nobelovo nagrado. Leta 1903 je dobila polovico nagrade za fiziko z možem Pierrom Curiejem "za skupna raziskovanja se-valnih pojavov, ki jih je odkril profesor Henri Becquerel" — ta je dobil drugo polovico nagrade. Leta 1911 je dobila sama nagrado za kemijo "za zasluge pri razvoju kemije z odkritjem elementov radija in polonija, z izločitvijo radija in z raziskovanjem narave in spojin tega znamenitega elementa."

Janez Strnad

V aprilu 1988 nas je za vedno zapustil prof. Pavel Kunaver, najmarkantnejši predstavnik amaterske astronomije pri nas. Paleta njegovega plodnega dela in udejstvovanja v preteklih 60, 70—tih letih je bila tako široka, da bi ji danes kar težko našli primerjavo: bil je učitelj, geograf, astronom, planinec, jamar, tabornik, pisatelj in slikar, predvsem pa človek, ki je spoštoval in ljubil naravo ter svoje znanje in ljubezen stalno posredoval mladini.

Pričujoče vrstice so namenjene njegovemu obsežnemu delu na področju



Profesor Kunaver v svoji zadnji "zvezdarni" na terasi doma upokojencev na Taboru v Ljubljani.

amaterske astronomije in uvajanju mladine v to "kraljevsko" znanost. Objavil je številne astronomske prispevke v reviji Proteus in v dnevnem časopisju, zelo čitane pa so njegove astronomske publikacije: *Potovanje po nebu* (1951), *Nebo nad nami* (1956), *Kažipot po nebu* (1975), *Vrtljiva zvezdna karta* (1980), *Pravljica in resnica o zvezdah* (1981).

Polnih 45 let je prof. Kunaver sistematično opazoval Sonce. Opravil je blizu 6000 opazovanj in zrisal preko 5000 slik s sončnimi pegami. Opazovanja je redno pošiljal v Zürich kjer je bila centrala za opazovanje Sonca.

Prof. Kunaver je uredil vrsto astronomskih opazovalnic, kjer je mladini skozi daljnogled prikazoval lepote zvezdnega neba in ji posredoval svoje znanje o vesolju in naravi: na nekdanji terasi Rudarske fakultete v Ljubljani, na strehi šole v Šubičevi ulici, na gimnaziji v Šentvidu, na strehi tovarne Vega in še kje. Tudi v gore in na taborjenja je jemal prof. Kunaver seboj astronomski daljnogled in prikazoval mladini zvezdno nebo.

Navzven je prof. Kunaver učinkoval čisto enostavno, njegov vpliv pa je bil globok in trajen. Čutili smo ga in ga pomnimo vsi njegovi nekdanji učenci. Prof. Kunaverju veliko dolgujemo in smo mu hvaležni.

*Bogdan Kilar*

---

## ULOMEK Z NAJDALJŠO PERIODO

### NAGRADNA NALOGA

Vsak ulomek lahko zapišemo tudi v obliki decimalnega števila. Vendar to decimalno število nima nujno končnega zapisa. Tako je npr.  $2/3 = 0.666666666666 \dots$  Pri takih številih se začno decimalke na nekem mestu ponavljati. Ponavljajočemu se delu rečemo perioda števila. Tako ima npr.  $1/7$  periodo 142857,  $2/3$  periodo 6, ...

Mislimo si lahko, da ima vsak ulomek periodo, če privzamemo, da je lahko perioda tudi 0. Tako periodo imajo vsi ulomki, katerih decimalni zapis je končen (npr.  $2/25$  ima periodo 0).

Poišči tisto naravno število  $M$  med 2 in 1000 ( $2 \leq M \leq 1000$ ), katerega ulomek  $1/M$  ima najdaljšo periodo.

*Matija Lokar*

## 23. TEKMOVANJE ZA SREBRNO VEGOVO PRIZNANJE

Letošnje občinsko tekmovanje za srebrno Vegovo priznanje je potekalo v soboto, 16. aprila. Sodelovalo je 1530 učencev 6. razreda, 1408 učencev 7. razreda in 1430 učencev 8. razreda. Med temi učenci je srebrno Vegovo priznanje osvojilo 394 šestošolcev, 457 sedmošolcev in 301 osmošolec. Naloge, ki jih je pod predsedstvom Jožeta Malešiča izbrala republiška tekmovalna komisija, so bile:

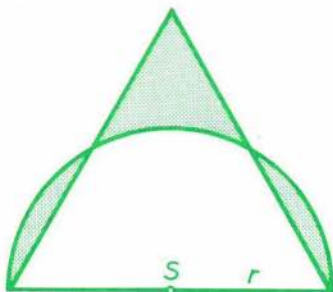
### 6. razred

1. Trговец je kupil za 212100 din blaga. Prodal je  $\frac{2}{3}$  tega blaga s 5% dobičkom. Ostanek blaga je prodal z  $\frac{1}{70}$  izgube. Koliko din je znašal končni dobiček?
2. Neko naravno število je deljivo s 7. Če ga delimo s 4, 5 ali 6, dobimo vedno ostanek 2. Poišči najmanjše tako število.
3. Neko naravno število ima na mestu enic cifro 0. Če jo odstranimo, dobimo število, ki je za 27405 manjše od prvotnega. Katero je prvotno število?
4. V trikotniku  $ABC$  meri kot  $\gamma = 40^\circ$ . Simetrali kota  $\gamma$  in zunanjšega kota  $\gamma_1$  sekata premico  $AB$  v točkah  $D$  in  $E$ , tako da leži točka  $B$  med točkama  $A$  in  $E$ . Trikotnik  $CDE$  je enakokrak. Izračunaj notranja kota  $\alpha$  in  $\beta$  trikotnika  $ABC$ .
5. Načrtaj trapez  $ABCD$  s podatki  $\overline{AB} = 7$  cm,  $\overline{CD} = 3$  cm,  $\sphericalangle A = 90^\circ$  in  $\sphericalangle BAC = 45^\circ$ .

### 7. razred

1. Poišči množico rešitev neenačbe  $\frac{1}{3} < \frac{1-n}{5} < \frac{22}{33}$ ,  $n \in \mathbb{Z}$
2. Avtomobilist prevozi z dvema litroma bencina 35 km. Vozi s stalno hitrostjo in prevozi v treh urah 280 km. Koliko časa bo vozil s petimi litri bencina?
3. Izračunaj ploščino štirikotnika, ki ima za oglišča točke s koordinatami  $A(-3, -1)$ ,  $B(3, -1)$ ,  $C(3, 5)$  in  $D(-1, 3)$ .
5. Stranica pravilnega večkotnika, ki ima 252 diagonal, meri 10 cm. Koliko meri njegov obseg?

4. Nad premerom polkroga je nacrtnan enakostranični trikotnik, kot kaže risba. Izrazi s polmerom  $r$  ploščino osenčenega lika.



#### 8. razred

1. Rešitev enačbe  $\frac{4x-2}{5} - \frac{1}{2}\left(\frac{1}{3}(x+9) - \frac{3x-1}{4}\right) = 3 - \frac{2(6-x)}{3}$

je abscisa presečišča premice  $p$  z abscisno osjo. Ta premica seče ordinatno os v točki  $A(0, 4)$ . Zapiši linearno funkcijo, ki ima za graf premico  $p$ .

2. a) Izračunaj kvadrat števila 19999999993 tako, da uporabiš obrazec za kvadriranje dvočlenika.  
b) Izračunaj produkt števila 130000000003 in 129999999997 tako, da uporabiš obrazec za razliko kvadratov.
3. Na zemljevidu Julijskih Alp, narisane v merilu 1 : 75000, so vrhovi Triglav (2864 m), Razorja (2601 m) in Prisojnika (2547 m) na eni premici. Razor je med Triglavom in Prisojnikom. Razdalja med Prisojnikom in Razorjem meri na zemljevidu 30 mm, razdalja med Razorjem in Triglavom pa 70 mm. Ali lahko z vrha Prisojnika vidimo vrh Triglava? Nariši ustrezno skico in odgovor preveri z računom.
4. Če oglišče  $C$  kvadrata  $ABCD$  s stranico  $a$  prezrcalimo preko oglišča  $A$ , dobimo točko  $E$ . Izrazi z  $a$  ploščino in obseg štirikotnika  $BCDE$ .
5. Večja kocka ima za 50% daljši rob kot manjša. Za koliko odstotkov ima večja kocka večjo površino in za koliko odstotkov večjo prostornino?

Aleksander Potočnik

# TEKMOVANJA

## 24. REPUBLIŠKO TEKMOVANJE OSNOVNOŠOLCEV IZ MATEMATIKE

V soboto, 14. maja 1988 se je 172 sedmošolcev in 226 osmošolcev, ki so se najbolje odrezali na občinskem tekmovanju, zbralo v Ljubljani, Celju, Mariboru, Kopru, Novi Gorici in Novem mestu na republiškem tekmovanju.

Petnajstčlanska komisija pod predsedstvom Jožeta Malešiča je pripravila naloge, pregledala rešitve, določila kriterij za podelitev zlatih Vegovih priznanj in izbrala ekipo za zvezno tekmovanje, ki je bilo letos v Smederevski Palanki. Vsi tekmovalci so prejeli Presekovke značke.

Zlato Vegovo priznanje so prejeli sedmošolci, ki so osvojili vsaj 14 od 25 možnih točk, in osmošolci, ki so osvojili vsaj 15 od 25 možnih točk. To so:

### 7. razred

I. nagrada: Karmen FLIS, Danila Kumar, Ljubljana

II. nagrada: Mitja ŠTRUKELJ, IX. korpus NOVJ, Nova Gorica

III. nagrada: Branko KAVŠEK, Edvard Kardelj, Lucija

Mitja MASTNAK, Franjo Malgaj, Šentjur

Iztok GRIL, Ivan Grohar, Škofja Loka

Tina PISAR, XI. SNOB Miloš Zidanšek, Šmartno

Priznanja so osvojili še: Borut KERŠEVAN, Ljubljana, Natalija SENČAR, Ljubljana, Valentin BATAGELJ, Dobravlje, Peter KROPE, Slov. Konjice, Suzana VEREN, Lesce, Tina PAVLIN, Nova Gorica, Miha NASTRAN, Škofja Loka, Aleš KEBER, Ravne, Marko KAVČIČ, Ljubljana, Damjan KOVAČIČ, Rogaška Slatina, Uroš MIDIČ, Ljubljana, Jure ZUPAN, Trzin, Aleš ZUPANČIČ, Maribor, Blaž MIHELJAK, Slovenj Gradec, Bojan GORNIK, Metlika, Tina JANČAR, Koper, Diallo THIERNO, Ljubljana, Niko SMREKAR, Trzin, Marko VIDMAR, Škofja Loka, Miha PETERNEL, Kranj, Robi PLEH, Ormož, Marko ZDOVC, Laško, Stanko HORJAK, Rimske Toplice, Jurij REGVAT, Maribor, Klara VIDRIH, Nova Gorica, Marko POTOČNIK, Škofja Loka, Urša FEGUŠ, Ljubljana, Matej ACCETTO, Ljubljana, Andreja MARKUN, Šenčur, David VIZJAK, Celje, Marko TKALČIČ, Izola, Janez MRAK, Radovljica, Melita RANT, Titovo Velenje, Janez KUŠAR, Škofja Loka, Neža VAVKEN, Ljubljana, Matej VALENČIČ, Ilirska Bistrica, Katarina VIDMAR, Celje, Barbara VEROVNIK, Slovenj Gradec, Natalija PODJAVORŠEK, Frankolovo, Boštjan LEVEC, Ljubljana, Blaž VALIČ, Nova Gorica, Tomaž KUPNIK, Ljubljana, Marjeta KOZOLE, Ljubljana, Tomi KLANČNIK, Vuzenica, Miran HRAŠČANEC, Murska Sobota, Helena ŠKRLJ, Ilirska Bistrica, Erika TUTA, Tolmin, Bogdan URŠIČ, Slovenj Gradec, Aleš HAJNŠEK, Novo mesto, Nina BERNOT, Ljubljana, Darja PAVLIN, Novo mesto.

## 8. razred

I. nagrada: Sašo DOLENC, Majda Vrhovnik, Ljubljana  
Mojca VILFAN, Maks Pečar, Ljubljana  
Janez VIHER, Slavko Šlander, Maribor

II. nagrada: Jernej STARE, Prežihov Voranc, Ljubljana

III. nagrada: Tomaž CEDILNIK, Ledina, Ljubljana

Priznanja so osvojili še: Tomaž SUŠNIK, Medvode, Marko SLAPAR, Križe, Dean VELDIN, Piran, Gregor IRT, Dobrova, Mihajlo POPOVIČ, Ljubljana, Samo OŠINA, Brežice, Gregor ŠEGA, Ljubljana, Mateja ANTOLIČ, Gorišnica, Peter LUŽEVIČ, Celje, Marko ŠETINC, Tržič, Klemen JERINA, Vrhnika, Robi MOHORČIČ, Novo mesto, Samo KOTNIK, Ravne, Tatjana JURANJI, Ljubljana, Anja POLJANŠEK, Mengeš, Martin VUK, Nova Gorica, Rok DEŽELAK, Hrastnik, Aleš ŠVIGELJ, Ljubljana, Petra ŠILAR, Limbuš, Damjan VODOPIVEC, Renče, Mateja RAIČ, Ljubljana, Andrej GORIŠEK, Ljubljana, Marko KUKRIKA, Ljubljana, Matjaž KURENT, Ljubljana, Marija MIHEVC, Logatec, Ivan ŠKOF, Ljubljana, Jure RUDEŽ, Ljubljana, Sašo HLEDE, Nova Gorica, Suzana PRELOVŠEK, Preserje, Alenka MAGAJNE, Solkan, Tjaša JUG, Solkan, Jure ZORKO, Brežice, Robi HAUKO, Murska Sobotna, Dejan LIPOVEC, Lendava, Neven GRŽANČIČ, Koper, Irena HOČEVAR, Mokronog, Gorazd TRUŠNOVEC, Idrija, Jan KLEMENČIČ, Ljubljana, Andrej KRAJNC, Malečnik, Sašo VRČKO, Griže, Tomaž GARTNAR, Medvode, Zlatko ZOBOVIČ, Maribor, Barbara BEČAN, Lovrenc na Pohorju, Aleksander SADIKOV, Ljubljana, Luka PAVLOVČIČ, Ljubljana, Urška GOLOB, Maribor, Miha TOMŠIČ, Brezovica, Janez POVH, Slov. Konjice, Ana BOŽIČ, Tolmin, Urška KOREN, Nova Gorica, Ana REMŠAK, Log – Dragomer, Andrej STROJNIK, Ljubljana, Smiljan VODOVNIK, Radlje ob Dravi, Jana KRISTANC, Kranj, Damjan DEMŠAR, Jesenice, Mojca PAVLIN, Ljubljana, Alan GREGOROVICH, Izola, Marko BOBEN, Kočevje, Marko FILIPČIČ, Koper, Dejan KRIŽAJ, Škofja Loka, Marjan MURŠEC, Ljubljana, Roman VERHOVŠEK, Ljubljana, Janez KOS, Zagorje, Klemen GABRIJEL, Kranj, Marko TRATAR, Ivančna Gorica, Mitja PIŠKUR, Ivančna Gorica, Aleš ROZMAN, Jesenice, Andreja ŠARLAH, Ljubljana, Mišo VUKADINOVIČ, Ljubljana, Hiacinta PINTAR, Škofja Loka, Matjaž JELENC, Železniki, Uroš ČOTAR, Renče, Barbara MOEREC, Ljubljana, Janez ZALETELJ, Novo mesto.

# REZULTATI

## NALOGE

### 7. razred

1. Mojca Pokrajculja je za svoje prijatelje skuhala poln lonec kaše. Muha je prišla prva. Dobila je eno desetino kaše. Za muho je prišla žaba. Tej je Mojca dala eno devetino preostale kaše. Zajec, ki je potem priskakljaj, je dobil osmino kaše, ki je še ostala. Lisica je dobila sedmino preostale kaše, volk šestino kaše, ki je ostala, ko je lisica pojedla svoj delež, medved pa je postrgal lonec do konca.  
Izračunaj, koliko kaše je dobil vsak.

2. Dokaži, da ima izraz

$$\frac{7^{2n+3} \cdot 7^{3n+2}}{7^{5n+2}}$$

enako vrednost za vse vrednosti spremenljivke  $n$ .

3. Kakšne oblike naj bo naravno število  $b$ , da bo izraz  $b^4 - 4b^3 + 4b^2$  deljiv s 3? Poišči vse rešitve.
4. Središče kroga je oglišče kvadrata s stranico  $a$ . Kolikšen mora biti polmer kroga, da bo ploščina preseka kroga in kvadrata enaka 50% ploščine kvadrata?
5. Enaki krožnici s polmerom 3 cm se sekata tako, da sta v vsakem presečišču tangenti na obe krožnici med sabo pravokotni. Načrtaj krožnici in opiši postopek. Izračunaj obseg preseka obeh krogov.

### 8. razred

1. Delavec dobi 4000 din na uro. Sprejme delo, ki naj bi ga opravil v 16 urah. Če to naredi prej, mu plačajo vsako prihranjeno uro 75% več.  
V kolikšnem času mora opraviti to delo, da bo zaslužil 5000 din na uro?
2. Katera trimestna naravna števila se povečajo za 54, če zamenjamo cifri na mestu enic in desetic, in se zmanjšajo za 360, če zamenjata svoji mesti cifri stotic in desetic?
3. Iz enakostraničnega valja s polmerom  $r$  izrežemo kvader. Osnovna ploskev kvadra ima eno stranico enako polmeru osnovne ploskve valja.  
Izrazi z  $r$  prostornino in površino kvadra.
4. Stranica pravilne petkrake zvezde meri 1 m. Če stranico podaljšamo za 1 cm, se ploščina zvezde poveča za  $2,13864 \text{ dm}^2$ .  
Izračunaj ploščino prvotne zvezde.
5. Mravlja se odpravi po zunanosti kvadraste škatle  $ABCDEFGH$  z odprtino

$EFGH$  iz točke  $E$  proti točki  $C$  po najkrajši poti. Dolžine robov so

$$\overline{AB} = 6 \text{ cm}, \quad \overline{BC} = 18 \text{ cm} \text{ in } \overline{BF} = 10 \text{ cm}$$

V točko  $C$  pride 2 sekundi prej, kot če bi šla po robovih  $EF$ ,  $FG$  in  $GC$ . (Škatla stoji z osnovno ploskvijo  $ABCD$  na tleh.)

S kolikšno hitrostjo se premika?

*Aleksander Potočnik*

## PRESEK V LETU 1989

Prvo številko letošnjega Preseka smo poslali vsem lanskim posamičnim naročnikom, na šole povsaj toliko izvodov, kolikor so jih naročale v preteklem šolskem letu. Želimo, da ostanete vsi dosedanji bralci zvesti Preseku tudi v naprej. Učitelje na šolah smo prosili, da pridobijo čim več naročnikov. Obenem smo jih prosili, da nam skupno število naročnikov pošljejo vsaj do 1.10. 1988, da bomo lahko natisnili pravo število izvodov druge številke lista za mlade matematike, fizike, astronome in računalnikarje. Če tega še niste storili, vas prosimo, da nemudoma zberete in odpošljete ustrezno naročilnico.

Celoletna naročnina pri skupinskem naročilu šole je bila objavljena v kolo fonu in v uvodniku prve številke. Znaša le 5.000.— din, če znesek nakažete do konca koledarskega leta. Obljubili pa smo vam, da vas bomo pravočasno obvestili, kolikšen znesek bodo morali nakazati naročniki, ki bodo svoje obveznosti poravnali šele po 1.1.1989. Cenik za leto 1989 vam posredujemo v naslednji tabeli:

|                    | vplačano do 31.12. 1988 | vplačano po 1.1. 1989 |
|--------------------|-------------------------|-----------------------|
| maloprodaja        | 10.000.—                | 15.000.—              |
| člani društva      | 8.000.—                 | 12.000.—              |
| skupinska naročila | 5.000.—                 | 10.000.—              |
| posamezna številka | 1.600.—/2.000.—         | 2.000.—/2.500.—       |
| stare številke     | 500.—/ 625.—            | 1.000.—/1.250.—       |
| Zvezdna karta      | 1.000.—/1.250.—         | 1.000.—/1.250.—       |
| Kazalo 1—10        | 1.000.—/1.250.—         | 2.000.—/2.500.—       |
| tujina             | 3.000.—Lit              | 3.000.—Lit            |

*Ciril Velkovrh, Boris Lavrič*

## NALOGE BRALCEV

Učitelji aktiva MA—FI iz Slovenskih Konjic so nam poslali naloge, ki so jih reševali njihovi učenci na osnovnošolskih tekmovanjih za Vegova priznanja. Z nekaterimi lahko poizkusite tudi vi.

### 5. razred

1. Sosed *A* ima vrt v obliki pravokotnika z dolžino 18 m in širino 80 dm. Sosed *B* ima vrt z enako ploščino kot sosed *A*, le da je njegov vrt kvadratne oblike. Ali bosta dolžini ograj enaki ali različni. Utemelji!
2. V treh košarah je skupno 141 jabolok. Če iz prve košare damo v drugo košaro 5 jabolok in v tretjo 11 jabolok, je v vseh treh košarah enako število jabolok. Koliko jabolok je bilo v vsaki košari? (R: 63, 42, 36)
3. Vstavi manjkajoče cifre, da bo zapisano množenje pravilno!

$$\begin{array}{r}
 x \ x \ x \ . \ x \ 2 \\
 \hline
 x \ 6 \ x \\
 x \ 0 \ 8 \\
 \hline
 x \ 1 \ 2 \ x
 \end{array}$$

### 6. razred

1. V trikotniku meri kot  $\alpha = 70^\circ$ , kot  $\gamma = 54^\circ$ . Izračunaj kota, ki ju oklepa simetrala kota  $\beta$  s stranico *AC*! (R:  $82^\circ$ ,  $98^\circ$ )
2. Za koliko odstotkov se poveča ploščina kvadrata, če stranico povečamo za petino njene dolžine? (R: za 44%)
3. Razredne proslave so se udeležili učenci, učitelji in starši. Na proslavi je bilo 16 učencev in štirje učitelji.  $\frac{5}{12}$  udeležencev je bilo očetov in  $\frac{1}{4}$  udeležencev je bilo mater. Koliko ljudi se je udeležilo proslave? (R: 60)
4. Načrtaj trikotnik *ABC* s podatki  $\alpha = 75^\circ$ ,  $v_c = 4$  cm in  $t_c = 5$  cm.

Učiteljem matematike iz Slovenskih Konjic se zahvaljujemo za že kar tradicionalno sodelovanje.

## 7. razred

1. Diagonale iz enega oglišča pravilnega večkotnika razdelijo ta večkotnik na 10 trikotnikov. Koliko je skupno število njegovih diagonal? Nariši tak večkotnik. Označi oglišča  $A_1, A_2, \dots$  in izračunaj, koliko odstotkov ploščine tega večkotnika predstavlja ploščina trikotnika  $A_1A_2S$ . ( $S$  je središče večkotnika.) (R: 54, 8.33%)
2. Dolžina hodnika 6.72 m je določena kot aritmetična sredina treh merenj. Rezultat prvega merjenja je 6.5 m, rezultat drugega pa 6.75 m. Kolikšen je rezultat tretjega merjenja? (R: 6.91 m)
3. Določi v koordinatni ravnini koordinate oglišč kvadrata  $ABCD$ , ki je osno someren glede na graf premega sorazmerja  $y = x$ , če poznaš lego oglišča  $A(5, 3)$ . (R: 1.:  $B(5, 5), C(3, 5), D(3, 3)$ ; 2.:  $B(3, 5), C(1, 3), D(3, 1)$ )
4. Cena vstopnice za stadion je bila 1500 din. Ko se je cena znižala, se je število gledalcev povečalo za 50%, celoten prihodek pa je narasel za 25%. Kolikšna je znižana cena vstopnice? (R: 1250 din)

## 8. razred

1. Reši enačbo:

$$x - \frac{3 - \frac{x-1}{4}}{2} = x - \frac{3 - \frac{8-x}{3}}{2} \quad (\text{R: } x = 5)$$

2. Dan je pravokotnik  $ABCD$  ( $\overline{AB} = 9 \text{ cm}, \overline{BC} = 6 \text{ cm}$ ). Na stranicah pravokotnika so točke  $M, N, P$  in  $Q$ , tako da velja:

$$\overline{AM} : \overline{MB} = \overline{BN} : \overline{NC} = \overline{CP} : \overline{PD} = \overline{DQ} : \overline{QA} = 2 : 1$$

Izračunaj razmerje ploščin pravokotnika  $ABCD$  in štirikotnika  $PQMN$ .  
(R: 9 : 5)

3. V ravnini koordinatnega sistema nariši pravokotnik z oglišči:  $A(-3, -1), B(5, -1), C(5, 3)$ . Določi:
  - a) Koordinati oglišča  $D$  (R:  $(-3, 3)$ )
  - b) Koordinati sečišča diagonal  $AC$  in  $BD$  (R:  $(1, -1)$ )
  - c) Enačbe premic, ki so nosilke stranic in diagonal pravokotnika.
4. Milan je trikrat mlajši od očeta in istočasno trikrat starejši od svoje sestre Mire. Oče in Mira imata skupaj 50 let. Koliko je star vsak izmed njih?  
(R: Oče 45, Milan 15, Mira 5)

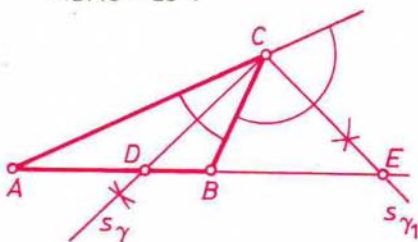
Naloge izbral *Damjan Kobal*

# REŠITVE NALOG

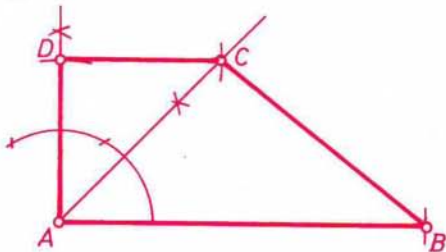
## TEKMOVANJE ZA SREBRNO VEGOVO PRIZNANJE – rešitev s str. 106

### 6. razred

1. Odg.: Končni dobiček znaša 6060 din.
2.  $v(4, 5, 6) = 2^2 \cdot 3.5 = 60$   
 $60 + 2 \notin V_7, 120 + 2 \notin V_7,$   
 $180 + 2 \notin V_7$   
 Odg.: Najmanjše tako število je 182.
3.  $\frac{9}{10}x = 27405 \Rightarrow x = 30450$   
 Odg.: Prvotno število je 3045.
4.  $\angle DCE = \angle DCB + \angle BCE = 20^\circ + 70^\circ = 90^\circ$  zato je  $\angle EDC = \angle DEC = 45^\circ$  in  $\angle DBC = 115^\circ, \angle BAC = 25^\circ$ .



5.

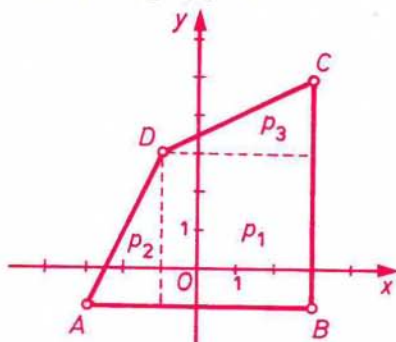


114

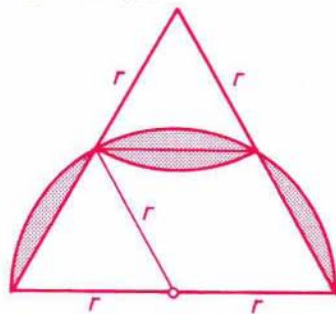
Iz enakosti  $\angle ACD = \angle CAB = 45^\circ = \angle CAD$  sledi  $\overline{AD} = \overline{CD}$ , kar omogoča preprosto konstrukcijo.

### 7. razred

1. Odg.:  $n \in \{-1, -2\}$
2. Odg.: S 5 litri bencina bo vozil 15/16 ure (56 min 15 s).
3.  $p = p_1 + p_2 + p_3 = 24$



4. Osenčeni krožni odseki so skladni, zato je iskana ploščina enaka šestini ploščine kroga, torej  $p = \pi r^2 / 6$ .

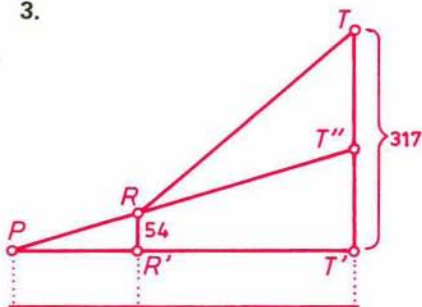


5. Iz enakosti  $\frac{n \cdot (n-3)}{2} = 252$  dobimo  $n = 24$ , torej meri obseg 240 cm.

### 8. razred

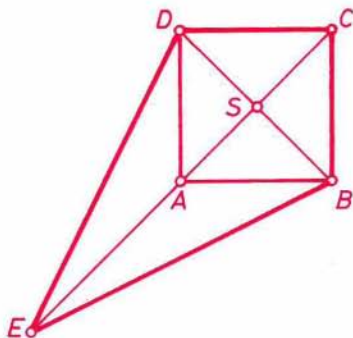
1. Enačba ima rešitev  $x = 3$ , zato na premici  $p$  leži točka  $B(3, 0)$ , funkcija pa ima enačbo  $y = -\frac{4}{3}x + 4$
2. a)  $(a+b)^2 = a^2 + 2ab + b^2$   
 $a = 20000000000$ ,  $b = -7$   
 b)  $a^2 - b^2 = (a+b)(a-b)$   
 $a = 130000000000$ ,  $b = 3$

3.



S pomočjo Talesovega izreka dobimo  $T'T'' = 180$  m, torej se Triglav s Prisojnika vidi.

4. Pitagorov izrek za trikotnik  $ABS$  nam da enakost  $EB = a\sqrt{5}$ , odkoder dobimo  $o = 2(1 + \sqrt{5})a$ . Ploščina meri  $2a^2$ .



5. Odg.: Površini se razlikujeta za 125%, prostornini pa za 237,5%.

Aleksander Potočnik

### EKSISTENCA — rešitev s str. 120

Razlika  $(5x - 1) - 2(2x + 1) = x - 3$  je celo število, zato je tudi  $x$  celo število. Zdaj brž vidimo, da je vsaj eno izmed danih treh števil deljivo s tri in odtod sklenemo, da vsa tri ne morejo biti praštevila.

Boris Lavrič

## 24. REPUBLIŠKO TEKMOVANJE OSNOVNOŠOLCEV IZ MATEMATIKE — rešitev s str. 108

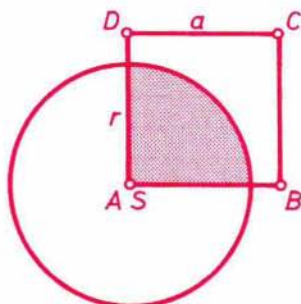
### 7. razred

1. Odg.: Vsak je dobil  $1/10$  kaše razen medveda, ki je dobil  $1/2$  kaše.

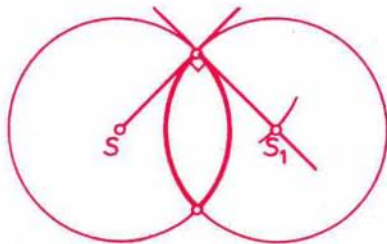
$$2. \frac{7^{2n+3} \cdot 7^{3n+2}}{7^{5n+2}} = 7^3$$

3.  $b^4 - 4b^3 + 4b^2 = b^2(b-2)^2$   
Odg.: Število  $b$  mora biti deljivo s 3 (zaradi prvega faktorja), ali pa mora pri deljenju s 3 dati ostanek 2 (zaradi drugega faktorja).

$$4. \frac{\pi r^2}{4} = \frac{a^2}{2} \Rightarrow r = a \sqrt{\frac{2}{\pi}}$$



$$5. o = \pi r = 3\pi \text{ cm}$$



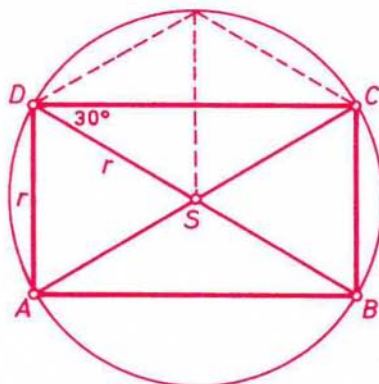
### 8. razred

1. Označimo iskani čas z  $x$ . Potem iz naloge razberemo enačbo  $4000x + \frac{3}{4} \cdot 4000(16 - x) = 5000x$  z rešitvijo  $x = 12$

2. Za cifre  $a, b$  in  $c$  števila  $\overline{abc}$  velja  $100a + 10b + c + 54 = 100a + 10c + b$ , torej  $c = b + 6$  in  $100a + 10b + c - 360 = 100b + 10a + c$ , odkoder dobimo  $b = a - 4$ .

Odg.: Iskana števila so 406, 517, 628 in 739.

3.  $\overline{AD} = r, \overline{AB} = 2. \frac{r\sqrt{3}}{2} = r\sqrt{3}$   
 $P = 2r^2(3\sqrt{3} + 2)$   
 $V = 2r^3\sqrt{3}$



4. Razmerje med novo in prvotno dolžino stranice je  $k = l'/l = 1,01$ , zato sta ploščini v razmerju  $p'/p = k^2 = 1,0201$ . Tedaj velja  $1,0201 p = p' = p + 2,13864$  in  $p = 1,064 \text{ m}^2$ .

5. S pomočjo Pitagorovega izreka dobimo najkrajšo pot

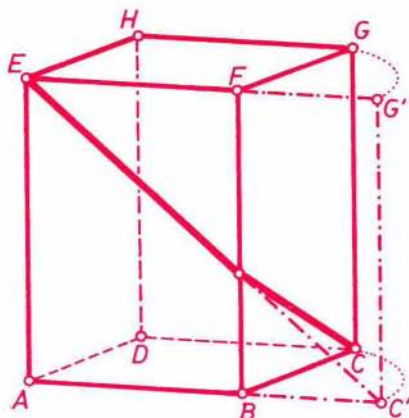
$$s = \sqrt{(18+6)^2 + 10^2} = 26 \text{ in}$$

odtod hitrost  $v$ :

$$\frac{26}{v} + 2 = \frac{6 + 18 + 10}{v}, \text{ torej}$$

$$v = 4.$$

Aleksander Potočnik



## O PRAŠTEVILIH – Rešitev s str. 88

1. Le 101 je praštevilo.
2. Če  $n$  ni deljiv s 3, je vsaj eno od števil  $2n + 1$  in  $5n - 1$  deljivo s 3 in zato sestavljeno. Torej mora biti  $n = 3$ , vendar tudi v tem primeru vsa tri števila niso praštevila.
3. Denimo, da je  $k$  sestavljeno število. Tedaj velja:  $k = m \cdot n$  ( $m > 1, n > 1$ ) in zato

$$\underbrace{11 \dots 1}_k = \underbrace{11 \dots 1}_n \cdot \underbrace{10 \dots 01}_n \underbrace{0 \dots 0}_n \dots \underbrace{10 \dots 01}_n$$

4. Število  $n^2 - 1 = (n - 1)(n + 1)$  ima točno štiri delitelje le, če je  $(n - 1, n + 1)$  par praštevil dvojčkov.
5. Vsak par dvojčkov, različen od (3, 5), je oblike  $(6k - 1, 6k + 1)$ ,  $k \in \mathbb{N}$ , torej je produkt obeh praštevil enak  $36k^2 - 1$ .
6. Naj bo  $b > 3$  poljubno liho število in  $a = (b - 2)(b + 2)$ . Potem sta števili  $a$  in  $b$  tuji, števili  $ak + b - 2$  in  $ak + b + 2$  pa sestavljeni za vsak  $k \in \mathbb{N}$ .

Boris Lavrič

# IZBIRNO TEKMOVANJE IZ MATEMATIKE ZA SREDNJE-ŠOLCE – rešitev iz P–1, str. 48

Prvi letnik

1. Prepišimo enačbo drugače:  $1 + \frac{2(3b+c)}{6x+2a-3b-c} = 1 + \frac{2(b+3c)}{2x+6a-b-3c}$

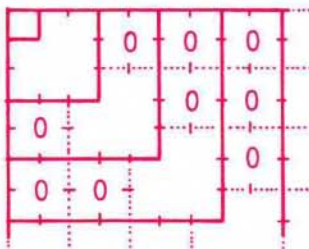
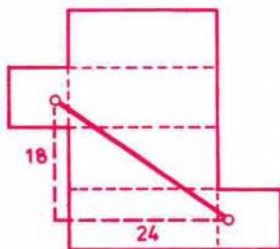
Odtod hitro dobimo:  $\frac{6x+2a-(3b+c)}{3b+c} = \frac{2x+6a-(b+3c)}{b+3c}$  in

$\frac{2(3x+a)}{3b+c} = \frac{2(x+3a)}{b+3c}$  oziroma  $(3x+a)(b+3c) = (x+3a)(3b+c)$ , kar da  $x = ab/c$ , ki ustreza enačbi v nalogi.

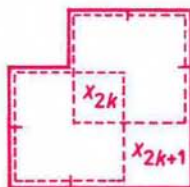
2. Iz teksta naloge razberemo, da je število gledalcev deljivo s 3, 5 in 7, zato tudi s 105. Ker je bila večina vstopnic prodana, si je film ogledalo 210 ljudi.
3. Najbolje je kvader razviti v mrežo, od koder izračunamo najmanjšo dolžino kabla 30 m.

K nalogi 3:

K nalogi 4:



(a)

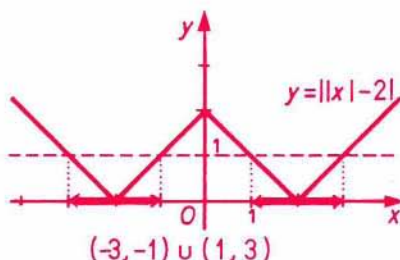
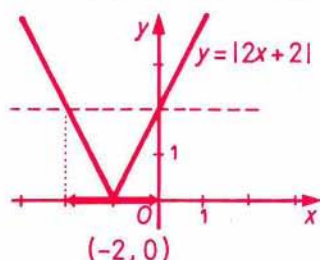


(b)

4. V tabeli najprej odrežemo zgornji levi kvadrata, nato pa potegnemo vzporednice (dolžine 3, 5, ...). Dobljene pasove od zgoraj in z leve pokrijemo s kvadrati  $2 \times 2$  (vsota elementov je 0), kot je na sliki (a). Ob diagonali tabele nam ostanejo liki, eden od teh je na sliki (b). V vsakem takem liku je vsota števil enaka  $x_{2k+1} - x_{2k}$  (saj  $x_{2k+1}$  ni v nobenem od označenih kvadratov  $2 \times 2$ ,  $x_{2k}$  pa je v dveh). V končno vsoto torej prispevajo le diagonalni elementi. Ker je teh 101 in noben ne presega absolutne vrednosti 1, tudi vsota ne more biti večja od števila diagonalnih elementov.

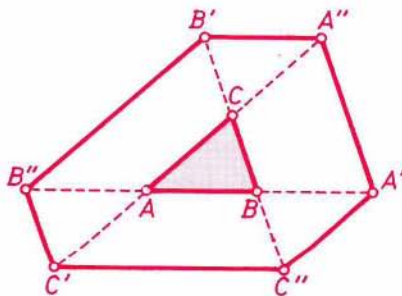
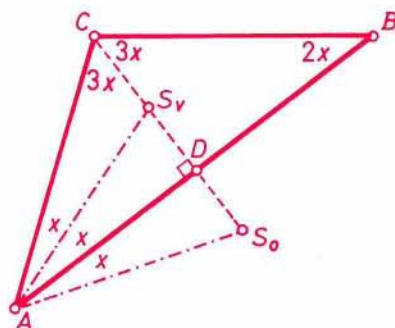
## Drugi letnik

1. Najhitreje rešimo sistem grafično:



Skupna rešitev je torej  $(-2, -1)$ .

2. Najprej sklepamo, da je trikotnik enakokrak, saj ležita središči včrtane in očrtane krožnice na simetrali stranice, glede na katero sta si simetrični točki. Če z  $S_v$  označimo središče včrtane krožnice in z  $S_o$  središče očrtane krožnice, potem so koti  $\angle S_o A D$ ,  $\angle S_v A D$  in  $\angle S_v A C$  enaki, na primer  $x$ . Trikotnik  $A S_o C$  je enako-kraak ( $S_o A$  in  $S_o C$  sta polmera očrtane krožnice), zato je  $\angle S_o C A = 3x$ . V pravokotnem trikotniku  $A D C$  je torej  $2x + 3x = 90^\circ$  in iskani koti so  $36^\circ$ ,  $36^\circ$  in  $108^\circ$ .
3. Pomagaj si s sliko. Trikotniki, ki jih dobimo z zrcaljenjem preko oglišča, so skladni s prvotnim trikotnikom, štirikotniki pa imajo po trikrat večjo ploščino (trikotnik  $A A' A''$  ima na primer dvakrat daljše stranice od trikotnika  $A B C$ , zato štirikrat večjo ploščino, štirikotnik  $B A' A'' C$  pa trikrat). Iskano razmerje je  $13 : 1$ .
4. Izberimo središče  $n$ -kotniku očrtanega kroga za izhodišče koordinatnega sistema. Označimo krajevne vektorje do oglišč  $A_i$  z  $a_i$ , s  $t_k$  pa krajevne



vektorje točk, kjer se v posameznih etapah ustavimo na poti proti ustreznim točkam  $A_i$  ( $i = 1, 2, \dots, n$ ;  $k = 1, 2, \dots, n - 1$ ). Tako je:

$$t_1 = a_1 + (a_2 - a_1)/2 = (a_1 + a_2)/2$$

$$t_2 = t_1 + (a_3 - t_1)/3 = (a_1 + a_2 + a_3)/3$$

$\vdots$

$$t_{n-1} = t_{n-2} + (a_n - t_{n-2})/n = (a_1 + a_2 + \dots + a_n)/n$$

Če  $n$ -kotnik zavrtimo okrog izhodišča za poljuben večkratnik kota  $360^\circ/n$ , se oglišča drugače razporedijo, toda rezultat bo isti. Ker se pri vrtenju okrog izhodišča ohranja le vektor  $\mathbf{0}$ , je  $t_{n-1} = \mathbf{0}$ , na opisani način smo torej prišli v središče  $n$ -kotniku očrtanega kroga.

### Tretji letnik

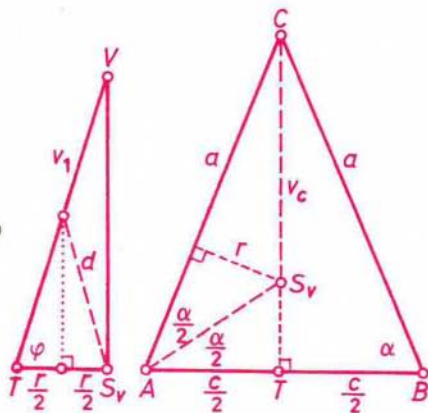
1. Najprej zapišemo  $7^{1+x} = 6 + 7^{-x}$ , množimo enačbo s  $7^x$  in dobimo  $7 \cdot 7^{2x} - 6 \cdot 7^x - 1 = 0$ . Ta kvadratna enačba ima rešitvi 1 in  $-1/7$ . Toda  $7^x = -1/7$  ne drži pri nobenem  $x$ , zato je  $x = 0$  edina rešitev.
2. Najprej mora biti  $\sin a \neq 0$  oziroma  $a \in (0, \pi)$ . Diskriminanta enačbe je  $D = 16 \sin^2 a - 8 \sin^2 a (4 \sin^2 a - 1) = 8 \sin^2 a (3 - 4 \sin^2 a) = 8 \sin^2 a (4 \cos^2 a - 1)$ . Ker mora biti nenegativna, je  $4 \cos^2 a \geq 1$  oziroma  $0 \leq a \leq \pi/3$  ali  $2\pi/3 \leq a \leq \pi$ . Izrazimo še rešitvi:

$$x_{1,2} = \frac{4 \sin a \pm 2 \sin a \sqrt{2(4 \cos^2 a - 1)}}{4 \sin^2 a}$$

Ker je  $\sin a$  za  $a$  iz intervala  $(0, \pi)$  pozitiven, je dovolj zahtevati

$4 > 2 \sqrt{2(4 \cos^2 a - 1)}$ , od koder dobimo  $4 \cos^2 a - 3 < 0$  in  $\cos a < \sqrt{3}/2$  oziroma  $\cos a > -\sqrt{3}/2$ . Končna rešitev:  $\pi/6 < a \leq \pi/3$  in  $2\pi/3 \leq a < 5\pi/6$ .

3. Ker so stranske ploskve enako nagnjene proti osnovni, je nožišče višine piramide središče osnovni ploskvi vrčtanega kroga. Tako je  $\cos \varphi = r/(2d)$  oziroma  $r = 2d \cos \varphi$ , nato pa  $c = 2r \operatorname{ctg}(a/2) = 4d \operatorname{ctg}(a/2) \cos \varphi$  in  $v_c = (c \operatorname{tga})/2 = 2d \operatorname{tga} \operatorname{ctg}(a/2) \cos \varphi$ . Ploščina osnovne ploskve je  $S = 4d^2 \operatorname{tga} \operatorname{ctg}^2(a/2) \cos^2 \varphi$ ,



ploščina stranskih ploskev skupaj pa  $(2a + c)v_1/2 =$   
 $= (2a + c)r/(2 \cos \varphi) = S/\cos \varphi$   
 (saj je  $(2a + c)r/2$  ploščina

osnovne ploskve). Torej je površina  $P = S + S/\cos \varphi =$   
 $= 2S \cos^2(\varphi/2)/\cos \varphi =$   
 $= 8d^2 \operatorname{tg}^2 \alpha \cos^2(\varphi/2) \cos \varphi.$

4. Naravna števila razdelimo v tri skupine: v prvo damo le število 1, v drugo števili 2 in 3, v tretjo skupino pa vsa druga števila. Očitno sta dve števili od štirih poljubnih vedno v eni od skupin. Če sta v drugi, sta to števili 2 in 3, za kateri velja  $(3 - 2)/(1 + 3,2) = 1/7 < 1/4$ , če sta v tretji, pa desno neenakost iz naloge preoblikujemo v  $a(4 - b) < 1 + 4b$ , ki za vse  $b \geq 4$  velja. Leva neenakost očitno drži, če izberemo za  $a$  večje od obeh števil.

#### Četrti letnik

1. Če z  $f(x)$  označimo levo stran enačbe, vidimo, da je  $f(x)$  soda funkcija, zato se omejimo najprej na pozitivne vrednosti za  $x$ . Rešitev

$x_1 = \sqrt{a^2 + b^2 + c^2}$  prav hitro uganemo, ker je pa  $f(x)$  za  $x > 0$  naraščajoča (to lahko preverimo z odvodom, ki je za te  $x$  pozitiven), je to edina pozitivna rešitev. Zaradi sodosti imamo še rešitev  $x_2 = -\sqrt{a^2 + b^2 + c^2}$ .

2.  $19 + 1919 + 191919 + \dots + 1919\dots19 = 19(1 + 101 + 10101 + \dots + 10101\dots01)$ . Število oblike  $10101\dots01$ , ki ima  $k$  enic, zapišemo  $(100^k - 1)/99$ , zato bo naš izraz

$$\frac{19(100 + 100^2 + 100^3 + \dots + 100^{88} - 88)}{99} = \frac{19(100(100^{88} - 1)/99 - 88)}{99} =$$

$$= \frac{19(100^{89} - 100 - 88.99)}{99^2}$$

3. Isto kot 3. naloga za tretji letnik.  
 4. Najprej dokažimo, da je  $f(0) = 0$ . Recimo, da velja  $f(0) = a \neq 0$ . To pomeni, da je na grafu točka  $(0, a)$ . Ta se preslika z vrtenjem za kot  $90^\circ$  v točko  $(-a, 0)$ , ta pa v  $(0, -a)$ . Toda  $(0, a)$  in  $(0, -a)$  ne moreta hkrati ležati na grafu (saj funkcija priredi vsakemu  $x$  natanko eno vrednost), pa smo v protislovju.

Sedaj pokažimo še, da je  $f(0) = 0$  edina rešitev oblike  $f(x) = x$ . Predpostavimo, da bi imeli še  $f(b) = b$  in  $b \neq 0$ . Točka  $(b, b)$  se z vrtenjem preslika v  $(-b, b)$ , ta v  $(-b, -b)$  in nazadnje v  $(b, -b)$ . Spet smo prišli do protislovja, saj točki  $(b, b)$  in  $(b, -b)$  ne moreta hkrati ležati na grafu.

Darjo Felda

## DOTIKANJA

Denimo, da se kroga  $k_1$  in  $k_2$  dotikata v točki  $O$ . Potem je  $CD$  njuna skupna tangenta, odseki  $DK$ ,  $DO$  in  $DL$  na tangentah  $DA$ ,  $DC$  in  $DB$  na kroga  $k_1$  in  $k_2$  pa so tedaj enako dolgi. Torej leži točka  $D$  na sredini med  $K$  in  $L$ .

Poglejmo zdaj na desno sliko. Očitno velja  $\overline{AT} = \overline{AS}$  in  $\overline{BT} = \overline{BR}$ , zato tudi

$$\overline{KT} = \overline{NS} \quad \text{in} \quad \overline{TL} = \overline{RM}$$

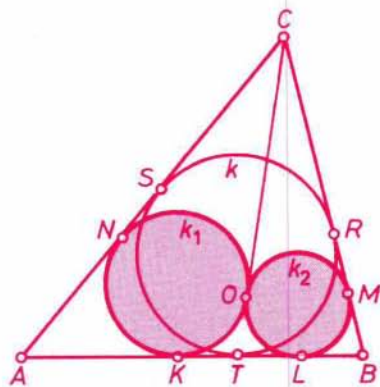
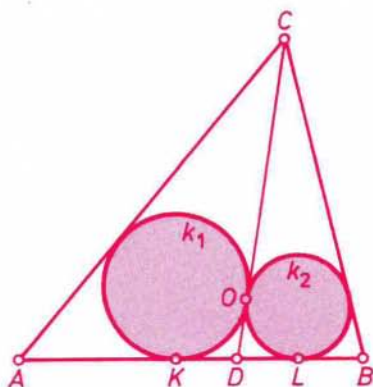
Poleg tega je  $\overline{CN} = \overline{CO} = \overline{CM}$  in  $\overline{CS} = \overline{CR}$ , torej

$$\overline{NS} = \overline{CN} - \overline{CS} = \overline{CM} - \overline{CR} = \overline{RM} \quad \text{in} \quad \overline{KT} = \overline{TL}$$

Dotikališče  $T$  kroga  $k$  leži na sredi med  $K$  in  $L$  in zato sovпада s točko  $D$ .

Obratno smer trditve dokažemo podobno, zato dokaz opustimo.

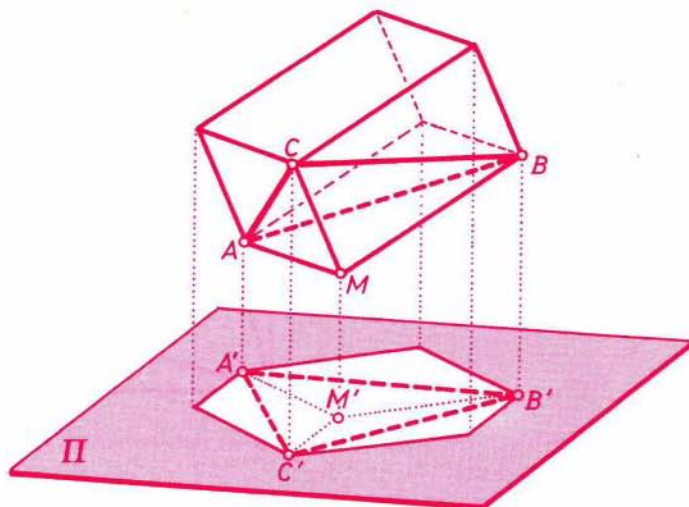
Še odgovor na vprašanje ob koncu naloge. Kroga se dotikata tedaj in le tedaj, kadar je  $D$  točka, v kateri se stranice  $AB$  dotikata trikotniku  $ABC$  pričrtani krog.



## PROJEKCIJA

Označimo z  $M$  tisto oglišče kvadra, ki leži najbliže ravnini  $\Pi$ , sosednja tri oglišča z  $A$ ,  $B$  in  $C$ , njihove projekcije na  $\Pi$  pa zaporedoma z  $M'$ ,  $A'$ ,  $B'$  in  $C'$ . Projekcija kvadra je potem sestavljena iz paralelogramov, napetih na pare daljic

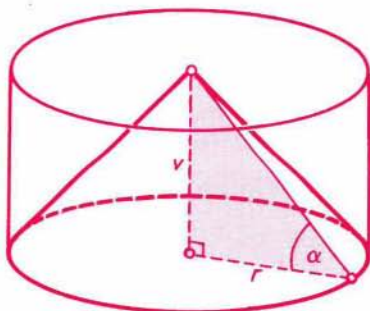
$M'A'$ ,  $M'B'$  in  $M'C'$ . Njena ploščina je dvakratnik ploščine trikotnika  $A'B'C'$  in doseže največjo vrednost, ko je trikotnik  $ABC$  vzporeden ravnini  $\Pi$ . Če robovi kvadra merijo  $a$ ,  $a$  in  $2a$ , je ploščina projekcije enaka  $3a^2$ .



## PLAŠČA

Označimo z  $r$  polmer osnovne ploskve in z  $v$  višino obeh teles. Potem plašč stožca meri  $p_S = \pi r \sqrt{r^2 + v^2}$ , plašč valja pa  $p_V = 2\pi rv$ . Določimo kvocient  $k$  velikosti plaščev:

$$k = \frac{\pi r \sqrt{r^2 + v^2}}{2\pi rv} = \frac{\sqrt{r^2 + v^2}}{2v} = \frac{1}{2} \sqrt{\left(\frac{r}{v}\right)^2 + 1}$$

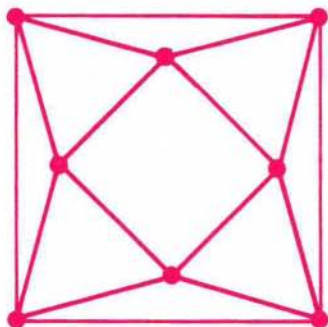


Brž vidimo, da sta plašča enako velika (torej  $k = 1$ ) natanko takrat, kadar velja  $r = v\sqrt{3}$ , torej pri  $\alpha = 30^\circ$ . Zdaj je odgovor na dlani: če je  $\alpha < 30^\circ$ , ima stožec večji plašč kot valj, pri  $\alpha > 30^\circ$  pa je res prav narobe.

Boris Lavrič

## MATEMATIČNI KROŽEK – rešitve s str. 99

1. Označimo Srečkovo rojstno letnico z  $19xy$ , saj je očitno rojen v tem stoletju. Potem iz pogoja naloge dobimo diofantsko enačbo  $11x + 2y = 78$  z edino ustrezno rešitvijo  $x = y = 6$ . Srečko je torej star 22 let.
2. Glej sliko in preveri, da rešitev res ustreza pogojem naloge.



3. Najmanjše naravno število v vsoti  $k$  zaporednih naravnih števil zaznamujemo z  $n$ . Potem velja enakost

$$1988 = n + (n + 1) + \dots + (n + k - 1) = k(2n + k - 1)/2$$

od koder vidimo, da  $k$  deli  $2 \cdot 1988 = 2^3 \cdot 7 \cdot 71$  in da velja ocena  $k^2 < 4000$ . Zato je  $k \in \{14, 28, 56\}$ , rešitev pa tedaj  $k = 56$  in  $n = 8$ .

## ANEKDOTE

### ANAKSAGORAS

Grški filozof in astronom Anaksagoras je opazoval krave na paši. V bližini je prepevala šoja. Mislec je premišljeval, kako v naravi le ni vse najlepše urejeno.

”Poglej,” mu je šinilo v glavo, ”ta mala šoja, ki ne zna ničesar, le včasih uniči kakega črva, lahko leta po zraku na vse strani, krava, ki daje človeku toliko koristnega, pa se mora le počasi premikati po tleh.”

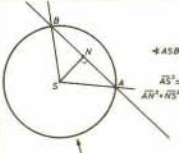
Učenjakovo premišljevanje o tej krivici je iznenada pretrgalo nekaj, kar je ptica spustila na njegovo modro glavo. Zmedel se je, obrisal z glave ptičev pozdrav in dejal z olajšanjem:

”Bogovi naj bodo zahvaljeni! Pa je le dobro, da šoja ni krava!”

# ŠTEVILSKA KRIŽANKA — rešitev iz P-1

|    |   |   |    |    |    |    |   |    |    |    |
|----|---|---|----|----|----|----|---|----|----|----|
| 1  | 9 | 6 | 3  | 4  | 9  | 4  | 5 | 7  | 2  | 8  |
| 8  | 1 | 3 | 3  | 1  | 9  | 6  | 5 | 4  | 5  | 7  |
| 11 | 8 | 6 | 12 | 13 | 9  | 1  | 0 | 7  | 2  | 0  |
| 14 | 1 | 8 | 5  | 2  | 0  | 0  | 0 | 15 | 16 | 17 |
| 15 | 1 | 4 | 2  | 9  | 2  | 17 | 4 | 8  | 6  | 18 |
| 19 | 7 | 1 | 6  | 20 | 21 | 3  | 6 | 1  | 6  | 22 |
| 23 | 2 | 3 | 4  | 5  | 6  | 7  | 0 | 24 | 25 | 26 |
| 25 | 2 | 5 | 6  | 0  | 0  | 0  | 0 | 26 | 1  | 8  |
| 28 | 4 | 3 | 5  | 6  | 0  | 29 | 5 | 30 | 8  | 3  |
| 31 | 2 | 1 | 0  | 0  | 32 | 2  | 4 | 6  | 32 |    |

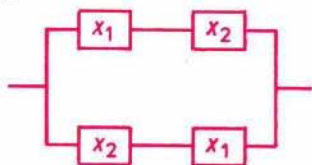
# SLIKOVNA KRIŽANKA — rešitev iz P-1

|                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                        |                                                                                   |
|----------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------|-----------------------------------------------------------------------------------|
|                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                      |  |
| <div><div>LEKOSI<br/>PRADAJI AV</div><div>45°<br/>43°</div><div>premica AB</div></div>                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                 |                                                                                   |
| <div><div>TOVA<br/>KUMER</div><div>TOVA<br/>KUMER</div><div>TOVA<br/>KUMER</div><div>TOVA<br/>KUMER</div><div>TOVA<br/>KUMER</div><div>TOVA<br/>KUMER</div><div>TOVA<br/>KUMER</div><div>TOVA<br/>KUMER</div><div>TOVA<br/>KUMER</div><div>TOVA<br/>KUMER</div><div>TOVA<br/>KUMER</div><div>TOVA<br/>KUMER</div><div>TOVA<br/>KUMER</div><div>TOVA<br/>KUMER</div><div>TOVA<br/>KUMER</div><div>TOVA<br/>KUMER</div><div>TOVA<br/>KUMER</div><div>TOVA<br/>KUMER</div><div>TOVA<br/>KUMER</div><div>TOVA<br/>KUMER</div><div>TOVA<br/>KUMER</div><div>TOVA<br/>KUMER</div><div>TOVA<br/>KUMER</div><div>TOVA<br/>KUMER</div><div>TOVA<br/>KUMER</div><div>TOVA<br/>KUMER</div><div>TOVA<br/>KUMER</div><div>TOVA<br/>KUMER</div><div>TOVA<br/>KUMER</div><div>TOVA<br/>KUMER</div><div>TOVA<br/>KUMER</div><div>TOVA<br/>KUMER</div><div>TOVA<br/>KUMER</div><div>TOVA<br/>KUMER</div><div>TOVA<br/>KUMER</div><div>TOVA<br/>KUMER</div><div>TOVA<br/>KUMER</div><div>TOVA<br/>KUMER</div><div>TOVA<br/>KUMER</div><div>TOVA<br/>KUMER</div><div>TOVA<br/>KUMER</div><div>TOVA<br/>KUMER</div><div>TOVA<br/>KUMER</div><div>TOVA<br/>KUMER</div><div>TOVA<br/>KUMER</div><div>TOVA<br/>KUMER</div><div>TOVA<br/>KUMER</div><div>TOVA<br/>KUMER</div><div>TOVA<br/>KUMER</div><div>TOVA<br/>KUMER</div><div>TOVA<br/>KUMER</div><div>TOVA<br/>KUMER</div><div>TOVA<br/>KUMER</div><div>TOVA<br/>KUMER</div><div>TOVA<br/>KUMER</div><div>TOVA<br/>KUMER</div><div>TOVA<br/>KUMER</div><div>TOVA<br/>KUMER</div><div>TOVA<br/>KUMER</div><div>TOVA<br/>KUMER</div><div>TOVA<br/>KUMER</div><div>TOVA<br/>KUMER</div><div>TOVA<br/>KUMER</div><div>TOVA<br/>KUMER</div><div>TOVA<br/>KUMER</div><div>TOVA<br/>KUMER</div><div>TOVA<br/>KUMER</div><div>TOVA<br/>KUMER</div><div>TOVA<br/>KUMER</div><div>TOVA<br/>KUMER</div><div>TOVA<br/>KUMER</div><div>TOVA<br/>KUMER</div><div>TOVA<br/>KUMER</div><div>TOVA<br/>KUMER</div><div>TOVA<br/>KUMER</div><div>TOVA<br/>KUMER</div><div>TOVA<br/>KUMER</div><div>TOVA<br/>KUMER</div><div>TOVA<br/>KUMER</div><div>TOVA<br/>KUMER</div><div>TOVA<br/>KUMER</div><div>TOVA<br/>KUMER</div><div>TOVA<br/>KUMER</div><div>TOVA<br/>KUMER</div><div>TOVA<br/>KUMER</div><div>TOVA<br/>KUMER</div><div>TOVA<br/>KUMER</div><div>TOVA<br/>KUMER</div><div>TOVA<br/>KUMER</div><div>TOVA<br/>KUMER</div><div>TOVA<br/>KUMER</div><div>TOVA<br/>KUMER</div><div>TOVA<br/>KUMER</div><div>TOVA<br/>KUMER</div><div>TOVA<br/>KUMER</div><div>TOVA<br/>KUMER</div><div>TOVA<br/>KUMER</div><div>TOVA<br/>KUMER</div><div>TOVA<br/>KUMER</div><div>TOVA<br/>KUMER</div><div>TOVA<br/>KUMER</div><div>TOVA<br/>KUMER</div><div>TOVA<br/>KUMER</div><div>TOVA<br/>KUMER</div><div>TOVA<br/>KUMER</div><div>TOVA<br/>KUMER</div><div>TOVA<br/>KUMER</div><div>TOVA<br/>KUMER</div><div>TOVA<br/>KUMER</div><div>TOVA<br/>KUMER</div><div>TOVA<br/>KUMER</div><div>TOVA<br/>KUMER</div><div>TOVA<br/>KUMER</div><div>TOVA<br/>KUMER</div><div>TOVA<br/>KUMER</div><div>TOVA<br/>KUMER</div><div>TOVA<br/>KUMER</div><div>TOVA<br/>KUMER</div><div>TOVA<br/>KUMER</div><div>TOVA<br/>KUMER</div><div>TOVA<br/>KUMER</div><div>TOVA<br/>KUMER</div><div>TOVA<br/>KUMER</div><div>TOVA<br/>KUMER</div><div>TOVA<br/>KUMER</div><div>TOVA<br/>KUMER</div><div>TOVA<br/>KUMER</div><div>TOVA<br/>KUMER</div><div>TOVA<br/>KUMER</div><div>TOVA<br/>KUMER</div><div>TOVA<br/>KUMER</div><div>TOVA<br/>KUMER</div><div>TOVA<br/>KUMER</div><div>TOVA<br/>KUMER</div><div>TOVA<br/>KUMER</div><div>TOVA<br/>KUMER</div><div>TOVA<br/>KUMER</div><div>TOVA<br/>KUMER</div><div>TOVA<br/>KUMER</div><div>TOVA<br/>KUMER</div><div>TOVA<br/>KUMER</div><div>TOVA<br/>KUMER</div><div>TOVA<br/>KUMER</div><div>TOVA<br/>KUMER</div><div>TOVA<br/>KUMER</div><div>TOVA<br/>KUMER</div><div>TOVA<br/>KUMER</div><div>TOVA<br/>KUMER</div><div>TOVA<br/>KUMER</div><div>TOVA<br/>KUMER</div><div>TOVA<br/>KUMER</div><div>TOVA<br/>KUMER</div><div>TOVA<br/>KUMER</div><div>TOVA<br/>KUMER</div><div>TOVA<br/>KUMER</div><div>TOVA<br/>KUMER</div><div>TOVA<br/>KUMER</div><div>TOVA<br/>KUMER</div><div>TOVA<br/>KUMER</div><div>TOVA<br/>KUMER</div><div>TOVA<br/>KUMER</div><div>TOVA<br/>KUMER</div><div>TOVA<br/>KUMER</div><div>TOVA<br/>KUMER</div><div>TOVA<br/>KUMER</div><div>TOVA<br/>KUMER</div><div>TOVA<br/>KUMER</div><div>TOVA<br/>KUMER</div><div>TOVA<br/>KUMER</div><div>TOVA<br/>KUMER</div><div>TOVA<br/>KUMER</div><div>TOVA<br/>KUMER</div><div>TOVA<br/>KUMER</div><div>TOVA<br/>KUMER</div><div>TOVA<br/>KUMER</div><div>TOVA<br/>KUMER</div><div>TOVA<br/>KUMER</div><div>TOVA<br/>KUMER</div><div>TOVA<br/>KUMER</div><div>TOVA<br/>KUMER</div><div>TOVA<br/>KUMER</div><div>TOVA<br/>KUMER</div><div>TOVA<br/>KUMER</div><div>TOVA<br/>KUMER</div><div>TOVA<br/>KUMER</div><div>TOVA<br/>KUMER</div><div>TOVA<br/>KUMER</div><div>TOVA<br/>KUMER</div><div>TOVA<br/>KUMER</div><div>TOVA<br/>KUMER</div><div>TOVA<br/>KUMER</div><div>TOVA<br/>KUMER</div><div>TOVA<br/>KUMER</div><div>TOVA<br/>KUMER</div><div>TOVA<br/>KUMER</div><div>TOVA<br/>KUMER</div><div>TOVA<br/>KUMER</div><div>TOVA<br/>KUMER</div><div>TOVA<br/>KUMER</div><div>TOVA<br/>KUMER</div><div>TOVA<br/>KUMER</div><div>TOVA<br/>KUMER</div><div>TOVA<br/>KUMER</div><div>TOVA<br/>KUMER</div><div>TOVA<br/>KUMER</div><div>TOVA<br/>KUMER</div><div>TOVA<br/>KUMER</div><div>TOVA<br/>KUMER</div><div>TOVA<br/>KUMER</div><div>TOVA<br/>KUMER</div><div>TOVA<br/>KUMER</div><div>TOVA<br/>KUMER</div><div>TOVA<br/>KUMER</div><div>TOVA<br/>KUMER</div><div>TOVA<br/>KUMER</div><div>TOVA<br/>KUMER</div><div>TOVA<br/>KUMER</div><div>TOVA<br/>KUMER</div><div>TOVA<br/>KUMER</div><div>TOVA<br/>KUMER</div><div>TOVA<br/>KUMER</div><div>TOVA<br/>KUMER</div><div>TOVA<br/>KUMER</div><div>TOVA<br/>KUMER</div><div>TOVA<br/>KUMER</div><div>TOVA<br/>KUMER</div><div>TOVA<br/>KUMER</div><div>TOVA<br/>KUMER</div><div>TOVA<br/>KUMER</div><div>TOVA<br/>KUMER</div><div>TOVA<br/>KUMER</div><div>TOVA<br/>KUMER</div><div>TOVA<br/>KUMER</div><div>TOVA<br/>KUMER</div><div>TOVA<br/>KUMER</div><div>TOVA<br/>KUMER</div><div>TOVA<br/>KUMER</div><div>TOVA<br/>KUMER</div><div>TOVA<br/>KUMER</div><div>TOVA<br/>KUMER</div><div>TOVA<br/>KUMER</div><div>TOVA<br/>KUMER</div><div>TOVA<br/>KUMER</div><div>TOVA<br/>KUMER</div><div>TOVA<br/>KUMER</div><div>TOVA<br/>KUMER</div><div>TOVA<br/>KUMER</div><div>TOVA<br/>KUMER</div><div>TOVA<br/>KUMER</div><div>TOVA<br/>KUMER</div><div>TOVA<br/>KUMER</div><div>TOVA<br/>KUMER</div><div>TOVA<br/>KUMER</div><div>TOVA<br/>KUMER</div><div>TOVA<br/>KUMER</div><div>TOVA<br/>KUMER</div><div>TOVA<br/>KUMER</div><div>TOVA<br/>KUMER</div><div>TOVA<br/>KUMER</div><div>TOVA<br/>KUMER</div><div>TOVA<br/>KUMER</div><div>TOVA<br/>KUMER</div><div>TOVA<br/>KUMER</div><div>TOVA<br/>KUMER</div><div>TOVA<br/>KUMER</div><div>TOVA<br/>KUMER</div><div>TOVA<br/>KUMER</div><div>TOVA<br/>KUMER</div><div>TOVA<br/>KUMER</div><div>TOVA<br/>KUMER</div><div>TOVA<br/>KUMER</div><div>TOVA<br/>KUMER</div><div>TOVA<br/>KUMER</div><div>TOVA<br/>KUMER</div><div>TOVA<br/>KUMER</div><div>TOVA<br/>KUMER</div><div>TOVA<br/>KUMER</div><div>TOVA<br/>KUMER</div><div>TOVA<br/>KUMER</div><div>TOVA<br/>KUMER</div><div>TOVA<br/>KUMER</div><div>TOVA<br/>KUMER</div><div>TOVA<br/>KUMER</div><div>TOVA<br/>KUMER</div><div>TOVA<br/>KUMER</div><div>TOVA<br/>KUMER</div><div>TOVA<br/>KUMER</div><div>TOVA<br/>KUMER</div><div>TOVA<br/>KUMER</div><div>TOVA<br/>KUMER</div><div>TOVA<br/>KUMER</div><div>TOVA<br/>KUMER</div><div>TOVA<br/>KUMER</div><div>TOVA<br/>KUMER</div><div>TOVA<br/>KUMER</div><div>TOVA<br/>KUMER</div><div>TOVA<br/>KUMER</div><div>TOVA<br/>KUMER</div><div>TOVA<br/>KUMER</div><div>TOVA<br/>KUMER</div><div>TOVA<br/>KUMER</div><div>TOVA<br/>KUMER</div><div>TOVA<br/>KUMER</div><div>TOVA<br/>KUMER</div><div>TOVA<br/>KUMER</div><div>TOVA<br/>KUMER</div><div>TOVA<br/>KUMER</div><div>TOVA<br/>KUMER</div><div>TOVA<br/>KUMER</div><div>TOVA<br/>KUMER</div><div>TOVA<br/>KUMER</div><div>TOVA<br/>KUMER</div><div>TOVA<br/>KUMER</div><div>TOVA<br/>KUMER</div><div>TOVA<br/>KUMER</div><div>TOVA<br/>KUMER</div><div>TOVA<br/>KUMER</div><div>TOVA<br/>KUMER</div><div>TOVA<br/>KUMER</div><div>TOVA<br/>KUMER</div><div>TOVA<br/>KUMER</div><div>TOVA<br/>KUMER</div><div>TOVA<br/>KUMER</div><div>TOVA<br/>KUMER</div><div>TOVA<br/>KUMER</div><div>TOVA<br/>KUMER</div><div>TOVA<br/>KUMER</div><div>TOVA<br/>KUMER</div><div>TOVA<br/>KUMER</div><div>TOVA<br/>KUMER</div><div>TOVA<br/>KUMER</div><div>TOVA<br/>KUMER</div><div>TOVA<br/>KUMER</div><div>TOVA<br/>KUMER</div><div>TOVA<br/>KUMER</div><div>TOVA<br/>KUMER</div><div>TOVA<br/>KUMER</div><div>TOVA<br/>KUMER</div><div>TOVA<br/>KUMER</div><div>TOVA<br/>KUMER</div><div>TOVA<br/>KUMER</div><div>TOVA<br/>KUMER</div><div>TOVA<br/>KUMER</div><div>TOVA<br/>KUMER</div><div>TOVA<br/>KUMER</div><div>TOVA<br/>KUMER</div><div>TOVA<br/>KUMER</div><div>TOVA<br/>KUMER</div><div>TOVA<br/>KUMER</div><div>TOVA<br/>KUMER</div><div>TOVA<br/>KUMER</div><div>TOVA<br/>KUMER</div><div>TOVA<br/>KUMER</div><div>TOVA<br/>KUMER</div><div>TOVA<br/>KUMER</div><div>TOVA<br/>KUMER</div><div>TOVA<br/>KUMER</div><div>TOVA<br/>KUMER</div><div>TOVA<br/>KUMER</div><div>TOVA<br/>KUMER</div><div>TOVA<br/>KUMER</div><div>TOVA<br/>KUMER</div><div>TOVA<br/>KUMER</div><div>TOVA<br/>KUMER</div><div>TOVA<br/>KUMER</div><div>TOVA<br/>KUMER</div><div>TOVA<br/>KUMER</div><div>TOVA<br/>KUMER</div><div>TOVA<br/>KUMER</div><div>TOVA<br/>KUMER</div><div>TOVA<br/>KUMER</div><div>TOVA<br/>KUMER</div><div>TOVA<br/>KUMER</div><div>TOVA<br/>KUMER</div><div>TOVA<br/>KUMER</div><div>TOVA<br/>KUMER</div><div>TOVA<br/>KUMER</div><div>TOVA<br/>KUMER</div><div>TOVA<br/>KUMER</div><div>TOVA<br/>KUMER</div><div>TOVA<br/>KUMER</div><div>TOVA<br/>KUMER</div><div>TOVA<br/>KUMER</div><div>TOVA<br/>KUMER</div><div>TOVA<br/>KUMER</div><div>TOVA<br/>KUMER</div><div>TOVA<br/>KUMER</div><div>TOVA<br/>KUMER</div><div>TOVA<br/>KUMER</div><div>TOVA<br/>KUMER</div><div>TOVA<br/>KUMER</div><div>TOVA<br/>KUMER</div><div>TOVA<br/>KUMER</div><div>TOVA<br/>KUMER</div><div>TOVA<br/>KUMER</div><div>TOVA<br/>KUMER</div><div>TOVA<br/>KUMER</div><div>TOVA<br/>KUMER</div><div>TOVA<br/>KUMER</div><div>TOVA<br/>KUMER</div><div>TOVA<br/>KUMER</div><div>TOVA<br/>KUMER</div><div>TOVA<br/>KUMER</div><div>TOVA<br/>KUMER</div><div>TOVA<br/>KUMER</div><div>TOVA<br/>KUMER</div><div>TOVA<br/>KUMER</div><div>TOVA<br/>KUMER</div><div>TOVA<br/>KUMER</div><div>TOVA<br/>KUMER</div><div>TOVA<br/>KUMER</div><div>TOVA<br/>KUMER</div><div>TOVA<br/>KUMER</div><div>TOVA<br/>KUMER</div><div>TOVA<br/>KUMER</div><div>TOVA<br/>KUMER</div><div>TOVA<br/>KUMER</div><div>TOVA<br/>KUMER</div><div>TOVA<br/>KUMER</div><div>TOVA<br/>KUMER</div><div>TOVA<br/>KUMER</div><div>TOVA<br/>KUMER</div><div>TOVA<br/>KUMER</div><div>TOVA<br/>KUMER</div><div>TOVA<br/>KUMER</div><div>TOVA<br/>KUMER</div><div>TOVA<br/>KUMER</div><div>TOVA<br/>KUMER</div><div>TOVA<br/>KUMER</div><div>TOVA<br/>KUMER</div><div>TOVA<br/>KUMER</div><div>TOVA<br/>KUMER</div><div>TOVA<br/>KUMER</div><div>TOVA<br/>KUMER</div><div>TOVA<br/>KUMER</div><div>TOVA<br/>KUMER</div><div>TOVA<br/>KUMER</div><div>TOVA<br/>KUMER</div><div>TOVA<br/>KUMER</div><div>TOVA<br/>KUMER</div><div>TOVA<br/>KUMER</div><div>TOVA<br/>KUMER</div><div>TOVA<br/>KUMER</div><div>TOVA<br/>KUMER</div><div>TOVA<br/>KUMER</div><div>TOVA<br/>KUMER</div><div>TOVA<br/>KUMER</div><div>TOVA<br/>KUMER</div><div>TOVA<br/>KUMER</div><div>TOVA<br/>KUMER</div><div>TOVA<br/>KUMER</div><div>TOVA<br/>KUMER</div><div>TOVA<br/>KUMER</div><div>TOVA<br/>KUMER</div><div>TOVA<br/>KUMER</div><div>TOVA<br/>KUMER</div><div>TOVA<br/>KUMER</div><div>TOVA<br/>KUMER</div><div>TOVA<br/>KUMER</div><div>TOVA<br/>KUMER</div><div>TOVA<br/>KUMER</div><div>TOVA<br/>KUMER</div><div>TOVA<br/>KUMER</div><div>TOVA<br/>KUMER</div><div>TOVA<br/>KUMER</div><div>TOVA<br/>KUMER</div><div>TOVA<br/>KUMER</div><div>TOVA<br/>KUMER</div><div>TOVA<br/>KUMER</div><div>TOVA<br/>KUMER</div><div>TOVA<br/>KUMER</div><div>TOVA<br/>KUMER</div><div>TOVA<br/>KUMER</div><div>TOVA<br/>KUMER</div><div>TOVA<br/>KUMER</div><div>TOVA<br/>KUMER</div><div>TOVA<br/>KUMER</div><div>TOVA<br/>KUMER</div><div>TOVA<br/>KUMER</div><div>TOVA<br/>KUMER</div><div>TOVA<br/>KUMER</div><div>TOVA<br/>KUMER</div><div>TOVA<br/>KUMER</div><div>TOVA<br/>KUMER</div><div>TOVA<br/>KUMER</div><div>TOVA<br/>KUMER</div><div>TOVA<br/>KUMER</div><div>TOVA<br/>KUMER</div><div>TOVA<br/>KUMER</div><div>TOVA<br/>KUMER</div><div>TOVA<br/>KUMER</div><div>TOVA<br/>KUMER</div><div>TOVA<br/>KUMER</div><div>TOVA<br/>KUMER</div><div>TOVA<br/>KUMER</div><div>TOVA<br/>KUMER</div><div></div></div> |                                                                                   |

## MATEMATIČNE NEENAKOSTI POD NAPETOSTJO

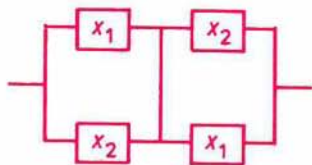
O matematičnih neenakostih je bilo povedanega že veliko, zato je čas, da na njih pogledamo s čisto drugačnega zornega kota. Za kaj gre? Matematika je nematematikom znana predvsem kot orodje v drugih naravoslovnih vedah. Ker svoje trditve izpeljuje iz na začetku postavljenih definicij in aksiomov, ni nobene potrebe, da bi se v svojih razmišljanjih naslanjala na realno življenje. Zato se sliši smešno in zdi nemogoče, da bi v dokazovanju postavljenih trditev uporabljala denimo zakone elektrotehnike. Ali pač?

**Primer 1.** Oglejmo si naslednji primer vezja



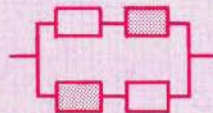
Slika 1

kjer so na upornikih navedeni njihovi upori. Celotni upor vezja je  $(x_1 + x_2)/2$  in se bo kvečjemu zmanjšal, če mu dodamo žice. ★ Zatorej se upor vezja



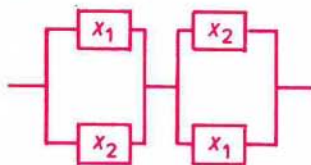
Slika 2

★ Ko dodamo žico, se namreč tokovi laže razporejajo. Bralca, ki mu elektrotehnika ni dovolj blizu, bo morda prepričal primer vezja



kjer sta  zelo velika upora. V tem primeru tok skoraj ne bo tekел in upor bo velik. Če dodamo žico, bo tok stekel po njej in se izognil velikima uporoma.

oziroma vezja,



Slika 3

ki znaša  $2/(1/x_1 + 1/x_2)$ , kvečjemu manjša. Na ta način smo dokazali

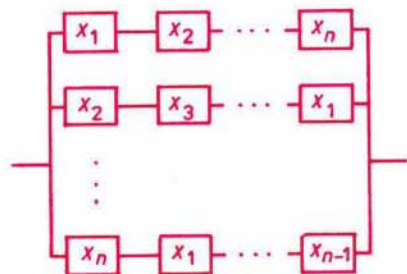
$$\frac{2}{\frac{1}{x_1} + \frac{1}{x_2}} \leq \frac{x_1 + x_2}{2}$$

to pa je ravno znana neenakost med harmonično in aritmetično sredino dveh števil.

Vprašajmo se še, kdaj v tej enačbi velja enačaj. Vezji na sliki 1

in 3 morata potem imeti isti upor in zato po dodani žički ne bi smel teči tok. To pa je izpolnjeno natanko tedaj, ko sta razmerji  $x_1 : x_2$  in  $x_2 : x_1$  enaki (Wheatsonov most!). To nam da  $x_1 = x_2$ .

**Primer 2.** Zgornji primer lahko tudi posplošimo. Oglejmo si vezje, kjer



Slika 4

v vsaki vrsti upore zarotiramo za eno mesto v levo. Celotni upor vezja je, kot se je lahko prepričati,  $(x_1 + x_2 + \dots + x_n)/n$ . Tudi sedaj z dodajanjem žic upor kvečjemu zmanjšamo. To pomeni, da je upor vezja

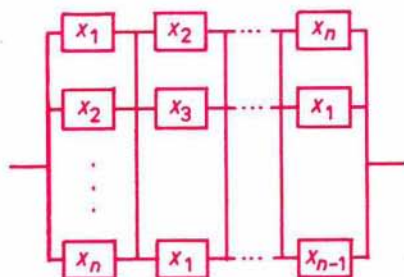
$$\frac{n}{\frac{1}{x_1} + \frac{1}{x_2} + \dots + \frac{1}{x_n}} \leq \frac{x_1 + x_2 + \dots + x_n}{n}$$

kar je znana neenakost med harmonično in aritmetično sredino  $n$  števil  $x_1, x_2, \dots, x_n$ . V neenačbi bo veljal enačaj, ko po dodanih žičkah ne bo tekel tok. To pa je res natanko tedaj, ko velja  $x_1 : x_2 = x_2 : x_3 = \dots = x_n : x_1$ . Od tod dobimo  $x_1 = x_2 = \dots = x_n$ .

Na koncu dodajmo še nekaj nalog, ki jih je mogoče prav elegantno rešiti na podoben način kot primera zgoraj.

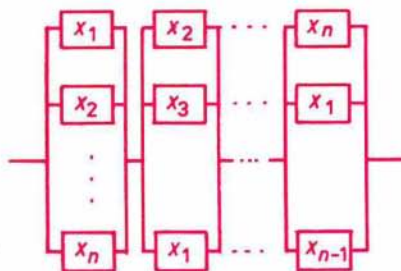
1. Dokaži

$$\frac{x_1}{1+x_1} + \frac{x_2}{1+x_2} + \dots + \frac{x_n}{1+x_n} \leq \frac{nS}{n+S}$$



Slika 5

oziroma vezja



Slika 6

ki znaša  $n/(1/x_1 + 1/x_2 + \dots + 1/x_n)$ , manjši ali enak prejšnjemu. To nam da

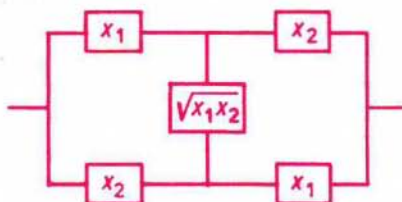
kjer je  $S = x_1 + x_2 + \dots + x_n$  in  $x_1, x_2, \dots, x_n \geq 0$ .

Nasvet: pri sestavljanju vezja si pomagaj z upornikom, ki ima upor  $1 \Omega$ .

2. Dokaži

$$\frac{x_1 x_2}{x_1 + x_2} + \frac{x_2 x_3}{x_2 + x_3} + \frac{x_3 x_1}{x_3 + x_1} \leq \frac{x_1 + x_2 + x_3}{2}$$

3. Pokaži, da ima vezje



Slika 7

upornost  $\sqrt{x_1 x_2}$  in s tem izpelji znani neenakosti

$$\frac{2}{\frac{1}{x_1} + \frac{1}{x_2}} \leq \sqrt{x_1 x_2} \leq \frac{x_1 + x_2}{2}$$

(Pri računanju upora vezja si boš moral pomagati z obema Kirchhoffovima zakonoma.)

Miran Černe, Igor Kukavica

## PRESEK — list za mlade matematike, fizike, astronome in računalnikarje 16. letnik, šolsko leto 1988/89, številka 2, strani 65 — 128

UREDNIŠKI ODBOR: Vladimir Batagelj, Dušica Boben (pisma bralcev, stavljenje teksta), Darjo Felda (tekmovanja iz matematike), Franci Forstnerič, Bojan Golli (tekmovanja iz fizike), Marjan Hribar, Damjan Kobal (razvedrilo), Jože Kotnik, Edvard Kramar, Sandi Klavžar (računalništvo), Andrej Kmet, Peter Križan (fizika), Boris Lavrič (matematika, odgovorni urednik), Gorazd Lešnjak, Matija Lokar, Franci Oblak, Peter Petek (premisli in reši), Pavla Ranzinger (astronomija), Tomaž Skulj, Marjan Smerke (svetovalec za fotografijo), Niko Prijatelj (glavni urednik), Tanja Bečan (jezikovni pregled), Miha Štalec (risbe), Ciril Velkoverh (urednik, nove knjige, novice).

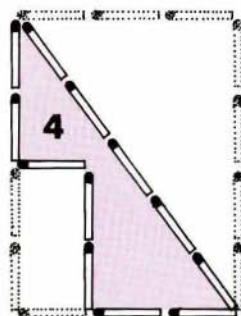
Dopise pošiljajte in list naročajte na naslov: Društvo matematikov, fizikov in astronomov SRS — Podružnica Ljubljana — Komisija za tisk, Presek, Jadranska c. 19, 61111 Ljubljana, p.p. 64, tel. (061) 265-061/53, št. žiro računa 50101-678-47233. Naročnina za šolsko leto 1988/89, vplačana do 31. 12. 1988, je za posamezne naročnike 10.000.— din, za člane društva 8000.— din, za skupinska naročila šol 5000.— din, posamezna številka 2000.— din (1500.— din).

List sofinancirajo Izobraževalna, Kulturna in Raziskovalna skupnost Slovenije

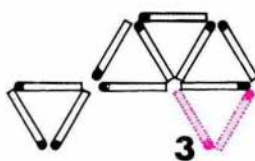
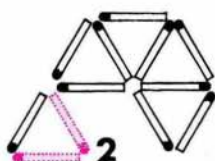
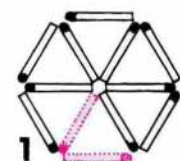
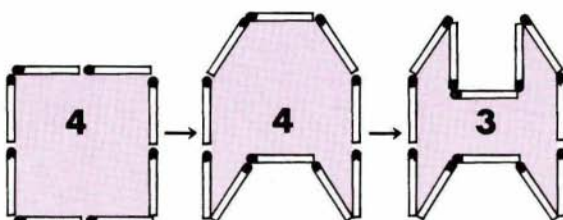
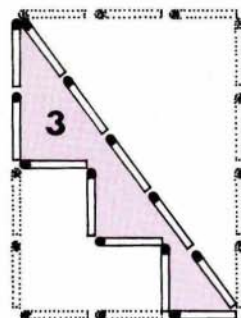
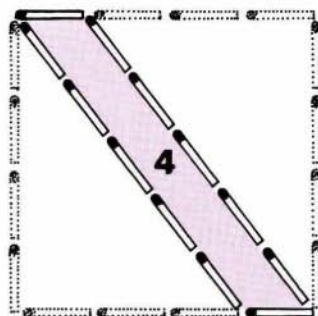
Ofset tisk Časopisno in grafično podjetje DELO, Ljubljana

© 1988 Društvo matematikov, fizikov in astronomov SRS — 928

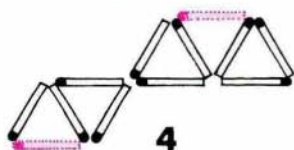
ISSN 0351-6652



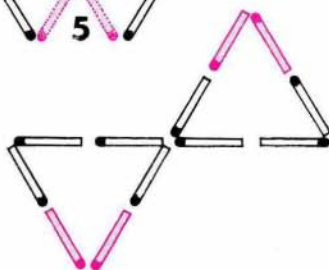
65



66



Naloga je rešljiva v šestih potezah. Rešitev je več. Premikamo rdeči vžgalici.



# Rešene naloge tematike republiških tekmovanj

V. Batagelj  
T. Dolenc  
M. Martinec  
B. Mohar  
R. Reinhardt  
I. Tvrdy  
A. Vitek

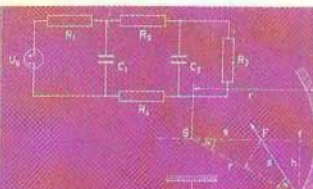
# ENAJSTA ŠOLA RAČUNALNIŠTVA

**Rešene  
naloge  
iz matematike**  
z republiških  
tekmovanj

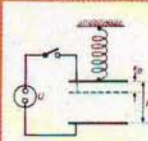
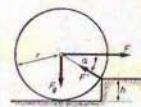
**Boris Lavrič**

**Rešene naloge iz matematike  
z republiških tekmovanj, 3. del**

II  
1967  
-1975



**MARJAN HRIBAR · REŠENE  
NALOGE IZ FIZIKE  
z republiških tekmovanj**



BOJAN GOLJI IN JANEZ ŽITNIK  
REŠENE NALOGE IZ FIZIKE  
Z REPUBLIŠKIH TEKMOVANJ

2. del

