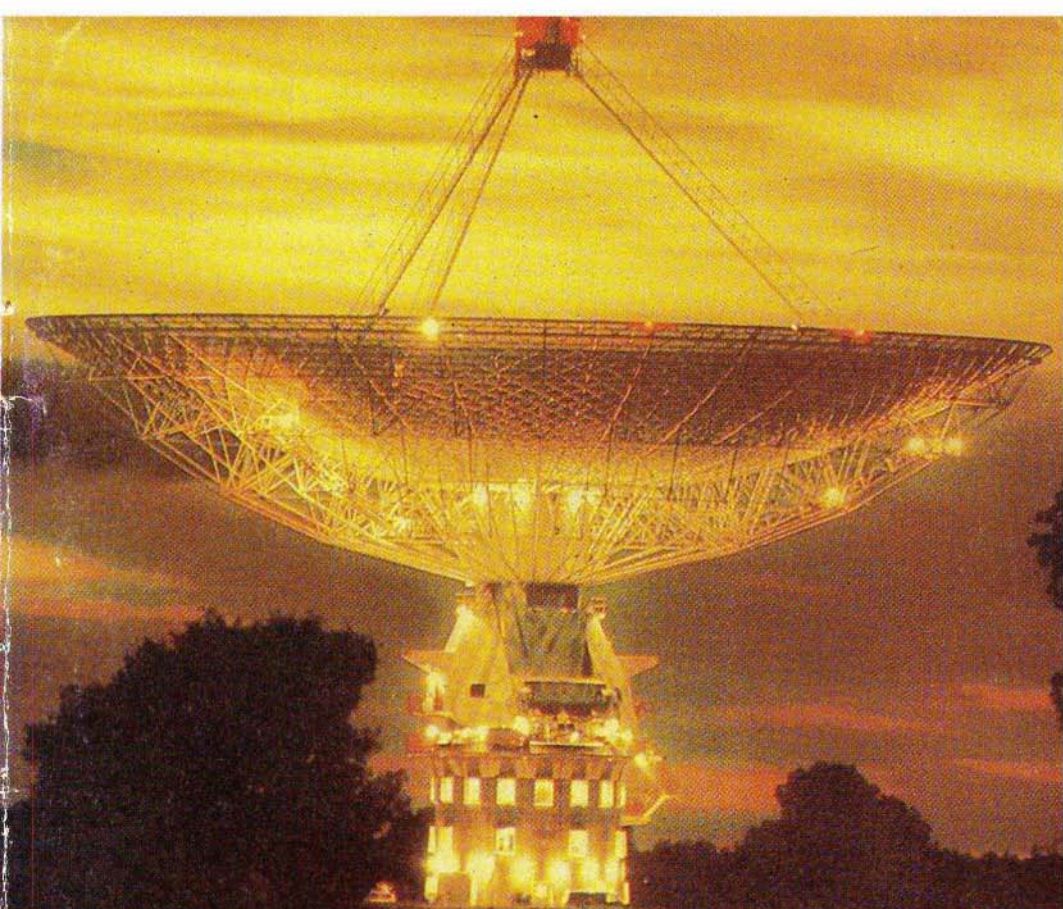




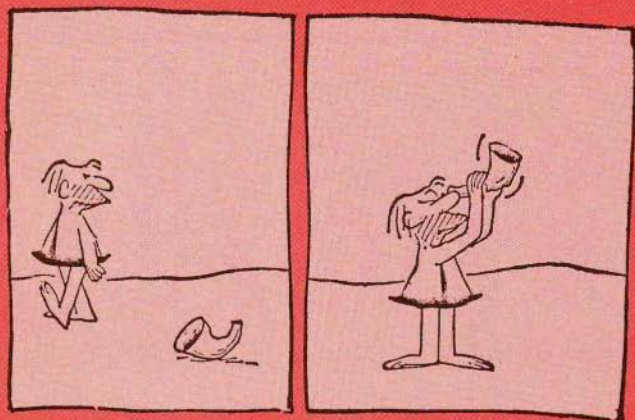
1

PRESEK

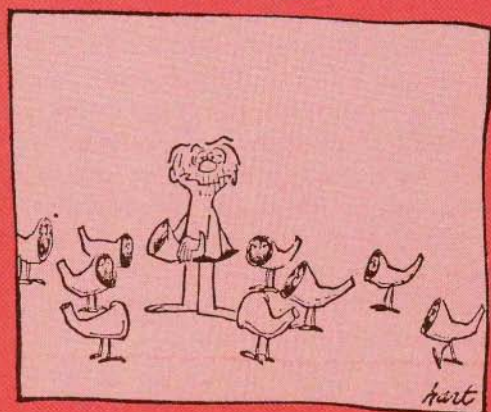
DRUŠTVO MATEMATIKOV, FIZIKOV IN ASTRONOMOV SRS LETNIK, 16, 1988-89

VSEBINA

UVODNIK	(Boris Lavrič, Ciril Velkovrh)	1
NALOGE	NAGRADNE NALOGE	
	— Nagradni pravokotnik (Boris Lavrič)	3
	— Predračun tiskarne (Ciril Velkovrh)	3
	— Najbolj kvadratasto leto (Tomaž Pisanski)	16
	— Gladka nagradna naloga (Boris Lavrič)	30
MATEMATIKA	Prostornina paraboloida (Boris Lavrič)	4
	O lihih magičnih kvadratih (Borut Zalar)	8
	Glasbena lestvica, 1. del (Marija Vencelj)	12
FIZIKA	Gladina vode v vrteči se posodi (Janez Strnad)	17
	Newton in Mach (Janez Strnad)	20
	Tek v dežju (Marjan Hribar, ilustriral Božo Kos)	22
ASTRONOMIJA	Končno: Supernova (Tomaž Zwitter, ilustriral Boris Lavrič)	24
RAZVEDRILO	PREMISLI IN REŠI	
	— Poišči vsa trimestna števila — Rešitev iz P—XV/3	
	Kateri ulomek je to? (Peter Petek)	31
	KRIŽANKE	
	— Slikovna križanka (Marko Bokalič)	32
	— Številiska križanka (Bruno Gričar)	34
	BOLJ ZA ŠALO KOT ZARES	
	— Dobra in slaba novica (Damjan Kobal)	36
	— Je res $7 = 8$? (Dušan Modic)	60
	PISMA BRALCEV (Damjan Kobal)	37
	UTRINKI (Izbral Damjan Kobal)	8, 37
	BISTROVIDEC	
	— Kvadrati z najdaljšim robom (Vladimir Batagelj)	51
RAČUNALNIŠTVO	Kaj se zgodi, ko prižgemo računalnik (Veselko Guštin)	38
MATEMATIKA	Čarovna sedmica (Prev. in pril. Mojca Lokar)	41
NALOGE	1988 — Rešitev str. 55 (Boris Lavrič)	47
	Trd oreh — Rešitev str. 56 (Boris Lavrič)	47
	Naloga o višini Sonca — Rešitev str. 57 (Marijan Prosén)	51
	Parki — Rešitev str. 58 (Boris Lavrič)	52
TEKMOVANJA	4. šolsko in 14. izbirno tekmovanje srednješolcev iz matematike (Darjo Felda)	48
REŠITVE NALOG	Rešitev nagradne naloge ob Ramanujanovi stoletnici (Marko Petkovšek)	53
NOVE KNJIGE	Aktivu matematikov, fizikov in astronomov (Ciril Velkovrh)	60
	Enajsta šola računalništva (Sandi Klavžar)	63
RAZVEDRILO	Papirnati naslanjač (Boris Lavrič)	64, III, IV
NA OVITKU	Radioteleskop v Parkesu s premerom 64 metrov (Glej članka na str. 4 in 17)	I



TUUUUU



Dragi bralci,

jesen vam prinaša nov Presek. Njegovo vsebino boste razkrivali sami, mi pa naj vas opozorimo le na štiri nagradne naloge, ki vas lahko obogate z izbranimi knjigami, in vas vabimo k sodelovanju.



Freie Welt, Tesler, Moskva

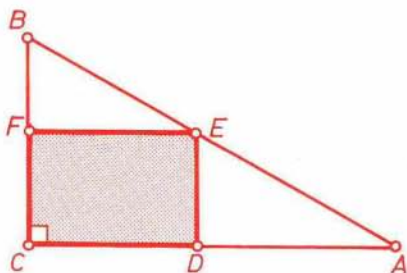
Boris Lavrič

Na vse šole smo poslali vsaj toliko prvih številčk novega letnika Preseka, kolikor so jih šole naročale v lanskem šolskem letu. Učitelje matematike in fizike ponovno prosimo, da list priporočijo učencem v osnovni in srednji šoli. Želimo, da list za mlade matematike, fizike, astronome in računalnikarje naročite tudi za šolsko knjižnico in za učitelje - člane društva matematikov, fizikov in astronomov SR Slovenije. Priporočamo vam, da za vse tri skupine pošljete na naš naslov le eno naročilo. Letošnja naročnina na Presek je 10 000.— din, za člane društva je 8 000.— din, za skupinska naročila na šolah pa le 5 000.— din. Omenjene cene veljajo le za plačila, ki bodo prispela do konca koledarskega leta 1988. Po tem roku pa bo potrebno poravnati znesek, katerega višino bomo objavili v tretji številki, ki bo izšla v decembru 1988. Prosimo vas, da nam do 1. 10. 1988 vrnete vse neprodane na ogled poslane izvode Preseka in pošljete tudi dokončno število naročnikov na vaši šoli.

Ciril Velkovrh

NAGRADNI PRAVOKOTNIK

V pravokotni trikotnik ABC je včrtan pravokotnik $CDEF$ tako, da dve njegovi stranici ležita na kate-
tah, oglišče E pa na hipotenuzi AB .
Produkt ploščin trikotnikov AED in
 EBF je enak 9. Koliko meri ploščina
pravokotnika $CDEF$?



Boris Lavrič

PREDRAČUN TISKARNE

Tiskarna nam je poslala naslednji predračun za natis knjige: Pri nakladi 2000 izvodov stane natis ene knjige 8.000.— din, vsak nadaljnji izvod pa 3.000.— din. Koliko stane natis vsake knjige, če naročimo le 1000 izvodov?

Ciril Velkovrh

PRESEK — list za mlade matematike, fizike, astronome in računalnikarje 16. letnik, šolsko leto 1988/89, številka 1, strani 1 — 64

UREDNIŠKI ODBOR: Vladimir Batagelj, Dušica Boben (pisma bralcev, stavljenje teksta), Darjo Felda (tekmovanja iz matematike), Franci Forstnerič, Bojan Golli (tekmovanja iz fizike), Marjan Hribar, Damjan Kobal (razvedrilo), Jože Kotnik, Edvard Kramar, Sandi Klavžar (računalništvo), Andrej Kmet, Peter Križan (fizika), Boris Lavrič (matematika, odgovorni urednik), Gorazd Lešnjak, Matija Lokar, Franci Oblak, Peter Petek (premisli in reši), Pavla Ranzinger (astronomija), Tomaž Skulj, Marjan Smerke (svetovalec za fotografijo), Niko Prijatelj (glavni urednik), Ivanka Šircelj (jezikovni pregled), Miha Štalec (risbe), Ciril Velkovrh (urednik, nove knjige, novice).

Dopise pošiljajte in list naročajte na naslov: Društvo matematikov, fizikov in astronomov SRS — Podružnica Ljubljana — Komisija za tisk, Presek, Jadranska c. 19, 61111 Ljubljana, p.p. 64, tel. (061) 265-061/53, št. žiro računa 50101-678-47233. Naročnina za šolsko leto 1988/89, vplačana do 31. 12. 1988, je za posamezne naročnike 10.000.— din, za člane društva 8000.— din, za skupinska naročila šol 5000.— din, posamezna številka 2000.— din (1500.— din).

List sofinancirajo Izobraževalna, Kulturna in Raziskovalna skupnost Slovenije
Ofset tisk Časopisno in grafično podjetje DELO, Ljubljana
© 1988 Društvo matematikov, fizikov in astronomov SRS — 923

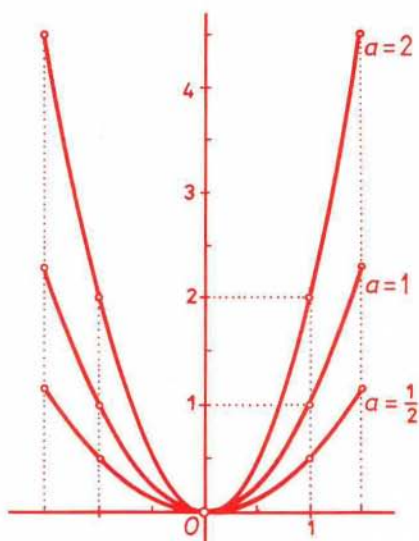
PROSTORNINA PARABOLOIDA

Beseda parabola dandanes ni več tako tuja ušesu kot nekoč. Če ne drugače, je marsikomu sedla v besedni zaklad zaradi svojih tehničnih modelov — zrcala v avtomobilskih žarometih ponekod imenujejo po domače kar parabole; parabolna antena pa je najbrž najmodernejši tak primer. Lahko bi še nadaljevali z naštevanjem, a raje pobrskajmo nekoliko po matematičnem slovarju in poglejmo, kaj nam bo ta povedal o paraboli. Krivulja je to. Vsa leži v eni ravnini, zato rečemo, da je ravninska. Kako bi jo opisali? Med mnogimi možnostmi se odločimo za funkcijsko predstavitev. Ravnino, na kateri parabola leži, opremimo s pravokotnim koordinatnim sistemom, kot smo že vajeni. Če koordinatni osi postavimo dovolj spretno, postane parabola graf kvadratne funkcije $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, ki je podan s predpisom

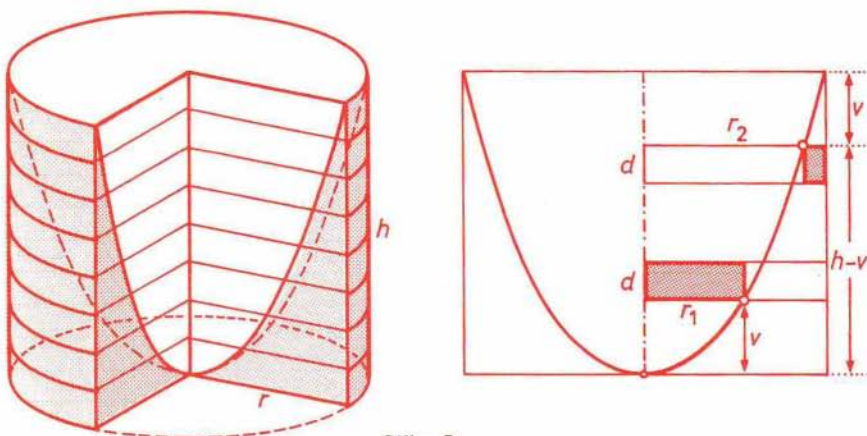
$$f(x) = ax^2, \quad x \in \mathbb{R}, \text{ kjer je } a > 0$$

Spomnimo se še, da graf funkcije f sestavljajo točke $(x, f(x))$. Torej našo parabolo določa množica $\{(x, ax^2), x \in \mathbb{R}\}$, ki jo brez težav skiciramo — na sliki 1 so načrtani kosi treh parabol (za $a = 1/2$, $a = 1$ in $a = 2$). Opazimo, da je krivulja somerna glede na ordinatno os in da poteka skozi koordinatno izhodišče. Čimvečji koeficient a vzamemo, bolj je koničasta, čeprav prave konice nima nikjer.

Vrnimo se na začetek in že lahko odkrijemo zvezo med tam navedenimi primeri in pojmom parabole, ki smo ga pravkar opisali. Če zavrtimo parabolo (krivuljo) okrog njene osi simetrije, opiše ploskev, ki je prisotna tako pri zrcalu kot pri anteni. Tej ploskvi rečemo rotacijski paraboloid (*rotacija* — vrtenje). Ima naslednjo zanimivo ter uporabno lastnost: na njegovi osi obstaja taka



Slika 1



Slika 2

točka, da se vsi žarki, ki gredo skozi njo, odbijejo od paraboloidea vzporedno z osjo. Tej točki rečemo gorišče. Zaradi omenjene lastnosti so nekatera zrcala in antene parabolične oblike.

Nam tudi narava kdaj postreže s parabolidom? Marsikateri pojav se da opisati s pomočjo parabole. Zadržimo se le pri enem – predstavljen in fizikalno utemeljen je v prispevku na strani 17. V posodo ujeta nestisljivo tekočino zavrtimo okrog navpične osi. Pri stalni (kotni) hitrosti vrtenja se njena gladina ustali in ima obliko rotacijskega paraboloidea.

Denimo, da je posoda valjaste oblike (lonec) napolnjena do višine h_1 , pri vrtenju pa se je tekočina dvignila ob robu do višine h_2 in je ni nič izteklo iz lonca. Kolikšna je tedaj globina tekočine na sredini posode? Prostornina tekočine se pri vrtenju ni spremenila, zato na vprašanje ne bo težko odgovoriti, če bomo le našli obrazec za izračun prostornine (prisekanega) rotacijskega paraboloidea. Torej se lotimo te naloge.

Rotacijski parabolid, ki ga dobimo z vrtenjem grafa funkcije $f(x) = ax^2$ ($a > 0$) okrog navpične ordinatne osi, zaprimo na višini h z vodoravnim krožnim pokrovom polmera r . Izračunali bomo prostornino V nastale posode. V ta namen jo vložimo v valj z višino h in s skupno (zgornjo) osnovno ploskvijo. Valj vzporedno z njo razrežimo na enake rezine debeline d . Njegovo prostornino označimo z U . Vsako rezino razdelimo na dele (zgornjo in spodnjo na dva, ostale pa na tri) takole:

- notranji del rezine naj bo največja okrogla plošča, ki je še vsebovana v parabolidu;
- zunanji del naj bo največji (robati) obroč, ki leži zunaj paraboloidea;
- vmesni del je obroč, ki ostane.

Pokažimo, da ima notranji del rezine s spodnjo osnovno ploskvijo na višini v enako prostornino kot zunanji obroč rezine z zgornjo osnovno ploskvijo na višini $h - v$.

Poglejmo na sliko 2.

Prvi del — krožna plošča — ima polmer osnovne ploskve r_1 . Potem velja $v = ar_1^2$, njegova prostornina pa meri $\pi dv/a$. Drugi del — robati obroč — ima notranji polmer r_2 . Tedaj je $h - v = ar_2^2$ in zaradi zveze $h = ar^2$ še $v = a(r^2 - r_2^2)$. Prostornina obroča je enaka $\pi dr^2 - \pi dr_2^2 = \pi dv/a$, torej sovпада s prostornino krožne plošče.

Združimo vse notranje dele rezin. Njihova skupna prostornina A je po prejšnjem enaka prostornini stopničastega telesa, ki ga sestavljajo vsi zunanji obroči. Poleg tega je manjša od iskane prostornine V , skupaj s prostornino B vseh vmesnih obročev pa presega V . Vmesne obroče spustimo na ravnino in dobimo krožno ploščo s polmerom r , debelino d in prostornino $B = \pi r^2 d$. Torej veljata zvezi

$$A < V < A + B \quad \text{in} \quad 2A + B = U$$

od koder dobimo oceno

$$U - B < 2V < U + B$$

Če izberemo debelino $d > 0$ dovolj majhno, je tudi prostornina B majhna, kot le želimo. Zato velja $U = 2V$. Prisekani paraboloid torej zavzema pol prostornine očrtanega valja.

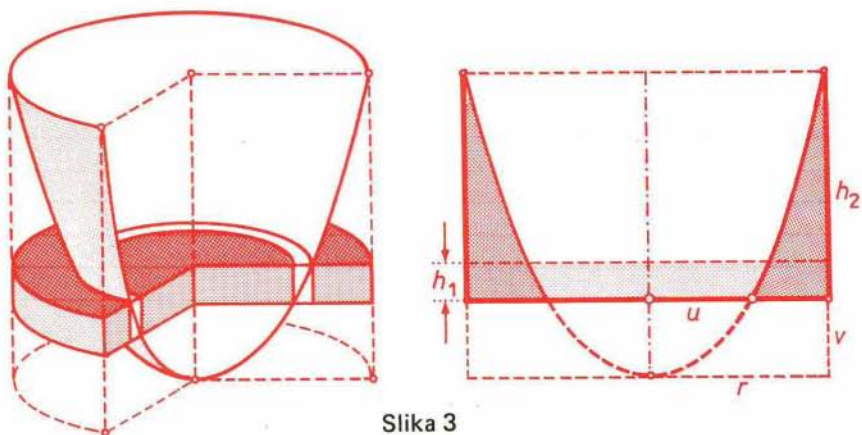
Zdaj smo že dovolj pripravljeni, da odgovorimo na vprašanje o globini tekočine v vrteči se posodi. Najprej poglejmo, kdaj sega vrtinec le na sredini do dna posode, ki naj ima polmer r . Prostornina tekočine je tedaj enaka polovici prostornine valja z višino h_2 in polmerom r osnovne ploskve, zato v tem primeru velja $h_2 = 2h_1$. Če velja $h_2 \leq 2h_1$ dobimo iskano globino z enakim razmislekom kot prej. Globina meri $2h_1 - h_2$. Brž ko velja $h_2 > 2h_1$, tekočine na sredini posode ni. Na postavljeno vprašanje smo s tem že odgovorili, ponuja pa se novo.

Kolikšen del dna posode ni pokrit s tekočino? Zanimal nas bo seveda primer $h_2 > 2h_1$.

Krog na dnu posode, ki ni pokrit s tekočino, naj ima polmer u . Rotacijski paraboloid, katerega del tvori površje tekočine, naj sega v globino v pod dno posode, dobimo pa ga z vrtenjem grafa funkcije $y = ax^2$. Poglejmo na sliko in pred nami sta enakosti $v = au^2$, $h_2 + v = ar^2$, ki nam dasta zvezo

$$v(r^2 - u^2) = h_2 u^2 \quad (1)$$

Mirujoča tekočina ima enako prostornino kot vrteča. Slednjo dobimo tako, da valju z višino h_2 in polmerom r osnovne ploskve odvzamemo ustrezni prise-



Slika 3

kani rotacijski paraboloid (ki je razlika dveh odsekov paraboloida). Torej velja enakost

$$\pi r^2 h_1 = \pi r^2 h_2 - [(\pi/2) r^2 (h_2 + v) - (\pi/2) u^2 v]$$

Poenostavimo jo in upoštevajmo zvezo (1). Brez težav najdemo relacijo $u^2 = (1 - 2h_1/h_2)r^2$, ki nam pove, da $1 - 2h_1/h_2$ dna posode ni pokrito s tekočino.

Naloge smo rešili, pet novih pa prepuščamo bralcu v veselje.

1. V ravnini z običajnim koordinatnim sistemom naj bo p premica, dana z enakostjo $y = -1$. Pokaži, da je množica točk (na tej ravnini), ki so enako oddaljene od premice p in od točke $(0, 1)$, parabola. Na tej osnovi poskusi formulirati geometrijsko definicijo parabole.
2. Določi množico vseh točk v prostoru, ki so enako oddaljene od dane ravni-
ne in točke, ki ne leži na njej.
3. Od prisekanega rotacijskega paraboloida s prostornino 20 cm^3 odrežemo na polovici višine (pravokotno na os) manjši paraboloid. Kolikšno prostornino ima?
4. Mirujoča voda v valjastem loncu (z navpično osjo) je globoka 5 cm. Zavrti-
mo lonec okrog osi tako, da doseže voda vrhnji rob posode. Kako visoka je po-
soda, če je pri tem točno polovica dna pokrita z vodo?
5. V navpično postavljen kozarec paraboloidne oblike, ki drži 2 dl, nalijemo
1 dl vina. Do kam seže gladina na sredi kozarca, če kozarec miruje. Kaj pa, če
ga zavrtimo tako, da vino doseže rob kozarca? Pa na zdravje!

Boris Lavrič

O LIHIH MAGIČNIH KVADRATIH

Magični kvadrat s stranico n je kvadrat z $n \times n$ polji, v katera razporedimo števila od 1 do n^2 tako, da je vsota v vseh stolpcih, vrsticah in glavnih diagonalah enaka. Pokazali bomo, da je mogoče magične kvadrate z liho stranico sestaviti s preprosto (in za računalnik primerno) formulo.

Naj bo n velikost kvadrata (torej liho število), N pa množica ostankov pri deljenju z n , torej števila od 0 do $n - 1$. Števila od 1 do n^2 , ki jih moramo razmestiti v kvadrat, bomo opisovali s parametroma r in s po formuli

$$m = nr + s + 1 \quad (1)$$

pri čemer bosta r in s elementa množice N . Vpeljimo še zapis $y = \text{ost}(x)$, ki pomeni ostanek pri deljenju x z našim fiksnim številom n . Na primer $1 = \text{ost}(n + 1)$. Našo definicijo razširimo še za negativne x . Koliko je $\text{ost}(-1)$?

$$-1 = 0.n - 1$$

Ali naj vzamemo $\text{ost}(-1) = -1$? Ne, saj v množici ostankov števila -1 ni. Iz zadrege si bomo pomagali na naslednji način:

$$-1 = -1.n + (n - 1)$$

Torej je $\text{ost}(-1) = n - 1$ in podobno lahko določimo ostanke tudi ostalim negativnim številom.

Oglejmo si formuli:

$$x = \text{ost}(-r + 2s) \quad (2)$$

$$y = \text{ost}(r + 2s + 1) \quad (3)$$

Če si izberemo par števil (r, s) iz množice N , lahko izračunamo par (x, y) , ki je ponovno par dveh števil iz N . Kako bomo zdaj prišli do magičnega kvadrata? Našim spremenljivkam moramo dati pomen. S formulo (1) smo opredelili pomen r in s , x in y pa naj pomenita vodoravno oziroma navpično koordinato kvadrata s tem, da začnemo z 0 in ne z 1. Zgornje levo polje ima torej koordinate $(0, 0)$.

Do magičnega kvadrata pridemo tako, da jemljemo po vrsti vse pare (r, s) in po formulah (2), (3) izračunamo položaj v kvadratu, po formuli (1) pa,

Po dolgem, dolgem pogovoru se skušaj spomniti vsega, kar se je govorilo, in začudil se boš, kako nepotrebno, prazno in pogosto tudi slabo je bilo vse, kar se je govorilo.

L.N. Tolstoj

katero število moramo tja zapisati. Naredimo zgled za $n = 3$:

r	s	x	y	m
0	0	0	1	1
0	1	2	0	2
0	2	1	2	3
1	0	2	2	4
1	1	1	1	5
1	2	0	0	6
2	0	1	0	7
2	1	0	2	8
2	2	2	1	9

6	7	2
1	5	9
8	3	4

Kdor je zadovoljen s tem, da zna konstruirati magične kvadrate lihe stopnje, lahko preneha brati. Za tiste, ki jih matematika resneje zanima, pa sledi dokaz, da je opisani postopek zares dober za vsak lihi n .

Bralcu prepuščam, da se prepriča o pravilnosti trditev:

$$\text{ost}(a) = \text{ost}(b) \Rightarrow \text{ost}(-a) = \text{ost}(-b) \quad (4)$$

$$\text{ost}(2a) = 2 \text{ ost}(a) \text{ za lihe } n \quad (5)$$

$$\left. \begin{array}{l} \text{ost}(a) = \text{ost}(b) \\ \text{ost}(c) = \text{ost}(d) \end{array} \right\} \Rightarrow \text{ost}(a + c) = \text{ost}(b + d) \quad (6)$$

V prvem koraku bomo pokazali, da se ne more zgoditi, da bi postavili dve različni števili na isto mesto. Pa denimo, da bi do navšečnosti prišlo pri parih (r, s) in (r', s') . Tedaj bi veljalo: $x = x'$ in $y = y'$ oziroma

$$\text{ost}(-r + 2s) = \text{ost}(-r' + 2s')$$

$$\text{ost}(r + 2s + 1) = \text{ost}(r' + 2s' + 1)$$

Dobimo:

$$\text{ost}(r - 2s) = \text{ost}(r' - 2s') \quad \text{po (4)}$$

$$\text{ost}(2r + 1) = \text{ost}(2r' + 1) \quad \text{po (6)}$$

$$\text{ost}(2r) = \text{ost}(2r') \quad \text{po (6)}$$

$$\text{ost}(r) = \text{ost}(r') \quad \text{po (5)}$$

Toda r in r' sta iz množice ostankov, zato velja $\text{ost}(r) = r$ in $\text{ost}(r') = r'$, torej tudi $r = r'$. Z upoštevanjem tega in (6) dobimo iz druge enakosti

$$\text{ost}(2s) = \text{ost}(2s')$$

in seveda $s = s'$.

Domneva, da bi se dva para preslikala v isto polje kvadrata, nas je pripeljala do zaključka, da sta ta dva para pravzaprav enaka. S tem smo dokazali, da nam naša formula porazdeli števila od 1 do n^2 v kvadrat, in to tako, da dve različni števili vedno prideta v dve različni polji. Ali je mogoče, da bi kako polje ostalo prazno? Polj kvadrata je toliko kot števil. Če bi ostalo kako polje prazno, bi morali vsaj v enem polju stati dve števili, kar pa vemo, da ni res.

Zdaj moramo še izračunati vsote vrstic, stolpcev in diagonal in se prepričati, da so enake. Vsota, ki jo potrebujemo v vsaki vrstici, stolpcu ali diagonal, je $\sigma = n(n^2 + 1)/2$. Vsota vseh števil v kvadratu je namreč

$$1 + 2 + \dots + n^2 = n^2(n^2 + 1)/2$$

ker pa je vrstic n in je vsota v vseh vrsticah enaka, mora ta biti (skupna vsota) $/n$.

Najprej izračunajmo vsoto za posamezno vrstico v našem kvadratu. Vrstica je določena z enačbo $y = y_0$, kjer je y_0 zaporedna številka vrstice. Če je S vsota v vrstici y_0 , velja:

$$\begin{aligned} S &= (nr_1 + s_1 + 1) + (nr_2 + s_2 + 1) + \dots + (nr_n + s_n + 1) = \\ &= n(r_1 + r_2 + \dots + r_n) + (s_1 + s_2 + \dots + s_n) + n \end{aligned}$$

kjer smo z r_i, s_j označili tiste pare, za katere velja:

$$\text{ost}(r_i + 2s_j + 1) = y_0 \quad i = 1, 2, \dots, n$$

Ali imata lahko dva izmed teh parov isti r , to je $r_i = r_j$, za neki par i, j ? Tedaj bi bilo $\text{ost}(r + 2s_i + 1) = \text{ost}(r + 2s_j + 1)$. Iz tega bi dobili $\text{ost}(2s_i) = \text{ost}(2s_j)$ in od tod $s_i = s_j$. To bi pomenilo, da sta para enaka, kar zanika našo predpostavko, da imata dva para isti r . Na povsem podoben način uvidimo, da nobena dva para ne moreta imeti isti s . Potem je

$$r_1 + r_2 + \dots + r_n = 0 + 1 + \dots + (n - 1) = n(n - 1)/2$$

in

$$s_1 + s_2 + \dots + s_n = 0 + 1 + \dots + (n - 1) = n(n - 1)/2$$

Seveda ni res $0 = r_1, 1 = r_2$ itd, toda to nas ne sme motiti, saj je pomembno samo, katera števila seštevamo, nič pa njihov vrstni red. Zdaj že lahko izračunamo:

$$S = n^2(n - 1)/2 + n(n - 1)/2 + n = \sigma$$

Vrstice imajo potrebno vsoto, saj je bil y_0 poljuben. Enako vidimo, da imajo vsi stolpci potrebno vsoto, le da moramo tokrat vzeti $x = x_0$. Poskusite!

Da bo magični kvadrat čisto pravi, morate imeti tudi obe diagonali pravo vsoto. Prva je določena z enačbo $x = y$ oziroma $\text{ost}(-r + 2s) = \text{ost}(r + 2s + 1)$. Od tod, s pomočjo (4) in (6), dobimo $\text{ost}(2r + 1) = \text{ost}(0) = 0$. Ker je $2r + 1$

liho, nenegativno in od $2n$ manjše število, nam ostane samo možnost $2r + 1 = n$ oziroma $r = (n - 1)/2$. To pomeni, da se na prvo diagonalno preslikajo tisti pari, ki imajo fiksen r in poljuben s . Če uporabimo kar prejšnje oznake, lahko zapišemo:

$$r_1 + r_2 + \dots + r_n = (n - 1)/2 + \dots + (n - 1)/2 = n(n - 1)/2$$

ter

$$s_1 + s_2 + \dots + s_n = 0 + 1 + \dots + (n - 1) = n(n - 1)/2$$

od koder spet dobimo: $S = \sigma$.

Druga diagonalna je določena z enačbo $x + y = n - 1$ oziroma

$$\text{ost}(-r + 2s) + \text{ost}(r + 2s + 1) = n - 1 = \text{ost}(n - 1)$$

Od tod, s pomočjo (4) in (6), dobimo:

$$\text{ost}(-r + 2s) = \text{ost}(-r - 2s - 1 + n - 1)$$

in od tod

$$\text{ost}(4s - n + 2) = \text{ost}(0) = 0$$

Število $4s - n + 2$ je liho. Ker je s ostanek, imamo oceno

$$-n < 4s - n + 2 < 3n$$

Števili 0 in $2n$ sta sodi, zato nam ostane edina možnost

$$4s - n + 2 = n \text{ oziroma } s = (n - 1)/2$$

Na drugo diagonalno se preslikajo pari s fiksnim s in vsemi mogočimi r , kar nam da

$$r_1 + r_2 + \dots + r_n = 0 + 1 + \dots + (n - 1) = n(n - 1)/2$$

$$s_1 + s_2 + \dots + s_n = (n - 1)/2 + \dots + (n - 1)/2 = n(n - 1)/2$$

in ponovno $S = \sigma$. Dokaz je s tem končan.

Če boste malo pobrskali po starih letnikih Preseka, boste našli podoben članek, ki je podal konstrukcijo magičnih kvadratov, katerih stranica je deljiva s 4. Ostali so torej še tisti sodi kvadrati, katerih stranica ni deljiva s 4. Tudi take kvadrate je mogoče konstruirati, z izjemo kvadrata 2×2 , o njih pa bomo spregovorili kdaj drugič. Bralcem v premislek:

- 1) Zakaj za sode n ni mogoče konstruirati podobne formule z ostanki?
- 2) Kaj se skriva za izbiro koeficientov $-1, 2, 0$ ter $1, 2, 1$ v formulah:

$$x = \text{ost}(ar + bs + c)$$

$$y = \text{ost}(dr + es + f)$$

Ali je morebiti vseeno kakšni so? Ali pa sta to edini trojici koeficientov, ki nam dasta magični kvadrat?

Borut Zalar

GLASBENA LESTVICA (1)

Ste že kdaj pogledali v klavir pod tisti veliki pokrov, ki ga na koncertih dvignejo? Koliko strun skriva v sebi, posebno če ga primerjamo s kitaro ali violino! In vendar je teh strun v nekem smislu malo, kot bomo videli.

Da se bomo lažje razumeli, si za začetek oglejmo nekaj fizikalnih in glasbenih pojmov. Pri tem se bomo omejili le na najnujnejše, kar potrebujemo za ta sestavek.

Vsako *nihajoče telo* je izvir prostorskega longitudinalnega valovanja, ki se širi na vse strani in po vseh snoveh. Ena od bistvenih značilnosti nihanja telesa in z njim vzbujenega valovanja je njuna *frekvenca*, to je število nihajev v eni sekundi. Merska enota za frekvenco je 1 s^{-1} , za katero pogosto uporabljamo tudi oznako 1 Hz (Hertz). Človeško uho je sposobno zaznati valovanje zraka v širokem frekvenčnem območju od 16 do 20 000 Hz in ga pretvoriti v slušni dražljaj. Prostorsko longitudinalno valovanje v tem frekvenčnem območju imenujemo *zvok*. *Zvok je torej vse, kar lahko slišimo.* Nihajoče telo, ki je izvir zvoka, bomo imenovali *zvočilo*.

Pomudimo se še malo ob zvoku. Zvočne pojave lahko razdelimo na *tone*, *zvene* in *šume*. Če obidemo strogo fizikalno definicijo, lahko rečemo, da je *šum* neurejena mešanica valovanj vseh mogočih frekvenc, ki jih s sluhom ne ločimo med seboj. Glede zvenov in tonov se glasbena in fizikalna definicija nekoliko razlikujeta. *Ton* je s fizikalnega stališča zvok z neko natanko določeno frekvenco. Mi bomo takemu zvoku rekli *čisti* ali *sinusni ton*, za razliko od *glasbenega tona*. Ustvarimo ga lahko le umetno s tonskimi generatorji. *Glasbeni ton* pa je posebna kombinacija čistih tonov. Poleg osnovnega, to je tona, ki ima v tej kombinaciji najmanjšo frekvenco, recimo f , nastopajo v njej še tako imenovani *delni* ali *aliquotni* toni, to so sinusni toni, katerih frekvence so večkratniki frekvence osnovnega tona: $2f$, $3f$, ... V našem ušesu zveni taka kombinacija *sozvočno*. Dejansko posameznih delnih tonov s sluhom niti ne razločimo, zaznavamo eno samo tonsko višino — *višino glasbenega tona*. Ta je določena s frekvenco f osnovnega tona. Čim večja je ta frekvenca, tem višji se nam zdi ton. Od števila in medsebojnega razmerja jakosti posameznih delnih tonov pa je odvisna tako imenovana *barva* glasbenega tona. Več jih je, bogateje in polneje nam ton zveni. Na vprašanje, zakaj je tako, je odgovor preprost: tako smo pač narejeni. Glasbeni ton je poseben primer tistega, kar v fiziki imenujemo *zven*. Ta je sestavljen iz večjega števila čistih, ne nujno alikvotnih tonov. Razen za glasbene tone se pojma fizikalnega in glasbenega zvena ujemata. Za primer navedimo, da je *zven* npr. zvok zvona, gonga, činel.

Vsi zvoki lahko postanejo glasbeno gradivo. Sodobne skladbe vsebujejo

tudi šume, evropska glasba zadnjih stoletij pa je uporabljala predvsem glasbene tone in zvene. Najosnovnejši zidaki so glasbeni toni. Kako neizmerno je to zvočno gradivo, povesta dva podatka. Da sega naše slušno območje od 16 Hz do 20 000 Hz, že vemo. Drugi podatek pa pravi, da smo v bolj občutljivem delu tega območja tja do 4000 Hz sposobni med seboj ločiti tona, ki se razlikujeta za vsega 1 Hz. Zato ni čudno, da si je človek že od nekdaj prizadeval v glasbo vnesti določeno enotnost in red. Nastali so razni *tonski sestavi* s svojimi *glasbenimi lestvicami*, ki so določale množico tonov, iz katere je dani tonski sistem črpal svoje tone. Poznamo veliko lestvic, ki so bile v različnih zgodovinskih obdobjih različno pomembne. Prav gotovo vsi poznate C-durovo lestvico, ki je del *zahodnoevropskega tonskega sestava*, v katerem oblikujejo skladbe že več kot tristo let. Poglejmo tabelo približnih frekvenc za tone prve oktave:

ton	c_1	d_1	e_1	f_1	g_1	a_1	h_1	c_2
frekvenca	262	294	330	349	392	440	494	523

Že iz te tabele lahko sklepamo, da v glasbi uporabljamo le majhno število tonov. V tem sestavku bomo pogledali, na osnovi kakšnih principov so izbrani toni evropskega tonskega sestava in do kakšne mere so ta načela realizirana.

Prej pa smo dolžni še neko pojasnilo. Zgoraj smo rekli, da so tonski sestavi nastali iz človekove želje po urejenosti v glasbi, ne nazadnje zaradi možnosti njenega zapisa. Mogoče pa se to vprašanje sploh ne bi pojavilo, ali vsaj ne s tako nujnostjo, če bi na vsakem glasbilu lahko dobili ton poljubne višine — glede na frekvenco zvezen zvok brez presledkov. Na številnih glasbilih — na kitari, violini, violončelu ... — res lahko zaigramo poljuben ton (v mejah obsega glasbila). Obstajajo pa tudi instrumenti, katerih zgradba dopušča le razmeroma majhno število možnih tonov, denimo orgle, klavir, harfa. Če bi povečali število dopustnih tonov v tonskem sistemu, bi to izredno povečalo nekatere instrumente in zapletlo njihovo konstrukcijo. Vidimo torej, da je tudi iz tehničnih razlogov potrebno, da vsebuje glasbena skala razmeroma malo tonov.

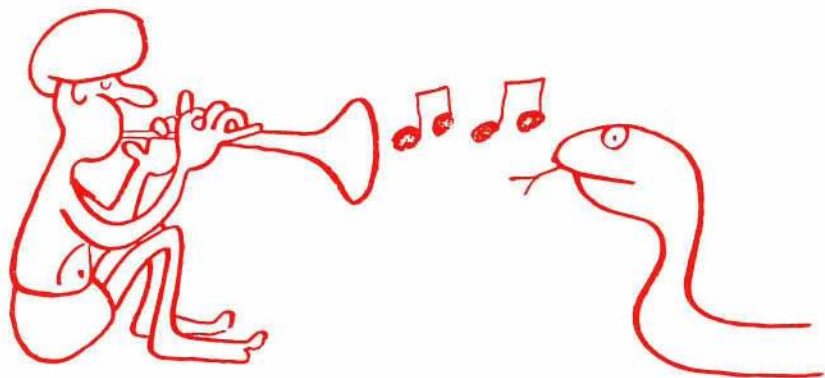
Pozoren bralec je lahko opazil, da smo že dvakrat primerjali klavir z godali. Ugotovili smo, da ima klavir precej strun, pa zmore razmeroma malo tonov, violina pa ima strun malo, tonov pa lahko iz nje izvabimo zelo veliko. Kako razložiti to navidezno nasprotje, še večje, ker je v obeh glasbilih osnovno zvočilo struna? Za to je potrebno vedeti, kako niha struna, in pozorno opazovati igri violinista in pianista.

Nihanje strune je mogoče teoretično obravnavati s sredstvi višje matematike. Pojav je zelo zanimiv za fiziko, pa tudi z glasbenimi instrumenti se da napraviti nekatere poskuse, ki nam dajo določene informacije o frekvencah, s kateri-

mi struna niha. Mi se bomo tu seznanili le z rezultati. Najprej povejmo, da struna nikdar ne niha z eno samo frekvenco. Poleg najmanjše frekvence, s katero niha, to je osnovne lastne frekvence f , niha še z vsemi frekvencami, ki so večkratniki te osnovne frekvence. *Struna torej ne oddaja čistega tona, ampak glasbeni ton.* Osnovna frekvenca f oziroma višina tona je odvisna od karakteristik strune. To so *dolžina* in *preseki strune*, *gostota materiala*, iz katerega je narejena, ter *velikost sile*, s katero je struna napeta. Pri dani struni sta njen preseki in gostota materiala določeni, nespremenljivi količini. Pač pa lahko npr. spremenimo silo, s katero je struna napeta. Vsi smo že kdaj videli violinista pri uglasčevanju violine. Dejansko pri tem s sukanjem ključev na vratu violine uravnava velikost sil, ki napenjajo strune. Podobno je pri klavirju. Od časa do časa vijaki, s katerimi so napete strune, popustijo in poklicati je treba uglasčevalca. — Pa denimo, da sta sedaj violina in klavir vsak po svoje dobro uglasčena. Torej o višini tona odloča le še dolžina strune. No, tu pa je bistvena razlika med klavirjem in violino. Klavirske strune določenih dolžin so pritrjene lepo na varnem v resonančni omari instrumenta. Pianist povzroči, da struna zaniha, tako da udari tipko klaviature, udarec pa se nato preko kladivca prenese na struno. Po vsem, kar smo povedali, je očitno, da lahko iz klavirja izrabimo kvečjemu toliko glasbenih tonov, kot je v njem strun. Drugače je z violino. Violinist povzroči nihanje strune tako, da potegne po njej z lokom. Istočasno s prsti proste roke pritiska strune ob podlago in pri tem mesto pritiska neprestano menjava. S tem spreminja dolžino nihajočega dela strune in z njo tonsko višino. Očitno torej res lahko na violino zaigramo poljuben ton v mejah njenega obsega.

Povrnimo se sedaj k našemu problemu. Radi bi odgovorili na vprašanje, zakaj so ravno nekateri toni vključeni v glasbeno skalo.

Konstrukcija glasbene skale ni tako preprosta kot na primer zgradba



temperaturne skale. Tam je interval med zmrziščem in vreliščem vode razdeljen na sto enakih delov. Pri glasbeni skali pa je treba upoštevati določena načela, ki sledijo iz narave zvočil in iz občutkov, ki jih v nas ustvarjajo razne kombinacije tonov. Po prvem načelu je treba skalo izbrati tako, da bodo uporabljene toni najbolj sozvočni. Povedali smo že, da so toni dvojne, trojne, ... frekvence povsem sozvočni s tonom osnovne frekvence. Torej moramo zahtevati, naj glasbena skala hkrati s tonom frekvence f vsebuje vsaj ton frekvence $2f$. Če bomo govorili tudi o frekvencah, manjših od f , bomo najprej postavili zahtevo po tonu frekvence $f/2$. Interval med danim tonom in tonom dvojne frekvence imenujemo *oktava*. Je kar precej širok in za glasbo so samo oktavni intervali premalo. Pri izbiri nadaljnjih tonov, ki naj zapolnijo oktavne intervale, moramo izpolniti še en pogoj. Vsi vemo, da lahko isto pesem pojemo višje ali nižje, pač glede na glas. Če zanemarimo ritem, torej o melodiji ne odloča zaporedje tonov določenih višin, saj bi se ob prenosu na višje ali nižje sicer skazila. Tudi razlike med frekvencah zaporednih tonov niso odločilne za melodijo, kot bi kdo lahko prehitro napak pomislil. Isto melodijo slišimo, če je razmerje frekvenc tonov, ki jo sestavljajo, obakrat isto. Spet bomo rekli, da smo tako narejeni. *Prenesti melodijo višje torej pomeni izvesti jo z drugimi, primerno višjimi toni, toda z natančno ohranitvijo razmerij frekvenc tonov, ki jo sestavljajo.* Naša druga zahteva, ki jo bomo postavili pri konstrukciji glasbene skale, bo sposobnost poljubnega prenosa katerekoli melodije višje ali nižje.

Predpostavimo, da smo uspeli konstruirati tako skalo, to je skalo, ki izpolnjuje naslednja pogoja:

- a) hkrati s tonom frekvence f vsebuje tudi tona frekvence $2f$ in $f/2$,
- b) dopušča naj prenos vsake melodije brez skaženosti.

Denimo, da so v tej skali v mejah ene oktave toni naslednjih frekvenc:

$$f = f_0 < f_1 < f_2 < \dots < f_{m-1} < f_m = 2f$$

Že zaporedje teh tonov pomeni preprosto melodijo. Prenesimo jo navzgor neskvarjeno tako, da bo najnižji ton f_0 prešel v f_1 . Nova melodija bo začela s tonom f_1 in se končala z nekim tonom f_{m+1} , ki mora biti oktavni dvakratnik tona f_1 , ker je $f_m = 2f_0$. Poleg tega mora biti razmerje med prvim in zadnjim tonom melodije obakrat isto. Ton f_{m+1} je že višji od zadnjega tona f_m v oktavni, je pa prvi za njim. Res. Če bi naša skala vsebovala neki ton f' med f_m in $f_{m+1} = 2f_1$, potem bi bil zaradi zahteve a) v njej tudi ton $f'/2$, za katerega bi iz $2f_0 = f_m < f' < f_{m+1} = 2f_1$ sledilo:

$$f_0 < f'/2 < f_1$$

To pa je protislovje, ker med f_0 in f_1 po predpostavki ni nobenega tona v skali.

Naša začetna melodija sestoji iz $(m + 1)$ različnih tonov. Navzgor prenešana jih ima seveda prav toliko, začenja pa s tonom f_1 in končuje s tonom f_{m+1} . Torej mora porabiti ravno vse tone od f_1 do f_{m+1} in je takale:

$$f_1 < f_2 < \dots < f_m < f_{m+1}$$

Ker mora biti zaradi zahteve b) neskvarjena, sledi od tod enakost razmerij:

$$\frac{f_1}{f_0} = \frac{f_2}{f_1} = \frac{f_3}{f_2} = \dots = \frac{f_{m+1}}{f_m}$$

Zahtevama a) in b) torej lahko ustrezajo le tako imenovane enakorazmerne skale. Matematično se lepše sliši, če rečemo, da morajo frekvence $f_0, f_1, f_2, \dots, f_n$ tvoriti geometrijsko zaporedje. Začetni člen je f_0 , poiščimo še količnik. Če ga označimo s q , imamo:

$$f_m = q^m f_0 = 2f_0$$

torej:

$$q^m = 2$$

Skala bo natančno določena, če bo znano število m , to je število stopničk med f_0 in $2f_0$.

O tem pa v prihodnji številki Preseka.

Marija Vencelj

NAGRADNA NALOGA

NAJBOLJ KVADRATASTO LETO

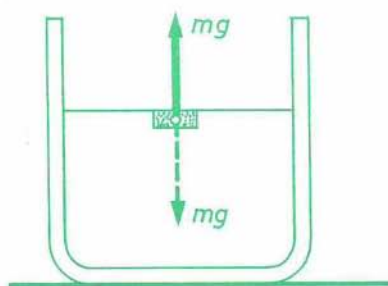
Pravijo, da je bilo leto 1936 zelo kvadratasto. 1936 je popoln kvadrat, 1 je popoln kvadrat, 9 je popoln kvadrat in tako naprej: 36, 196, ... so popolni kvadrati. Naj bo N poljubno naravno število, zapisano v desetiškem sistemu. Naj bo $k(N)$ število popolnih kvadratov, ki jih lahko sestavimo s ciframi števila N . Med vsemi števili N med 1 in 10000 poišči tisto, ki je najbolj kvadratasto, to je tisto z največjim $k(N)$. Pomagaš si lahko z računalnikom.

Tomaž Pisanski

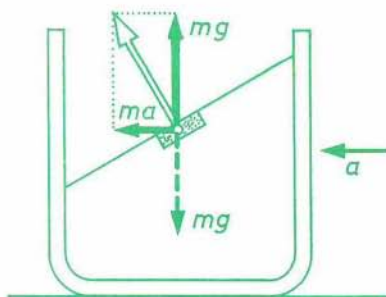
GLADINA VODE V VRTEČI SE POSODI

Da je gladina mirujoče vode vodoravna, ni težko pojasniti. Opazujemo majhen del vode z maso m ob gladini. Zemlja deluje nanj s težo mg navpično navzdol; pri tem je g težni pospešek. Opazovani del vode miruje: nanj deluje sila okolnih delov vode, ki uravnesi težo (slika 1). Sila okolnih delov vode je torej mg navpično navzgor. Okolni deli vode lahko na opazovani del izvajajo le silo, pravokotno na gladino. Zaradi sile, ki ne bi bila pravokotna na gladino in zato ne bi obremenjevala vode na stisk, bi voda začela teči.

Drugače je, če se posoda z vodo giblje enakomerno pospešeno s pospeškom a proti levi. Po tem, ko se lega gladine glede na posodo s časom več ne spreminja, opazujemo del vode z maso m ob gladini. Zdaj se sile na opazovani del ne uravnesijo, saj se giblje ta del, enako kot vsa voda v posodi, s pospeškom a proti levi. Poleg teže navpično navzdol in enako velike sile okolnih delov vode navpično navzgor, delujejo na opazovani del okoli deli vode s silo ma proti levi. Od I. Newtona pred tristo leti namreč vemo, da dobimo silo, ko pomnožimo maso s pospeškom. Pravzaprav smo to upoštevali že, ko smo navedli težo. Silo okolnih delov vode na opazovani del sestavljata dva prispevka (slika 2): mg navpično navzgor in ma proti levi. Gladina vode je pravoko-



Slika 1. Del vode ob gladini v mirujoči vodi. Opazovani del vode vzamemo za sistem in narišemo zunanje sile: teža mg deluje navpično navzdol (črtkano) in sila okolnih delov vode navpično navzgor (sklenjeno) jo uravnesi. Gladina je pravokotna na silo okolnih delov vode.



Slika 2. Del vode ob gladini v posodi, ki se giblje s konstantnim pospeškom a proti levi. Risba je narisana tako kot prejšnja. Vsota obeh prispevkov k sili okolnih delov vode pa je narisana z votlo puščico.

tna na njuno vsoto in se dviga proti desni. Njen nagib φ je določen z razmerjem obeh prispevkov takole:

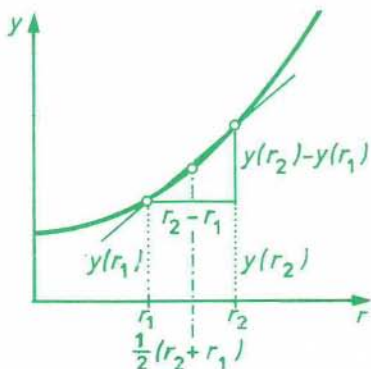
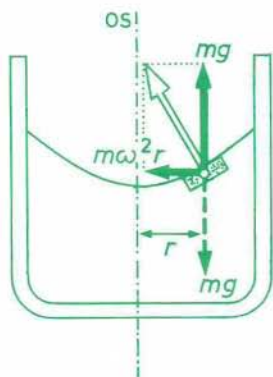
$$\operatorname{tg} \varphi = ma/mg = a/g$$

Nazadnje se zanimajmo za vodo v posodi, ki se enakomerno vrti s kotno hitrostjo ω . Če traja en vrtljaj, ki mu ustreza polni kot 2π , čas t_0 , je kotna hitrost $\omega = 2\pi/t_0$. Zopet opazujemo del vode z maso m ob gladini. Del enakomerno kroži. Enakomerno kroženje je pospešeno gibanje. Pospešek — tako imenovani centripetalni pospešek — z velikostjo $\omega^2 r$ kaže proti osi. Ta pospešek se spreminja z razdaljo r od osi.

Na opazovani del vode deluje teža mg navpično navzdol in okolni deli vode z enako veliko silo navpično navzgor in s silo $m\omega^2 r$ proti osi. Gladina je — kot v obeh prejšnjih primerih — pravokotna na silo okolnih delov vode, ki jo sestavljata prispevek mg navpično navzgor in prispevek $m\omega^2 r$ proti osi. Nagib gladine je določen takole:

$$\operatorname{tg} \varphi = m\omega^2 r/mg = \omega^2 r/g$$

Računanja še ni konec, ker se nagib spreminja z razdaljo od osi. Zaradi tega je gladina ukrivljena. Njena oblika je rotacijsko simetrična. Dovolj je, če določimo krivuljo, ki jo dobimo kot presek gladine z ravnino skozi os. Krivulja $y(r)$ podaja višino dela vode nad najnižjo točko ob osi: $y(0) = 0$. V razdalji r_1 od osi je višina $y(r_1)$ in v malo večji razdalji r_2 je višina $y(r_2)$. Tangens nagiba določa kvocient $(y(r_2) - y(r_1))/(r_2 - r_1)$ (slika 3). Katero razdaljo naj vstavimo namesto r v desno stran enačbe? Pomagajmo si s srednjo razdaljo $(r_2 + r_1)/2$. Tako dobimo:



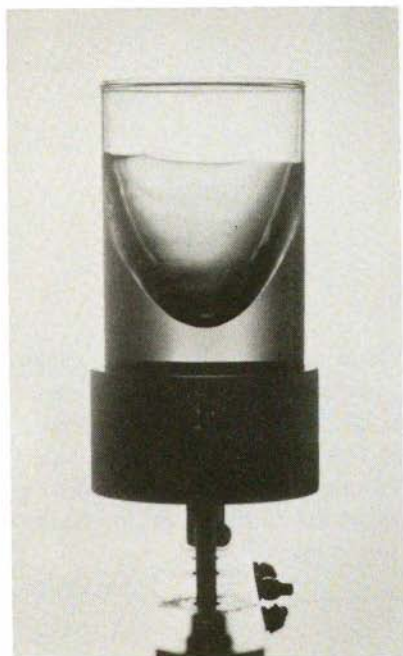
Slika 3. Del vode ob gladini v posodi, ki se enakomerno vrti. Risba je narisana tako kot prejšnja. Desna risba kaže, kako izračunamo tangens nagiba gladine.

$$y(r_2) - y(r_1) = \omega^2(r_2 - r_1)(r_2 + r_1)/2g = \omega^2 r_2^2 / 2g - \omega^2 r_1^2 / 2g$$

Uvidimo, da gre za parabolo

$$y(r) = \omega^2 r^2 / 2g$$

in ima gladina obliko rotacijskega paraboloida.

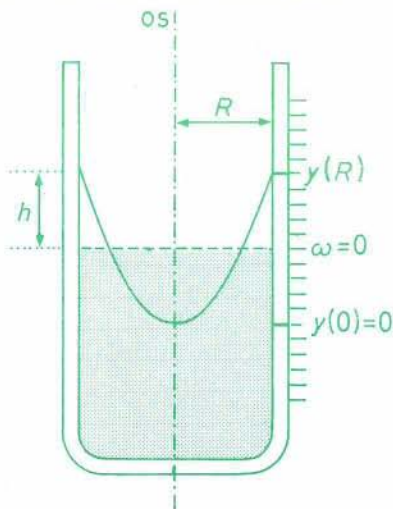


Slika zgoraj:

Stopetdesetletnico fizika Ernesta Macha (1838-1916) je avstrijska pošta počastila z izdajo posebne znamke (k prispevku na strani 21.)

Slika levo: Gladina vrteče se vode ima obliko rotacijskega paraboloida. Trditev drži samo približno, ker je težko doseči, da se čaša enakomerno vrti, motnje pa povzročajo valove. (Foto Marjan Smerke)

Spoznanje izkoriščajo. Plosko veliko posodo z živim srebrom vrtijo okoli navpične osi in uporabijo nastalo parabolično zrcalo v astronomskem daljnogledu. Od drugih možnosti za uporabo omenimo bolj vsakdanjo. Navpično cevko z vodo lahko uporabljamo kot merilnik za kotno hitrost ali frekvenco hitro se vrtečih teles. Frekvenco, to je število vrtljajev v sekundi, dobimo kot obratno vrednost časa enega vrtljaja. Vrteča se voda nad vodoravno ravnino pri $\gamma = 0$



Slika 4. Mirujoča voda (osenčeno, gladina je narisana črtkano) v cevki z radijem R in vrteča se voda (gladina je narisana sklenjeno). Če je radij cevke $R = 2$ cm in se cevka enkrat zavrti v 0,2 s, meri $h = 1$ cm. Del cevke nad gladino mirujoče vode mora biti dovolj visok.

ima prostornino $\pi\omega^2 R^4 / 4g = \pi R^2 y(R) / 2$, če se os navpične cevke z radijem R pokriva z vrtilno osjo. Zvezo najde bralec preprosto izpeljano na str. 5–6. Ta prostornina se ujema s prostornino valja $\pi R^2 h$, ki ga je zavzemala voda v cevki, dokler je mirovala (slika 4). Iz zveze $h = y(R) / 2$ izhaja, da je ležala gladina mirujoče vode na sredi med dnom in robom vode v vrteči se cevki. Po znižanju gladine lahko tedaj določimo kotno hitrost. Iz $h = \omega^2 R^2 / 4g$ sledita kotna hitrost $\omega = 2(hg)^{1/2} / R$ in frekvenca $1/t_0 = (hg)^{1/2} / \pi R$.

Janez Strnad

NEWTON IN MACH

Ob vrteči posodi z vodo, katere gladina ima obliko rotacijskega paraboloida, se spomnimo pomembnega osnovnega vprašanja. V *Matematičnih principih naravoslovja* (*Principia mathematica philosophiae naturalis*), katerih tristoletnico smo praznovali lani (*Do Newtonovih zakonov*, 7. številka PRESEKA), je Isaac Newton vpeljal *absolutni prostor*. Le-ta "po svoji naravi, ne glede na kaj zunanjega, ostaja vedno enak in nepremičen." "Relativni prostor je gibljiva mera

absolutnega prostora, ki jo naši čuti prepoznajo glede na telesa ... Ker delov prostora ne moremo videti ali razločevati od drugih delov s čuti, uporabljamo namesto njih mere, dostopne čutom ... Namesto absolutnih leg in gibanj uporabljamo relativne in zaradi tega v vsakdanjih zadevah ne naletimo na neskladnosti. Toda v filozofskih razpravah moramo izločiti svoje čute in obravnavati stvari same, neodvisno od njihovih mer, ki so dostopne čutom."

Newton je bil prepričan, da je obstoj absolutnega prostora mogoče podpreti z nazornim poskusom z vedrom vode. Na dolgo vrv obesimo vedro, ki je do polovice polno vode. Vedro velikokrat zasučemo in spustimo. Vedro se vrti v prostoru in po kratkem času se začne vrteti voda v njem. Na robovih se voda, ki miruje glede na vedro in se vrti v prostoru, dvigne. To naj bi kazalo, da je pomemben le pospešek glede na absolutni prostor. Če bi vedro ostalo pri miru, pa bi oddaljene zvezde krožile okoli vedra, bi ostala po Newtonovem mnenju gladina vode v vedru vodoravna.

Avstrijski fizik in filozof Ernst Mach, ki je bil rojen pred stopetdesetimi leti, je leta 1883 v knjigi *Mehanika v svojem razvoju* (*Die Mechanik in ihrer Entwicklung*) ostro nasprotoval Newtonu. Kritiziral je to, kako je Newton vpe-ljal maso in absolutni čas in absolutni prostor. Za slednja je menil, da sta "čisto miselni zadevi, čisti duševni tvorbi, ki ju ne moremo uresničiti, da bi prišli do izkušenj." "Vse fizikalne ugotovitve so relativne. Zato tudi vse geometrijske ugotovitve veljajo le relativno glede na mero. Pojem merjenja je pojem odnosa, ki ne vključuje ničesar, česar ne bi vsebovala mera."

Machu je bil pomemben le relativni pospešek glede na oddaljene zvezde. Po njegovem mnenju maso opazovanega telesa določa medsebojno delovanje zvezd in tega telesa. Če bi vedro z vodo ostalo pri miru in bi zvezde krožile okoli njega, bi gladina vode imela obliko rotacijskega paraboloidea. To mnenje izraža *Machovo načelo*.

Na vprašanje: "Kdo ima prav glede vedra vode in zvezd, Newton ali Mach?" za zdaj v okviru fizike ni mogoče odgovoriti. Poskusa, pri katerem bi ostalo vedro pri miru in bi okoli njega krožile oddaljene zvezde, ni mogoče zares narediti. Na eni strani lahko vrteče se vedro z vodo uspešno opišemo le s poskusi in merjenji v laboratoriju, ne da bi se menili za oddaljene zvezde. Na drugi strani pa uspešna izpopolnjena teorija gravitacije — *Einsteinova splošna teorija relativnosti* — vsaj delno gradi na Machovem načelu.

S svojim vztrajanjem zgolj na količinah, ki jih lahko neposredno spravimo v zvezo s čutnimi zaznavami, je Mach odšel v skrajnost. Naposled je odklonil misel o tem, da sestavljajo snov atomi in je prišel v nasprotje s pretežno večino fizikov.

Janez Strnad

TEK V DEŽJU

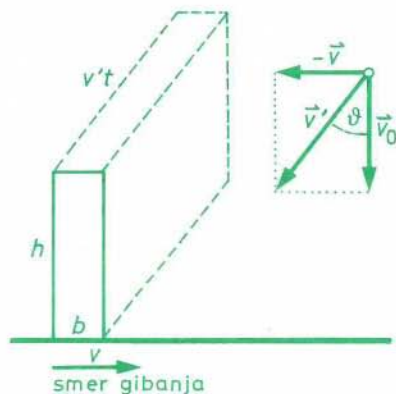
Pomlad in poletje prineseta plohe in nevihte. Pogosto nas zaloti dež na planem in če se le da, si brž poiščemo zavetje v bližini. Nekaj vode pa le ujamemo. Izračunajmo, koliko je to, in ocenimo, s kolikšno hitrostjo se moramo spustiti v beg, da bomo kolikor se da suhi.

Naš račun bo le približen. Vzemimo za začetek, da padajo deževne kaplje navpično, da je njihova hitrost v_0 in da pade Φ kilogramov vode na kvadratni meter na sekundo. Uvedimo še gostoto dežja $\rho = \Phi/v_0$, ki nam pove, koliko kilogramov vode je med nevihto v kubnem metru zraka. Tekača predstavimo kot kvader z višino h in z osnovno ploskvijo z robovoma b in c . Tekoč teče s hitrostjo v v smeri krajšega roba c .

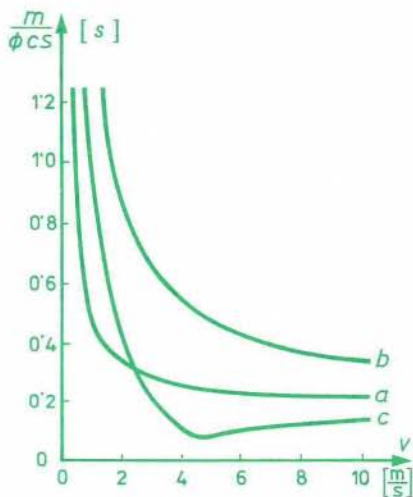
Opazujemo v sistemu, ki miruje glede na tekača. Deževne kaplje padajo proti tekaču poševno s hitrostjo v' , ki ima komponento v_0 v navpični smeri in komponento $-v$ v vodoravni smeri (slika 1). V času teka $t = s/v$, če je s pot do zavetja, zmóči tekača voda, ki je v označenem paralelepipedu z robom $v't$ nad kvadrom, to je:

$$m = \rho (bcv't \cos \vartheta + hcv't \sin \vartheta) = \Phi cs(b/v + h/v_0)$$

Produkt Φcs spoznamo kot množino vode, ki pade vsako sekundo na sled kvadra na poti do zavetja. Krivulja a na sliki 2 kaže razmerje $m/\Phi cs$ v odvisnosti



Slika 1



Slika 2



od hitrosti "tekača". Za podatke smo vzeli $b = 30$ cm, $h = 170$ cm in $v_0 = 9$ m/s $\star$. Pri hitrosti okoli 4 m/s zajame tekač okoli 1/4 dežja, ki pade na sled v sekundi. Hitrejši tek ne pomaga kaj prida. Pri teku s hitrostjo svetovnega rekorda na 100 m bi še vedno zajeli 1/5 padlega dežja. Pri hoji s hitrostjo 1 m/s zajamemo že polovico dežja, pri počasnejšem premikanju pa še več.

Z enakim premislekom obravnavamo tudi primere, ko pada dež z vetrom. Krivulja b na sliki 2 kaže primer, ko padajo dežne kaplje pod kotom 30° proti navpičnici tekaču v obraz, krivulja c pa primer, ko padajo pod enakim kotom proti navpičnici tekaču v hrbet. Sami lahko premislite, kako bi bilo, če bi nosilo dež od strani.

Avtor je priredil prispevek po članku v *European Journal of Physics* ⁽¹⁾, vi pa lahko preskusite, koliko je ocena pravilna in uporabna.

Marjan Hribar

Literatura:

1. Alessandro De Angelis, *European J. Phys.* 8 (1987) 201 – 202

$\star$ Hitrost v_0 dosežejo dovolj debele kaplje dežja, ko se pri padanju izenačita teža in upor zraka. Pri kapljah z radijem 1 mm je v_0 okoli 9 m/s.

KONČNO: SUPERNOVA!

Uvod

Astrofiziki so v mnogočem podobni zgodovinarjem. Prvi skušajo dognati zgodovino življenja zvezd, drugi pa zgodovino človeštva. Tudi težave obeh poklicev so podobne. V teku stoletij se mnoge pomembne listine izgubijo, zato lahko zgodovinarji le sklepajo o njihovi vsebini in vplivu na nadaljnji razvoj dogodkov. Astrofiziki ne proučujejo listin, ampak svetlobo, ki prihaja z zvezd. Kot zgodovinarju odkritje pomembne listine lahko astrofiziku blisk svetlobe prinese potrditev, da se je zares zgodilo nekaj, kar je do tedaj le posredno predvideval. Najpomembnejše odkritje te vrste v zadnjem desetletju je bila supernova, ki so jo opazili 24. februarja 1987. Zato je razumljivo, da se je marsikomu izvil vzklík, s katerim smo naslovili ta sestavek.

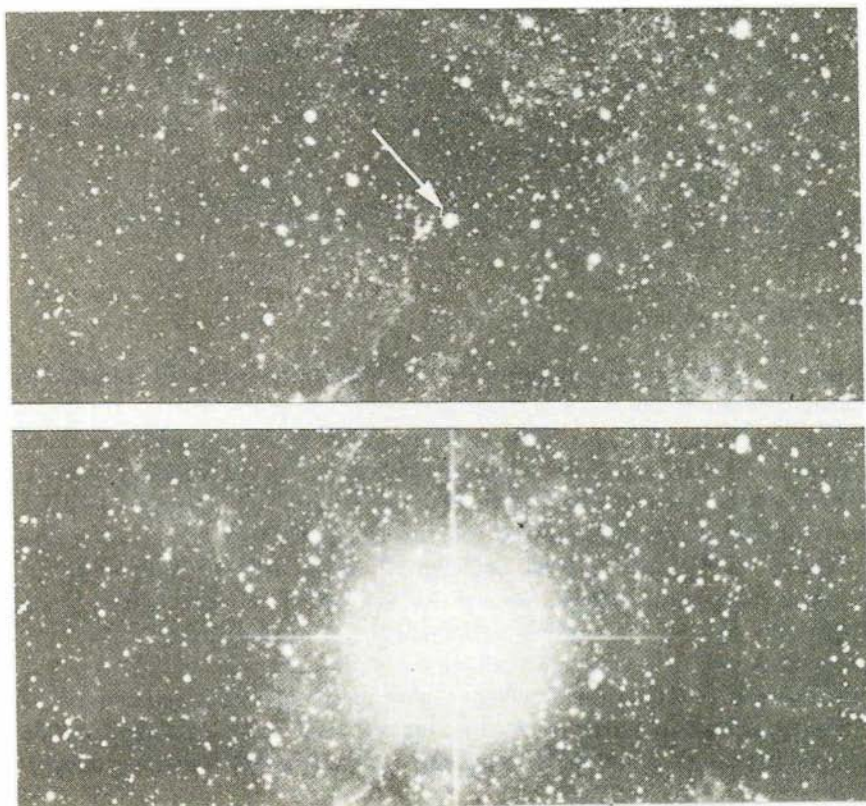
Supernova je drugo ime za eksplozijo zvezde. Njene dele raznese na vse strani, nekaj mesecev pa je zvezda tudi mnogo svetlejša kot pred eksplozijo. Takrat seva toliko svetlobe kot 300 milijonov Sonc. Če nam je dovolj blizu, jo opazimo tudi s prostim očesom. Odtod stari zapisi o "novih" zvezdah, ki so se pojavile na nebu v letih 1054, 1572 in 1604. Slednjo je opazoval Kepler. Kasneje astronomi niso imeli več take sreče. Z močnimi daljnogledi so sicer videli eksplozije zvezd v drugih galaksijah, a je bila zaradi velike oddaljenosti teh objektov njihova svetloba prešibka, da bi lahko razkrila, kaj se je v resnici zgodilo.

Vzroki eksplozije

Preden spregovorimo o lanskem dogodku, se spomnimo članka Energija in zvezde v 10. letniku Preseka. Tam smo se naučili, da zvezda, ki se je rodila z zgoščevanjem oblaka medzvezdnega plina, dolgo časa mirno živi. Gravitacijski privlak bi jo sicer rad stisnil skupaj, a gretje zaradi jedrskih reakcij, ki potekajo v njeni sredici, poskrbi za tlačno razliko, ki uravnoveša gravitacijsko silo. Jedrska reakcija, ki poteka pri okoli 15 milijonih stopinj v zvezdni sredici, je spajanje vodikovih jeder v helijeva. Ta reakcija poteka v večini zvezd in tudi v našem Soncu. Sčasoma vodika v zvezdni sredici zmanjka. Helijeva sredica se prične krčiti in segrevati. To segreje tudi plast nad sredico. Spajanje vodika v helij v tej plasti je zaradi dodatnega gretja "od spodaj" celo burnejše od reakci-

je, ki je potekala v zvezdni sredici, ko je ta vsebovala še dovolj vodika. Del dodatno sproščene energije počasi širi zunanje plasti, ne zadostuje pa, da bi jih vzdrževal na konstantni temperaturi. Zvezda je zato vedno večja, ohlajanje vrhnjih plasti pa ji da rdečkasto barvo. Takim zvezdam pravimo rdeče orjakinje.

Krčenje segreva helijevo sredico in, ko temperatura doseže sto milijonov stopinj, se helij prične spajati v ogljik. Sčasoma helija v jedru zmanjka, podobno kot je v vodikovem jedru zmanjkalo vodika. Če ima zvezda maso blizu Sončevi, se skrči in potemni. Če pa je okrog desetkrat težja, je teža zunanjih plasti, ki pritiskajo na sredico, dovolj velika, da se po krčenju v sredici vname ogljik. Ko se ogljik spremeni v železo, pride v življenju zvezde do katastrofe. Za



Slika 1. Videz zvezdnega neba v okolici supernove SN 1987 A pred eksplozijo in po njej. (iz New Scientist 5. nov. 1987 str. 56 zgoraj)

razliko od lažjih elementov potrebuje železo za spajanje zunanjo energijo. Spajanje železa ne segreva središča zvezde, ampak ga celo dodatno ohlaja. Zato se tlačna razlika zmanjša (spomni se, da je za idealni plin tlak sorazmeren s temperaturo), gravitacija zmaga in zvezda zgrmi skupaj.

Krčenje se ustavi šele, ko gostota v sredici doseže tisočbilijonkratno gostoto vode. Če bi dali na eno stran tehtnice za kavno žličko tako goste snovi, bi jo uravnotežila šele teža vseh ljudi na Zemlji. V običajni snovi imamo v atomskih jedrih dve vrsti delcev: protone in nevtrone. Pri tako velikih gostotah pa se protoni spremenjajo v nevtrone. Nastala nevtronska snov je še mnogo trša od železa. Zato se zunanje plasti zvezde, ki padajo proti središču, odbijejo na površini novo nastale nevtronske sredice in odletijo navzven. Ko se proton spremeni v nevtron, odda delec, ki mu pravimo nevtrino. Ta ima prav čudne lastnosti. Leti s hitrostjo svetlobe in se zlepa ne ustavi v tarči, ki mu jo nastavimo. Celo skozi Zemljo gre kot za šalo. A iz nenavadne zvezde, o kateri govorimo, tudi nevtrini ne morejo zlahka uiti. Če se kje zaustavijo, porinejo kos snovi navzven, podobno kot svinčenka porine leseno klado. Tako tudi nevtrini pomagajo spremeniti krčenje v eksplozijo.

Zvezda lahko eksplodira tudi v drugačnih okoliščinah od tistih, ki smo jih opisali zgoraj. A te za našo supernovo niso pomembne, zato končno že povejmo, kaj so opazili lansko leto.

SN 1987A

Upam, da vaš tale naslov ni prestrašil. Ta kratica je namreč uradno ime, ki ga uporabljajo astronomi za našo supernovo. Pove, da je bila to prva supernova (A), ki so jo opazili v letu 1987. Nekaj podatkov o odkritju najdete v prvem vstavku. SN 1987A je članica galaksije z imenom Veliki Magellanov oblak. Zvezde v tem oblaku so zelo daleč od nas. Svetloba z njih potuje do Zemlje kar 170000 let. Torej je supernova dejansko eksplodirala v času, ko je bila na Zemlji starejša kamena doba. Šele čez 170000 let, to je 23. februarja 1987, je njena svetloba pripotovala do nas. Žal je v Sloveniji nismo videli. Veliki Magellanov oblak leži na južnem nebu, daleč pod našim obzorjem. Supernovo so lahko opazili le iz krajev na južni polobli. Ni bila sicer najsvetlejša zvezda na nebu, vseeno pa so jo lahko videli s prostim očesom. Ker supernove brez dragega potovanja v južne kraje ne moremo videti, se raje vprašajmo, koliko energije je bilo potrebno, da je prej povprečno svetla zvezda nenadoma zasvetila več kot tisočkrat močneje.

Opis potrošnje energetskih zalog zvezde ob eksploziji najdete v drugem vstavku. Za tiste, ki ste manj veščji v računstvu, povzemimo rezultate z bese-

KRONOLOGIJA DOGODKOV

srednjeevropski čas
170.000 pr.n.š.

23. februar 1987 ob 8³⁵

V Magellanovem oblaku je eksplodirala zvezda. Na Zemlji tega ni mogel nihče opaziti.

Informacija o eksploziji je dosegla Zemljo. Detektorji na Japonskem in v ZDA so zabeležili prihod nevtrinov. Naprave pod goro Mont Blanc so zaznale nevtrine skoraj pet ur prej, vendar mnogi tej meritvi pripisujejo manjši pomen.

24. februar 1987 zjutraj

Kaj se dogaja, so se astronomi zavedeli, ko sta Ian Shelton in Oscar Duhalde na observatoriju Las Campanas v Čilu s prostim očesom opazila "novo" zvezdo v Magellanovem oblaku. Sheltona je na dogodek opozorila svetla pega na fotografiji, ki jo je rutinsko posnel tisto noč.

24., 25. februar 1987

Tisk, radio in televizija so novico posredovali svetu. Astronomi so vse razpoložljive daljnogleds usmerili proti supernovi. Ponudbe: "Odstopi mi daljnogled za to noč, jaz pa ti v zameno odstopim štirinajst noči v septembru," so bile nekaj običajnega.

20. maj 1987

Tega dne je bila supernova najsvetlejša. Dolgotrajno naraščanje sija po začetni eksploziji nekateri razlagajo z jedrskimi reakcijami v razpenjajoči se ovojnici zvezde. Supernova je vedno temnejša. Skozi koprene razpenjajoče se ovojnice vidimo vedno globlje proti središču supernove, zato jo bodo astronomi še dolgo z zanimanjem opazovali.

1987, 1988 ...

GROBA OCENA ENERGIJSKE BILANCE OB EKSPLOZIJ

(za tiste, ki bi želeli računati)

Pridobljena energija:

Jedro zvezde se močno skrči. Zaradi razlike med gravitacijsko energijo jedra pred krčenjem in po njem pridobimo: $W_1 \approx G m^2 / R_{po} - G m^2 / R_{pred} = 3 \cdot 10^{46}$ joulov.

Potrošena energija:

za izsev v prvem dnevu po eksploziji: $W_2 \approx 10^{39}$ joulov

(izračunamo iz zmerjenega sija in poznane oddaljenosti),

za razpenjanje ovojnice zvezde: $W_3 < Mv^2 / 2 + GMm / R_{pred} = 2 \cdot 10^{44}$ joulov,

preostanek, ki ga odnesejo nevtrini: $W_4 \geq W_1 - (W_2 + W_3) = 3 \cdot 10^{46}$ joulov.

Podatki:

$G = 6,67 \cdot 10^{-11} \text{ Jm/kg}^2$

$M_{\odot} = 2 \cdot 10^{30} \text{ kg}$

$m = 1,4 M_{\odot}$

$M = 19 M_{\odot}$

$v = 2000 \text{ km/s}$

$R_{pred} = 100\,000 \text{ km}$

$R_{po} = 20 \text{ km}$

gravitacijska konstanta

masa Sonca

masa jedra zvezde

masa ovojnice zvezde

povprečna hitrost širjenja ovojnice

polmer jedra pred eksplozijo

polmer nevtronskega jedra

dami. Najprej se vprašajmo, kakšne zaloge energije zvezda tedaj sprosti. Kot smo že omenili, odnese ob eksploziji ovojnico zvezde navzven, njeno jedro pa se močno skrči in spremeni v izredno gosto nevtronsko snov. Ob krčenju se sprošča potencialna energija. Dva porabnika te energije hitro uganemo. Prvi je svetloba, ki uide iz zvezde ob eksploziji. Drugi je kinetična in potencialna energija razpenjajoče se ovojnice. Očitno pa mora energijo odnesti še nekdo tretji, saj je vsota energije, ki jo zvezda odda v obliki svetlobe, in tiste, ki jo vsrka ovojnica, mnogo manjša od potencialne energije, ki je na razpolago.



Spomnimo se na nevtrine, nenavadne delce, ki nastanejo pri spremembi jedra zvezde v nevtronsko snov, kot smo opisali v prejšnjem poglavju. Očitno prav ti delci odnesejo večino energije, ki se sprosti pri eksploziji supernove.

Svetlobo s supernove smo lahko videli s prostim očesom. Ali smo lahko opazili tudi roj nevtrinov, ki nosi s seboj še mnogo večjo energijo od svetlobe? Odgovor je pritrdilen in tega so bili znanstveniki najbolj veseli. Kot smo že omenili, je nevtrine izredno težko opaziti. Skozi človeško telo in celo skozi zemeljsko oblo gredo brez sledu. Včasih, čeprav skrajno poredkoma, pa se kateri le zaustavi. Tako se je v 8000 tonah vode v bazenu, ki je zgrajen globoko pod zemljo pri kraju Cleveland v ameriški zvezni državi Ohio, ustavilo 8 nevtrinov iz supernove. To je le neznamenit delež roja kakih 300 bilijonov nevtrinov, ki so zdrveli skozi bazen. Značilne bliske svetlobe, ki so nastali pri tem, so zabeležili detektorji, nameščeni ob robu bazena. Podobna rezultata sta dobili tudi raziskovalni skupini na Japonskem in v Italiji. Svetlobo z zvezd opazujejo ljudje že od nekdaj. Nevtrine pa so (z izjemo tistih iz Sonca) opazili prvič. Zato mnogi imenujejo opazovanje lanske supernove tudi rojstvo "nevtrinske astronomije".

Nevtrini, ki so jih opazili, so prišli iz notranjosti supernove. Kot smo omenili, nastanejo ti delci v jedru zvezde, kjer se običajna snov spreminja v nevtronsko. Torej je njihovo odkritje neposredna potrditev teorije o tvorbi nevtronske zvezde, ki jo opazimo na mestu supernove potem, ko eksplozija odpihne ovojnico. Lanski dogodek pa je prevetril tudi druge teorije, povezane s supernovami. S starih posnetkov Velikega Magellanovega oblaka so ugotovili, kakšna je bila zvezda pred eksplozijo. Za razliko od nevtrinskih opazovanj se tu merjenja niso povsem skladala s teoretskimi napovedmi. Pred eksplozijo je bila ovojnica modra in zato mnogo bolj vroča od rdeče, relativno hladne ovojnice rdeče orjakinje, kakršno so pričakovali teoretiki. Po začetnem razburjenju so ugotovili, da teorije o vzrokih in poteku eksplozije ni potrebno spreminjati. Burna dogajanja, ki smo jih opisali v prejšnjem poglavju, potekajo namreč globoko v zvezdni notranjosti, skrita našim pogledom. Vidimo le zvezdno ovojnico, ki na dogajanja v jedru bistveno ne vpliva. Jedro SN 1987A je bilo pred eksplozijo na moč podobno jedru rdeče orjakinje. Da pa je bila ovojnica drugačna, je le zanimivost, zaradi katere pa ni treba, da bi nas bolela glava.

Eksplozija supernove je svojevrstna "vesoljska kuhinja". Verjamemo, da je večina težkih kemičnih elementov nastala z jedrskimi reakcijami, ki lahko tečejo le pri izjemnih tlakih in temperaturah med eksplozijo. Tudi večina elementov, iz katerih smo. Ni čudno, da je zato raziskovanje jedrskih reakcij ena najbolj privlačnih tem, povezanih s supernovami. Tudi tu je opazovanje SN 1987A razširilo naše znanje. Do lanskega leta so menili, da se lahko novi

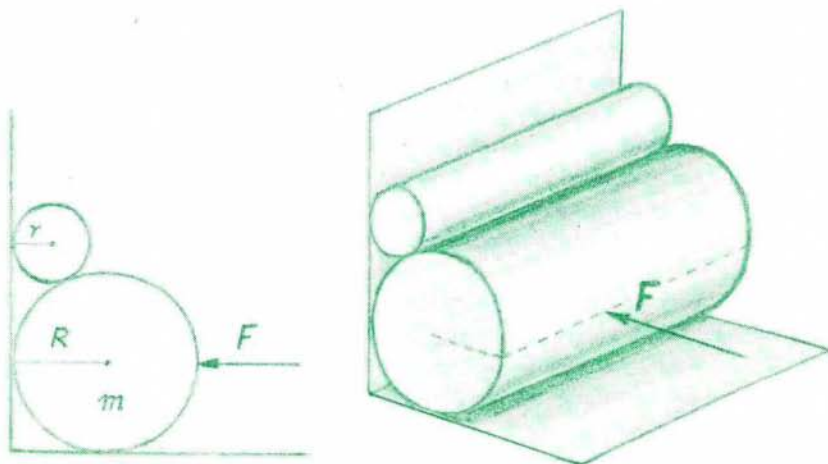
elementi tvorijo le neposredno po eksploziji. Sij take zvezde naj bi se ob eksploziji v nekaj dneh močno povečal, nato pa bi se enakomerno zmanjševal. Nasprotno pa je bila SN 1987A po začetnem izbruhu vedno bolj svetla. Šele po treh mesecih je začel njen sij upadati. To pojasnjujejo s sproščanjem energije jedrskih reakcij, ki verjetno potekajo v razpenjajoči se ovojnici. Ideja je zanimiva, zato jo bodo skušali potrditi z merjenji. Letos naj bi se meglene plasti ovojnice že toliko "razkadile", da bodo merski instrumenti lahko opazili svetlobo, ki prihaja s področja jedrskih reakcij.

Supernova SN 1987A počasi temni na južnem nebu. Novice o njej so izginile s časopisnih naslovnice. Nasprotno pa astronomi supernova zanima vedno bolj. Sčasoma bodo videli vedno globlje proti središču in tako razumeli, kako je potekala eksplozija, na katero so čakali skoraj 400 let.

Tomaž Zwitter

GLADKA NAGRADNA NALOGA

Na gladkih vodoravnih tleh leži ob gladko navpično steno naslonjen homogen gladek valj z maso m . Nanj položimo tako, kot kaže slika, enako dolg gladek valj iz enake snovi, ki ima k -krat manjši polmer osnovne ploskve kot prvi valj. S kakšno silo F lahko že zadržimo večji valj, da ne zdrsne?



Za tiste, ki jim je tudi odvod že domač, pa še tole vprašanje: Pri katerem k je potrebna sila F največja?

Boris Lavrič

POIŠČI VSA TRIMESTNA ... — Rešitev iz P–XV/3

Dobili smo le šest rešitev, vse pravilne, od Brigite KEREK iz Rogašovcev, Boruta KODERMANA iz Vidma pri Ptuj, Andreja MEKIŠA iz Rogašovcev, Branka ŠČAVNIČARJA iz Ljutomera, Roberta VREČE iz Maribora in Mitje ZELENCA iz Idrije. Mitja in Robert sta nam razen rešitve poslala še računalniški program v basicu. Objavljamo Mitjevo rešitev:

Najprej sem izračunal fakultete: $1! = 1$, $2! = 2$, $3! = 6$, $4! = 24$, $5! = 120$, $6! = 720$. V poštrev pridejo samo fakultete, manjše od 1000.

Števila med 100 in 200: ($5! = 120$) — ena cifra mora biti 5.

$$100x + 10y + z = x! + y! + z! \quad ; \quad x = 1$$

$$100 + 10y + z = 1 + y! + z!$$

1) $y = 5$

$$100 + 50 + z = 1 + 120 + z!$$

$$150 + z = 121 + z!$$

$$z \notin \mathbb{N}$$

2) $z = 5$

$$100 + 10y + 5 = 1 + y! + 120$$

$$105 + 10y = 121 + y!$$

$$\Rightarrow y = 4$$

$$\overline{xyz} = 145$$

$$145 = 1! + 4! + 5!$$

Števila med 200 in 300: ($5! + 5! = 240$) — dve cifri morata biti 5.

$$x = 2; y = z = 5$$

$$200 + 50 + 5 \neq 2 + 120 + 120$$

$$255 \neq 242$$

Pri višjih številih bi morale biti vse tri cifre 5, toda $555 \neq 360(5! + 5! + 5!)$

Edina možnost bi bila še vsota fakultet cifre števila, ki bi vsebovalo eno 6, toda $600 \neq 720(6!)$. Torej je edino število, ki zadošča pogoju, 145.

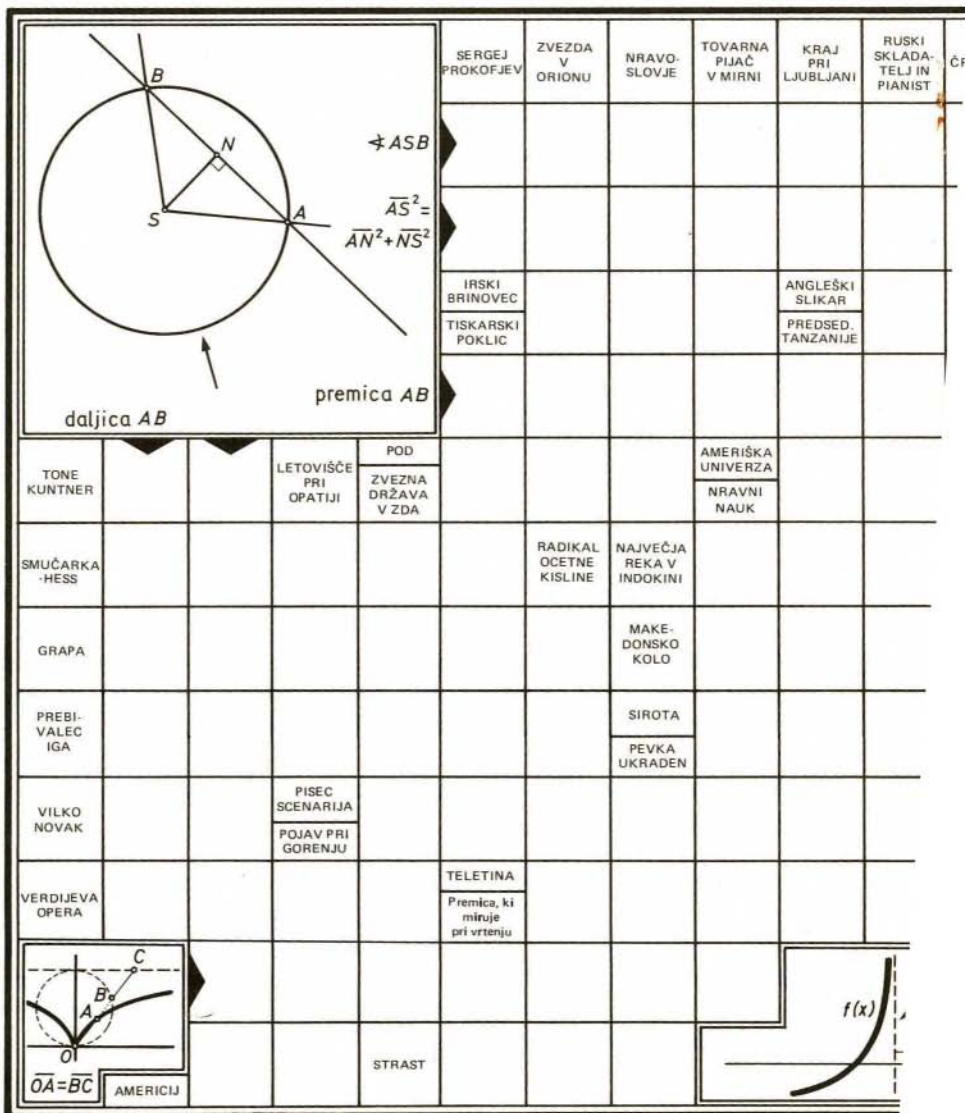
Vsem šestim reševalcem smo poslali knjigo R. Smullyana Šahovske skrivnosti Sherlocka Holmesa.

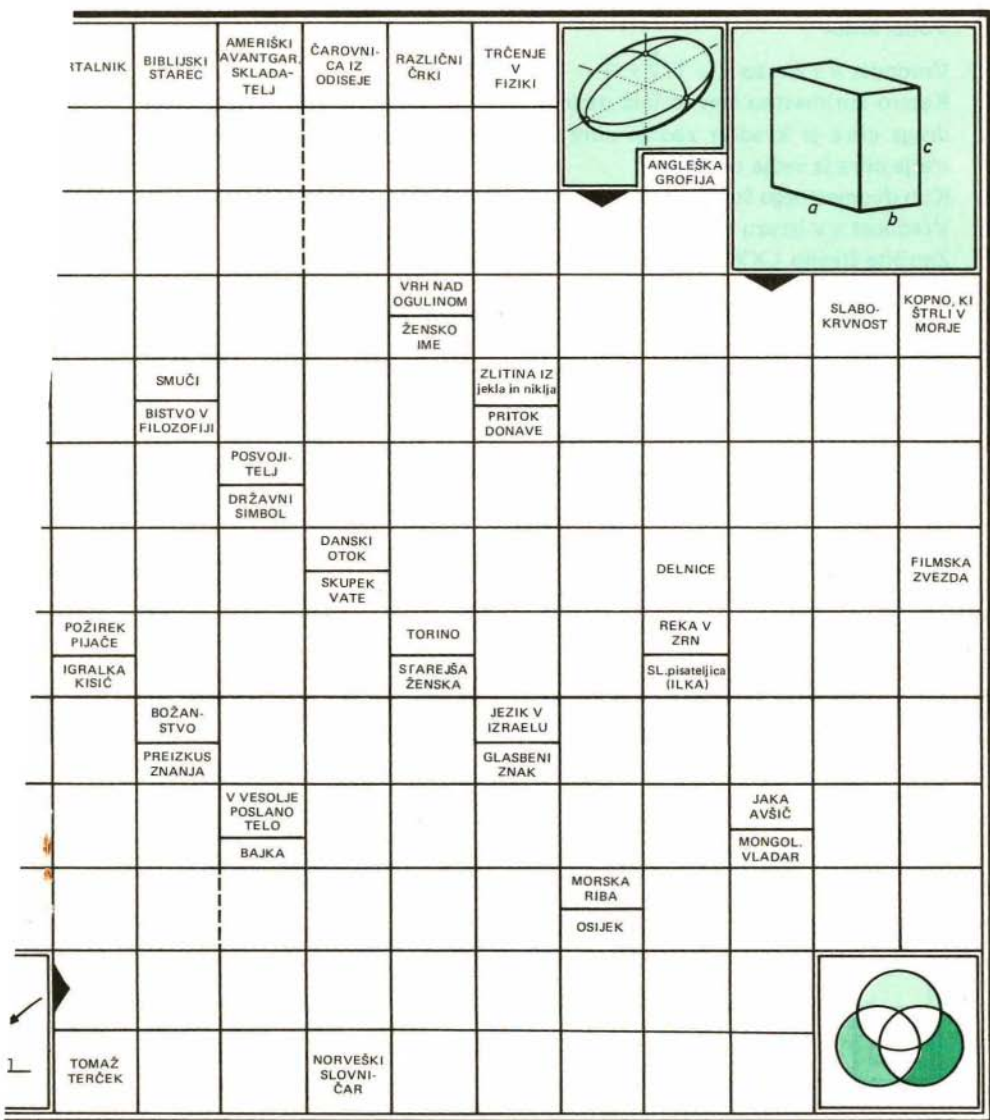
KATERI ULOMEK JE TO?

Ulohek x je večji od ena, v decimalnem zapisu ima periodo enake dolžine kot njegova obratna vrednost. Poišči ulomek z zgornjo lastnostjo, pri katerem je vsota števca in imenovalca najmanjša. Rešitve sprejemamo do 1. oktobra na naslov Presek (za PIR), Jadranska 19, 61111 Ljubljana, p.p. 64.

Peter Petek

SLIKOVNA KRIŽANKA





ŠTEVILSKA KRIŽANKA

Vodoravno:

1. Vrednost x v izrazu $x - 177 + \frac{x}{3} - \frac{x}{9} = 1000$
4. Katero štirimestno število ima naslednje značilnosti: vse cifre so različne, druga cifra je kvadrat zadnje cifre, prva pa seštevek druge in tretje cifre, tretja cifra je večja od druge?
8. Kub dvomestnega števila z vsoto cifr 2, nobena od cifr pa ni 0.
9. Vrednost x v izrazu $x - \frac{x}{3} - \frac{2x}{3} + \frac{x}{9} = 7273$.
11. Zapišite število LXXXVI z arabskimi številkami.

	1	2	3		4	5	6	7	
8					9				10
11			12	13					
		14							
15	16						17		18
19					20	21			
	22		23	24					
25								26	27
28						29	30		
	31					32			

12. Katero največje sedemestno število dobimo, če množimo šest zaporednih števil med 10 in 20?
14. Koliko mm ima morska milja?
15. Koliko sekund za želvo mora startati človek na 300 m dolgi progi, da bosta istočasno prišla v cilj ob upoštevanju dejstva, da rabi želva za to pot 4 ure, človek pa hodi s hitrostjo 10 km na uro?
17. Število, katerega šestina in devetina dasta skupaj 135.
19. Vrednost x v izrazu $(\frac{x}{4})^2 = 32041$
20. Volumen pokončne piramide z višino 123 in obsegom vrisanega kroga kvadrata osnovne ploskve 75,40.
22. Nadaljujte niz: 1237890 1236780 2346780
25. Kubatura kvadra, ki ga omejujejo dve različni vrsti pravokotnikov, kjer je površina enega pravokotnika kvadrat, drugega pa kub neke stranice. Ena od stranic meri 40.
26. Katero število manjka v nizu: 4 6 10 ... 34 66?
28. Nadaljujte niz: 363 1815 7260 21780
29. Štirimestno število je kub nekega števila med 10 in 20 in ima prvo številko 5. Pod to kolono vpišite kub, osnovno število pa pod 8. navpično.
31. Vrednost izraza $(C - x) x$, kjer je $x = XV + XV$.
32. Število, katerega polovica so tri zaporedne cifre, skupaj s šestino pa dasta seštevek 164.

Navpično:

1. Največje trimestno število, ki je deljivo z 72.
2. Dvomesno število, katerega seštevek cifr je 9, zmnožek pa je dvakrat večji, ravno tako je tudi prva številka dvakrat večja od druge.
3. Dopolnite niz: 79841 67853 55865 43877
4. Število, katerega polovica, tretjina, šestina in devetina dajo skupaj 10680.
5. Nogometaš je bil izključen 15 minut pred koncem tekme, koliko sekund je igral?
6. Ploščina pravokotnika s stranicami 860 in 6361.
7. Kakšno število lahko zapišemo iz cifr 0, 1, 2, 2, 5 in 8 tako, da bo seštevek cifr vsake polovice 9, razlika med sosednjima ciframa pa vsaj 2.
8. Glej 29. vodoravno.
10. Katera vrednost je polovica od dveh tretjin od treh četrтин od štirih petin od pet šestin od šest sedmin od sedem osmin od osem devetin od devet desetin števila 700?
13. Trimestno število, ki ga dobite, če kvadratu števila nad 30 odštejete prvo cifo kuba.

14. Če smo besedo ČEDAD zapisali s številom 46515, kako bi zapisali besedo ABECEDA?
15. Katero število je potrebno štirikrat pomnožiti samo s seboj, da dobimo število 83521?
16. Nadaljujte niz: 718835 616734 514633
18. Dvomesno število, ki ima obe cifri enaki, isto velja za njegovo tretjino in šestino.
20. Katero število je potrebno petkrat pomnožiti z 2, da dobite število 8320?
21. $3 \cdot 10^4 + 7 \cdot 10^3 + 5 \cdot 10 + 2$
22. Druga stranica v pravokotniku z eno stranico 2502 in diagonalo 4769.
24. Janez, Miha in Stojan so zbrali 18500 din. Koliko din je dal Janez, če je dal Miha polovico več od njega, Stojan pa petino več?
25. Sosednja številka številki, pod katero vpisujete.
26. Najmanjše trimestno število, katerega vsota cifr je 10, zadnja cifra pa je dvakrat večja od druge.
27. Dvomesno število iz različnih cifr, pri katerem je prva cifra kub druge cifre.
30. Največje dvomesno število, pri katerem je prva cifra dvakrat večja od druge cifre.

Bruno Gričar

DOBRA IN SLABA NOVICA

Fizik: Halllooo... Si ti? Pozdravljen! Kako živiš? Poveš kaj novega?

Pokojni fizik: Jaz sem, jaz. Le kdo bi bil? Kaj novega povem? O, da. Novici zate dve imam... Prva dobra, druga slaba je. Kot prva: Tu gori krasnó se živi, življenje lepo — znanost kar cveti ... Pogoji dobri, vse imaš, kar si želiš. Poskus vsak uspe ti, če hočeš — če nočeš, ne. Sam BOG predava kdaj — kar dober je! Hudič pošilja nam izsledke svoje in namige, veš ... ni znanosti brez njegove brige. Tu kar povprašaš, tu srečaš Amerikane, Ruse, Žide, tu vsi smo dobri skupaj — ne glede na vse in res, povem ti iz srca, tu znanost kar cvete.

Fizik: Zanimivo! Kakšna je sploh lahko slaba novica, ko ...

Pokojni fizik: Veš, prijatelj moj, zelo se mi mudi, ne vem ..., povem ti le, da na seminarju jutri si na vrsti ti ...

Na cesti slišal
Damjan Kobal

PISMA BRALCEV

Zdravo!

Sem bralec Preseka in vam tokrat pošiljam nekaj kratkih računskih ali miselnih vaj. Upam, da jih boste izkoristili.

Lep pozdrav!

Boštjan Tratar

Boštjan, hvala za pismo in poslane naloge! Nekaj smo jih izbrali in jih objavljamo. Upamo, da bo tebi in bralcem izbor všeč. Kadar si želimo ponovnega srečanja, je najlepši pozdrav: Nasvidenje!

Damjan Kobal

TRI STARE NALOGE

1

V Kiučangu, stari kitajski računici iz leta 2600 pred Kristusom, beremo:

10 čevljev dolg bambus se je prelomil. Njegov odlomljeni del visi k tlom in se dotika tal tri čevlje stran od vznožja bambusa. V kateri višini se je prelomil?

2

Na nekem starem zvoniku neutrudno teče ura s prijaznima kazalcema. Vsakokrat, ko veliki kazalec prehití manjšega, se kazalca vljudno pozdravita. Kolikokrat na dan se "obgovorita"?

3

Po nekaj borih urah počitka, med sončnim zahodom in sončnim vzhodom, jih je zbudil hud severozahodnik. Takoj so pospravili svoje stvari ter krenili v vzhodni smeri in tako zapustili severni tečaj, ki so ga s tolikšnim trdom dosegli. Koliko napak dokazuje, da pisec malce "naklada"?

Boštjan Tratar

(iz knjige "VESELJA DOM")

Polovično znanje je nevarnejše od neznanja.

Bolivijski pregovor

KAJ SE ZGODI, KO PRIŽGEMO RAČUNALNIK

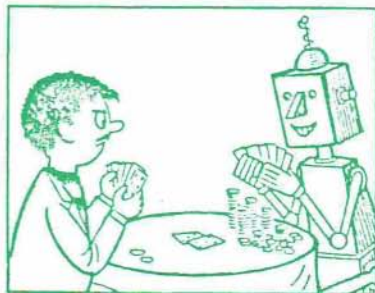
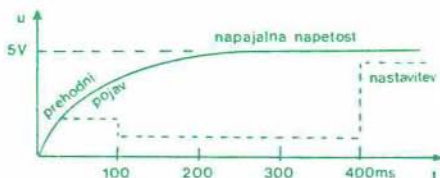
Prižgemo mali osebni računalnik in čez "kratek čas" se na TV zaslonu prikaže slednik K ali podoben znak, ki pove, da je računalnik pripravljen sprejemati ukaze iz tipkovnice. Kaj se v tistem "kratkem času" dogaja v računalniku?

Da bomo lažje razumeli, kaj pomeni priklop napajalne napetosti na računalnik, pogledajmo, kako je stroj narejen. Računalnik v glavnem sestavljata dva tipa logičnih elektronskih ali mikroelektronskih vezij:

- odločitvena vezja, kot na primer logična vrata, kodirniki, dekodirniki, selektorji, seštevalniki, aritmetična logična enota (ALE), vmesniki na vodilih ipd. ter
- pomnilna vezja, kot so pomnilne celice, shranjevalni ali pomikalni registri, števniki, pomnilniki z naključnim dostopom (RAM).

Tudi mikroprocesor sestavljajo odločitvena in pomnilna logična vezja. Prav tako so tudi razna vezja kontrolorjev za TV zaslon ali tiskalnik sestavljena iz obeh tipov logičnih vezij. Kam pa sodi trajni pomnilnik (ROM)? Tovrstno vezje nam predstavlja tako pomnilnik, ki se mu vsebina ne izgubi, kakor odločitveno vezje, na primer kodirnik.

Odločitvena logična vezja se ob vklopu hitro odzovejo na vhodne vrednosti spremenljivk ter že v nekaj 10 ns, takoj ko napajalna napetost doseže 2–3 V, dajo izhodne vrednosti. Nekoliko več dela nam dajo pomnilna logična vezja. Vsako pomnilno vezje je sestavljeno iz pomnilnih celic, ki se nahajajo v dveh stanjih. Ob vklopu napetosti, ko ta torej doseže logični prag "1" (torej 2–3 V), si pomnilna celica neodvisno od krmilja izbere eno od možnosti, ali logično "0" ali logično "1". Tu pa nastopi težava, saj se pomnilne celice postavijo v povsem poljubne položaje in računalnik bi se začel popolnoma ne-



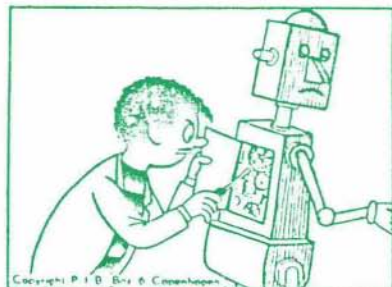
nadzorovano obnašati. Kako se temu ognemo? Pomnilna celica ima krmilne vhode, dva (po vrednosti nasprotna – komplementarna) izhoda in vhod za urni takt. K sreči pa ima tudi vhod, ki mimo vseh navedenih vhodov celico zakrmili v logično "0" ali "1". Če je v nekem vezju več pomnilnih celic, so ti posebni vhodi vezani skupaj kot vhod za "nastavitev". Vhod za "nastavitev" največkrat vezemo za čas prehodnega pojava na logično vrednost "0". S tem onemogočimo aktivnost vezij. Če bi na osciloskopu pogledali, kako napajalna napetost narašča v primerjavi s signalom za "nastavitev", bi videli tako sliko. Vezje za "nastavitev" poskrbi, da računalnik miruje tja do 400 ms, oziroma da izzvenijo vsi prohodni pojavi (glej sliko!).

Nekateri računalniki imajo posebno tipko za "nastavitev" ali "reset", ki pa povzroči "skoraj" isto kot izklop in ponoven vklop napajalne napetosti. Ko se torej signal "nastavitve" dvigne tja do 4–5 V, je računalnik pripravljen, da lahko steče po uvodnem programu. Kot zanimivost povejmo, kakšen je bil videti zagon računalnika pred 10–15 leti. Ker se z izklopom napetosti vsebina v delovnem pomnilniku uniči, se samo po sebi postavi vprašanje, kako to vsebino ponovno spraviti v računalnik. To se da na več načinov:

- z vstavljanjem strojnih kod s pomočjo konzolnih stikal ali
- z vnosom vsebine z luknjane kartice ali luknjanega traku s pomočjo čitalca kartic oziroma traku.

K sreči so bili tovrstni zagonski programi zelo kratki, nekaj strojnih ukazov, kar pomeni dolžino največ ene luknjane kartice. Tak program je omogočil čitanje večjega programa z magnetnega diska ali traku, večji program še večjega in računalnik je torej sam sebe postavil v stanje, ko je bil sposoben za "delo" s človekom.

Namesto luknjane kartice oziroma traku imamo danes na razpolago trajne pomnilnike, ki ob izklopu napetosti še vedno ohranijo vsebino – program oziroma podatke. Kar nam ostane nerazumljivo, je, kako mikroprocesor ve, kateri program naj začne izvajati in od kod. Zopet se moramo vrniti k signalu za



"nastavitev". Mikroprocesor ima prav tako svoj vhod za "nastavitev", ko le-ta doseže 4–5 V, se v njem sproži vrstni red ukazov:

- čitaj iz trajnega pomnilnika (ROM) vrednost na naslovu "0000H" (na primer za mikroprocesor M68000),
- prinesičitano vrednost v programski števec,
- z vrednostjo programskega števca naslovi trajni pomnilnik ter dostavi kodo prvega ukaza v ukazni register,
- izvedi ukaz v ukaznem registru,
- itd.

Če smo pred tem pripravili na naslovu "0000H" pravilno vsebino, tedaj se izvede prvi ukaz iz niza programskih ukazov uvodnega programa, čigar naloga je, da programsko pripravi pravilne podatke v delovnem pomnilniku in uredi stanja vhodno/izhodnih enot.

Ko smo tako povsem nadzorovano zakorakali v uvodni program (inicijalizacijo), ne bo več težko računanika usmeriti v take programe, da bo pripravljen za delo.

Spoznali smo, da vklop napetosti ni "v trenutku", ampak da to traja tja do nekaj 100 ms. Prav tako tudi izklop ni "takojšen", ampak tako počasen, da lahko v nekaterih večjih računanikih pravočasno zaznamo padanje napajalne napetosti, na primer za 0,5 V. V tem času sprožimo prekinitev obstoječih programov in vse trenutne rezultate shranimo na magnetni disk. Vedeti moramo, da zapis nekaj tisoč pomnilnih lokacij ne traja več kot nekaj ms. Ob ponovnem vklopu napetosti računanik nadaljuje s stanjem programov ob prekinitvi.

Veselko Guštin

INTERTRADE

TOZD Zastopstvo IBM

Generalni zastopnik firme
IBM v Jugoslaviji

M. Pijadejava 29, Ljubljana

Tel.: 061-322-844

ČAROVNA SEDNICA

Veliki matematiki se ne ukvarjajo le s težkimi problemi. Tako je tudi v zbirki romunskega matematika Dmitrija Pompeiuja zanimiva naloga:

Veš, da je stotilijonsko število $ABC398246$ deljivo s 317. Poišči cifre A , B in C !

Kako bi rešili nalogo? Lahko bi ugibali in naredili preizkus. Če je prava zadnja možnost, ne bi omagali? Imamo kar 900 možnosti, ker na mesto A lahko postavimo devet cifer (1 ali 2 ali 3...9), na mesti B in C pa po deset cifer (0 ali 1 ali 2...9). Tudi deljenje s tako velikim (trimestnim) številom je zamudno. Z računalniškim programom ne bi bilo težko. Vendar računalnika nimamo vedno pri roki, hišni računalniki pa tudi običajno ne morejo računati s tako velikimi celimi števili. V slednjem primeru si lahko pomagamo drugače, a o tem kdaj drugič. Danes bomo računali brez pomoči računalnika.

Pompeiu, bistra glava, je rešil nalogo s preprostim sestavljanjem cifre. Problem je prevedel na množenje in uporabil nenavadno lastnost števila 7, enice v številu 317.

Najprej si oglejmo število 7. Množimo ga po vrsti z vsemi enomestnimi števili:

$$\begin{array}{r} 7777777777 \\ \times 0123456789 \\ \hline 071421283542495663 \end{array}$$

Pozabimo na desetice, pogledjmo le enice: 0, 7, 4, 1, 8, 5, 2, 9, 6, 3. Dobili smo zopet vsa enomestna števila vendar v drugem vrstnem redu. To imenujemo permutacija (prerazporeditev).

$$\begin{array}{c} 0123456789 \\ 0741852963 \end{array}$$

Vsa enomestna števila nimajo te lastnosti. Recimo število 6:

$$\begin{array}{r}
 \dots RSTUVWXY8 \\
 \times \qquad \qquad \qquad 317 \\
 \hline
 \qquad \qquad \qquad 2536 \quad 8 \text{ mno\text{z}eno s } 317 \\
 \dots \text{----} HJKL \quad Y \text{ mno\text{z}eno s } 317 \\
 \dots \text{-----} \quad X \text{ mno\text{z}eno s } 317 \\
 \ddots \quad \quad \quad \text{Nadaljujemo z } W V U T S R \dots \\
 \hline
 ABC398246
 \end{array}$$

Jasno je, da mora biti:

$$L + 3 = 4$$

Zato mora biti

$$L = 1$$

Poglejmo naprej: 7 krat Y mora biti (L) 1. Permutacija nam pove, da je to mo\text{z}no le, \text{c}e je Y enak 3. Ko dopolnimo \text{s}e drugo vrstico (mno\text{z}imo z Y oziroma 3), dobimo:

$$\begin{array}{r}
 \dots RSTUVWX38 \\
 \times \qquad \qquad \qquad 317 \\
 \hline
 \qquad \qquad \qquad 2536 \quad 8 \text{ mno\text{z}eno s } 317 \\
 \qquad \qquad \qquad 951 \quad 3 \text{ mno\text{z}eno s } 317 \\
 \dots \text{----} DEFG \quad X \text{ mno\text{z}eno s } 317 \\
 \ddots \quad \quad \quad \text{Nadaljujemo z } W V U T S R \dots \\
 \hline
 ABC398246
 \end{array}$$

Zdaj mora biti

$$\begin{aligned}
 5 + 5 + G &= \sim 2 \text{ (\text{s}tevilko, ki ima enico 2)} \\
 G &= 2
 \end{aligned}$$

Tabela permutacije nam pove, da 2 dobimo, \text{c}e 7 mno\text{z}imo s 6, zato

$$X = 6$$

Nadaljujmo:

	...RSTUVW638	
×	317	
	2 536	8 množeno s 317
	9 51	3 množeno s 317
	1 9 0 2	6 množeno s 317
	...---E J K	W množeno s 317
	∴	Nadaljujemo z V U T S R ...
	ABC3 9 8 246	

Veljati mora

$$2 + 9 + 0 + K + 1 = \sim 8$$

Zaradi prenosa desetic ($5 + 5 + 2 = 12$), je prišteta še 1. Torej mora biti

$$K = 6$$

Iz permutacije vidimo, da moramo množiti z 8, če hočemo dobiti enice 6, zato mora biti

$$W = 8$$

	...RSTUV8638	
×	317	
	2536	8 množeno s 317
	951	3 množeno s 317
	1 9 0 2	6 množeno s 317
	2 5 3 6	8 množeno s 317
	-FEJ	V množeno s 317
	∴	Nadaljujemo z U T S R ...
	ABC3 9 8 246	

Veljati mora

$$9 + 3 + J + 1 = \sim 9 \Rightarrow J = 6 \quad \text{in} \quad V = 8$$

...R S TU88638	
x	317
2536	8 množeno s 317
951	3 množeno s 317
1902	6 množeno s 317
2 536	8 množeno s 317
2 536	8 množeno s 317
...FE	U množeno s 317
..	Nadaljujemo z T S R ...
A B C398246	

Zdaj je

$$1 + 5 + 3 + E + 1 = \sim 3 \Rightarrow E = 3 \quad U = 9$$

...RST988638	
x	317
2536	8 množeno s 317
951	3 množeno s 317
1902	6 množeno s 317
2536	8 množeno s 317
2536	8 množeno s 317
2853	9 množeno s 317
3 13398246	

Že imamo rešitev.

$$A = 3 \quad B = 1 \quad C = 3$$

Neznano število, s katerim smo množili, je šestmestno. Toliko mest smo potrebovali, da smo s podpisovanjem prišli dovolj v levo (nad A).

Preprosto, kaj? Ali se da tako "računstvo" uporabiti tudi v drugih primerih?

Tak postopek smo lahko uporabili, ker pri množenju števila 7 s števili med 0 in 9 vedno dobimo različno število za enico. Ampak, ali je 7 edino enomestno število s to lastnostjo? Da vsa niso taka, smo že videli. Tudi vsa soda lahko takoj izločimo, ker pri množenju ne dobimo lihih števil. 7 ni edino enomestno število s to lastnostjo, saj nam da

množenje s 3

0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
0	3	6	9	2	5	8	1	4	7

množenje z 9

0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
0	9	8	7	6	5	4	3	2	1

Tudi množenje z 1 nam da permutacijo

0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
0	1	2	3	4	5	6	7	8	9

Ker je spodnja vrstica popolnoma enaka zgornji (ni nobene spremembe), to permutacijo imenujemo identiteta.

Pompeiujevo "sestavljanko" lahko razširimo še na množenje števil z enicami 1, 3 ali 9.

Poskusi še ti! Najdi cifre A, B in C v številu ABC8682, ki je deljivo natančno z 213. (Rešitev: A = 1, B = 9, C = 1)

Kaj je nenavadnega v številih 1, 3, 7 in 9, da nam dajo permutacijo? Zdi se da lihost. Pa vendar, tudi 5 je liho število, te lastnosti pa nima. 1, 3, 7 in 9 so natančno tista enomestna števila, ki so si tuja z 10. (Števili sta si tuji, če razen 1 ni nobenega števila,

ki bi delilo obe.) Odkod sedaj 10? Računali smo v desetiškem sistemu in gledali le enice.

Ali imamo v drugih sistemih, naprimer dvojiškem, trojiškem, tudi taka zanimiva števila?

Pompeiujevo "sestavljanko" lahko razširimo, ker velja:

Vsa števila v sistemu z osnovo N , ki so si z N tuja, nam dajo, ko jih množimo s številom tega N -tega sistema, permutacijo cifer (gledamo le enice).

Če si za osnovo sistema izberemo praštevilo, imajo vsa števila tega sistema permutacijo.

Prevod in priredba *Mojca Lokar*
po knjigi P. J. Davis and W. G. Chinn, 3.1416 and all that

1988

Naloge

1. Pokaži, da nobena od enačb

$$x^2 + y^2 = 1988, \quad x^2 + 2y^2 = 1988 \quad \text{in} \quad x^2 + 3y^2 = 1988$$

nima celoštevilskih rešitev.

2. Med enačbami

$$x^2 + ny^2 = 1988, \quad n \in \mathbb{N}, n \leq 10$$

je le ena rešljiva s parom naravnih števil x, y . Katera? Poišči še njeno rešitev.

TRD OREH

Ali je mogoče v enakostih

$$PR = ES + EK \quad \text{in} \quad TRD = OR + EH$$

črke nadomestiti s ciframi tako, da veljata obe hkrati? Nobeno število naj se ne začne z ničlo, različnim črkam naj pripadajo različne cifre, enakim pa enake.

Boris Lavrič

4. ŠOLSKO IN 14. IZBIRNO TEKMOVANJE SREDNJEŠOLCEV IZ MATEMATIKE

Sredi februarja smo na 135 šol poslali prijavnice za šolsko tekmovanje. Odzvala se je dobra tretjina šol in na njih je zadnjo soboto v februarju tekmovalo skupaj nad 1600 učencev. Kakšne so bile naloge, presodite sami.

Prvi letnik

1. Izračunaj: $1238.1235.1242.1245 - 1239.1234.1241.1246 - 8.1237.1243$
2. S katerimi izmed števil 11, 17, 37, 47, 101 lahko brez ostanka delimo katerokoli štirimestno število, v katerem je prva cifra enaka tretji, druga pa četrti?
3. Če podjetje najame 30 ljudi in 2 traktorja, pospravijo krompir v 12 dneh, če pa najame 20 ljudi in 3 traktorje, opravijo isto delo v 10 dneh. V kolikem času bo pospravljen krompir, če pride na delo 40 ljudi in 1 traktor?
4. Iz dveh enakih pravih štiristranih piramid sestavimo eno telo (oktaeder) tako, da osnovni ploskvi zlepimo eno na drugo. Mravlja se z vrha ene od piramid odpravi na pot po robovih nastalega telesa. Ko preходи vse robove, in sicer vsakega samo po enkrat, se znajde spet na istem vrhu. Opiši njeno pot. (To nalogo so reševali tudi dijaki v drugem razredu.)

Drugi letnik

1. Dani sta krožnica in premica, ki nimata skupne točke. Načrtaj kvadrat, ki ima dve oglišči na premici in dve na krožnici. Opiši potek načrtovanja.
2. Dana sta krajevna vektorja $b = (2, 3, -13)$ in $c = (1, -1, 1)$. Določi koordinati x in y vektorja $a = xi + yj + k$, da bo a pravokoten na b in na c .
3. Enakostranični trikotnik ABC ima stranico dolga 3 enote. Označimo s T težišče in $a = TA$ ter $b = AC$. Kolikšna je dolžina vektorja $s = \frac{2}{3}(a - \frac{1}{2}b) - \frac{3}{2}(a - \frac{1}{3}b)$?

αβγδεζηθικλμνξοπρστυφχψω

Tretji letnik

1. Dana je funkcija $y = ax^2 - 2x - (4a + 1)$. Določi a tako, da funkcija ne bo šla skozi izhodišče in da bo dosegla največjo vrednost 4.
2. Kolikšen je $\sin a$, če je $\sin \frac{a}{2} + \cos \frac{a}{2} = \frac{\sqrt{5}}{3}$?
3. a) Pokaži, da funkcija $y = 3 + 4 \cos x + \cos 2x$ ne zavzame negativnih vrednosti.
b) Nariši graf funkcije $y = \sqrt{3 + 4 \cos x + \cos 2x}$.
4. Kolikšno je razmerje med prostorninama in površinama pravilne pokončne piramide in stožca, ki ji je včrtan?

Četrti letnik

1. Pokaži, da ima kvadratna enačba $ax^2 + 2bx + c = 0$ realne rešitve, če so a , b in c zaporedni členi aritmetičnega zaporedja.
2. Dani sta zaporedji $a_n = n^2$ in $b_n = 5n + 4$. Kateri členi so skupni?
3. Pokaži, da lahko enačbo krožnice, katere premer ima krajišči $T_1(x_1, y_1)$ in $T_2(x_2, y_2)$, zapišemo v obliki $(x - x_1)(x - x_2) + (y - y_1)(y - y_2) = 0$.
4. Na polkrogu s premerom $AB = 20$ cm sta točki C in D . Tetiva AC meri 12 cm, tetiva AD pa 16 cm. V točkah C in D potegni tangenti, ki se sekata v točki T . Izračunaj ploščino štirikotnika $ACTD$.

Štirinajst dni za tem je na izbirnem tekmovanju sodelovalo spet nekaj nad 1400 učencev, tokrat jih je bilo precej z naravoslovnih usmeritev. Reševali so naslednje naloge:

Prvi letnik

1. Reši enačbo:
$$\frac{6x + 2a + 3b + c}{6x + 2a - 3b - c} = -\frac{2x + 6a + b + 3c}{2x + 6a - b - 3c}$$
2. Za filmsko predstavo je bilo pripravljenih 250 vstopnic, katerih večino so tudi prodali. Vsak tretji gledalec je bil osnovnošolec, vsak peti srednješolec in vsak sedmi upokojenec. Koliko ljudi si je ogledalo film?
3. Dvorana v obliki kvadra je dolga 22 m, široka 9 m in visoka 9 m. Na prednji steni (ki je široka 9 m) je 1 m pod stropom postavljen zvočnik, enako oddaljen od obeh stranskih sten, na zadnji steni pa 1 m od tal vtičnica, prav tako enako oddaljena od obeh stranskih sten. Želimo ju povezati s kablom, ki bi bil prilepljen na stene, tla ali strop. Kolikšna je najmanjša dolžina kabla, da nam to uspe?

4. V tabeli dimenzije 101×101 je v vsak kvadrata vpisano število, katerega absolutna vrednost ne presega 1. V katerem koli kvadratu dimenzije 2×2 je vsota ustreznih štirih števil enaka 0. Dokaži, da vsota vseh števil v tabeli ne presega 101.

Drugi letnik

1. Reši sistem neenačb: $|2x + 2| < 2$, $||x| - 2| - 1 < 0$
2. Kolikšni so koti trikotnika, katerega središči očrtane in včrtane krožnice sta si simetrični točki glede na eno od stranic?
3. Dan je trikotnik ABC . Naj bosta A' in A'' točki, ki ju dobimo, če A prezcalimo preko B oziroma C . Analogno označimo še točki B' in B'' ter C' in C'' . V kolikšnem razmerju sta si ploščini šestkotnika $A'A''B''B'C'C''$ in trikotnika ABC ?
4. Oglišča pravilnega n -kotnika označimo z $A_1, A_2, \dots, A_n$ v poljubnem zaporedju (ni treba, da sta sosednji oglišči označeni z zaporednima indeksoma). Pot začnemo v A_1 in se odpravimo do polovice poti proti A_2 , odtod do tretjine poti, ki vodi proti A_3 , ..., nazadnje do $1/n$ poti proti A_n . Kam pridemo?

Tretji letnik

1. Reši enačbo: $\log_7(6 + 7^{-x}) = 1 + x$
2. Dana je enačba $2x^2 \sin^2 a - 4x \sin a + 4 \sin^2 a - 1 = 0$. Za katere a iz intervala $[0, \pi]$ sta rešitvi pozitivni?
3. Osnovna ploskev piramide je enakokraki trikotnik s kotom a ob osnovnici. Razdalja od središča stranske višine, postavljene pravokotno na osnovnico osnovne ploskve, do središča osnovni ploskvi včrtanega kroga je d . Vse stranske ploskve so nagnjene proti osnovni za enak kot φ . Izrazi površino piramide z d, a in φ .
4. Pokaži, da izmed poljubnih štirih različnih naravnih števil lahko izberemo dve (označimo ju npr. z a in b), da velja: $0 < \frac{a-b}{1+ab} < \frac{1}{4}$.

Četrty letnik

1. Poišči vse rešitve enačbe (a, b in c naj bodo pozitivna števila):

$$a\sqrt{x^2 - b^2 - c^2} + b\sqrt{x^2 - c^2 - a^2} + c\sqrt{x^2 - a^2 - b^2} = a^2 + b^2 + c^2$$

2. Izračunaj $19 + 1919 + 191919 + \dots + 1919\dots19$, če nastopa "19" v zadnjem številu iz vsote 88-krat.
3. Isto kot 3. naloga za 3. letnik.
4. Graf funkcije $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ se z rotacijo okrog izhodišča za kot 90° preslika vase. Dokaži, da ima enačba $f(x) = x$ eno samo rešitev.

Šolske komisije so po pregledu izdelkov predlagale nad 250 učencev za nastop na republiškem tekmovanju, Komisija za popularizacijo pa jih je izmed teh izbrala 158. Skoraj tretjina izbranih je bila z nenaravoslovnih usmeritev.

Tudi letos so nam pri naši dejavnosti pomagali Izobraževalna skupnost SR Slovenije, Fakulteta za elektrotehniko, FNT – VDO Matematika in mehanika, Zavod SR Slovenije za šolstvo in ZOTK – Gibanje znanost mladini, za kar se jim zahvaljujemo. Seveda pa ne smemo pozabiti na učitelje, ki pomenijo neposredno vez med nami in učenci.

Darjo Felda

Naloge

NALOGA O VIŠINI SONCA IN NAJDALJŠI SENCI

Kolika je višina Sonca, ko je najdaljša senca, ki jo meče ravna palica na vodoravna tla, dvakrat daljša od dolžine palice?

(Višina Sonca je kot med vodoravno ravnino in smerjo proti Soncu, točneje proti njegovemu središču.)

Marijan Prosén

BISTROVIDEC

KVADRATI Z NAJDALJŠIM REPOM

To nalogo mi je povedal prof. Zvonimir Bohte. Vprašanje je kratko in na prvi pogled nenavadno:

Katero je najmanjše naravno število, katerega kvadrat ima največ zadnjih cifr enakih (ničle ne štejejo)?

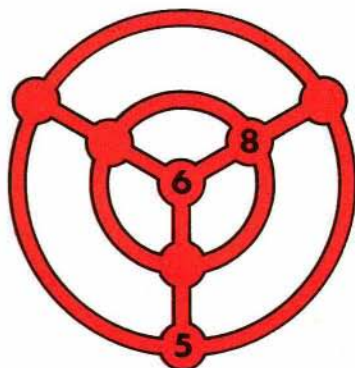
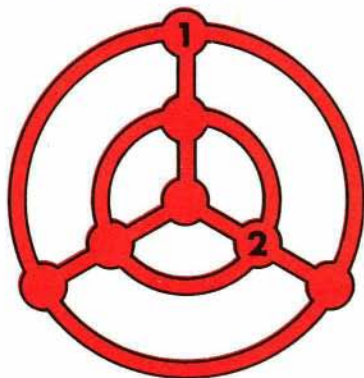
Odgovor lahko hitro dobite z računalnikom. Ali bi ga znali tudi matematično utemeljiti?

Vladimir Batagelj

PARKI

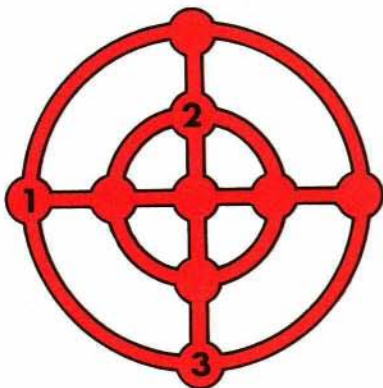
1. Na koliko načinov lahko križišča v parku na levi sliki označimo s števili od 1 do 7, tako da bodo vsote števil v poljubnih treh sosednjih križiščih, ki so povezana bodisi z ravno ali s krožno potjo, med seboj enake (dve križišči sta že označeni)?

Bi znali sedem zaporednih naravnih števil razporediti v križišča desnega parka tako, da bo imel enako lastnost kot levi?



2. Po parku na levi sliki vodita dve ravni in dve krožni poti. Kako naj števila od 0 do 8 razvrstimo po križiščih, tako da bo vsota, ki jo zberemo na katerikoli od omenjenih poti, vedno enaka?

Podobno vprašanje postavimo še za desni park, le da so tu štiri ravne poti in tri krožne, v križišča pa je treba razporediti naravna števila od 1 do 13.



Boris Lavrič

REŠITVE NAGRADNE NALOGE OB RAMANUJANOVIM STOLETNICI

V 3. številki lanskega letnika smo zastavili nalogo, izračunati število različnih zapisov naravnega števila n v obliki vsote pozitivnih naravnih števil, in sicer za karseda velik n . Take zapise smo poimenovali *razčlenitve*, njihovo število pa označili z $R(n)$. (V tabeli je bila napaka: $R(7) = 15$, ne 16.)

Prva težava pri računanju $R(n)$ je prostor, ki ga dvorazsežna tabela pri velikem n zahteva zelo veliko — treba je bilo opaziti, da lahko shajamo z enorazsežno tabelo. Druga težava je zahteva po vseh cifrah iskanega števila $R(n)$. Ker ta števila hitro rastejo, si pomagamo tako, da jih razdelimo na več kosov in sami sestavimo podprogram za seštevanje. Ko računamo $R(n)$ za vse večje vrednosti n , postopoma večamo dolžino predstavitve. Slednjič zadenemo ob zadnjo oviro — čas računanja, ki je odvisen predvsem od uporabljenega algoritma. Ponujena rekurzivna formula zahteva — vsaj na prvi pogled — $n^2/2$ seštevanj. Do kako velikega n pridemo, pa je končno odvisno tudi od računalnika, programskega jezika in naše potrpežljivosti.

Zdaj pa k prispelim rešitvam. Dobili smo tri, od teh sta dve zadoščali pogojem naloge. Morda bi bilo rešitev več, če bi bilo v naslovu označeno, da gre za nalogo iz računalništva.

Zares odlično rešitev nam je poslal **Peter Holozan** iz Duplice pri Kamniku, ki je pravilno izračunal $R(10000)$ (107-mestno število). Njegovo pismo — nekoliko prirejeno in brez programa — objavljamo.

1. $R(10000) =$ 00036 16725 13256 36293 98882 04718 90953 69549
50160 30339 31565 04220 81868 60588 79525 68754
06642 05923 10556 05290 69164 35144

2. Algoritem izhaja iz formule $R(k, n) = R(k, n - k) + R(k - 1, n)$. Vzemimo primer $n = 5$. V tabelo $[0 \dots 5] \times [0 \dots 5]$ vodoravno nanašamo n in navpično k . Vpišemo 1 v polje (5, 5). Vzamemo zgornjo formulo in zberemo 1 v (5, 5) in napišemo enki v (0, 0) (upoštevamo, da je $R(k, n)$ enako $R(n, n)$, če je $k > n$) in (4, 5). Ta postopek ponavljamo, dokler ne pridemo do polovice k . Dobimo tabelo velikosti $[0 \dots 2] \times [0 \dots 5]$.

1	0	0	0	0	1
0	1	0	0	1	0
0	0	1	1	0	0

Sedaj začnemo na desni pri $k = 2$. Z vsakim korakom se k zmanjša za 1 in

končno dobimo le 1 vrstico, tabelo s $k = 0$ in rezultat v polju (0, 0).

2	0	0	0	0	1
0	2	1	1	1	0
7	5	3	2	1	1

Ta drugi del pa lahko izvedemo tudi v enorazsežni tabeli velikosti [0 .. 5] z zanko:

```

for k := num div 2 downto 1 do
  for n := num - k downto k do
    A(n - k) := A(n - k) + A(n)

```

Rezultat $R(num)$ na koncu dobimo v polju $A(0)$, če so pred začetkom vrednosti vseh polj 1.

1	1	1	1	1	1
2	2	1	1	1	1
7	5	3	2	1	1

3. Problem računanja je tako rešen za majhna števila. Ker pa $R(n)$ zelo hitro narašča, pride kmalu do težav z velikimi števili. To se da rešiti s proceduro za seštevanje, vendar nastopi težava s časom (za $R(1000)$ 5min 18 s s 40-mestnimi števili (Turbo pascal)). Zato sem uporabil zbirnik, ki je izračunal $R(1000)$ v 47 s s 100-mestnimi števili. Pojavil pa se je tudi problem s spominom, zakaj tabela kmalu postane zelo velika (pri 10000 je potrebno 46b za zapis števila, torej 460000b za tabelo), kar omejuje največje število na 10000 (verjetno bi se dalo to malo povečati, vendar je 10000 "lepo" število, težava pa je tudi čas). Program je namenjen za hitro računanje, zato ni preveč lepo napisan.

4. Nalogo sem reševal na računalniku Schneider PC1512, ki ima 512kb RAM, mikroprocesor 8086 in uro 8MHz. Uporabil sem MS-DOS 3.2. Od 512kb jih 43 porabi DOS (precej skrajšana verzija, brez rezidentnih programov), 469 pa jih ostane uporabniku.

5. Računalnik je število računal od 20:25:09.97 do 21:49:37.94, to je 1 ura 24 minut 27 sekund in 97 stotink ali 5067.97 sekunde.

Kot vidite, je Peter ponujeno rekurzivno formulo uporabil tako, da zahteva njegov algoritem le približno $n^2/4$ seštevanj. Peter dobi za nagrado knjigo J. Kozaka *Podatkovne strukture in algoritmi*.

Potrudil se je tudi **Savin Gorup** iz 1. letnika Srednje šole za elektrotehniko in naravoslovje v Ljubljani, ki je pravilno izračunal $R(1500)$ (40-mestno število). Pri tem je uporabil naslednjo rekurzivno formulo, ki jo je našel v Mojem mikru 10/86:

$$\begin{aligned} R(n) = & R(n-1) + R(n-2) - R(n-5) - R(n-7) + R(n-12) + \\ & + R(n-15) - \dots - (-1)^j R(n - \frac{1}{2}j(3j-1)) - \\ & - (-1)^j R(n - \frac{1}{2}j(3j+1)) + \dots \end{aligned}$$

Števila $1, 2, 5, 7, 12, 15, \dots, j(3j \pm 1)/2$ se imenujejo *peterokotniška*. Računanje po tej formuli zahteva približno $1.09 n \sqrt{n}$ seštevanj, njena izpeljava pa je nekoliko zahtevnejša.

Savinu bomo poslali knjigo R. Smullyana *Poznate naslov te knjige?*

Rešitev nam je poslal tudi **David Bogataj** iz Trebnjega na Dolenjskem, ki je izračunal $R(253)$, vendar ne na vse cifre. Ker pa smo obljubili tri nagrade, bo tudi David nekaj dobil, in sicer priročnik B. Moharja *Pascal – prevajalniki na osebnih in domačih računalnikih*.

Marko Petkovšek

1988 – Rešitev s str. 47

Poglejmo najprej prvo enačbo. Desna stran je deljiva s 7, torej mora biti vsota kvadratov $x^2 + y^2$ deljiva s 7. Kvadrat celega števila pri deljenju s 7 lahko da le ostanek 0, 1, 2 ali 4, zato je vsota $x^2 + y^2$ deljiva s 7 le, če sta x in y deljiva s 7. Potem pa bi moralo biti število $1988 = x^2 + y^2$ deljivo z 49. Ker to ni res, enačba nima celoštevilskih rešitev.

Na enak način uženemo tudi drugo enačbo.

Pri tretji enačbi opazimo, da njena desna stran pri deljenju s tri da ostanek 2, leva stran pa bodisi 1 ali pa 0. Torej enačba nima celoštevilskih rešitev.

Z istim sklepom ugotovimo, da pri $n \in \{3, 6, 9\}$ diofantska enačba $x^2 + ny^2 = 1988$ nima rešitev.

Za $n = 4$ in $n = 8$ zapišemo

$$x^2 + 4y^2 = x^2 + (2y)^2 = 1988 \text{ in}$$

$$x^2 + 8y^2 = x^2 + 2(2y)^2 = 1988$$

Če bi imela katera od teh dveh enačb celoštevilsko rešitev, bi jo imela tudi ena od prvih dveh (pri $n = 1$ ali $n = 2$). To ne drži, torej za $n \in \{4, 8\}$ ni rešitve.

Denimo, da je n deljiv s 5. Iz enačbe $x^2 + n y^2 = 1988$ vidimo, da mora x^2 pri deljenju s 5 dati ostanek 3. To ni mogoče, zato tudi pri $n \in \{5, 10\}$ ne dobimo rešitve.

Ostane nam le še enačba $x^2 + 7 y^2 = 1988$. Očitno smemo zapisati $x = 7 z$, $z \in \mathbb{N}$. Po krajšanju dobimo $7 z^2 + y^2 = 284$. Brž vidimo, da sta števili y in z bodisi obe lihi bodisi obe sodi. Dokazali bomo, da je v prvem primeru leva stran deljiva z 8, odkoder sklepamo, da je mogoč le drugi primer.

Res, iz zapisa $(2k + 1)^2 = 4k(k + 1) + 1$ lahko razberemo, da kvadrat lihega števila pri deljenju z 8 da ostanek 1, zato je izraz $x^2 + 7 y^2$ v prvem primeru deljiv z 8.

Potemtakem velja $z = 2u$, $y = 2v$ ($u, v \in \mathbb{N}$), $7u^2 + v^2 = 71$ in tedaj $u \leq 3$. Edina rešitev je $u = 1$, $v = 8$, torej ima prvotna enačba le rešitev $x = 14$, $y = 16$.

TRD OREH — Rešitev s str. 47

Očitno je $T = 1$, $E \leq 4$ in K, S, R ter H so od nič različni. Poglejmo prvo enakost. Dve možnosti sta:

$$K + S = R \quad \text{in} \quad P = 2E \quad (1)$$

$$K + S = R + 10 \quad \text{in} \quad P = 2E + 1 \quad (2)$$

V primeru (1) velja $R = K + S \geq 2 + 3 = 5$, zato iz druge enakosti dobimo $O + E \geq 14$. To ne more biti res (ker je $E \leq 4$), torej je mogoč le primer (2).

Druga enakost nam prav tako nudi dve poti:

$$H + R = D + 10 \quad \text{in} \quad O + E = R + 9 \quad (3)$$

$$H + R = D \quad \text{in} \quad O + E = R + 10 \quad (4)$$

Če velja (3), iz zveze $O = R - E + 9$ vidimo, da mora biti $R < E$. Torej je $E = 3$, $R = 2$ ali $E = 4$ in $R \in \{2, 3\}$. V prvem primeru dobimo $P = 7$, $O = 8$, v drugem pa $P = 9$ in $O \in \{7, 8\}$. Iz enakosti $H = D + 10 - R$ sklepamo, da je $D = 0$, od tod pa brž ugotovimo, da zaradi $K + S = R + 10$ nobena od treh možnosti ni dobra.

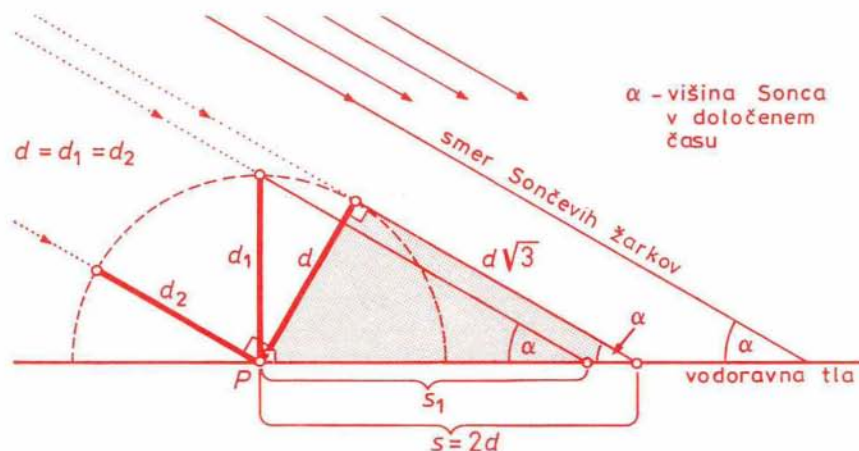
Torej velja (4), zato $R = (O + E) - 10 \leq O - 6 \leq 3$ in potem $R \in \{2, 3\}$. Če je $R = 3$, dobimo $O = 9$, $E = 4$ in $P = 9$. Protislovje pove, da je $R = 2$. Tedaj je bodisi $O = 9$ in $E = 3$ bodisi $O = 8$ in $E = 4$. V prvem primeru je $P = 7$, v drugem pa $P = 9$. Če upoštevamo še enakosti $K + S = 12$ in $D = H + 2$, spet opazimo, da z rešitvijo ni nič.

Vse možnosti smo izčrpali in tako strli oreh — kljub temu, da naloga nima nobene rešitve.

Boris Lavrič

NALOGA O VIŠINI SONCA IN NAJDALJŠI SENCI – Rešitev s str. 51

Ravna palica meče v določenem trenutku na vodoravno ravnino najdaljšo senco, ko leži pravokotno na smer Sončevih žarkov. S slike razbereš, da je najdaljša senco, to je hipotenuza v črtkanem trikotniku $s = 2d$, če je d kateta, to je dolžina palice, na katero padajo Sončevi žarki pravokotno. Ker je črtkani pravokotni trikotnik polovica enakostraničnega trikotnika s stranico $2d$, leži nasproti katete d kot $\alpha = 30^\circ$. Ta kot pa je višina Sonca. Višina Sonca je torej 30° .



Slika. Tri značilne lega ravne palice glede na Sončeve žarke in ustrezne sence na vodoravnih tleh: d – lega palice, ko leži pravokotno na Sončeve žarke, s – najdaljša senco, d_1 – navpična lega palice, s_1 – senco navpične palice, d_2 – lega palice, ko je vzporedna s Sončevimi žarki (sence ni). Pri vrtenju palice okoli podnožišča P v navpični ravnini skozi Sonce je senco palice enkrat levo drugič pa desno od podnožišča palice.

Kot zanimivost izračunajmo, kolika je v tem trenutku dolžina sence s_1 enako dolge navpične palice. Na sliki označena trikotnika sta si podobna. Zato velja $s_1/d_1 = d\sqrt{3}/d$. Ker je $d = d_1$, sledi $s_1 = d\sqrt{3}$, torej $s_1 < s$, kar tudi nazorno kaže slika.

Predlagam, da se še nekoliko poigraš s palico. Ob sončnem vremenu jo vrtil okoli njenega podnožišča P v navpični ravnini, ki gre skozi Sonce. Opazuj in opiši, kako se pri tem spreminja senco palice.

Nalogo o višini Sonca in najdaljši senci lahko rešiš splošno. Računaš na

primer višino Sonca, ko je najdaljša senca, ki jo meče ravna palica, m -krat daljša od dolžine palice ($m \in \mathbb{R}$). Potrebuješ le znanje kotnih funkcij (Glej *Presek* 15(1987/88), str. 56). Ta naloga skriva v sebi še druge zanimivosti. Odkrij jih!

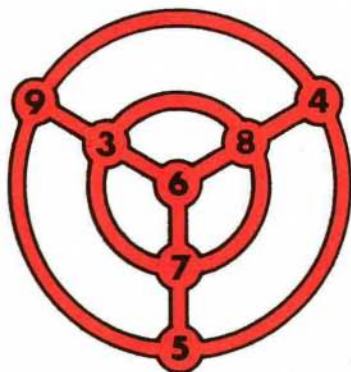
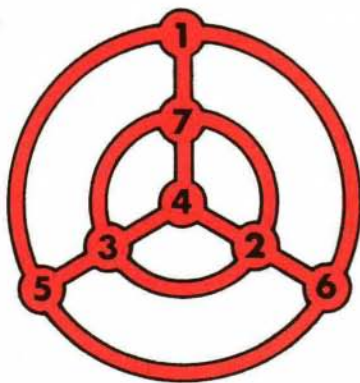
Marijan Prošén

PARKI – Rešitev s str. 52

1. Označimo z a vsoto treh števil na krožni (ali ravni) poti, z b pa število v osrednjem križišču. Vsoto vseh sedmih števil zaznamujmo z S (v prvem primeru je $S = 28$) in jo izrazimo na dva načina z a in b – pri tem seveda upoštevamo pogoje naloge. Dobimo zvezi

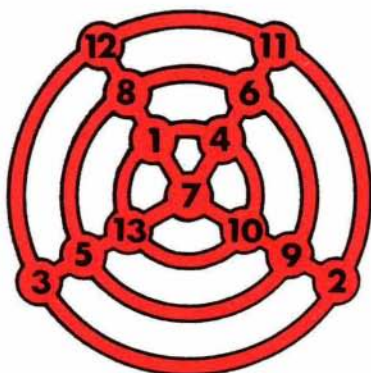
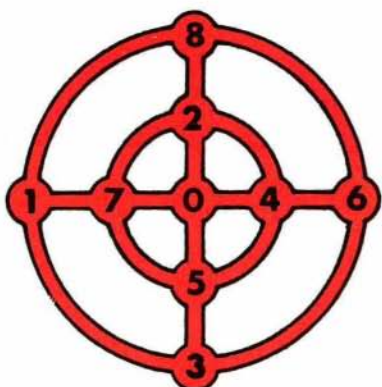
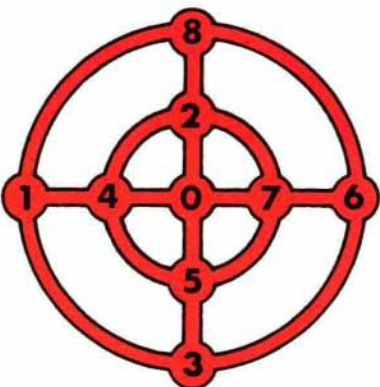
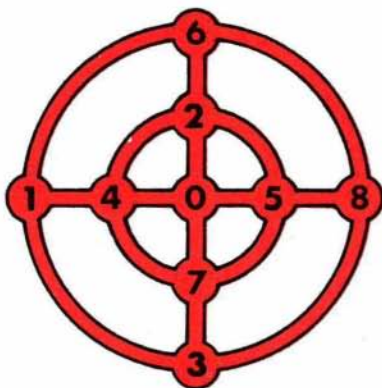
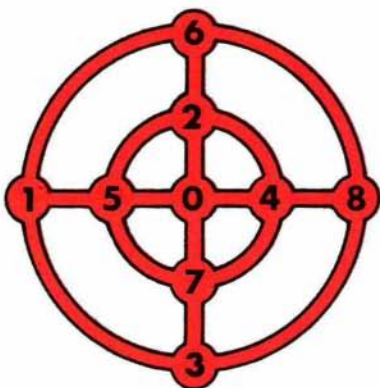
$$2a + b = S \quad \text{in} \quad 3a - 2b = S$$

ki nam dasta enakosti $a = (3/7)S$ in $b = S/7$. V prvem primeru je tedaj $a = 12$, $b = 4$, v drugem pa $S = 42$ in $a = 18$. Od tod do konca je pot preprostejša. Edini rešitvi (za vsak park ena) sta na sliki.



2. Nalogo rešujemo podobno kot prvo. Za levi park tako ugotovimo, da ima na sredi ničlo, vsota po krožni poti (ali ravni poti od enega roba do drugega) pa je enaka 18. Nato lahko hitro določimo še števila na neoznačenih križiščih zunanje krožne poti ter ravne poti skozi križišči 2 in 3. Dobimo štiri rešitve.

V sredini desnega parka je število 7, vsota po krožni (ali ravni) poti je enaka 28. Ena od rešitev je na sliki spodaj – poskusi najti še kakšno.



Boris Lavrič

BOLJ ZA ŠALO KOT ZARES

JE RES $7 = 8$?

Načrtamo trikotnik ABC s kotom 120° v oglišču C in stranicama $CA = 8$, $CB = 7$, nato pa še simetralo kota ABC . Simetrala seka nasprotno stranico AB v točki D pod pravim kotom. (Nariši skico!)

Trikotnika CAD in CBD imata pri D pravi kot, pri C pa kota 60° . Torej merita kota v oglišču A oziroma B po 30° . Tedaj ima trikotnik ABC dva enaka kota, in sta zato nasproti ležeči stranici enaki: $BC = AC$ oziroma $7 = 8$.

Kje je napaka?

Dušan Modić

AKTIVU MATEMATIKOV, FIZIKOV IN ASTRONOMOV

Spoštovani kolegi!

Pred kratkim sta v zbirki KNJIŽNICA SIGMA izšli knjigi

43. B. Lavrič, REŠENE NALOGE IZ MATEMATIKE Z REPUBLIŠKIH TEKMOVANJ, 3. del, 1977–1987, 116 str., 12.500.— din (10.000.— din),
44. V. Batagelj, T. Dolenc, M. Martinec, B. Mohar, R. Reinhardt, I. Tvrdy, A. Vitek, ENAJSTA ŠOLA RAČUNALNIŠTVA — Zbirka rešenih nalog iz računalništva z republiških tekmovanj, 1977 – 1987, 376 str., 40.000.— din (32.000.— din).

Obe knjigi bomo v začetku septembra poslali na ogled na vse srednje in osnovne šole v Sloveniji. Priporočamo vam, da ju nabavite za šolsko knjižnico, in prosimo, da ju pokažete in priporočite dijakom. Za člane društva in pri skupinskem naročilu šole veljajo društvene cene (80%), navedene v oklepaju. Vaša naknadna naročila pričakujemo vsaj do 1. oktobra 1988. Če na šoli ni nobenega interesenta za ti dve deli, vas prosimo, da nam knjigi vrnete. Dovolite nam,

da vam po 1.11.1988 za nevrnjene in neplačane na ogled poslane knjige pošljemo račun. Učitelje na šolah prosimo in se jim tudi zahvaljujemo za sodelovanje pri popularizaciji naših strok in širjenju strokovne literature.

V letošnjem letu smo v isti zbirki ponatisnili še nekatere druge knjige, ki jih priporočamo predvsem mladini v srednjih šolah:

9. N. Prijatelj, Matematične strukture I, 216 str., 15.000.— din (12.000.—din)
10. R. Jamnik, Elementi teorije informacij, 176 str., 15.000.— din (12.000.— din)
30. A. Vadnal, Osnove diferenčnega računa, 200 str., 15.000.— din (12.000.— din)
41. B. Mohar, E. Zakrajšek, Programski jezik pascal, 196 str., 15.000.— din (12.000.— din)

Na zalogi imamo tudi še

ZBIRKE VAJ IZ ARITMETIKE, ALGEBRE IN ANALIZE ZA 1., 2., 3. in 4. razred srednjih šol, ki so jo pripravili I. Štalec in drugi. Cena priročnikov je enotna 10.000.— din (8.000.— din).

Posebej pa vam priporočamo še zbirke vaj iz matematike in fizike za srednje in osnovne šole, ki so jih udeleženci reševali na tekmovanjih v zadnjih tridesetih letih:

KNJIŽNICA SIGMA

21. M. Hribar, Rešene naloge iz fizike z republiških tekmovanj, 1. del, 1951 — 1970, 169 str. 10.000.— din (8.000.— din)
24. V. Batagelj, T. Pisanski, Rešene naloge iz matematike z republiških tekmovanj, 1. del, 1950 — 1966, 180 str. 10.000.— din (8.000.— din)
25. V. Batagelj, T. Pisanski, Rešene naloge iz matematike z republiških tekmovanj, 2. del, 1967 — 1975, 188 str., 10.000.— din (8.000.— din)
37. B. Golli, J. Žitnik, Rešene naloge iz fizike z republiških tekmovanj, 2. del, 1971 — 1983, 10.000.— din (8.000.— din)

PRESEKOVA KNJIŽNICA

P. Zajc, Tekmujmo za Vegova priznanja — Zbirka rešenih nalog iz matematike za učence osnovnih šol

11. 5. in 6. razred, 32 str., 2.500.— din (2.000.— din)
13. 7. razred, 64 str., 5.000.— din (4.000.— din)
14. 8. razred, 64 str., 5.000.— din (4.000.— din)

Ciril Velkovrh

NAROČILNICA

Prosimo, da nam pošljete še naslednje knjige:

Zap.št.

KNJIŽNICA SIGMA

Št. izv. Cena Znesek

- 9. Matematične strukture I
- 10. Elementi teorije informacij
- 20. Štirimestni logaritmi in druge tabele
- 21. Rešene naloge iz fizike z republiških tekmovanj,
1. del
- 24. Rešene naloge iz matematike, 1. del
- 25. Rešene naloge iz matematike, 2. del
- 30. Osnove diferenčnega računa
- 37. Rešene naloge iz fizike, 2. del
- 41. Programski jezik pascal
- 43. Rešene naloge iz matematike, 3. del
- 44. Enajsta šola računalništva

PRESEKOVA KNJIŽNICA

- 11. Tekmujmo za Vegova priznanja, 5. in 6. razred
- 13. Tekmujmo za Vegova priznanja, 7. razred
- 14. Tekmujmo za Vegova priznanja, 8. razred

Skupaj

Šola

Poštna številkaKraj

UlicaŠtevilka

Podpis

ENAJSTA ŠOLA RAČUNALNIŠTVA — Rešene naloge z republiških tekmovanj srednješolcev iz računalništva 1977 — 1987.

Sestavili: V. Batagelj, T. Dolenc, M. Martinec, B. Mohar, R. Reinhardt, I. Tvrdy, A. Vitek.

Zbirka se, kot se spodobi, začne z uvodom. Vendar to ni povsem običajen uvod, saj preseneti tako z dolžino kot z vsebino. Poleg pojasnil in navodil, kako zbirko uporabljati, vsebuje tudi razdelek z naslovom O lastnostih spodobnih programov. V njem nas avtorji poučijo o vseh važnih stvareh, ki jih moramo upoštevati, kadar se lotimo pisanja (spodobnega) programa. Čeprav pravil, kako napisati program, avtorji ne vsiljujejo, bi bilo vsekakor dobro, če se jih začetnik drži, kajti če kje drži rek "Kar se Janezek nauči, to Janez zna", potem je to prav gotovo pri stilu pisanja programov. Kasneje, ko se bo začetnik razvil v samostojno programersko osebnost, bo pač spremenil pravila, ki mu ne bodo všeč; prepričan pa sem, da teh popravkov ne bo veliko.

Drugi del zbirke sestavljajo naloge z dosedanjih enajstih republiških srednješolskih tekmovanj.

Zadnji, tretji del vsebuje rešitve nalog, ki so razporejene v osem skupin: enostavne naloge, računske naloge, rekurzivne funkcije, urejanje in razporejanje, grafi, krmiljenje procesov v realnem času, računalniška grafika; zadnja, osma skupina obsega vse ostale naloge, ki ne spadajo v katero od prejšnjih skupin. Taka razporeditev rešitev omogoča avtorjem, da k vsaki skupini nalog napišejo uvod in s tem zbirko rešijo monotonosti nizanja rešitve za rešitvijo. Uvodi nam približajo dano skupino in s tem povežejo rešitve posameznih nalog med seboj. Tudi vsaka posamezna rešitev ni kar tako. Pogosto je namreč naloga postavljena v širši kontekst (realno situacijo) in je tako tudi rešena. Pozoren bralec bo nadalje med rešitvami našel vse polno koristnih idej, ki mu bodo razširile splošno računalniško izobrazbo.

Vsi programi v rešitvah so zapisani v standardnem pascalu. Tu in tam je dodana rešitev še v kakem drugem jeziku, ki se za dano nalogo izkaže kot nalašč. Med branjem programov spoznamo, da imajo avtorji zbirke verjetno že povsem zelene obraze zaradi gledanja v terminal, saj se elegantne rešitve in programerski triki kar vrstijo.

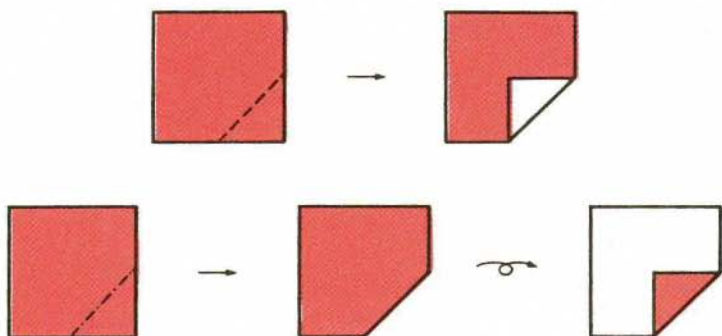
Programerji so zelo nesrečne duše. V resnici nikoli ne vedo, ali je njihov obsežni program povsem pravilen ali ne in ali se bo sploh ustavil pri vseh možnih vhodnih podatkih. Celo več. Dokazati se da, da ne moremo napisati programa, ki bi pregledal kak drug program in ugotovil, ali se bo ta "zaciklal" ali ne. Bi znal to trditev dokazati tudi sam? Če ne gre, potem lahko trikrat ugi-baš, v kateri knjigi najdeš rešitev.

Sandi Klavžar

PAPIRNATI NASLANJAČ

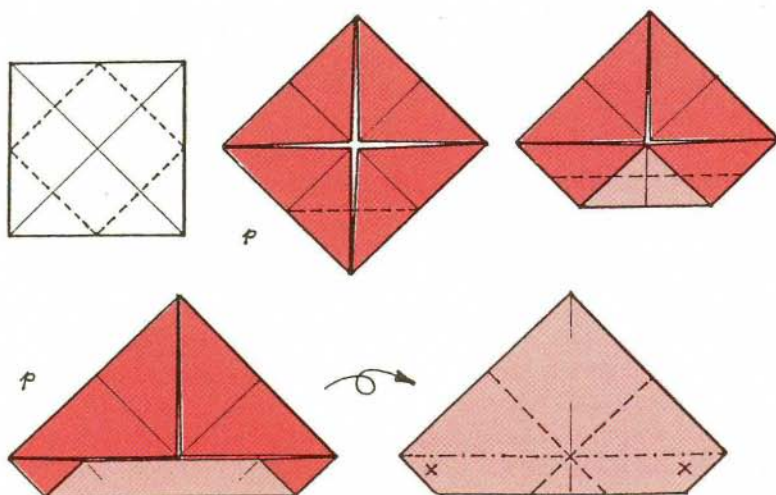
Vzemimo kos papirja kvadratne oblike. Zgolj s prepogibanjem ga bomo postopoma oblikovali v udoben sedež. Zaporedje slik bo najbrž dovolj zgovorno, da bomo z besedo bolj skopi.

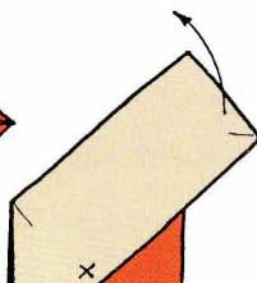
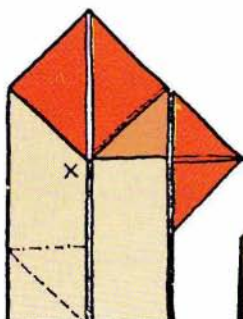
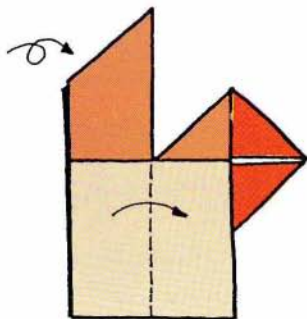
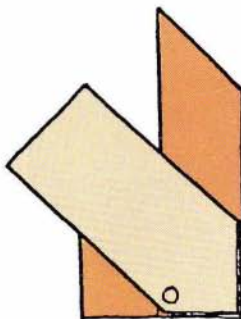
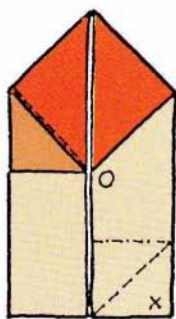
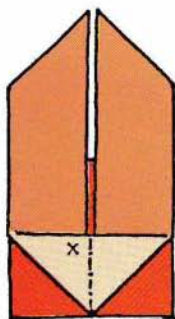
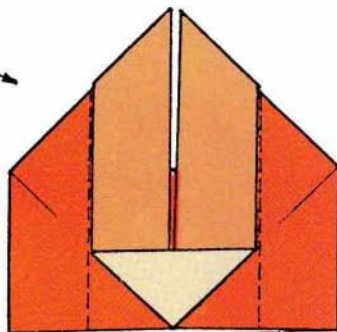
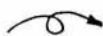
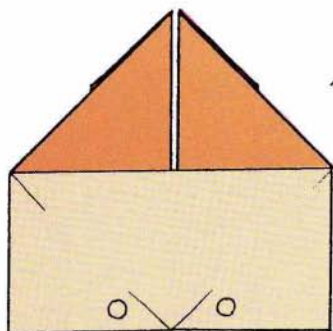
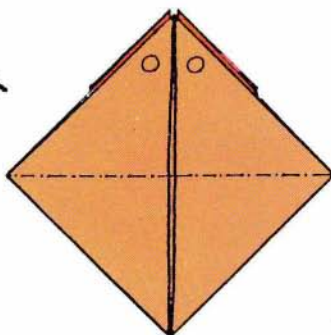
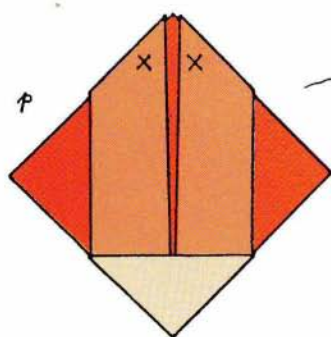
Dogovorimo se za nekaj oznak in dodajmo, da je na sličicah obarvana le ena stran papirja (ki ga pregibamo).

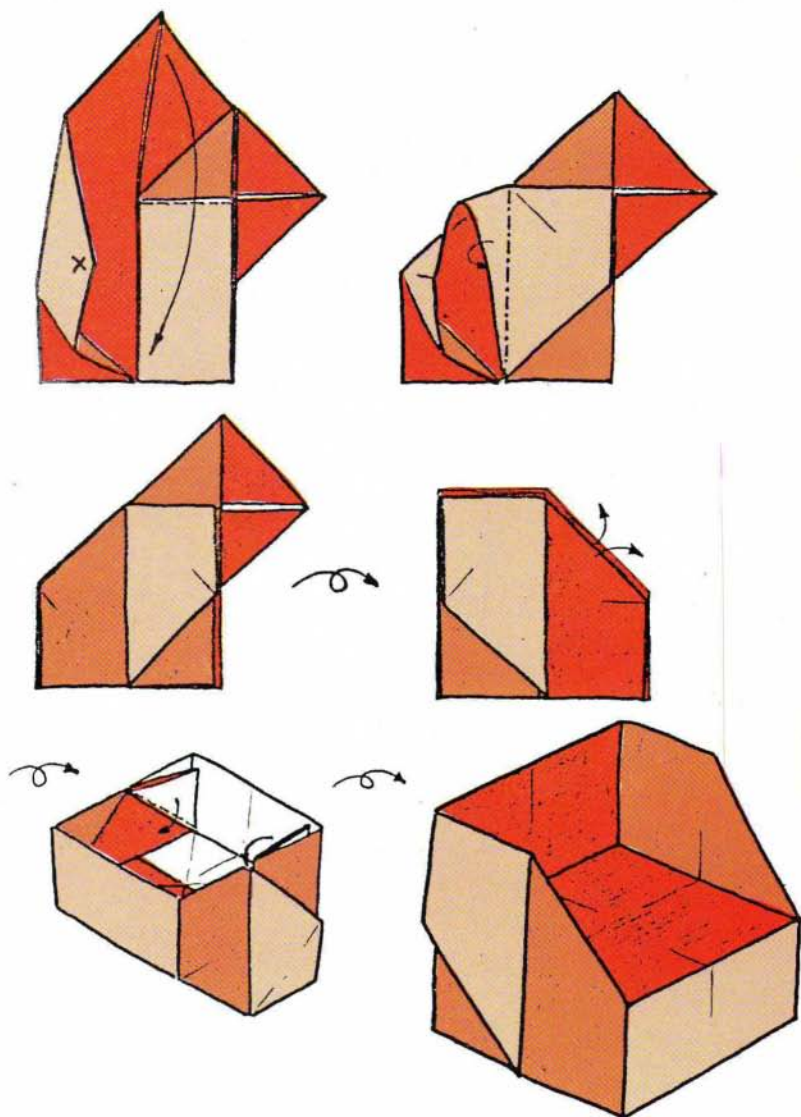


Prekinjeni črti pomenita prepogiba navznoter oziroma navzven, znak  ponazarja obrat na drugo stran, *p* pa pomeni povečanje risbe.

Zdaj pa k delu:







Naslanjač je nared. Oddahnimo si in čestitajmo štirinajstletnemu avtorju *Petru Woodingu* iz Anglije za tako lepo konstrukcijo.

Umetnost pregibanja papirja so na Japonskem gojili že pred približno tisoč leti in se menuje *ORIGAMI*. V knjižici z enakim naslovom avtor *Robert Harbin* predstavlja kopico zanimivih origami izdelkov (iz vsega sveta), med katerimi je tudi naš naslonjač.

Boris Lavrič