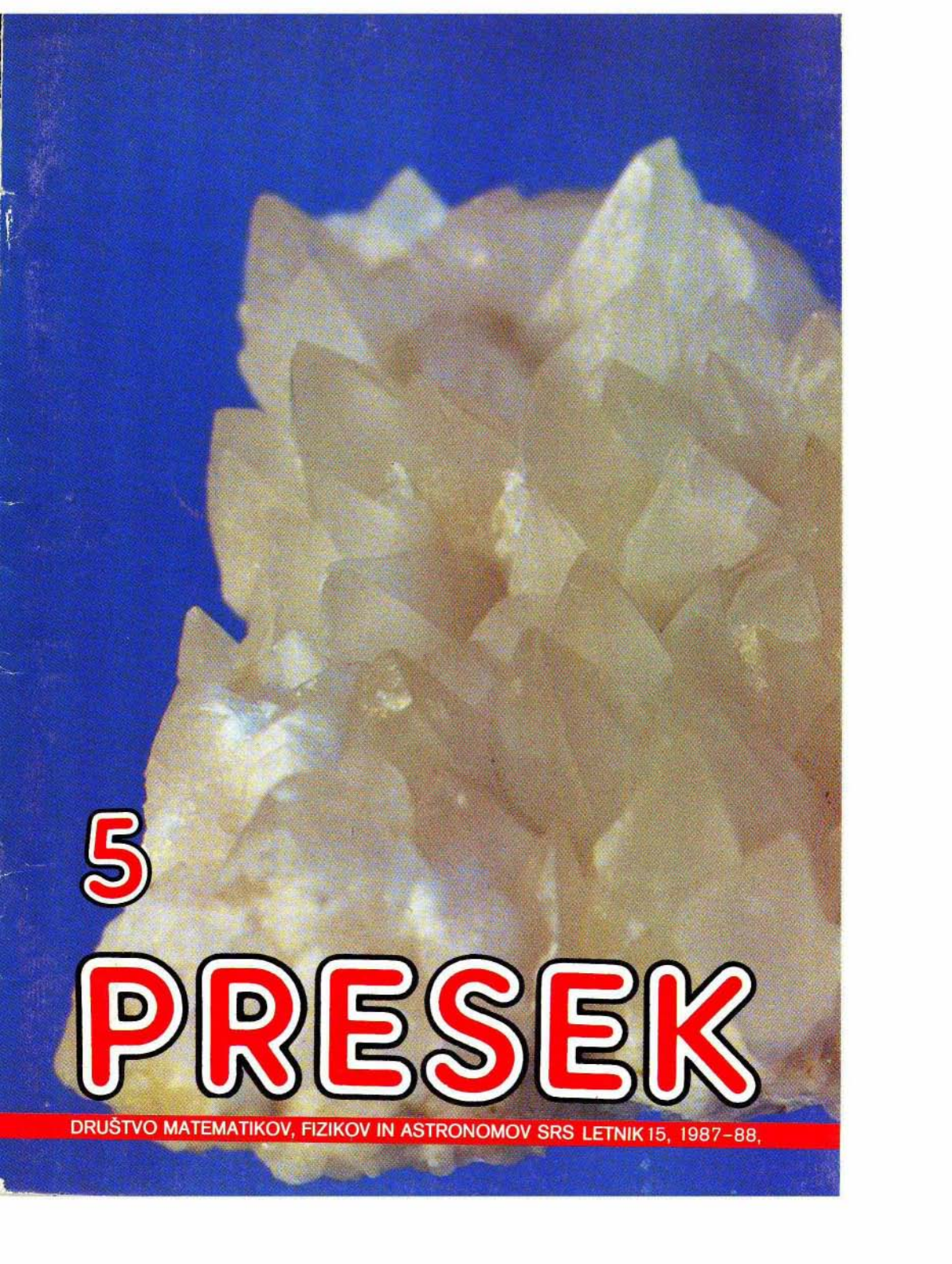
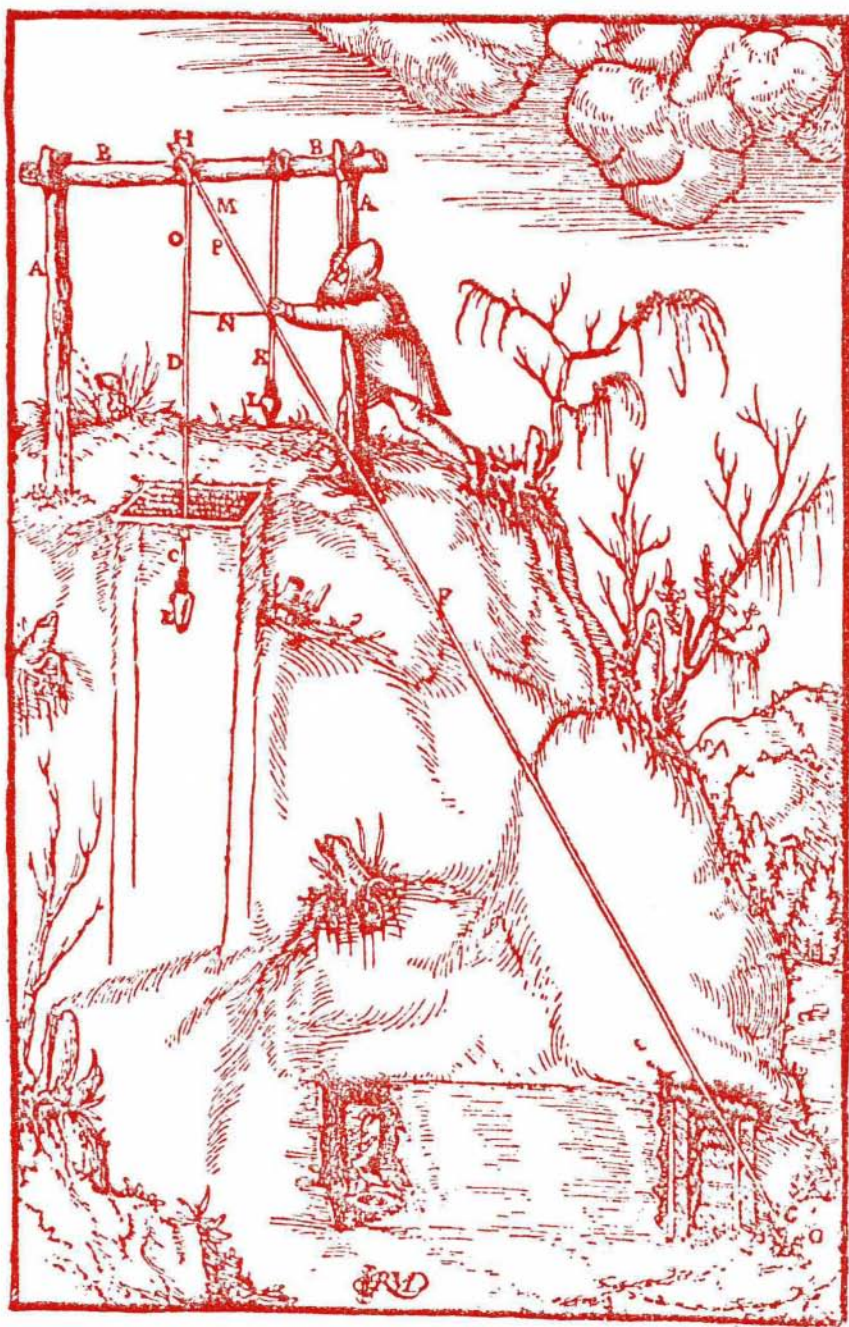




5

PRESEK

DRUŠTVO MATEMATIKOV, FIZIKOV IN ASTRONOMOV SRS LETNIK 15, 1987-88,

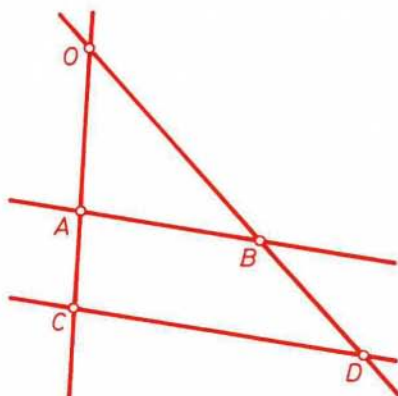


VSEBINA

MATEMATIKA	S ploščino do Talesovih izrekov o sorazmerjih — Namigi in odgovori (Boris Lavrič) II, 320, 258 Primer geometrijske konstrukcije (Marko Razpet) 261 Vsota kvadratov prvih n naravnih števil (Marko Razpet) 262 O znameniti točki trikotnika (Olga Arnuš) 264 Aksiomatika, protislovje, model (Franci Oblak, karikatura Božo Kos) 267
NOVE KNJIGE	Smullian R., Poznate naslov te knjige? (Damjan Kobal) 272 Strnad J., Meri platno, trak na vatle (Jože Kotnik) 273
RAČUNALNIŠTVO NOVICE	Podatkovne strukture — vrsta (Matija Lokar) 275 Principia mathematica (Tomaž Pisanski, Robin J. Wilson) IV, 279
RAČUNALNIŠTVO FIZIKA	Računalniška grafika (Marjan Bradeško) 280 Mačja zibka in fizika danes (Zbral in prevedel Janez Strnad) 290
ASTRONOMIJA TEKMOVANJA	Zanimiva opazovanja z gnomonom (Marijan Prosen) III, 294 28. zvezno tekmovanje učencev srednjih šol iz matematike (Aleksandar Jurišić) 298 18. zvezno tekmovanje osnovnošolcev iz matematike — rešitev str. 317 (Jože Antolovič) 301 23. zvezno tekmovanje mladih fizikov (Bojan Golli) 303 18. mednarodna fizikalna olimpiada (Andrej Vilfan) 308
REŠITVE NALOG	2. republiško tekmovanje iz logike za osnovnošolce in srednješolce — rešitve iz P-4, str. 236 (Izidor Hafner) 312
RAZVEDRILO	Dvojčka (Boris Lavrič) 268 BISTROVIDEC — Turbine (Vladimir Batagelj) 270 Zaporedji — rešitev str. 319 (Boris Lavrič) 272 Zloženka — rešitev str. 311 (Dragoljub M. Milošević) 271 SLIKOVNA KRIŽANKA in rešitev iz P-4 (Marko Bokalič) 287, 288 Čisto ta pravi, le premalo ga je (Bojan Žižek) 293
NA OVITKU	Kristali kalcita (CaCO_3) iz pokrajine Minas Gerais v Braziliji (foto Renato Vidrih). Za razliko od kristalov, ki jih obravnava članek na strani 290, so to naravni kristali. Zrasli so pod fizikalnimi in kemičnimi pogoji, ki nastopajo v določenih predelih Zemljine skorje. I Glej pripombo na strani 260 II Glej članek na strani 294 III Glej prispevek na strani 279 IV

S PLOŠČINO DO TALESOVIH IZREKOV O SORAZMERNOSTI

Presekajmo poltraka s skupnim izhodiščem O z dvema vzporednicama. Ena naj ju seče v točkah A in B , druga pa v C in D , kot kaže slika 1.



Gotovo veste, da potem veljata enakosti:

$$\frac{d(O, A)}{d(O, C)} = \frac{d(O, B)}{d(O, D)}$$

in

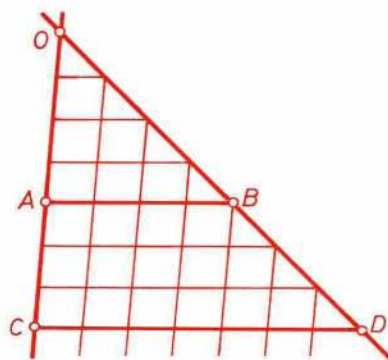
$$\frac{d(O, A)}{d(O, C)} = \frac{d(A, B)}{d(C, D)}$$

Ugotovitvi sta znani pod imenom *Talesova*★ izreka o sorazmerjih. Ste že kdaj podvomili o pravilnosti te trditve? Najbrž ne, saj jo še po dveh tisočletjih in pol uče v šolah. Toda takšni razlogi nas ne smejo zavesti. Kar pogledajte, koliko časa je "bila"

Zemlja ravna plošča — pa so se našli dvomljivci (menda je bil prav Tales med prvimi), ki so utemeljevali, da je okrogla★★. In kdo je imel prav?

Toda, kako uvideti, da se Tales tudi v svojih dveh izrekih ni motil? Podkrepiti ju bo treba z razlago, kar je storil tudi on sam. Če naj razlagi verjamemo, smemo v njej uporabljati le dejstva, ki se nam zde bolj očitna. V našem primeru se bomo, kot je že v navadi zanj, oprli na izrek o skladnosti trikotnikov.

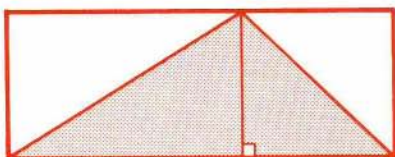
Denimo, da sta daljici OA in OC soizmerljivi — torej, da obstaja takšna daljica, npr. OE , da sta dolžini $d(O, A)$ in $d(O, C)$ obe cela večkratnika dolžine $d(O, E)$. Potem nam že



slika 2 dokazuje Talesova izreka za ta primer — le skladnost malih trikotnikov je treba poznati, pa gre (glej I. Pucelj — I. Štalec, Geometrija za 11.

razred gimnazije). Če OA in OC nista soizmerljivi, je izrek mogoče dokazovati na podoben način, a ni prav preprosto. — Poskusite!

Zato se bomo ognili takemu načinu in težave, na katere bi naleteli, skrili v naslednji privzetek: pravokotnik, katerega stranici merita a in b , ima ploščino ab (upam, da mu verjame). Izrek o skladnosti trikotnikov uporabimo zgolj za potrditev formule za ploščino trikotnika. Dovolj o tem



pove slika 3 (pravokotnik zgradimo nad stranico, ob kateri sta ostra kota). Od tod takoj dobimo naslednje tri ugotovitve.

1. Trikotnika z enako dolgo stranico in enakima višinama nanju imata enaki ploščini.

$$p(OCB) = p(OAD) \quad (1)$$

S pomočjo druge ugotovitve najdemo

$$\frac{d(O, A)}{d(O, C)} = \frac{p(OAB)}{p(OCB)}, \quad \frac{d(O, B)}{d(O, D)} = \frac{p(OAB)}{p(OAD)}, \quad \frac{d(A, B)}{d(C, D)} = \frac{p(ADB)}{p(CDB)} \quad (2)$$

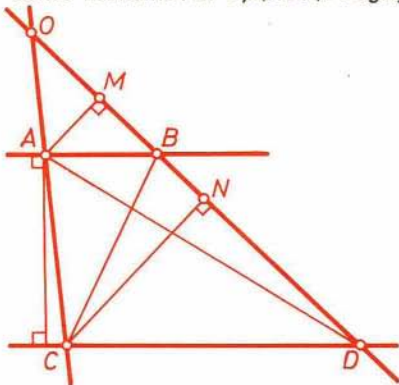
tretja pa pove, da je

$$\frac{p(OAB)}{p(OCB)} = \frac{d(A, M)}{d(C, N)} = \frac{p(ADB)}{p(CDB)} \quad (3)$$

Upoštevajmo (1) in s primerjavo prvih dveh enakosti v (2) že dobimo prvi Talesov izrek: $d(O, A) : d(O, C) =$

2. Kvocien ploščin dveh trikotnikov z enako dolgima višinama je enak kvocientu nanju pravokotnih stranic.
3. Kvocien ploščin dveh trikotnikov z enako dolgima stranicama je enak kvocientu ustreznih višin.

Uporabimo jih, še prej pa se dogovorimo za naslednjo oznako. Ploščino poljubnega trikotnika RST bomo zaznamovali s $p(RST)$. Poglej-

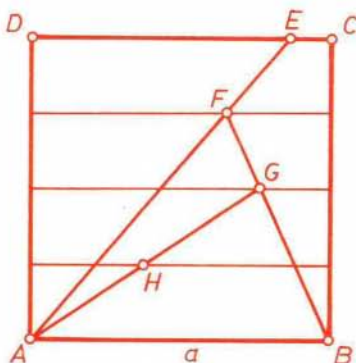


mo zdaj sliko 4. Prva ugotovitev nam da enakost $p(ACB) = p(ADB)$, odkoder vidimo, da velja tudi

$= d(O, B) : d(O, D)$. Če pa pričnemo s prvo enakostjo v (2) in preidemo po mostu (3) na zadnjo enakost v (2), je

pred nami drugi Talesov izrek: $d(O, A) : d(O, C) = d(A, B) : d(C, D)$. Dokaz je končan, sestavek pa naj sklenejo naloge.

1. Točka E na stranici CD kvadrata $ABCD$ s stranico $a = 15$ cm je od oglišča C oddaljena 1 cm. Kvadrat s tremi premicami, vzporednimi osnovnici AB , razdelimo na štiri skladne pravokotnike. Nato na njih določimo



točke F , G in H , kot kaže slika 5 (EA , FB in GA so daljice). Poišči oddaljenost točke H od stranice AD .

2. Enakokrakemu trikotniku ABC z osnovnico AB je očrtan krog s polmerom 5. Kraka AC in BC razdelita premer kroga, ki je vzporeden AB , na tri enake dele. Koliko meri osnovnica AB ?

3. Na stranicah AB in BC kvadrata $ABCD$ ležita točki E in F tako, da velja $d(A, E) : d(E, B) = d(C, F) : d(F, B) = 1 : 4$. Daljica DE naj seka diagonalo AC v točki G , DF pa v točki H . Kolikšen del kvadrata pokriva trikotnik GHD ?

4. V trapezu je ena od osnovnic trikrat daljša kot druga. Z daljico, ki gre skozi sečišče diagonal in je vzporedna osnovnicama, ga razdelimo na dva dela. Ploščina večjega meri 54. Kolikšna je ploščina manjšega dela?

5. Premica ploščinsko razpolavlja trikotnik ABC in seka stranico AC v točki D , stranico BC v točki E , poltrak AB pa v točki F . Določi lego točk D in E , če veš, da sta ploščini trikotnikov CDE in BFE enaki.

Na strani 320 najdete tudi namige za reševanje teh nalog in odgovore.

Boris Lavrič

★ *Tales* iz Mileta (7.— 6. stol. pred našim štetjem) — eden izmed sedmih legendarnih grških modrijanov, utemeljitelj evropske filozofije (miletska šola) in oče grške geometrije. Vnaprej je izračunal sončni mrk za leto 585 pred n.š.

★★ V šestem razredu osnovne šole so nas učili, da Zemlja ni niti okrogla niti elipsoidne oblike, pač pa ima obliko geoida (?) (grško: *ge* — zemlja, *eides* — oblika).

Slika na II strani ovitka

Risba je iz pomembne knjige o rudarski tehnologiji iz leta 1530. V njej avtor Agricola povezuje teorijo in prakso. Tako na primer razloži, kako bi z izmeritvijo dostopnih podatkov (glej sliko) lahko s pomočjo Talesovih izrekov določili bodisi globino jaska ali dolžino vodovnega rova, ki naj bi ju izkopali tako, da se združita.

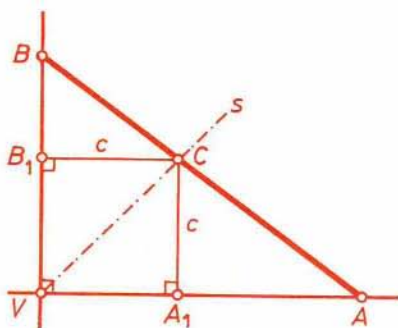
PRIMER GEOMETRIJSKE KONSTRUKCIJE

Dani sta daljici a in b . Konstruirati je treba daljico c , tako da je $1/a + 1/b = 1/c$.

Opisali bomo eno od možnih konstrukcij in jo utemeljili. Načrtamo pravi kot z vrhom V in simetralo s . Od vrha V odmerimo vzdolž enega kraka daljico $a = VA$, vzdolž drugega kraka pa $b = VB$. Premica skozi točki A in B seka simetralo s v točki C . Kvadrat VA_1CB_1 ima stranico c , ki jo hočemo konstruirati. Iz podobnih trikotnikov $\triangle A_1AC$ in $\triangle B_1CB$ dobimo razmerje $(a - c) : c = c : (b - c)$, iz česar sledi enakost $bc + ac = ab$. Če jo na obeh straneh delimo s produktom abc , dobimo $1/a + 1/b = 1/c$.

Primer uporabe. Opisana konstrukcija je uporabna za določitev nadomestnega upora R dveh vzporedno vezanih upornikov z uporoma R_1 in R_2 . Velja namreč, da je $1/R = 1/R_1 + 1/R_2$. Prav tako se da na ta način dobiti nadomestno kapaciteto C dveh zaporedno vezanih kondenzatorjev s kapacitetama C_1 in C_2 , ker velja tedaj enakost $1/C = 1/C_1 + 1/C_2$. Številске primere naj si bralec izbere sam.

Marko Razpet



Slika 1

OBVESTILO NAROČNIKOM

Individuealne naročnike na Presek vljudno prosimo, da nam čimprej nakažejo letošnjo naročnino v višini 2.700.— din in s tem prispevajo svoj delež k uspešnemu poslovanju in izdajanju lista za mlade matematike, fizike, astronome in računalnikarje.

Ciril Velkovrh

VSOTA KVADRATOV PRVIH n NARAVNIH ŠTEVIL

Zadnja številka Preseka v preteklem letniku prinaša prispevek, v katerem je prikazana metoda za izračun vsote

$$S_1(n) = 1 + 2 + 3 + \dots + n \quad (1)$$

Avtor daje bralcu za nalogo, da vsoto (1) sešteje še na kakšen drug način. Žal se ne morem spomniti, kje sem spoznal pot, ki si jo bomo zdaj ogledali ★. Šli pa bomo še korak naprej in izračunali vsoto kvadratov prvih n naravnih števil, to je vsoto

$$S_2(n) = 1^2 + 2^2 + 3^2 + \dots + n^2 \quad (2)$$

Vzemimo kvadrat s stranico n in ga razrežimo na n^2 kvadratov s stranicami 1. Ploščina prvotnega kvadrata je n^2 . Po drugi strani pa je njegova ploščina vsota naslednjih delov: ploščine enega vogalnega kvadrata, ploščina treh njegovih sosednjih kvadratkov, ploščine 5 nadaljnjih kvadratkov, s katerimi smo obrobili prejšnje 4, in tako naprej (če je seveda možno), dokler ne upoštevamo še zadnjih $n + (n - 1) = 2n - 1$ kvadratov. Velja torej

$$1 + 3 + 5 + \dots + (2n - 1) = n^2 \quad (3)$$

kar je razvidno na sliki. Če levo stran v enakosti (3) zapišemo v obliki

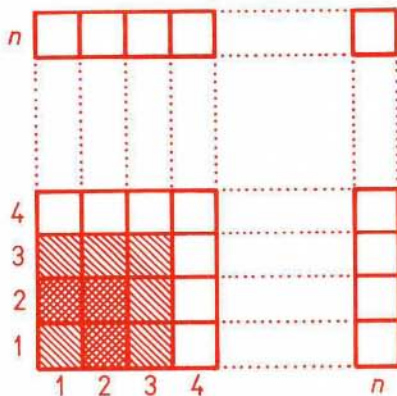
$$(2 \cdot 1 - 1) + (2 \cdot 2 - 1) + (2 \cdot 3 - 1) + \dots + (2n - 1)$$

potem dobimo po preureditvi

$$2S_1(n) - n = n^2$$

in končno

$$S_1(n) = \frac{n(n+1)}{2} \quad (4)$$



To nas navdihne z mislijo, da lahko vsoto (2) izračunamo na soroden način, le da namesto kvadrata vzamemo kocko.

Imejmo torej kocko z robom n in jo razrežimo na n^3 kockic z robovi 1. Prostornina prvotne kocke je n^3 . Po drugi strani lahko to prostornino še drugače izrazimo. Izberemo si eno od oglišč začetne kocke. Ustrezna vogalna kockica ima 3 sosednje kockice, ki imajo z vogalno skupen po en kvadratesk, 3 sosednje kockice, ki imajo z vogalno skupno samo po en rob, in eno sosednjo kockico, ki ima z vogalno skupno samo oglišče. Vogalna kockica ima torej 7 sosed. Z enakim premislekom ugotovimo, da ima vogalna kocka z robom 2 že 19 sosednjih kockic z robom 1: od teh se jih dotika vogalne 3.4 = 12 vzdolž kvadratov, 3.2 = 6 vzdolž robov in ena v oglišču. Vogalne kocke z robom $n - 1$ se dotika $3(n - 1)^2$ kockic vzdolž kvadratov, $3(n - 1)$ vzdolž robov in ena v oglišču. Prostornina začetne kocke je torej

$$1 + (3 \cdot 1 + 3 \cdot 1 + 1) + (3 \cdot 2^2 + 3 \cdot 2 + 1) + \dots + (3(n - 1)^2 + 3(n - 1) + 1) = n^3$$

Če to enakost nekoliko preoblikujemo, dobimo

$$(3 \cdot 1^2 - 3 \cdot 1 + 1) + (3 \cdot 2^2 - 3 \cdot 2 + 1) + \dots + (3n^2 - 3n + 1) = n^3$$

in od tod enakost, ki povezuje $S_1(n)$ in $S_2(n)$:

$$3S_2(n) - 3S_1(n) + n = n^3$$

Z upoštevanjem rezultata (4) dobimo

$$3S_2(n) = n^3 - n + 3 \frac{n(n+1)}{2} = \frac{n(2n^2 + 3n + 1)}{2}$$

in nazadnje

$$S_2(n) = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}$$

Naloge

1. Izračunaj: $100^2 + 101^2 + 102^2 + \dots + 999^2$
2. Reši enačbo: $S_2(n) = (3n - 2)^2$
3. Izračunaj.
 - a) $1^2 + 3^2 + 5^2 + \dots + (2n - 1)^2$
 - b) $1^2 - 2^2 + 3^2 - \dots + (-1)^{n-1}n^2$

Marko Razpet

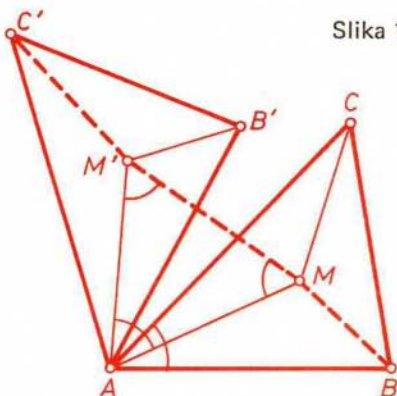
★ Morda v prispevku Jožeta Malešiča: *O formuli za vsoto prvih n naravnih števil*, PRESEK 2, ki omenja tudi vsoto kvadratov prvih n naravnih števil (Op. urednika).

O ZNAMENITI TOČKI TRIKOTNIKA

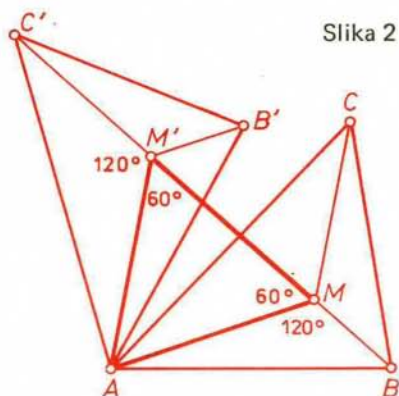
Predstavniki treh tovarn so se dogovorili, da bodo postavili skupno skladišče. Pri prevažanju blaga iz tovarn vanj bi radi imeli najmanjše skupne stroške. To pa pomeni (če druge ovire zanemarimo), da bo morala biti vsota razdalj od skladišča do vseh treh tovarn najmanjša.

Tovarnam priredimo točke A , B in C , skladišču pa točko M . Kako torej določiti M , da bo vsota razdalj od M do oglišč trikotnika ABC najmanjša?

Vsoto dolžin daljic lažje opazujemo, če daljice postavimo v zaporedno lego (začetek druge se ujema s koncem prve itd.). Da bomo to dosegli, zavrtimo trikotnik okrog oglišča A za 60° . Vrtež ohranja dolžino daljic, torej je trikotnik AMM' enakostraničen in velja $d(M, B) = d(M', B')$, $d(M, C) = d(M', C')$ in $d(A, M) = d(A, M') = d(M, M')$. Spomnimo se, da nas zanima vsota $d(M, A) + d(M, B) + d(M, C)$, ki pa je enaka vsoti dolžin daljic v zaporedni legi: $d(B, M) + d(M, M') + d(M', C')$. Želimo, da bi bila dolžina lomljene črte $BMM'C'$ najkrajša. To bo tedaj, ko bodo točke na isti premici, oziroma ko bo M na daljici BC' . Poglejmo sliko. Ugotovimo, da mora biti točka izbrana tako, da bomo iz točke M videli vsako stranico trikotnika pod kotom 120°



Slika 1



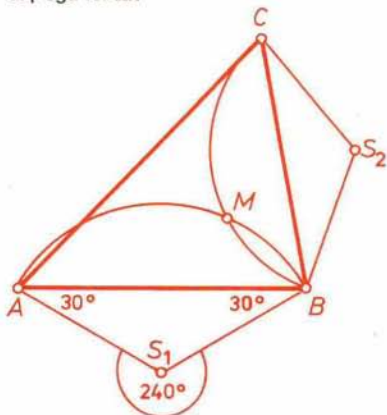
Slika 2

Kako pa tako točko konstruiramo?

Ena možnost: Zavrtimo trikotnik ABC okrog A za 60° v trikotnik $AB'C'$; M leži na daljici BC' . Nato zavrtimo trikotnik ABC še okrog B v trikotnik $BC''A''$; M leži na daljici AC'' .

Druga možnost: Bralci, ki vedo, da so v danem krogu vsi obodni koti nad istim lokom skladni in je središčni kot dvakrat večji od obodnega, bodo konstrukcijo točke M razbrali iz naslednje slike:

Pa se vprašajmo še, ali ima vsak trikotnik tako točko. Obe zgornji konstrukciji povesta, da je točka v notranjosti trikotnika, če noben kot trikotnika ne meri 120° ali več. V nasprotnem primeru je točka M kar vrh topega kota.



Slika 3

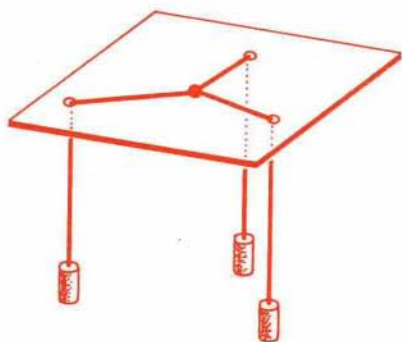
ZA PREDIH – NAGRADNO VPRAŠANJE BRALCEM

Zakaj je tedaj točka M vrh topega kota? Toda, te posebnosti nismo opazili v razmisleku o legi točke M . Je z dokazom kaj narobe? Odgovore na postavljene vprašanje pošljite na naše uredništvo. Najboljši med njimi bo nagrajen s knjigo J. Rakovec, Osnovni pojmi topologije.

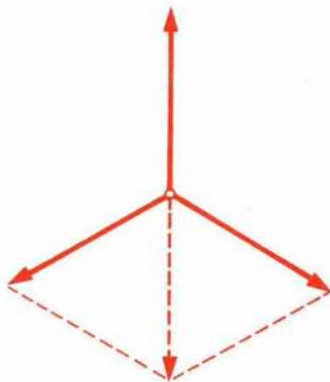
Urednik

Bralci ki so se že kaj ukvarjali z grafi (Presek že več let prinaša prispevke o tej matematični veji), bodo lahko ugotovili, da nam je rešitev našega problema dala Steinerjevo drevo za tri točke.

Rešimo še tole nalogo: Na vodoravni plošči so tri nekolinearne luknjice. Skozi vsako napeljemo vrvico, na vrvice obesimo enake uteži, nad ploščo pa vrvice zvežemo v skupen vozel. Kje se vozel umiri, ko vrvice spustimo, če trenja ni?



Slika 4



Slika 5

Kaj pravi fizika? Luknjice spremene samo smer sile, ne pa velikosti. Na plošči imajo sile smer vrvic. Ker so sile enako velike, je njihova vsota enaka nič, če oklepajo med seboj kote 120^0 .

In katera lega je stabilna? Tista, v kateri je potencialna energija najmanjša. Uteži se torej ustalijo najnižje, kar se da, zato pa ostane skupna dolžina vrvic na plošči v stabilni legi najmanjša. Pa smo spet pri točki iz prvega problema!

Olga Arnuš

Literatura:

I. Pucelj, I. Štalec, *Geometrija za 1. razred gimnazije*, 1966

PRESEK — list za mlade matematike, fizike, astronome in računalnikarje
15. letnik, šolsko leto 1987/88, številka 5, strani 257 — 320

UREDNIŠKI ODBOR: Vladimir Batagelj, Dušica Boben (pisma bralcev, stavljenje teksta), Darjo Felda (tekmovanja iz matematike), Franci Forstnerič, Bojan Golli (tekmovanja iz fizike), Marjan Hribar, Damjan Kobal (razvedrilo), Jože Kotnik, Edvard Kramar, Sandi Klavžar (računalništvo), Andrej Kmet, Peter Križan (fizika), Boris Lavrič (matematika, odgovorni urednik), Gorazd Lešnjak, Matija Lokar, Franci Oblak, Peter Petek (premisli in reši), Pavla Ranzinger (astronomija), Tomaž Skulj, Marjan Smerke (svetovalec za fotografijo), Niko Prijatelj (glavni urednik), Ivanka Šircelj (jezikovni pregled), Miha Štalec (risbe), Ciril Velkoverh (urednik, nove knjige, novice).

Dopise pošiljajte in list naročajte na naslov: Društvo matematikov, fizikov in astronomov SRS — Podružnica Ljubljana — Komisija za tisk, Presek, Jadranska c. 19, 61111 Ljubljana, p.p. 64, tel. (061) 265—061/53, št. žiro računa 50101—678—47233. Naročnina za šolsko leto 1987/88 je za posamezna naročila 2700.— din, za skupinska naročila pa 1800.—, posamezna številka 500.— din/400.— din.

List sofinancirajo Izobraževalna, Kulturna in Raziskovalna skupnost Slovenije

Ofset tisk Časopisno in grafično podjetje DELO, Ljubljana
© 1988 Društvo matematikov, fizikov in astronomov SRS — 909

ISSN 0351—6652

AKSIOMATIKA, PROTISLOVJE, MODEL

Učenci prvega razreda usmerjenega izobraževanja so sklenili izvesti šahovsko tekmovanje po naslednjem pravilu: vsak udeleženec mora igrati natanko tri partije. Barvo figur naj odloči žreb. Ko pa so hoteli napisati pravilnik tekmovanja, jim to ni uspelo. Na pomoč so poklicali profesorja matematike. Mate-



matik jih je vprašal, ali je število tekmovalcev sodo ali liho. Število tekmovalcev je bilo liho. Matematik je predlagal, naj napišejo pravila tekmovanja z aksiomi.

OSNOVNI POJMI

Uporabili so tri osnovne pojme: *igralec*, *partija*, *sodelovanje igralcev v partiji*. Napisali so štiri aksiome.

AKSIOMI

- | | |
|-------------------|--|
| A1 Prvi aksiom. | <i>Število igralcev je liho.</i> |
| A2 Drugi aksiom. | <i>Vsak igralec sodeluje v treh partijah.</i> |
| A3 Tretji aksiom. | <i>V vsaki partiji sodelujeta dva igralca.</i> |
| A4 Četrti aksiom. | <i>Za vsaka dva igralca obstaja kvečjemu ena partija, v kateri sodelujeta.</i> |

IZREKI

Prvi izrek je iz aksiomov izvedel matematik.

Prvi izrek. *Igralcev je vsaj pet.*

Dokaz. Ker je nič sodo število, po prvem aksiomu obstaja vsaj en igralec A. Ta igralec mora po drugem aksiomu sodelovati v treh partijah. V vsaki (od

treh) partij sodeluje razen njega še en igralec — po tretjem aksiomu. Imenujmo te igralce B , C in D . Po četrtem aksiomu so to trije različni igralci. Res! Če bi bil npr. igralec B isti kot C , bi imeli dve partiji, v kateri bi sodeloval igralec A in igralec B (oziroma C). Torej imamo že štiri igralce. Po prvem aksiomu pa je število igralcev liho, zato je vsaj pet igralcev.

Drugi izrek je dokazal bodoči raziskovalec — učenec Pepe. Najprej je postavil DEFINICIJO. Če je p neka partija in A igralec, ki igra v tej partiji, potem imenujmo par (p, A) *nastop* igralca A .

Drugi izrek. *Število nastopov igralca je sodo.*

Dokaz. Če v partiji p sodelujeta igralca A in B , potem dobimo dva nastopa igralcev: (p, A) in (p, B) . To pa pomeni, da vsaka partija po tretjem aksiomu da ravno dva nastopa igralcev. Zato mora biti število vseh nastopov igralcev sodo, saj je dvakrat tolikšno, kot je število partij.

Tretji izrek je dokazal bodoči politik — učenec Tomaž.

Tretji izrek. *Število vseh nastopov igralcev je liho.*

Pred dokazom uvidimo, da je tretji izrek v protislovju z drugim izrekom. Res! Število nastopov ne more biti hkrati liho in sodo.

Dokaz. Po drugem aksiomu igralec A sodeluje natanko v treh partijah.

DVOJČKA

Dve praštevili imenujemo dvojčka, če je njuna razlika enaka dva. S katerima dvema ciframa se konča produkt dveh praštevil dvojčkov, večjih od pet, če se ne konča s trojko?

Rešitev

Edina mogoča ostanka, ki ju dobimo pri deljenju praštevil $p > 3$ s šest, sta 1 in 5. Obravnavani par dvojčkov je torej oblike $6k - 1$, $6k + 1$ ($k \in \mathbb{N}$).

Če k ni deljiv s 5, potem k^2 lahko da pri deljenju z 10 ostanek 1, 4, 6 ali 9, produkt dvojčkov $36k^2 - 1$ pa se tedaj (v desetiškem zapisu) konča s cifro 3 ali 5. Po predpostavki naloge cifra 3 ne more biti na zadnjem mestu, 5 pa tudi ne, saj bi bilo v tem primeru eno odšobeh praštevil deljivo s 5.

Torej je število k deljivo s 5, produkt dvojčkov pa se konča s ciframi 99.

Boris Lavrič

Naj bodo to partije: p_1 , p_2 in p_3 . Zato ima igralec A tri nastope: (p_1, A) , (p_2, A) in (p_3, A) . Torej mora biti število vseh nastopov enako $3 \cdot n$, če je n število igralcev. Ker pa je n po prvem aksiomu liho število in je produkt dveh lihih števil liho število, je res vseh nastopov — liho število.

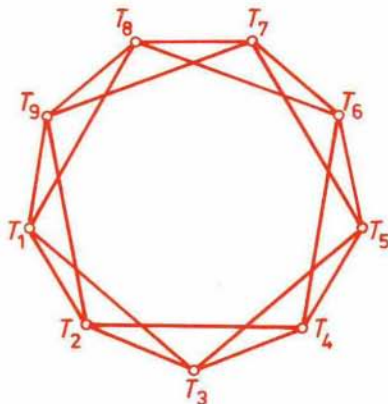
Matematik je povzel: Dana aksiomatika sicer omogoča dokazati nekaj izrekov, vendar sta med njimi dva, ki sta nasprotna. Tako aksiomatiko, v kateri moremo dokazati dve nasprotujoči si trditvi (izreka), imenujemo protislovna aksiomatika.

Posledica pa je, da tekmovanja po danih pravilih — aksiomih ni mogoče organizirati. Tak pravilnik ne obstaja — ni možen. Matematik je zatem predlagal, da pravilnik spremenijo v drugi točki. To je, namesto drugega aksioma A2 naj uporabijo aksiom:

A2' Drugi aksiom('). *Vsak igralec sodeluje v štirih partijah.*

In kaj se je zgodilo zdaj?! Matematik je prepričal učence, da v tem primeru ne more priti do protislovja, ne glede na to, koliko izrekov bodo izpeljali. Kako se mu je to posrečilo?

Oglejmo si pravilni devetkotnik. Oglišča naj predstavljajo igralce $I_1, I_2, \dots, I_9$. Povežemo zaporedoma vsa oglišča in vsako drugo oglišče. Povezave imenujemo partije. Igralca, ki sodelujeta v partiji, sta na krajiščih povezave. Npr.: Daljica $I_1 I_3$ predstavlja partijo, v kateri sodelujeta igralca I_1 in I_3 . S to sliko smo dobili model šahovskega turnirja. Kaj hitro uvidimo, da so vsi štirje aksiomi A1, A2', A3 in A4 izpolnjeni. Preverimo!



Ker je igralcev devet — to je liho število, A1 velja. Ker iz vsakega oglišča izhajajo štiri daljice, res vsak igralec sodeluje v štirih partijah: A2' velja. Ostala dva aksioma preveri sam.

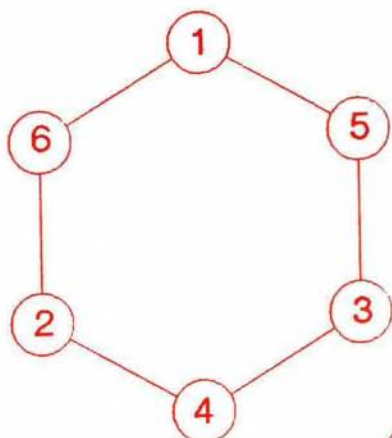
MODEL

Zdaj pa predpostavimo, da iz A1, A2', A3 in A4 izpeljemo dva nasprotna izreka. Kaj to pomeni? To pomeni, da moramo dokaz ponoviti tudi na modelu, ki ustreza aksiomom. Tedaj pa bi za devetkotnik veljala dva nasprotna izreka, kar pa ni mogoče. Zato mirno sklenemo: iz A1, A2', A3 in A4 ne moremo izpeljati nasprotnih izrekov.

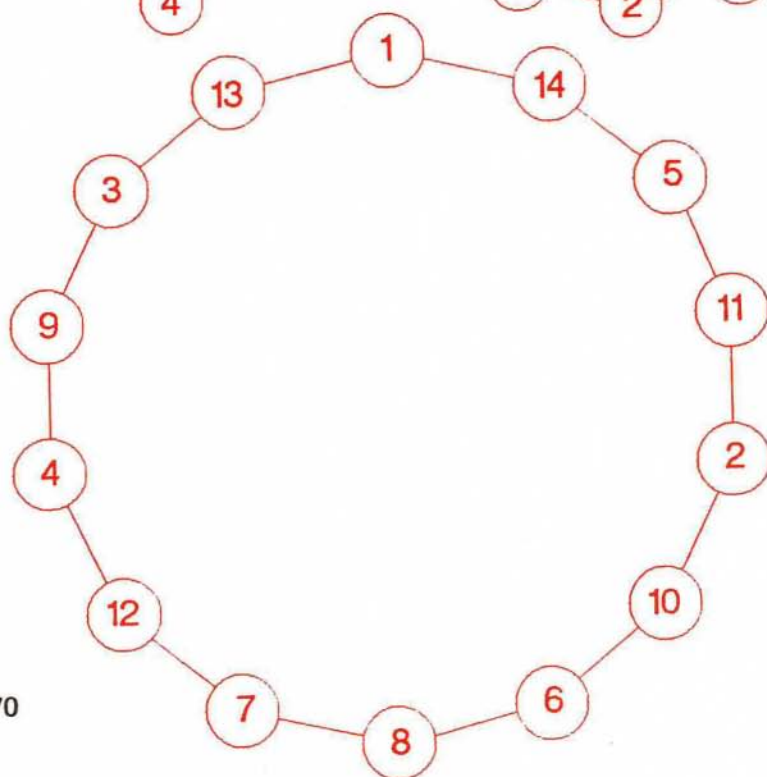
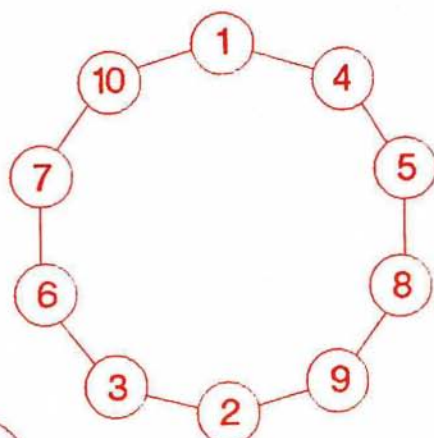
Franci Oblak

RAZVEDRILO

TURBINE



BISTROVIDEC



Pri izdelavi turbin zaradi tehnoloških ovir lopatice nimajo vse enake mase. Zato je zanimivo vprašanje, kako razmestiti danih n lopatic z znanimi masami $m_1, m_2, \dots, m_n$ v enakih razmakih po trupu turbine tako, da bo njihovo težišče čim bližje osi vrtenja turbine. Pri preverjanju programa za opisani problem smo za mase vzeli kar zaporedna naravna števila 1, 2, 3, ..., n . Dobili smo presenetljiv rezultat: pri nekaterih n dobimo uravnotežene rešitve, ki imajo ničelno razdaljo med težiščem in osjo (glej sliko).

Iz teh rezultatov si lahko zastavimo naslednji vprašnji:

- Težišče in razdaljo smo izračunali. Zato so mogoče računske napake, ki izvirajo iz lastnosti računalniške aritmetike. Ali so rešitve na sliki res uravnotežene?
- Za katere vrednosti n obstajajo uravnotežene rešitve? Koliko jih je? Kako so med seboj povezane?

Odgovorite na prvo vprašanje; na drugo vprašanje pa popolnega odgovora še ne poznamo.

Vladimir Batagelj

ZAPOREDJI

Dokaži, da je v vsakem od zaporedij

7, 37, 337, 3337, ...

3, 37, 377, 3777, ...

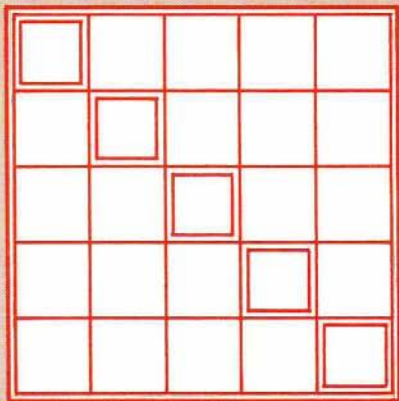
neskončno večkratnikov števila 37, a nobenega večkratnika števila 73. Velja to tudi v primeru, da povsod cifro 3 zamenjamo s 7 in cifro 7 s 3?

Boris Lavrič

ZLOŽENKA

Besede IZREK, KOČKA, OBSEG, STRAN in TOČKA razvrstite "vodoravno" v kvadrat tako, da bo na diagonali pojem iz matematike.

Dragoljub M. Milošević



NOVE KNJIGE

Smullyan R., POZNATE NASLOV TE KNJIGE?, DZS, Ljubljana 1987

Preberimo in razmislimo!

Ta stavek ima pet besed.

Knjige z naslovom "POZNATE NASLOV TE KNJIGE?" ni vredno prebirati.

Vsaj ena od teh treh izjav je nepravilna.

Ali smo neovrgljivo, brezpogojno dokazali, da je omenjena knjiga vredna branja?

Če je odgovor da, potem knjigo v roke in ob mnogih šalah, ugankah in problemih se boste učili logičnega, natančnega razmišljanja in nenazadnje, če ste bili prej "naplahtani", vas bo Smullyan prepričal, da morate to pripisati sebi ...

Nasmejali se boste starim in novim šalam, šalam na račun zmedenih profesorjev, slavnih znanstvenikov ... Včasih skoraj ponavljajoče se, nezanimive logične probleme boste srečali zavite v šaljive, skoraj verjetne življenjske zgodbe: Kako se znajti v svetu, kjer se lažnivci in resnicoljubi nič ne ločijo, kako iz vaše zmedenosti ugotoviti, v koga ste zaljubljeni, kako izbrati in prepričati nevesto ..., celo kako se poročiti s kraljevo hčerjo, se boste naučili. Tudi dekleta ne ostanejo praznih rok. Izbrati moža (ne glede na njegove vrline, ampak samo na njegovo pamet(!)) bo prava šala. Tudi težka filozofska vprašanja kot: Zakaj obstaja nekaj namesto nič? ... bodo razrešena na logičen in celo vsebinsko duhovit način. Najpazljivejši se bodo naučili celo, kako obogateti ...

Skupni imenovalc vse knjige je izvirna šaljivost in spretnost ter iznajdljivost razmišljanja v labirintu logičnih pasti.

Damjan Kobal

Misel je podobna kopanju vodnjaka: voda je najprej kalna, počasi pa se zbistri.
(Kitajska modrost)

Prava izvirna misel je še vedno tako redka kot zlatnik v kanalu.
(Christian Morgenstern)

J. Strnad, MERI PLATNO, TRAK NA VATLE; Fizikalni izlet k največjim in najmanjšim razdaljam, DZS, 1987

Janez Strnad popelje bralca v prijetnih pripovedih od izjemno velikih do silno majhnih razdalj po zavitih in zvutih poteh merilnih metod in zapletenih merilnih priprav. Pomikamo se iz sveta človeku dobro predstavljivih dolžin do komaj predstavljivih daljav prostranega vesolja in morda še težje predstavljivih razsežnosti v svetu osnovnih delcev in še dalj.

Predstavljajte si, da na jezerski gladini v majhnem čolničku vesla deček in ga v trenutku, ko mu seda na roko komar, snemajo s čudežno TV kamero. Kamera se od njega in od Zemlje oddaljuje. V nekaj trenutkih je čolnič z dečkom vred le še drobna pika na jezerski gladini. Kmalu se tudi jezero spremeni v piko in že izgine, saj se kamera vedno hitreje oddaljuje. Komaj še opazimo obrise Evrope in drugih celih na Zemlji, ki postaja vse manjša. Mimo kamere švigne Luna, nato čez čas še planeti in po nekaj trenutkih že najbližje zvezde. Že je kamera tako daleč, da je na zaslonu videti celo našo galaksijo. Čudežna kamera hiti še dalje. Galaksija se iz vesoljskih daljav zdi vse manjša. Na zaslonu se ji pridružijo druge, sosednje galaksije. A kamera hiti še dalje in nam iz največjih, komaj predstavljivih daljav, kaže medlo sliko razširjajočega se vesolja.

Čudežna kamera se iz daljav vrača na enak način in kmalu na zaslonu zagledamo dečka, ki ga bo zdaj zdaj pičil komar.

Oko kamere se mu bliža. Komarja vidimo vse bolj razločno. Njegovo želo je kot velika cev. Kamera je postala čudežni mikroskop, ki prodira v vse manjši, mikroskopski svet in še naprej. Zagledamo krvničke, ki so na zaslonu vse večje. Kamera se omeji na jedro ene od krvničk, bolj in bolj ga povečuje. Že zagledamo skupke beljakovinskih molekul in njih sestavne dele. Atomi so na zaslonu čudežne kamere na videz pravi velikani, ko že prodiramo v njihova drobna jedra in še naprej.

Vemo, da z navadnimi mikroskopi molekul ne vidimo, tudi elektronski mikroskop ne zmore tolike povečave kot naša čudežna naprava. Pa tudi ta se postopoma že vrača iz najmanjših razsežnosti submikroskopskega sveta, ki nam ga je predstavila le kot nejasno sliko na zaslonu. Vrača se v naš predstavi svet, k dečku, ki vesla po jezeru in je nadležnega komarja ravno odgnal.

Podatke o razdaljah, načinih merjenja, enotah, merilnih pripravah in več zanimivih dogodivščin v zvezi z merjenjem dolžine boste lahko prebrali v tej drobni knjižici.

Skoraj vsaka od 60 strani knjižice je obogatena s fotografijami ali ilustracijami, ki jih je narisal Božo Kos in lepo dopolnjujejo avtorjevo pripoved.

NOVI NATISI IN PONATISI PRI KOMISIJI ZA TISK DMFA

Pri Komisiji za tisk Društva matematikov, fizikov in astronomov SRS smo izdali v tem koledarskem letu že pet del: dve noviteti in tri ponatise. Med ponatise so le taka dela, ki so še vedno iskana na tržišču in uporabljana v šoli.

1) Lavrič B., REŠENE NALOGE IZ MATEMATIKE Z REPUBLIŠKIH TEKMOVANJ, 3. del, 1977 — 1987, 116 str., 10.000.— din (8.000.— din). Zbirka bi morala iziti že pred koncem lanskega leta, tako da bi jo učenci prejeli pravočasno za priprave na letošnje šolsko in republiško tekmovanje. Zaradi težav pri stavljenju matematičnega teksta na novih fotostavnih strojih je nastala v tiskarni neljuba zamuda. Zato knjige nismo poslali na ogled na vse šole, pač pa bomo to storili v jeseni.

2) Mohar B., Zakrajšek E., PROGRAMSKI JEZIK PASCAL, ponatis, 196 strani, 10.000.— din (8.000.— din).

Knjiga je kot pomožni učbenik za predmet računalništvo vse premalo znana honorarnim učiteljem tega predmeta. Zelo primerna pa je tudi za svobodne dejavnosti na šolah.

3) Prijatelj N., MATEMATIČNE STRUKTURE I, ponatis, 216 str., 10.000.— din (8.000.— din).

Kot pomožni učbenik je namenjen predvsem študentom matematike in računalništva na fakulteti. Primeren pa je tudi dijakom v srednjih šolah, ki se posebej zanimajo za matematiko.

4) Štalec I., ZBIRKA VAJ IZ ARITMETIKE, ALGEBRE IN ANALIZE za 4. razred srednjih šol, 120 str., 7.500.— din (6.000.— din).

Knjigo smo ponovno ponatisnili na željo nekaterih učencev in učiteljev, ki so po njej spraševali tudi še po razprodaji prejšnje zaloge. Predvidevamo, da bo zbirka dobrodošla ne le učiteljem v naravoslovnih usmeritvah, pač pa tudi drugim kot dodatna zbirka vaj za različne prilike: od tekmovanj do šolskih testov.

5) NAŠE NEBO IN ZEMLJA 1988 — Astronomske efemeride. Umetni sateliti. Potresi, 80 str., 2.700.— din (1.800.— din).

Knjižice letos nismo poslali na ogled vsem osnovnim in srednjim šolam. Priporočamo jo šolskim knjižnicam, ljubiteljem astronomije, še posebej pa članom astronomskih krožkov.

Pri vsaki knjigi navajamo maloprodajno ceno, v oklepaju pa ceno, ki velja za člane društva in skupinska naročila šol. Knjige so izšle predčasno za novo šolsko leto. Naročite pa jih lahko že letos, saj jim bomo morali zaradi hude inflacije cene v jeseni spremeniti.

Ciril Velkovrh

PODATKOVNE STRUKTURE – VRSTA

Kaja, Žiga in Nejc so se odpravili v kino.

"Ah, že spet vrsta!" zavzdihne Kaja, ko zagleda kačo ljudi, ki se vije pred blagajno.

"Ostali bomo brez kart," se ustraši Žiga. Zato se Nejc odpravi kar proti blagajni in se meni nič tebi nič postavi pred dekleti, ki ga, zaverovani v klepet, sploh ne opazita.

"Mi je le uspelo," se veseli. A prezgodaj! Nekdo ga potrepilja po rami in mu pokaže, kje je konec vrste.

Kot v vsakdanjem življenju moramo pogosto tudi v računalništvu vzdrževati določen red. Tako podatke vodimo v podatkovni strukturi. V zadnji številki lanskoletnega Preseka smo se že spoznali z eno od osnovnih struktur – s skladom. Ta bi našim trem prijateljem verjetno prej kar prav prišel, saj tam velja načelo "zadnji noter, prvi ven". Vendar moramo biti včasih tudi pri programiranju "pošteni" in spoštovati, da kdor prej pride, prej melje. Zato si oglejmo novo podatkovno strukturo, ki to omogoča. Imenovali jo bomo kar **vrsta**. Je zelo podobna skladu, saj sta obe strukturi le posebna primera splošnejše strukture z imenom **urejeni seznam**. Opraviti imamo torej z določenim zaporedjem podatkov. Tudi operacije nad vrsto so podobne operacijam nad skladom. Sprememba je le v vrstnem redu izločanja. Ker smo rekli, da je vrsta "poštena", bo prvi izločen tisti element, ki je v vrsto prišel prvi. Je torej FIFO (First In First Out) seznam. Elemente vstavljamo na enem **koncu** vrste in jih jemljemo na drugem (**začetku** vrste). Vrsto elementi zapuščajo v istem vrstnem redu, kot so vanjo prihajali. V nasprotju s skladom ima vrsta torej dva konca, kjer se nekaj dogaja.

Kakor smo formalno predstavili sklad, storimo tako tudi z vrsto.

structure vrsta (podatki, Boolean);

(* struktura sklad nad poljubno zalogo vrednosti podatek *)

begin

declare

(* pripravi prazno vrsto *)

pripravi : Ø ⇔ vrsta;

(* vstavi podatek v vrsto in vrne novo vrsto *)

vstavi : (podatek, vrsta) ⇔ vrsta;

```

( * vrne podatek, ki je na začetku vrste * )
začetek : vrsta ⇔ podatek;
( * izbriše prvi element vrste in vrne novo vrsto * )
odstrani : vrsta ⇔ vrsta;
( * ali je vrsta prazna? * )
prazna : vrsta ⇔ Boolean;

where
  prazna(pripravi) ::= true;
  prazna(vstavi(p, v)) ::= false;
  odstrani(pripravi) ::= napaka;
  odstrani(vstavi(p, v)) ::=
    if prazna(v) then pripravi else vstavi(p, odstrani(v));
  začetek(pripravi) ::= napaka;
  začetek(vstavi(p, v)) ::=
    if prazna(v) then p else začetek(v);
end.

```

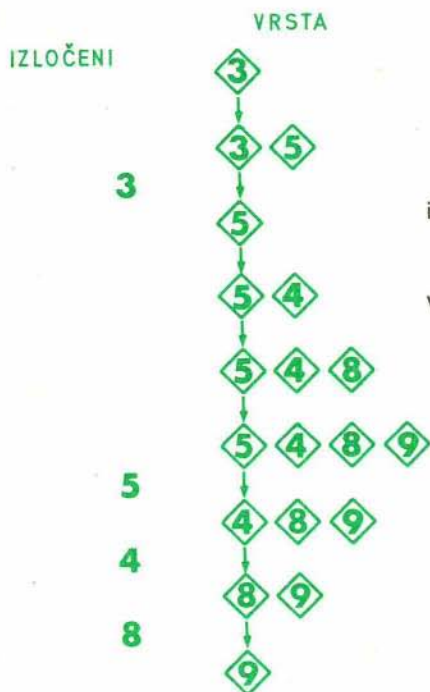
Da nam bodo operacije postale bolj domače, si oglejmo, kako se obnašata sklad in vrsta pri naslednjem zaporedju operacij odstrani in vstavi:

vstavi 3, vstavi 5, odstrani, vstavi 4, vstavi 8, vstavi 9, odstrani, odstrani, odstrani

(glej Sliko 1)

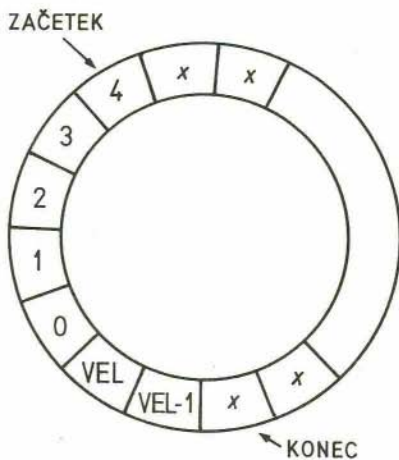
Kako pa je z uporabo vrste? Kot smo že omenili, uporabljamo vrsto tam, kjer želimo podatke obravnavati v istem vrstnem redu, kot jih dobivamo. Tako vrsto uporabljamo pri simulacijah, pri vzdrževanju vrstnega reda izpisovanja datotek na tiskalniku, pri dodeljevanju pomožnega pomnilnika ...

Tudi vrsto bomo predstavili s pomočjo tabele v basicu. Poznati moramo začetek in konec vrste ter vrstni red elementov. Ker se nam na enem koncu vrsta polni, na drugem prazni, mora biti predstavitev taka, da bomo sproščeni prostor z začetka spet uporabili za vstavljanje. Pri tem pa moramo seveda ohraniti pravilni vrstni red. Zato tabelo vodimo krožno, po modulu velikosti. Kaj pa je spet to — po modulu velikosti? Ustrezno mesto za vstavljanje izračunamo tako, da najprej povečamo konec vrste za eno. Nato določimo ostanek pri deljenju z velikostjo vrste. (V pascalu nam to opravi vgrajena funkcija mod, v basicu pa si jo bomo pripravili sami. Seveda mora biti basic, ki ga uporabljamo tak, da šteje polja od 0 dalje. Kaj pa če šteje polja od 1 dalje?) Pri tem naletimo na težavo, kako ločiti med prazno in polno vrsto. Zato se odpovemo enemu mestu v tabeli in z "začetek" označimo raje indeks zadnjega praznega mesta pred začetkom vrste. Tako je vrsta prazna, če je



začetek = konec
in polna, če je
začetek = (konec + 1) mod velikost

V vrsti



Slika 1

Slika 2

si torej slede elementi $V_5, V_6, V_7, V_1, \dots, V_{\text{velikost}-3}, V_{\text{velikost}-2}$.

Sestavimo sedaj podprograme:

```
10 REM
20 REM pripravi vrsto velikost VELIKOST
30 REM
40 VELIKOST = ...
50 DIM VRSTA (VELIKOST)
60 ZACETEK = 1 : KONEC = 1
70 DEF FN MOD(A, B) = A - INT(A/B) * B
80 RETURN

100 REM
110 REM če je vrsta prazna, dobi spremenljivka PRAZNA
120 REM vrednost 1, drugače 0
130 REM
140 PRAZNA = 0
150 IF ZACETEK = KONEC THEN PRAZNA = 1
160 RETURN

200 REM
210 REM vstavi podatek ELEMENT v vrsto
220 REM
230 POM = FN MOD(KONEC + 1, VELIKOST)
235 IF NOT(ZACETEK = POM) THEN GOTO 260
240 REM vrsta je polna – primerno ukrepamo
250 ...
260 REM vrsta ni polna
270 KONEC = POM
280 VRSTA (KONEC) = ELEMENT
290 RETURN

300 REM
310 REM briše podatek iz vrste in ga shrani v ELEMENT
320 REM
330 IF ZACETEK = KONEC THEN ...: REM napaka, primerno ukrepamo
340 ZACETEK = FN MOD(ZACETEK + 1, VELIKOST)
350 ELEMENT = VRSTA(ZACETEK)
360 RETURN
```

Zadnji podprogram vsebuje dve operaciji: ODSTRANI, ki iz sklada naredi nov sklad, in ZAČETEK, ki vrne prvi element v vrsti. S smo označili mesta, kjer vpišemo ukaze, ki ustrezajo uporabi vrste v programu. Tako lahko prekinemo izvajanje programa in javimo napako, lahko pokličemo ustrezni podprogram ... — odvisno pač od situacije, v kateri uporabljamo vrsto.

Ko čakamo v vrsti na smučičšču, se pogosto zgodi, da se pripodi skupina smučarjev in, smuk, takoj na vlečnico. So na treningu in imajo na vlečnicah prednost. Vpeljimo prednost še v vrsto v računalniku. To lahko storimo takrat, ko lahko podatke med seboj primerjamo. Zamenjamo operaciji **začetek** in **odstrani** z

(* vrne največji element vrste *)

največji : vrsta $\Leftrightarrow$ podatek;

(* izbriše največji element vrste in vrne novo vrsto *)

odstrani : vrsta $\Leftrightarrow$ vrsta;

Dobimo **vrsto s prednostjo**. Tabela sedaj ni več primerna za predstavitev. Kaj misliš, zakaj? Poskusite sestaviti primerno predstavitev in izpeljati osnovne procedure. Pošljite nam rešitve!

Matija Lokar

PRINCIPIA MATHEMATICA — 300 LET

Britanska pošta je ob tristoletnici slovite knjige PRINCIPIA MATHEMATICA Isaaca Newtona 24. marca 1987 izdala serijo štirih znamk.

Znamka za 18p prikazuje naslovno stran Newtonove knjige, ki prekriva jabolko. Jabolko naj bi Newtona navedlo na zamisel o splošnem zakonu težnosti.

Znamka za 22p prikazuje eliptične tire planetov okrog sonca. Newtonov zakon težnosti je pojasnil eliptične tire planetov, ki jih je odkril že Kepler leta 1609.

Znamka za 31p prikazuje naslovnico Newtonove knjige OPTICKS skozi stekleničko z vodo.

Znamka za 34p prikazuje Svetovni sistem, tretji del Newtonove Principia, v katerem je obravnavana težnost. Na znamki vidimo tudi umetni satelit, ki se giblje po poti, določeni z Newtonovim zakonom.

*Tomaž Pisanski
Robin J. Wilson*

RAČUNALNIŠKA GRAFIKA

Prvi računalniki so bili navadni številčni mlinčki (number crunchers), ki so obdelovali le numerične podatke. Sledil je prehod na obdelavo tudi drugih, ne-numeričnih podatkov. Uporabnik pa se v množici najrazličnejših podatkov ni več znašel in si je zaželel grafično predstavitev v obliki raznih diagramov, tabel in grafov. Znano je namreč, da si večina ljudi najlažje ponazori oziroma razjasni določen problem s sliko. Tehnika je tudi že dovolj napredovala in tako omogočila, da se je človekova želja uresničila. Rodila se je računalniška grafika, eno najzanimivejših področij računalništva. Iz skromnih začetkov je do danes prodrla v praktično vsa področja človekovega udejstvovanja in postala nepogrešljiv del računalništva. Skoraj si ne moremo več predstavljati računalnika, ki ne bi mogel tudi risati.

Večina se prvokrat sreča z grafiko ob igranju s hišnimi računalniki. Bolj ko je zaslon pisan, porisan in migetajoč, bolj je zanimivo in napeto. Ko mine prvo navdušenje, pa si morda kdo zaželi napraviti tudi kaj resnejšega: narisati graf kakšne matematične funkcije ali pa kar tako nekaj črt, pa še kaj pobarvati in že je zakorakal v skrivnostni svet računalniške grafike.

Če hočemo sliko videti, moramo imeti napravo, ki nam omogoča prikaz — prikazovalnik (display). Običajno je to zaslon (pri hišnih računalnikih pogosto kar televizijski), lahko pa sliko prikažemo tudi z izpisom na grafični tiskalnik ali pa jo izrišemo na risalnik (plotter). Večina zaslonov je grajena na osnovi katodne cevi (CRT — Cathode Ray Tube), ki jo nenehno preletava elektronski žarek in s tem osvežuje sliko. Glede na jakost žarka imamo na zaslonu svetlejša in temnejša področja (pri črno—belih zaslonih le črno, belo in odtenke sive barve). Število točk, ki jih žarek lahko osvetli (ne da bi se prekrivale), imenujemo ločljivost oziroma resolucija zaslona (od približno 256×256 točk pri zaslonih hišnih računalnikov do največ 4096×4096 točk na najzmogljivejših grafičnih sistemih). Za točko pogosto uporabljamo izraz piksel (pixel — picture element).

Pri barvnih zaslonih imamo tri žarke (tri topove) za rdečo, zeleno in modro barvo (RGB — red, green, blue). Z njihovim mešanjem in spreminjanjem jakosti posameznega žarka dobimo vse ostale barvne odtenke (pri zmogljivih grafičnih sistemih je število barvnih odtenkov lahko izredno veliko). Večkrat omenjamo izraz grafični sistem. S tem mislimo na celoto — na računalnik, ki omogoča risanje, kot tudi na ustrezeni prikazovalnik.

Ločimo dva načina prikazovanja slike. Žarek, ki potuje po zaslonu, lahko gre le preko tistih točk, ki predstavljajo sliko — v tem primeru gre za tako imenovano vektorsko grafiko (osnovni element risanja je namreč črta oziroma

daljica, v nekem smislu vektor), ali pa preletava celoten zaslon po vseh vrsticah in menjava jakost glede na to, kje so elementi slike, ki jih je potrebno osvetliti — v tem primeru govorimo o rastrski grafiki (raster — mreža točk). Pri rastrski grafiki je osnovni element slike točka ali piksel. Za lažjo predstavo: pero risalnika se pomika po papirju samo po tistih mestih, kjer mora kaj narisati, pri rastrski grafiki pa žarek preleti celoten zaslon.

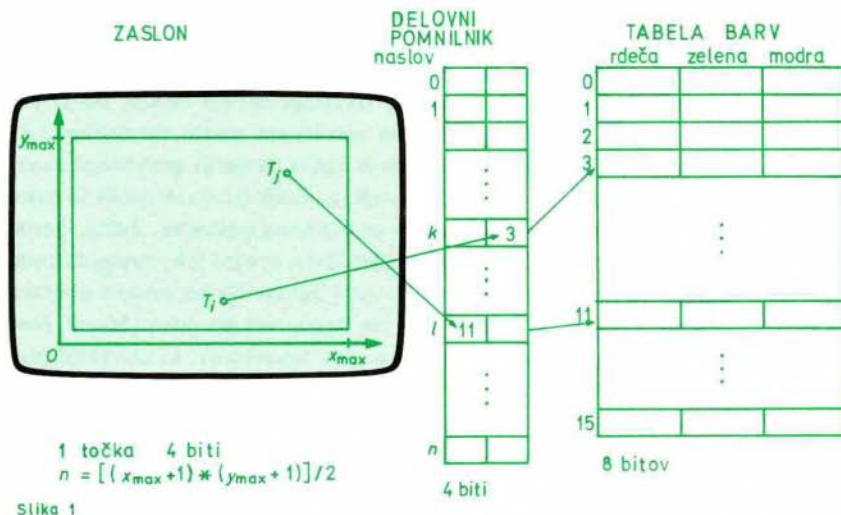
Od tipa prikazovanja, ki ga uporabljamo, je odvisen tudi način hranjenja slike v slikovnem pomnilniku računalnika. Pri vektorskem tipu hranimo le podatke o daljicah (začetna, končna točka, barva), medtem ko pri rastrski grafiki hranimo podatek za vsako točko zaslona (prižgana, ugasnjena — pri črno-belih zaslonih; barva — pri barvnih zaslonih). Omenjali smo slikovni pomnilnik — na podlagi zapisa v njem elektronsko vezje (display processor) generira sliko na zaslonu. To vezje bere vrednosti iz pomnilnika neodvisno od osrednje procesne enote računalnika. Sliki je lahko namenjen dodatni pomnilnik, lahko pa za to izkoristimo kar del delovnega pomnilnika računalnika. Velikost potrebnega pomnilnika je odvisna od ločljivosti slike (število točk, ki jih lahko prikažemo), od števila barv in pri vektorski grafiki tudi od števila daljic, ki sestavljajo sliko. Pri rasterski grafiki je pogostejše obrnjena situacija — da je ločljivost odvisna od razpoložljivega pomnilnika.

Danes je mnogo bolj razširjena rastrska grafika, zato bomo pregled nekatereh značilnosti grafičnih sistemov naslonili nanjo. Večinoma vsi grafični sistemi uporabljajo tudi barve, zato jih bomo upoštevali tudi tu.

Najprej bomo na kratko pogledali nekaj grafičnih gradnikov; to so osnovni elementi, s katerimi delamo slike. Uporabnik vidi te gradnike le kot klic ustreznega grafičnega programa. Ko npr. v basicu zapišete `PLOT (3, 2)`, vas, vsaj večine, ne zanima, kaj se dogaja v ozadju izvajanja takega ukaza, saj je pomemben le rezultat — osvetljena točka na ustreznem mestu na zaslonu. Za načrtovalce grafične programske opreme pa je način izvajanja grafičnega ukaza še kako pomemben. Na primer: ni namreč vseeno, kakšna črta se nariše in kako dolgo risanje traja. Zlasti čas je pri grafiki pomembna postavka. Zakaj, bomo videli kasneje. Grafični gradniki, kot so točka, črta, krožni lok, mnogokotnik, krog ipd. morajo za risanje zahtevati čimmanj zahtevnih računskih operacij (množenj, deljenj). Če je le mogoče, naj bi vse izračunali le s celimi števili. Med razvojem računalniške grafike je nastala množica algoritmov, ki ustrezajo gornjim zahtevam, uporaba določenega od njih pa je odvisna še od nekaterih pogojev okolja, v katerem jih uporabljamo.

Vse, kar se dogaja v računalniški sliki, se v končni fazi zvede na risanje točke. Zaslon je neke vrste koordinatni sistem z izhodiščem v spodnjem levem kotu. Koordinata x narašča v horizontalni smeri, koordinata y pa v vertikalni.

Nekateri sistemi imajo izhodišče v zgornjem levem kotu, vendar nas to v nadaljevanju ne bo motilo. Dvodimenzionalni zaslon je treba na nek način preslikati v enodimenzionalni slikovni pomnilnik (video pomnilnik, video RAM, frame buffer). Običajno se ta preslikava izvede po vrsticah — od prve naprej. Koliko prostora zahteva točka v pomnilniku, je odvisno do tega, ali imamo črno-belo ali barvno grafiko, oziroma koliko možnih odtenkov imamo. Če je točka lahko le bela (prižgana) ali črna (ugasnjena), je dovolj le en bit, če naenkrat uporabljamo po 16 barv, pa so potrebni štirje biti (1 nibble). S štirimi bitmi namreč zakodiramo vseh 16 barv. V primeru večjega števila barv je potrebno ustrezno več prostora za eno točko zaslona. Pri barvah moramo povedati še, da je lahko v pomnilniku vpisana direktno koda barve (npr. po 2 bita za vsako od treh barv — rdečo, zeleno in modro) ali pa kazalec v tabelo barv (paletu). Na drugi način nam je lahko na voljo mnogo več barv, čeprav jih naenkrat lahko uporabljamo le toliko, kolikor nam je na voljo prostora za eno točko v slikovnem pomnilniku. S spreminjanjem elementov tabele barv pa obenem spreminjamo tudi barvo, na katero kaže omenjeni kazalec. Na ta način lahko dosežemo izjemne grafične učinke. Vse točke enake barve lahko v trenutku preklopimo na kako drugo barvo, ne da bi vpisali eno samo vrednost v slikovni pomnilnik. V tabeli barv (ki ni velika — npr. 16 ali 64 barv naenkrat) imamo lahko za vsako od treh barv na voljo po 8 bitov, kar nam da kar 16 milijonov barvnih odtenkov. Zadnji primer nam ponazorili slika 1.



Risanje točke torej pomeni v rastrski grafiki vpis določene vrednosti na ustrezno mesto v video pomnilniku. Ta vpis je lahko tak, da zbriše prejšnjo vsebino, lahko pa delamo s prejšnjo vsebino različne logične operacije (OR, XOR, AND) in s tem dosegamo zanimive učinke. Recimo, da ustreza točki na zaslonu ena celica (8 bitov) v video pomnilniku in gredo zaslonske koordinate od 0 do X_{max} in od 0 do Y_{max} . Točka $T(x, y)$ se preslika v naslov (ADDR):

$$ADDR(x, y) = ADDR(0, 0) + y * (X_{max} + 1) + x$$

Pri tem pa veljajo še naslednje zveze, ki jih je priporočljivo upoštevati zaradi večje hitrosti pri risanju (npr. črt):

$$ADDR(x + 1, y) = ADDR(x, y) + 1$$

$$ADDR(x, y + 1) = ADDR(x, y) + X_{max} + 1$$

Iz gornjih zvez lahko izpeljemo še nekatere.

Pri risanju črt omenimo le osnovni princip (podroben opis je v Preseku 1, letnik 13, str. 38–44). Ko računamo točke, preko katerih teče črta, se v eni smeri (npr. smer x) vedno premikamo po eno točko, hkrati pa računamo odmik točke na zaslonu od idealne črte — ko je le-ta večji od pol točke, se premaknemo tudi v drugi smeri (npr. y). S takim načinom pa seveda dobimo lomljeno črto, kar je bolj izrazito opazno pri nizki ločljivosti slike. Te probleme rešujemo tako, da točke osvetlimo z različnimi jakostmi, s čimer dobimo bolj gladke linije (antialiasing tehnika). Podoben problem je tudi razlika med vodoravnimi in poševnimi črtami — zaradi kvadratne mreže točk so poševne črte bolj 'redke', zato jih osvetlimo močnejše. Pri boljših grafičnih sistemih obstaja možnost, da poleg barve pri črti lahko določimo tudi obliko (pretrgana, nepretrgana ...).

S črtami tvorimo like. Pri rastrski grafiki rabimo v tem primeru poleg slikovnega pomnilnika še dodaten pomnilnik za hranjenje likov (podoben pomnilniku pri vektorski grafiki). Pri risanju je treba paziti še na nekaj. Zaslon imamo včasih razdeljen na pravokotna področja — okna (windowing tehnika) in vedno rišemo le v trenutno aktivno okno. Če so meje takega okna X_{min} , X_{max} , Y_{min} in Y_{max} , potem prikazujemo samo tiste točke $T(x, y)$, za katere velja:

$$X_{min} \leq x \leq X_{max} \quad \text{in} \quad Y_{min} \leq y \leq Y_{max}$$

Za ugotavljanje, kaj pade v okvir takega okna in kaj ne, obstajajo zahtevnejše in učinkovitejše tehnike (clipping), kot je sprotno ugotavljanje za vsako posamezno točko. Običajno omenjene tehnike delujejo nad daljicami. Na tem mestu omenimo še pojem segmenta, ki je sestavljen iz grafičnih gradnikov in tvori neodvisno celoto. Tak segment je lahko skupina likov (lahko tudi en sam) in ga lahko pomikamo po zaslonu neodvisno od ostale slike. Segmenti so zelo upo-

rabne stvari; kar ponujajo se v računalniški animaciji. Za primer vzemimo razne igrice in risanke, kjer se neka figura (predstavljena kot segment) pomika po statični okolici. Že prej smo omenjali hitrost risanja. Če bi grafične gradnike, ki so vsebovani v segmentu, risali počasi, bi bilo premikanje segmenta pri animaciji prepočasno in neučinkovito.

V primeru, da želimo like tudi barvati (več o barvanju je v Preseku 1, letnik 14, str. 19–24), rabimo podprogram, ki nam kot rezultat vrne barvo točke, za katero ugotavljamo, če je v notranjosti lika, ki ga barvamo. Tudi v tem primeru moramo preslikati točko v določen naslov pomnilnika, odkoder preberemo vrednost. Like lahko zapolnjujemo tudi z različnimi vzorci, kar zlasti pride v poštev pri črno-beli grafiki.

Pogosto pa rabimo poleg ravnih tudi krožne oblike — loke, krožnice, elipse (več o tem si preberite v Preseku 3, letnik 14, str. 145–155). Princip risanja je podoben kot pri črtah. Krog rišemo tako, da ga računamo le v enem oktantu in nato naenkrat narišemo osem točk. V oktantu se spet pomikamo v eni smeri za korak 1 (po eno točko), obenem pa računamo odklik točke od idealne krožnice. Ko je ta odklik večji od pol točke, se pomaknemo za en korak tudi v drugi smeri. Omenjeni algoritem je zasnoval angleški računalniški strokovnjak Bresenham, ki je sestavil tudi učinkovit algoritem za risanje črt. Oba algoritma sta v celoti celoštevilska. Pri risanju kroga so v omenjenem algoritmu potrebna samo množenja z 2, ki so v kateremkoli pametnem pascalu ali v zbirnem jeziku preprosto in hitro izvedljiva. Ker rišemo osem točk hkrati, dobimo s tem prav spodobno hitrost risanja. Pri krogih se nam lahko zgodi, da dobimo na zaslonu bolj elipso kot krog. Pri nekaterih zaslonih so točke zaradi tehničnih lastnosti namreč rahlo sploščene, zato je pri risanju krožnih oblik treba upoštevati še ta faktor (angl. aspect ratio).

S tem smo nekako zaključili pregled osnovnih grafičnih podprogramov, ki jih mora imeti praktično vsak grafični sistem. Na podlagi teh podprogramov (grafičnih gradnikov) potem gradimo zahtevnejše in kompleksnejše algoritme, ki nam omogočajo učinkovito uporabo vseh možnosti, ki jih ponuja strojna oprema za grafiko. Na kratko si zdaj pogledajmo, kaj vse se da v računalniški grafiki početi, ko imamo enkrat zgrajeno trdno osnovo.

Za začetek se preselimo v dvodimenzionalni svet likov! Kaj lahko z njimi poleg barvanja še počnemo? Lahko jih pomikamo po zaslonu sem in tja, lahko jih povečujemo ali zmanjšujemo ali pa jih vrtimo okoli kake osi. Pravimo, da nad njimi izvajamo transformacije — translacijo, skaliranje in rotacijo. Pogledajmo, kako so definirane. Pri translaciji premaknemo vse točke nekega lika v smeri x za T_x in v smeri y za T_y . Nove točke so tako:

$$x' = x + T_x, \quad y' = y + T_y$$

Ni nujno, da pri premiku preračunavamo vse točke znova. Tako npr. pri krogu samo premaknemo središče in ponovno narišemo krog z algoritmom za krog, pri mnogokotniku pa premaknemo le oglišča in jih povežemo s črtami (običajni način risanja mnogokotnikov). Na ta način je željeni premik opravljen bistveno hitreje. Pri skaliranju gre za to, da množimo točke nekega lika z določenim faktorjem. Če je le-ta večji od 1, se bo lik povečal, sicer pa se bo zmanjšal. Nove točke so tako:

$$x' = x * Sx, \quad y' = y * Sy$$

Pri takem načinu se nam lik poleg pomanjšanja (oziroma povečanja) tudi premakne (pri pomanjšanju proti izhodišču). Zato uvedemo neko točko kot fiksno (npr. eno izmed oglišč ali pa težišče lika) in skaliramo razdalje do vseh drugih točk lika. V tem primeru imamo enačbi:

$$x' = Xfix + (x - Xfix) * Sx$$

$$y' = Yfix + (y - Yfix) * Sy$$

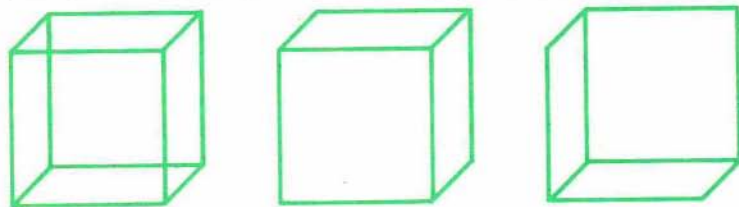
Tretja transformacija pa je rotacija (glej tudi Presek 2, letnik 14, str. 122) lika za določen kot okoli kake osi (npr. koordinatno izhodišče). Nove točke rotiranega lika glede na koordinatno izhodišče podajata naslednji enačbi:

$$x' = x * \cos\varphi - y * \sin\varphi$$

$$y' = y * \cos\varphi + x * \sin\varphi$$

pri čemer je φ kot, za katerega zavrtimo lik. Vse omenjene transformacije običajno izvajamo z matričnimi operacijami — točko predstavimo kot vektor, ki ga množimo z matriko transformacije. (Matrike so opisane v Preseku 1 in 2, letnik 15, str. 2–7 in 104–111). Več transformacij lahko kombiniramo v eno sestavljeno. Pri vseh transformacijah se nam lahko zgodi, da lik po transformaciji pade izven okna (v primeru oken) ali celo izven zaslona. Zato je treba nevidne dele ustrezno porezati.

Poglejmo še v svet treh dimenzij. Prvi problem, ki ga vidimo, je, kako na dvodimenzionalnem zaslonu prikazati tri dimenzije. Vzemimo kocko kot geometrijsko telo treh dimenzij. Narišimo jo z vsemi robovi. Če so robovi med sabo vzporedni (vzporedna, paralelna projekcija), se lahko pojavijo dvoumnosti glede podobe telesa v prostoru. Ponazarja jih slika 2. Dvoumnosti v tem prime-



ru se izognemo na dva načina. Namesto paralelne lahko vzamemo perspektivno projekcijo, ki nam bližnje dele prikaže večje, bolj oddaljene pa manjše (tako je tudi v naravi). V obeh primerih pa lahko odstranimo skrite robove in površine in slika s tem postane enoumna. Pri zahtevnejših grafičnih sistemih imamo še možnost senčenja, kar še izboljša realno podobo slike.

Zanimivo je morda omeniti način predstavitve geometrijskih teles (ki so lahko zelo komplicirana). Glede na to, da je geometrijsko telo omejeno z mnogokotniki, mnogokotniki z robovi, robovi pa so daljice med dvema ogliščema, se ponuja naravna predstavitev v obliki tabel mnogokotnikov, robov in oglišč. Tak način predstavitve je uporaben tudi kasneje, v zahtevnejših grafičnih obdelavah geometrijskih teles — pri odstranjevanju skritih robov, senčenju in v različnih transformacijah, ki smo jih omenjali že pri dvodimenzionalnih likih.

Ves čas govorimo le o oglatih telesih, nič pa nismo omenili zaobljenih površin, ki jih je v naravi še več. Tudi te so matematično in računalniško že dobro obdelane. Predstavitve takih površin temeljijo na interpolaciji oziroma aproksimaciji določenih točk, ki ležijo na omenjenih površinah. Drugače rečeno, znanih je nekaj točk na površini in med temi točkami potegnemo krivuljo, ki se najboljše prilega točkam. Če bi med točkami potegnili daljice, bi spet imeli le oglate površine. Pri risanju krivih površin se vedno omenjata vsaj dve metodi — B zlepki in Bezierove krivulje, vendar ju tu ne bomo opisovali. Pri zadnji kot zanimivost povejmo, da je bil Bezier francoski matematik, ki je za potrebe avtomobilske tovarne Renault poiskal matematične rešitve za grafične predstavitve površin, ki so jih uporabili pri konstrukciji avtomobilskih karoserij. To je lep primer uporabe računalniške grafike pri načrtovanju. V tretjo dimenzijo se podrobneje ne bi poglobljali, ker brž naletimo na zahtevnejše probleme in na kompleksne algoritme, ki jih rešujejo.

Doslej smo govorili le o tem, kaj se dogaja v računalniku in kaj vidimo na zaslonu. Kako pa računalniku povemo, kaj bi radi videli? Najpreprostejša rešitev je vnašanje grafičnih ukazov preko tipkovnice. Stvar postane sitna, ko imamo opravka s slikami, ki vsebujejo velikanske količine elementov. S pisanjem po tipkovnici bi to trajalo predolgo. V ta namen imamo razne grafične vhodne naprave, kot so svetlobno pero, miška, digitalna tableta (oziroma plošča) ipd. S svetlobnim peresom, ki se dotika zaslona, s pomikanjem miške po ravni površini oziroma s pomikanjem posebnega svinčnika po grafični plošči lahko direktno rišemo osnovne grafične elemente in iz njih sestavljamo zahtevnejše grafične strukture. Z omenjenimi tehnikami vnosa grafičnih ukazov in podatkov lahko podamo računalniku praktično vse naše želje v zvezi z risanjem. Tipkovnica tako ostaja le še za vnos tekstov, s katerimi dopolnujemo slike.

Za zaključek pa še nasvet. Kdor bi se rad temeljiteje ukvarjal z računalniško grafiko, naj si ogleda kakšno knjigo, ki jih o tej tematiki ne manjka. Velika večina teh knjig je v angleškem jeziku, zato so v članku poleg slovenskih navedeni tudi nekateri najpogostejše uporabljeni angleški izrazi. Nekaj pa se lahko naučite tudi iz člankov, ki se občasno pojavljajo v nekaterih računalniških revijah. In ne pozabite! Računalniška grafika zahteva poleg računalništva tudi dobro poznavanje matematike. Veliko lepih slik vam želim!

Marjan Bradeško

SLIKOVNA KRIŽANKA - REŠITEV IZ P. 4



SLIKOVNA KRIŽANKA

	TONE KUNTNER	POKRIVALO PRI NAR. NOŠI	PROJEKCIJA "OD SPREDAJ"	MESTO NA SEVERU POLJSKE	10 ⁻⁷ J	JAPONSKO VELE-MESTO (al. BOMBA)	TOMAŽ TERČEK	RDEČ ZVEZD. "ŠKOR JONI"
	ANGLEŠKI FIZIK (WILLIAM)						$\frac{F}{S} = ?$	
	PRIТОK RONE V FRANCIJI					RIŽEVO ŽGANJE	POLMER	
PRIPOVEDNA PRESNITEV		ROMULOV BRAT	TRDEN KMEČKI STAREC	STANE SEVER		SIMEONI		
						ENOTA ZA ELEKT. NA-PETOST		
BARVA KART				DEL MOŠKE GARDEROBE	GEOMETR. TELO REKA V ŠVICI			
LOTERIJSKI LISTIČ						STAR IZRAZ ZA OKSID		
SMUČARKA MC KINNEY						LIJAK		TROPSKI KUŠČAR
						PRIPADNIK AZTEKOV		STAR. SL. FILM
RUBIDIJ		ENOTA ZA ČISTOST ZLATA Skand.m.ime					SNOV PROSTO GIBLJIVIH MOLEKUL	KONOPEC DEL. OPTIČ NAPRAV
GRŠKI BOG VETROV			SPONA MORSKI SESALEC			SL. MATEM. (JOSIP) ALEKSEJ TOLSTOJ		
MANJŠA STOJEČA VODA					STAROGRŠ. matematik MAURICE RAVEL			
3, 7, 11, 15, ... $a_n = a_{n-1} + d$								
	NEMŠKI FIZIK (Johannes)					PRIТОK DONAVE V ZRN		

MAČJA ZIBKA IN FIZIKA DANES

Znanstvenofantastični roman Kurta Vonneguta *Cat's Cradle* (1952, *Mačja zibka*, imamo ga tudi v slovenščini) je zašel na strani strokovnega časopisa *Physics Today* (Fizika danes), ki ga izdaja Ameriški inštitut za fiziko (ustreza Društvu fizikov). Povezava romana s fiziko je tako zanimiva, da kaže o razpravi kratko poročati.

Začelo se je z zapisom Elisabeth A. Wood ob smrti Alena Holdena v predlanski marčni številki. Iz njega navedimo odstavke:

Leta 1935 je Holden prešel v Bellove laboratorije in delal zdaj v oddelku za fizikalna raziskovanja, zdaj v kemijskih raziskovanjih. Med drugo svetovno vojno je razvil postopek za gojenje velikih kristalov iz raztopin za zveze in uporabo zvoka pod vodo. Med njimi sta bila tudi etilendiamintartrat (EDT) in amondihidrogenfosfat, ki so ju v velikih količinah izdelovali pri Western Electric. Zaradi svoje izkušnosti pri gojenju kristalov je kot fizikalni in kemijski detektiv rešil uganko v tovarnah Western Electric, ki so izdelovale EDT. V eni od tovarn so nekateri od velikih kristalov dobili bradavičaste izrastke, ki so se med vskladiščenjem zajedli v kristale in postali beli. Vodja druge tovarne je prišel na pomoč, a pri gojenju ni zasledil nobene napake. Ko se je vrnil v svojo tovarno, so kristali EDT v njej dobili enake bradavice. Po obisku v tretji tovarni so se bradavice razvile še tam.

Poiskali so Holdenovo pomoč. Raztopil je kristale in iz raztopine vzgojil kristale brez napak. Dalje je ugotovil, da so bradavice kristali EDT s kristalno vodo, kakršnih prej niso poznali. Pri temperaturi v tovarni je bila to obstojna oblika. Po nekajdnevem delu v laboratoriju je Holden ugotovil, na katerem temperaturnem intervalu je obstojna oblika s kristalno vodo in na katerem oblika brez nje. Majhna sprememba temperature v posodah za gojenje kristalov je potem preprečila rast neželene oblike, katere kali je raznašal nesrečni vodja od tovarne do tovarne. Ta pripetljaj je navdihnil Kurta Vonneguta, da je napisal znanstvenofantastični roman *Mačja zibka*.

V predlanski novembrski številki je David Cahen v pismu uredniku povprašal, ali ni dobil Kurt Vonnegut zamisli za *Mačjo zibko* od brata Bernarda. Bernard Vonnegut se ukvarja s proučevanjem kristalov ledu in je leta 1947 prvi predlagal, da bi po oblakih trosili kristalčke srebrovega jodida kot kondenza-

cijska jedra. Poleg tega je tudi slišal, da je Bernard Vonnegut med vojno pripravil poseben načrt. Eno od izhodiščnih snovi za izdelavo razstreliva trinitrotulo-ena, kapljevinski glicerin, v nemških zbiralnikih naj bi iz letal zasuli s kristalčki glicerina. Pod tališče pri 20⁰C podhlajeni glicerin bi se strdil, s čimer bi spravili Nemce v precejšnjo zagato.

Zdaj je čas, da navedemo dva odlomka iz *Mačje zibke*. Za nobenega od njiju si ni bilo treba sposoditi romana. S prvim je E. Wood v isti številki *Physics Today* podprla svojo prvotno trditev, drugi pa je naveden v knjigi F. Franka *Polywater* (polivoda) iz leta 1981.

“Obstaja več načinov, ” mi je rekel dr. Goje, “na katere lahko določene kapljevine kristalizirajo, se strdijo — več načinov, kako se njihovi atomi razporedijo na ustaljen urejen način.”

Pripovedoval mi je o tovarni, ki je gojila velike kristale etilendiamintartrata. Kristale so uporabljali pri nekem proizvodnem postopku. Toda nekoč so v tovarni ugotovili, da vzgojeni kristali nimajo več zelenih lastnosti. Atomi so se začeli razporejati na drug način. Kapljevina, ki se je strjevala, se ni spremenila, toda nastali kristali so bili, kar zadeva uporabnost, za odpad.

Kako je prišlo do tega, je ostalo skrivnost. Toda po teoriji je to povzročila kal, kakor je rekel dr. Goje. Mislil je na drobno zrno neželene vrste kristalov. Kal, ki je prišla od bogve kod, je poučila atome, kako naj se na novo uredijo, kristalizirajo.

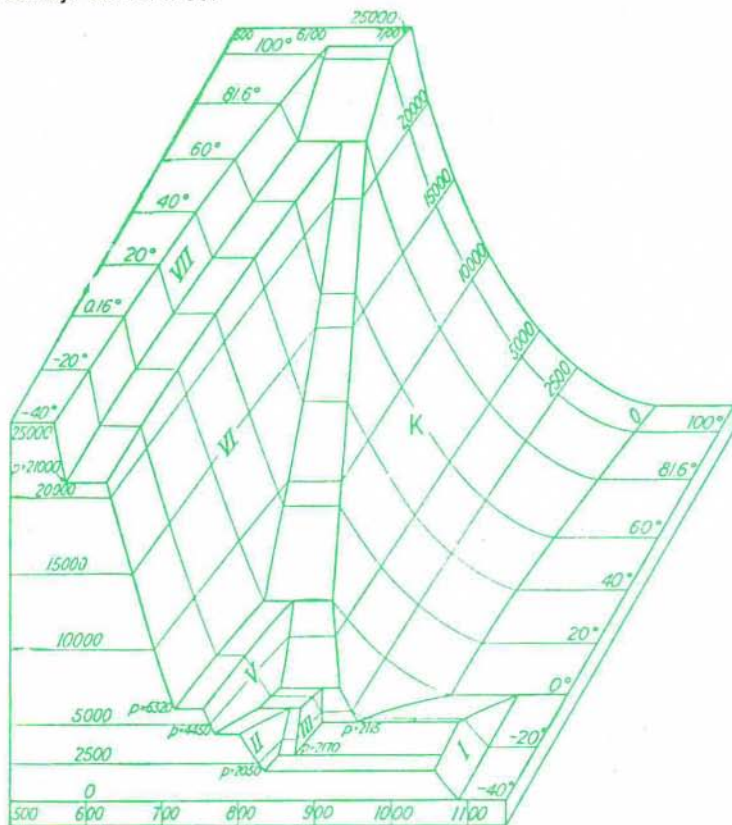
.....

“Spominjam se, da je general mornariške pehote nadlegoval Srečka malo pred smrtjo, naj stori nekaj z blatom.”

“Kaj je hotel general?”

“Nobenega blata več, odpraviti blato. Na svoj šaljivi način je Srečko namignil, da bi lahko obstajalo zrnce snovi, ki bi neomejene predele blata, močvirja, pretokov, mlak, živega peska naredila tako trde kot mizo. Obstajajo kapljevine, katerih atomi se lahko ob strjevanju na različne načine uredijo v trdnino ali drugače: nekatere kapljevine lahko kristalizirajo v različnih oblikah, ko se strdijo. Vzemimo, da je led, po katerem se drsamo in ki ga dajemo v viski, samo ena od različnih oblik ledu, recimo ji led I. Vzemimo dalje, da na Zemlji zmrzne voda v led I, ker ni nikdar bilo zrnca, ki bi jo naučilo narediti led II, led III ... Morda obstaja oblika, recimo ji led IX, kristal, tako trd kot miza, s tališčem pri 60⁰C. Vzemimo, da nosi vojak s seboj zrnca ledu IX in s tem možnost, da se molekule vode drugače uredijo, ko se voda strdi in zamrzne. Kaj se zgodi, če vojak vrže zrnca v mlako?”

"Mlaka zamrzne," sem domneval.
 "In vse blato?"
 "Bi tudi zmrznilo."
 "In vsa voda v blatu, ali bi tudi zmrznila?"
 "Seveda, in vojaki bi odkorakali čez močvirje."
 "Ali obstaja takšna snov?"



Slika 1. Ploskev stanj. Na os proti desni je nanesena prostornina v kubnih centimetrih, na os od bralca proč temperatura v stopinjah Celzija in na navpično os tlak v barih. Na delu ploskve z napisom K je obstojna kapljevinska voda, na delih z napisi I, ... VII pa ustrezni led. Na vmesnih vodoravnih delih ploskve sta obstojni hkrati dve fazi. Slika je prevzeta iz knjige M.W.Zemansky, *Heat and Thermodynamics*, McGraw-Hill, New York 1951. Podatke, ki jih je dobil z merjenjem P. Bridgeman, je sestavil Verwiebe. Tedaj še niso poznali ledu VIII in višjih oblik do XI.

"Ne, ne, ne... Če bi poslušali, ko sem pripovedoval o raziskovalcih, mi ne bi postavljali takih vprašanj. Raziskovalci delajo to, kar jih privlači, ne tega, kar privlači druge."

"Še zmeraj mislim na močvirje."

"O tem lahko razmišljate."

"Če bi zamrznili vsi tokovi skozi močvirje kot led IX, kaj bi se zgodilo s potoki in jezери, iz katerih se napajajo?"

"Prav tako bi zamrznili. Bojim se, da bi radi zaslužili s senzacionalistično zgodbo o ledu IX. Še enkrat vam pravim, da ledu IX ni."

"In izviri, ki napajajo reke in jezera, in talna voda?"

"Presneto, tudi ti bi zamrznil. Če bi vedel, da ste od senzacionalističnega tiska ne bi zapravlil z vami niti minute."

"In dež?"

"Ko bi padal, bi se spremenil v trdne čevljske žebličke iz ledu IX. To bo konec sveta — in razgovora. Zbogom!"

Povprašali so tudi brata Vonneguta in oba odgovora objavili v *Physics Today*.

Vse kaže, da je Kurt dobil zamisel za led IX od Bernarda v času, ko sta delala pri General Electric v Schenectadyju — Bernard kot raziskovalec, Kurt pa je imel na skrbi odnose z javnostjo. Tedaj je bil tam zaposlen tudi poznejši predsednik ZDA Ronald Reagan kot poverjenik za tisk. Na dan je prišlo tudi, da se je Bernard Vonnegut veliko pogovarjal z Irvingom Langmuírom in je ta — ne Bernard — koval načrt za nemški glicerín. Toda načrta niso niti začeli ureničevati.

Za zdaj je znanih enajst kristalnih oblik vode od navadnega ledu I do ledu XI (slika 1). Toda vse, tudi led IX, so obstojne le pri višjem tlaku od navadnega zračnega tlaka 1 bar. Kljub temu je bilo prijetno prebrati odlomka iz *Mačje zibke*.

Zbral in prevedel *Janez Strnad*

ČISTO TA PRAVI, LE PREMALO GA JE

V Bučkovcih (občina Ljutomer) je "birt" začel točiti "špricarje" v stožčastih kozarcih, ki so — zaradi lažjega goljufanja pri količini pijače — ožji in širši, vsi pa so visoki po 10 cm. Do katere višine mora "birt" naliti vina v posamezni kozarec, da bo z dodano radensko "špricar" res pravi — torej, da bo enaka količina vina in radenske?

Bojan Žižek

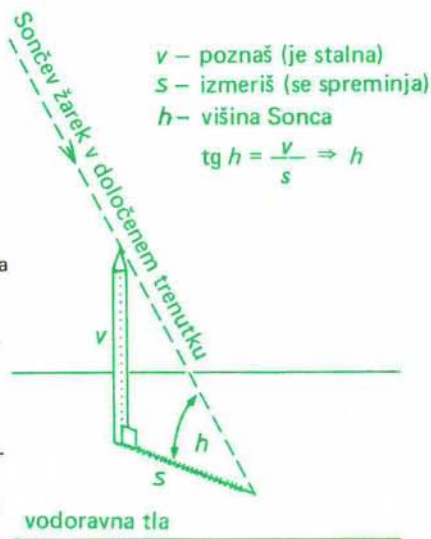
ZANIMIVA OPAZOVANJA Z GNOMONOM

Gnomon je brez dvoma ena najstarejših astronomskih naprav za merjenje višine Sonca in časa. Gnomon je v bistvu navpična, zgoraj ošiljena palica (kol, steber, stolp), ki v sončnem vremenu meče senco na vodoravna tla (slika 1).

Med dnevom se višina Sonca spreminja. Ko Sonce vzide, je njegova višina nič. Nato se dviga, njegova višina se veča in je največja okoli poldne, ko je Sonce v naših krajih na južni strani neba. Potem se spušča, njegova višina se manjša in je ob zahodu nič. Poleti se Sonce dvigne mnogo višje nad obzorje kot pozimi. Tako je višina Sonca opoldne v poletnem času dosti večja od opoldanske višine pozimi.

Stari narodi so z gnomonom večinoma merili opoldansko višino Sonca v različnih dneh med letom, predvsem v dneh solsticijev, to je v dneh, ko se začne poletje (okoli 22.6.) in zima (okoli 22.12.), ko je višina Sonca opoldne največja in najmanjša.

Naj bo α opoldanska višina Sonca na dan poletnega solsticija, β pa opoldanska višina Sonca na dan zimskega solsticija (slika 2). S slike 2 ugotoviš, da je aritmetična sredina teh višin, to je $\frac{1}{2}(\alpha + \beta)$, enaka naklonskemu kotu ze-



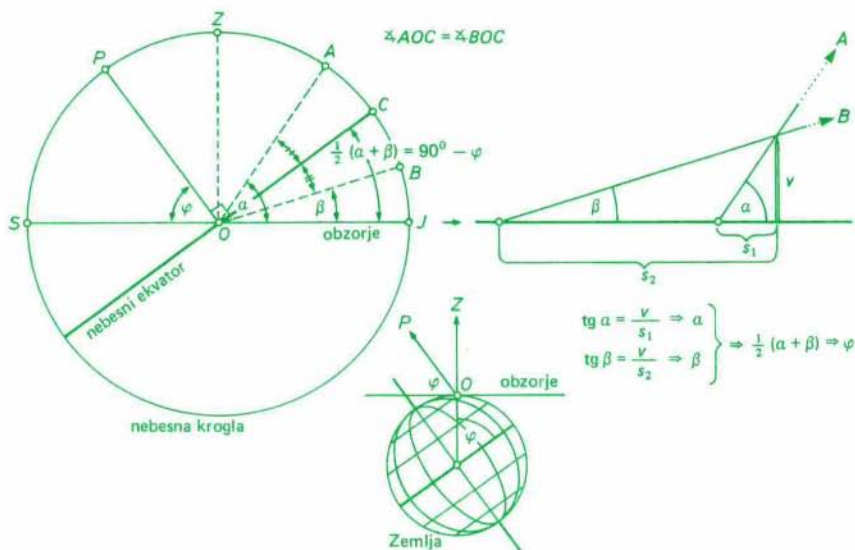
Slika 1. Najenostavnejši gnomon je navpična ravna palica, ki meče senco na vodoravna tla. Palica in njena senca sestavljata pravokotni trikotnik. Pri znani višini gnomona v in izmerjeni dolžini sence s ugotoviš višino Sonca h v poljubnem trenutku takole: Pravokotni trikotnik s katetama v in s narišeš v zmanjšanem merilu in s kotomerom izmeriš kot h med kateto s in hipotenuzo. Natančneje pa višino Sonca izračunaš s kotno funkcijo $\text{tg } h = v/s$.

meljskega oziroma nebesnega ekvatorja k obzorju. Ker pa je ta kot tudi $90^\circ - \varphi$, kjer pomeni φ zemljepisno širino kraja, velja enačba $\frac{1}{2}(a + \beta) = 90^\circ - \varphi$. Iz nje sledi $\varphi = 90^\circ - \frac{1}{2}(a + \beta)$.

Če imaš možnost, predvsem pa potrpljenje in še srečo s sončnim vremenom, na opisani način ugotovi φ svojega domačega kraja. Potrebuješ le dve meritvi višine Sonca a in β , ki pa sta časovno (na žalost) kar pol leta narazen.

Če med letom pozorno meriš dolžino opoldanske sence, lahko ugotoviš, katerega dne je senca najkrajša in katerega dne je najdaljša. Tako lahko sam ugotoviš datum solsticijev in tudi dolžino (število dni) leta. (Tisti dan, ko je senca opoldne najkrajša, označiš za poletni solsticij. Čas med dvema takima zaporednima dogodkoma pa ti da dolžino leta.)

Merjenja z gnomonom so preprosta. So pa tem natančnejša, čim višji je gnomon. Zato so v preteklosti gradili visoke gnomone (obeliske). Če bi bilo Sonce točkasto svetilo, bi bile sence predmetov na Zemlji ostre. Toda Sonce sveti kot okrogel svetlobni izvir, zato so sence razmazane. Ker konec sence, ki



Slika 2. Lega Sonca opoldne na dan poletnega solsticija (A), lega Sonca opoldne na dan zimskega solsticija (B) in lega Sonca opoldne na dan enakonočja (C) za kraj O z zemljepisno širino φ . P – severni nebesni pol, Z – zenit, v – višina gnomona, s_1 – dolžina sence ob letnem solsticiju, s_2 – dolžina sence ob zimskem solsticiju.

Ker je višina severnega nebesnega pola (to je kot SOP) za kak kraj enaka zemljepisni širini φ kraja, iz slike izpelješ, da je kot, ki ga ravnina nebesnega ekvatorja oklepa z ravnino obzorja, enak $90^\circ - \varphi = \frac{1}{2}(a + \beta)$.

jo meče gnomon, ni oster, so na nekaterih gnomonih na vrhu pritrdili navpično ploščo z odprtino. Sončna svetloba, ki je šla skozi odprtino, je na vodoravnih tleh oblikovala svetlo liso, od katere so merili razdaljo do podnožja (dolžino sence) gnomona.

Najstarejša opazovanja z gnomonom segajo v čas nekaj tisočletij pred našim štetjem. Stari Babilonci in Egipčani so na ploščadih postavljali kamnite obeliske, ki niso bili le arhitektski dosežek takratne civilizacije in za okras, ampak so služili tudi kot gnomoni. Z njimi so na primer določevali čas dneva (po smeri sence) in dneve leta (po dolžini sence opoldan). V Egiptu so okoli leta 1000 pr.n.š. postavili gnomon v obliki obeliska z višino 35 m. Za časa vladavine vojskovodje Avgusta so ta gnomon prepeljali v Rim in z njim ugotavljali trenutek poldneva. Na pekinškem astronomskem observatoriju so v 8. stoletju opazovali senco 13 m visokega gnomona, znameniti uzbekistanski astronom Ulugbek pa je v 15. stol. uporabljal 50 m visok gnomon. Najvišji gnomon so postavili v 15. stol. na kupoli stolnice v Firencah. Skupaj z zgradbo je bila njegova višina kar 90 m.

Tudi ti lahko opazuješ z gnomonom [★]. Meritve opravljaj na prostem ali pa doma npr. v sončni sobi, na balkonu, terasi. Na prostem uporablaj en do dva metra visoko navpično palico, doma pa kar svinčnik (pletilko, paličko, večji žebelj). Zapiči ga navpično v ravno ploščico (iz kartona, lesa, plastike), to pa postavi na vodoravno podlago.

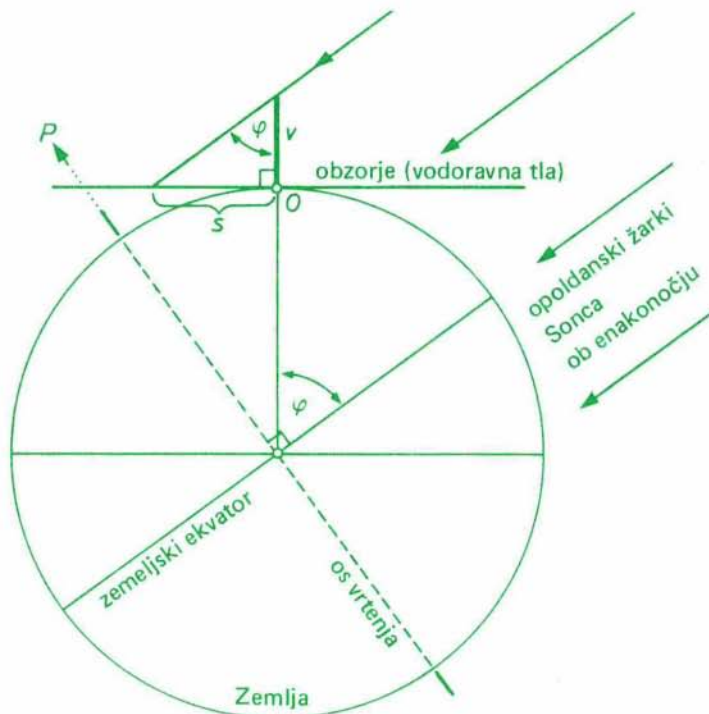
Predlagamo, da iz kartona izrežeš kvadrat s stranico 25 cm. V središče kvadrata namesti pod pravim kotom leseno paličko, še prej pa nariši krožnico (ali pa več krožnic) s središčem v središču kvadrata. Nato postavi kvadrat s paličko na vodoravno mizo. Kvadrata ne premikaj. Zabeleži lego (točko), kjer se konec sence palice dotakne krožnice pred poldnevom in po njem. Nastalo tetivo razpolovi. Razpolovišče tetive poveži s središčem kvadrata in tako dobiš *poldnevnico* — premico, ki leži na vodoravni ravnini v smeri sever — jug. Ko pade senca tvojega gnomona na poldnevnico, ugotoviš opoldansko višino Sonca h_0 kakega sončnega dne takole (glej sliko 1):

Slika 3. Nenavaden gnomon, ki so ga zgradili v začetku 18. stoletja v Indiji.
(Glej III stran ovitka)

★ Glej: M. Prosen, *Astronomska opazovanja*, Presekova knjižnica 3 (1978), str. 228; *Opazujem Sonce in Luno*, MK, Ljubljana 1987, str. 14; *Preprost sončni višinomer*, Presek 13 (1985/86), št. 3, str. 153.

Znano je: višina gnomona $v = \dots\dots\dots$ mm
 Meritve: dolžina opoldanske sence $s = \dots\dots\dots$ mm
 Račun: $\operatorname{tg} h_0 = v/s = \dots\dots\dots \rightarrow h_0 = \dots\dots\dots^\circ$

V stari Grčiji so ob enakonočjih z gnomonom določevali zemljepisno širino φ iz kvocienta opoldanske dolžine sence s in višine v gnomona po enačbi $\operatorname{tg} \varphi = s/v$. Dokaži, da velja ta enačba. V pomoč tale napotek. Ob enakonočjih padajo Sončevi žarki pravokotno na os vrtenja Zemlje. Poskusi tudi ti po gornjem načinu ugotoviti zemljepisno širino svojega kraja.



Slika prikazuje Zemljo na dan enakonočja opoldne, ko je Sonce za kraj O z zemljepisno širino φ najvišje nad obzorjem. Sončevi žarki padajo pravokotno na zemeljsko vrtilno os. S slike sledi $\operatorname{tg} \varphi = s/v$. Zapisano enačbo lahko izpelješ tudi iz slike 2 na strani , kjer upoštevaš da je C lega Sonca opoldne na dan enakonočja. Višina Sonca opoldne za ta dan je $h = 90^\circ - \varphi$. Sledi $\operatorname{ctg} h = \operatorname{tg} \varphi = s/v$.

28. ZVEZNO TEKMOVANJE UČENCEV SREDNJIH ŠOL IZ MATEMATIKE

Od 24. do 26. aprila 1987. leta je Društvo matematikov, fizikov in astronomov SAP Vojvodine v Titovem Vrbasu organiziralo 28. zvezno tekmovanje iz matematike za učence srednjih šol. Slovenijo so zastopali: Renata Novak, Andrej Bauer, Gašper Fijavž, Martin Raič in Alenka Kavkler iz prvega letnika, Marjan Jerman, Zoran Slanič, Polona Petek, Andrej Vilfan, Tatjana Ozbič in Jaka Cimprič iz drugega letnika, Tomaž Slivnik, Edi Volk, Bor Plestenjak in Andrej Lamovec iz tretjega letnika ter četrtošolci: Jure Bajc, Mateja Šajna in Blaž Zmazek. Ekipo sta vodila študent matematike Roman Drnovšek in asistent Dario Felda, v zvezni komisiji pa je bil Aleksandar Jurišić.

Tudi tokrat so bile pred zveznim tekmovanjem za učence organizirane dvodnevne priprave.

Tekmovalci in vodje so prispeli v Titov Vrbas v petek zvečer, nastanjeni pa so bili skupaj z zvezno komisijo v hotelu Bačka.

Na svečani otvoritvi je tekmovalce pozdravil prof. Živojin Čulum, takoj za tem se je v osnovni šoli P.P. Njegoš začelo tekmovanje. Tekmovalci so naloge reševali štiri ure in pol.

1. letnik

1. Dokaži, da za nenegativni števili a in b velja neenakost:

$$(a+b)^2/2 + (a+b)/4 \geq a\sqrt{b} + b\sqrt{a}$$

2. Dan je trikotnik ABC s topim kotom pri oglišču A . Naj bo $a = BC$, $b = AC$ in h_a oziroma h_b višini iz oglišč A oziroma B . Dokaži, da velja:

$$a + h_a > b + h_b$$

3. Naj bo n naravno število. Določi število rešitev enačbe

$$x^2 - [x^2] = (x - [x])^2$$

za katere je $1 \leq x \leq n$.

($[t]$ je največje celo število, ki je manjše ali enako t .)

4. Vsako oglišče kocke označimo z enim izmed števil 1 in -1 , vsako stransko ploskev pa s produktom oznak vseh štirih oglišč, ki jo določajo. Ali je lahko vsota tako dobljenih 14-ih števil enaka:

- a) 7 b) 0

2. letnik

1. Dokaži, da obstaja neskončno mnogo praštevil p , za katere ima enačba za x in y

$$x^2 + x + 1 = py$$

celoštevilske rešitve.

2. Dan je tetivni štirikotnik $ABCD$. Z M označimo presek pravokotnice na AB skozi točko A in pravokotnice na CD skozi točko D , z N pa presek pravokotnic na AB skozi B in na CD skozi C .

Dokaži, da se premice MN , AC in BD sečejo v eni točki.

3. Dan je tangentni štirikotnik. Dokaži, da velja:

- krožnici, včrtani v trikotnika, na katera deli štirikotnik ena do diagonal danega štirikotnika, se dotikata;
- dotikališča teh krožnic s stranicami danega štirikotnika so oglišča tetivnega štirikotnika.

4. Naj bo $p(x)$ tak polinom sedme stopnje s celoštevilskimi koeficienti, ki zavzema pri sedmih različnih celih številih vrednost -1 ali 1 . Dokaži, da $p(x)$ ne moremo zapisati kot produkt dveh nekonstantnih polinomov s celoštevilskimi koeficienti.

3. in 4. letnik

1. Naj bodo $a_1, \dots, a_n$ taka pozitivna realna števila, da je $a_1 a_2 \dots a_n = 1$. Dokaži, da je

$$(4 + a_1)(4 + a_2) \dots (4 + a_n) \geq 5^n$$

2. Naj bosta a in m neki naravni števili, x pa tako celo število, da m deli $a^2 x - a$. Dokaži, da obstaja celo število y , tako da m deli števili $a^2 y - a$ in $ay^2 - y$.

3. V prostoru je n takih točk, da poljubne štiri določajo nedegeneriran tetraeder s prostornino ne večjo od 1. Dokaži, da obstaja tetraeder, ki vsebuje vse dane točke (v notranjosti ali na robu), njegova prostornina pa ni večja od 27.

4. Naj bo X množica vseh končnih zaporedij, katerih členi so 0 in 1 ter $f: X \rightarrow X$ funkcija, ki v zaporedju $x \in X$ vsako enico zamenja z 01, vsako ničlo pa z 10. Koliko parov 00 se pojavi v zaporedju

$$\underbrace{f(f \dots (f(1)) \dots)}_n$$

Po kosilu je bil za tekmovalce organiziran obisk kobilarne Zobnatica, komisija pa je pregledala izdelke. Zvečer so bili objavljeni neuradni rezultati,

sledil je družabni večer. Na hodnikih hotela je bilo slišati zvoke kitare in petja vse do ranega jutra, ko se je na zasluženi počitek vrnila tudi zvezna komisija. Treba je bilo namreč pregledati pritožbe, sestaviti uradne rezultate in zaradi izenačenosti najboljših tekmovalcev 3. in 4. letnika izbrati še naloge za izbirno tekmovanje za olimpijsko ekipo Jugoslavije.

Naslednji dan je bila na vrsti tako imenovana mala olimpiada, takoj za tem pa je bila v prostorih ZZBNOV svečana razglasitev rezultatov in podelitev nagrad ter pohval.

1. letnik

- I. nagrada: Dejan SLEPČEVIĆ, Apatin; Miroslav ŠILOVIĆ, Split
II. nagrada ni podeljena
III. nagrada: Miran BOŽIČEVIĆ, Zagreb; Igor BABIĆ, Vanja DUNDIĆ, oba Beograd; Gajdoš ŽOLT, Novi Sad
pohvale: Andrej BAUER, Ljubljana; Nataša KALINIĆ, Kladovo; Mirjana MIRJANIĆ, Beograd; Martin RAIČ, Ljubljana

2. letnik

- I. nagrada: Rado TODOROVIĆ, Pirot
II. nagrada ni podeljena
III. nagrada: Zvonimir BANDIĆ, Beograd; Liljana POLJAK, Sinj
pohvale: Dalibor TUŽINSKI, Slavonska Požega; Dragan MILOŠEVIĆ, Šabac; Ivan ERAKOVIĆ, Beograd; Jaka CIMPRIČ, Ljubljana

3. letnik

- I. nagrada ni podeljene
II. nagrada: Vlado KEŠELJ, Sarajevo; Aleksandra SMILJANIĆ, Beograd
III. nagrada: Dragan STOJAKOVIĆ, Niš; Branko GLIŠIĆ, Valjevo; Riste ŠKRETOVSKI, Skopje
pohvale: Aleksandar JOVANČEVIĆ, Čačak; Zoran ČRNJA, Rijeka; Mirjana SPASOJEVIĆ, Priština

4. letnik

- I. nagrada ni podeljena
II. nagrada: Predrag JANIČIĆ, Priština
III. nagrada: Joško POLJAK, Sinj; Nebojša VASILJEVIĆ, Jovan VLADIĆ, Olivera MILENKOVIĆ, vsi Beograd
pohvale: Andreja AGLIĆ, Split; Mateja ŠAJNA, Nova Gorica

Letos je Jugoslavija prvič sodelovala tudi na balkaniadi. Tako je zvezna komisija na podlagi rezultatov zveznega tekmovanja in "male olimpiade" za pot v Havano in Atene izbrala naslednje tekmovalce: Rade TODOROVIĆ, Aleksandra SMILJANIĆ, Vlado KEŠELJ, Olivera MILENKOVIĆ, Nebojša

VASILJEVIĆ in Predrag JANIČIĆ.

Naloge z "male olimpiade":

1. Naj bo $x_0 = a$, $x_1 = b$ in $x_{n+1} = 2x_n - 9x_{n-1}$, $n > 1$. Poišči potrebne in zadostne pogoje za a in b , da bo v zaporedju člen, deljiv s 7.

2. Naj bo

$$f(x) = \frac{x \sqrt{2 + \sqrt{2}} + \sqrt{2 - \sqrt{2}}}{-x \sqrt{2 - \sqrt{2}} + \sqrt{2 + \sqrt{2}}}$$

Določi $\underbrace{f(f(\dots(f(x))\dots))}_{1987}$.

3. V prostoru so dane take premice a, b in c , da poljubni dve nista vzporedni in za katere obstajajo take ravnine α in β in γ , da je

$$a \subseteq \alpha, b \subseteq \beta, c \subseteq \gamma \quad \text{in} \quad \alpha \perp \beta, \beta \perp \gamma, \gamma \perp \alpha$$

Konstruiraj presečno točko ravnin α, β in γ . (Konstrukcija v prostoru dovoljuje postavljanje poljubnih premic, ravnin, sfer in translacijo za poljuben vektor.)

Aleksandar Jurišić

18. ZVEZNO TEKMOVANJE OSNOVNOŠOLCEV IZ MATEMATIKE

Zvezno tekmovanje osnovnošolcev iz matematike je bilo v nedeljo, 7. junija 1987, v osnovni šoli Avram Mrazović v Somboru. Tekmovalci so se v tem vojvodinskem kraju zbrali že dan prej in si v večernih urah ogledali znamenitosti mesta. V nedeljo ob 9. uri je bila svečana otvoritev tekmovanja. Nato so tekmovalci dve uri in pol reševali dokaj zahtevne naloge. Po kosilu so gostitelji pripravili za tekmovalce in njihove mentorje izlet na Bezdan in ogled spomenika na Batini, tekmovalna komisija pa je medtem pregledala izdelke.

Tekmovalo je 44 sedmošolcev in 59 osmošolcev. Med njimi so po sklepu republiške tekmovalne komisije Slovenijo zastopali naslednji učenci: sedmošolca Peter Luževič (OŠ Franca Krajncja, Celje), Sašo Dolenc (OŠ Majde Vrhovnik, Ljubljana) ter osmošolci Matjaž Kobal (OŠ Zvonka Runka, Ljubljana), Marko Petrušič (OŠ Prežihov Voranc, Ljubljana), Bogdan Tertinek (OŠ Rado Robič, Limbuš), Nina Tomic (OŠ Franc Leskošek — Luka, Ljubljana) in Sašo Blažič (OŠ Mirana Jarca, Črnomelj).

Naši osnovnošolci so se na tekmovanju solidno odrezali, saj so dobili pohvale Matjaž KOBAL, Marko PETRUŠIČ in Sašo BLAŽIČ. Ta je že lansko leto sodeloval na zveznem tekmovanju v Skopju in prav tako dobil pohvalo.

Tekmovalna komisija, ki so jo sestavljali po en predstavnik vsake republike in avtonomne pokrajine ter predstavnik Matematičnega lista iz Beograda, je izmed vseh predlogov nalog izbrala naslednje:

7. razred

1. Dokaži, da velja za vsako trimestno število naslednja trditev: ali je število deljivo s 3 ali pa je dvomestno ali enomesto število, sestavljeno iz cifr tega trimestnega števila, deljivo s tri.
2. Števili 12 in 60 imata zanimivo lastnost: njun produkt je enak desetkratniku njune vsote. Poišči vse pare naravnih števil s takšno lastnostjo.
3. Trimestno število se poveča za 45, če zamenjamo cifri na mestu enic in desetic. Če zamenjata svoji mesti stotica in desetica, se to število zmanjša za 270. Kaj se zgodi s tem številom, če zamenjata svoji mesti stotica in enica?
4. Naj bo AB osnovnica in CD višina enakokrakega trikotnika ABC . Na kraku BC izberimo poljubno točko M . Dokaži, da je razlika dolžin CA in CM večja od razlike dolžin DA in DM .
5. Dana je točka C in premici p in q , ki se sekata. Načrtaj trikotnik ABC tako, da bo premica p simetrala notranjega kota pri A , premica q pa simetrala notranjega kota pri B tega trikotnika. (Točko C in premici p in q izberi tako, da boš trikotnik lahko načrtal.)

8. razred

1. Določi najmanjšo vrednost izraza $x^2 + y^2 + z^2 - 12y - 14z + 90$. Kolikšne so tedaj spremenljivke x , y in z ?
2. Določi vrednost izraza $a^{1987} + \frac{1}{a^{1987}}$, če je $a^2 + a + 1 = 0$.
3. Vsota prvih n naravnih števil je trimestno število, ki ima vse tri cifre med seboj enake. Koliko naravnih števil smo sešteli?
4. V pravokotnik $ABCD$ s stranicama $AB = 10$ cm in $BC = 5$ cm včrtaj polkrožnico s premerom AB . V kolikšnem razmerju deli polkrožnica diagonalo tega pravokotnika?
5. Poljuben štirikotnik $ABCD$ ima ploščino 3. Na stranici AB sta točki M in N tako, da je $AM = MN = NB$, na stranici CD pa točki P in Q , tako da je $CP = PQ = QD$. Dokaži, da ima štirikotnik $MNPQ$ ploščino 1.

Jože Antolovič

23. ZVEZNO TEKMOVANJE MLADIH FIZIKOV

Letošnje zvezno tekmovanje iz fizike je bilo od 15. do 17. maja 1987 na Srednji naravoslovni šoli v Ljubljani. Udeležilo se ga je 28 učencev osnovnih šol, ki so tekmovali v enotni skupini O, in 82 dijakov srednjih šol, ki so tekmovali v treh skupinah. Po tekmovanju, ki je potekalo v soboto dopoldan, so si dijaki ogledali Postojnsko jamo in Iskrin Izobraževalni center v Novi Gorici. Zvečer so imeli tu tudi družabno srečanje. V nedeljo dopoldne so se vrnili v Ljubljano na svečano razglasitev rezultatov.

Najuspešnejši so bili slovenski dijaki, saj so osvojili največ nagrad. Prvo nagrado so prejeli: Marko PAVLIŠIČ in Sašo BLAŽIČ (skupina O), Andrej LAMOVEC (A), Andrej VILFAN in Jure BAJC (C), drugo nagrado: Roni LEBEN (O), Tomaž VOLK (A), Uroš POMPE (B), tretjo: Igor ZRINJSKI (A), pohvale pa: Borut PEČNIK (O), Tomaž PROSEN in Robert JERAJ (A), Maja BRAČIČ in Alenka MERTELJ (B) ter Tomaž KOVAČ in Andrej GUŠTIN (C). V petčlansko ekipo za mednarodno olimpiado v Nemški demokratični republiki so se uvrstili trije dijaki Srednje naravoslovne šole iz Ljubljane: Andrej Vilfan, Andrej Lamovec in Jure Bajc.

Bojan Golli

Tekmovalci so reševali naslednje naloge:

Skupina O

1. Na telo z maso 0,5 kg, ki na začetku miruje, deluje 20 sekund stalna sila 20 N. Izračunaj hitrost telesa 7,25 s od začetka gibanja.
2. Posoda z maso 0,5 kg ima obliko valja z osnovno ploskvijo 400 cm^2 . V posodo nalijemo 2 litra vode in jo postavimo na tehtnico. Potem v vodo potisnemo valj z osnovno ploskvijo 200 cm^2 in prostornino 2 litra tako, da je v vodi potopljen do polovice višine. Izračunaj silo, s katero moramo držati valj, in silo, ki jo kaže tehtnica, če je valj iz
 - a) lesa z gostoto 250 kg/m^3 ,
 - b) aluminija z gostoto 2700 kg/m^3 .
3. Mati pripravlja kopel za otroka in vlije v kad 5 kg vode s temperaturo 45°C . Ker ve, da bo otrok pri tej temperaturi jokal, dolije še 3 kg vode s temperaturo 25°C . Ali bo otrok v tej kopeli jokal?
4. Dvigalo z maso 1200 kg se dvigne za 15 m v pol minute. Motor je priključen na 220 V, njegov izkoristek je 90%. Določi:
 - a) moč motorja,

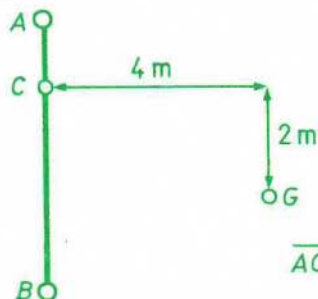
b) jakost toka skozi motor,

c) ceno enega dviga, če stane 1 kWh 40 dinarjev.

5. Žoga se giblje po vodoravni ploskvi s hitrostjo 1 m/s. Kako in pod kakšnim kotom glede na ploskev moramo postaviti ravno zrcalo, da se slika žoge v zrcalu giblje po navpičnici? S kolikšno hitrostjo se tedaj žoga približuje svoji sliki v zrcalu?

Skupina A

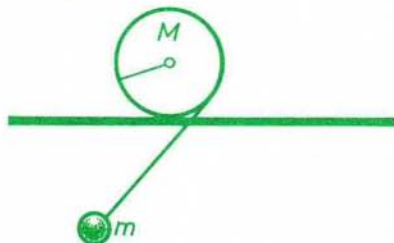
1. Dva športnika stojita v točkah A in B in držita nasprotni krajišči idealno raztegljive vrvice. V nekem trenutku se začne športnik A gibati proti vzhodu s konstantno hitrostjo 1 m/s, športnik B pa proti jugu s konstantnim pospeškom. Kolikšen je ta pospešek, če gre točka C na vrvici skozi točko G , kot kaže slika?



2. Mogoče si kdaj razmišljal o naslednjem problemu: ali lahko 700 N težak človek prenese istočasno dve uteži s težama po 100 N preko mostu, ki prenese največjo obremenitev 800 N, tako, da z utežema žonglira? Razišči to rešitev in povej, v katerem primeru bo zgornja meja sile na most najmanjša. Kolikšna je ta sila?

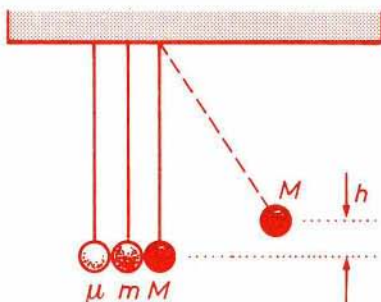
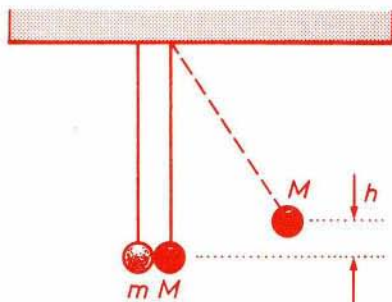
3. Na vodoravnih tirnicah se kotali homogen valj z maso M . Na valj je navita lahka vrvica, na kateri visi utež z maso m (glej sliko). Os valja se giblje s konstantnim pospeškom a . Izračunaj:

- razmerje mas uteži in valja,
- najmanjši koeficient trenja med valjem in tračnicami, da valj ne spodrsava.



4. Dve jekleni kroglici z masama M in m sta obešeni na togih navpičnih vrvi-
cah, tako da se dotikata in sta njuni središči na isti višini. Kroglico z maso M
izmaknemo do višine h in spustimo.

- Pokaži, da se druga kroglica po trku lahko dvigne največ do višine $4h$.
- Poleg kroglice z maso m obesimo kroglico z maso μ , tako da se dotikata in
so središča vseh treh kroglic na isti premici in na isti višini (glej sliko). Kro-
glico z maso M dvignemo in spustimo. Pokaži, da je kinetična energija
kroglice z maso μ največja, če velja $m = \sqrt{\mu M}$.



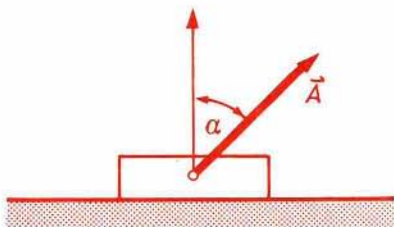
5. Vodoraven votel valj je s premičnim batom predeljen na dva enaka dela.
Na vsaki strani bata je 10 litrov idealnega plina pri tlaku 101 kPa in temperaturi
 0°C . Plin na levi strani valja počasi segrevamo, tako da bat stisne plin na desni
do tlaka 342 kPa. Valj in bat sta dobra toplotna izolatorja. Izračunaj:

- kolikšno delo dovedemo plinu na desni strani valja,
- kolikšna je končna temperatura plina na desni strani valja,
- kolikšna je temperatura na levi strani valja,
- koliko toplote dovedemo plinu na levi strani valja.

Specifična toplota plina pri stalni prostornini je $c_v = 16,7 \text{ Jmol}^{-1}\text{K}^{-1}$ in
razmerje $c_p/c_v = 1,5$.

Skupina B

1. Na vodoravni plošči leži disk.
Plošča sinusno niha s frekvenco 10Hz
v poševni smeri pod kotom 45° glede
na navpičnico (glej sliko). Koeficient
trenja med diskom in ploščo je 0,5.
Pri kolikšni najmanjši amplitudi bo
začel disk drseti po plošči?



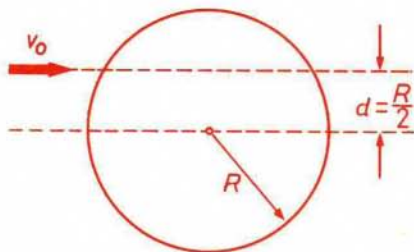
2. V dveh posodah za elektrolizo sta raztopini CuSO_4 in AgNO_3 . Posodi sta vezani zaporedno, njuna upora pa sta 13 ohmov in 7 ohmov.

a) Kako je treba povezati 24 baterij z gonilnimi napetostmi po 2 V in z notranjimi upori po 0,5 ohma, da se bo v 10 minutah izločilo 148 mg bakra?

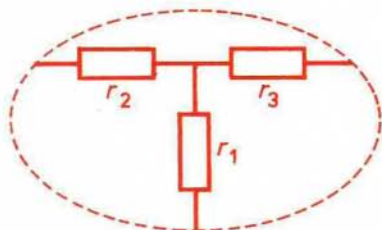
b) Koliko gramov srebra se bo izločilo na katodi pri enakih pogojih?

Ekvivalent za baker je 0,3294 mg/As. Atomska masa bakra je 63,55 kg in srebra 107,87 kg.

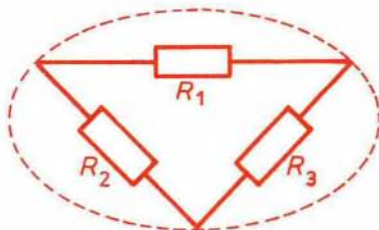
3. Ozek curek protonov z energijo 2 keV usmerimo na kovinsko kroglo s polmerom R tako, da je razdalja med curkom in središčem krogle $R/2$ (glej sliko). Izvor protonov se nahaja na veliki oddaljenosti od krogle. Kolikšna je napetost na krogli po dovolj dolgem času? Krogla je bila na začetku brez naboja. Naboj protona je $1,6 \cdot 10^{-19}$ As.



4. Kakšnemu pogoju morajo ustrezati upori r_1, r_2, r_3, R_1, R_2 in R_3 , da bi bil del vezja na sliki (a) ekvivalenten delu vezja na sliki (b), to pomeni, da se pri zamenjavi enega dela vezja z drugim ne spremenita napetost in tok v vezju zunaj kroga na sliki?



(a)

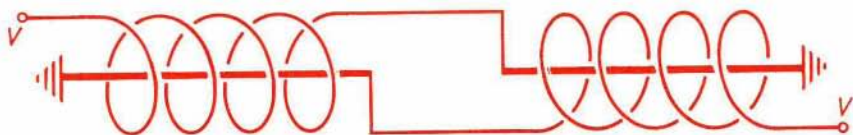


(b)

5. Naprava na sliki je sestavljena iz dveh enakih delov. Vsak del sestavlja dolga tuljava iz žice z uporom 2 ohma in supraprevodna žica, ki leži v osi tuljave drugega dela. Upor te žice je nič, če je žica v supraprevodnem stanju, in 10 ohmov, če je v normalnem stanju. Žica preide iz supraprevodnega v normalno stanje, če gostota magnetnega polja v tuljavi preseže 0,01 T. V katerem intervalu mora ležati napetost V , da bo ena žica v supraprevodnem, druga pa v normalnem stanju. Število obojev na dolžinsko enoto v vsaki tuljavi je 10000/m.

Skupina C

1. Curek sončne svetlobe pada pravokotno na zaslon. Če v razdalji 0,5 m pred zaslonom postavimo tanko razpršilno lečo z dioptrijo -4m^{-1} , se na zaslonu pojavita dve polji z osvetljenostima E_1 in E_2 . Kolikšni sta razmerji teh osvetljenosti in prvotne osvetljenosti zaslona E_0 ?
2. Steklена cev z notranjim radijem r in zunanjim radijem R ($r < R$) je napolnjena z luminiscentno tekočino, ki pod vplivom rentgenske svetlobe seva zeleno svetlobo. Lomni kvociënt stekla za zeleno svetlobo je n_1 , lomni kvociënt tekočine pa n_2 . Kolikšno naj bo razmerje r/R , da se pri opazovanju cevi iz smeri, ki je pravokotna na os cevi, zdi, da je debelina steklenega plašča cevi enaka nič?
3. Enobarvna svetloba z valovno dolžino λ pada na tanek sloj olja z debelino 5λ . Površina olja postane temna pri vpadnem kotu okrog 35° . Ali je mogoče ta kot točno izračunati in če je, kolikšna je njegova točna vrednost? Hitrost svetlobe v olju je $200\,000\text{ km/s}$.
4. V Bohrovem modelu mionskega atoma kroži v razdalji r okrog jedra namesto elektrona mion z maso $2,4 \cdot 10^{-28}\text{ kg}$ in z enakim nabojem kot elektron. Vrtilna količina miona je $h/2\pi$. Oцени, za katera vrstna števila jeder lahko obstaja mionski atom, če je radij jedra podan z $R = R_0 \cdot Z^{1/3}$, $R_0 = 1,7 \cdot 10^{-15}\text{ m}$, Z je vrstno število jedra, Planckova konstanta $h = 6,62 \cdot 10^{-34}\text{ Js}$ in $\epsilon_0 = 8,854 \cdot 10^{-12}\text{ As/Vm}$.
5. Po Einsteinovi teoriji relativnosti moramo Newtonovi gravitacijski sili med Soncem z maso M in planetom z maso m , ki se giblje s hitrostjo v po krožnici z radijem r , dodati popravek: $6GMmv^2/r^2c^2$.
 - a) Pokaži, da se z upoštevanjem tega popravka izračunani obhodni čas planeta spremeni za faktor: $1 - 3GM/c^2r$.
 - b) Oцени, za koliko se zaradi tega popravka izračunana pot Merkurja v 100 letih razlikuje od poti, izračunane z Newtonovo silo. Masa Sonca je $2,0 \cdot 10^{30}\text{ kg}$, radij Merkurjevega tira, za katerega predpostavljamo, da je krožnica, je $5,8 \cdot 10^{10}\text{ m}$ in gravitacijska konstanta $G = 6,672 \cdot 10^{-11}\text{ m}^3/\text{kg s}^2$.



18. MEDNARODNA FIZIKALNA OLIMPIADA

Kot vsako leto smo se tudi letos udeležili mednarodne fizikalne olimpiade, ki je potekala od 5. do 13. julija 1987 v Jeni v Nemški demokratični republiki. Našo državo smo zastopali najbolje uvrščeni z zveznega tekmovanja mladih fizikov v Ljubljani: Jure BAJC, Andrej LAMOVEC in Andrej VILFAN iz Ljubljane, Petar MAKSIMOVIĆ iz Beograda ter Predrags MILOŠEVIĆ iz Vranja. Ekipo sta vodila Iztok KUKMAN iz Ljubljane ter Draško GRUJIĆ iz Beograda. Pred tekmovanjem smo imeli eksperimentalne priprave na Oddelku za fiziko v Ljubljani in teoretične priprave na Srednji naravoslovni šoli v Ljubljani.

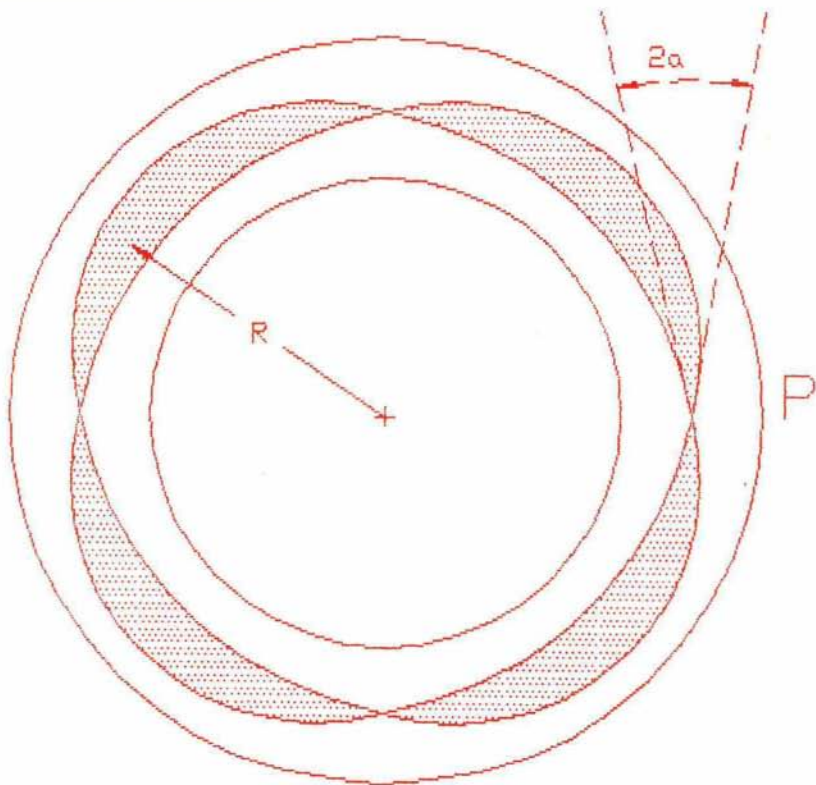
V nedeljo, 5. julija, smo z letalom prispeli v Berlin. Tam smo dobili svojega vodiča in prevajalca. V Jeni so nas prepeljali s kombijem. Udeležba na olimpiadi je bila letos rekordna, saj je sodelovalo 121 udeležencev iz 25 držav. Naslednji dan smo imeli svečano otvoritev s kratkim kulturnim sporedom, sicer pa je bil ta dan namenjen počitku. V torek smo reševali tri teoretične naloge, v četrtek pa eno eksperimentalno. Vsakič smo imeli po pet ur časa. Teoretične naloge so bile v primerjavi z lanskimi letos spet nekoliko bolj "klasične", kar je verjetno pripomoglo k boljši uvrstitvi naše ekipe. Eksperiment je bil tokrat samo eden. Kljub preprosti opremi je reševanje zahtevalo kar nekaj fizikalnega znanja in iznajdljivosti. V prostem času so nam organizatorji pokazali še znamenitosti mesta Jena, astronomski observatorij, planetarij Karla Zeissa, Goethejevo rojstno hišo v Weimarju, koncentracijsko taborišče Buchenwald ter več mladinskih klubov (po naše diskotek). V soboto smo se peljali z ladjo po umetnem jezeru Bleiloch, nato pa so pripravili piknik. Spored je bil zelo natrpan in nam ni ostalo kaj dosti prostega časa.

V nedeljo je bila svečana razglasitev rezultatov in podelitev nagrad. Slovenski del naše ekipe se je ni mogel udeležiti, saj smo morali loviti letalo za Zagreb. Podeljene so bile 3 prve nagrade (44–50 od 50 možnih točk), 10 drugih (38–43 točk), 29 tretjih nagrad (31–37 točk), 30 pohval (24–30 točk) ter 3 posebne nagrade (za najboljšo rešitev drugega oziroma tretjega problema ter za najboljše dekline). Najbolj uspešni so bili letos Romuni, ki so prejeli dve od treh prvih nagrad ter dve posebni nagradi. Naša ekipa je dosegla dve tretji nagradi: Petar MAKSIMOVIĆ, Beograd in Andrej VILFAN, Ljubljana. Vrstni red držav po številu doseženih točk je bil naslednji: Romunija, ZR Nemčija, Kitajska, DR Nemčija, Madžarska, Sovjetska zveza, Poljska, Nizozemska, Češkoslovaška, Švedska, ZDA, V. Britanija, Bolgarija, Vietnam, Jugoslavija, Avstrija, Kanada, Finska, Norveška, Islandija, Kuba, Turčija, Italija, Avstralija, Kuvajt. Naša ekipa je bila v skupnem seštevku torej petnajsta.

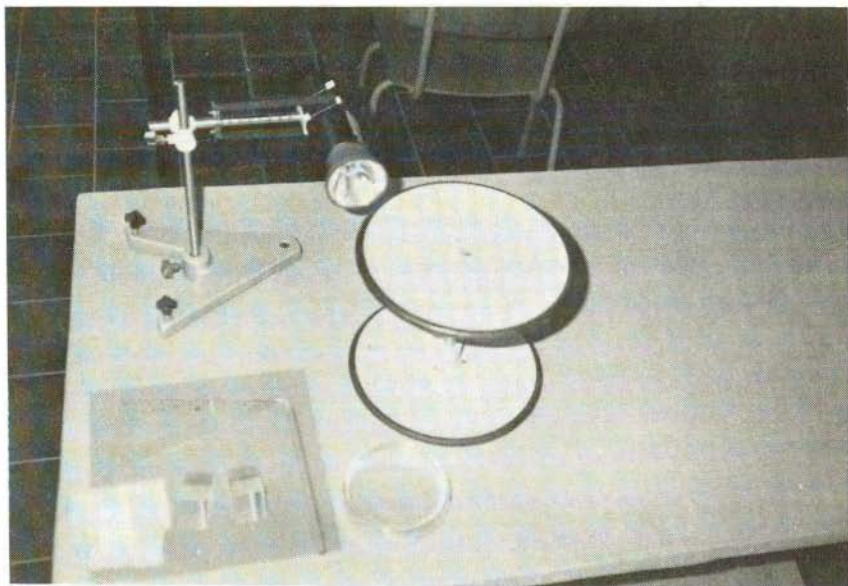
Za vse udeležence je bila olimpiada posebno doživetje, ki nam bo za vedno ostalo v spominu. Prihodnje leto bo gostiteljica fizikalne olimpiade Avstrija. Olimpiada bo potekala predvidoma od 23. 6. do 2. 7. 1988 v kraju Bad Ischl v bližini Salzburga.

Teoretična naloga z 18. mednarodne fizikalne olimpiade:

Curek elektronov izhaja iz točkastega izvira P v smeri silnic magnetnega polja (B) toroida (slika). Elektroni, ki smo jih pospešili z napetostjo U_0 , vstopajo v toroid pri srednjem radiju R in se razhajajo pod majhnim kotom 2α ($\alpha < 1$). Absolutna vrednost vektorja B je konstantna. Elektrostatične sile med elektroni zanemarimo.



1. Da bi ostal curek elektronov znotraj toroida, moramo uporabiti zunanje homogeno magnetno polje B_1 . Določi B_1 za elektron, ki se giblje v toroidu po krožnici z radijem R .



Slika 1. Eksperimentalna naloga (zgoraj). Slika 2. Jugoslovanska ekipa na olimpiadi (spodaj)



2. Na štirih mestih (razmaknjenih za $\pi/2$) znotraj polja toroida je curek elektronov fokusiran. Določi B . Napotek: Pri obravnavanju poti elektronov lahko ukrivljenost magnetnega polja zanemarimo.

3. Brez magnetnega polja B_1 zapustijo elektroni toroid tako, da poleg prvotnega gibanja tudi "ležejo" v smeri pravokotnice na ravnino, v kateri leži toroid.

a) Pokaži, da je sprememba radija R , po katerem krožijo elektroni, končna.

b) Določi smer lezenja elektronov.

Napotek: Kot razhajanja elektronov α lahko zanemarimo. Uporabi zakon o ohranitvi energije in vrtilne količine.

$(e_0/m_0) = 1,76 \cdot 10^{11} \text{ Askg}^{-1}$, $U_0 = 3 \text{ kV}$, $R = 50 \text{ mm}$

Eksperimentalna naloga:

Določi lomni kvocient stekla, iz katerega je narejena prizma, in lomni kvocient tekočine. Lomni kvocient prizme določi na dva načina. Za določitev lomnega kvocienta tekočine uporabi dve enaki prizmi. Lomni kvocient prizme je manjši od lomnega kvocienta stekla.

Pripomočki: dve prizmi s koti 30° , 60° in 90° , milimetrski papir, bel papir, steklena posoda s tekočino, okrogla mizica, svinčnik.

Andrej Vilfan

ZLOŽENKA

REŠITEV s str. 271

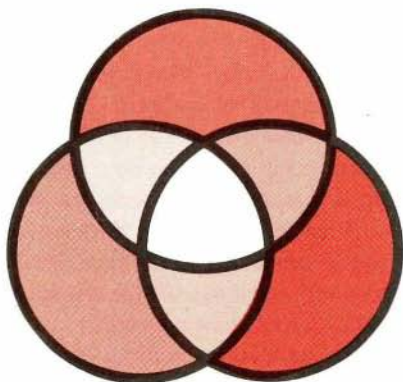
K O C K A

T O Č K A

I Z R E K

O B S E G

S T R A N



Dragoljub M. Milošević

2. REPUBLIŠKO TEKMOVANJE IZ LOGIKE ZA OSNOVNOŠOLCE IN SREDNJEŠOLCE – REŠITVE iz P-4

7. razred

1. Ker sta v različnih dnevih odgovarjala enako, sta se vsak vsaj enkrat zlagala. Ker pa lažeta samo na rojstni dan, sta vsak po enkrat govorila resnico. Peter je odgovoril "Včeraj", zato ima rojstni dan 30.12 ali pa 31.12. Pavel je rekel obakrat "Jutri", zato ima rojstni dan 1.1 ali 2.1. Toda 1.1. Peter govori resnico, zato je njegov rojstni dan 31.12.

Pavel govori na silvestrovo resnico, ker ni njegov rojstni dan, torej je rojen 1.1.

2. Vidimo, da Aleksov konj ni Niko, seveda pa tudi Aleks ni. Lahko je David ali Vili.

Recimo, da je Aleksov konj Vili. Potem je Niko jahal konja Vilija. Vemo, da je Vili jahal konja z imenom Niko. Potem je Aleks jahal konja Davida in David konja Aleksa. Zadnji pogoj naloge se potem glasi: Aleks je jahal konja Vilija. To je protislovje.

Torej je Aleksov konj David. Potem je Niko jahal konja Davida, Vili je jahal konja Nika. Aleks je moral jahati konja Vilija in David je jahal konja Aleksa.

Soimenjak Aleksovega konja je David. Ta je jahal konja Aleksa.

3. Nalogo bomo analizirali glede na štiri možnosti obravnave Janinih in Metkinih izjav:

1. Prvi dve izjavi Jane in Metke sta resnični.

Jana je četrta in Eva tretja. Metka ni druga, Polona ni zmagala. Druga Polonina izjava je resnična — Eva je bila pred Metko. Metka je lahko samo peta. Polona je druga, saj imamo na razpolago samo prvo in drugo mesto, prvo pa odpade. Giti je torej prva. Toda tedaj sta obe Gitini izjavi neresnični.

2. Prva Janina in druga Metkina izjava sta resnični.

Jana je četrta, Polona je prva. Metka ni druga, Eva ni tretja. Evina prva izjava mora biti resnična: Giti je zadnja. Metka je tretja in Eva je druga. Toda potem sta obe Gitini izjavi napačni.

3. Druga Metkina in druga Janina izjava sta resnični.

Polona je prva, Metka je druga. Jana ni četrta, Eva ni tretja. Evina druga izjava ni resnična. Giti je peta. Eva mora biti četrta in Jana tretja.

4. Druga Janina in prva Metkina izjava sta resnični.

Metka je druga, Eva je tretja. Polona ni prva, Jana ni četrta, Giti ni zadnja, saj je druga Evina izjava resnična. Toda obe Polonini izjavi sta neresnični. Ta možnost odpade.

Torej nam razpored daje tretja možnost. Končni vrstni red je: Polona, Metka, Jana, Eva in Giti.

8. razred

1. Recimo, da je Kibi deček. Potem bi po pravici povedal, da je deček in izjava prvega starša je resnična. Potem sta obe izjavi drugega roditelja napačni, kar pa nasprotuje pogoju, da ženske ne dajo nikoli dveh zaporednih napačnih izjav, moški pa da nikoli ne lažejo.

Torej je Kibi deklica.

Prva izjava drugega starša je resnična, druga izjava pa se ujema z izjavo prvega starša. Ti dve izjavi morata biti obe resnični. Če bi bili napačni, bi imeli moškega, ki laže. Zato je drugi izmed staršev moški (obe njegovi izjavi sta resnični), prvi med starši je ženska, ki je tudi povedala resnico.

2. Kolar in Janežič se vozita v službo, mesar gre peš. Torej nobeden od obeh ni mesar. Miličnik ne živi blizu pleskarja in praktično ne pozna trgovca, zato ni ne Kolar ne Janežič. Če bi namreč bil eden od njiju miličnik, bi drugi bil pleskar ali trgovec. Ker sta soseda, odpade pleskar, ker se poznata, odpade trgovec.

Kolar in Janežič sta pleskar in trgovec. Zato sta Mirtič in Smole miličnik in mesar.

Možnost Kolar — trgovec, Smole — miličnik odpade, ker Kolar in Smole skupaj kegljata, trgovec in miličnik pa sta se videla le enkrat.

Kaj pa možnost Kolar — trgovec, Mirtič — miličnik? Potem Janežič — pleskar zasluži več kot Mirtič — miličnik. To ni v skladu z dejstvom, da miličnik zasluži več kot pleskar.

Kolar v nobenem primeru ni trgovec, zato je pleskar. Janežič je trgovec, ker pa zasluži več kot Mirtič, le-ta ne more biti miličnik. Zato je Mirtič mesar. Ostane možnost Smole — miličnik.

3. Pikov pes in Mikijev maček imata isto ime — Bobi ali Dragi.

Recimo, da je to Bobi. Bobi je potem lastnik mačka Mikija. Pikov pes je Bobi in Mikijev maček je tudi Bobi. Zadnji pogoj naloge lahko preberemo takole: Soimenjak Dragijevega mačka je lastnik mačka, katerega soimenjak je Piko. Drugače: Soimenjak Dragijevega mačka ima mačka Pika. Torej: Bobi ima

mačka Mikija in Miki mačka Bobija. Potem ima Dragi mačka Pika in Piko mačka Dragija. Toda potem se zadnji pogoj glasi: Piko ima mačka Pika. To je protislovje.

Torej je Pikovemu psu in Mikijevemu mačku ime Dragi. Dragi je tudi lastnik mačka Mikija. Bobijev maček ni Bobi niti ni Dragi ne Miki. Torej je Bobijev maček Piki. Pikov maček je potem Bobi. Kdo je lastnik psa Pikija? Piki ni, Bobi ni, ker ima mačka Pikija. Drugi pogoj pravi: Miki je lastnik mačka, katerega soimenjak je lastnik psa Bobija. Drugače: Dragi je lastnik psa Bobija. Ker je Pikov pes Dragi, ima Bobi mačka Pikija in je Mikijev pes Piki.

1. letnik UI

1. Recimo, da je Luka ropar. Potem sta prva in tretja Stanetova izjava resnični. Zato mora biti druga neresnična, saj Stane ne more dati treh zaporednih resničnih izjav. Potem je vsaj ena Lukova izjava resnična. Toda prva in tretja sta neresnični (pri predpostavki, da je Luka ropar). Zato mora biti druga Lukova izjava resnična, se pravi, da ni bil nikoli v Malem mestu. Potem pa ni ropar — protislovje.

Luka torej ni ropar.

Recimo, da je Stane ropar. Potem Petrova prva izjava drži, pa tudi tretja, ki v bistvu trdi, da je vsaj ena Lukova izjava resnična (Stane je ropar). Zato mora biti druga Petrova izjava neresnična. Toda potem so vse tri Lukove izjave resnične. Spet protislovje.

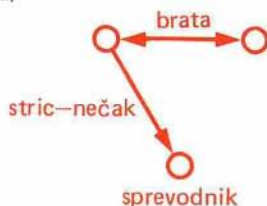
Stane torej ni ropar. Ropar je Peter.

Mimogrede: Hitro lahko ugotovimo, da je vsak vsaj enkrat lagal.

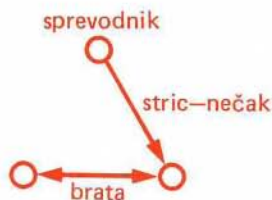
2. V sorodu so si varnostnik, strojevodja in sprevodnik. Ker sta dvojčka enakih let in je nečak nekaj let starejši od Aleša, je Aleš lahko samo zavirač.

Glede sorodstva imamo dve možnosti, ki ju prikazujeta skici:

a)



b)



Vzemimo najprej možnost b. Če je sprevednik stric enega od bratov, je stric tudi drugemu. Toda sprevednik ni strojevodje stric. Zato ta možnost odpade.

To pomeni, da je sprevednik nečak in mu je ime Janez. Ker varnostnik ni sprevednikov stric, je to strojevodja. Strojevodji je ime Peter. Tomaž je zato varnostnik in, ker ni Janezov stric, je njegov oče.

3. Najprej dokažimo, da nihče ni plesal s svojim zakonskim tovarišem. Alenka ni plesala s svojim možem, ampak s Cilkinim. Zato tudi Cilka ni plesala s svojim možem.

Danica je plesala z Alenkinim možem, torej ni s svojim. Beti je plesala z Edom, Edova žena z Gregorjem. Torej Beti ni Edova žena.

Imamo: Franci je plesal z Gregorjevo ženo, Gregor z Edovo. Če bi Edo plesal s Francijevo ženo, bi moral Henrik plesati s svojo, ker bi si prvi trije med seboj zamenjali partnerice. To pa, kot smo videli, ne gre.

Torej je Beti Henrikova žena. S katero je plesal Henrik? Z Beti ni, z Alenko ni (ker je plesala s Cilkinim možem), z Danico ni (ker je plesala z Alenkinim možem). Torej je plesal s Cilko.

Vemo: Franci je plesal z Gregorjevo ženo, Gregor z Edovo, Edo s Henrikovo. Torej je Henrik plesal s Francijevo ženo, ki je Cilka. Torej je Alenka plesala s Francijem, ki je Cilkin mož. Ostane par Danica – Gregor. Gregor je potem Alenkin mož. Edova žena je Danica, Gregorjeva soplesalka.

Povzemimo: plesni pari	zakonski pari
Edo – Beti	Henrik – Beti
Henrik – Cilka	Franci – Cilka
Franci – Alenka	Gregor – Alenka
Gregor – Danica	Edo – Danica

2. letnik UI

1. Beli ni mogel dati šaha s premikom tekača, ker bi bil črni že v šahu. Zadnja poteza belega ni s figuro, ki morebiti stoji namesto črne trdnjave, saj se nobena figura ne more premakniti z b5 ali c6 ali d7 na h8.

Kaj pa, če je zadnja poteza s figuro, ki jo nadomešča črni tekač? Potem je bila to poteza z d7 na g4. Toda to bi bil lahko le lovec ali kraljica in bi bil črni že v šahu.

Kaj pa, če je to poteza s figuro, ki jo nadomešča črni skakač? To je lahko

le poteza z b5 na a6. Beli kmet to ne more biti, ker so vsi kmeti, ki pridejo v poštev, še na šahovnici. Lahko bi bil lovec ali kraljica, toda obakrat bi bil črni že v šahu.

Edina poteza, ki pride v poštev, je beli kmet s c5 na b6. Ta en passant vzame črnega kmeta, ki je blokiral šah, ki ga je beli naredil s potezo c6 – a6. S katero figuro? Kraljica odpade, ker bi bil črni že v šahu. Edino trdnjava je lahko.

Torej – črni skakač je v resnici bela trdnjava.

2. Prva Gitina izjava (da je stara 22 let) in druga Majina izjava (Gita je stara 23 let) si nasprotujeta. Vsaj ena je neresnična. Druga Gitina izjava in tretja Majina izjava nista združljivi – vsaj ena je napačna. Ker pa je vsako dekle dalo le eno lažno izjavo, je pri obeh parih ena resnična in ena neresnična izjava. Potem sta gotovo resnični tretja Gitina in prva Majina izjava.

Recimo, da je Gita stara 22 let. Potem ni dve leti mlajša od Helene. Maja je stara 21 let, ker je leto mlajša od Gite. Helena je tri leta starejša od Gite, torej je stara 25 let. Toda potem sta zadnji dve Helenini izjavi neresnični. To je protislovje.

Gita je torej stara 23 let. Potem je Helena dve leti starejša, torej je stara 25 let. Maja je leto dni mlajša, torej je stara 22 let.

Podatki so združljivi: Neresnične so prva Gitina izjava, Helenina zadnja izjava in Majina zadnja izjava, druge pa so vse resnične.

3. Sklepamo, da Petra ni ne Andrejeva ne Cenetova žena, da Marta ni Davorjeva žena in da Danica ni Davorjeva žena. Danica ni Borisova žena. Če bi bila, bi bil njegov prvi stavek resničen, Cenetova žena bi bila Danica ali Petra. Toda Petra ni, Danica pa tudi ne, če smo predpostavili, da je Borisova žena. Torej je Petra Borisova ali Davorjeva žena, Danica pa Andrejeva ali Cenetova. Davorjeva žena pa je Petra ali Jana.

Recimo, da je Danica Andrejeva žena. Potem je Danica Janina mati in Cenetova žena ni Jana (ker Danica ne more biti Janina sestra). Potem je Cenetova žena Marta (Jani ni, Petra ni, Danica ni, ker je po predpostavki Andrejeva žena). Borisova prva izjava je napačna, zato ni njegova žena ne Danica ne Petra. Zanj ostane le Jana. Potem je Jana najstarejša (druga Borisova izjava je resnična). Toda Danica je Janina mati. To ni mogoče.

Torej Danica ni Andrejeva žena. Potem je Danica Cenetova žena. Danica je Janina starejša sestra, zato Danica ni Janina mati (po prvi Andrejevi izjavi). Zato Jana ni Andrejeva žena. Ker tudi Petra ni in ne Danica, je Andrejeva žena Marta. Jana tudi ni Borisova žena (ker ni najstarejša, kot trdi Boris). Jana je torej Davorjeva žena. Ostane par Boris – Petra.

Izidor Hafner

18. ZVEZNO TEKMOVANJE OSNOVNOŠOLCEV IZ MATEMATIKE — rešitve nalog s strani 301

7. razred

1. Če je ena izmed cifer poljubnega trimestnega števila deljiva s 3, je trditev dokazana. Predpostavimo, da nobena izmed cifer x , y , z tega števila ni deljiva s 3. Opazujmo ostanke, ki jih dobimo pri deljenju cifer x , y , z s 3. Če so vsi trije ostanki med seboj enaki, je vsota $x + y + z$ deljiva s 3 in je trimestno število deljivo s 3. Če so ostanki različni (na primer pri x in y 1 in 2), je vsota $x + y$ deljiva s 3 in je dvomestno število deljivo s 3.

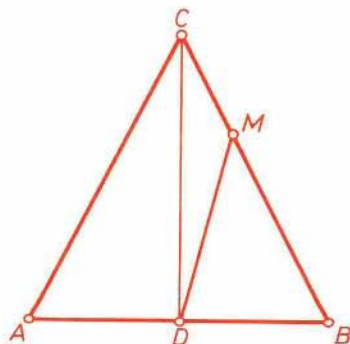
2. Iskani števili naj bosta a in b . Velja: $a \cdot b = 10(a + b)$. Sledi: $a \cdot b - 10a - 10b = 0$, odtod $a \cdot b - 10a - 10b + 100 = 100$ in $(a - 10) \cdot (b - 10) = 100$. Ker je $100 = 1 \cdot 100 = 2 \cdot 50 = 4 \cdot 25 = 5 \cdot 20 = 10 \cdot 10$, dobimo pet parov: 11, 110; 12, 60; 14, 35; 15, 30 in 20, 20.

3. Naj bo $100x + 10y + z$ naše trimestno število. Z zamenjavo enic in desetic dobimo $100x + 10y + z + 45 = 100x + 10z + y$ oziroma $y - z + 5 = 0$, z zamenjavo stotic in desetic pa $100x + 10y + z - 270 = 100y + 10x + z$ oziroma $x - y - 3 = 0$. Seštejmo $(y - z + 5) + (x - y - 3) = 0$ in dobimo še $x - z = -2$. Zamenjajmo stotice in enice:

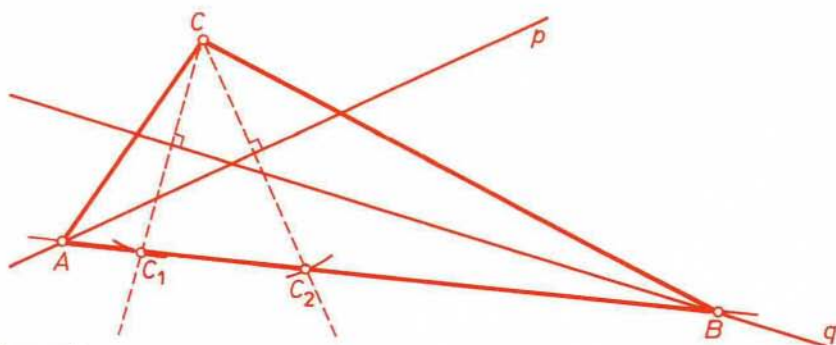
$$\begin{aligned} 100x + 10y + z + A &= 100z + 10y + x \\ 99(x - z) + A &= 0 \\ A &= 198 \end{aligned}$$

Število se pri tem poveča za 198.

4. Trditev: $|CA - CM| > |DA - DM|$
Dokaz: $CA = CB$, zato $CA - CM = CB - CM = BM$. V trikotniku BDM je $BM > |BD - DM|$. D je razpolovišče osnovnice, pa je $AD = BD$ in končno $CA - CM = BM > |DB - DM| = |DA - DM|$



5. V trikotniku ABC naj bosta p in q simetrali notranjih kotov α in β . Zrcalni sliki točke C preko premic p oziroma q (točki C_1 in C_2) ležita na premici skozi A in B . Konstrukcija: Točko C prezrcalimo preko premic p in q , premica skozi sliki seka p in q v točkah A in B .



8. razred

1. Izraz preoblikujemo: $x^2 + y^2 - 12y + 36 + z^2 - 14z + 49 + 5 = x^2 + (y - 6)^2 + (z - 7)^2 + 5$. Ker je kvadrat realnega števila večji ali enak 0, ima izraz za $x = 0, y = 6$ in $z = 7$ minimalno vrednost 5.

2. Dano enakost pomnožimo z $a - 1$. Dobimo $(a - 1)(a^2 + a + 1) = 0$, $a^3 - 1 = 0$ in $a^3 = 1$. Tedaj je $a^{1987} = a^{3 \cdot 662 + 1} = (a^3)^{662} \cdot a = 1^{662} \cdot a = 1 \cdot a = a$, zato pišemo $a^{1987} + \frac{1}{a^{1987}} = a + \frac{1}{a}$. Če pa dano enakost delimo z a , dobimo po ureditvi $a + \frac{1}{a} = -1$; vrednost izraza je torej -1 .

3. Označimo z N vsoto naravnih števil do n in zapišimo:

$$N = 1 + 2 + 3 + \dots + (n - 1) + n$$

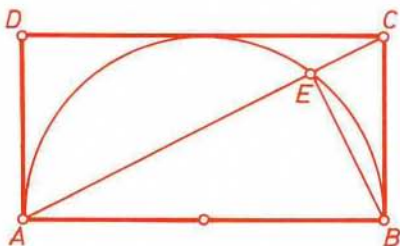
$$N = n + (n - 1) + (n - 2) + \dots + 2 + 1$$

Seštejmo po kolonah, pa imamo:

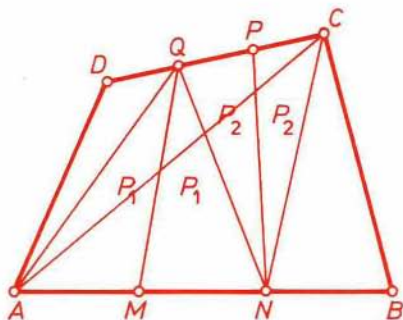
$$2N = (n + 1) + (n + 1) + (n + 1) + \dots + (n + 1) + (n + 1) = n(n + 1)$$

oziroma $N = \frac{n(n + 1)}{2}$. Upoštevajmo pogoj iz naloge: $\frac{n}{2}(n + 1) = 100x + 10x + x = 111x$ ali $n(n + 1) = x \cdot 2 \cdot 3 \cdot 37$. Ker je leva stran enačbe produkt dveh zaporednih naravnih števil, mora biti $x = 6$ in $n = 36$. Seštel smo 36 naravnih števil, njihova vsota je 666.

4. Polkrožnica seka diagonalo v točki E . Tedaj je $\sphericalangle AEB = 90^\circ$, ker je to obodni kot nad premerom AB . Po Pitagorovem izreku dobimo $AC = 5\sqrt{5}$. Trikotnika ABC in ABE sta si podobna, ker se ujemata v notranjih kotih (koti s pravokotnimi kraki), zato iz $AB : AC = AE : AB$ sledi $AE = 4\sqrt{5}$ in je torej $AE : EC = 4 : 1$.



5. Trikotnika AMQ in MNQ imata enaki ploščini ($AM = MN$, enaki višini) – označimo jo s P_1 , prav tako tudi trikotnika NPQ in NPC – naj bo njuna ploščina P_2 . Ploščina štirikotnika $MNPQ$ je $P_{MNPQ} = P_1 + P_2$. Trikotnik AQD ima trikrat manjšo osnovnico od trikotnika ACD , višini pa sta enaki. Zato je $P_{AQD} = \frac{1}{3} P_{ACD}$ in analogno $P_{NBC} = \frac{1}{3} P_{ABC}$, odtod pa $P_{AQP} + P_{NBC} = \frac{1}{3} P_{ACD} + \frac{1}{3} P_{ABC} = \frac{1}{3} P_{ABCD} = 1$. Sledi $P_{ANCQ} = 2$ oziroma $2P_1 + 2P_2 = 2$ in $P_{MNPQ} = 1$.



Jože Antolovič

ZAPOREDJI – rešitev s strani 271

Število 111 je deljivo s 37, zato so tudi vsa števila oblike

$$\underbrace{33\dots337}_{3k} = 37 + 333 \cdot (10^2 + 10^5 + \dots + 10^{3k-1}) \text{ in}$$

$$\underbrace{377\dots77}_{3k} = 37 \cdot 10^{3k} + 777 \cdot (1 + 10^3 + \dots + 10^{3k-3}), k \in \mathbb{N}$$

deljiva s 37. Lahko se prepričamo, da nobeden izmed prvih osmih členov zaporedja (prvega ali drugega) ni deljiv s 73. Vsak nadaljnji člen lahko zapišemo takole:

$$\underbrace{33\dots33}_{8m} \underbrace{\dots37}_n, \quad m, n \in \mathbb{N}, n \leq 8 \quad \text{za prvo in}$$

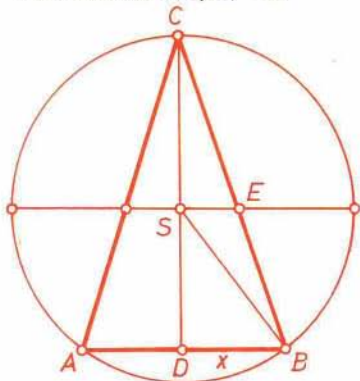
$$\underbrace{37\dots77}_n \underbrace{\dots77}_{8m}, \quad m, n \in \mathbb{N}, n \leq 8 \quad \text{za drugo zaporedje}$$

Upoštevajmo, da je število 11111111 deljivo s 73 in že opazimo, da noben člen ni deljiv s 73. Na enak način vidimo, da velja trditev tudi v drugem primeru.

Boris Lavrič

1. Z uporabo Talesovega izreka zaporedoma izračunamo oddaljenost točk F , G in H od stranice AD . Slednja meri 6 cm.

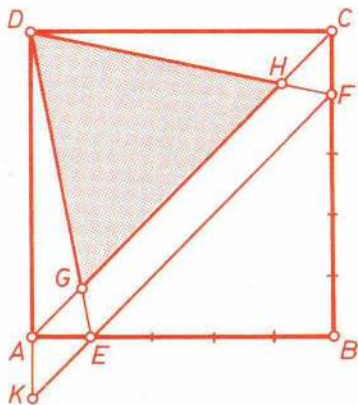
2. Pogledajmo sliko in ugotovimo, da je $d(S, E) = 5/3$. Postavimo $x = d(D, B)$, s Talesovim izrekom določimo $d(S, D) = 3x - 5$ in zapišemo Pitagorov izrek za trikotnik DBS . Tako dobimo $d(A, B) = 6$.



3. Poglejmo sliko in ugotovimo:

$$\frac{d(A, G)}{d(G, H)} = \frac{d(K, E)}{d(E, F)} = \frac{d(A, E)}{d(E, B)}$$

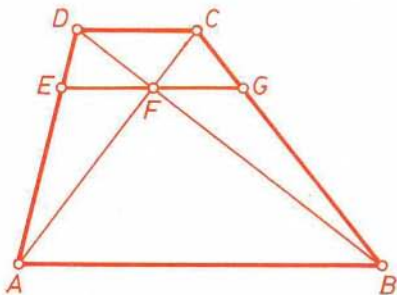
Odgovor: Tretjino.



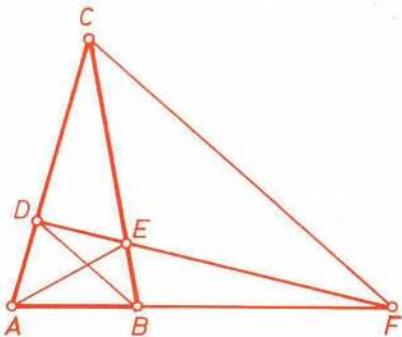
NAMIGI IN ODGOVORI

k nalogam s str. 261

4. S pomočjo Talesovih izrekov izrazimo $d(E, F)$ z $d(A, B)$ in izračunamo razmerje med višinama trapezov $ABGE$ ter $EGCD$. Nato določimo razmerje med njunima ploščinama. Odgovor: 10.



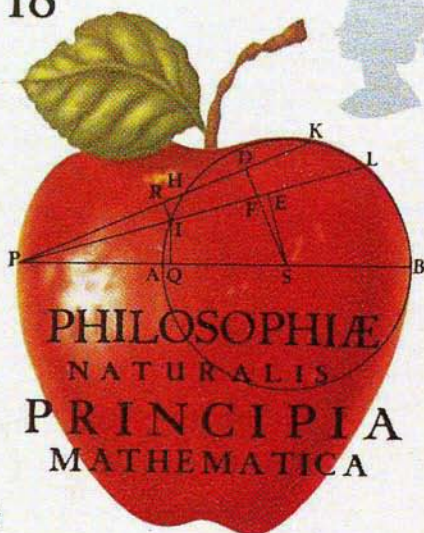
5. Iz enakosti $p(CDE) = p(BFE)$ dobimo $CF \parallel DB$ in potem še $p(ABE) = p(AED)$. Nato upoštevamo, da DE razpolavlja ABC .
Odgovor: $d(A, D) : d(D, C) = 1 : 2$,
 $d(B, E) : d(E, C) = 1 : 3$.





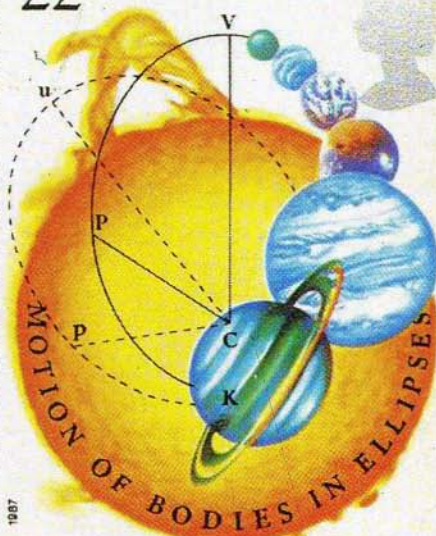
Pogled na del observatorija, zgrajenega v Jaipuru (Indija) v prvi polovici 18. stoletja. Tu niso postavili nobenega daljnogleda, ampak same zidane opazovalne naprave, imenovane jantre. Zadaj vidimo stolpe Samrat Jantre — ogromne ekvatorialne sončne ure s 27 m visokim zidanim gnomonom. Zadaj desno je skupina 12 gnomonov, večjih kot človek. Levo je jantra za določevanje enakonočja, v sredini pa sta na dvignjeni ploščadi dve "skledi" za opazovanje navideznega gibanja Sonca. (Glej članek na strani 294.)

18^P



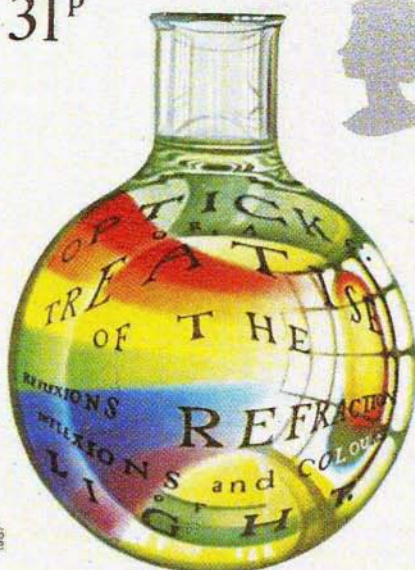
Sir ISAAC NEWTON (1642-1727)

22^P



Sir ISAAC NEWTON (1642-1727)

31^P



Sir ISAAC NEWTON (1642-1727)

34^P



Sir ISAAC NEWTON (1642-1727)