

PRESEK

6

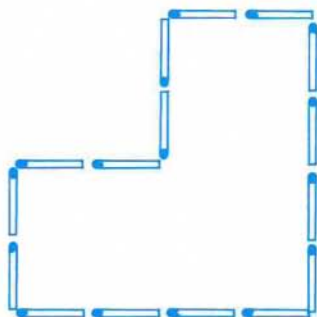


Tex 326

KRATKOČASNE VŽIGALICE

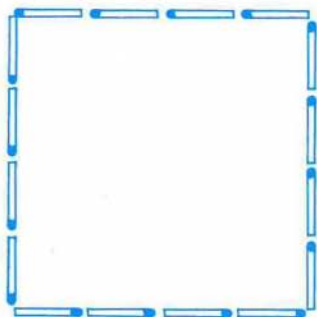
61. Razdeli lik z osmimi vžigalicami na štiri skladne dele!

61



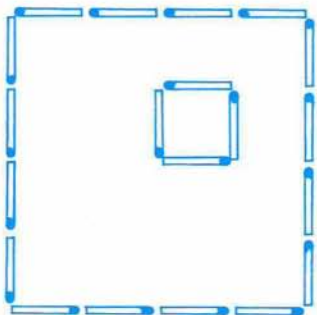
62. Razdeli kvadrat z 11 vžigalicami na štiri ploščinsko enake dele!

62



63. Ograjen vrt s hišo razdeli s pomočjo 10 vžigalic na 5 skladnih delov!

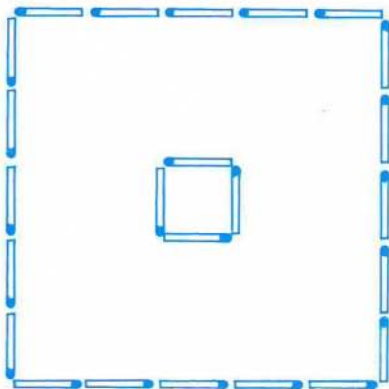
63



64. Ograjen vrt s hišo v sredini razdeli:

- a) z 18 vžigalicami na 6 skladnih delov;
- b) z 20 vžigalicami na 8 skladnih delov!

64



V tretji številki devetega letnika smo začeli po delih objavljati to zbirko nalog, ki jo je za Presek napisal Roman Rojko. Naloge bomo objavljali tudi v prihodnjih številkah Preseka.

VSEBINA

RAČUNALNIŠTVO	Računanje kvadratnega korena (Matija Lokar)	322
	$T_E X$ (Matija Lokar)	326
NOVICE	Mladi fiziki so tekmovali (Miro Trampuž)	336
	Letna šola Tržič (Jože Kotnik)	337
NALOGE	Magični dodekaeder (Boris Horvat)	338
	Matematični krožek — Rešitev str. 354 (Boris Lavrič) . . .	341
	Za marsikoga — Rešitev str. 382 (Boris Lavrič)	342
	Dve nalogi — Rešitev str. 382 (Boris Lavrič)	344
MATEMATIKA	Težave s trinajsto kroglo — Rešitev str. 361 (Boris Lavrič) .	345
	Ploščina Napoleonovega trikotnika (Boris Lavrič)	348
	Ptolemejev izrek (Tomaž Košir, Dragoljub M. Milošević) . .	352
	Cauchyjeva neenakost (Roman Drnovšek)	355
	Šahovski kralj z omejeno svobodo gibanja (Marko Razpet) .	358
	Zaklad na samotnem otoku (Marko Razpet)	362
NOVE KNJIGE	S. Kuščer, E. Podreka, Logo in računalnik (Vital Oblak) . .	366
	Z. Petkovšek, M. Trontelj, Skice vremena (Jože Rakovec) .	367
	Presekova knjižnica	368
FIZIKA	Ali ugasne padajoča sveča (Janez Strnad)	369
ASTRONOMIJA	Opazuj planete (Marijan Prosen)	374
RAZVEDRILO	BOLJ ZA ŠALO KOT ZARES	
	— Otok zaljubljenih (Samo Dreo, Damjan Kobal, karik. Božo Kos)	325
	— Za vraževerne, Zodiak, Zaljubljenost, Pari sosedov.	
	— Rešitev str. 347, 350, 357 (Boris Lavrič)	335
NALOGE	Za vraževerne, Zodiak, Zaljubljenost, Pari sosedov.	
	— Rešitev str. 347, 366, 357 (Boris Lavrič)	335
RAZVEDRILO	Bi zapeli? (Damjan Kobal)	378
	KRIŽANKE	
	— Slikovna križanka — Rešitev iz P-5 (Marko Bokalič) .	365
	— Številska križanka — Rešitev str. 381 (Bernarda Tržok)	377
	PISMA BRALCEV (Sandi Klavžar, Damjan Kobal, Dušica Boben)	380
	UTRINKI (Damjan Kobal)	367
	KRATKOČASNE VŽIGALICE — Rešitev str. III (Roman Rojko)	II
NA OVITKU	(glej članek na str. 345) (Foto Marjan Smrke)	I

RAČUNANJE KVADRATNEGA KORENA

Z računanjem osnovnih matematičnih funkcij smo se v Preseku že srečali (Presek 2, 1986). Ker so uporabljeni algoritmi dokaj zapleteni, si oglejmo, kako bi kvadratni koren izračunali enostavneje. Uporabili bomo postopek, katerega izvor pripisujejo starogrškemu matematiku Heronu.

Razmisljamo lahko nekako takole. Poskusimo najprej ugotoviti, na katerem intervalu leži iskani koren. Določiti moramo torej dve števili, prvo manjše od $\sqrt{x}$, drugo večje. Naj bo a_1 približna vrednost kvadratnega korena danega števila x ($x > 0$). Ker vemo, da je $\sqrt{x}$ pozitivno število (no, razen za $x = 0$), si tudi približek izberimo pozitiven. Če je $a_1 < \sqrt{x}$, pomnožimo obe strani neneačbe s $\sqrt{x}$:

$$a_1 < \sqrt{x}$$

$$a_1 \sqrt{x} < \sqrt{x} \sqrt{x}$$

$$a_1 \sqrt{x} < x$$

$$\sqrt{x} < \frac{x}{a_1}$$

Podobno lahko iz $a_1 > \sqrt{x}$ ugotovimo, da velja $\sqrt{x} > \frac{x}{a_1}$. Iskani kvadratni koren $\sqrt{x}$ leži med številoma a_1 in $\frac{x}{a_1}$. Zato kot naslednji približek vzemimo aritmetično sredino števil a_1 in $\frac{x}{a_1}$, tj.

$$a_2 = \frac{1}{2} \left(a_1 + \frac{x}{a_1} \right)$$

Če nadaljujemo s tem postopkom, po n korakih dobimo zaporedje približnih vrednosti:

$$a_n = \frac{1}{2} \left(a_{n-1} + \frac{x}{a_{n-1}} \right) \quad n = 2, 3, \dots \quad (1)$$

Pokažimo nekaj lastnosti zaporedja (a_n) .

Za zaporedje (1) velja, da so vsi njegovi členi večji ali enaki pravi vrednosti

$$a_n \geq \sqrt{x} \quad (2)$$

Pokažimo, da je trditev resnična. Vzemimo n -ti člen zaporedja, določen z (1). Zapišimo ga nekoliko drugače:

$$a_n = \frac{1}{2} \left(\frac{\sqrt{x}a_{n-1}}{\sqrt{x}} + \frac{\sqrt{x}\sqrt{x}}{a_{n-1}} \right)$$

Vidimo, da $\sqrt{x}$ lahko izpostavimo:

$$\begin{aligned} a_n &= \sqrt{x} \left(\frac{1}{2} \left(\frac{a_{n-1}}{\sqrt{x}} + \frac{\sqrt{x}}{a_{n-1}} \right) \right) \\ &= \sqrt{x} \frac{1}{2} \left(t_{n-1} + \frac{1}{t_{n-1}} \right) \end{aligned}$$

kjer je

$$t_{n-1} = \frac{a_{n-1}}{\sqrt{x}}$$

Če pokažemo, da je $\frac{1}{2}(t_{n-1} + \frac{1}{t_{n-1}})$ vedno večje ali enako 1, smo prvo lastnost dokazali. In res! Ker velja

$$(t-1) \geq 0$$

$$t^2 - 2t + 1 \geq 0$$

$$t^2 + 1 \geq 2t$$

za pozitivne t velja:

$$\frac{1}{2} \left(t + \frac{1}{t} \right) \geq 1$$

Namesto t si mislimo v zadnji neenacbi t_{n-1} in dokaz prve lastnosti je tu.

Druga lastnost zaporedja (a_n) je ta, da je vsak naslednji člen zaporedja manjši ali kvečjemu enak prejšnjemu. Takemu zaporedju rečemo *monotono padajoče zaporedje*. Ker so vsi členi zaporedja pozitivni, je trditev

$$a_{n+1} \leq a_n$$

enakovredna trditvi

$$\frac{a_{n+1}}{a_n} \leq 1$$

Upoštevajmo, kako je $(n+1)$ -ti člen zaporedja določen

$$\frac{a_{n+1}}{a_n} = \frac{\frac{1}{2}(a_n + \frac{x}{a_n})}{a_n} = \frac{1}{2}(1 + \frac{x}{a_n^2})$$

Pokažimo, da je zadnji člen manjši od 1. Če kvadriramo neenačbo (2) in jo preuredimo, dobimo, da je $\frac{x}{a_n^2} \leq 1$. Torej je izraz v oklepaju manjši ali enak 2 in

$$\frac{a_{n+1}}{a_n} \leq 1$$

Iz prejšnjih dveh lastnosti lahko zaključimo, da za zaporedje (1) velja

$$\sqrt{x} \leq a_n \leq a_{n-1} \leq \dots \leq a_2$$

Torej so približki čedalje boljši. Če ugotovimo, da sta dva zaporedna približka enaka, so enaki tudi vsi nadaljnji. Naj bo vrednost tega približka c . Potem je ta c že enak iskanemu kvadratnemu korenu. Res, če upoštevamo enačbo (1), s katero generiramo zaporedje, dobimo:

$$c = \frac{1}{2}(c + \frac{x}{c})$$

$$2c = c + \frac{x}{c}$$

$$c^2 = x$$

Tako smo dobili iterativni postopek za računanje kvadratnega korena. Povejmo še to, da je to le poseben primer splošnejšega postopka za iskanje ničel funkcij, ki ga imenujemo Newtonov postopek. Kako, mi vendar računamo kvadratni koren, ne pa iščemo ničle? Pa vendar:

$$c = \sqrt{x}$$

$$c^2 = x$$

$$c^2 - x = 0$$

Če želimo torej določiti koren iz števila x , je to isto, kot če poiščemo ničlo funkcije $f(t) = t^2 - x$.

Koliko približkov pa moramo izračunati? Število je odvisno od natančnosti, na katero želimo določiti kvadratni koren, in seveda od natančnosti, s katero računa računalnik. Ker le-ta računa na končno mnogo mest, se po

nekaj (končno k sreči!) korakov zgodi, da sta zaporedna približka enaka. Približke računamo torej toliko časa, da se sosednja ne razlikujeta več.

Poskusite sami sprogramirati opisani postopek! Primerjajte dobljeni rezultat s tistim, ki ga vrne vgrajena funkcija. Koliko približkov potrebujete v povprečju?

*Po besedilu Zdravka F. Starca
prevedel in priredil Matija Lokar*

Članek je bil napisan in oblikovan s programom T_EX, katerega opis si preberite na strani 326.

OTOK ZALJUBLJENIH

... to je čuden otok, otok pravilno mislečih, ... pa ne samo to, domačini vselej tudi govorijo to, kar mislijo.

Toda, ko se ti ljudje zaljubijo, ne dobijo rdečih ušes, kot menda navadni zemljani, ampak se tako zmedejo, da mislijo vse napačno. Si predstavljate, kako je to preprosto? ... Če bi živeli tam in bi vam bil kdo zelo všeč, bi takoj vedeli, če je zaljubljen, potem pa le še korak, da spoznate ... če ste to mogoče vi ... Toda, joj, če se sami zaljubite. Si predstavljate, kakšna zmeda bi to bila? Tisti, ki bi bili zaljubljeni v vas, bi vi mislili, da niso, tisti, ki niso, da so ..., tisti, ki so lepi, da so grdi, tisti, ki so grdi, da so lepi ... in splon, kaj bi si mislili o lastni zaljubljenosti? Gotovo boste v svoji domišljiji zgodbo lahko nadaljevali ...

Nekdo, ki mu verjamemo, da ni zaljubljen, nam je o Brigiti, Lauri in Sandri povedal naslednje:

Brigita misli, da je Sandra zaljubljena.

Laura misli, da je Brigita zaljubljena.

Sandra pa misli, da so vse tri zaljubljene.

Kdo razvozla, katera od deklet je zaljubljena? Ena? Dve? Vse tri? Kaj vam bo odgovorila Ana, če jo vprašate, ali je zaljubljena?

Iz zadnjega odgovora, boste spoznali, da na otoku zaljubljenecv vsi odgovarjajo, da niso zaljubljeni ..., toda, očitno jim tega ni čisto verjeti ...

*Po ideji Sama Drea
Damjan Kobal*

T_EX

Ste si kdaj želeli, da bi sami izdajali časopis? Ste se kdaj jezili, ko ste poskušali lepo natipkati matematično formulo? Rešitev problema je povsem preprosta. Imeti morate strica v tiskarni ali pa računalnik, tiskalnik in seveda primeren program.

Pred kakšnega pol leta sem končno prišel do verjetno najboljšega programa za urejanje besedila. To je program, ki ga je napisal sloviti Donald E. Knuth, profesor na univerzi v Standfordu. Imenuje se T_EX. Ime izhaja iz začetnih črk grške besede tehne ($\tau\epsilon\chi$...), kar pomeni ročna spretnost, obrt, umetnost in se tako tudi izgovarja. Programa ne smemo mešati s podobnim programom firme Honeywell z imenom TEX. Kot pove že samo ime programa, je namenjen predvsem za pisanje tehničnih besedil. V njih ponavadi kar mrgoli formul, grških črk ...

S pomočjo tega programa naši pisni izdelki skoraj nič ne zaostajajo za tistimi, ki jih pripravljajo v tiskarni. Videz pa je seveda odvisen od seznanjenosti z možnostmi programa in od kvalitete tiskalnika.

Knuth je rezultate svojega petletnega dela na področju računalniške obdelave teksta objavil v seriji petih knjig *Computers & Typesetting*. Prva nosi naslov T_EX Book in je pravzaprav priročnik za uporabo programa. Vendar to niso suhoparna navodila, kot smo jih običajno vajeni pri takih

izdelkih. Je bolj učbenik in zelo zanimivo napisan. Druga knjiga je sam program (T_EX: the Program) v pascalu. Lahko mirno sedete za računalnik in si program vtipkate. Seveda če ste pripravljeni stipkati 594 strani! Tretji del z naslovom The METAFONTbook je navodilo za uporabo programa METAFONT, ki omogoča generiranje znakov in definiranje različnih abeced. To sploh ni tako preprosto, kot si mogoče misli bralec, ki uspešno uporablja č, š in ž na svojem računalniku. Knuthovi programi namreč delujejo povsem neodvisno od enote, ki jo uporabljamo za izpis. To je lahko poljuben tiskalnik, zaslon ... Več o tem kasneje. Vsaka črka mora biti lepa tudi v kurzivni, povečani, poudarjeni in ne vem še kakšni obliki. Tako je vsak znak opisan kar s 60 parametri.

Če ste uspešno vtipkali T_EX, se boste mogoče lotili še programa METAFONT. Najdete ga v četrti knjigi. Za tolažbo naj vam povem, da je knjiga okoli 40 strani krajša od druge. V peti knjigi, *Computer Modern Typefaces*, vas Knuth popelje v načine definiranja znakov, v njihovo zgodovino, pojasni probleme, ki so nastopili pri delu na obeh programih, in razloži, zakaj so določene rešitve takšne, kakršne so.

Kako pa T_EX sploh uporabljamo? Samo delo lahko razdelimo na več faz. T_EX je v bistvu specializirani prevajalnik, le da teksta ne predela v strojno

kodo, marveč v obliko, primerno za njih kontrolnih ukazov. Omogoča pa izpis. Najprej pripravimo tekst z urejevalnikom besedil, ki ga najpogosteje uporabljamo. Med tekst vnesemo kontrolne ukaze. To so bodisi kontrolne besede ali pa kontrolni znaki. Kontrolni ukazi služijo za oblikovanje besedila, omogočajo izpis posebnih simbolov ... Pomešani so z drugim

tekstom in se začno s simbolom \ . Tako z \ p i dobimo grško črko pi, z \infty simbol za neskončnost ... Pri tipkanju teksta se moramo zavedati, da imajo znaki { , } , \ , ^ , ~ , _ , \$ poseben pomen in če jih želimo uporabiti, jih moramo pisati drugače. Program pozna v osnovni obliki (t.i. čisti T_EX) okoli 900 vnapij definira-

tudi definiranje novih, če jih potrebujemo. Osnovna verzija T_EX—a pozna pet osnovnih tipov črk.

roman	abcdefghijklm
slanted	abcdefghijklm
italic	abcdefghijklm
typewriter	abcdefghijklm
bold	abcdefghijklm

Med njimi preklapljam s kontrolnimi besedami \rm, \sl, \it, \tt in \bf. Poleg tega imamo na voljo različne velikosti črk. Običajno so črke velikosti 10 točk, z uporabo ukazov \sevenrm in \fiverm pa teks postaja

manjši in manjši in manjši in manjši in manjši.

Seveda tekst lahko tudi povečamo. Preprosto naložimo nabor znakov, povečan za ustrezni faktor. Tako z ukazom \font<ime nabora v tekstu> = < ime nabora znakov na datoteki > at < velikost > poimenujemo poljuben nabor znakov v željeni velikosti. Kadar ga želimo uporabiti, ga naložimo z <ime nabora v tekstu>. Drug način povečevanja znakov je relativno povečanje glede na osnovno velikost. Tako imamo na voljo ukaz \font<ime nabora v tekstu> = < Seveda ime nabora znakov na datoteki > scaled < faktor >. Faktor je celo število, ki predstavlja povečavo v krat 1000. S faktorjem 1200 povečamo črke 1.2—krat. Ker običajno povečujemo znake enakomerno (v geometrijskem zaporedju), imamo za faktor vnaprej definirane vrednosti 1.2, 1.44, 1.728 in 2.074—krat.

a b c d e f g h i j k l m n o p r s t u v z

a b c d e f g h i j k l m n o p r s t u v z

a b c d e f g h i j k l m n o p r s t u v z

a b c d e f g h i j k l m n o p r 327

Celotni tekst lahko povečamo oziroma zmanjšamo tudi bolj preprosto. Na začetku teksta uporabimo ukaz $\backslash magnification = < faktor >$.

Ukazov je, kot smo že omenili, res veliko. Vendar se uporabe osnovnih ukazov hitro privadimo in tako je tipkanje zapletenega teksta dokaj hitro. Odveč je seveda omeniti, da program sam skrbi za poravnavo robov besedila, zamikanje novih odstavkov, številčenje strani, zna pisati opombe pod črto, razbijati tekst v stolpce, pisati naglase ...

Ustavimo se še malo pri pisanju matematičnih formul. Tu je program res mojstrsko narejen in je pisanje zapletenih klobas, ki jih včasih srečamo v besedilu, povsem preprosto. Formule pišemo tako, da jih napišemo med $\$$.

Če uporabimo $\$ \$$, bo formula zapisana v novi vrsti in centrirana. Kot podobni programi vsebuje tudi indekse in eksponente. Vendar je tudi ta kos 'spodobneje' napisan kot v drugih programih. Tako $T_E X$ pazi na take stvari, kot je npr. dejstvo, da morajo biti indeksi pri določenih črkah malo zamaknjeni. Večina programov tako napiše

P_2^2 , namesto P_2^2

Preprosto je tudi pisanje indeksiranih eksponentov, indeksov od indeksov od indeksov ... od indeksov, ki se morajo proporcionalno manjšati. Tako $2^{2^{2^x}}$ zapišemo kot

$\$ \$ 2^{\{ 2^{\{ 2^x \} \} } } \$ \$$

Pogledjmo si še nekaj zanimivih formul.

$\$ \sqrt{2} \$$

$\$ \sqrt{x+2} \$$

$\$ x^{\overline{\{m+n\}}} \$$

$\$ \sqrt{x^3 + \sqrt{\alpha}} \$$

$\$ \sqrt[3]{2} \$$

$\$ \sqrt[n]{x^n + y^n} \$$

$\$ \sqrt[n+1]{x_{y^a_b}^{z_c^d}} \$$

$\sqrt{2}$

$\sqrt{x+2}$

$x^{\overline{m+n}}$

$\sqrt{x^3 + \sqrt{\alpha}}$

$\sqrt[3]{2}$

$\sqrt[n]{x^n + y^n}$

$\sqrt[n+1]{x_{y^a_b}^{z_c^d}}$

Zanimivo je tudi, da nam pri postavljanju presledkov. Zato je bolje, sanju formul ni potrebno skrbeti za da za to skrbi program sam. Seveda presledke. Knuth je namreč mnenja, lahko to možnost s primernim ukazom da večina tako ali tako ne zna pravilno izklopimo.

Matematiki veliko uporabljajo naglase nad črkami. S tem poudarijo relacije med posameznimi matematičnimi objekti in se izognejo preveliki uporabi indeksov. Tako čisti T_EX pozna naslednje znake:

$\hat{a}$	<code>$\backslash\hat{a}$</code>
$\check{a}$	<code>$\backslash\check{a}$</code>
$\tilde{a}$	<code>$\backslash\tilde{a}$</code>
$\acute{a}$	<code>$\backslash\acute{a}$</code>
$\grave{a}$	<code>$\backslash\grave{a}$</code>
$\mathring{a}$	<code>$\backslash\mathring{a}$</code>
$\ddot{a}$	<code>$\backslash\ddot{a}$</code>
$\breve{a}$	<code>$\backslash\breve{a}$</code>
$\bar{a}$	<code>$\backslash\bar{a}$</code>
$\vec{a}$	<code>$\backslash\vec{a}$</code>

Matematične formule so lahko tudi veliko zapletenejše. Program opravi tudi z njimi.

$$x + y^2 \text{ over } k + 1$$

$$\frac{x + y^2}{k + 1}$$

$$x = y^{\frac{2}{k+1}}$$

$$x + y^{\frac{2}{k+1}}$$

$$x \pm y \mp z$$

$$x \pm y \mp z$$

$$f(x) \cap f(y)$$

$$f^*(x) \cap f_*(y)$$

$$x \subset y \subseteq z$$

$$x \subset y \subseteq z$$

$$\sum_{n=1}^3 z_n^2$$

$$\sum_{n=1}^3 z_n^2$$

$$\binom{n+1}{3}$$

$$\binom{n+1}{3}$$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} x_n \text{ exists} \iff$$

$$\limsup_{n \rightarrow \infty} x_n = \liminf_{n \rightarrow \infty} x_n$$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} x_n \text{ exists} \iff \limsup_{n \rightarrow \infty} x_n = \liminf_{n \rightarrow \infty} x_n$$

$$\int_{-\infty}^{+\infty}$$

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin x}{x} = 1$$

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin x}{x} = 1$$

$$\max_{1 \leq n \leq m} \log_2 P_n$$

$$\max_{1 \leq n \leq m} \log_2 P_n$$

$$\int_0^1$$

$$\int_{-\infty}^{+\infty}$$

$$\int_{-\infty}^{+\infty}$$

Ker lahko matematične formule uporabniku za to ni potrebno skrbeti. rastejo, mora program poznati način, Črte nad koreni so dovolj dolge, kako določene simbole povečati. Spet ulomki pravilno izpisani ...

$$\sqrt{1 + \sqrt{1 + \sqrt{1 + \sqrt{1 + \int_0^1 \frac{x}{2} dx}}}} dx$$

$$\sqrt{1 + \sqrt{1 + \sqrt{1 + \sqrt{1 + \int_0^1 \frac{x}{2} dz}}}}$$

$$\left(\sum_{k=1}^n A_k \right)$$

$$\left(\sum_{k=1}^n A_k \right)$$

Tudi matrike je s T_EX-om preprosto pisati:

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \dots & a_{mn} \end{pmatrix}$$

$$a_{21} a_{22} \dots a_{2n}$$

$$\vdots \ddots \vdots$$

$$a_{m1} a_{m2} \dots a_{mn}$$

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \dots & a_{mn} \end{pmatrix}$$

Typing Math Formulas



Kako, oblikovanje formul da je težko?

Tako! Tekst imamo sedaj pripravljen. Zaključimo ga z \bye, ki bo povedal programu, da je tu konec teksta. Pokličemo program $T_E X$, ki se nam javi z

* *

Vtipkamo ime datoteke, na kateri je pripravljen tekst (npr. TEKST.RNO). $T_E X$ predela tekst in rezultat shrani na datoteko z enakim imenom, a podaljškom DVI (TEKST.DVI). Zakaj ravno DVI? To je okrajšava za DeVice Independent in nas opozorja, da je tekst v obliki, ki ni odvisna od izhodne naprave. V primeru napak nas obvesti z ustreznim besedilom. Določene napake, kot so manjkajoči zaklepaji, zna odpraviti tudi sam. Možno je tudi med

tekom programa zamenjati napačni del teksta s pravilnim.

Ko smo končno uspeli vtipkati tekst brez napak, moramo sedaj še izpisati datoteko TEKST.DVI. S tem se $T_E X$ ne ukvarja. Napisati ali preskrbeti si moramo ustrezní program, ki je seveda odvisen od tiskalnika, ki ga uporabljamo. Končno lahko občudujemo naš izdelek.

S tem se zgodba seveda ne konča. V tujini s pomočjo $T_E X$ -a nastajajo cele knjige, obstajajo klubi uporabnikov ... Pri nas ta program še ni zelo razširjen. Mogoče zaradi tega, ker ni nobenih menujev, sličic, ni potrebno uporabljati miške ...

Matija Lokar

PRESEK — list za mlade matematike, fizike, astronome in računalnikarje

15. letnik, šolsko leto 1987/88, številka 6, strani 320 — 384

UREDNIŠKI ODBOR: Vladimir Batagelj, Dušica Boben (pisma bralcev, stavljenje teksta), Darjo Felda (tekmovanja iz matematike), Franci Forstnerič, Bojan Golli (tekmovanja iz fizike), Marjan Hribar, Sandi Klavžar (računalništvo), Andrej Kmet, Damjan Kobal (razvedrilo), Jože Kotnik, Edvard Kramar, Peter Križan (fizika), Boris Lavrič (matematika, odgovorni urednik), Gorazd Lešnjak, Matija Lokar, Franci Oblak, Peter Petek, Niko Prijatelj (glavni urednik), Pavla Ranzinger (astronomija), Tomaž Skulj, Marjan Smerke (svetovalec za fotografijo), Ivanka Šircelj (jezikovni pregled), Miha Štalec (risbe), Ciril Velkovrh (urednik, nove knjige, novice).

Dopise pošiljajte in list naročajte na naslov: Društvo matematikov, fizikov in astronomov SRS — Podružnica Ljubljana — Komisija za tisk, Presek, Jadranska c. 19, 61111 Ljubljana, p.p. 64, tel. (061) 265—061/53, št. žiro računa 50101—678—47233. Naročnina za šolsko leto 1987/88 je za posamezna naročila 2700.— din, za skupinska naročila pa 1800.—, posamezna številka 500.— din/300.— din.

List sofinancirajo Izobraževalna, Kulturna in Raziskovalna skupnost Slovenije
Ofset tisk Časopisno in grafično podjetje DELO, Ljubljana
© 1988 Društvo matematikov, fizikov in astronomov SRS — 915

6. MEDNARODNA POLETNA ŠOLA RAČUNALNIŠTVA

Letos bo že šestič v začetku julija v Ljubljani Poletna šola računalništva. Pričela se bo v soboto 2. in končala teden dni kasneje, v nedeljo 10. julija. Udeležiti se je lahko vsak srednješolec, ki ga vse skupaj zanima. Ker bodo udeleženci tudi iz tujine, smo pripravili predavanja v nekaterih skupinah v angleščini. Te skupine so označene s posebnim znakom (A). Posebej naj omenimo tudi skupino, ki jo bo vodila dr. Kwiatkowska, sicer profesorica na univerzi v Leicesteru v Angliji.

Ni pa vse tako lepo kot izgleda. Letos smo namreč naleteli na velike denarne težave in smo se zato odločili, da tokrat bivanje in prehrana ne bosta brezplačna. Tako si bodo morali udeleženci to dvojje plačati sami, mi jim lahko vse skupaj organiziramo po nižjih cenah v dijaškem domu. Hkrati pa moramo posebej poudariti, da je na voljo omejeno število namenskih štipendij. Prednost pri njihovi dodelitvi imajo najboljši z letošnjega republiškega srečanja in tekmovanja srednješolcev iz računalništva.

Zadnji rok za oddajo spodaj priložene prijavnice je v petek 3. junija. Prijavnico pošljite na naslov:

ZOTKS, Gibanje "Znanost mladini",
Sekcija za računalništvo, (za Poletno šolo)
Tržaška 43, 61000 Ljubljana

Dokončno obvestilo o sprejetju, morebitni štipendiji in urnik šole boste prejeli na dom do ponedeljka 15. junija.

Za letošnjo poletno šolo smo pripravili naslednje teme:

1. Vladimir Batagelj: Logo (delavnica)
Povzetek: Udeleženci bodo spoznali posebnosti jezika logo in jih izkoristili pri izdelavi programov za nekaj zanimivih problemov.
Željeno predznanje: -

Prijavnica za 6. poletno šolo računalništva:

Ime in priimek: _____

Domači naslov : _____

Šola in razred: _____

Želim sodelovati v skupini: _____

če ne bo možno, pa v skupini: _____

2. Roman Dorn: **Zbirni jezik za Intel 8088 in povezava z DOS**
Povzetek: Udeleženci se bodo seznanili z zgradbo procesorja Intel 8088, zbirnikom za omenjeni procesor, principi pogojnega zbiranja in makroji. V nadaljevanju bo predstavljen program DEBUG in opisana povezava z operacijskim sistemom MS-DOS. Delo bo zaključilo poglavje o plavajoči vejici. Udeleženci bodo pri vajah naredili nekaj programov in jih preizkusili - postopno izvajali. Spoznali bodo tudi nekaj funkcij operacijskega sistema DOS.
Zeljeno predznanje: Znanje uporabe katerega izmed urejevalnikov in DOS operacijskega sistema.
3. Tom Erjavec: **Notranja zgradba operacijskega sistema PC DOS (A)**
Povzetek: Udeležencem bo predstavljena strojna oprema računalnika PC in kako je nad njo nadgrajen operacijski sistem PC DOS. Razložena bo razlika med logičnimi in fizičnimi napravami. Predstavljen bo BIOS in način, kako krmilni programi preko BIOS-a dosegaajo fizične naprave. Ogledali si bomo ureditev diskovnega sistema, pomnilnega prostora. Glavni poudarek bo na prekinitvenih klicih. Delo vključuje tudi BIOS-ove prekinitve, nato pa še DOS-ove.
Zeljeno predznanje: Splošno poznavanje mikroračunalnikov, okvirno poznavanje operacijskega sistema PC-DOS, poznavanje jezika pascal.
4. Leon Mlakar, Tomislav Dovič: **Programski jezik C (A)**
Povzetek: Po uvodu v jezik C bo sledila razlaga podatkovnih tipov in spremenljivk, stavkov za kontrolo toka, funkcij, podatkovnih struktur, vhodno/izhodnih funkcij, strukture programa in modularnost. Nakazane bodo nekatere razlike med implementacijami in smeri razvoja jezika. Tečaj bo potekal v obliki praktičnih vaj, ki bodo potekale na računalniku IDC Trident z UNIX V operacijskim sistemom. Predvidena je tudi tema dneva z naslovom CAD/CAM programska orodja.
Zeljeno predznanje: Znanje vsaj enega programskega jezika in osnovnih programskih tehnik.

Prijava za bivanje:

Ime in priimek: _____

Domači naslov: _____

Zelim, da mi preskrbite:

- spanje:	DA	NE
- zajtrk:	DA	NE
- kosilo:	DA	NE
- večerjo:	DA	NE

Prosim za dodelitev štipendije: DA NE

5. Rok Vidmar: **Postopki za primerjanje datotek**
Povzetek: Udeleženci si bodo ogledali postopke za primerjanje dveh ne preveč različnih datotek. Napisali bodo program, ki bo primerjal datoteki s povratnim sledenjem.
Željeno predznanje: Pascal.
6. Marta Kwiatkowska: **Osnovni tečaj iz module-2 (A)**
Povzetek: Predstavljen bo programski jezik modula-2. Udeleženci se bodo spoznali s podatkovnimi, programskimi in ukaznimi strukturami tega sodobnega programskega jezika. Poleg samega jezika, si bodo udeleženci ogledali nekatere več ali manj standardne definicijske module ter podprograme v njih. V okviru predavanj bodo tudi razložena osnovna načela modularnega programiranja in programerskega inženirstva.
Željeno predznanje: Katerikoli programski jezik.

ZA VRAŽEVERNEŽE

Vid je nazdravil Črtu in dejal: "Pred sedmimi leti so bili trije petki trinajstega v mesecu in čez sedem let bo tudi tako. Letos pa je en sam in to prav na tvoj rojstni dan."

Črt mu je odvrnil: "Le še na moj osemnajsti rojstni dan bi mi lahko kdo nazdravil z istimi besedami in pri tem ne bi lagal, naslednja takšna priložnost pa bo šele v enaindvajsetem stoletju."

Kdaj je rojen Črt?

ZODIAK

V Andrejini kreditni kartici sta čitljiva le dan in leto rojstva — 30. . 1973. Petnajst let bo dopolnila v nedeljo, šestnajst pa v torek.

V katerem nebesnem znamenju je rojena?

ZALJUBLJENOST

Samo je zaupal Iztoku: "Sanja se zaljubi trinajstega v mesecu," in dodal: "Prejšnji mesec se je v četrtek, prihodnji mesec pa se bo v sredo. Kdaj se je ta mesec?" Iztok je v hipu vedel odgovoriti. Znete tudi vi?

PARI SOSEDOV

Eno od dveh zaporednih naravnih števil ima dva delitelja v množici $\mathbb{N}$, drugo pa tri. Je mnogo takšnih parov?

Boris Lavrič

MLADI FIZIKI SO TEKMOVALI

V soboto, 6. julija 1987, je bilo 6. republiško tekmovanje v znanju fizike za učence prvih letnikov srednjih šol. Tokrat je tekmovanje potekalo na Centru srednjih šol v Titovem Velenju. Tekmovanje je organiziralo Društvo matematikov, fizikov in astronomov SR Slovenije ob pomoči Centra srednjih šol, Gorenja, Termoelektrarne Šoštanj, Zavoda za šolstvo in drugih.

Ob 9. uri so začeli prihajati tekmovalci in kmalu je bil sprejemni prostor poln mladih fizikov. Da ni bilo čakanje na uradni začetek predolgo, smo jim zavrteli videofilm o proizvodnji v Gorenju in odlomke Saganovega Vesolja. Ob 10. uri je bila otvoritev tekmovanja. Tekmovalce je pozdravil predstavnik Gorenja. V izbirnem delu je 58 dvočlanskih ekip eno uro reševalo pisni test, ki je vseboval 19 vprašanj. Vsako vprašanje je imelo pet odgovorov, med katerimi je bil samo eden pravilen. Med tem, ko so tekmovalci iskali pravilne rešitve, smo se mentorji pogovorili, kako bomo tekmovanje izboljšali in popestrili. Nato smo se tekmovalci in mentorji odpeljali v termoelektrarno Šoštanj, kjer so nam gostitelji pokazali film o gradnji elektrarne. Pogovorili smo se tudi o ekoloških problemih. Najbolj zanimiv je bil ogled mogočnih strojev, ki dajejo elektriko velikemu delu Slovenije. Po kosilu so se tekmovalci vrnili v Titovo Velenje, kjer smo nadaljevali z javnim delom tekmovanja. Štiri najboljše ekipe iz izbirnega dela so tekmoval na temo Energija in njena uporaba. Tudi za gledalce je bila kopica vprašanj in nagrad. Po dokaj izenačeni borbi smo dobili najboljše.

Prvo nagrado je dosegla ekipa, v kateri sta bila Adrian ARH in Klemen ROTAR s Srednje šole za elektroniko Šentvid–Ljubljana (mentor Dane Pejčič), drugo nagrado sta dobila učenca Matej GUČEK in Aleš KOTNIK s Srednje tehniške šole maršala Tita Celje (mentor Rajko Križnik), tretjo nagrado pa Tomaž SLOKAR in Rudi KRAGELJ z Naravoslovnega srednješolskega centra Nova Gorica (mentor France Perne).

Vse štiri ekipe, ki so tekmoval v javnem delu, so dobile praktične nagrade Gorenja in Centra srednjih šol. Osem najboljših smo povabili na letno šolo fizike, mnogi so dobili naročnine na Presek, ŽIT, Mladino in KIH. Seveda ni manjkalo drobnih nagrad za bistre gledalce, ki so včasih celo prehiteli tekmovalce. Mentorje najboljših ekip smo nagradili s kompletom knjig o računalništvu. Največja nagrada za vse pa je znanje mladih fizikov in njihova volja, da osvoje vrhove fizike in drugih ved.

Miro Trampuš

LETNA ŠOLA TRŽIČ

Od 24. junija do 3. julija 1987 je v letni šoli iz naravoslovja na Osnovni šoli Heroja Bračiča v Trziču sodelovala skupina 24 učencev sedmih in osmih razredov osnovnih šol Gorenjske, najboljših s področnih tekmovanj iz fizike in kemije.

Program letne šole je bil ugotavljati onesnaženost Tržiške Bistrice, spoznavati geološke značilnosti Dolžanove soteske in širše okolice, opraviti nekaj meteoroloških in fizikalnih meritev ter se seznaniti s kulturnim in gospodarskim razvojem Trziča.

Fizikalni del programa je poleg sprotnega merjenja temperature, zračnega tlaka in relativne vlažnosti zraka obsegal še določanje gostote vode in rečnega



proda, merjenje površinske hitrosti rečnega toka, določanje profilov hitrosti, presekov rečnega korita, izračun pretoka in preverjanje kontinuitetne enačbe.

Zanimivo je bilo primerjati površinsko hitrost, izmerjeno s plavcem, in hitrost, izračunano iz zastojnega tlaka, izmerjenega nekaj centimetrov pod gladino.

Grafične prikaze presekov rečnega korita, hitrostnih profilov na izbranih delih Tržiške Bistrice, kjer so kemiki zajemali vzorce vode za analize, biologi pa zbirali vzorce mikroorganizmov, in vse druge meritve ter ugotovitve so udeleženci zbrali v biltnu, ki se začneja z besedami Isaaca Newtona:

"To, kar vemo, je kapljica, to, česar ne vemo, je morje."

Pod vodstvom osmih mentorjev — naravoslovcev je bil v letni šoli uspešno dosežen namen vključiti sposobne učence v raziskovalno delo in usmerjati v poklice naravoslovnih usmeritev.

Jože Kotnik

MAGIČNI DODEKAEDER —nagradni natečaj iz 1. številke Preseka

V letošnji prvi številki Preseka smo objavili članek Kako nisva postala milijonarja. Boris Horvat in Miro Lozej v njem opisujeta svoje dogodivščine pri izumljanju "magičnega" dodekaedra, to je prostorske igračke, narejene po vzoru Rubikove kocke. Na nagradna vprašanja na koncu članka smo dobili samo dva odgovora — ali so bile nagrade premalo mikavne? Naloge sta rešila Peter Movrin in Sašo Dolenc, oba iz Ljubljane.

Sašo hodi v osmi razred osnovne šole in je odgovoril na vsa vprašanja, le prostornine sestavnih delov magičnega dodekaedra ni izračunal. V komentarjih je bil bolj redkobeseden in njegove izpeljave so bile še nekoliko okorne, zato pa tudi originalne. Posebno domiselno se je lotil izračuna prostornine dodekaedra, ki jo je dobil s seštevanjem in odštevanjem prostornine bolj enostavnih geometrijskih teles.

Peter (verjetno že srednješolec) je temeljito in elegantno izpeljal rešitve, dodal je tri nazorne skice in ni skoparil s komentarji. Majcena zamera bi bila samo, da ni ugotovil, da je pri prostornini dodekaedra izraz pod korenem popolni kvadrat. Objavljamo povzetek njegove rešitve, skupaj s skicami. Ker pravi, da "z izpeljavo enačbe za število robov in vogalov pa ne bomo odkrili Amerike", pa tudi objavljena je že bila v Preseku letnik 8, št. 3, bomo odgovorili samo na tretje in četrto vprašanje.

Za začetek iz slike 1 nastavimo zlati rez.

Iz podobnosti trikotnikov $\triangle ABC$ in $\triangle BDC$ sledi:

$$\frac{a}{d} = \frac{d-a}{a} \Rightarrow d = \frac{a(\sqrt{5}+1)}{2}$$

Višino x trapeza $ABEF$ izračunamo s Pitagorovim izrekom:

$$x^2 + \left(\frac{d-a}{2}\right)^2 = a^2 \Rightarrow x = \frac{a}{4} \sqrt{10 + 2\sqrt{5}}$$

Izračunamo še ploščino trikotnikov $\triangle BDA$ in $\triangle DCE$: $(d-a)x = ay$, ploščino trikotnika $\triangle AFC$ pa zapišemo na dva načina: $a(x+y) = dx$. Dobimo tale razmerja:

$$\frac{x}{y} = \frac{a}{d-a} = \frac{d}{a} = \frac{x+y}{x}$$

Zdaj lahko izračunamo polmere vseh treh krogel. Označimo jih s:

- K — polmer krogle, ki se dotika robov — $\overline{OD}$ na sliki 2,
 L — polmer včrtane krogle (dotika se ploskev) — $\overline{OE}$ na sliki 2,
 M — polmer krogle, ki gre skozi vogale (očrtane) — $\overline{OB}$ na sliki 2.
 Oglejmo si sliko 2.

Najprej nastavimo tale razmerja:

$$\frac{d}{2x} = \frac{K}{x+y} \Rightarrow K = \frac{a}{4}(3 + \sqrt{5})$$

Polmer dodekaedru včrtane krogle L izračunamo tako, da na dva načina zapišemo ploščino trikotnika $\triangle AOB$:

$$(x+y)L = K^2 \Rightarrow L = \frac{a}{2} \sqrt{\frac{25 + 11\sqrt{5}}{10}}$$

Polmer dodekaedru očrtane krogle M pa je po Pitagorovem izreku:

$$M^2 = \left(\frac{a}{2}\right)^2 + K^2 \Rightarrow M = \frac{a}{4} \sqrt{6(3 + \sqrt{5})}$$

Prostornino vsakega pravilnega telesa lahko izrazimo kot vsoto prostornin n (n je število ploskev) pravilnih piramid, ki imajo za osnovo pravilni n -kotnik, za višino pa polmer pravilnemu telesu včrtane krogle. Imenujemo jih Juelove piramide. Ploščina pravilnega potkotnika p_s je: (glej sliko 1); vsota ploščin romba $ABIF$, trikotnika CEF ter trikotnika BCI :

$$p_s = ax + \frac{ax}{2} + \frac{(d-a)x}{2} \Rightarrow p_s = \frac{a^2}{4} \sqrt{5 \cdot (5 + 2\sqrt{5})}$$

Prostornina dodekaedra pa je:

$$V_{12} = 12 \cdot \frac{p_s L}{3} \Rightarrow V_{12} = \frac{a^3}{4} \sqrt{10(47 + 21\sqrt{5})} = \frac{a^3}{4} (15 + 7\sqrt{5})$$

Slika 3 je nemara sprta z zakoni projekcije, vendar iz nje lepo vidimo, kakšna sta vogalni in robni element. Vogalni je nekakšna poševna kocka, ki jo omejuje 6 enakih rombov, robni element pa lahko razpolovimo na dve enaki piramidi, ki imata za osnovno ploskev enakokraki trapez $ABCD$, za višino v_E pa enako višino kot vogalni element. Baza trapeza $AB = (d - a)$ je obenem rob malega dodekaedra v jedru, okrog katerega se vrtijo vsi gibljivi elementi. Zato je višina gibljive rezine, torej naših elementov, razlika med višinama Juelovih piramid velikega in malega dodekaedra. Pri tem je ξ sorazmernostni faktor.

$$v_E = a \cdot \xi - (d - a) \cdot \xi = \xi (2a - d)$$

$$v_E = \frac{a(3 - \sqrt{5})}{2} \cdot \frac{1}{2} \sqrt{\frac{25 + 11\sqrt{5}}{10}} \Rightarrow v_E = \frac{a}{20} \sqrt{10(5 + \sqrt{5})}$$

Prostornina robnega elementa je torej:

$$V_{rob} = 2 \cdot \frac{3(d - a) \cdot a \cdot \sqrt{10(5 + \sqrt{5})}}{4 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 20} \Rightarrow V_{rob} = \frac{a^3}{16}$$

Prostornina vogalnega elementa:

$$V_{vog} = \frac{a \cdot x \cdot a \cdot \sqrt{10(5 + \sqrt{5})}}{2 \cdot 2 \cdot 20}$$

Tokrat si lahko zoprn racionaliziranje prihranimo. Formula je enaka kot zgornja, le da namesto $(d - a)$ nastopa a . Razmerje obeh prostornin je zopet zlati rez, zato mirno zapišemo:

$$V_{vog} = \frac{a^3}{16} \cdot \frac{\sqrt{5} + 1}{2}$$

In nagrade? Peter dobi magični dodekaeder, Sašo knjižno nagrado iz Presekova knjižnice. Oba reševalca — nagrajenca vabimo, da svoji nagradi prevzameta pri Komisiji za tisk DMFA — SRS, Jadranska c. 19, soba 316.

Boris Horvat

MATEMATIČNI KROŽEK

1. KOCKA, TETRAEDER IN KROGLA

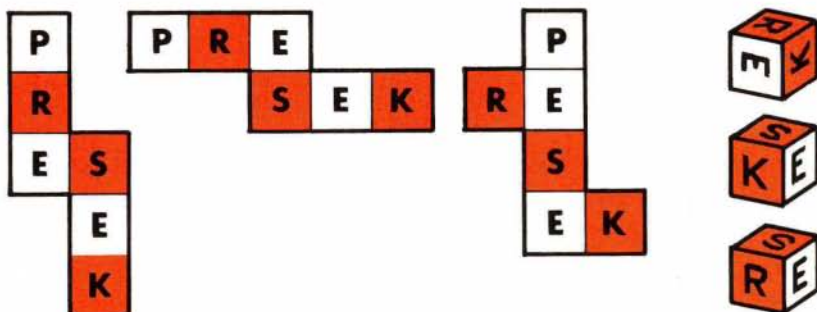
Je res, da ima krogla, ki se dotika vseh robov kocke, dvakrat večjo površino kot včrtana krogla, očrtana pa trikrat večjo? Podobno vprašanje za pravilni tetraeder: V kakšnem razmerju so površine včrtane krogle, tiste, ki se dotika vseh robov tetraedra, in očrtane krogle?

2. PROJEKCIJA IN PRESEK

Kocko z robom dolžine a projiciramo vzdolž njene glavne diagonale na ravnino P , ki je nanjo pravokotna. Kakšne oblike je projekcija in koliko meri njena ploščina? Kakšen pa je presek te kocke z ravnino, ki gre skozi središče kocke in je vzporedna s P , in koliko meri njegova ploščina?

ZA MARSIKOGA

1. S prepogibanjem (po označenih robovih) smo iz mrež sestavili tri kocke. Je katera od njih na desni strani slike?



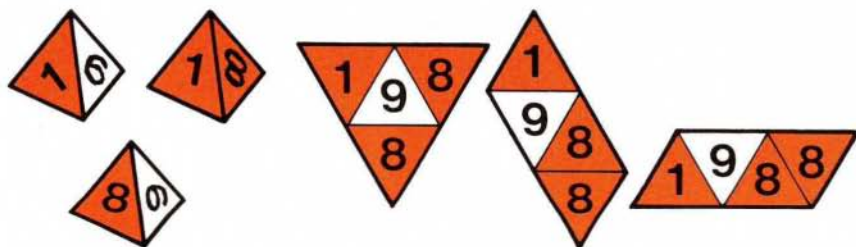
2. V prazne kvadratke postavi znake +, −, ·, :, tako da bo veljalo

$$(1 \square 9 \square 8 \square 8 \square 1 \square 9 \square 8) \cdot (8 \square 1 \square 9 \square 8 \square 8) = 1988$$

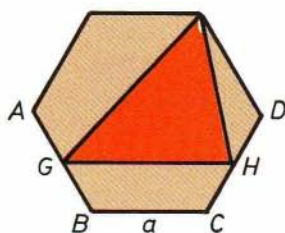
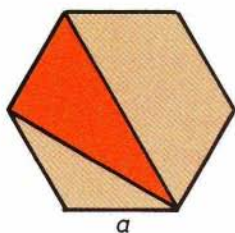
3. V označene kvadratke vnesi cifre števila 1988, tako da bo veljalo

$$(\square + \square + \square + \square) \cdot (\square \cdot \square - \square) = 1988$$

4. Na desni je razgrnjen eden od levih pravilnih tetraedrov. Kateri?



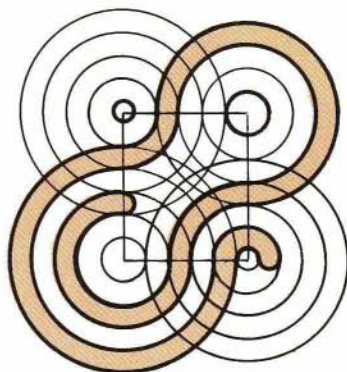
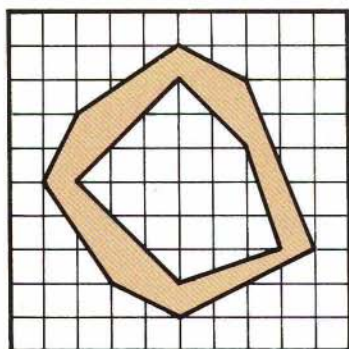
5. Na sliki sta dva pravilna šestkotnika s stranico a . Določi ploščini označenih trikotnikov.



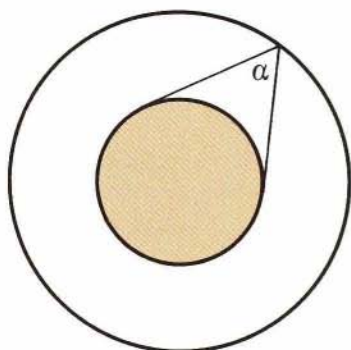
$$|AG| = |GB|$$

$$|CH| = |HD|$$

6. Kolikšen del kvadrata na sliki zavzema oglati kolobar v njem? Določi ploščino kače na desni sliki, če so vsi kolobarji široki 1, manjši označeni krog ima premer 1, večji pa polmer 1.

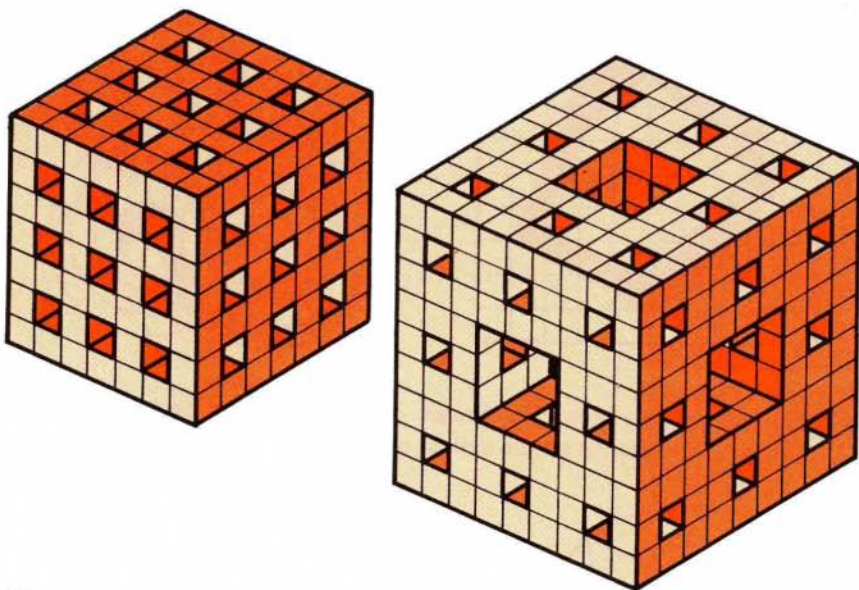


7. Sredi okroglega ribnika je okrogel otok, ki zavzema četrtnino njegove površine. Pod kakšnim kotom vidimo otok z obale ribnika?



2	5	6	1	6	6	0	5
2	5	6	3	3	6	4	1
6	6	2	3	2	0	4	3
6	2	2	0	0	4	5	0
3	2	1	0	1	1	1	3
4	1	5	4	1	5	4	2
4	4	0	3	5	5	3	0

8. V pravokotnik 7×8 smo postavili celotno kolekcijo domin (28), tako da vsaka pokrije točno dva kvadratka. Potem smo jih odstranili in označili število pik, ki jih je imela polovička domine na tistem polju. Bi znali zdaj postaviti domine spet na prvotna mesta? Glej sliko na strani 343.
9. Za katera cela števila a je $a^2 + a + 1$ večkratnik števila 1988?
10. a) Izračunaj ploščino ravninskega lika, ki vsebuje vse točke, katerih oddaljenost od roba kvadrata s stranico a ne presega $a/4$.
b) Kolikšna je prostornina telesa, ki vsebuje vse točke, oddaljene od površja kocke z robom a največ $a/4$?
11. Koliko manjših kockic sestavlja simetrični telesi na sliki? Luknje tečejo skozi večji kocki.



12.

Prijatelji se vračajo iz gozda, kjer so nabirali borovnice. Ančka in Andraž sta jih skupaj nabrala prav toliko kot Borka in Bojan (skupaj). Borka jih ima največ. Sta dekleti nabrali več borovnic kot fanta?

13.

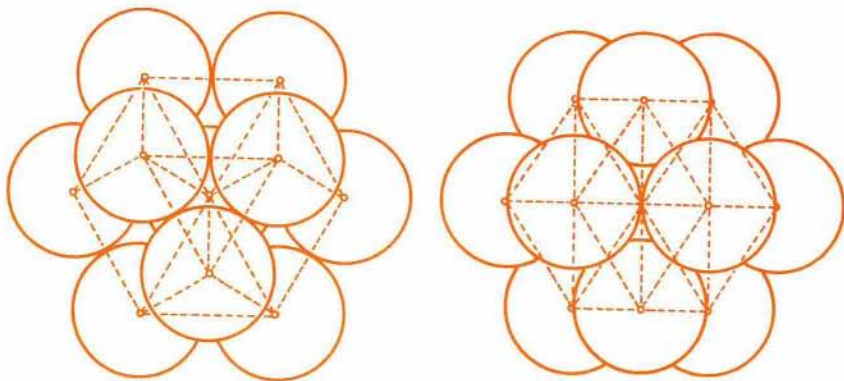
Alenka bo žez tri leta toliko stara, kot je bil Matjaž pred tremi leti, on pa bo imel čez tri leta dvakrat več let, kot jih je imela Alenka pred tremi leti. Koliko sta stara?

TEŽAVE S TRINAJSTO KROGLO

Ste že kdaj polagali kovance na ravno podlago — tesno drug ob drugega? Tudi če jih niste, boste v hipu znali odgovoriti na naslednje vprašanje: Koliko enakih krogov lahko položimo brez prekrivanja na ravnini k danemu enako velikemu krogu? Največ šest, seveda. Toda, recimo, da vam ne verjamem. Bi mi znali preprosto (ne s kovanci) dokazati, da imate prav?

Pospravimo kovance in namesto njih vzemimo med seboj enake kroglice, na primer frnikole. Najbrž še niste poskušali k eni od njih priložiti v prostoru čimveč drugih — saj tudi ni tako preprosto izvedljivo. Pa vendar bi šlo, denimo, s pomočjo kozarca kroglaste oblike s trikrat večjim premerom od kroglic — kot kaže slika na naslovni strani. Odgovora na podobno vprašanje, kot smo ga postavili za kroge, pa ne moremo kar iz rokava stresti. Problema se lotimo takole:

Okrog osrednje kroglice pričvrstimo na isto ravnino še šest krogel tako, da se je vse dotikajo. Na to osnovo postavimo še tri kroglice — vsaka naj sede v vdolbino, ki jo tvorijo tri spodnje sosede. Ni težko preveriti (na primer s pomočjo slike), da se vse tri dotikajo osrednje spodnje kroglice in tudi med seboj. Seveda bi enako lahko storili še z druge strani (od spodaj) in tako dobili kepo



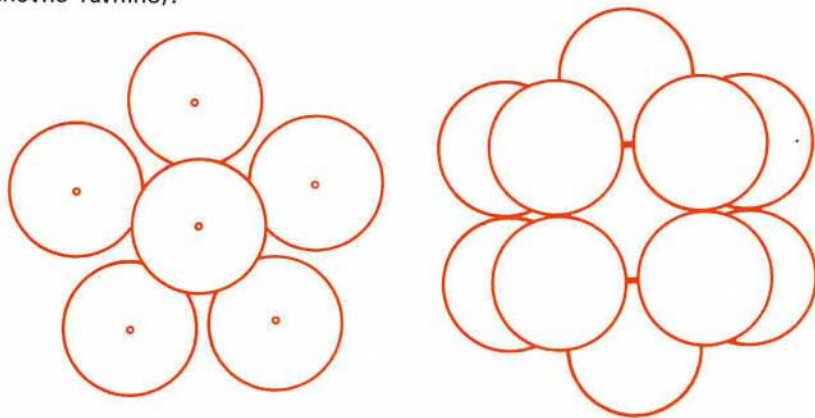
trinajstih enakih krogel, v kateri se jih dvanajst dotika osrednje. S tem pa smo naš problem že rešili, bo morda kdo pomislil. Tako lepo smo postavili dvanajst krogel okrog ene, da jih več zagotovo ne bi mogli. Toda le zakaj? Še nekoliko si razjasnimo problem.

Postavimo pet krogel na ravnino v venček, tako da bodo njihova središča

tvorila pravilni petkotnik. Nanje v sredino položimo enako kroglo, nato pa venček enakomerno razmaknimo le toliko, da bo najnižja točka zgornje krogle v isti ravnini, kot so središča ostalih.

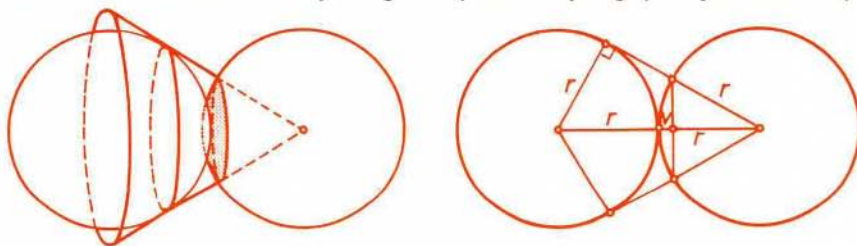
Kaj pa, če je bila zgornja krogla že prenizko? Tudi o tem bi se morali prepričati, a naj bo le izziv nejevernemu bralcu. Razlago najdete tudi na strani 361.

Ko smo to storili, na prvi venec krogel postavimo še enega – prav takega, nato pa še v sredino na vrh kroglico in pod nastalo zgradbo še eno (pol je bo pod osnovno ravnino).



Na sliki vidimo, da se spet dvanajst krogel dotika srednje, vendar je tokrat ostalo še nekaj prostora (vsak venček je malce razmaknjen). Če bi krogle zgornjega venca nekoliko spustili med tiste v spodnjem, bi ob vrhu ostalo še več prostora. Zdaj ni več tako "očitno", da je iskano število res dvanajst. Morda pa je trinajst ali celo več. Pokažimo, da ne more presegati 14.

Ogrnimo katerokoli od priloženih krogel s plaščem stožca, ki se je dotika in ima vrh v središču osrednje krogle. Ta plašč od njenega površja odreže kapi-



co, katere površino bomo zdaj izračunali. Poglejmo na sliko in izrazimo višino v kapice s polmerom r krogle. Kot ob vrhu osnega preseka stožca meri 60° , za-

to velja: $v = r(1 - \sqrt{3}/2)$. Od tod dobimo površino kapice:

$$P = 2 \pi r v = (2 - \sqrt{3}) \pi r^2$$

Kapici, ki ju določata dve različni priloženi krogli, se ne prekrivata, petnajst kapic skupaj pa bi tedaj pokrivalo več kot $15(2 - \sqrt{3}) \pi r^2 > 4 \pi r^2$. To pa ne gre, saj meri površina krogle $4 \pi r^2$. Trditev smo s tem že dokazali.

Že davno je bilo znano, da tudi štirinajstih krogel ni mogoče priložiti k enako veliki. Vendar dokaz ni več tako preprost, nekaj znanja o geometriji na površju krogle (sferna geometrija) pa že zadošča za kratek dokaz te trditve. Ostane le še vprašanje, če gre s trinajstimi krogli.

To pa je že znameniti problem trinajstih krogel. V knjigi *Škljarskij, Čencov, Jaglom: Geometričeskie ocenki i zadači iz kombinatornoj geometrii* (Nauka, 1974) najdemo njegovo zanimivo zgodovino. Razkrijmo vsaj nekaj njenih potez še našemu bralcu.

Težavnost problema opisuje že astronom J. Kepler, ki leta 1611 v svojem prispevku o snežinki (De nive sexangula) omenja da je ta problem star vsaj nekaj sto let, a kljub temu še ni rešen. Leta 1694 se je razvnela živahna polemika v zvezi z njim. Znani angleški naravoslovec tistega časa David Gregory je trdil, da lahko k dani krogli dodamo trinajst drugih, slavni Isaac Newton pa je menil, da to ni mogoče. Toda nihče od njiju ni znal z dokazom podpreti svoje domneve. Prva znana rešitev problema je šele iz leta 1874, avtorstvo pa pripada nemškemu matematiku Rudolfu Hoppeju. Ta je potrdil Newtonovo domnevo z dokazom, ki pa je težak in zapleten. Omenjena rešitev je bila dolga leta pozabljena, zato se je v petdesetih letih tega stoletja pojavil nov dokaz (na Nizozemskem), ki je bil kmalu še poenostavljen. Toda celo najenostavnejši znani dokaz je še vedno precej zapleten. Prav gotovo preveč, da bi ga ujeli v Presekov okvir. Zato s tem sklenimo zgodovino znamenitega problema, vztrajnemu bralcu pa postavimo še naslednje drobno vprašanje:

Ali lahko v kocko z robom $a = 3$ zapremo dve kroglici polmera $r = 1$? Odgovor najdete na strani 361.

Boris Lavrič

ZODIAK – rešitev naloge s strani 335

Leto 1988 je prestopno, Andreja pa je morala biti rojena med novim letom in prvim marcem (1973), saj bi v nasprotnem primeru praznovala šestnajsti rojstni dan v ponedeljek, ne pa v torek. Februar nima 30 dni, torej je Andreja "vodnar".

PLOŠČINA NAPOLEONOVEGA TRIKOTNIKA

Preden si ogledamo, kateri trikotnik nosi bogvezakaj to veleslavno ime, naj spomnimo bralce, da je o njem v drugi številki predlanskega Preseka pisal Damjan Kobal. Razkril je nekaj njegovih geometrijskih skrivnosti, mi pa ga bomo tudi izmerili.

Na zunanjo stran danega trikotnika ABC načrtajmo enakostranične trikotnike A_1CB , B_1AC in C_1BA . Njihova središča P_1 , R_1 in S_1 tvorijo oglišča trikotnika, ki je enakostraničen in ga imenujemo Napoleonov trikotnik.

Se da oceniti njegovo velikost, če poznamo le ploščino trikotnika ABC ? Pokazali bomo, da nima nikdar manjše ploščine kot prvotni trikotnik. Pomagali si bomo z računom. Dolžine stranic trikotnika ABC zaznamujmo na običajen način z a , b , c in določimo dolžino stranice P_1R_1 . V ta namen se ozrimo na sliko 1 in primerjajmo trikotnika A_1CA in P_1CR_1 . V prvem stranica A_1C dolžine a oklepa kot $\sphericalangle BCA + 60^\circ$ s stranico AC dolžine b , v drugem pa velja:

$$|P_1C| = a\sqrt{3}/3, \quad |R_1C| = b\sqrt{3}/3 \text{ in}$$

$$\sphericalangle P_1CR_1 = \sphericalangle BCA + 30^\circ + 30^\circ = \sphericalangle BCA + 60^\circ$$

Obravnavana trikotnika sta potem podobna, zato velja enakost $|P_1R_1| = |AA_1|/\sqrt{3}$. Torej je dovolj izračunati dolžino daljice AA_1 . Poglejmo na sliko 2, kjer smo z D označili sredino daljice BC , z E nožišče višine v_a , točko F pa smo izbrali na premici A_1D tako, da velja $\sphericalangle AFA_1 = 90^\circ$. Predpostavimo, da sta kota ABC in BCA ostra in z uporabo Pitagorovega izreka dobimo naslednje zveze:

$$|EC| = \sqrt{b^2 - v_a^2}$$

$$|DE| = |DC| - |EC| = a/2 - \sqrt{b^2 - v_a^2}$$

$$|AA_1|^2 = |AF|^2 + |A_1F|^2 = |DE|^2 + (|A_1D| + |DF|)^2 =$$

$$= (a/2 - \sqrt{b^2 - v_a^2})^2 + (a\sqrt{3}/2 + v_a)^2 =$$

$$= a^2 + b^2 - a\sqrt{b^2 - v_a^2} + \sqrt{3}av_a$$

Upoštevajmo, da ploščina p trikotnika ABC meri $p = av_a/2$ in imamo:

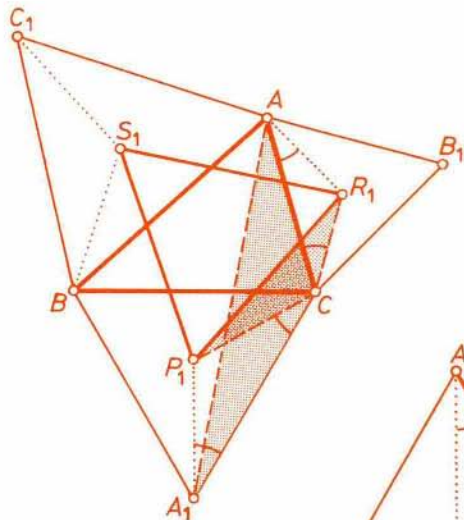
$$|AA_1|^2 = a^2 + b^2 - a\sqrt{b^2 - v_a^2} + 2\sqrt{3}p$$

Če zamenjamo med seboj vlogi stranic b in c , dobimo še zvezo:

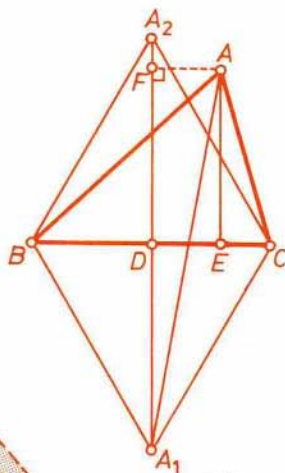
$$|AA_1|^2 = a^2 + c^2 - a\sqrt{c^2 - v_a^2} + 2\sqrt{3}p$$

Seštejmo obe, uporabimo enakost

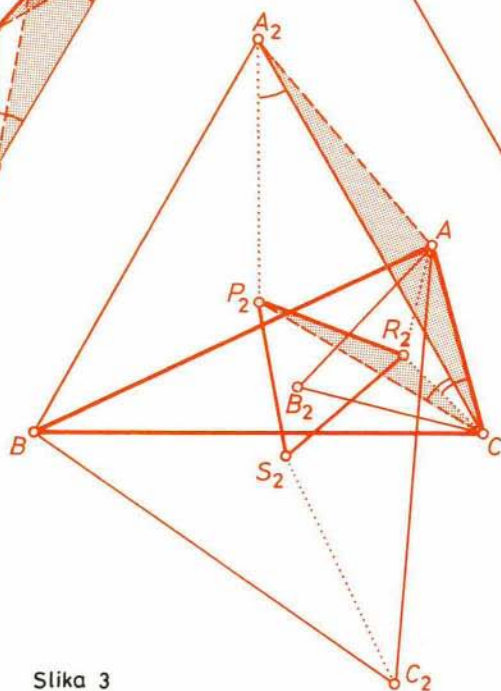
$$\sqrt{b^2 - v_a^2} + \sqrt{c^2 - v_a^2} = |EC| + |BE| = a$$



Slika 1



Slika 2



Slika 3

in pred nami je relacija:

$$2 |AA_1|^2 = a^2 + b^2 + c^2 + 4\sqrt{3}p$$

Tudi v primeru, ko eden od kotov ABC in BCA ni oster, dobimo isto – račun pa prepustimo bralcu za vajo. Od tod dobimo:

$$|P_1R_1|^2 = |AA_1|^2/3 = (a^2 + b^2 + c^2)/6 + (2\sqrt{3}/3)p$$

Pri medsebojni zamenjavi stranic se izraz na desni ne spremeni, torej je trikotnik $P_1R_1S_1$ enakostraničen. Njegova ploščina meri

$$p_1 = |P_1R_1|^2 \sqrt{3}/4 = (\sqrt{3}/24)(a^2 + b^2 + c^2) + p/2$$

Ali res drži neenakost $p_1 \geq p$, ki smo jo obetali dokazati? Z drugimi besedami: ali za trikotnik ABC drži ocena

$$a^2 + b^2 + c^2 \geq 4\sqrt{3}p \quad (1)$$

Pot k dokazu se nam je ponujala že prej, zato stopimo nekaj korakov nazaj. Se nismo znašli na razpotju že ob postavitvi Napoleonovega trikotnika? Zakaj pa ne bi načrtali enakostraničnih trikotnikov (z osnovnicami na stranicah trikotnika ABC) navznoter namesto navzven? Storimo to zdaj, na novo dobljena oglišča pa označimo z A_2 , B_2 in C_2 . Trikotniki A_2BC , B_2CA in C_2AB so torej enakostranični, njihova središča pa naj bodo zaporedoma P_2 , R_2 in S_2 (glej sliko 3). Izračunajmo dolžino stranice P_2R_2 . Krenimo po podobni poti kot prej, zato jo le skopo opišimo. Trikotnika A_2CA in P_2CR_2 sta podobna, tudi enakost $|P_2R_2| = |AA_2| \sqrt{3}/3$ velja, dolžino $|AA_2|$ pa spet lahko določimo s pomočjo Pitagorovega izreka in slike 2. Dobimo enakost

$$2 |AA_2|^2 = a^2 + b^2 + c^2 - 4\sqrt{3}p$$

ki pove, da velja ocena (1) in nam da zvezo:

$$|P_2R_2|^2 = (a^2 + b^2 + c^2)/6 - (2\sqrt{3}/3)p$$

Le—ta dokazuje, da je trikotnik $P_2R_2S_2$ enakostraničen (recimo mu kar notranji Napoleonov trikotnik, prvotnega pa opremimo še z besedico zunanji), poleg tega pa nam da njegovo ploščino:

$$p_2 = (\sqrt{3}/24)(a^2 + b^2 + c^2) - p/2$$

Za hip se spomnimo še na ploščino p_1 in našli bomo naslednjo lepo lastnost. Ploščini p_1 , p_2 zunanjega in notranjega Napoleonovega trikotnika se razlikujeta za ploščino p prvotnega trikotnika ABC .

Naloge, ki smo si jih postavili,
smo rešili, zvedavega bralca pa čaka
še nekaj orehov:

1. Kdaj v oceni (1) velja enakost?
2. Vsota plosčin zunanega in notranjega Napoleonovega trikotnika, ki pripada pravokotnemu trikotniku ABC , znaša $6\sqrt{3}$. Koliko meri hipotenuza c ?
3. Naj bo ABC enakokrak trikotnik z osnovnico BC . Ploščini njegovega notranjega oziroma zunanega Napoleonovega trikotnika merita $4\sqrt{3} - 6$ oziroma $4\sqrt{3} + 6$. Poišči stranice trikotnika ABC .

Za konec pa še

DOMAČA NALOGA ★

Ko je bil Napoleon mlad je bil zelo suh
in topničarski častnik
potlej je postal cesar
dobil je trebuh in veliko dežel
in ko je umrl je še imel
trebuh
a ostalo ga je bolj malo.

Jacques Prévert
(prevedel Aleš Berger)

Boris Lavrič

★ Pesem smo vzeli iz knjižice *Barbara*
(izbor Prévertove poezije), ki je izšla v mladinski zbirki *Odisej*.



**NAPOLEON
BONAPARTE**
(1769 – 1821)

Ilustracija: Vladimir Skozni

PTOLEMEJEV IZREK

Že v Preseku 1 (1987/88) smo spoznali Ptolemejev izrek: V tetivnem četverokotniku je vsota produktov dolžin nasprotnih stranic enaka produktu dolžin diagonal, torej

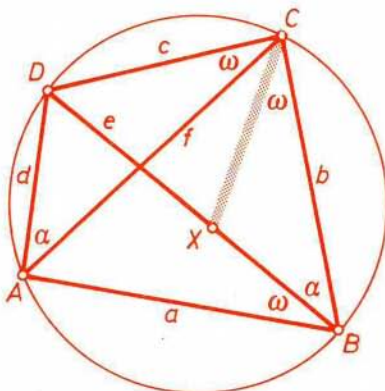
$$ac + bd = ef \quad (1)$$

če so stranice četverokotnika a, b, c in d ter diagonali e in f .

Tedaj smo spoznali, da lastnost (1) že določa tetivni četverokotnik. Tokrat pa si bomo ogledali elementarni dokaz Ptolemejevega izreka, ki ga najdemo v knjigi Franceta Križaniča Nihalo, prostor in delci. Problem je rešen, če v prvi potezi potegnemo pravo črto. Z daljico CX (skica 1) sestavimo trikotnik XBC , ki ima ob vrhu C isti kot kot trikotnik DAC . Kot ob B v prvem trikotniku je enak kotu ob A v drugem, saj sta to obodna kota nad istim lokom. Trikotnika sta podobna, zato velja: $|BC| : |AC| = |BX| : |AD|$. Tudi trikotnika ABC in DXC sta podobna. Kota ob C sta očitno enaka, kot ob X v trikotniku DXC pa je zunanji kot trikotnika XBC in je enak vsoti $\alpha + \omega$. Torej lahko zapišemo: $|DC| : |AC| = |DX| : |AB|$. Odtod dobimo: $|AD| \cdot |BC| = |AC| \cdot |BX|$ in $|AB| \cdot |DC| = |AC| \cdot |DX|$. Seštejemo in upoštevamo, da je $|BX| + |XD| = |BD|$. Dobimo

$$|AB| \cdot |DC| + |AD| \cdot |BC| = |AC| \cdot |BD|$$

in Ptolemejev izrek je dokazan.



Slika 1

France Križanič v omenjeni knjigi pravkar dokazani izrek takoj uporabi. Zasledujemo ga, saj nam bo gotovo pokazal kaj zanimivega.

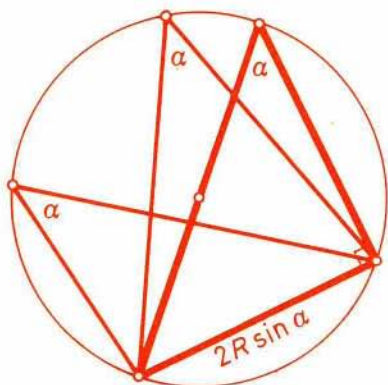
Znano je, da je dolžina tetive d odvisna le od obodnega kota α in polmera r (slika 2):

$$d = 2r \sin \alpha$$

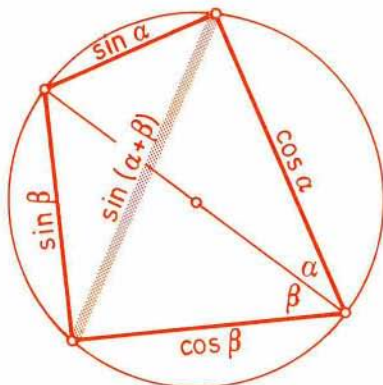
Narišimo sedaj krožnico s premerom 1 in ji včrtajmo četverkotnik, ki ima premer za diagonalo (slika 3). Diagonala razdeli kot ob izbranem vrhu v dva kota α in β . Z njima izrazimo vse štiri stranice. Druga diagonala je $\sin(\alpha + \beta)$. Po Ptolemejevem izreku velja:

$$\sin(\alpha + \beta) = \sin \alpha \cos \beta + \sin \beta \cos \alpha$$

To pa je dobro znani adicijski izrek za funkcijo sinus.



Slika 2



Slika 3

Primer 1. Dokaži, da je dolžina diagonale v pravilnem petkotniku s stranico a enaka $\frac{a}{2}(1 + \sqrt{5})$.

Rešitev: Štiri oglišča petkotnika tvorijo enakokraki trapez. Dolžina diagonale v trapezu naj bo x , dolžina kraka je a , osnovnici pa sta dolgi x in a . Če uporabimo Ptolemejev izrek za ta trapez, dobimo:

$$x^2 = a^2 + ax$$

Izraz preoblikujemo v $x^2 - ax + \frac{a^2}{4} = \frac{5a^2}{4}$, oziroma $(x - \frac{a}{2})^2 = (\frac{a\sqrt{5}}{2})^2$. Po korenjenju je za nas zanimiva samo rešitev $x = \frac{a}{2}(1 + \sqrt{5})$.

Primer 2. Nad hipotenuzo BC pravokotnega trikotnika ABC nariši kvadrat. Naj bo vsota dolžin obeh katet enaka m . Določi razdaljo med središčem kvadrata O in ogliščem A .

Rešitev: Četverokotnik $ABOC$ je tetivni. Ptolemejev izrek nam pove, da velja:

$$|AO| \cdot |BC| = |AC| \cdot |BO| + |AB| \cdot |OC| \quad (2)$$

Označimo $|AB| = n$ in $|BO| = k$. Potem je $|AC| = m - n$, $|OC| = k$ in $|BC| = k\sqrt{2}$. Iz enakosti (2) dobimo $|AO| \cdot k\sqrt{2} = (m - n)k + nk = mk$. Delimo s $k\sqrt{2}$ in rešitev je $|AO| = \frac{m\sqrt{2}}{2}$.

Naloge

1. Dokaži Pitagorov izrek s pomočjo Ptolemejevega izreka.
2. Enakostraničnemu trikotniku ABC očrtamo krog. Točko M izberemo na tistem loku BC , ki ne vsebuje točke A . Pokaži, da potem velja $|BM| + |CM| = |AM|$.
3. V ostrokotnem trikotniku je vsota razdalj od središča očrtanega kroga do stranic enaka vsoti polmera vrčtanega in polmera očrtanega kroga. Pokaži!
4. (Naloga je s tekmovanja na Poljskem leta 1963.) Krožnica k je očrtana pravnemu petkotniku $ABCDE$. Na krajšem loku AE izberemo točko M . Pokaži, da potem velja: $MA + MC + ME = MB + MD$. (Navodilo: Uporabi Ptolemejev izrek za četverokotnike $MABC$, $MACE$, $MBCD$ in $MCDE$.)

Tomaž Košir, primera in naloge prispeval Dragoljub M. Milošević

MATEMATIČNI KROŽEK – Rešitev s strani 341

1. KOCKA, TETRAEDER IN KROGLA

Trditev drži. Premeri naštetih krogel (razvrščenih po velikosti) zaporedoma merijo toliko kot kockina stranica, diagonala njene stranske ploskve in glavna diagonala. Le-te pa so v razmerju $1 : \sqrt{2} : \sqrt{3}$.

Pri drugi nalogi izračunajmo le polmer vmesne krogle. Naj ima stranica tetraedra $ABCD$ dolžino a , točki E in F pa naj (v istem zaporedju) razpolavljata BC in AD . Središče krogle razpolavlja daljico EF , ki je višina enakokrakega trikotnika AED s podatki $|AD| = a$, $|AE| = |ED| = a\sqrt{3}/2$. Od tod s Pitagorovim izrekom dobimo dolžino polmera $a\sqrt{2}/4$. Odgovor: Iskano razmerje je $1 : 3 : 9$.

2. PROJEKCIJA IN PRESEK

Projekcija je pravilni šestkotnik s ploščino $a^2\sqrt{3}$, presek pa pravilni šestkotnik s ploščino $(3/4)a^2\sqrt{3}$.

Boris Lavrič

CAUCHYJEVA NEENAKOST

V Preseku 14 (1986/87) št. 1 smo spoznali *Jensenovo neenakost*. Tokrat bomo obravnavali še eno tudi pomembno neenakost: Cauchy–jevo neenakost (izg. Koši). Ime je dobila po francoskem matematiku *Augustin Louisu Cauchyju* (1789 – 1857).

Neenakost se glasi:

Za realna števila $a_1, a_2, \dots, a_n$ in $b_1, b_2, \dots, b_n$ ($n \in \mathbb{N}$) velja:

$$(a_1^2 + a_2^2 + \dots + a_n^2)(b_1^2 + b_2^2 + \dots + b_n^2) \geq (a_1b_1 + a_2b_2 + \dots + a_nb_n)^2$$

pri čemer velja znak enakosti samo v primeru, ko je $a_1 = t.b_1, a_2 = t.b_2, \dots, a_n = t.b_n$ za neko realno število t ali pa je $b_i = 0$ ($i = 1, \dots, n$).

Neenakost bomo dokazali na dva načina:

1. Hitro se prepričamo o veljavnosti *Lagrangeove enakosti* za realna števila a_i, b_i ($i = 1, 2, \dots, n$):

$$\begin{aligned} & (a_1^2 + a_2^2 + \dots + a_n^2)(b_1^2 + b_2^2 + \dots + b_n^2) = \\ & = (a_1b_1 + a_2b_2 + \dots + a_nb_n)^2 + \sum_{\substack{i,j=1 \\ i < j}}^n (a_ib_j - a_jb_i)^2 \end{aligned}$$

saj se po kvadriranju in množenju na desni strani dvojni produkti $2.a_ib_jb_ib_j$ ($i, j = 1, 2, \dots, n$ in $i < j$) uničijo, ostane samo vsota kvadratov $(a_ib_j - a_jb_i)^2$ ($i, j = 1, 2, \dots, n$), kar pa je enako levi strani. Ker je vsota na desni strani enakosti nenegativna, je veljavnost Cauchyjeve neenakosti očitna. Enakost velja natanko tedaj, ko je $a_ib_j = a_jb_i$. Sedaj ločimo dva primera:

a) Če niso vsi b_i enaki nič, lahko predpostavimo, da obstaja tako naravno število i , da je $b_i \neq 0$. Tedaj je za vsa naravna števila j med 1 in n res $a_j = a_ib_j/b_i$. Če pišemo $t = a_i/b_i$, potem je $a_j = t.b_j$.

b) Vsi b_i so enaki nič za vsa naravna števila i med 1 in n . V tem primeru tudi velja enakost.

Tako je prvi dokaz neenakosti končan.

2. Izhajamo iz očitne neenakosti, ki velja za poljubna realna števila $a_1, a_2, \dots, a_n$ in $b_1, b_2, \dots, b_n$ ($n \in \mathbb{N}$) ter t :

$$(a_1 - b_1t)^2 + (a_2 - b_2t)^2 + \dots + (a_n - b_nt)^2 \geq 0$$

saj je vsota kvadratov realnih števil vedno nenegativna. Po kvadriranju in urejanju členov po potencah števila t dobimo:

$$(a_1^2 + a_2^2 + \dots + a_n^2) - 2.(a_1b_1 + a_2b_2 + \dots + a_nb_n).t + (b_1^2 + b_2^2 + \dots + b_n^2)t^2 \geq 0$$

Na levi strani neenakosti smo dobili kvadratno funkcijo. Ker je pri poljubnem realnem številu t nenegativna, je njena diskriminanta nepozitivna:

$$4.(a_1 b_1 + a_2 b_2 + \dots + a_n b_n)^2 - 4.(a_1^2 + a_2^2 + \dots + a_n^2)(b_1^2 + b_2^2 + \dots + b_n^2) \leq 0$$

Odtod takoj sledi Cauchyjeva neenakost:

$$(a_1 b_1 + a_2 b_2 + \dots + a_n b_n)^2 \leq (a_1^2 + a_2^2 + \dots + a_n^2)(b_1^2 + b_2^2 + \dots + b_n^2)$$

Enakost velja natanko tedaj, ko je diskriminanta enaka nič, oziroma natanko tedaj, ko obstaja realno število t , da velja $a_i - b_i t = 0$ oziroma $a_i = t b_i$ za vsako naravno število i med 1 in n .

Oglejmo si še dve posledici Cauchyjeve neenakosti:

1. V neenakost postavimo $b_1 = b_2 = \dots = b_n = 1$ in naj bo $a_i \geq 0$ ($i = 1, 2, \dots, n$). Tako dobimo:

$$(a_1^2 + a_2^2 + \dots + a_n^2) \cdot n \geq (a_1 + a_2 + \dots + a_n)^2$$

od koder po korenjenju in deljenju z n sledi:

$$\sqrt{(a_1^2 + a_2^2 + \dots + a_n^2)/n} \geq (a_1 + a_2 + \dots + a_n)/n$$

V izrazu na desni strani prepoznamo *aritmetično sredino* nenegativnih realnih števil $a_1, a_2, \dots, a_n$, na levi pa *kvadratno sredino* istih števil. Ugotovili smo, da kvadratna sredina ni manjša od aritmetične sredine poljubnih nenegativnih števil. Enakost velja le v primeru $a_1 = a_2 = \dots = a_n$.

2. Sedaj pa v Cauchyjevo neenakost postavimo $a_i = \sqrt{x_i}$, $b_i = 1/\sqrt{x_i}$, kjer so x_i ($i = 1, 2, \dots, n$) poljubna pozitivna realna števila. Tako dobimo po urejanju še eno pomembno neenakost:

$$(x_1 + x_2 + \dots + x_n)/n \geq n/(1/x_1 + 1/x_2 + \dots + 1/x_n)$$

Izraz na desni strani neenakosti se imenuje *harmonična sredina* pozitivnih realnih števil $x_1, x_2, \dots, x_n$. Aritmetična sredina pozitivnih realnih števil je večja ali kvečjemu enaka harmonični sredini. Za konec rešimo še eno nalogo, ki naj bo primer uporabe Cauchyjeve neenakosti.

Če za poljubna pozitivna realna števila x_i, y_i ($i = 1, 2, \dots, n$) velja $x_1 + x_2 + \dots + x_n = 1$, $y_1 + y_2 + \dots + y_n = 1$, potem je resnična tudi neenakost:

$$x_1^2/y_1 + x_2^2/y_2 + \dots + x_n^2/y_n \geq 1$$

Rešitev: Če v Cauchyjevi neenakosti napravimo zamenjave $a_i = x_i/\sqrt{y_i}$ in $b_i = \sqrt{y_i}$ ($i = 1, 2, \dots, n$) dobimo neenakost:

$$(x_1^2/y_1 + x_2^2/y_2 + \dots + x_n^2/y_n)(y_1 + y_2 + \dots + y_n) \geq (x_1 + x_2 + \dots + x_n)^2$$

Po upoštevanju pogojev naloge takoj sledi:

$$x_1^2/y_1 + x_2^2/y_2 + \dots + x_n^2/y_n \geq 1$$

kar je bilo treba dokazati. Hitro se prepričamo, da velja enakost le v primeru $x_i = y_i$ za i med 1 in n .

Za vajo priporočamo bralcu, da poskusi rešiti naslednje naloge:

1. Reši gornjo nalogo tudi brez uporabe Cauchyjeve neenakosti in ugotovi, kdaj velja enačaja. (Nasvet: najprej dokaži neenakost $x_i^2/y_i \geq 2x_i - y_i$ ($i = 1, \dots, n$).)
2. V trikotniku ABC s stranicami a , b in c poišči točko P , da bo izraz $a \cdot x^2 + b \cdot y^2 + c \cdot z^2$ imel najmanjšo vrednost, če so x , y in z zaporedoma oddaljenosti točke P od stranic a , b in c .
3. Dokaži *trikotniško neenakost*:

$$\begin{aligned} \sqrt{(x_1^2 + x_2^2 + \dots + x_n^2)} + \sqrt{(y_1^2 + y_2^2 + \dots + y_n^2)} &\geq \\ &\geq \sqrt{((x_1 + y_1)^2 + \dots + (x_n + y_n)^2)} \end{aligned}$$

Pri tem so x_i in y_i ($i = 1, 2, \dots, n$) poljubna realna števila. Kdaj velja enakost?

4. Kakšen je geometrijski pomen trikotniške neenakosti za $n = 2$ in $n = 3$, če so x_i , y_i in $(x_i + y_i)$ ($i = 1, 2, \dots, n$) koordinate točk v ravnini oziroma prostoru? Ali sedaj veš, zakaj se neenakost imenuje trikotniška?
5. Dokaži, da velja neenakost:

$$c\sqrt{2} \geq a + b$$

kjer je c hipotenuza, a in b pa kateti pravokotnega trikotnika. Za katere trikotnike velja enakost?

Roman Drnovšek

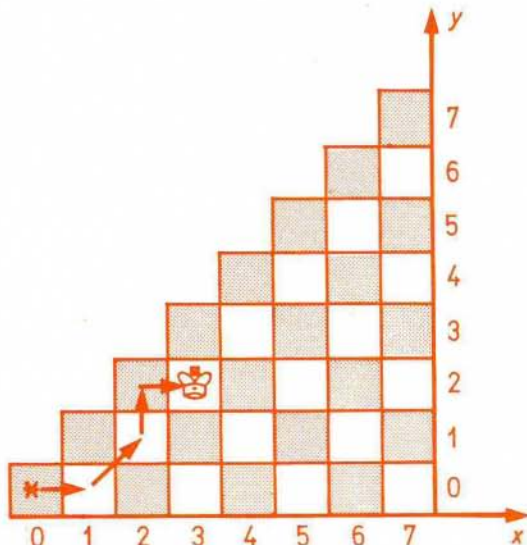
PARI SOSEDOV – REŠITEV S STR. 335

Eno od dveh števil v paru je praštevilo, saj imajo samo ta po dva delitelja v množici $\mathbf{N}$. Drugo ima tri "naravne" delitelje, zato je – malce pomislimo – kvadrat nekega praštevila. Obravnavani števili sta zaporedni, torej je eno sodo. Če je le-to praštevilo, je to dvojka, če pa je kvadrat praštevila, potem je štirica. Dvojka nima "pravega" soseda, za štirico pa obe sosedni števili ustrezata pogojema naloge – le para 3, 4 in 4, 5 sta potemtakem "dobra".

Boris Lavrič

ŠAHOVSKI KRALJ Z OMEJENO SVOBODO GIBANJA

Zamislimo si šahovskega kralja (barva ni pomembna), ki se lahko sprehaja samo po 36 poljih šahovske deske, kot prikazuje slika 1. Na druga polja ne sme, zato jih tudi nismo narisali. Položaj kralja bomo označevali nekoliko drugače, kot je navada v šahovskem svetu, in sicer z urejenim parom celih števil (x, y) , pri čemer je $0 \leq x \leq 7$ in $0 \leq y \leq x$. Zadnja relacija predstavlja "omejeno suverenost" kralja.



Slika 1

Ubogemu kralju, ki mu je na tak način okrnjeno kraljestvo, ni dovoljeno, da bi se premikal v vseh smereh, kakor to lahko počnejo običajni kralji na običajnih šahovnicah. Naš se lahko premika samo tako, da napreduje za eno polje proti desni ali za eno polje navzgor ali pa oboje hkrati. Dovoljene so torej poteze:

$$(x, y) \rightarrow (x + 1, y), \quad (x, y) \rightarrow (x, y + 1) \quad \text{in} \quad (x, y) \rightarrow (x + 1, y + 1)$$

Skušali bomo odgovoriti na vprašanje: Koliko različnih poti ima kralj na izbiro, da pride s polja $(0, 0)$ na polje (x, y) ?

Označimo število vseh teh različnih poti s $q(x, y)$.

Primer 1. Za manjše x in y lahko $q(x, y)$ določimo s tem, da vse možne poti narišemo. Določimo na primer $q(2, 2)$. Dovoljene poti so naslednje:



Slika 2

Torej je $q(2, 2) = 6$. Samo ena pot pripelje kralja z začetnega polja $(0, 0)$ na polje $(1, 0)$, zato je $q(1, 0) = 1$. Prav tako lahko pride na polja $(2, 0)$, $(3, 0)$, ..., $(7, 0)$ na en sam način. To pomeni, da je $q(x, 0) = 1$ za $x = 1, 2, \dots, 7$. Zaradi popolnosti bomo vzeli še $q(0, 0) = 1$.

Nobenega razloga ni, da ne bi vzeli trikotne šahovske deske drugačnih razsežnosti, recimo take, ki ima na osnovnici n polj. Pri tem je lahko n poljubno naravno število. V vsakem primeru velja:

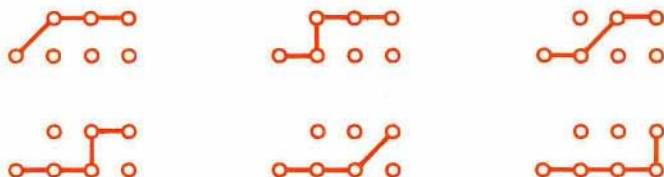
$$q(x, 0) = 1 \text{ za } x \geq 0 \quad (1)$$

Primer 2. S preštevanjem določimo $q(2, 1)$ in $q(3, 1)$. V prvem primeru so dovoljene naslednje poti:



Slika 3

Imamo torej 4 različne poti: $q(2, 1) = 4$. V drugem primeru pa so možne take poti:



Slika 4

Torej je $q(3, 1) = 6$. Polje $(3, 2)$ je dosegljivo s polj $(2, 2)$, $(3, 1)$ in $(2, 1)$. Kralj lahko pride na prvo od teh treh po $q(2, 2) = 6$ različnih poteh, na drugo po $q(3, 1) = 6$ različnih poteh in na tretje po $q(2, 1) = 4$ različnih poteh, vsakokrat začne na polju $(0, 0)$. Do polja $(3, 2)$ ima samo še korak. Od tod sklepamo, da s polja $(0, 0)$ kralj s svojo omejeno svobodo gibanja prej ali slej zavzame polje $(3, 2)$ po $q(2, 2) + q(3, 1) + q(2, 1) = 6 + 6 + 4 = 16$ različnih potez. Z enakim premislekom ugotovimo:

$$q(x, y) = q(x-1, y) + q(x, y-1) + q(x-1, y-1) \text{ za } 1 \leq x \text{ in } 1 \leq y \leq x \quad (2)$$

To je rekurzivna formula za izračun števil $q(x, y)$. Upoštevajmo še relacijo (1), pa že lahko sestavimo preglednico:

$x \backslash y$	0	1	2	3	4	5	6	7
7								8558
6							1806	6752
5						394	1412	3534
4					90	304	714	1408
3				22	68	146	264	430
2			6	16	30	48	70	96
1		2	4	6	8	10	12	14
0	1	1	1	1	1	1	1	1

V vrstico z oznako y in stolpcu z oznako x stoji število $q(x, y)$. V spodnji vrstici smo upoštevali, da je $q(x, 0) = 1$. Ostale vrstice izpolnimo samo s seštevanjem največ treh števil v skladu s formulo (2). Pri tem vzamemo, da je $q(x, y) = 0$, če je $x < y$. Hitro se vidi, da so nad vrsto iz enic sama sode števila, to je

$$q(x, 1) = 2x \text{ za } x \geq 1 \quad (3)$$

Števila $q(x, 2)$ je že nekoliko težje razpoznati. Opazimo pa naslednjo zakonitost: števila $\frac{1}{2}q(x, 2)$ so po vrsti 3, 8, 15, ..., to pa so kvadrati števil 2, 3, 4, ..., zmanjšani za 1. Velja torej:

$$q(x, 2) = 2(x^2 - 1) \text{ za } x \geq 2 \quad (4)$$

Uganiti števila $q(x, 3)$ ni več mačji kašelj, napišimo samo rezultat:

$$q(x, 3) = \frac{2}{3}(x-2)(2x^2 + 4x + 3) \text{ za } x \geq 3 \quad (5)$$

Pojavi se seveda vprašanje, kako se glasi formula za $q(x, y)$ v splošnem. Najbolj zadovoljljvi najbrž ne moremo biti z njo, ker je videti takale:

$$q(x, y) = \frac{x-y+1}{y} \sum_{k=0}^{y-1} \binom{x}{k} \binom{y}{k+1} 2^{k+1} \text{ za } y > 0 \quad (6)$$

Do nje pridemo z metodami tako imenovanega simboličnega ali umbralnega računa (Roman, [1]). Kot poseben primer dobimo iz (6) tudi (3), (4) in (5). Preverimo, če je res $q(3, 2) = 16$: $q(3, 2) = \binom{3}{0} \binom{2}{1} 2 + \binom{3}{1} \binom{2}{2} 2^2 = 4 + 12 = 16$.

Naloga za bralce: Vsak ponedeljek obiskujem tržnico. Branjevka, pri kateri kupujem, je prejšnji ponedeljek prodajala paradižnik po 400 din za kilogram. Da-

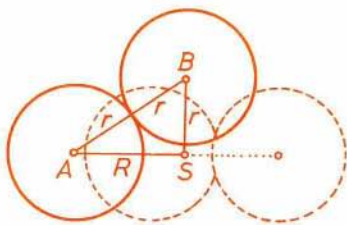
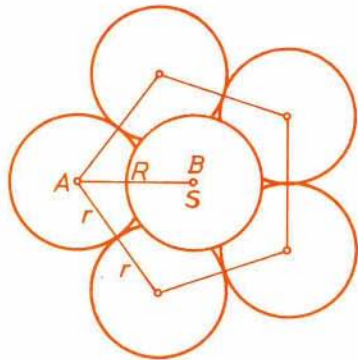
nes je spet ponedeljek in cena njenega paradižnika je bila (začuda) še vedno ista. Na koliko načinov se je lahko gibal cena njenega paradižnika med tednom, če vemo, da

- 1) branjevka prodaja vsak dan v tednu,
- 2) branjevka cene pod nobenim pogojem ne spusti pod 400 din za kilogram,
- 3) ceno prilagaja razmeram na trgu vsako jutro, in sicer tako, da ceno prejšnjega dne pusti nespremenjeno ali pa jo zviša oziroma zniža za 50 din pri kilogramu?

Marko Razpet

TEŽAVE S TRINAJSTO KROGLO – Rešitev s strani 345

1. Izračunajmo oddaljenost R središč venčnih krogel s polmeri r od sredine venca. Očitno je R natanko dolžina polmera kroga, ki je očitno pravilnemu petkotniku s stranico $2r$. Torej velja $R = r\sqrt{2 + 2/\sqrt{5}}$ (poglej na primer na stran 353). Uporabimo še Pitagorov izrek za pravokotni trikotnik, katerega



oglišča so sredina venca in središči ene od venčnih kroglic ter zgornje kroglice (A in B na sliki). Tako dobimo iskano oceno:

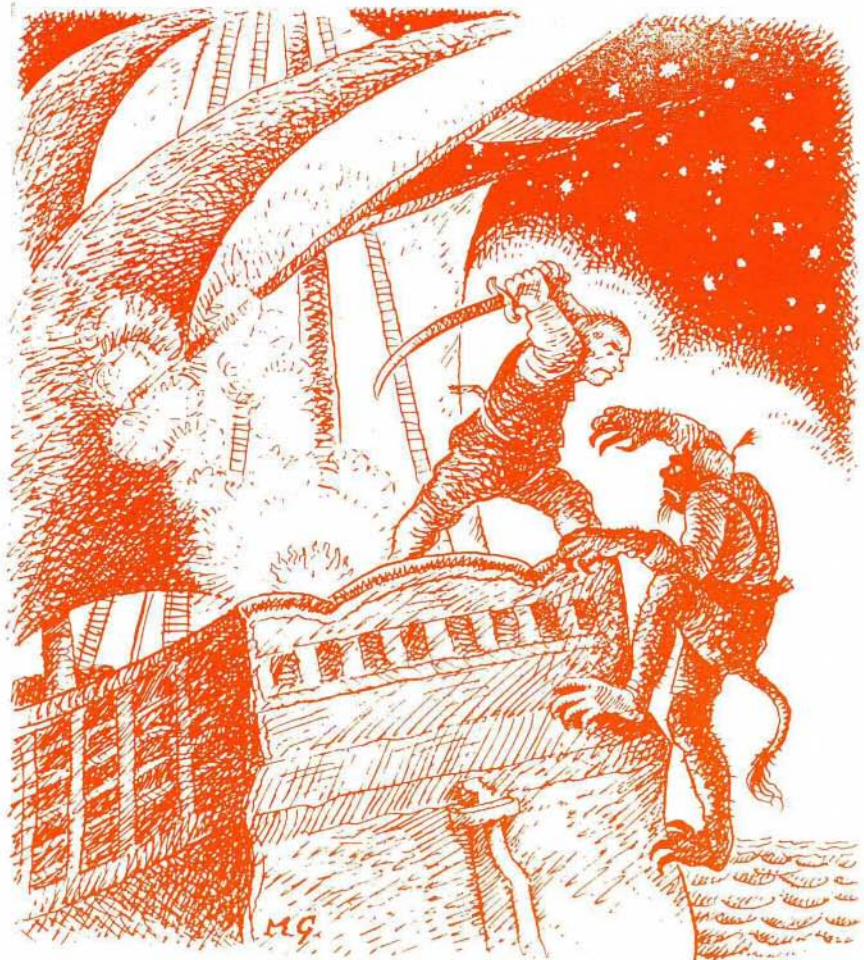
$$|BS|^2 = (2r)^2 - R^2 = (2 - 2/\sqrt{5})r^2 > r^2$$

2. Odgovor: Ne moremo.

Boris Lavrič

ZAKLAD NA SAMOTNEM OTOKU

Bilo je takrat, ko je bil Krjavelj še pri mornarjih. Nekega lepega dne je imel izjemno srečo. Iz morja je dvignil steklenico s sporočilom. Na kar dobro ohranjenem koščku papirja je bilo napisano nekako takole:



"Kako pa veš, da si ga presekal?" vpaša Francelj.

"Kaj bi ne vedel, saj je dvakrat padlo v morje; prvič je reklo: štrbunk! vdrugič pa se je slišalo: štr—bunk! Pa reci potlej, da ga nisem presekal, da ga nisem na dva kosa presekal."

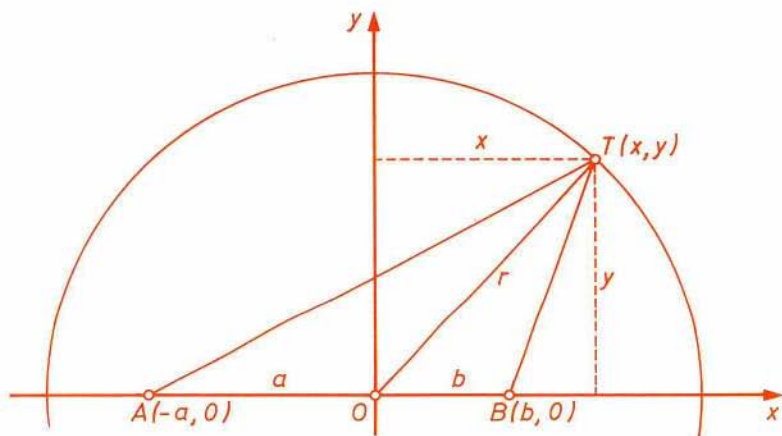
Sredi morja (sledijo zemljepisne koordinate) leži samotni otok. Približno na sredini otoka raste kokosova palma in kruhovec. Pojdi od palme do kruhovca in šteje korake. Nazaj grede zabij v tla količek na drugi petini razdalje med drevesoma. Vsota razdalj zaklada od dreves mora biti največja, vendar je trikrat dlje od količka, kot je količek od kruhovca.

Krjavelj je ljubosumno spravil listek, steklenico vrgel nazaj v morje in odslužil mornarico. Vmes je doživel še tisto znamenito srečanje z vragom, ki pa se je, kot vemo, srečno končalo. Na kopnem mu je kmalu postalo dolgčas po morju, spomnil se je na porumeneli listič in se odločil, da izkoplje zaklad. Najel si je barko in poiskal omenjeni otoček. Drevesi sta bili še vedno tam, možakarju je kmalu uspelo zabiti količek na pravem mestu in kopati primerno daleč stran, zaklada pa ni in ni hotelo biti. Obupal je in se razočaran vrnil domov. O tem dogodku ni nikomur pripovedoval, raje se je postavljaj z vragom.

Mi pa si oglejmo, kako bi s kancem matematike našli zaklad. V točki A naj raste palma, v B pa kruhovec. Količek je treba zabiti v točki O na daljici AB . Naj bo a razdalja med točkama A in O , b pa razdalja med O in B . Zaklad je zakopan v točki T . Naj bo r razdalja med O in T . Pri vsem tem mora biti vsota razdalj $AT + BT$ čim večja. Uvedemo še koordinatni sistem z izhodiščem v točki O , os x je usmerjena proti točki B . Iskana točka T naj ima koordinati x, y . Po Pitagorovem izreku je

$$AT^2 = (x + a)^2 + y^2, \quad BT^2 = (x - b)^2 + y^2 \quad \text{in} \quad r^2 = x^2 + y^2$$

Vsota razdalj $f(x) = AT + BT$ je odvisna od abscise točke T . Ni težko videti, da velja:



$$f(x) = \sqrt{a^2 + r^2 + 2ax} + \sqrt{b^2 + r^2 - 2bx}$$

Bralec, ki mu je pojem odvoda že domač, bo zdaj nalogo rešil mimogrede. Mi pa se je bomo lotili z elementarnimi sredstvi.

Dovolj je obravnavati primer, ko je $a \geq b$, $0 < a < r$ in $0 < b < r$.

V Krjavljevem primeru je namreč $b = 2(a + b)/5$ in $r = 6(a + b)/5$, iz česar dobimo $a = r/2$ in $b = r/3$.

Sedaj moramo poiskati tako absciso x , da je vrednost $f(x)$ čim večja. V ta namen uporabimo dva pomožna izreka.

Pomožni izrek 1. Geometrijska sredina $\sqrt{ab}$ pozitivnih števil a, b ne presega njune aritmetične sredine $(a + b)/2$. Obe sredini sta enaki natanko takrat, ko je $a = b$.

Dokaz: Ker sta a in b pozitivni števili, obstajata njuna kvadratna korena $\sqrt{a}$ in $\sqrt{b}$, kvadrat njune razlike pa je nenegativen: $0 \leq (\sqrt{a} - \sqrt{b})^2 = a - 2\sqrt{ab} + b$ iz tega pa dobimo:

$$\sqrt{ab} \leq (a + b)/2$$

Obe sredini pa sta enaki samo v primeru, ko je $a = b$.

Pomožni izrek 2. Za poljubna pozitivna števila a, b, c, d velja neenakost:

$$\sqrt{ab} + \sqrt{cd} \leq \sqrt{(a + c)(b + d)} \quad (1)$$

pri čemer velja enakost natanko tedaj, ko je $ad = bc$.

Dokaz: Pri pogojih tega izreka sta tudi števili ad in bc pozitivni in po prvem pomožnem izreku velja:

$$2\sqrt{(ad)(bc)} \leq ad + bc$$

Enačaj velja natanko takrat, ko je $ad = bc$. Če v zadnji neenakosti na obeh straneh prištejemo število $ab + cd$, dobimo $ab + 2\sqrt{abcd} + cd \leq ad + bc + ab + cd$ ali po urejanju

$$(\sqrt{ab} + \sqrt{cd})^2 \leq (a + c)(b + d)$$

Po korenjenju dobimo neenakost (1).

Prepišimo $f(x)$ nekoliko drugače:

$$f(x) = \sqrt{a(a + r^2/a + 2x)} + \sqrt{b(b + r^2/b - 2x)}$$

Če v neenakosti (1) nadomestimo b z $a + r^2/a + 2x$, c z b in d z $b + r^2/b - 2x$, dobimo neenakost

$$f(x) \leq \sqrt{(a + b)(a + b + r^2/a + r^2/b)}$$

in po preureditvi

$$f(x) \leq (a + b) \sqrt{1 + r^2/(ab)} \quad (2)$$

Enačaj v (2) velja po pomožnem izreku 2 natanko takrat, ko je

$$b(a + r^2/a + 2x) = a(b + r^2/b - 2x)$$

Rešitev te enačbe je

$$x = \frac{a-b}{2ab} r^2 \quad (3)$$

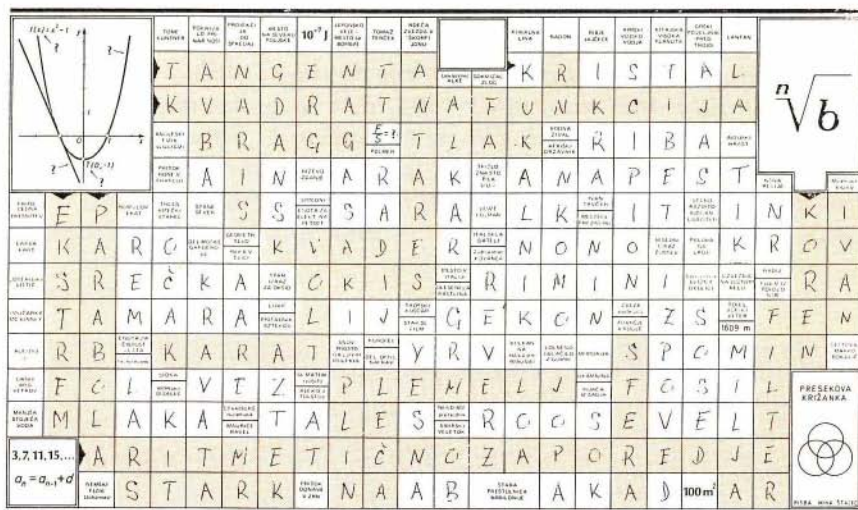
Pri tem je treba biti nekoliko previden. Veljati mora $-r \leq x \leq r$. Za Krjavljjev primer dobimo $x = r/2$ ali $x = 3(a+b)/5$. Daljica OT mora oklepiti z osjo x kot 60° .

Nazadnje še nekaj nalog:

1. Koliko rešitev ima naša naloga pri pogoju $0 < b < a < r$?
2. Dokaži, da je za absciso x , ki je dana s (3), kot ATO enak kotu BTO . (Uporabi sinusni izrek!)
3. Z ravnilom in šestilom konstruiraj daljico, ki ima dolžino x v formuli (3).
4. Na okrogli biljardni mizi moraš kroglico iz točke A poslati v točko B (slika), tako da se odbije le enkrat na robu mize, pri čemer ležita točki A in B na nekem premeru mize. Pot kroglice mora biti najdaljša. Kje mora kroglica doživeti odboj? Središče mize ni nujno med točkama A in B .

Marko Razpet

SLIKOVNA KRIZANKA - Rešitev iz P-5



LOGO IN RAČUNALNIK, Samo Kuščer in Edo Podreka, Mladinska knjiga, 1987

Kot računalničar sem bil nemalo presenečen, ko mi je prišla v roke pričujoča knjižica. Ob poplavi računalniških začetnic na trgu je kar nekako manjkala neka predzačetnica, začetnica za popolne začetnike ali začetnica za vsakogar. Pa jo imamo! Knjigi bi lahko dali tudi naslov "Vse, kar sem želel vedeti o računalniku, pa si nisem upal vprašati".

Želvetica Logo nas popelje skozi pisani svet računalništva. Razloži nam, kako računalnik deluje, katere so njegove glavne sestavne enote, kako med seboj usklajeno delujejo, kaj so podatki in kako jih je mogoče spraviti, če jih bomo še potrebovali, za kaj se računalniki sploh dajo uporabiti. Na koncu nam predstavi še mini zgodovino računalnikov od danes do samih začetkov.

Avtorja poznamo že po uspešnici *Ukročeni računalnik*. Ta knjiga bi lahko sledila kot dopolnilo h knjižici, ki jo danes predstavljamo. Odličen tekst v knjižici spremljajo bogate in duhovite ilustracije izpod čopiča Edija Podreke. Slike dopolnjujejo pisani tekst in tako bralec lahko uživa in se uči v sliki in besedi.

Knjiga Logo in računalnik bi morala najti mesto na prenekateri knjižni polici. Namenjena je vsem, ki jih računalništvo zanima, pa ne vedo, kje začeti, vsem tistim, ki nam je nerodno, ko se pogovarjamo s heckerji in le kimamo, vsem tistim, ki imamo nadobudno mladež, ki že neutrudno pritiska na tipkovnico, vsem poletnim osnovnošolcem, ki že delajo prve korake v programiranju, skratka široki paleti bralcev. Zavedati se moramo, da računalništvo postaja vedno bolj del splošne izobrazbe in da bomo morali v oreh ugrizniti prej ali slej. Bolje prej! Želim vam veliko užitkov ob branju knjižice Logo in računalnik.

Vital Oblak

ZALJUBLJENOST — rešitev naloge s strani 335

Od trinajstega dne v prejšnjem mesecu do trinajstega v prihodnjem poteče najmanj 59 in največ 62 dni. Le v slednjem primeru sta ta dva dneva lahko zaporedoma četrtek in sredo. Prejšnji mesec ima tedaj 31 dni, Sanja pa se je ta mesec zaljubila v nedeljo.

Borís Lavrič

Zdravko Petkovšek in Miran Trontelj: SKICE VREMENA, Ljubljana, Zveza organizacij za tehnično kulturo Slovenije, 1987, 101 str. + 16 str. barvnih prilog, broš.

Knjiga, ki vam jo predstavljamo, pomaga bolje razumeti vreme in dogajanja v ozračju. Avtorja bralce postopno uvajata v vremenoslovje na primerih slik; precej je takih, kakršne javnosti posredujejo časopisi in televizija. S tem omogočata, da se naučijo iz javnih vremenskih napovedi dobiti precej več kot zgolj:

"Zjutraj se bo po kotlinah in nižinah Slovenije zadrževala megla ali nizka oblačnost, sicer pa bo pretežno jasno z delno oblačnostjo. Popoldne bodo predvsem v zahodni Sloveniji posamezne plohe ali nevihte, ponoči pa se bodo močne padavine razširile nad vso Slovenijo."★

ter da iz splošnih napovedi izluščijo tisto, kar je pomembno zanje. Knjiga namreč postopoma obravnava najrazličnejša dogajanja, od tistih, ki veljajo za Zemljo kot planet, pa do onih, ki določajo vreme v nekem kraju.

Bralci Preseka boste morda začudeni, da avtorja kake razlage ne pospremita z izpeljavami v obliki enačb. Namenoma sta se izognila vsakemu matematičnemu orodju, ker sta hotela knjigo približati čim širšemu krogu ljudi. Z besedami, slikami in skicami (ki jih je v knjigi res veliko) je namreč tudi mogoče razložiti marsikatega od naravnih pojavov. Želimo vam, da se ob tej knjigi bolje spoznate z zanimivim področjem naravoslovja, o katerem sicer v šolah bolj malo izveste.

Jože Rakovec

★ Zakaj je pri nas mogoče v enem dnevu doživeti tako pestre vremenske dogodke: od prijaznega sonca do "ošpičenih prekel"? Ali pa imajo morda meteorologi zato tako nemogoč žargon, da se zavarujejo ob morebitnih napačnih napovedih? Presodite!

Znanost, pravilno razumljena, ozdravi človeka njegove oholosti: pokaže mu namreč njegove meje.

A. Schweitzer

3. Prosen, M., ASTRONOMSKA OPAZOVANJA, 1978
4. Strnad, J., ZAČETKI SODOBNE FIZIKE – Od elektrona do jedrske cepitve, 1979
5. Strnad, J., RELATIVNOST ZA ZAČETNIKE, 1979
6. Landau, L.D., Rumer, J.B., KAJ JE TEORIJA RELATIVNOSTI, 1979
7. Križanič, F., UKROČENA MATEMATIKA, 1981
8. Ranzinger, P., PRESEKOVA ZVEZDNA KARTA, 1981
9. Strnad, J., ZAČETKI KVANTNE FIZIKE – Od kvanta do snovnega valovanja, 1982
10. Kuščer, I., ENAJSTA ŠOLA IZ FIZIKE – Čuda se kažejo ob vsakem koraku, 1982
11. Zajc, P., TEKMUJMO ZA VEGOVA PRIZNANJA – Zbirka rešenih nalog iz matematike za učence petih in šestih razredov osnovnih šol, 1982
13. Zajc, P., TEKMUJMO ZA VEGOVA PRIZNANJA – Zbirka rešenih nalog iz matematike za učence sedmih razredov osnovnih šol, 1983
14. Zajc, P., TEKMUJMO ZA VEGOVA PRIZNANJA – Zbirka rešenih nalog iz matematike za učence osmih razredov osnovnih šol, 1983
16. Šporer, Z., OH, TA MATEMATIKA, 1984
22. Bajc, D., Pisanski, T., NAJNUJNEJŠE O GRAFIH, 1985
23. Strnad, J., JOŽEF STEFAN – Ob stopetdesetletnici rojstva, 1985
26. Vidav, I., JOSIP PLEMELJ – Ob dvajsetletnici smrti, 1987
27. Strnad, J., DO NEWTONOVIH ZAKONOV – Ob tristoletnici Principov, 1987
28. Ranzinger, P. in dr., NAŠE NEBO IN ZEMLJA, 1988 – Astronomske efemeride – Potresi – Umetni sateliti, 1987

ALI UGASNE PADAJOČA SVEČA?

Ob praznikih okoli novega leta smo videli prižganih veliko sveč. Prijetno in pomirjajoče je opazovati plamen sveče, ki se mirno vije navzgor, samo od časa do časa morda malo vztrepeta. Pri tem se navadno ne zavedamo, kako zapleteni fizikalni in kemijski pojavi se prepletajo pri gorenju sveče. Poskusimo jih samo površno naštet. Zaradi povišane temperature se stali vosek na vrhu sveče. (Dandanes so sveče navadno sestavljene iz stearina — estra stearinske kisline.) Nastalo kapljevino površinska napetost dvigne navzgor po luknjicah v stenju. Na vrhu stenja nastanejo iz kapljevine plinasti ogljikovodiki, se mešajo z zrakom in gori. Pri gorenju, to je pri spajanju ogljikovodikov s kisikom iz zraka, se sprošča sežigna toplota, ki jo odvajajo zgoreli plini. Del toplote se s sevanjem in prevajanjem prenese do vrha stenja in do vrha sveče, kjer se porabi za taljenje in izhlapevanje.

Zanimajmo se samo za eno stran zapletenih pojavov, za odvisnost od težnega pospeška. "Od težnega pospeška?" boste rekli. "Kaj pa ima ta opraviti z gorenjem?" Ima, ima. Spomnite se na Arhimedov zakon o vzgonu: na potopljeno telo deluje tekočina z vzgonom, ki je enak teži izpodrinjene tekočine. "Potopljeno telo" so zgoreli plini, ki imajo višjo temperaturo in zato manjšo gostoto od okolnega zraka. Ta zrak deluje nanje z vzgonom, ki povzroča tlačno razliko in ta poganja zgorele pline navzgor. Na njihovo mesto priteka hladen zrak s kisikom, ki je potreben za gorenje. Tlačno razliko med točkama, ki sta druga nad drugo, dobimo tako, da višinsko razliko točk pomnožimo s težnim pospeškom in razliko gostot okolnega zraka in zgorelih plinov. Tok nastane torej zaradi razlike gostot, ta pa zaradi razlike temperatur in ga štejemo h konvekciji.

Tlačna razlika je sorazmerna tudi s težnim pospeškom. Ali sveča torej ne more goreti, če je pospešek enak nič? V opazovalnem sistemu, ki prosto pada, na primer v prosto padajočem dvigalu, je težni pospešek enak nič. V takem sistemu namreč potekajo pojavi, kot da bi se sistem gibal premo enakomerno ali miroval daleč proč od teles z veliko maso. Tako smo pri vprašanju, ki smo ga postavili v naslov. Marsikdo bi po tistem, kar smo rekli, sklepal, da padajoča sveča ugasne. Ker ni teže (gravitacije), ni vzgona, ni odtoka zgorelih plinov in dotoka svežega zraka s kisikom, se ne sprošča sežigna toplota, vosek se ne tali in kapljevina ne izhlapi. Tako so mislili tudi nekateri znani fiziki, med njimi Albert Einstein.

Einstein je imel rad male fizikalne uganke, kakršna je na primer tale: Dobro zaprto svetilko vržemo s stolpa. Čeprav veter ne moti plamena, plamen ugasne, preden svetilka zadene tla. Zakaj? Odgovor: V padajoči svetilki ni gravitacije, zato vročih zgorelih plinov ne odnaša vzgon in zadušijo plamen.

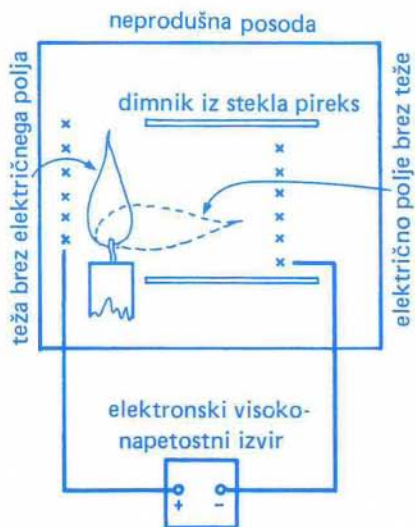
E. Straus, Einsteinov asistent od 1944 do 1948

Uresničitev takega opazovalnega sistema vidimo, na primer, v pogosto omenjenem dvigalu, ki se je odpelo in zdaj prosto pada. Nikakor ni novo, da v njem ne opazimo učinka gravitacije. Zaradi tega bi v njem na primer ugasnila goreča sveča, ker plamen ne more obstajati brez delovanja teže na zgorele pline.

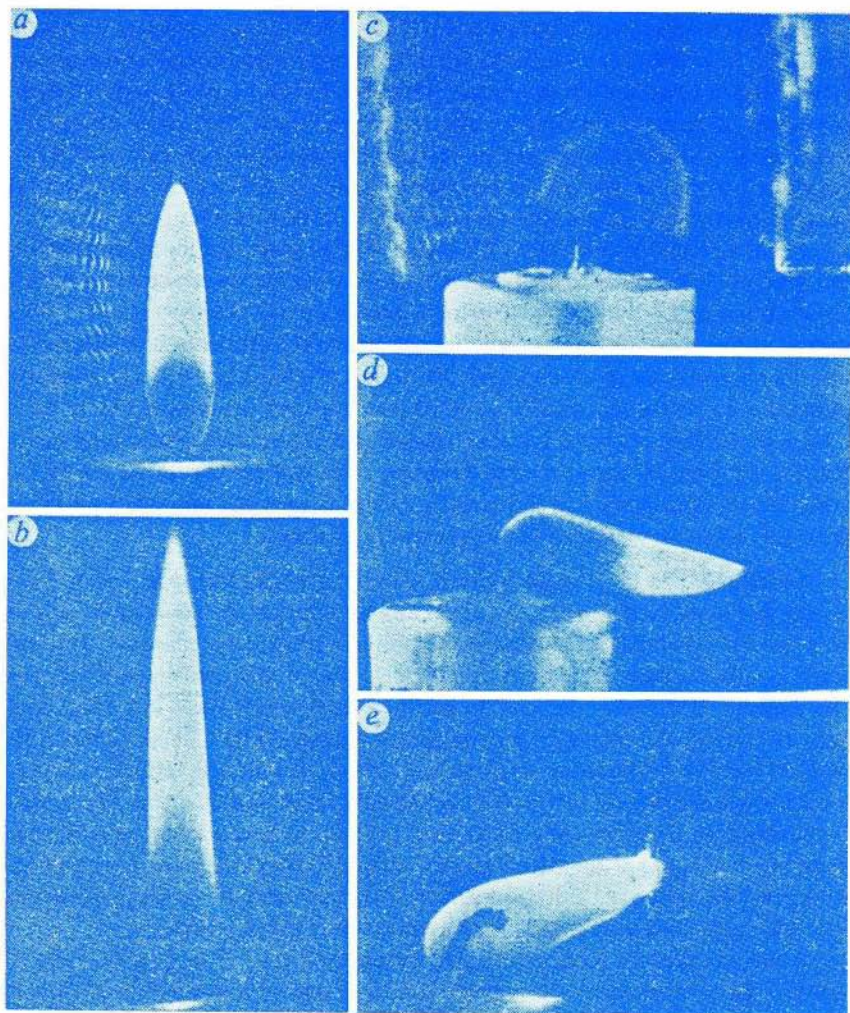
Max von Laue

O čem nas pouči poskus s padanjem? Ne pokaže nič drugega kot nenaden prehod plamena, ki ga napajata konvekcija in difuzija, k čisto difuzijskemu plamenu. V padajoči steklenici ni konvekcije zaradi razlike gostot vročih zgorelih plinov in okolnega zraka.

K. Clusius



Slika 1. Poenostavljena risba poskusne naprave.



Slika 2. Fotografije plamena sveče pri navadnem težnem pospešku (a), pri dvojnem težnem pospešku, ko se letalo po letu po paraboli izravna (b), pri pospešku zelo blizu nič (c), pri pospešku nič in električnem polju (d) in pri pospešku nič in močnejšem električnem polju (e). Slika je vzeta iz članka F.B. Carleton, F.J. Weinberg, *Electric field-induced flame convection in the absence of gravity*, *Nature* 330 (1987) 635.

Toda vse kaže, da navedeni odgovor ne drži. O tem pričajo poskusi s svečo v steklenici, ki je privezana na dolgo vrv in jo spustijo izpod stropa predavalnice. V temi dobro opazimo, da se plamen spremeni, ko začne sveča padati. Oslabi in postane kroglast, a ne ugasne. Ugasne pa, ko sunek vrvi zadrži steklenico. Sveča torej ne ugasne zato, ker ni težnega pospeška, ampak zato, ker težni pospešek nenadoma nastopi in povzroči vzgon. Ta posrka zgorele pline od stenja in hladen zrak vdre s strani proti stenju in upihne plamen.

Znani fizikalni kemik Klaus Clusius se je s sodelavci ponovno prepričal o tem leta 1963. 9 milimetrov debele sveče je dal v litrske steklenice in jih spustil z vratom navzdol — okoli vratu je pritrdil polkilogramski svinčeni obroč — z 19 metrov visoke stavbe fizikalno—kemijskega inštituta v Zürichu. V steklenici je bilo dovolj zraka, da so sveče gorele 30 sekund. Vseh pet poskusov je potekalo enako. Ko so steklenico spustili, se je plamen napihnil in oslabil. Tak je ostal 2 sekundi, kolikor je trajalo padanje. Ugasnil je šele ob padcu. Poskuse so nadaljevali s 55 metrov visoke stavbe kantonske bolnišnice. Izid poskusov je bil enak. Sedem opazovalcev se je strinjalo v tem, da med 3,3 sekunde trajajočim padanjem sveče niso ugasnile in da so ugasnile ob padcu.

Na *difuzijo*, to je na mešanje dveh plinov na molekulski ravni, ne da bi se pojavil tok plina (veter), teža ne vpliva. Oblika difuzijskega plamena je kroglasta in površina večja kot površina konvekcijsko—difuzijskega plamena. Tok plinastih ogljikovodikov iz stenja se nadaljuje še potem, ko preneha dotok kisika s konvekcijo. Difuzijske plamene, ki gorijo, četudi ni teže, je že leta 1952 opazoval H. Mayer. Raziskoval je gorenje vodika v okolju iz 82% helija in 18% kisika. Čim manj je bil povečan tlak vodika v posodi, iz katere je iztekal, tem bolj je bil plamen okrogel in tem bolj se je bližal difuzijskemu plamenu. Pri manjši tlačni razliki je dobil popolnoma okrogel plamen. V tem primeru ni prišlo do znatne konvekcije, ker se gostoti zgorelih plinov in okolnega plina nista znatno razlikovali. Gorenje sveč pri znižanem tlaku je zanimalo že mnogo prej Johna Tyndalla. Leta 1859 je opazoval tudi gorenje sveče na Mt. Blancu.

Difuzijski plamen sveče ne ugasne, če toplotni tok, ki se sprošča v njem, zadošča, da se s sevanjem in prevajanjem stali dovolj voska in izhlapi dovolj kapljevine. Toda včasih je treba dovolj dolgo počakati, tudi minuto in več, da nastanejo stacionarne razmere, ko se s časom nič več ne spreminja. Pri poskusih s padanjem steklenic tega ni mogoče opazovati. Tudi če bi imeli dovolj visoko stavbo, se zaradi zračnega upora steklenice njena hitrost ustali že po 15 sekundah. Poskuse pa bi bilo mogoče delati na letalu, ki leti z ugasnjenimi motorji po paraboli, ali na umetnih satelitih.

Kot kaže, doslej še niso delali poskusov na umetnih satelitih. Delali pa so jih na letalih, ki so v poskusne namene letela z ugasnjenimi motorji po paraboli.

Walter Gerlach — postal je znamenit po *Stern—Gerlachovem poskusu* s curkom atomov srebra, ki je napovedal obstoj elektronskega spina — je kazal drugačen poskus. Majhno, s plinom polnjeno žarnico, katere nitka šibko sveti, spustimo na dolgem kablu, da pade z dovolj velike višine. Med padanjem žarnica precej močnejše sveti, ker nitka izgublja toploto samo s prevajanjem in ne s prevajanjem in konvekcijo kot v mirovanju. Poskuse s padajočo svečo in s padajočo žarnico lahko ponovijo tudi bralci Preseka.

V takem letalu potekajo poskusi kot v prosto padajočem dvigalu. F.B. Carletona in F.J. Weinberga z imperialnega koledža v Londonu je zanimalo, ali bi bilo mogoče poganjati plamen z električnim poljem namesto s težo. Gretje s plamenom, ki je razmeroma zelo učinkovito, bi namreč utegnilo priti prav tudi na umetnih satelitih. Če se hočemo izogniti tlačni posodi ali puhalu, ki poskrbi za vsiljeno konvekcijo, in s tem zvezane dodatne mase — izstreliti jo je treba v vesolje —, je električno polje kar pripravno.

V plamenu ogljikovodikov nastane obilo pozitivnih ionov, spočetka predvsem H_3O^+ , in elektronov. V močnem električnem polju, ki pa še ne povzroči preboja, ioni trkajo z molekulami zraka in poganjajo plinski tok, podobno kot ga povzroči teža preko vzgona. Tak tok je že leta 1899 opazoval K.P. Chattock. Carleton in Weinberg sta ugotovila, da je z električnim poljem mogoče doseči celo do osemstokrat tolikšen tok kot s težo. Pri tem hitrost plina ne preseže dobrih 5 metrov na sekundo, a to za plamen popolnoma zadostuje. Največja gostota električnega toka po čelnem preseku plamena ne preseže četrta ampera na kvadratni centimeter in ustrezna ploskovna gostota električne moči ne desetino vata na kvadratni centimeter. Elektronski visokonapetostni izvir je zato grajen lahko za majhno moč in je zelo lahek. (V uporabi je celo že elektrostaticni pršilec insekticidov, ki shaja z drobno baterijo v ročaju.)

Zaradi varnosti so delali poskuse s svečo, ne pa s kakim večjim plamenom. Električno polje so ustvarili med navpičnima kosoma kovinske tkanine. Pozitivno elektrodo so približali plamenu (slika 1). Na dolgi poti po zraku se elektroni obesijo na molekule in nastanejo negativni ioni, ki potujejo po zraku podobno kot pozitivni ioni. Če bi bil plamen na sredi med elektrodama, bi se zato razdelil na dva simetrična dela.

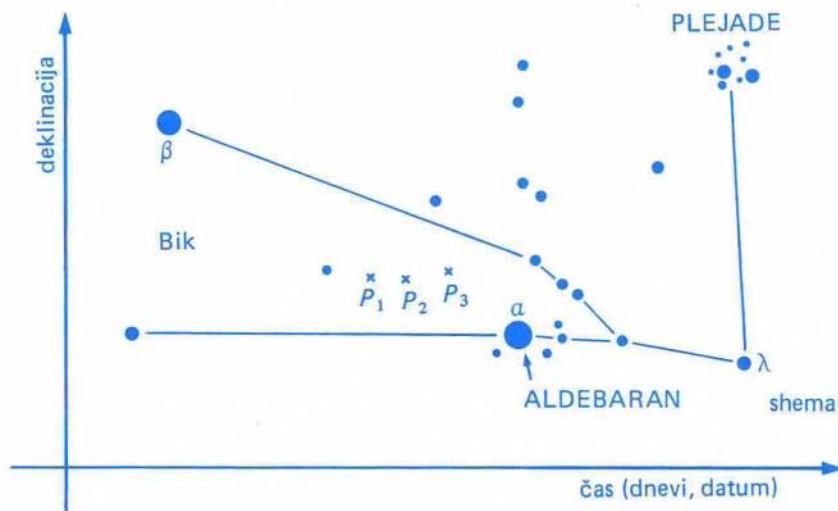
Poskuse je finansirala Evropska vesoljska agencija ESA na letalu KC 135 Severnoameriške vesoljske agencije NASA v Houstonu. Letalo je letelo po paraboli z ugasnjenimi motorji do 30 sekund. Tudi v tem času še niso dosegli stacionarnih razmer, a čas je bil dovolj dolg, da so posneli posrečene fotografije (slika 2). Brez električnega polja je nastal okrogel difuzijski plamen, ki je bil s prostim očesom komaj viden, a ni ugasnil.

Janez Strnad

OPAZUJ PLANETE

Na jasnem nočnem nebu lahko razen zvezd večkrat opazuješ tudi planete. Kako s prostim očesom že na prvi pogled ločiš planet od zvezde? Svetloba zvezde vedno nekoliko migota (scintilira), svetloba planeta pa ne. Kako pa pri opazovanju z daljnogledom razločiš planet od zvezde? Zvezdo vidiš vedno kot točko, pa če jo opazuješ s še tako močnim daljnogledom, planet pa kot bolj ali manj svetlo okroglo ploščico, ki včasih kaže tudi meno (fazo), kot na primer Luna.

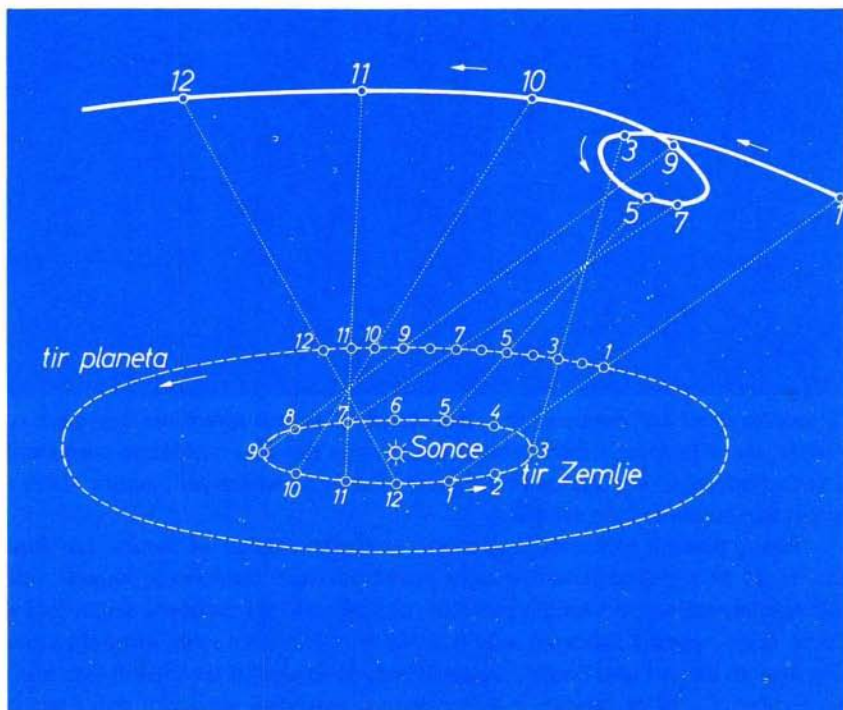
Planeti *Venera*, *Mars*, *Jupiter* in *Saturn* so prav lepo vidni s prostim očesom. Pri opazovanju teh (in tudi drugih) planetov uporabljaš knjižico *Naše nebo in Zemlja (Astronomske efemeride)*, ki jo v Presekovi knjižnici vsako leto izda Društvo matematikov, fizikov in astronomov SR Slovenije. Tu dobiš najrazličnejše podatke o vesoljskih telesih, med njimi tudi podatek, v katerem



Slika 1. V koordinatni sistem, ki ga sestavljata časovna in deklinacijska os, nariši glavne zvezde ozvezdja, v katerem se v času tvojega opazovanja navidezno giblje planet. (Za zgled smo narisali ozvezdje Bika.) Vsakič, ko opazuješ planet, si natančno zapomni njegovo lego glede na glavne zvezde in jo vriši v sliko ozvezdja. Opazovane lege (P_1 , P_2 , P_3 , ...) planeta lahko povežeš in dobiš tir navideznega gibanja planeta v času opazovanja.

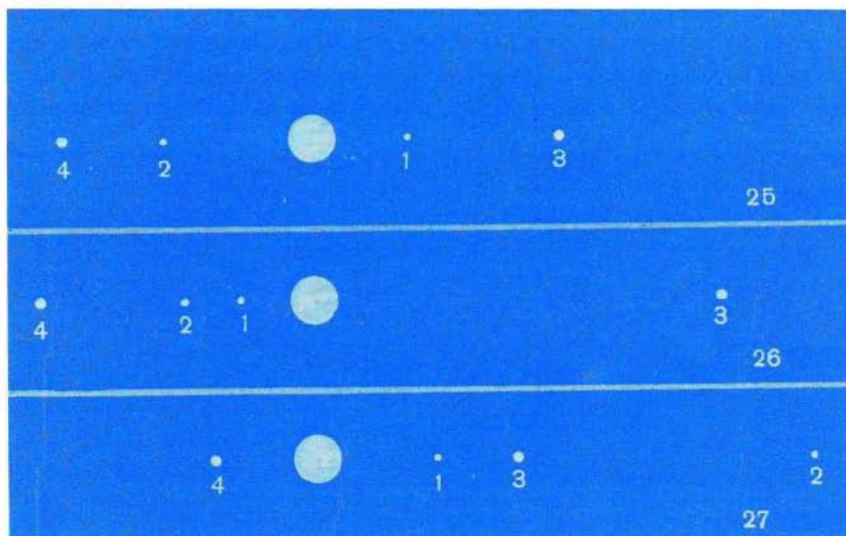
ozvezdju se na primer giblje planet, ki ga v določenem času nameravaš opazovati. Nato poglej v *Presekovo zvezdno karto*, če je ozvezdje, kjer se giblje planet, tedaj vidno. Če je, med zvezdami ozvezdja izsledi planet in ga opazuj s prostim očesom ali pa z daljnogledom.

S prostim očesom poskusi takole opazovati enega od omenjenih planetov. Zvečer določenega dne ugotovi lego planeta glede na svetle (glavne) zvezde ozvezdja in to vriši v *Presekovo zvezdno karto* ali pa v koordinatni sistem, ki ga pripraviš kar sam (slika 1). Tako opazuj izbrani planet vsak peti ali vsaj deseti jasni večer (noč) in vsakič vriši lego planeta glede na svetle zvezde ozvezdja.



Slika 2. Ta slika pojasnjuje, zakaj se planetu spreminja lega na nebu. Narisali smo istočasne lege planeta in Zemlje. Z Zemlje v legi 1 vidimo (projiciramo) planet v legi 1 na njegovem tiru okrog Sonca v določeni smeri — v navidezni legi 1 na nebu. Ko se Zemlja na svojem tiru premakne v lego 2, se planet na svojem tiru tudi premakne v lego 2 in planet vidimo z Zemlje v drugi smeri — v navidezni legi 2 na nebu — itd. To pomeni, da se je planet navidezno premaknil glede na zvezde, ki medsebojne lege ne spreminjajo.

Slika 3. Takole skiciraš opazovanje štirih velikih Jupitrovih satelitov. V knjižici *Naše nebo in Zemlja* najdeš podatke o gibanju teh satelitov. Zato lahko natančno ugotoviš, katere satelite opazuješ. Slika prikazuje lego štirih velikih Jupitrovih satelitov v treh zaporednih dneh (večerih) 25., 26. in 27.11.1945 ob 20. uri. Glej še knjižico *Astronomska opazovanja*, Presekova knjižnica 3, 1978, stran 268.



Če boš to delal kak mesec ali več, boš opazil, da planet spreminja lego glede na zvezde, da se je torej v času tvojega opazovanja na nebu navidezno premaknil. S takim opazovanjem ugotoviš *navidezno gibanje (premikanje) planeta*. Kako si to gibanje pojasniš, kaže slika 2.

Poglej planete tudi z daljnogledom, predvsem Jupiter in Saturn. Ob Jupitru, ki ga že z daljnogledom manjše povečave (npr. opernim kukalom) vidiš kot razmeroma svetlo okroglo ploščico, boš zapazil štiri drobcene svetle točke. To so štirje največji Jupitrovi sateliti, ki so približno tako veliki kot naša Luna. Čez eno ali dve uri spet poglej. Ugotovil boš, da so sateliti spremenili lego glede na Jupiter. Če bi te satelite z daljnogledom natančno opazoval dalj časa, bi dognal, da krožijo okrog Jupitra, in bi jim lahko izmeril tudi obhodni čas (slika 3). Za natančna opazovanja teh satelitov poglej navodila v knjižici *Naše nebo in Zemlja*.

Če hočeš zadovoljivo, tako da ne boš razočaran, videti Saturnov kolobar, moraš opazovati že z nekoliko močnejšim daljnogledom (na primer odprtine 5 do 8 cm in vsaj 20—kratne povečave). Tudi ob Saturnu lahko z daljnogledom opazuješ njegove satelite, posebno lepo pa je viden največji med njimi Titan.

RAZVEČORILLO

Navpično:

1. Reši enačbo:

$$(x - 3)^2 - (3x - 5) \cdot (4x + 9) - 6 = -11x^2 - 212$$

2. Izračunaj volumen kvadra, ki ima dolžino 13 cm, širino 9 cm in višino 8 cm.

3. Vsota treh zaporednih naravnih števil je 1041. Določi prvo naravno število.

4. V trapezu meri srednjica 76 cm, stranica c pa 97 cm. Izračunaj stranico a .

5. Diagonala kvadrata meri $130\sqrt{2}$ cm. Izračunaj stranico a .

7. Stranici pravokotnika merita 344 cm in 258 cm. Izračunaj diagonalo.

8.
$$\frac{\frac{8}{3} : (\frac{1}{4} + 2\frac{1}{2} \cdot 3 - 3\frac{1}{2})}{(3\frac{1}{2} - 2\frac{3}{51}) \cdot \frac{1}{147}} = x$$

Določi 87,5% x .

9. $2 \cdot (5 + 2^3) \cdot (3 + 2^4) - 482 =$

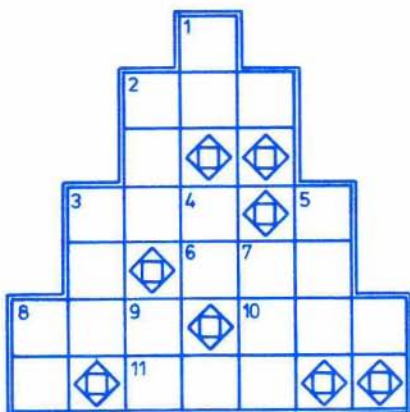
Vodoravno:

1. Daljica AB meri 4 cm. Izračunaj dolžino daljice AT , tako da bo veljalo $AT : AB = 4 : 8$.

2. Marko, Tine in Tomaž kupijo žogo, ki stane 5.400.— din. Plačilo si razdelijo v razmerji 1 : 2 : 3. Koliko din prispeva Marko?

3. V pravokotnem trikotniku meri ena kateta 14 cm, druga pa 13 cm. Izračunaj kvadrat hipotenuze.

ŠTEVILSKA KRIŽANKA



6. V trapezu meri osnovnica a 50 cm, osnovnica c 40,5 cm in višina na osnovnico 12 cm. Izračunaj ploščino tega trapeza.

8. Točka T je od središča kroga oddaljena 25 cm. Dotikališče tangente na ta krog skozi točko T je od točke T oddaljeno 8 cm. Izračunaj kvadrat polmera kroga.

10. $150 : y = 20 : 40$. Določi y !

11. Ploščina pravokotnika meri 600 cm^2 . Stranica a meri 3 cm. Izračunaj stranico b .

Bernarda Tržok

BI ZAPELI?

Kako daleč je že šolsko leto 1985/86. Nekateri, sedaj že študentje, so bili takrat dijaki 4a, razreda priljubljene tovarišice Lidijske na SNM šoli v Idriji. A čeprav se je medtem zgodilo že mnogo stvari, imajo gotovo vsi še trdno v spominu (posebej najlepše) srednješolske dogodivščine.

Na maturantskem plesu, s katerim so se poslavljali od srednješolskih klopi, so se z mnogo veselja, pa tudi s priokusom, da je nekaj lepega za njimi, na duhovit in veder način spomnili svojih učiteljev. Na znane melodije so jim zapeli pesmi, ki so jih sami spesnili — vsakemu učitelju posebej seveda.

Ko pred fiziko stojimo
tresoč in bledikavi,
za vrati si že brusi nože
živa legenda Idrije.

Zavriskaj in zapoj
neugnani Joža moj,
ko boš od šole tolko preč,
da te ne bomo čuli več!

Saj vemo vsi,
da se tudi ti
z nami veseliš
nedelj in športnih dni.

Krepak pogum in dobra volja
premagata ovire vse,
sigurno je, da mila jera
ni ne za nas, ne Karčnike.

Zavriskaj in zapoj
ponosni Joža mo,
ko bo čez leto ali dve
ti Terček s televizije,

povedal da,
tra—la—la—la—la
Nobelova nagrada je
nam namenjena!

Oh, kako je to hudo,
če račun ne gre v glavo.

Odvodi tu, tam integrali
zapleteni so postali.

Irena trudi se za tri,
vse tako težko se zdi.

Smo te prvič poslušali,
le seštevati smo znali.

Sama rekla si tako:
kaj vse še prišlo bo.

Zdaj je že veliko bolje,
s tabo ni nihče brez volje.

In prav kmalu bomo vsi
pravi matematiki.

Ko pred fi - zi - ko sto - ji - mo tre - so - či in ble - di - ka - vi, za vra - ti
 gum in do - bra vo - lja pre - ma - ga - ta o - vi - re vse, si - gur - no

si že bru - si no - že zi - va le - gen - da l - ari - je. Za - vriskaj in za - poj ne -
 je, da mi - la je - ra ni ne za nas ne Kar - čni - ke. Za - vriskaj in za - poj po -

ugna - ni Jo - za moj, ko boš od šo - le tol - ko preč, da te ne bo - mo ču - li več! Saj ve - mo
 no - sni Jo - za moj, ko bo čez le - ta a - li dve ti Ter - ček stele - vi - zi - je po - ve - dal

vsi, da se tu - di ti z na - mi vese - liš nedelj in športnih dni. Krepak po -
 da, tra - la - la - la - la No - be - lo - va na -

gra - da je nam na - me - nje - na !

Oh, ka - ko je to hu - do, če ra - čun ne gre v gla - vo.

Odvo - di tu, tam in - te - gra - li za - ple - te - ni so po - sta - li.
 Sma te pr - vič po - slu - ša - li, le se - šte - va - ti smo zna - li.
 Zdaj je že ve - ti - ko bo - lje, s ta - bo ni nih - če brez vo - lje.

Ire - na tru - di se za tri, vse ta - ko tež - ko se zdi.
 Sa - ma re - kla si ta - ko: kaj v - se še pri - šlo bo.
 In prav kma - lu bo - mo vsi pra - vi ma - te - ma - ti - ki.

Upam, da bo bralcem in še posebej nekdanjim dijakom in učiteljem, ta prispevek, ali osvežil prijetne spomine, ali, vam dragi mlajši bralci, dal idejo, kako ob kaki posebni priložnosti razvedriti vas in vašega učitelja. O tem, da lahko taka, ali podobna pesmica, ob pravem času, le razveseli učitelja, pa ne morem dvomiti.

Damjan Kobal

Škrat ne aŋnaw

V letošnji četrti številki Preseka je škrat v članku "Metoda "ostrega pogleda" v programiranju" poskusil, kako dober je v spopadu s programskimi jeziki. Pri-
znati moramo, da mu je poskus zadovoljivo uspel. Ervin KOSTELEC z Ljublja-
ne nam piše takole:

V letošnji četrti številki Preseka sem prebral članek o metodi ostrega pogleda. Končna algoritma pri obeh nalogah sta res mojstrska. Pogledal sem program "Obrni", vendar ga kot takega nisem razumel. Ugotovil sem, da je vmes napaka – in to sintaktična pa tudi semantična.

Pravilni podprogram bi moral biti takšenle:

```
procedure Obrni (prvi, zadnji : integer);
```

```
var i : integer;
```

```
pom : char;
```

begin

```
for i:= prvi to (prvi + zadnji - 1) div 2 do begin
```

```

pom := a [ i ];

```

$$a[i] := a[zadnji - i + prvi]; \quad a[zadnji - i + prvi] := pom$$

end

end:

Mimogrede, časovna odvisnost je $k + n - k + n = 2n$, torej $O(n)$.

Tudi algoritem za drugo nalogo je mojsterski, v drugi verziji programa pa ime zanke ni desni, ampak i (ali pa vsota := vsota + a [desni], zanka "for levi" pa zajema sestavljeni stavek in zato na koncu (za do) begin, pred write pa end.

Sandi Klavžar

Številске križanke navdušujejo

Bernarda TRŽOK iz Črnomlja nam piše:

Letos obiskujem osmi razred osnovne šole. Že nekaj let sem naročena na Presek, ki mi je zelo všeč, čeprav vseh prispevkov še ne razumem.

Obiskujem tudi dodatni pouk iz matematike. Letos smo reševali različne številske križanke, ki jih v Preseku objavlja tovariš Franci Oblak. Le-te so me tako navdušile, da sem še sama sestavila eno. Sicer je preprosta, namenjena zlasti osnovnošolcem.

Moji sošolci, ki so naročniki Preseka, tudi menijo, da bi bilo dobro, če bi bilo več nalog, ki bi bile primerne za nas.

Prisrčen pozdrav!

Bernarda

Bernarda, upamo, da bo zaradi tvojega pisma in prispevka Presek tebi in vsem našim bralcem še bolj všeč. Praviš, da je tvoja križanka preprosta – ali ni to pozitivna lastnost? Ob tem, da še ne razumeš vseh prispevkov, bi se, ne čisto za hec, spomnili Schweitzerjeve misli – najdemo jo v tem Preseku – ki pravi, da tistim, ki imajo pravi odnos do znanosti, ta pokaže njihove meje ...

Tudi mi tebe prisrčno pozdravljamo. Še nam piši in še kdaj razveseli nas in naše bralce s kakim svojim prispevkom.

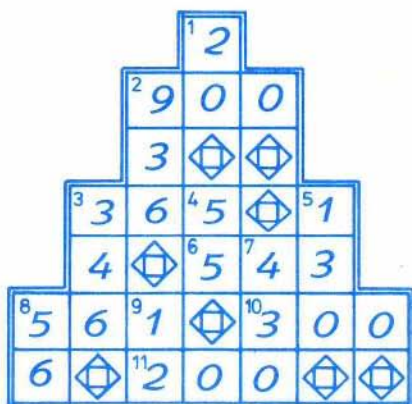
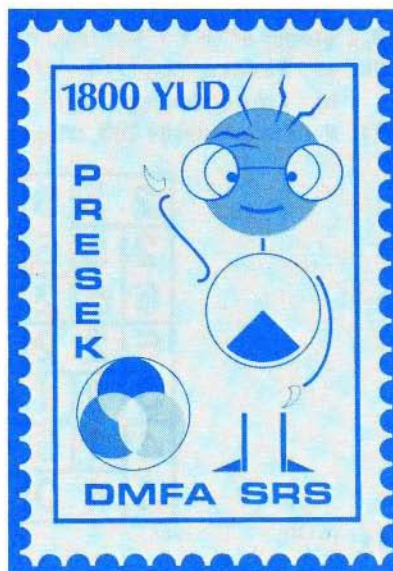
Damjan Kobal

Še vedno aktualne znamke

Tretje pismo pa nam je poslala Marija iz Ljubnega ob Savinji. Všeč so ji znamke, ki jih objavljamo. Tudi ona jih zbira in bi jih rada imela.

Objavljenih znamk ji ne moremo poslati, saj jih vračamo pošiljateljem. Mogoče pa ji lahko pomaga kdo izmed bralcev. Morda bi se kateri želel dogovoriti za zamenjavo.

Dušica Boben



ŠTEVILSKA KRIŽANKA –
Rešitev s strani 377

Bernarda Tržok

ZA MARIKOGA – Rešitve s strani 342

1. Prvo kocko dobimo iz druge mreže.
2. $(1 + 9 + 8 + 8 + 1 + 9 - 8)(8 \cdot 1 \cdot 9 - 8 : 8) = 1988$
3. $(1 + 9 + 9 + 9)(8 \cdot 9 - 1) = 1988$
4. Drugemu tetraedru pripada druga mreža.
5. $P_1 = \sqrt{3}/2 a^2, P_2 = 9 \sqrt{3}/16 a^2$
6. Oglati kolobar pokriva 20 odstotkov kvadrata. Ploščina kače meri 51π .
7. Zorni kot meri 60° .
8. Glej sliko.
9. Število $a^2 + a + 1$ je liho, torej ne more biti cel večkratnik števila 1988.
10. a) Ploščina meri $(7/4 + \pi/16)a^2$.
b) Prostornina meri $(19/8 + 5 \pi/24)a^3$.
11. Prvo telo sestavlja 208, drugo pa 400 kockic.

2	5	6	1	6	6	0	5
2	5	6	3	3	6	4	1
6	6	2	3	2	0	4	3
6	2	2	0	0	4	5	0
3	2	1	0	1	1	1	3
4	1	5	4	1	5	4	2
4	4	0	3	5	5	3	0

12.

Bojan je nabral manj borovnic kot Ančka, saj bi v nasprotnem primeru skupaj z Borko nabrala več kot Ančka in Andraž. Andraž je namreč nabral manj kot Borka, skupaj z Bojanom pa tedaj manj kot dekleti.

13.

Iz prvega dela naloge izvemo, da je Matjaž šest let starejši od Alenke. Če njeno starost označimo z x (njegova je potem $x + 6$), nam drugi del naloge da zvezo $x + 9 = 2(x - 3)$, odkoder dobimo $x = 15$.

Boris Lavrič

Matematika

1. Matrike kot posplošitev pojma števila (Anton Suhadolc)	2–7, 104 – 111
2. Čemu naj verjamem, čemu naj verjamem (Vilko Domanjko)	8 – 10
3. Obrat Ptolomejevega izreka (Šefket Arslanagić, Dragoljub Milošević, prev. in prir. Tomaž Košir)	11 – 13
4. Kotne funkcije (Damjan Kobal)	56 – 60
5. Kompleksna števila (Franci Forstnerič)	98 – 103
6. O simetralah notranjega kota trikotnika (Dragoljub M. Milošević, prev. in prir. Franci Forstnerič)	131 – 133
7. Ogledimo se za kongruence (Boris Lavrič)	193
8. Kongruence in Eulerjev izrek (Dušan Pagon)	194 – 196
9. O treh hišah in treh vodnjakih (Olga Arnuš)	242 – 243
10. Število razkosanj končne množice (Marko Razpet)	244 – 249
11. Geometrijska neenakost na dva načina, prir. po Šefket Arslanagiću	250 – 251
12. S ploščino do Talesovih izrekov o sorazmerjih (Boris Lavrič)	258 – 260
13. Primer geometrijske konstrukcije (Marko Razpet)	261
14. Vsota kvadratov prvih n naravnih števil (Marko Razpet)	262 – 263
15. O znameniti točki trikotnika (Olga Arnuš)	264 – 266
16. Aksiomatika, protislovje, model (Franci Oblak)	267 – 269
17. Težave s trinajsto kroglo (Boris Lavrič)	345 – 347
18. Ploščina Napoleonovega trikotnika (Boris Lavrič)	348 – 351
19. Ptolemejev izrek (Tomaž Košir, Dragoljub M. Milošević)	352 – 357
20. Cauchyjeva neenakost (Roman Drnovšek)	355 – 357
21. Šahovski kralj z omejeno svobodo gibanja (Marko Razpet)	358 – 361
22. Zaklad na samotnem otoku (Marko Razpet)	362 – 365

Fizika

1. Planet malega princa (Janez Strnad)	14 – 20
2. Teorija in poskus ... (Janez Strnad)	116 – 121
3. Teža v jašku, ... (Janez Strnad)	140 – 145
4. Temperatura teles ob dotiku (Janez Strnad)	146 – 153
5. Hoja po žarečem kamenju (Janez Strnad)	210 – 212, 215
6. Mačja zibka in fizika danes (Zbral in prir. Janez Strnad)	290 – 292
7. Ali ugasne padajoča sveča (Janez Strnad)	369 – 373

Astronomija

1. Začetki merjenja v astronomiji – Aristarh in Eratosten (Janez Strnad)	22 – 27
2. Izmeri kotno hitrost vrtenja Zemlje (Marijan Prosen)	114 – 115
3. Meglice na nočnem nebu (Tomaž Zwitter)	136 – 139
4. Kako poskušaj ločljivost daljnogleda (Marijan Prosen)	202 – 203
5. Gibanje Lune (Tomaž Zwitter, karik. Borut Pečar)	204 – 208
6. Zanimiva opazovanja z gnomonom (Marijan Prosen)	294 – 297
7. Opazuj planete (Marijan Prosen)	374 – 376

Računalništvo

1. Reševanje enačb z metodo zaporednih približkov (M. Jerman, D. Grešak)	28 – 33
2. Krivulje in HISOFT PASCAL (Marko Razpet)	33 – 35
3. Mačka in miška (Rok Sosič)	36 – 39
4. Juliajeva množica (Emil Beloglavec, Mitja Lakner, Andrej Vitek)	67 – 73, 161 – 168
5. Kdaj bomo (smo) putovali (Marko Razpet)	74 – 46

Računalništvo — nadaljevanje

6. Tri naloge za generator slučajnih števil (Janez Žerovnik)	188 — 192
7. Metoda "ostrega pogleda" v programiranju (Tomi Dolenc)	198 — 201
8. Podatkovne strukture — vrsta (Matija Lokar)	275 — 278
9. Računalniška grafika (Marjan Bradeško)	280 — 287
10. Računanje kvadratnega korena (Mitja Lokar)	322 — 325
11. T _E X (Mitja Lokar)	326 — 332

Tekmovanja

1. Občinsko tekmovanje iz matematike (Pavle Zajc)	77 — 79, 122 — 124
2. 23. republiško tekmovanje osnovnošolcev iz matematike (Aleksander Potočnik)	80 — 83, 125 — 127
3. 2. republiško tekmovanje iz znanja računalništva za osnovnošolce (Ivan Gerlič)	87 — 93
4. 3. šolsko in 13. izbirno tekmovanje iz matematike (Darjo Felda)	84 — 86, 176 — 177 178 — 181
5. 31. republiško tekmovanje srednješolcev iz matematike (Nadja Ivanc Milošević)	226 — 227
6. Srednješolsko republiško tekmovanje iz fizike (Iztok Kukman)	228 — 232
7. 11. republiško tekmovanje iz znanja računalništva in srečanje mladih raziskovalcev Slovenije (Tadej Lasbafer)	233 — 335
8. 2. republiško tekmovanje iz logike (Izidor Hafner)	236 — 241, 312 — 316
9. 28. zvezno tekmovanje učencev srednjih šol iz matematike (Aleksandar Jurišić)	298 — 300
10. 18. zvezno tekmovanje osnovnošolcev iz matematike (Jože Antolovič)	317 — 319 301 — 302
11. 23. zvezno tekmovanje mladih fizikov (Bojan Golli)	303 — 307
12. 18. mednarodna fizikalna olimpiada (Andrej Vilfan)	308

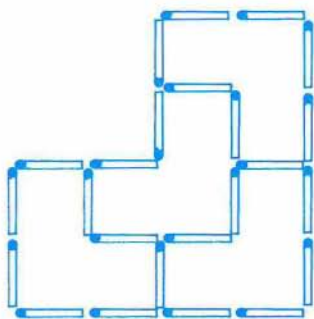
Naloge

1. Nekaj matematičnih nalog za osnovnošolce (Učitelji matematike in fizike iz Slovenskih Konjic)	40 — 42, 61 — 63
2. Naloge o Luninih menah (Janez Ferber)	43, 64
3. Smrketa na jezeru (Franci Oblak, reš. Peter Petek)	54, 256
4. Dane so štiri točke ... (Franc Lebedinc)	103, 128
5. Pisali so nam (prir. Damjan Kobal)	112 — 113
6. Poišči vsa trimestna števila, ki so enaka vsoti fakultet svojih cifer (Marija Vencelj)	134
7. Nagradna naloga: V počastitev Ramanujanove stoletnice (Marko Petkovšek)	172 — 173
8. Nekaj nalog iz matematike za učence od 5. do 8. razreda (Pavle Zajc)	169 — 171 182 — 186
9. Šestmestno število (Marija Vencelj)	197, 249
10. Od ene naloge k drugi (Miha Štalec)	213 — 215, III
11. Magični dodekaeder (Boris Horvat)	338 — 341
12. Za marsikoga (Boris Lavrič)	342 — 344, 382
13. Naloge (Boris Lavrič)	347, 357, 366, 335

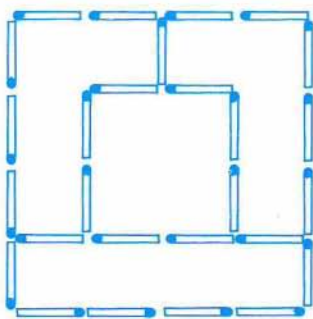
Novice

1. Kako nisva postala milijonarja (Boris Hrovat, Miro Lozej)	44 — 49
2. Srečanje mladih raziskovalcev (Zvonka Kos, Pavla Ranzinger)	94 — 95
3. Ob stoletnici Ervina Schrodingerja (Janez Strnad)	154 — 157
4. Računalništvo nekoliko drugače (Veselo Guštin)	216 — 219
5. Mladi fiziki so tekmovali (Miro Trampuš)	336

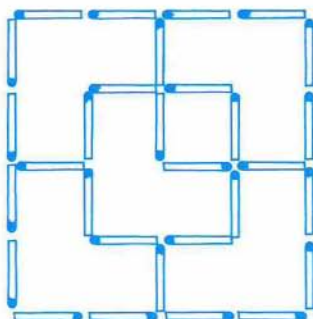
61



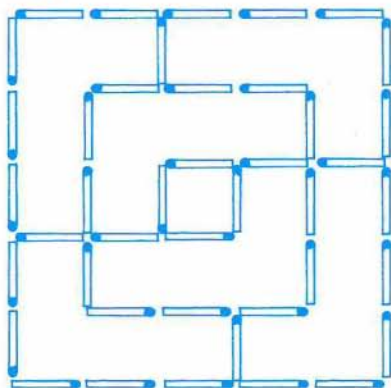
62



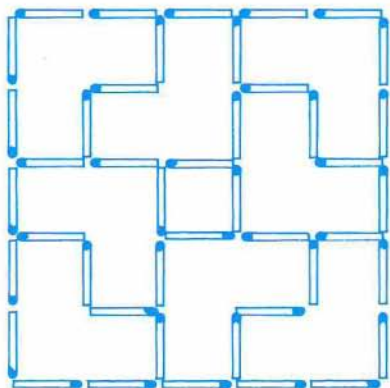
63



64a



64b





V letošnjih številkah Preseka smo vam priporočili nekaj novih zanimivih knjig, na tej strani pa predstavljamo naslovnice štirih med njimi.

