

DRUŠTVO MATEMATIKOV, FIZIKOV IN ASTRONOMOV SRS LETNIK 15, 1987-88,

PRESEK

4



VSEBINA

MATEMATIKA	Ogrejmo se za kongruence (Boris Lavrič)	193
	Kongruence in Eulerjev izrek (Dušan Pagon)	194
RAČUNALNIŠTVO	Metoda "ostrega pogleda" v programiranju (Tomi Dolenc)	198
ASTRONOMIJA	Kako preskušaj ločljivost daljnogleda (Marijan Prosen)	202
	Gibanje Lune (Tomaž Zwitter, karikatura Borut Pečar)	204
FIZIKA	Hoja po žarečem kamenju (Janez Strnad)	215, 210
NALOGE	Petkova Petra (Boris Lavrič)	196
	Šestmestno število — rešitev str. 249 (Marija Vencelj)	197
	Od ene naloge k drugi — rešitev str. III (Miha Štalec)	213
	Se morda motim — rešitev str. 232 (Boris Lavrič)	223
	Prijatelji — rešitev str. 254 (Darjo Felda)	241
NOVICE	Pisma bralcev (Dušica Boben)	209
	Urniki tekmovanj v letu 1988 (Darjo Felda)	216
	2. poletna šola Intertrade — IBM (Izidor Hafner)	219
RAZVEDRILLO	Je tudi meja med šalo in resnico relativna (prev. Lidija Okršlar)	220
	KRIŽANKA (Marko Bokalič)	224
	BOLJ ZA ŠALO KOT ZARES — Štefanova gimnazija v Celovcu (Ciril Velkoverh)	227
TEKMOVANJA	31. republiško tekmovanje srednješolcev iz matematike (Nadja Ivanc Milošević)	226
	Srednješolsko republiško tekmovanje iz fizike (Iztok Kukman)	228
	11. republiško tekmovanje iz znanja računalništva in srečanje mladih raziskovalcev Slovenije (Tadej Lasbafer)	233
	2. republiško tekmovanje iz logike (Izidor Hafner)	236
MATEMATIKA	O treh hišah in treh vodnjakih (Olga Arnuš)	242
	Število razkosanj končne množice (Marko Razpet)	244
	Geometrijska neenakost na dva načina (Šefket Arslanagić)	250
NOVE KNJIGE	Ekrutt J., Zvezde (Marijan Prosen)	251
	Lavrič B., Rešene naloge iz matematike z republiških tekmovanj, 3. del (Gorazd Lešnjak)	252
	Značke za tekmovalce (Ciril Velkoverh)	252
	Zbirka nalog iz matematike za srednje šole	253
REŠITVE NALOG	Številski križanka — rešitev iz P XV—3 (Franci Oblak)	197
	Praznik — rešitev iz P XV—3 (Boris Lavrič)	208
	Višinski trikotnik — rešitev iz P XIV—6 (Peter Petek)	255
	Smrketa na jezeru — rešitev iz P XV—1 (Peter Petek)	256
	Pisma bralcev (Peter Petek)	256
NA OVITKU	Fotografija, ki jo je Preseku ljubeznivo prepustila Tamara Ditrich, kaže običaj v šrilanški vasi. Moški, ženske in otroci v čast nekega južnoindijskega boga hodijo bosi po žerjavici	I
	Del površja Lune, ki ga z Zemlje ne vidimo — posnela sta ga prva obiskovalca Lune 21.7.1969 ob svojem vračanju k matični ladji	IV

OGREJMO SE ZA KONGRUENCE

Lani je bil božič v petek in ker ni bil dela prost dan, pogledjmo, če bo morda letos drugače. Pri reševanju tega problema si bomo pomagali s pojmom kongruenca (ujemanje, skladnost).

Rekli bomo, da sta dva dneva kongruentna, če imata isto ime (nedelja, ponedeljek, ...). Na isto ime naletimo vsakih sedem dni, zato je število dni med dvema kongruentnima dneva večkratnik števila 7.

Zdaj pa k uvodni nalogi! Od lanskega božica do letošnjega bo preteklo 366 dni (letos je prestopno leto!), število 366 pa pri deljenju s 7 da ostanek 2. Oba božiča tedaj nista kongruentna, pač pa je drugi dan (torej prva nedelja) po lanskem božiču kongruenten letošnjemu, ki bo potemtakem v nedeljo in bo seveda dela prost dan.

Problem smo rešili, kongruence pa zanj prav gotovo ne bi bilo treba uvajati. Toda ali se ne najdemo marsikdaj v podobnem položaju? Pri določanju ure v dnevu, merjenju kota pri vrtenju itd. Zakaj ne bi tedaj razmišljali bolj na široko?

V vseh naštetih primerih smo šteli (dneve, ure ...) in se zato znašli v svetu števil — celih, če priznamo tudi štetje nazaj. Torej ne bi bilo napak kongruence vnesti v množico celih števil. Kako? Spomnimo se: drugi dan je bil kongruenten tristošestinšestdesetemu. Zato bi rekli: števili 2 in 366 sta kongruentni. Pri štetju ur pa ti dve števili ne bi bili kongruentni, saj njuna razlika ni deljiva s 24. Primera moramo torej ločiti. Mera za določanje kongruentnosti je bil v prvem primeru teden (7 dni), v drugem pa dan (24 ur). Latinsko ime za mero je *modulus*, zato bomo rekli: število 2 je *kongruentno* številu 366 po modulu 7, zapisali pa $2 \equiv 366 \pmod{7}$. V drugem primeru zapišemo $2 \not\equiv 366 \pmod{24}$.

Novoimo bolj splošno. Naj bo m celo število. Tedaj rečemo, da sta celi števili i in j kongruentni po modulu m , če je njuna razlika deljiva z m , to pa zapišemo krajše: $i \equiv j \pmod{m}$.

Za konec snov utrdimo še z nalogami.

1. Lojze je ob treh popoldne sporočil Maji, da jo bo obiskal natanko čez 200 ur. Bo to popoldanski obisk?
2. Število 1987 je kongruentno 57 po modulu m , večjem od 200 in manjšem od 900. Kolikšen je m ?
3. Najprej sem bil obrnjen točno proti vzhodu, nato pa sem se nekajkrat zavrtel za kot 1000° okrog navpične osi in obstal. Sem lahko zdaj obrnjen točno proti zahodu?

KONGRUENCE IN EULERJEV IZREK

Pogovarjali se bomo o lastnostih celih števil. S pojmom *kongruenca* smo se seznanili v "ogrevanju", v pričujočem sestavku pa bomo najprej na kratko orisali osnovne pojme, nato pa nanizali nekaj rezultatov.

Beseda kongruenca izvira iz latinske besede *congruens*, ki označuje ustreznost oziroma sovpadanje. Nas bodo zanimali ostanki pri deljenju celih števil z določenim naravnim številom m , ki ga bomo imenovali *modul* (lat. *modulus* – mera).

Za dve celi števili a in b bomo rekli, da sta *kongruentni po modulu m* , če pri deljenju s številom m dasta enak ostanek r . Zapis $a \equiv b \pmod{m}$ torej pomeni, da je

$$a = k_1 m + r \quad \text{in} \quad b = k_2 m + r \quad (1)$$

kjer je r ostanek pri deljenju z m (torej $0 \leq r < m$).

Hitro se lahko prepričamo, da je zgornja definicija kongruence ekvivalentna naslednji.

IZREK 1. $a \equiv b \pmod{m}$ takrat in samo takrat, ko je razlika števila a in b deljiva s številom m .

Dokaz. Res, če med seboj odštejemo enakosti (1), dobimo $a - b = (k_1 - k_2)m$ obratno pa iz $a - b = km$ in $a = k_1 m + r$ sledi $b = (k_1 - k)m + r$, torej sta ostanka deljenja števil a in b z m enaka. $\square$

Kongruence imajo veliko podobnih lastnosti kot navadne enakosti. Oglejmo si jih nekaj.

IZREK 2. Če je $a_1 \equiv b_1 \pmod{m}$ in $a_2 \equiv b_2 \pmod{m}$, potem je tudi $a_1 + a_2 \equiv b_1 + b_2 \pmod{m}$ in $a_1 a_2 \equiv b_1 b_2 \pmod{m}$.

Dokaz. Razliki $a_1 - b_1$ in $a_2 - b_2$ sta deljivi z m , zato je deljiva z m tudi njuna vsota, ki jo lahko zapišemo v obliki $(a_1 + a_2) - (b_1 + b_2)$, kar dokazuje prvi del izreka. Naj bo $a_1 = b_1 + k_1 m$ in $a_2 = b_2 + k_2 m$. Potem je tudi $a_1 a_2 = b_1 b_2 + (b_1 k_2 + k_1 b_2 + k_1 k_2 m)m$, od koder sledi drugi del našega izreka. $\square$

IZREK 3. Relacija $a \equiv b \pmod{m}$ velja takrat in samo takrat, ko je $ca \equiv cb \pmod{cm}$ za poljubno naravno število c . Iz kongruence $a \equiv b \pmod{m}$ sledi kongruenca $a \equiv b \pmod{m_1}$, kjer je m_1 poljuben delitelj števila m .

Dokaz. Prva trditev očitno sledi iz ekvivalentnosti naslednjih enakosti: $a - b = km$ in $ca - cb = kcm$. Za dokaz druge trditve naj bo $a - b = km$ in

$m = m_1 m_2$. Potem je tudi $a - b = (km_2)m_1$, kar smo želeli dokazati. $\square$

IZREK 4. Naj bo $ca \equiv cb \pmod{m}$ in največji skupni delitelj števil c in m (označujemo ga z $D(c, m)$) enak 1. Potem je tudi $a \equiv b \pmod{m}$.

Dokaz. Vemo, da je $c(a - b) = km$ in da števili c in m nimata skupnih deliteljev razen števila 1. Torej mora biti $k = ck_1$, $k_1 \in \mathbb{N}$, od koder vidimo, da je $a - b = k_1 m$ oziroma $a \equiv b \pmod{m}$. $\square$

Razdelimo množico vseh celih števil na paroma disjunktne podmnožice, ki jim bomo rekli *razredi števil po modulu m* , tako da v isti razred uvrstimo vsa cela števila, ki dajo pri deljenju z m enak ostanek. Vsako množico iz m števil, od katerih nobeni dve nista iz istega razreda po modulu m , bomo imenovali *kompletna množica predstavnikov po modulu m* . *Reducirana množica predstavnikov po modulu m* pa bomo rekli podmnožici kompletne množice, sestavljeni iz vseh tistih števil, ki so tuja številu m . Označimo reducirano množico, dobljeno iz kompletne množice $\{1, 2, 3, \dots, m\}$ z R_m , število elementov v njej pa s $\varphi(m)$.

Primer 1. $R_6 = \{1, 5\}$, $\varphi(6) = 2$ in
 $R_7 = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$, $\varphi(7) = 6$

Na ta način smo opredelili funkcijo $\varphi: n \mapsto \varphi(n)$ za vsa naravna števila n . Imenujemo jo Eulerjeva funkcija. Očitno je za vsako praštevilo p vrednost $\varphi(p)$ enaka $p - 1$.

Reducirane množice imajo naslednjo pomembno lastnost.

IZREK 5. Če sta števili a in m tuji, potem je množica $\{ax: x \in R_m\}$ reducirana množica predstavnikov po modulu m .

Dokaz. Iz $D(a, m) = 1$ in $D(x, m) = 1$ sledi enakost $D(ax, m) = 1$, torej se moramo prepričati le, da vsa števila ax , $x \in R_m$, pripadajo različnim razredom po modulu m . To pa dobimo s pomočjo izreka 4. Iz $ax_1 \equiv ax_2 \pmod{m}$ bi namreč dobili $x_1 \equiv x_2 \pmod{m}$, to pa nasprotuje dejstvu, da so vrednosti spremenljivke x v reducirani množici R_m predstavnikov po modulu m . $\square$

Naslednja trditev je znana pod imenom Eulerjev izrek.

IZREK 6. Naj bo $m > 1$ in $D(a, m) = 1$. Potem je $a^{\varphi(m)} \equiv 1 \pmod{m}$.

Dokaz. Označimo s c vrednost $\varphi(m)$ in z $r_1, r_2, \dots, r_c$ elemente množice R_m . Naj bo za vsako celo število i ($1 \leq i \leq c$) q_i najmanjši pozitivni predstavnik razreda, ki mu pripada število ar_i . Potem zaradi druge lastnosti kongruence,

navedene v izreku 1, velja:

$$a^c r_1 r_2 \dots r_c \equiv q_1 q_2 \dots q_c \pmod{m} \quad (2)$$

Po pravkar dokazani lastnosti reduciranih množic (izrek 5) pa je $r_1 r_2 \dots r_c = q_1 q_2 \dots q_c$, zato z uporabo izreka 4 iz (2) dobimo $a^c \equiv 1 \pmod{m}$, kar je bilo treba dokazati. $\square$

Če vzamemo za modul m praštevilo p in uporabimo zgoraj navedeno lastnost Eulerjeve funkcije, dobimo naslednjo posledico izreka 6, ki je znana kot Fermatov izrek.

Posledica. Za praštevilo p velja $a^{p-1} \equiv 1 \pmod{p}$, če število a ni večkratnik števila p oziroma $a^p \equiv a \pmod{p}$ pri poljubnem naravnem številu a .

Z uporabo kongruenc in njihovih lastnosti si lahko znatno olajšamo reševanje mnogih nalog v zvezi z deljivostjo števil. Pri tem nam pogosto pomagata tudi Eulerjev ali Fermatov izrek.

Primer 2. Kakšen je ostanek pri deljenju števila 1985^{1985} s 7?

Najprej opazimo, da je $1985 \equiv 4 \pmod{7}$, torej je tudi $1985^{1985} \equiv 4^{1985} \pmod{7}$. Ker je $4^3 \equiv 1 \pmod{7}$, dobimo odtod kongruenco $1985^{1985} \equiv 4^2 \pmod{7}$ oziroma $1985^{1985} \equiv 2 \pmod{7}$. Ostanek pri deljenju je torej enak 2.

Primer 3. Dokaži, da je število $2^{24} - 4$ deljivo s 23.

Iz Fermatovega izreka pri $a = 2$, $p = 23$ dobimo kongruenco $2^{22} \equiv 1 \pmod{23}$, torej je število $2^{22} - 1$ deljivo s 23, naše število, ki je štirikratnik tega števila, pa prav tako.

Poskusite rešiti še naslednji dve nalogi.

Poišči ostanek pri deljenju števila $(12371^{56} + 34)^{28}$ s 111.

Dokaži, da je število $2^{1092 \cdot 1093} - 1$ deljivo s 1093^2 .

Dušan Pagon

NALOGA

PETKOVA PETRA

Petra je rojena v petek in je imela šele enajsti rojstni dan ponovno v petek. Lani (torej leta 1987) je na petek rodila sina Peterčka pa tudi sama je imela rojstni dan v petek. Le še vsak enkrat bosta v tem tisočletju lahko praznovala svoj rojstni dan v petek.

Koliko let ima Petra in v katerem letnem času je rojen Peterček?

Boris Lavrič

ŠESTMESTNO ŠTEVILO

Šestmestno število, ki je popoln kvadrat, razrežemo med tretjo in četrto cifro na dva dela. S tem dobimo dve trimestni števili, od katerih je eno osemkratnik drugega, njuna razlika pa je tudi popoln kvadrat. Poišči prvotno šestmestno število!

Marija Vencelj

ŠTEVILSKA KRIŽANKA POTENCE IN POŠTEVANKA – – rešitev iz P–XV–3 (Franci Oblak)

1	2	3	4	P	A	Z	5	6	7	8
9	1	2	3	4	I	5	6	7	8	9
12	6	5	N	1	2	3	2	1	A	5
16	8	7	6	V	5	4	5	R	6	7
20	S	1	2	3	T	4	N	3	2	1
23	6	R	6	6	6	E	7	7	7	D
28	5	8	R	7	0	8	0	9	A	6
33	4	4	4	C	3	3	3	U	5	5
37	2	1	5	6	7	3	7	6	5	1
40	N	2	3	4	5	O	5	4	3	2

METODA "OSTREGA POGLEDA" V PROGRAMIRANJU

Metodo "ostrega pogleda" uporabljamo v vseh vejah znanosti, pa tudi na drugih področjih, ki ustvarjajo probleme. Opis metode je zelo preprost. Zastavljeni problem najprej dobro definiramo in po možnosti kam zapišemo. Nato se ostro zagledamo v njegovo definicijo. Ko ostrina pogleda doseže določeno stopnjo, se nam posveti rešitev. ★

Danes si bomo ogledali dva problema. Za oba obstajata preprosti rešitvi po načelu "kar mi najprej pade na pamet" ali "z glavo skozi zid". Vendar so taki postopki po pravilu potratni, kar bomo ugotovili z oceno časovne zahtevnosti (pojem časovne zahtevnosti smo že spoznali v Preseku XIV/2). Potem si bomo problem ostro ogledali in sestavili kratka, elegantna in predvsem učinkovita postopka za njuno reševanje. Poskusite z reševanjem tudi sami, še preden preberete prvo rešitev!

Naloga 1. Tabela a z n elementi krožno premakni v levo za k mest. Če je npr. $n = 10, k = 3$ in tabela a

A B C D E F G H I J

je po končani operaciji tabela a takale:

D E F G H I J A B C

Pri reševanju ne smemo uporabljati dodatnih tabel.

Rešitev, ki se je dokaj hitro spomnimo, je naslednja: napišemo del programa, ki tabelo krožno premakne za eno mesto v levo, nato pa ga uporabimo k -krat na isti tabeli.

```
for j := 1 to k do begin
  pom := a [ 1 ];
  for i := 2 to n do a [ i - 1 ] := a [ i ];
  a [ n ] := pom;
end;
```

Brez težav analize lahko ugotovimo, da je število korakov (stavkov, ki se izvršijo) v tem programu približno $k * n$. Ker k ni fiksen, vzamemo kar njegovo povprečno velikost $n/2$. Število korakov je torej neka kvadratna funkcija (polinom) spremenljivke n . Tako ocenimo, da je čas izvajanja programa sorazmeren kvadratu števila podatkov, kar zapišemo kot $O(n^2)$. To pomeni, da program za

obdelavo dvakrat večjega števila podatkov porabi štirikrat več časa. Radi bi našli hitrejši postopek, pri katerem bi čas rasel sorazmerno s količino podatkov.

Zato se ostro zazremo v problem in opazimo naslednje. Vzemimo podprogram *Obrni*, ki zrcali poljuben podvektor tabele *a* (npr. $ABC \rightarrow CBA$). Najprej zrcalimo prvi del tabele (od prvega do k -tega elementa), nato ostanek, na koncu celotno tabelo. In glej! Krožni premik je opravljen. Oglejmo si na prejšnjem primeru, kako to poteka.

	A	B	C	D	E	F	G	H	I	J
Obrni (1, k);	C	B	A	D	E	F	G	H	I	J
Obrni (k + 1, n);	C	B	A	J	I	H	G	F	E	D
Obrni (1, n);	D	E	F	G	H	I	J	A	B	C

Tudi podprogram *Obrni* ne dela težav.

```

procedure Obrni (prvi, zadnji : integer);
var i : integer; pom : char;
begin
    for i := prvi to (prvi+zadnji-1) div 2 do begin {zamenjaj}
        pom := a [ i ]; a [ i ] := zadnji-i+1; a [ zadnji-i+1 ] := pom;
    end;
end; {Obrni}

```

Poskusi ugotoviti, kakšna je časovna verjetnost tega postopka!

Naloga 2. Dana je tabela *a* velikosti *n*, ki vsebuje celoštevilčne vrednosti. Poišči največjo vsoto, ki jo lahko dobimo s seštevanjem členov nekega strnjene podzaporedja v tej tabeli. Če je torej vhodna tabela

55 -14 -100 11 13 -17 8 44 -16 2

je rešitev vsota elementov $a[4] \dots a[8]$, to je 59. Problem je seveda povsem preprost, če v tabeli ni negativnih števil, saj je iskano število kar vsota vseh elementov tabele. Težave nastanejo, ko naletimo na negativno število – se ga splača vključiti v podzaporedje? Privzemimo, da je iskana vsota enaka 0, če v tabeli nastopajo le negativna števila.

Seveda lahko takoj zapišemo "butn-verzijo" programa: za vsak par indeksov *levi* in *desni* ($1 \leq levi \leq desni \leq n$) izračunamo vsoto $a[levi..desni]$ in pogledamo, če je večja od doslej največje vsote. Ustrezni del programa v pascalu je kratek in lahko razumljiv:

```

maxVsota := 0;
for levi := 1 to n do
  for desni := levi to n do begin
    vsota := 0;
    for i := levi to desni do vsota := vsota + a [ i ]
    { zdaj je to vsota podzaporedja a [ levi..desni ] }
    if vsota > maxVsota then maxVsota := vsota;
  end;
write ('Iskana vsota je ', maxVsota);

```

Vendar pa je ta postopek časovno zelo potraten, kar bomo takoj ugotovili. Iz programa lahko razberemo, da se zunanja zanka "obrne" ravno n -krat, pri tem pa se vsakič $(n - levi)$ -krat izvede druga zanka. Torej je število izvajanj notranjega sklopa stavkov (med **begin** in **end**) približno $n^2/2$, torej $O(n^2)$, sam sklop pa zahteva zase $O(n)$ časa (notranja zanka v njem ima največ n korakov). Tako smo ugotovili, da celotni postopek potrebuje za izračun rezultata $O(n^3)$ korakov. To pa pomeni, da se število korakov programa — in s tem čas izvajanja — poveča tisočkrat, če vhodno tabelo desetkrat podaljšamo, ali drugače: če bi kak računalnik opravil s tabelo desetih elementov v npr. 10 milisekundah (kar je zmerna hitrost), bi za tisoč elementov potreboval skoraj tri ure!

Torej se zazrimo zopet v problem.

Zgornji postopek se očitno da izboljšati. Delnih vsot ni treba računati vsakič na novo, saj lahko vsoto zaporedja $a [levi..desni]$ izračunamo tako, da vsoti elementov $a [levi..desni-1]$ prištejemo še vrednost $a [desni]$. Tako smo se znebili notranje zanke in zmanjšali število vseh operacij na $O(n^2)$.

```

maxVsota := 0;
for levi := 1 to n do
  vsota := 0;
  for desni := levi to n do begin
    vsota := vsota + a [ i ];
    { zdaj je ta vsota podzaporedja a [ levi..desni ] }
    if vsota > maxVsota then maxVsota := vsota;
  end;
write ('Iskana vsota je ', maxVsota);

```

Dobljeni programček je že prav simpatičen in smo z njim lahko kar zadovoljni. Vendar pa nam žilica ne da miru. Ali bi postopek lahko še pospešili?

Razmišljamo takole: če poznamo rešitev za tabelo $a [1..i - 1]$, kako bi

dobili rešitev za razširjeno tabelo $a[1..i]$? Ta pristop je pogosto uporaben, kadar imamo opravka s tabelami. Za naš primer velja naslednje: podzaporedje z maksimalno vsoto v tabeli z i elementi lahko vsebuje novi (i -ti) element ali pa ne. Zato ves čas spremljamo dve spremenljivki: *maxDoslej* pove, koliko znaša rezultat za že obdelani kos tabele, *maxDesni* pa je največja vsota takega podzaporedja, ki vsebuje skrajni desni element tega kosa. To si lahko ogledamo na primeru:

1 2 3 -10 1 2 ?

maxDoslej = 6, *maxDesni* = 3

Ko tabelo razširimo, se vrednosti *maxDesni* poveča za vrednost novega elementa (razen če bi tako postala negativna — v tem primeru dobi v skladu z našim dogovorom vrednost 0). Če je s tem postala večja od *maxDoslej*, popravimo tudi to spremenljivko. Ko dosežemo konec tabele, je *maxDoslej* iskani rezultat. Zapis programa je zelo kratek:

```
maxDoslej := 0;
maxDesni := 0;
for i = 1 to n do begin
    maxDesni := maxDesni + a[i];
    if maxDesni < 0 then maxDesni := 0;
    if maxDesni > maxDoslej then maxDoslej := maxDesni;
end;
write('Iskana vsota je ', maxDoslej);
```

Iz programa lahko hitro razberemo, koliko časa porabi: edina zanka se obrne natanko n -krat, znotraj nje pa ni stavkov, katerih izvršitev bi bila odvisna od števila podatkov. Maksimalni čas izvajanja programa je torej $O(n)$.

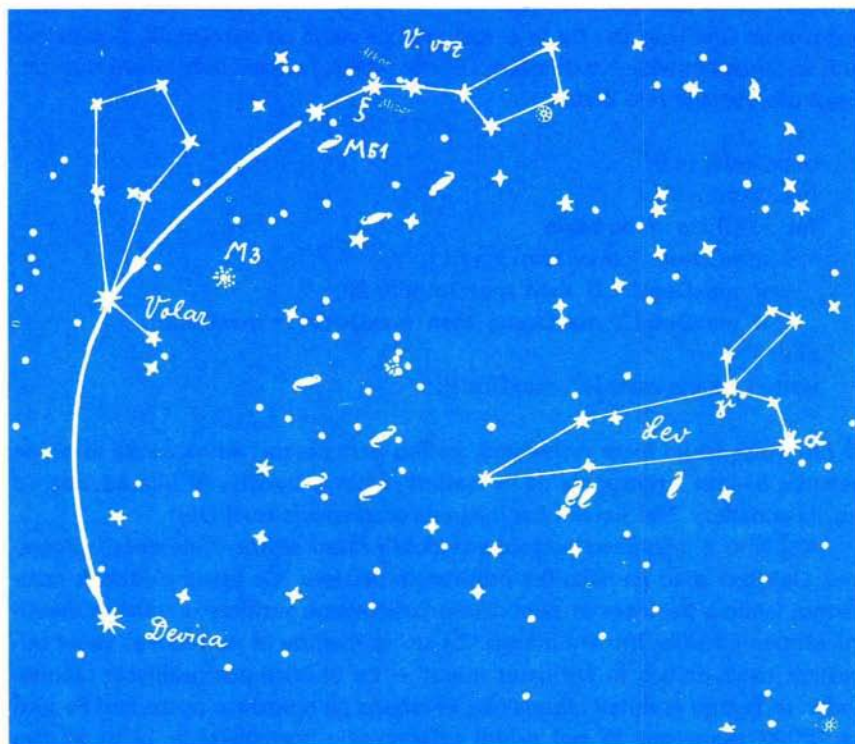
Kaj smo z izboljšavo postopka pridobili razen očitne "elegance" programa? Oglejmo si to na nekoliko pretiranim primeru. Če gornji postopek razumemo, lahko s papirjem in svinčnikom izračunamo rezultat za tabelo z deseti elementi v približno eni minuti. Za sto elementov bi potrebovali deset minut, za tisoč pa uro in štirideset minut — če bi imeli potrpežljivost računovodje. In že smo prehiteli računalnik, ki računa po prvotnem postopku! Pa tudi za 10000 elementov bi naš pridni računovodja potreboval le 17 ur ali dva zelo delovna dneva, medtem ko bi se računalnik mučil več kot tri mesece! Se pa že splača malo "ostreje pogledati" problem, mar ne?

Tomi Dolenc

★ Metoda je seveda zasnovana optimistično. Kot bomo spoznali v eni od naslednjih številčk Preseka, samo od rešitve toliko dlje, kolikor bolj gledamo naravnost vanjo.

KAKO PRESKUŠAŠ LOČLJIVOST DALJNOGLEDA

Dobro si oglej sliko 1! Prikazuje glavna spomladanska ozvezdja in nekaj najzanimivejših vesoljskih objektov, ki jih lahko opazuješ z daljnogledom. Med njimi ti ne bo težko izslediti zvezde, ki leži v "vratu" (ozvezdja) Leva, to je zvezda *Gama* (γ) *Leva*. Ta zvezda je zate zanimiva le, če imaš daljnogled. Z zvezdo *Gama* *Leva* lahko namreč ugotoviš *ločljivost daljnogleda*, skratka, kako "do-



Slika 1. Del spomladanskega neba, kot ga opazuješ v večernih urah od juga proti zenitu. *Najzanimivejši objekti:* M 51 – galaksija v ozvezdju Lovskih psov, M3 – kroglasta zvezdna kopica, γ *Leva* – dvojna zvezda (razmik med zvezdama: 4"), ξ Velikega medveda (voza) ali Mizar – dvojna zvezda (14").

ber" je tvoj daljnogled.

Ločljivost daljnogleda je tem boljša, čim manjši je kot med dvema točkastima svetiloma, ki ju vidimo še ločeno. Prepričaj se lahko, da z daljnogledom, ki ima večji premer objektiva (premer leče pri refraktorju ali premer vboklega zrcala pri reflektorju), bolje ločiš podrobnosti kot z daljnogledom, ki ima manjši premer objektiva.

Človek z zelo dobrim vidom razloči dve točkasti svetili, ki sta med seboj razmaknjeni za okoli $1'$ (eno kotno minuto). To pomeni, da razloči skrajna robova pokonci postavljene škatlice vžigalic v razdalji 140 metrov. Z daljnogledom seveda bolje ločimo kot s prostim očesom. Teoretično ločljivost daljnogleda, izraženo v kotnih sekundah, izračunaš iz enačbe:

$$\text{teoretična ločljivost} = D_0 / D$$

Tu pomeni $D_0 = 15''$ cm, D pa v centimetrih podan premer objektiva daljnogleda. Teoretična ločljivost za 5-centimetrski daljnogled je $15''\text{cm}/5\text{cm} = 3''$ (tri kotne sekunde), za 10-centimetrski daljnogled pa $1,5''$ itn. V praksi z daljnogledom ločimo slabše, kot pove gornja enačba. Praktično ločljivost ugotoviš z opazovanji. Z daljnogledom opazuješ posebej za ta namen odbrane dvojne zvezde, pri katerih poznaš njihov kotni razmik.★

In Gama Leva je prav dvojna zvezda. Kotni razmik med zvezdama je $4''$. (To je kot, pod katerim bi videl škatlico vžigalic v razdalji dva kilometra.) Če torej hočeš ugotoviti ločljivost daljnogleda, opazuj zvezdo Gama Leva. Če z daljnogledom vidiš Gama Leva kot eno zvezdo, je ločljivost daljnogleda slabša od $4''$ in zato raje poglej kako drugo dvojno zvezdo, kjer sta zvezdi bolj razmaknjeni kot pri Gama Leva (npr. dvojno zvezdo Mizar v Velikem vozu ($14''$)). Če z daljnogledom vidiš dve komaj opazni zvezdici, je njegova ločljivost okoli $4''$. Če pa z daljnogledom dobro razločiš zvezdici, je ločljivost boljša od $4''$. Da potem ugotoviš dejansko ločljivost daljnogleda, opazuj še kako drugo dvojno zvezdo, pri kateri sta zvezdi razmaknjeni manj od $4''$ (npr. dvojno zvezdo Epsilon ena (ϵ_1) Lire ($3''$)).

Po gornjem navodilu poskusi ugotoviti praktično ločljivost svojega daljnogleda. Naloga ni preprosta. Šele z vztrajnim in trdim delom ti bo to uspelo. V pomoč pa naj ti služi tudi spodaj navedena literatura.

Marijan Prosen

★ Glej knjižico *Astronomska opazovanja*, DMFA SRS, Presekova knjižnica 3, Ljubljana 1978, str. 261.



GIBANJE LUNE

Luna je najsvetlejšo telo na nočnem nebu. Zaradi svoje bližine spreminja lego med zvezdami mnogo hitreje kot planeti. Zato so že koledarji starih ljudstev upoštevali tudi Luno. Njen obhodni čas okrog Zemlje, mesec, namreč lepo zapolni veliko časovno vrzel med Zemljinim vrtljajem, dnevom in Zemljinim obhodom okrog Sonca, letom. Gibanje Lune je v resnici mnogo bolj zapleteno od preprostega kroženja okrog Zemlje, o katerem se učimo v šoli. Tu ga bomo razčlenili in opisali tiste vrste gibanja, ki jih zlahka opazujemo.

Luna se ne giblje okrog Zemlje po krožnem, ampak po sploščenem, eliptičnem tiru. Zemlja leži v enem od obeh gorišč te elipse. Njena oddaljenost od Lune niha med 363 300 in 405 500 kilometri. Zato se spreminja tudi navidezna velikost Lunine ploskvice (slika 1). Nekateri trdijo, da se njena velikost spreminja tudi v teku dneva. Ob vzhodu naj bi bila Luna večja kot tedaj, ko je že visoko nad obzorjem. Če pogledamo sliko 2, vidimo, da je to le privid. Skušajmo pojasniti razliko med fotografijo in opazovanjem s prostim očesom. Ko je Luna nizko nad obzorjem, jo lahko primerjamo s predmeti na Zemlji. Opazimo, denimo, da je mnogo dlje in mnogo večja od največjih dreves na obzorju. Ko pa je Luna visoko, je ne moremo z ničimer primerjati in je kot izgubljena med množico zvezd. Lunina ploskva se nam zdi zato v prvem primeru večja kot v drugem.

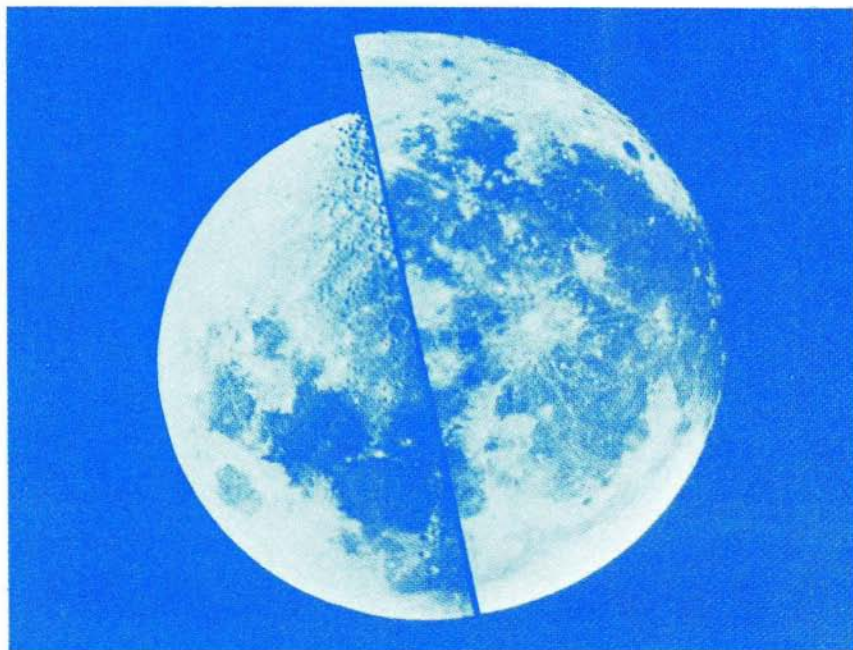
Luna kroži okrog Zemlje, skupaj z Zemljo pa potuje tudi okrog Sonca. Zemljin tir leži v ravnini, ki ji pravimo ekliptična ravnina. Tudi tiri Lune in

večine planetov ležijo skoraj v isti ravnini. Zanimivo je razmisliti, kako bi videl to gibanje vesoljec, ki bi lebdel visoko nad ekliptično ravnino. Zemljin tir bi zarisal kot rahlo sploščeno elipso. Kaj pa Luninega? Rezultat (slika 3) dobimo, če na večjem kosu papirja s svinčnikom opisujemo krog (kroženje okrog Zemlje), obenem pa papir krožno spodmikamo (kroženje okrog Sonca). Če papir spodmikamo počasi, je tir spiralast, podoben rahlo raztegnjeni vzmeti (slika 3a), hitro vlečenje pa vzmet "raztegne" in tir je le rahlo valovita črta (slika 3b). Kako hitro Zemlja "vleče" Luno okrog Sonca? Povprečna hitrost Zemlje okrog Sonca je

$$2\pi \cdot 150\,000\,000 \text{ km} / 1 \text{ leto} = 30 \text{ km/s},$$

Lune okrog Zemlje pa

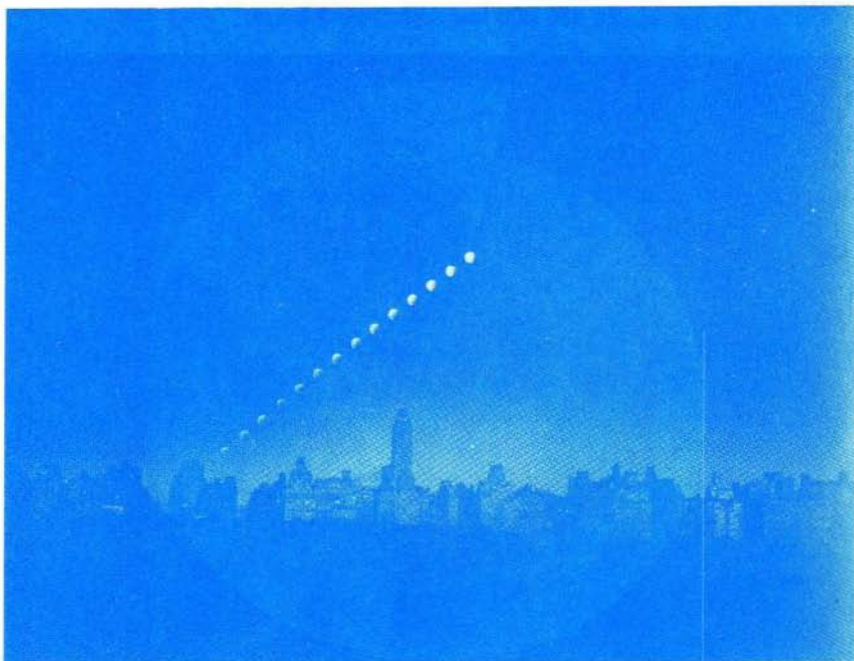
$$2\pi \cdot 385\,000 \text{ km} / 27 \text{ dni} = 1 \text{ km/s}.$$



Slika 1. Ko je Luna od Zemlje najdlje, je videti mnogo manjša kot tedaj, ko nam je najbližje.

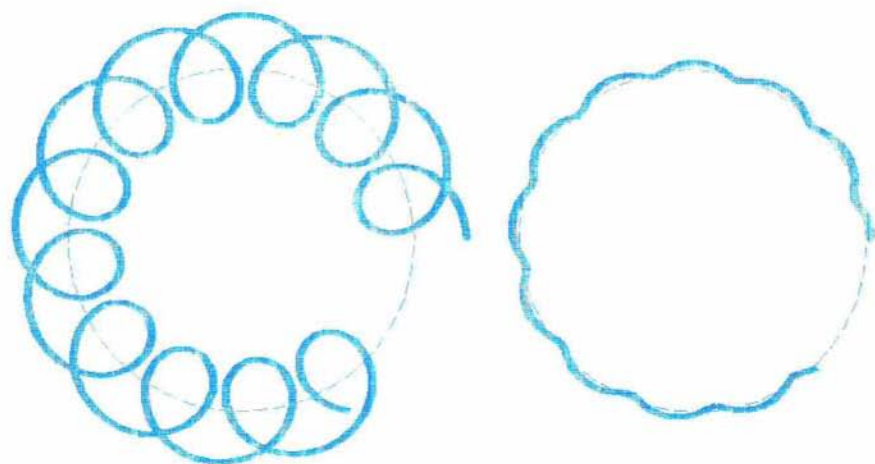
Vstavili smo povprečni vrednosti razdalj Zemlje od Sonca in Lune od Zemlje. Zemlja vleče Luno mnogo hitreje, kot ta kroži okrog nje. Torej je Lunin tir le rahlo valovita elipsa.

Podobno kot Zemlja se tudi Luna vrti okrog svoje osi. To vrtenje je uglašeno z Luninim kroženjem okrog Zemlje: vrtilni čas je enak obhodnemu. Ker je Lunina os približno pravokotna na ravnino njenega tira in ker sta gibanji istosmiselni, vidimo z Zemlje vedno isto stran Lune. Zato polovice Lunine površine z Zemlje sploh ne moremo videti. V resnici nekatere neuglašnosti nevidni delež nekoliko zmanjšajo. Spreminjanje hitrosti kroženja Lune zaradi eliptičnosti tira in 7-stopinjski odklon Lunine osi od pravokotnice na njen tir nam omogočata, da lahko z Zemlje pregledamo 59% Lunine površine. Preostalih 41% pa so ljudje prvič videli šele leta 1959, ko je Luno obletela sovjetska raketa Lunik III in posnela njeno, do tedaj nevidno stran.



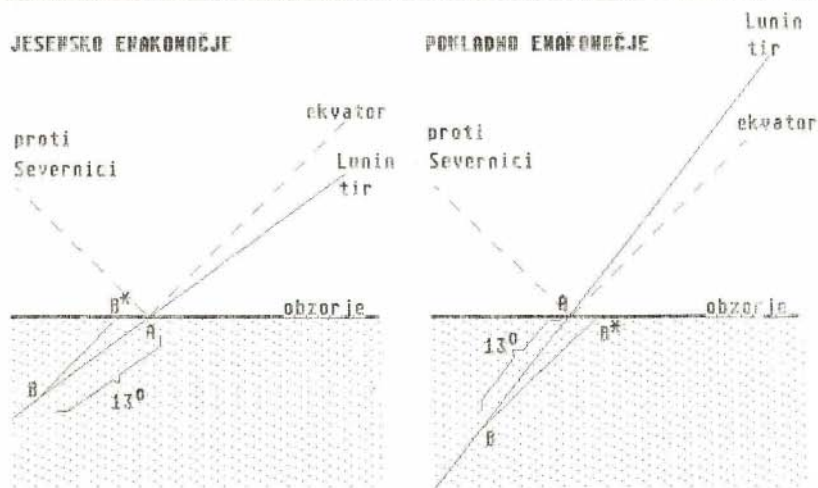
Slika 2. Vzhajanje Lune nad New Yorkom ob delnem Luninem mrku. Film so osvetlili večkrat zaporedoma. Lunina ploskva je ob obzorju in na večjih višinah enako velika, spreminja se le osvetljeni del.

Zemlja se vrti od zahoda proti vzhodu, zato se tako kot nebo tudi Luna vsako noč navidezno premika v obratni smeri, od vzhoda proti zahodu. Zaradi kroženja okrog Zemlje (tudi od zahoda proti vzhodu) pa je Luna vsako noč na nebu nekoliko vzhodnejše. Dnevni pomik je enak $360^{\circ}/27 \text{ dni} = 13^{\circ}$. Zemlja mora s svojim vrtenjem "loviti" Luno, zato vzhaja Luna vsak dan kasneje. Prvi krajec vzide podnevi, polna Luna (ščip) zvečer in zadnji krajec ponoči. V povprečju zakasni Luna vsako noč 50 minut. Vendar lahko vzide v dnevih okrog ščipa le 15 ali pa celih 90 minut kasneje kot prejšnji večer. To pojasnimo z naslednjim sklepanjem. Kot smo omenili, ležita Zemljin tir in Sonce v ekliptični ravnini. Tudi Lunin tir leži tako rekoč v isti ravnini. Ko Sonce zahaja in polna Luna vzhaja, je kot med ekliptično ravnino in obzorjem največji ob pomladanskem, najmanjši pa ob jesenskem enakonočju. Vzemimo, da vzide polna Luna določenega dne v točki *A* (slika 4). Naslednji dan se bo po tiru premaknila za 13° in bo zato ob istem času v točki *B*, ki je pod obzorjem. Do točke *B**, v kateri bo Luna tega dne vzšla, se nebo navidezno zavrti (okrog Severnice) v krajšem času jeseni (slika 4a) kot spomladi (slika 4b). Zato je v jesenskih nočeh okoli polne Lune več mesečine kot spomladi. Angleži imenujejo prvi jesenski ščip lovška luna.



Slika 3. a) Gibanje Lune okrog Sonca si pogosto predstavljamo kot pentljasto. b) V resnici je kroženje okrog Sonca mnogo hitrejše od kroženja okrog Zemlje. Tir je zato le rahlo valovit (še mnogo manj, kot nam to kaže slika).

Polna Luna leži na nasprotni strani neba kot Sonce. Poleti opiše enak navidezni lok kot Sonce pozimi in obratno. Ščip je zato poleti nizko, pozimi pa visoko na nebu. Če polna Luna zaide v Zemljino senco, vidimo Lunin mrk. Ob mlaju sta Sonce in Luna na isti strani neba. Če se legi za opazovalca na Zemlji pokrijeta in če je Luna dovolj blizu Zemlji, nastane Sončev mrk.



Slika 4. Vzhajanje polne Lune ob pomladanskem in jesenskem enakonočju.

Luna povzroča tudi nekatere pojave na Zemlji. Vsakdo pozna plimo in oseko. Kako pa vpliva na živa bitja? Gotovo ste takoj pomislili na mesečnike, ki naj bi jih polna Luna vodila po slemenih streh. Vendar ti ljudje tavajo tudi v brezmesčnih nočeh. V mesečini jih le lažje vidimo.

Tomaž Zwitter

PRAZNIK – rešitev naloge iz P–XV–3

Prvi mesec se očitno prične s sredo, naslednji pa s četrтком. To je mogoče le februarja v prestopnem letu. Prvi četrtek po prvi sredi – v marcu – bo tedaj Dan žena, vendar ne več v tem tisočletju.

Boris Lavrič

Z veseljem spet ugotavljamo, da so v Slovenskih Konjicah, predvsem pa na osnovni šoli Dušana Jereba, naši aktivni sodelavci, ki jih zanima prihodnost Preseka. Že večkrat so nam pisali in poslali naloge za objavo. Tokrat pa nam tovarišica Jana Novak sporoča svoja razmišljanja o vsebini revije. Meni, da je večina člankov za osnovnošolce prezahtevna in dodaja: "Prepričana sem, da je v Sloveniji veliko učiteljev, ki pri delu z učenci uporabljajo svoje zbirke nalog in gotovo je med temi nalogami veliko takih, ki bi bile primerne za objavo v reviji Presek. Vprašanje pa je, zakaj se jim ne zdi vredno, da bi take naloge poslali v uredništvo." S tovarišico Novakovo se strinjam in pozivam vse, ki jih Presek zanima, naj nam pišejo, povedo svoje mnenje o vsebini revije, ali še bolje, pošljejo svoje naloge in predloge. Vseh pripomb bomo veseli, saj Presek želi ostati z vami neprestano v stiku. Tovarišico Jano Novak pa vabimo na naslednjo sejo uredniškega odbora Preseka.

O številu π je Presek že nekajkrat pisal (letnik IV, številka 3 in 4). Kakšno število je to, se učijo že sedmošolci, a kljub temu ostaja še vedno zanimivo in skrivnostno. To potrjuje tudi pismo P. Jenka iz Kranja, ki je skušal dokazati, da znaša število π nič več in nič manj kot 3,14. Bralčev dokaz ima nekaj pomanjkljivosti. Predvsem pa žal ne upošteva pravila, da je potrebno vsako uporabljeno trditev dokazati. Za razvedrilo še enkrat objavljamo pesmico iz omenjene številke Preseka, s pomočjo katere si število π z lahkoto zapomnimo. Kako, uganite sami. Spominčico je iz angleščine prevedel Janko Moder.

*Naj z rimo
v pesmi počastimo
še nekoga:
Slovi naj kroga
krotilec, Sirakužan!
Število izračunal
nam je res čudovito,
tule skrito.
Če nemara kdaj
sam kôd pozabimo,
brž to pesmico
uporabimo!*

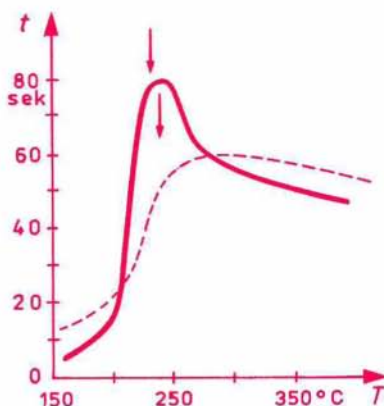
Dušica Boben

HOJA PO ŽAREČEM KAMENJU

Na koncu sestavka o temperaturi teles ob dotiku smo vprašali, kako to, da si nekateri pri hoji po razžarjenem kamenju ali oglju ne opečejo podplatov. Kako to, da ne dobimo ozeblin, če na dlan ujamemo kapljo dušika pri vrelišču -196°C ? Vprašanje zasučimo drugače: Kolikšen čas se lahko dotikamo telesa z zelo visoko ali zelo nizko temperaturo, ne da bi temperatura na površju kože dosegla 100°C ali padla pod 0°C ? Na kratko poskusimo odgovoriti na to vprašanje.

Na začetku moramo omeniti *Leidenfrostov pojav*. Pojav je prvič opisal leta 1756 Johann Gottlieb Leidenfrost v *Spisu o nekaterih lastnostih navadne vode*. Spis v latinščini je bil dolgo časa pozabljen.

Pojav poznajo kuharice v več inačicah. Pri peki palačink preskušajo z njim, ali je ponev že dovolj vroča. Na dno ponve kanejo kapljo vode. Če se kaplja razleti in hitro izpari, je temperatura ponve še prenizka. Če pa se kaplja ne razleti in počasi izpareva, je temperatura že dovolj visoka. Tedaj majhen del vode iz kaplje ob dotiku s ponvijo takoj izpari in da tanko plast pare, po kateri se giblje kaplja kot vozilo na zračni blazini. Para kot vsi plini (razen vodika) razmeroma slabo prevaja toploto in kaplja le počasi izpareva. Pri nižji temperaturi med kapljo in vročo kovinsko ploščo ne nastane plast pare, kaplja se razleti na majhne dele, ki hitro izparijo. Pri mejni temperaturi Leidenfrostovega pojava se življenjski čas kaplje izrazito podaljša (slika 1). Pri višji temperaturi — kot



Slika 1. Življenjski čas kapljice v odvisnosti od temperature vroče kovinske plošče. Nad mejno temperaturo Leidenfrostovega pojava, ki jo kažeta puščici, življenjski čas izrazito naraste. Sklenjena krivulja velja za kapljice destilirane vode s prostornino $0,0103\text{ cm}^3$ in črtkana za kapljice vodovodne vode s prostornino $0,0119\text{ cm}^3$.

rečeno — kaplja počiva na tanki plinski plasti in počasi izpareva (slika 2).

Med vročim kamnom in kožo na podplatih ali med kapljo dušika in kožo na dlani nastane za Leidenfrostov pojav značilna tanka plinska plast. V prvem primeru je to plast vodne pare, ki izhlapi iz vlažne kože, v drugem pa plast dušika, ki izpari iz kaplje.

Koža, s katero se približamo telesu s temperaturo T , prejme skozi plinsko plast z debelino l' in s toplotno prevodnostjo λ' toploto, zaradi katere se na površju segreje od temperature T' na T_0 . Velja:

$$\lambda' t S (T - T_0) / l' = \lambda t S (T_0 - T') / l$$

Podobno enačbo, ki preko zakona o prevajanju toplote izenači prejeto in oddano toploto, smo srečali že zadnjič. Zdaj je drugače le to, da je debelina plinske plasti l' določena, za globino kože, do katere sega temperaturna sprememba, pa vstavimo $l = \sqrt{\lambda / \rho c_p} \sqrt{t}$.

Zanima nas čas, v katerem doseže temperatura na površju kože T_0 najvišjo dovoljeno vrednost:

$$t = \lambda \rho c_p [l' (T_0 - T') / \lambda' (T - T_0)]^2$$

Toplotna prevodnost λ , gostota ρ in specifična toplota c_p zadevajo kožo in uporabimo zanje kar podatke za vodo: $\lambda = 0,63 \text{ W/Km}$, $\rho = 10^3 \text{ kg/m}^3$ in $c_p = 4200 \text{ J/kgK}$. Debelino plinske plasti ocenimo na desetino milimetra, torej $l' = 10^{-4} \text{ m}$, in postavimo za njeno toplotno prevodnost kar podatek za zrak $\lambda' = 0,026 \text{ W/Km}$. S temperaturami $T = 600^\circ\text{C}$, $T' = 36^\circ\text{C}$ in $T_0 = 100^\circ\text{C}$ sledi za čas 0,6 sekunde.

To je zgolj ocena. Tudi s snovnimi konstantami nismo ravnali posebno obzirno in nismo upoštevali, da so odvisne od temperature. Spomnimo se še, da pričakujemo za čas v splošnem prevelike ocene. Na drugi strani pa upoštevajmo, da se nekaj toplote porabi še za izparevanje vode in da se temperatura površja kamna zniža pod T . Tako smemo vztrajati pri času nekaj desetih se-



Slika 2. Kapljica vode na vroči kovinski plošči nad mejno temperaturo Leidenfrostovega pojava. Kapljica počiva na tanki plasti pare in počasi izpareva. Ta slika in prejšnja sta vzeti iz Walkerjevega članka v Scientific Americanu.

kunde. V tolikšnem času se segreje površje kože na 100°C , če ga od telesa s temperaturo 600°C loči tanka plinska plast. Nekaj desetink sekunde je dovolj, da prestopimo z noge na drugo nogo.

Če upoštevamo, da je temperatura na površju kamna le T_{k0} , velja:

$$\lambda_k t S (T - T_{k0}) / l_k = \lambda' t S (T_{k0} - T_0) / l' = \lambda t S (T_0 - T) / l$$

Ko vstavimo za debelino plasti $l_k = \sqrt{\lambda_k / \rho_k c_{pk}} \sqrt{t}$, dobimo:

$$\sqrt{\lambda_k \rho_k c_{pk}} (T - T_{k0}) / \sqrt{t} = \lambda' (T_{k0} - T_0) / l' = \sqrt{\lambda \rho c_p} (T_0 - T) / \sqrt{t}$$

Izenačimo prvi in zadnji izraz in izračunamo neznano temperaturo T_{k0} :

$$T_{k0} = T - \sqrt{\lambda \rho c_p} (T_0 - T) / \sqrt{\lambda_k \rho_k c_{pk}}$$

S podatki za granit $\lambda_k = 1,4 \text{ W/Km}$, $\rho_k = 2,7 \cdot 10^3 \text{ kg/m}^3$ in $c_{pk} = 820 \text{ J/kgK}$ dobimo $T_{k0} = 500^{\circ}\text{C} - 55^{\circ}\text{C}$. S to oceno sledi po prejšnji enačbi, v katero vstavimo T_{k0} namesto T , nekoliko daljši čas 0,8 s. To pomeni, da je temperatura kamenja lahko še nekoliko višja kot 600°C , ali temperatura na površju kože ne doseže 100°C , pa bo še vedno za prestop z noge na nogo na voljo več desetink sekunde.

”Hoja po ognju”, če je dovolj urna na vročih snoveh z majhno specifično toploto in majhno toplotno prevodnostjo, ne povzroča opeklin. Leidenfrostov pojav, do katerega pride ... tudi zmanjša toploto, ki jo prejme površje telesa.

D.F. Marks, *Investigating the paranormal*, Nature 320 (1986) 19

Če vzamemo za $T = -196^{\circ}\text{C}$ in za $T_0 = 0^{\circ}\text{C}$ ter spremenimo znak obeh razlik, sledi $t = 1,3 \text{ s}$. Tako imamo dovolj časa, da spustimo kapljo dušika na tla ali jo prestavimo na drug del dlani.

Poskus s kapljo dušika lahko naredi vsakdo. Hojo po vročem kamenju ali oglju pa zmorejo samo tisti, ki so dovolj hladnokrvni, imajo dovolj debelo kožo na podplatih in pripravljeni preстати tudi nekaj bolečin. V vse, okoliščine njihovega dejanja se fizik ne more spuščati. Dovolj je, če razgrne njegovo fizikalno osnovo.

Janez Strnad

OD ENE NALOGE K DRUGI

Znano je, da nekatere naloge med reševanjem in po njem sprožijo kopico novih vprašanj. Za primer si pogledjmo sorazmerno preprosto nalogo, kakršnih je bilo v Preseku že veliko.

Naloga:

V četrtino kroga s polmerom r včrtaj kvadrat tako, da dve oglišči ležita na krožnici (slika 1).

Rešitev:

Pomagali si bomo z računom. Krožnica je v ravnini koordinatnega sistema določena z enačbo:

$$x^2 + y^2 = r^2$$

Če je še ne poznaš, poglej sliko 2 in se spomni Pitagorovega izreka.

Postavimo četrt kroga v koordinatni sistem tako, da je središče krožnice v izhodišču. Včrtajmo kvadrat in označimo oglišča, kot vidiš na sliki 3. Ordinata točke C je očitno dvakrat večja od njene abscise. Za točko C torej velja:

$$x^2 + y^2 = r^2 \text{ in } y = 2x$$

zato je

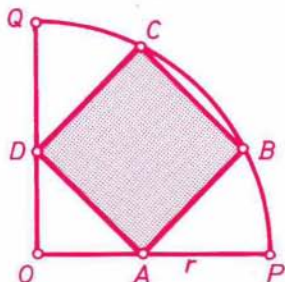
$$x^2 + 4x^2 = r^2$$

in od tod

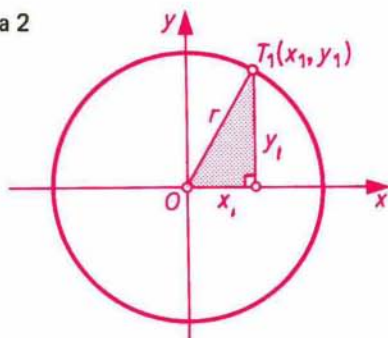
$$x = \frac{r\sqrt{5}}{5}$$

Izračunali smo absciso točk A in C , hkrati pa ordinato točk B in D . Nadaljnja konstrukcija poteka takole (slika 4):

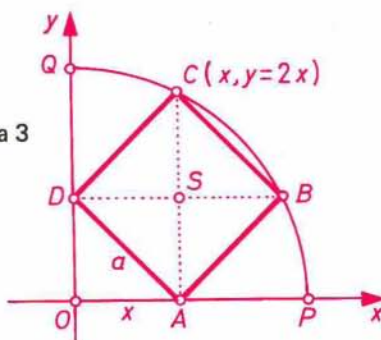
Slika 1



Slika 2



Slika 3



1. $PR \perp OP, \overline{PR} = 2r$
2. Pitagorov izrek:

$$\overline{OR} = \sqrt{\overline{OP}^2 + \overline{PR}^2} = r\sqrt{5}$$

3. S sorazmerjem določimo A' :

$$\overline{OA'} = r\sqrt{5}/5$$

4. S šestilom prenesemo $\overline{OA'}$ na os x (dobimo A) in na os y (dobimo D).

5. Na krožnici dobimo še točki B in C :

$$DB \parallel \text{os } x \text{ in } AC \parallel \text{os } y$$

Naloga je končana. Saj res, izračunali bi lahko še ploščino!

Naslednja — druga naloga: Kolikšna je ploščina našega kvadrata, izražena s polmerom kroga?

Rešitev: Na sliki 3 vidimo, da je stranica kvadrata $a = \overline{AD}$ hkrati diagonala kvadrata $OASD$, ki ima stranico x . Torej je:

$$a = x\sqrt{2} = \frac{r\sqrt{5}}{5} \cdot \sqrt{2} = \frac{r\sqrt{10}}{5}$$

in ploščina:

$$p = a^2 = \left(\frac{r\sqrt{10}}{5}\right)^2 = \frac{r^2 \cdot 10}{25} = \frac{2r^2}{5}$$

Računanje ploščine (tista "petka" v imenovalcu) nas pripelje še do tretje naloge:

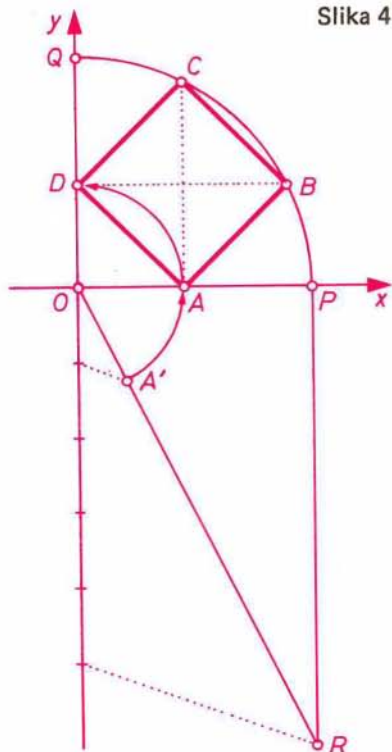
V krog včrtamo pet kvadratov (križ), kot kaže slika 5. Izračunaj ploščino tega križa.

Rešitev:

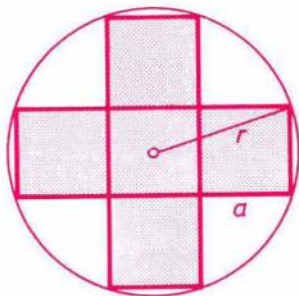
Nič posebnega! Križ je sestavljen iz petih prej obravnavanih kvadratov, zato ima ploščino:

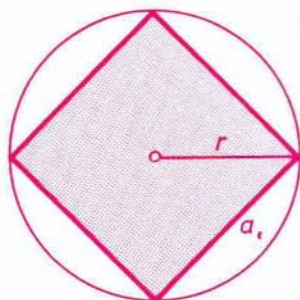
$$p = 5a^2 = 5 \cdot \frac{2r^2}{5} = 2r^2$$

Slika 4



Slika 5



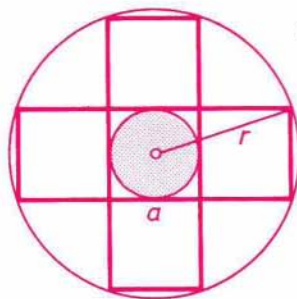


Slika 6

Glej, glej! Dobljeni rezultat pokaže, da je ploščina krogu včrtanega križa enaka ploščini istemu krogu včrtanega kvadrata (slika 6).

$$a_1 = r\sqrt{2}$$

$$p = (r\sqrt{2})^2 = 2r^2$$



Slika 7

Dobljeni rezultat nas privede k misli, da je mogoče kvadrat (z rezanjem in dopolnjevanjem) prevesti v 5 skladnih (seveda manjših) kvadratov (križ). To je seveda spet nova naloga. Poskusi najti kako rešitev ali pa pogledaj na stran III.

Iz naše začetne naloge izvira še mnogo vprašanj in lahko si zastavimo še veliko nalog. Lep odnos najdeš na primer med "križu" očrtanim krogom in krogom, ki je včrtan notranjemu kvadratu (slika 7).

Miha Štalec

Ker so me od nekdaj privlačile zgodbe o ljudeh, ki hodijo po vročem oglju ..., sem si naredil poldrug meter dolgo progo z vročim lesnim ogljem. Nenadoma sem se zavedel, da je lahko verjeti v fiziko, dokler je na papirju, a težko, ko gre za varnost lastnih nog. Zares je hoja po vročem oglju skrajni preskus vere v to, kar smo se naučili, in na podiplomskem študiju sem jo priporočil kot nadomestilo za doktorski izpit iz fizike. Na eni strani vdolbine z rdeče žarečim ogljem bi bila vrsta doktorskih kandidatov, na drugi pa predstojnik oddelka s svežnjem diplom. Če bi podiplomski študent zares verjel v fiziko, bi brez oklevanja prekoračil oglje. Če pa bi imel resne dvome, se ne bi mogel pripraviti do tega.

To sem poskusil tudi sam. Z oguljenim izvodom *Fizike* v roki sem se odpravil čez poldrugi meter vročega oglja. Kot kaže, zares verjamem v fiziko. Poročati pa moram, da so postale moje noge kar vroče. Verjamem pač skoraj vse.

J. Walker, *Drops of water dance on a hot skillet and the experimenter walks on hot coals*,
Scientific American 237 (1977) 126 (2)

URNIK TEKMOVANJ V LETU 1988

področje	šola	tekmovanje	datum
MATEMATIKA	osnovna	šolsko	do 9. aprila
		občinsko	16. april
		republiško	14. maj
		zvezno	4. – 5. junij
	srednja	šolsko	27. februar
		izbirno	12. marec
		republiško	2. april
		zvezno	15. – 17. april
		balkaniada	začetek maja
		olimpiada	julij
FIZIKA	osnovna	področno	09. 04. ob 9. uri
		republiško	07. 05. ob 10. uri
		zvezno	20. – 22. maj
	SVIO	republiško	4. junij
	srednja	izbirno	26. marec
		republiško	22. – 23. april
		zvezno	20. – 22. maj
		olimpiada	25. – 30. junij
LOGIKA	osnovna in srednja	izbirno	17. september
		republiško	15. oktobra
RAČUNALNIŠTVO	osnovna	šolsko	11. marec
		področno	31. marec
		republiško	23. april
	srednja	republiško	13. – 14. maj
		zvezno	15. maj
RAZISKOVANJE INOVATORSTVO	srednja	republiško	3. junij

Nekaj informacij o tekmovanjih

1. Matematika — osnovna šola

Vsa tekmovanja bodo potekala v skladu s Pravilnikom o tekmovanju osnovnošolcev iz matematike za Vegova priznanja. Pojasnila lahko dobite pri tov. **A. Potočniku**, OŠ K.D. Kajuh, Vlahovičeva 42, Ljubljana, telefon (061)—445—626.

2. Matematika — srednja šola

Razpis šolskega (za učence nenaravoslovnih usmeritev) in izbirnega tekmovanja (za vse učence, ki želijo sodelovati na republiškem tekmovanju) bomo tako kot doslej skupaj s prijavnici poslali na šole. Vsa pojasnila daje tov. **D. Felda**, Fakulteta za elektrotehniko, Tržaška 25, Ljubljana, tel. (061)—265—161 / 233.

3. Fizika — osnovna šola

Republiško tekmovanje iz fizike za osnovnošolce bo na Pedagoški akademiji v Ljubljani, Allendejeva ulica. Tekmovanje je ekipno, ekipo pa sestavljata dva učenca. Vsaka šola lahko prijavi po eno ekipo za 7. in eno ekipo za 8. razred. Vse ekipe, ki želijo sodelovati na republiškem tekmovanju, se morajo udeležiti predtekmovanja v ustrezni organizacijski enoti Zavoda za šolstvo SRS:

- v Celju na Tehniški srednji šoli, Pot na Lavo 22 (J. Dolenšek)
- v Mariboru na Pedagoški akademiji, Koroška c. 160 (M. Cvahte)
- v Kopru na Srednji šoli, Cankarjeva 2 (E. Okretič)
- v Ljubljani na Pedagoški akademiji, Allendejeva ulica
- za Gorenjsko v Radovljici, OŠ A.T. Linhart, Kranjska 27 (L. Lapuh—Čufar)
- v Murski Soboti na Srednješolskem centru, Naselje V. Vlahoviča 12 (E. Dečko)
- v Novi Gorici na OŠ IX. korpusa NOVJ, Kidričeva 36 (A. Fakin)
- v Novem mestu na OŠ Grm, Trdinova 7 (T. Bučar)

Gradivo za pripravo tekmovalcev je snov iz učbenika Ferbarja in Plevnika za 7. in 8. razred. Med tekmovanjem učenci lahko uporabljajo navedena učbenika in računalnik. Predtekmovanje bo sestavljeno iz vprašanj in računskih nalog, na republiškem tekmovanju pa se bodo učenci poleg tega pomerili še v eksperimentalnem delu. Priporočamo, da izvedete šolsko tekmovanje. Prijave za področno tekmovanje pošljite na naslov: DMFA SRS, Komisija za popularizacijo fizike v OŠ, Jadranska 19, 61111 Ljubljana, pp 64. Informacije dobite pri tov. **B. Khamu**, OŠ Prežihov Voranc, Prežihova 8, Ljubljana, tel. (061)—219—076, in tov. **J. Okorn**, OŠ Tone Seliškar, Prule 13, Ljubljana, tel. (061)—218—468.

4. Fizika — SVIO

Republiško tekmovanje za učence 1. letnikov bo na Centru srednjih šol, Trg mladosti 3, Titovo Velenje. Ob 10. uri bo izbirno tekmovanje dvočlanskih ekip, ob 12. uri pa javno finalno tekmovanje, na katerem bo sodelovalo šest najboljših dvojic. Vsaka šola lahko prijavi največ dve ekipi. Prijave pošljite do 23. maja na naslov: **M. Trampuš**, Center srednjih šol, Trg mladosti 3, 63320 Titovo Velenje — za tekmovanje iz fizike SVIO, tel. (063)—853—181. Dodatna pojasnila dobite prav tam.

5. Fizika — srednja šola

Razpis za tekmovanja iz fizike za 2., 3. in 4. letnike srednjih šol bomo skupaj s prijavnici poslali na šole do konca februarja, republiško tekmovanje pa bo v Mariboru na SNS M. Zidanšek. Informacije dobite pri tov. **I. Kukmanu** na Fakulteti za strojništvo, Murnikova 2, Ljubljana, tel. (061)—223—133/275.

6. Logika

Tekmujejo učenci, ki bodo v času tekmovanj v 7. in 8. razredih osnovnih šol ter 1., 2. in 3. letnikih srednjih šol. Šole, ki bodo organizirale izbirno tekmovanje, se morajo prijaviti na razpis do **1. junija** na ZOTKS, Komisija za logiko, Lepi pot 6, 61001 Ljubljana, Na ta naslov naj tudi do **3. septembra** sporočijo, koliko nalog za posamezne skupine rabijo za izvedbo tega tekmovanja. Komisija za logiko bo izbrala do 50 tekmovalcev iz posamezne skupine za nastop na republiškem tekmovanju.

Učenci šol, ki ne bodo organizirale izbirnega tekmovanja, se lahko prijavijo do 20. avgusta na najbližji šoli, kjer bodo tekmovanje izvedli. Seznam teh šol bo objavljen v dnevnem časopisu konec junija. Druge informacije daje tov. **A. Jus** na gornjem naslovu, tel. (061)–213–727.

7. Računalništvo – osnovna šola

Razpisi za tekmovanje so že na šolah. Informacije dobite pri tov. **A. Jusu**, ZOTKS – Svet za tehnično vzgojo mladine, Lepi pot 6, Ljubljana, tel. (061)–213–727.

8. Računalništvo – srednja šola

Letošnje tekmovanje organizira Sekcija za računalništvo pri Gibanju znanost mladini v sodelovanju z Društvom matematikov, fizikov in astronomov SR Slovenije, Fakulteto za elektrotehniko v Ljubljani in Institutom Jožef Stefan.

I. Raziskovalne naloge

Učenci in njihovi mentorji izberejo temo naloge. Število udeležencev ni omejeno, strokovna komisija pa izmed vseh nalog določi tiste, ki jih bodo učenci ustno zagovarjali. Naloge so lahko iz programske ali strojne opreme. Podrobnejša pojasnila o možnih temah in navodilih za sestavo naloge dobite pri tov. **M. Zrimcu**, Fakulteta za elektrotehniko, Tržaška 25, Ljubljana, tel. (061)–265–161. Srečanje raziskovalcev, predstavitev nalog in ustni zagovor izdelkov pred komisijo bo v petek, 13. maja. Udeleženci morajo poslati naloge do **1. maja Andreju Brodniku**, Gibanje znanost mladini, Lepi pot 6, Ljubljana.

II. Tekmovanje iz znanja računalništva

Tekmovanje v reševanju nalog bo v soboto, 14. maja, v treh tekmovalnih skupinah. Nekaj pravil:

- V prvi skupini tekmujejo učenci po enem letu pouka računalništva, v drugi učenci, ki se računalništva učijo že dve leti, in v tretji učenci, ki se računalništva učijo že več let.
- Učenec, ki je že dobil nagrado v prvi skupini, sme letos tekmovali le v višji, to je v drugi ali tretji skupini.
- Učenec, ki je že dobil nagrado v drugi skupini, sme letos tekmovali le v tretji.
- V tretji skupini sme učenec tekmovali poljubno krat.
- Učenec, ki ni prejel nagrade v svoji tekmovalni skupini, sme ostati tudi letos v isti, če se ne čuti dovolj sposobnega za tekmovanje v višji. Spodobi pa se, da učenci, ki so računalništvo poslušali že dve leti, tekmujejo le v drugi ali celo v tretji skupini.
- Šola lahko prijavi v vsaki skupini največ po pet tekmovalcev.
- Uradni programski jeziki so pascal, fortran, basic, modula–2 in PL/1. Tekmovalci smejo uporabljati poljubno literaturo, čas reševanja nalog je dve uri in pol.

Mentorji naj za tekmovanje pošljejo uradno prijavo svoje šole s poimenskim seznamom tekmovalcev do **8. aprila** na naslov: **Andrej Brodnik**, Institut Jožef Stefan, Jamova 39, 61111 Ljubljana, tel. (061)–214–399. Tam dobite tudi vse podrobne informacije. Vse kasneje prispele prijave bomo zavrnil. V prijavi morajo navesti tudi število rezervacij prenočišč za mlade raziskovalce, tekmovalce in spremljevalce (posebej za noč od četrтка na

petek in posebej za noč od petka na soboto), sicer organizator za to ne bo poskrbel. Prenočevanje bo ustrezno organizirano, stroške pa krijejo šole. Obveščamo vas, da bo tekmovalna komisija določila petčlansko ekipo za državno tekmovanje, ki bo predvidoma 15. maja.

Potrditev prijav in natančni raspored tekmovanja bodo šole dobile teden dni pred tekmovanjem. Prijave šol, ki ne bodo ustrezale pogojem sklepa o razvrščanju tekmovalcev, bomo zavrnili. Šolam priporočamo, da izvedejo predtekmovanja in tako izberejo najboljše predstavnike. Učenci šol, ki se ne bodo uradno prijavile na tekmovanje kot organizacije, se lahko sami prijavijo na isti naslov prav tako najkasneje do 8. aprila.

9. Raziskovanje in inovatorstvo

Razpise za 22. srečanje mladih raziskovalcev in inovatorjev Slovenije so srednje šole že dobile, podrobnejše informacije pa dobite pri tov. **B. Sotošku**, ZOTKS – Gibanje znanost mladini, Lepi pot 6, Ljubljana, pp 99, tel. (061)–213–727 ali (061)–213–743.

Darjo Felda

2. POLETNA ŠOLA INTERTRADE – IBM

Poletna šola Intertrade–IBM je nova oblika izobraževanja za boljše študente prvega letnika računalništva, elektrotehnike in matematike. Njen namen je nuditi dodatne možnosti za delo ob računalniku in za spoznavanje z najnovejšimi uporabami računalnika.

Letos je na šoli sodelovalo šest študentov računalništva, dva študenta elektrotehnike in dva študenta matematike. V drugem delu so se pridružili še udeleženci lanske letošnje šole in nekaj učiteljev in asistentov matematike. Šola je trajala od 23. do 26. septembra.

Glavna tema šole je bila vodenje robotskih modelov z ZX–Spectrumom. V drugem delu smo se spoznali z vlogo logike v računalništvu in z mikroprologom. Študenti so v okviru vaj naredili nekaj programov za vodenje robotov.

V spomin na šolo je vsak udeleženec prejel knjigo R. Smullyana: Poznate naslov te knjige?

Šola sta finančno omogočila Intertrade, TOZD Zastopstvo IBM in Izobraževalna skupnost – PIS za elektrotehniko in računalništvo. Z Intertrade smo se pogovarjali o možnostih zaposlitve in o štipendiranju.

Izidor Hafner

JE TUDI MEJA MED ŠALO IN RESNICO RELATIVNA?

Bile so počitnice in gospod Tompkins, bančni uradnik v veliki mestni banki, si je privoščil dolgo spanje in sproščen zajtrk. Premišljajoč, kaj naj počne popoldne, je odprl časopis in se zazrl v stran s filmskim in drugim sporedom. Noben film ni pritegnil njegove pozornosti. Sovražil je Hollywood z neskončnimi romancami med filmskimi zvezdami.

Nepričakovano je njegovo oko opazilo drobno notico na robu strani. Univerza je najavljala serijo predavanj o problemih moderne fizike. To popoldne je bila na sporedu Einsteinova teorija relativnosti. No, to pa bo nekaj! Dostikrat je slišal trditev, da samo ducat ljudi na svetu zares razume Einsteinovo teorijo. On bi lahko bil trinajsti! Jasno, šel bo na predavanje.

V predavalnico je prispel, ko se je predavanje že začelo. Soba je bila polna študentov, ki so pazljivo sledili visokemu belobrademu profesorju. Razlagal jim je osnovne ideje teorije relativnosti. Gospod Tompkins je našel bistvo Einsteinske teorije v dejstvu, da obstaja največja hitrost, to je hitrost svetlobe. Le—te ne more doseči nobeno telo. Posledice tega dejstva so nenavadne. Profesor je poudaril, da so relativnostni učinki v vsakdanjem življenju zanemarljivi, kajti hitrost svetlobe je 300.000 km/s. Toda ozadje teh nenavadnih učinkov je bilo dobi težje razumeti in gospodu Tompkinsu se je zdelo, da je vse to v nasprotju z zdravo pametjo. Poskušal si je predstavljati skrčitev merilnih palic in čudno obnašanje ur — pojavi, ki bi jih lahko pričakovali, če bi se gibali s hitrostjo blizu svetlobne — ko mu je glava počasi omahnila na ramo.

Ko je znova odprl oči, ni sedel na klopi predavalnice, ampak na eni izmed klopi avtobusne čakalnice. Bilo je prelepo staro mesto s srednjeveškimi hišami vzdolž ulic. Sumil je, da sanja, toda na njegovo presenečenje se v okolici ni dogajalo nič čudnega. Celo miličnik, ki je stal na drugi strani ulice, se mu je zdel povsem običajen miličnik. Ura na mestnem stolpu je kazala pet popoldne. Ulice so bile skoraj prazne, le kolesar se je počasi premikal po cesti. Gospod Tompkins je na široko odprl oči od presenečenja, kajti ko se mu je kolesar približal, je bil neverjetno skrajšan v smeri gibanja. Ura na zvoniku je udarila pet. Kolesar je močneje pritisnil na pedala, kajti očitno se mu je mudilo. Gospod Tompkins ni opazil, da se je zaradi povečanja hitrosti kolesar še bolj skrčil. Videti je bil kot slika, izrezana iz lepenke. Gospod Tompkins je bil zelo ponosen sam nase, kajti razumel je, kaj se je zgodilo s kolesarjem. To je bil preprost primer skrčitve gibajočih se teles, o čemer je pravkar slišal. "Očitno

je naravna hitrostna meja tukaj dosti nižja," je zaključil, "in miličniku ni treba paziti, da bi kdo prekoračil dovoljeno hitrost." Gospod Tompkins se je odločil, da bo dohitel kolesarja, ki je bil videti prijazen fant, in ga o vsem povprašal. Prepričan, da ga miličnik ne gleda, si je sposodil neko kolo in pospešil. Pričakoval je, da se bo v trenutku skrčil. Ta misel mu je bila na moč všeč, saj se je zadnje čase zaradi vse obilnejše postave počutil neprijetno. Na njegovo veliko presenečenje pa se ni nič zgodilo ne njemu ne kolesu. Po drugi strani pa se je okolica popolnoma spremenila. Ceste so postajale vse krajše, okna podobna ozkim linam in miličnik na vogalu ulice najvitkejši človek, kar jih je kdaj videl.

"Pri Jupitru!" je zaklical gospod Tompkins vzhičeno, "sedaj razumem trik. Tukaj se pojavi relativnost. Vse, kar se premika glede na mene, je zame krajše. Sploh ni pomembno, kdo vrti pedala." Bil je dober kolesar in se je trudil, da bi mladeniča prehitel. Toda ugotovil je, da hitrosti ni tako lahko povečati. Četudi je poganjal pedala na vse kriplje, je bil prirastek hitrosti zanemarljiv. Noge so ga že bolele, a vendar ni mogel nič hitreje prevoziti križišča kot na začetku. Videti je bilo, da vsi njegovi naporji za hitrejšo vožnjo ne dajo nobenega rezultata. Spomnil se je profesorjevih besed, da je nemogoče preseči mejno hitrost svetlobe. Pa vendar je opazil, da so mestne hiše postajale vse krajše in kolesar, ki je vozil pred njim, ni bil več daleč. Prehitel je kolesarja na drugem ovinku. Ko sta za trenutek vozila z ramo ob rami, je presenečen opazil, da je kolesar povsem normalen mladenič športnega videza. "Oh, to je zato, ker se ne gibljeva drug glede na drugega." je ugotovil. Ogovoril ga je. "Oprostite, ali se vam ne zdi neugodno živeti v mestu s tako nizko omejitvijo hitrosti?"

"Omejitvijo hitrosti?" se je presenečen kolesar obrnil. "Tu ni nobene omejitve hitrosti. Povsod lahko pridem, kakor hitro želim ali vsaj kakor hitro bi mogel, če bi namesto tega pokvečenega kolesa imel motor."

"Toda mimo mene ste vozili zelo počasi," je dejal gospod Tompkins. "Dobro sem opazoval."

"Česa ne poveste!" je dejal mladenič, očitno užaljen. "Seveda niste opazili, da sva šla že mimo petih blokov, odkar ste me ogovorili. Kaj ni to dovolj hitro za vas?"

"Toda cesta je postala zelo kratka," je ugovarjal gospod Tompkins.

"V čem pa je pravzaprav razlika, če rečem: 'Gibljem se hitreje' ali pa: 'Cesta se je skrajšala'? Do pošte moram prevoziti deset blokov. Če močneje pritisnem na pedala, se bloki skrajšajo in prispem hitreje. No, tukaj sva," je rekel mladi kolesar in stopil s kolesa.

Gospod Tompkins je pogledal na uro, ki je kazala pol šestih. Ponosno je pripomnil: "Potrebovali ste pol ure za teh deset blokov. Ura je bila točno pet, ko sem vas prvič videl."

"In ste čutili te pol ure?" je vprašal njegov tovariš. Gospod Tompkins se je moral strinjati, da se mu je zdelo res samo nekaj minut. Ko je pogledal na za-
pestno uro, je presenečen ugotovil, da kaže le pet minut čez pet. "Ali poštna
ura prehiteva?"

"Seveda, ali pa vaša zaostaja, ker ste se gibali prehitro. Sicer pa, kaj je prav-
zaprav z vami? Ali ste padli z Lune?" In mladenič je odhitel na pošto.

Po tem razgovoru je bilo gospodu Tompkinsu žal, ker profesor ni bil dose-
gljiv, saj bi mu lahko razložil te čudne dogodke. Mladenič je bil domačin, vaje
teh dogodkov, še preden je shodil. Torej je bil gospod Tompkins prisiljen sam
raziskovati ta čudni svet. Naravnal je svojo uro po poštni in počakal deset mi-
nut, da bi videl, če je vse v redu. Ura ni več zaostajala. Pot ga je vodila do žele-
zniške postaje, kjer se je odločil, da ponovno preveri svojo uro. Na njegovo ve-
liko presenečenje je zopet zaostajala. "No, tudi to mora biti relativistični
efekt," je sklepal gospod Tompkins. Odločil se je, da povpraša o tem koga
pametnejšega od mladega kolesarja.

Priložnost se je kmalu pokazala. Gospod pri štiridesetih je stopil iz vlaka in
se namenil proti izhodu. Spremljala ga je zelo stara gospa, ki pa je svojega spre-
mljevalca, na veliko presenečenje gospoda Tompkinsa, ogovorjala z dedkom.
To je bilo za gospoda Tompkinsa preveč. Z izgovorom, da bi pomagal pri
prtljagi, je začel pogovor.

"Oprostite, da se vmešam v vaše družinske zadeve," je dejal, "ali ste res
dedek te prikupne stare gospe? Veste, tuakj sem tujec in nikoli..."

"A tako," je odvrnil dedek in se smehljaj skozi brado. "Verjetno si me
predstavljate kot večnega popotnika, toda vse skupaj je zelo preprosto. Služba
mi narekuje veliko potovanj. In ker torej preživim večino časa na vlaku, se
staram počasneje kot moji sorodniki v mestu. Veseli me, da sem prišel pravo-
časno in našel vnukinjo še živo. Toda oprostite mi, prosim, taksi že čaka."

Odhitel je in pustil gospoda Tompkinsa samega z njegovimi problemi.
Nekaj sendvičev iz postajnega bifeja je okrepilo njegove duševne moči, tako da
je celo oporekal slavnemu načelu relativnosti.

"Jasno," si je mislil, ko je srkal kavo, "če bi bilo vse relativno, bi se popo-
tnik zdel svojcem zelo star in oni njemu prav tako, čeprav bi bili obe strani
lahko zelo mladi. Toda to, kar govorim sedaj, je neumnost: nihče ne more ime-
ti relativno sivih las."

Odločil se je, da bo še zadnjič poskušal ugotoviti, kako je s temi stvarmi.
V bifeju je sameval železničar in nanj se je obrnil gospod Tompkins.

"Ali bi bili tako prijazni," je začel, "in mi povedali, kdo je odgovoren za
to, da se potniki na vlaku počasneje starajo v primerjavi s tistimi, ki ostanejo v
mestu."

"Jaz sem odgovoren za to," je preprosto dejal možakar.

"O," je vzkliknil gospod Tompkins. "Torej ste rešili problem kamna modrosti starih alkimistov! Vi morate biti slaven mož. Ali tukaj zasedate stoli-co medicine?"

"Ne," je močno začuden odvrnil mož, "jaz sem samo zavirač na železnici."

"Zavirač! Mislite, zavirač ..." je vzkliknil gospod Tompkins, izgublja-joč tla pod nogami. Torej vi le vklopite zavore, ko vlak prihaja na postajo?"

"Tako je, to je tisto, kar jaz delam. In vsakič, ko se vlak upočasni, potniki pridobijo na starosti glede na druge ljudi. Seveda," je skromno dodal, "stroje-vodja, ki vlak pospešuje, ima tudi svoj delež pri tem."

"Pa vendar, kaj ima to opraviti s pomlajevanjem ljudi?" je vprašal gospod Tompkins presenečeno.

"Ni mi popolnoma jasno," je dejal zavirač, "ampak to je nekako takole: Nekoč sem prosil profesorja, ki se je peljal z mojim vlakom, naj bi to razložil. Začel je z zelo dolgim in nerazumljivim govorom in na koncu je dejal, da je to nekaj podobnega kot rdeči premik svetlobe z zvezd, mislim, da je rekel tako. Ali ste vi kaj slišali o takih stvareh, kot so rdeči premiki?"

"Ne—e," je nekoliko dvomeče odkimal gospod Tompkins in zavirač je odšel odkimavajoč.

Nenadoma ga je neka roka močno stresla za rame. Gospod Tompkins se je znašel na stolu predavalnice, kjer je poslušal profesorjevo predavanje, in ne v železniškem bifeju. Luči so ugasnili in soba je bila prazna. Vratar, ki ga je zbu-dil, je dejal: "Zapiramo!" Gospod Tompkins se je dvignil in napotil proti izhodu.

Po knjigi *Georga Gamowa*
"Mr. Tompkins in Paperback"
prevedla *Lidija Okršlar*

3 MORDA MOTIM?

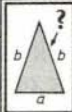
Filip je načrtal težišče pravokotnega trikotnika in izmeril njegove oddaljenosti vseh treh oglišč. Mateji je povedal le to, da je ena od izmerjenih razdalj kratnik druge in jo izzval z vprašanjem: "Veš, kakšne kote ima trikotnik?" Mateja je tuhtala nekaj časa in previdno vprašala: "So tvoje meritve točne?" Filip pa te to zanima?" se je začudil Filip.

Veste vi, zakaj?

Boris Lavrič

SLIKOVNA KRIŽANKA

				DRŽAVA V AZIJI	KAREL ERBEN	JADRANSKI OTOK	IZUMRLI PLAŽILCI	ZVEZDA V OZVEZDJU OREL	NEM. FIZIK ŽID. RODU (ALBERT)	DUŠAN VUKOTIČ	1
				VAŽEN DEL ELEKTRO-TEHNIKE	VAŽNA FIZ. TEORIJA						
PREDPONA ZA 10 ENOT					MATEMA-TIK VIDAV					ZVEZDO-SLOVEC	
KRAJ POD FRUŠKO GORO					KUŽNA SNOV ZA PREISKAVO					TIROLSKA REKA	UPR EN ST. J RA:
STADION V BUDIM-PEŠTI				DRŽAVNIK SADR	NAUK O MATEMAT. STRUKTUR	VELETOK V SZ					
JORDAN. LUKA						SMUČAR FRANKO	HITRO HLAPLJIVA TEKOČINA	OSNOVNA MERA			
MITO TREFALT			NEKDŠAH. SVETOV. PRVAK					HEKTAR			
ČLOVEKU PODOBNA OPICA			ALUMINIJ							ODREZEK OD KARTE	
FRANC. DRAMATIK								ZOLAJEV ROMAN	OŽINA NA MALAKI		
EMIL NAVINŠEK			MAJHEN SESALEC	ŠVICARSKI matematik					MESTO V ZS		
				avstrijska por. agencija							
TURŠKI FEVDALNI SISTEM						NEMŠKI DADAISTIČNI SLIKAR IN KIPAR					
						ZAPOREDNI ČRKI					
MOŠTVO						SONČEVO OBSEVANJE					
KRAJ V ISTRI (PREMOG)							ŽENSKO VRHNJE OBLAČILO				

ANGLŠKI POLARNI RAZISKO- VALEC	RISBA MIHA ŠTALEC	SPRO- ŽITEV OROŽJA	TUJINA	OTOK V IRSKEM MORJU	ZNAČAJ, NRAVI	FIZIKAL. KOLIČINA	GRŠKA ČRKA	ALEKSAN- DRIJSKI DUHOVNIK	GEOMETR. POJEM	GRŠKI JUNAK PRED TROJO	SESTAVIL MARKO BOKALIČ
	sošernica										UMETNOST (LAT.)
	PRIPIRAVA ZA STRGANJE										
							PRVI LETALEC				
							OVITEK				
AVNA JTA V UGOSL.				POJEM IZ geometrije					STANE SEVER		
ŠLČRKI				SOL DUŠK. KISLINE							
	REČNA USEDLINA				ERNST MACH			MEDLA SVETLOBA		ZVEZNA DRŽAVA V ZDA	ŠVIC. FIZIK (Wolfgang)
	ŽIVALSKA ANTENA				POSOJILO						
			OPTIČNI INSTRU- MENT								
			UROŠEVAC								
RISARKA											
SLIKA OBRAZA							REKA MED Korejo in Mandžurijo				
LIBANON							POLET				
		PREBI- VALCI IRSKE	SREDIŠČE LIECHTEN- STEINA					KLICA			
								JUŽNOAM. DRŽAVA			
			PRED- PRAŽNIK						HENRIK IBSEN		
			IZRAZ IZ RAČUNAL.						TAYLOR		
NEHOTNO SKRČENJE MIŠICE				JANEZ ERŽEN	ORODJE ZA TANJENJE						POSTAJA MILICE
LANTAN				ABRAHAM LINCOLN							
											
	MEJNA REKA MED ČSSR IN MADŽAR.					AZIJSKA OLJNICA					

31. REPUBLIŠKO TEKMOVANJE SREDNJEŠOLCEV IZ MATEMATIKE

Letos je bilo tekmovanje 4.4.1987 v Murski Soboti. Organiziral ga je Srednješolski center tehniško pedagoške usmeritve pod pokroviteljstvom Občinskega komiteja Zveze komunistov. 31. republiško tekmovanje srednješolcev iz matematike so s svojimi prispevki omogočile delovne organizacije vseh štirih pomurskih občin: Gornja Radgona, Lendava, Ljutomer in Murska Sobota. V soboto, na svečanem zboru vseh tekmovalcev in njihovih mentorjev, so zbrane najtopleje pozdravili prof. dr. Niko Prijatelj v imenu Društva matematikov, fizikov in astronomov SRS, sekretar občinskega komiteja prof. Rudi Cipot in ravnatelj centra prof. Vlado Sagadin. Medtem ko so tekmovalci reševali težke naloge, so si mentorji lahko ogledali AOP v tovarni oblačil in perila Mura.

Po skupnem kosilu smo popoldne tekmovalce popeljali na izlet. Večina med njimi je bila prvič v najsevernejšem delu naše domovine — Pomurju. O njem je nekoč Miško Kranjec zapisal, da je to pokrajina toplic in slatin, štajerskih vin in poleti nekoliko zadušnega ravninskega zraka, polna lepote, ohranjenih v žitnih poljih, jezerih z lokvanji, z divjimi racami ob reki Muri, z žlahtno vinsko trto in zidanicami Prleških in Lendavskih gorovij, z borovimi gozdovi na Goričkem, s turističnimi Radenci ter čudovitimi freskami v Turnišču in Martjancih.

Na republiško tekmovanje se je uvrstilo 141 učencev iz 24 srednjih šol Slovenije, ki so bili izbrani na šolskih tekmovanjih v mesecu marcu. Na izbirnih tekmovanjih je sodelovalo 1500 učencev. Komisija za popularizacijo matematike v srednji šoli, ki jo je vodil Darjo Felda, je sestavila težke naloge, saj je bila podeljena le ena 1. nagrada. Sicer pa je tekmovalna komisija podelila 17 nagrad in 17 pohval. Denarne nagrade je podelilo Društvo matematikov, fizikov in astronomov SRS. Za vse nagrajene tekmovalce pa so praktične nagrade, svoje proizvode, prispevale delovne organizacije Pomurja. Nagrade in pohvale so bile razdeljene takole:

1. letnik

- 2. nagrada: NOVAK Renata, SNŠ Ljubljana
- 3. nagrada: BAUER Andrej, SNŠ Ljubljana, FIJAVŽ Gašper, SNŠ Ljubljana, RAIČ Martin, SNŠ Ljubljana, KAVKLER Alenka, SNŠ Maribor
- Pohvala: DOBNIKAR Jure, SNŠ Maribor, ŽERDIN Marko, SNŠ Maribor, VELIKONJA Nevenka, NSC Nova Gorica;

2. letnik

2. nagrada: JERMAN Marjan, SŠNMEU Trbovlje

3. nagrada: VILFAN Andrej, SNŠ Ljubljana, PETEK Polona, SNŠ Maribor, SLANIČ Zoran, SNŠ Maribor, CIMPRIČ Jaka, SNŠ Ljubljana

Pohvala: VAVPETIČ Aleš, SENŠ RM Kamnik, OBLAK Andraž, SNŠ Ljubljana, OZBIČ Tatjana, STNŠ Postojna

3. letnik

1. nagrada: SLIVNIK Tomaž, SNŠ Ljubljana

2. nagrada: VOVK Edi, Iskra SŠ Kranj

3. nagrada: LAMOVEC Andrej, SNŠ Ljubljana, PLESTENJAK Bor, SNŠ Ljubljana

Pohvala: KOLAR Matej, STŠ MT Celje, ŽAGAR Emil, SŠTUD Kočevje, BAŠAR Barbara, SŠPRNMU Kranj, GOMBOC Andreja, SCTPU M. Sobota, LONGER Blaž, SNŠ Maribor

4. letnik

2. nagrada: BAJC Jure, SNŠ Ljubljana

3. nagrada: ZALETEL Metka, SŠPRNMU Kranj, ZMAZEK Blaž, STŠ Celje

Pohvala: ROVAN Aljoša, SŠ Brežice, ZAVERŠNIK Matjaž, STŠ Celje, KUZMA Bojan, SNŠ Ljubljana, ZIDAR Peter, SNŠ Ljubljana, FINGUŠT Vinko, SNŠ Maribor, ANASTASOV Peter, SNŠ Ljubljana.

Nadja Ivanc Milošević

STEFANOVA GIMNAZIJA V CELOVCU

Najpomembnejši slovenski fizik Jožef Stefan je bil rojen v neposredni bližini slovenske gimnazije v Celovcu. Tu poučuje matematiko prof. Štefan Močilnik, ki se nam je pred časom oglasil z novico o nobelovcu E. Schrödingerju. Kolega poznamo kot dobrega pedagoga in skromnega človeka. Tokrat nas je presenetil s šalo na svoj račun. Ob našem slučajnem obisku na šoli smo ga povprašali, če nameravajo njihov šolski zavod poimenovati po kakem zaslužnem Slovencu: politiku, umetniku, znanstveniku ali pedagogu. Povedal nam je, da so se o tem že pogovarjali, ne morejo pa se sporazumeti, ali naj šolo poimenujejo po Jožefu STEFANU ali po ŠTEFANU Močilniku.

Ciril Velkovrh

SREDNJEŠOLSKO REPUBLIŠKO TEKMOVANJE IZ FIZIKE

Republiško tekmovanje iz fizike je bilo 11. aprila v Centru srednjega usmerjenega izobraževanja na Jesenicah. Udeležilo se ga je 168 tekmovalcev iz 22 srednjih šol.

Učenci so imeli za reševanje teoretičnih nalog na voljo dve uri in pol. V skupini A (mehanika) je tekmovalo 65 učencev, v skupini B (energija) 36, v skupini C (elektromagnetika) 51 in v skupini D (optika) 16 učencev. Med tem, ko so učenci reševali naloge, je potekala okrogla miza na temo: odnos združeno delo – šola. Na njej so sodelovali mentorji in spremljevalci tekmovalcev ter vabljeni gostje iz Železarne Jesenice, ki je bila tudi pokrovitelj tekmovanja.

Po kosilu je organizator pripravil eksperimentalno tekmovanje. Tekmovale so ekipe posameznih šol. Najbolje se je odrezala SNŠ Ljubljana, in sicer pred ŠC Iskro Kranj in CSUI Jesenice. Ob zaključku je tekmovalna komisija razglasila rezultate in podelila priznanja naslednjim tekmovalcem:

SKUPINA A:

- 1. nagrada: Igor ZRINSKI (Murska Sobota)
- 2. nagrada: Andraž OBLAK, Matic BUTINA (SNŠ Ljubljana), Zoran SLANIČ (SNŠ Maribor), Gregor ČERNE (SŠPRNMU Kranj)
- 3. nagrada: Miha MESARIČ (Murska Sobota), Marijan ADAM (SNŠ Maribor)
- pohvale: Andrej KOŠIR, Roman PLEŠKO, Andrej PANGERŠIČ (SNŠ Ljubljana), Matej VALIČ (NCS Nova Gorica)

SKUPINA B:

- 1. nagrada: Tomaž VOLK (SNŠ Ljubljana)
- 2. nagrada: Tomaž PROSEN (SŠPRNMU Kranj)
- 3. nagrada: Andrej LAMOVEC, Lars KRISTAN (SNŠ Ljubljana), Robert JERAJ (SŠPRNMU Kranj), Andreja GOMBAČ (Murska Sobota)
- pohvali: Aleš MOHORIČ (SŠPRNMU Kranj), Tadej ORAŽEN (SNŠ Ljubljana)

SKUPINA C:

- 2. nagrada: Andrej KOTAR (SNŠ Ljubljana)
- 3. nagrada: Gorazd POBERAJ (SNŠ Ljubljana)
- pohvale: Aljoša ROVAN (Brežice), Uroš POMPE (SNŠ Ljubljana), Matjaž OBLAK (SŠPRNMU Kranj), Marko LESAR (SNŠ Maribor), Andrej VERK (STŠ Celje), Maja BRAČIČ, Borut ERŽEN (SŠPRNMU Kranj), Alenka MERTELJ (CSUI Jesenice), Renata POŽUN (Brežice)

SKUPINA D:

1. nagrada: Andrej VILFAN (SNŠ Ljubljana)
2. nagrada: Jure BAJC (SNŠ Ljubljana)
3. nagrada: Andrej GUŠTIN (SNŠ Ljubljana), Tomaž KOVAČ (NSC Nova Gorica)
- pohvala: Matjaž KRISTL (SNŠ Maribor)

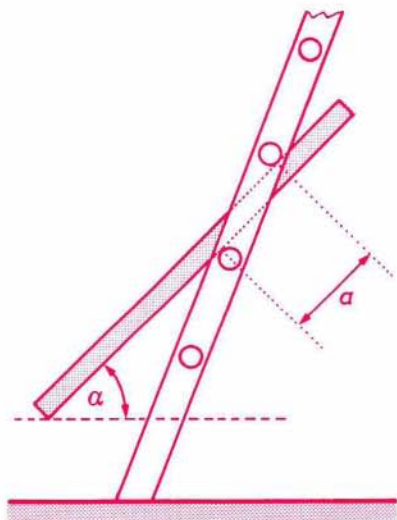
Komisija je določila ekipo za zvezno tekmovanje iz fizike v Ljubljani. Tekmovanja so se udeležili:

Igor Zrinski, Tomaž Volk, Tomaž Prosen, Andrej Lamovec, Robert Jeraj, Andrej Kotar, Gorazd Poberaj, Uroš Pompe, Maja Bračič, Alenka Mertelj, Andrej Vilfan, Jure Bajc, Andrej Guštin, Tomaž Kovač.

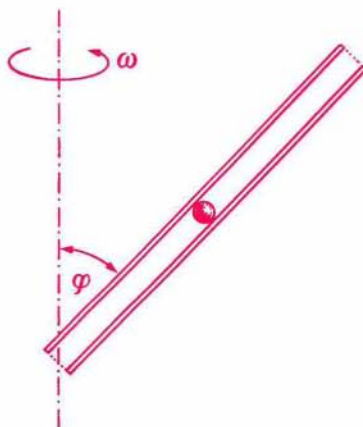
Naloge:

SKUPINA A – MEHANIKA

1. Med dva sosednja klina poševno postavljene lestve položimo tanko desko, kot kaže slika. Najmanj koliko mora biti oddaljeno težišče deske od najbližnjega klina, da bo deska mirovala? Koeficient lepenja med desko in klini je 0,2, razdalja $a = 30$ cm in kot $\alpha = 45^\circ$.



2. Votlo cevko z dolžino 1 m vrtimo s krožno frekvenco $8,24 \text{ s}^{-1}$ okoli navpične osi. Pod kolikšnim kotom glede na navpično os mora biti cevka nagnjena, da bo kroglica v njej mirovala točno na sredini cevke? Ali je takšno ravnoesje stabilno? Kako bi se gibala kroglica, če bi jo malo izmaknili iz ravnovesne lege? Kroglica se natanko prilega stenam cevke, trenje zanemarimo.



3. V 2 m visokem hitrem dvigalu, ki ima potovalno hitrost 10 m/s, pospešuje in zavira pa s pospeškom 12 m/s^2 , je na tla položena utež. Po gibanju navzgor se dvigalo ustavi ter se takoj začne spuščati. Čez koliko časa od začetka zaviranja zadene utež ob strop in čez koliko časa pade spet na tla? S kolikšno hitrostjo zadene ob strop in s kolikšno ob tla? Trk je popolnoma neprožen.

4. Dolg opečnat zid z višino h , debelino a in gostoto ρ prosto stoji na hrapavi vodoravni podlagi. Proti zidu piha veter s hitrostjo v .

a) Pokaži, da se zid prevrne, če hitrost vetra preseže hitrost $\sqrt{\rho g / \rho_0 h}$, a , ρ_0 je gostota zraka. Privzemi, da se zrak ob zidu popolnoma zaustavi.

b) S podatki $\rho = 2500 \text{ kg/m}^3$, $\rho_0 = 1,2 \text{ kg/m}^3$, $h = 2 \text{ m}$ in $a = 20 \text{ cm}$ izračunaj kritično hitrost in določi najmanjši koeficient med podlago in zidom, pri katerem se zid prej prevrne kot pa zdrsne.

SKUPINA B – ENERGIJA

1. Kolesi pri cestnem valjarju, ki imata obliko valjev s polmerom 0,5 m in dolžino 2 m, sta napolnjeni z betonom z gostoto $2,5 \cdot 10^3 \text{ kg/m}^3$. Masa ogrodja, motorja in voznika je 2 toni. V začetku valjar miruje, nato začne enekomerno pospeševati, pri čemer moč motorja narašča sorazmerno s časom in v 10 s naraste na 50 kW. Kolikšna je tedaj njegova hitrost? Moč, ki jo valjar troši za premagovanje trenja, je sorazmerna s hitrostjo, koeficient je 5 kW/ms^{-1} .

2. Balon napolnimo z 0,1 g vodika pri tlaku 105 kPa in spustimo, da se dvigne pod strop. Kolikšna je površina dela balona, ki se dotika stropa? Masa praznega balona je zanemarljivo majhna, zunanji zračni tlak je 100 kPa, kilomolski masi vodika in zraka pa sta 2 kg in 29 kg.

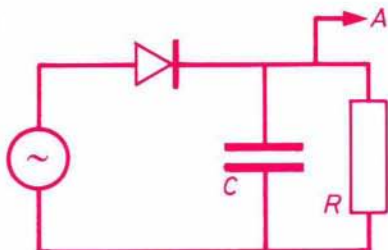
3. Dva enaka valja na sliki se z veliko hitrostjo vrtita v nasprotnih smereh. Razdalja med osema valjev je 15 cm. Na valja položimo desko tako, da je njeno težišče bližje enega valja. Deska zaniha v vodoravni smeri s frekvenco 1 Hz. Kolikšen je koeficient trenja med valjema in desko?



4. Paket je sestavljen iz n plasti z debelino x_1 in toplotno prevodnostjo 1000 W/mK ter n plasti z debelino x_2 in toplotno prevodnostjo 1 W/mK . Pri tem so plasti zložene tako, da sledi plasti z debelino x_1 plast z debelino x_2 , tej zopet x_1 in tako naprej. V kolikšnem razmerju naj bosta debelini obeh vrst plasti, da bo toplotna prevodnost v vzdolžni smeri dvakrat večja kot v prečni smeri?

SKUPINA C – ELEKTROMAGNETIKA

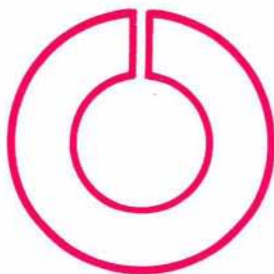
1. Vezje na sliki je priključeno na izmenično napetost z amplitudo 10 V in s frekvenco 50 Hz. Dioda prevaja tok le v eni smeri. Tedaj teče tok skozi diodo na sliki od leve na desno. Kapaciteta kondenzatorja je $50 \mu\text{F}$.



- Nariši časovni potek napetosti v točki A za vrednosti upora R (i) 10 kohm , (ii) 100 ohm .
 - Oceni skrajni vrednosti, med katerima niha napetost v točki A v primeru (i).
 - Pokaži, da v primeru (i) dioda prevaja tok le 0.045 del časa.
 - Oceni povprečni tok, ki tedaj teče skozi diodo.
2. V pravokotno kiveto z osnovno ploskvijo $20 \text{ cm} \times 2 \text{ cm}$, ki ima daljši steni iz kovine, krajši pa iz dielektrika, nalijemo elektrolit s specifičnim uporom $5 \Omega \text{ cm}$ in z gostoto 1 g/cm^3 . Kovinski steni priključimo na napetost 30 V . Kiveta je v navpičnem magnetnem polju z gostoto 0.01 T . Ko steče tok, se gladina kapljavine v kiveti nagne. V kateri smeri se nagne in kolikšna je razlika višin ob stenah?

3. Generator električnega toka je povezan s porabnikom z 1 km dolgim bakrenim vodnikom, po katerem teče tok 10 A . Kakšen naj bo presek vodnika, da bo po enem letu delovanja porabnika razmerje med stroški za baker in stroški zaradi izgub na vodniku najbolj ugodno? Cena za kg bakra je 1000 -krat večja kot cena 1 kWh . Specifični upor bakra je $18 \cdot 10^{-9} \Omega \text{ m}$, njegova gostota pa 8900 kg/m^3 .

4. Žični okvir (glej sliko) z notranjim radijem 10 cm in zunanjim radijem 20 cm se nahaja v nehomogenem magnetnem polju, ki je pravokotno na ravnino okvirja. Na začetku je povprečna gostota znotraj manjšega radija 1 T , znotraj večjega pa 0.5 T . Magnetno polje enakomerno zmanjšujemo, tako da v 10 s pade na nič. Kolikšen tok teče tedaj po okviru, če je upor 1 m dolgega dela žice 0.1Ω ?



1. Posoda v obliki kvadra z osnovno ploskvijo $1\text{ m} \times 1\text{ m}$ je do višine 58 cm napolnjena z vodo. V oglišču na dnu posode je svetilo, ki seva v vse smeri enakomerno. Kolikšen del svetlobnega toka uide iz vode, če so stene posode porčnjene in absorbirajo vso vpadlo svetlobo? Lomni količnik vode je $1,33$.
2. Na vodi je razlita tanka plast olja z debelino $0,1\text{ }\mu\text{m}$ in z lomnim količnikom $1,5$. Če posvetimo na plast z belo svetlobo pod določenim kotom, se nam ojačeno odbije svetloba z valovno dolžino $565,7\text{ nm}$. Lomni količnik vode je $1,33$.
 - a) Poišči kot, pod katerim smo posvetili.
 - b) Za koliko stopinj se spremeni ta kot, če se zaradi izhlapevanja oljna plast stanjša za 2% ?
3. Svetlobni tok s Sonca pada pravokotno na ravno ploščo z maso 1 kg in z odbojnostjo $0,4$. Plošča lebdi zaradi svetlobnega tlaka v vesolju daleč od drugih nebesnih teles. Masa Sonca je $2 \cdot 10^{30}\text{ kg}$, svetlobna moč pa $4 \cdot 10^{29}\text{ W}$. Izračunaj površino plošče. Razdalja plošče od Sonca je dovolj velika, da lahko računamo s Soncem kot s točkastim telesom.
4. Vzporeden snop svetlobe pada pravokotno na planparalelno krožno ploščo z debelino 5 cm , v kateri se lomni količnik spreminja od njene geometrijske osi navzven. To spreminjanje za majhne razdalje r ($r \ll r_0$) od osi opiše enačba $n(r) = n_0(1 - (r/r_0)^2)$, če je $n_0 = 1,58$ in $r_0 = 0,4\text{ m}$. V kolikšni razdalji za ploščo se zberejo lomljeni žarki, ki gredo skozi ploščo blizu njene osi?

Iztok Kukman

SE MORDA MOTIM – rešitev naloge s str. 223

Če upoštevamo, da težišče T pravokotnega trikotnika ABC (s katetama a, b in hipotenuzo c) razdeli vsako težiščnico v razmerju $2 : 1$, zlahka dobimo njegove oddaljenosti od oglišč

$$|TA| = \frac{1}{3} (a^2 + 4b^2)^{1/2}$$

$$|TB| = \frac{1}{3} (4a^2 + b^2)^{1/2}$$

$$|TC| = \frac{1}{3} c = \frac{1}{3} (a^2 + b^2)^{1/2}$$

in se prepričamo, da nobena ne more biti dvakratnik kake druge.

Boris Lavrič

11. REPUBLIŠKO TEKMOVANJE IZ ZNANJA RAČUNALNIŠTVA IN SREČANJE MLADIH RAZIKSOVALCEV SLOVENIJE

22. in 23. maja je bilo v Novi Gorici v prostorih Izobraževalnega centra Iskre Delte srečanje mladih raziskovalcev in 11. republiško tekmovanje iz znanja računalništva.

Prvega dne je na srečanju raziskovalcev 49 avtorjev predstavilo 22 raziskovalnih nalog, ki so jih ustvarjali celo šolsko leto. Kakovost nalog je bila na zavidljivi ravni. Posebej pohvaljene pa so bili naslednje naloge:

Damjan Jamšek, Igor Zaverski, Srečko Rojs: RAPOTINP — sistem za računalniško podprto testiranje in načrtovanje programske opreme

Programsko okolje RAPOTINP podpira testiranje in načrtovanje programske opreme. Okolje je realizirano za operacijski sistem VAX/VMS V4.5. Pri natančnem modularnem načrtovanju imamo opravka z velikim številom dodatnih datotek, ki pripadajo enemu modulu. RAPOTINP s posebnimi ukaznimi procedurami omogoča pregledno delo z vsemi datotekami. Kot stranski produkt testiranja nastopa podatkovna baza s podatki o testiranju, odpravljanju napak, prikritosti testiranja in parametri programske metrike. S tem so omogočene trenutno zelo aktualne raziskave na področju zanesljivosti programske opreme.

Marko Klopčič: X-Y robot

Cilj raziskovalne naloge je naprava, ki bo opravljala sledeče funkcije: vrtanje ploščic tiskanega vezja, risanje in digitalizacija slik. Mehanski del je podoben X-Y risalniku, le da je zaradi obremenitev pri vrtanju bolj masiven. Preko vmesniških vezij vse skupaj krmili računalnik ZX Spectrum, ki ga z vmesnikom RS 232 C lahko povežemo z drugimi računalniki, npr. IBM PC, ATARI ST ...

Vrtanje je namenjeno za serijsko izdelavo ploščic tiskanega vezja. S pomočjo igralne palice robota naučimo, kje mora izvrtati luknje, nato pa menjavamo izvrtane ploščice.

Digitalizacija slik poteka s pomočjo fototranzistorja in A/D pretvornika. Robot pregleduje sliko in bitni vzorec pošilja v računalnik.

Programska oprema za risanje prepozna ukaze, ki jih pošilja program za risanje tiskanih vezij na IBM XT, poleg tega pa lahko piše ter riše kroge, pravokotnice, elipse.

Herbert Paar, Niko Korbar, Gusti Sakelšek: Izgradnja računalniško podprtega sistema poslovanja šolske knjižnice

Računalniško podprti knjižnično-informacijski sistemi še malo niso zadnja moda v svetu računalništva. Na tem področju je tudi že ogromno nareje-

nega. Naša skupina se je spustila v povsem nove razsežnosti izgradnje baze podatkov. Najprej smo se hoteli zgledovati po že narejenih aplikacijah, a smo čez čas ugotovili, da niso namenjene poslovanju šolskih knjižnic, ampak javnih, kot je na primer Univerzitetna knjižnica Maribor.

Osnovni cilji naše skupine so bili narediti programski paket za knjižnično—informacijski sistem poslovanja šolskih knjižnic. In uspelo nam je izbrati pravi pot, kot kažejo rezultati, saj programski paket že deluje.

Uroš Prestor, Kristjan Pečanac: Mikroprocesorska enota za VME vodilo.

V zadnjih nekaj letih je področje mikroprocesorjev zelo napredovalo. Tako je ameriška tovarna Motorola, ki je začela prodajati serijo mikroprocesorjev M68000 v letu 1979, razvila leta 1983, prvi 32-bitni mikroprocesor MC68020. Glede na relativno razširjenost teh mikroprocesorskih enot sva sklenila razviti mikroprocesorsko ploščo, kompatibilno z najbolj razširjenim vodikom, uporabnim v industriji — vodikom VME.

Plošča predstavlja popoln 32-bitni mikroračunalnik z dodanim procesorjem za operacije v plavajoči vejici, enoto za upravljanje s pomnilnikom, dvema serijskima kanaloma, paralelnimi vrati za priključitev tiskalnika, do 256 kB bralnega in prav toliko bralno—pisalnega pomnilnika.

Poleg strojne opreme je bila razvita tudi programska oprema, ki je z vgrajenim povratnim zbiralnikom in možnostjo zasledovanja poteka programa močno orodje za razvoj le—teh. Programska oprema je zapisana v bralnem pomnilniku, tako da je uporabljiva takoj po vključitvi računalnika.

Gregor Smrekar: Računalniško vodenje želve—risarke s pomočjo programskega jezika LOGO

Temeljni cilj naloge je nadzor procesa z mikroprocesorjem. Izbral sem krmiljenje robota želve—risarke s pomočjo računalnika ZX Spectrum. Odločil sem se za interaktivno kontrolo z jezikom logo.

Prvi del naloge je povezava računalnika ter robota z vzporednim vmesnikom ter posebnim vezjem, ki krmili delovanje koračnih motorjev, ter pisala. Drugi del naloge je izdelava programov za vodenje robota. Programi so pisani v strojnem jeziku, poženemo pa jih iz programskega jezika logo. Tretji del naloge je izdelava (projektiranje) fizične izvedbe robota.

Rezultat naloge je torej kompleten robot — želva risarka, sposoben risanja po papirju in kot tak kombinacija strojne in programske opreme ter mehanike.

Boštjan Peterca, Boštjan Bregar, Gorazd Hribar, Dejan Gale: Informacijska podpora Mailboxa.

V okviru naloge je bila izdelana tako programska kot strojna oprema za izmenjavo informacij med uporabniki po telefonskem omrežju. Dijaki so v času realizacije spoznali tudi skupinsko delo.

Alexis Zrimec: Geometrijske konstrukcije na računalniku

Naloga predstavlja računalniški program za izvedbo geometrijskih konstrukcij z računalnikom.

Naslednjega dne so se tekmovalci pomerili v reševanju nalog. Kot že prej-šnja leta so bili razdeljeni v tri skupine. V prvi so tekmovali dijaki po prvem letu pouka računalništva, v drugi dijaki po dveh in v tretji dijaki po treh ali več letih pouka računalništva. Skupaj je tekmovalo 163 dijakov.

Nagrajenci v prvi skupini (tekmovalcev je bilo 97):

- I. nagrada: Andrej VILFAN, Srednja naravoslovna šola, Ljubljana, Marko ROBNIK, Center srednjih šol Titovo Velenje, Janez DEMŠAR, Računalniški krožek "Gradbeži", SNŠ Ljubljana;
- II. nagrada: Peter HOLOZAN, Srednja ekonomska in naravoslovno-matematična šola, Kamnik, Zoran SLANIČ, Srednja naravoslovna šola Miloš Zidanšek, Maribor, Edvard VOVK, Iskra — srednja šola elektrotehniške in kovinarsko-predelovalne usmeritve, Kranj
- III. nagrada: Tomaž CEDILNIK, OŠ Ledina, Ljubljana, Adrian ARH, Srednja šola za elektroniko, Ljubljana, Boris TUMA, Srednja šola družbo-slovja in splošne kulture, Ljubljana

Nagrajenci v drugi skupini (tekmovalcev je bilo 40):

- I. nagrada: Andrej FAJFAR, Srednja naravoslovna šola, Ljubljana, Gašper MRAMOR, Računalniški krožek "Gradbeži", Ljubljana;
- II. nagrada: Uroš PRESTOR, Računalniški krožek "Gimnazija Kranj", Kranj, Tomaž VOLK, Srednja naravoslovna šola, Ljubljana;
- III. nagrada: Robert ŠPENDL, Srednja šola za računalništvo, Ljubljana, Andrej MERTELJ, Računalniški krožek "Gimnazija Kranj", Kranj

Nagrajenci v tretji skupini (tekmovalcev je bilo 26):

- I. nagrada: Branko ČIBEJ, Srednja naravoslovna šola, Ljubljana;
- II. nagrada: Boštjan PETERCA, Srednja šola za računalništvo, Ljubljana;
- III. nagrada: Samo STANIČ, Srednja šola za računalništvo, Ljubljana

V okviru republiškega tekmovanja srednješolcev iz računalništva je bila organizirana okrogla miza o pouku računalništva. Na njej so sodelovali mentorji tekmovalcev.

Srečanje in tekmovanje je lepo uspelo. Še enkrat se zahvaljujemo vsem, ki ste k temu pripomogli, še posebej pa gostiteljem v Novi Gorici.

Tadej Lasbafer

2. REPUBLIŠKO TEKMOVANJE IZ LOGIKE

26. decembra smo se zbrali v Cankarjevem domu na drugem republiškem tekmovanju iz logike, pod pokroviteljstvom DO Metalka. Tekmovanje je organizirala komisija za logiko pri ZOTKS v sodelovanju z Društvom matematikov, fizikov in astronomov.

Za to tekmovanje je med učenci precejšnje zanimanje, saj je bilo tekmovalcev dvakrat toliko kot lansko leto. V skupini 7. razreda je bilo 67 tekmovalcev, osmošolcev 115, v skupini 1. razreda UI 37 tekmovalcev in v skupini 2. razreda UI 32 učencev. Skupaj torej 251 tekmovalcev, ki jih je pripeljalo 62 mentorjev.

Udeležence tekmovanja je pozdravil Jože Smole, predsednik RK SZDLS.

Medtem ko so učenci reševali nekaj težje naloge, kot so bile na prvem tekmovanju, so mentorji poslušali predavanja Andreja Uleta o logiki.

Po 90 minutah je nekaj učencev že rešilo vse naloge in dobro pojasnilo rešitve. Izdelke so pregledovale komisije, sestavljene iz študentov elektrotehnike, računalništva in matematike ter učiteljev in asistentov za matematiko. Komisije so vodili: Neža Mramor—Kosta, Bojan Magajna, Peter Legiša in Bojan Orel.

Ker je število tekmovalcev vsako leto večje, bomo naslednje leto organizirali predtekmovanja po šolah in nato izbrali tekmovalce za republiško tekmovanje. Učenci tistih šol, ki ne bodo organizirale predtekmovanj, se bodo lahko prijavili za udeležbo na eni od šol, katerih seznam bo objavljen v dnevnem časopisu.

NALOGE

7. razred

1. Brata Peter in Pavel sta resnicoljuba, le na svoja rojstna dneva lažeta. Na silvestrovo so ju vprašali, kdaj imata rojstni dan.

Peter je odgovoril: "Včeraj", Pavel pa: "Jutri." Enako (Peter — "Včeraj", Pavel — "Jutri") pa sta odgovorila tudi na novega leta dan. Kdaj imata rojstna dneva?

2. Aleks, David, Niko in Vili so imenovali vsak svojega konja po enem od drugih treh in različno. Nekega dne ni nihče jahal svojega konja, niti ni jahal konja, imenovanega po sebi.

Niko je jahal Aleksovega konja.

Vili je jahal konja Nika.

Soimenjak konja, ki ga je jahal David, je jahal konja Vilija.
Kako je ime konju, ki ga je jahal soimenjak Aleksovega konja?
3. Pet deklet je tekmovalo v plavanju in nobeni dve nista delili enakega mesta.
Po tekmovalju so dale po dve izjavi, eno resnično in eno neresnično.

Giti: Bila sem druga.
Jana je bila nekoliko pred Evo.
Eva: Giti je bila zadnja.
Metka je bila pred Polono.
Jana: Bila sem četrta.
Metka je bila druga.
Polona: Jana je bila tretja.
Eva je bila pred Metko.
Metka: Eva je bila tretja.
Polona je zmagala.

Kako so se dekleta razvrstila?

8. razred

1. Na otoku Tata je vladala nenavadna situacija. Moški prebivalci so vedno govorili resnico. Pri prebivalkah pa je bilo takole: Prebivalka ni nikoli zaporedoma dala dveh resničnih ali dveh napačnih izjav. Če je bila ena resnična, je bila druga napačna.

Nekoč je turist srečal tatško družino z otrokom in le—tega vprašal, ali je deček. Otrok je odgovoril v domačem jeziku. Nato je eden od staršev izjavil: "Kibijev odgovor je bil, da je deček." Drugi roditelj pa je dodal: "Kibi je deklica. Kibi je lagala."

Kaj lahko sklepaš?

2. Kolar, Janežič, Mirtič in Smole so mesar, pleskar, trgovec in miličnik, vendar ne nujno v tem vrstnem redu.

Kolar in Janežič sta soseda in se skupaj vozita na delo.

Janežič ima večji osebni dohodek od Mirtiča.

Kolar vedno premaguje Smoleta pri kegljanju.

Mesar gre vedno peš v službo.

Miličnik ne živi blizu pleskarja.

Edino srečanje med miličnikom in trgovcem je bilo, ko je le—ta plačal kazen za prehitro vožnjo.

Miličnik zasluži več kot pleskar in več kot trgovec.

Kateri poklic opravlja kateri?

3. Štirje moški — Bobi, Dragi, Miki in Piko — imajo vsak enega psa in enega

mačka, ki se imenujeta po ostalih treh moških, vendar pa različno.

Nobena dva psa in nobena dva mačka nimata istega imena.

Pikov pes in Mikijev maček imata ime lastnika mačka Mikija.

Soimenjak Dragijevega mačka je lastnik mačka, katerega soimenjak je lastnik psa Bobija.

Kdo je lastnik psa Bobija?

1. letnik UI

1. V Malem mestu je nekdo oropal zlatarno. Nekaj dni pozneje je policija v Velikem mestu aretirala tri znane kriminalce. Kot se je pozneje pokazalo, je bil ropar eden od te trojice. Iz policijskih kartotek je bilo razvidno, da nobeden od trojice ne pove treh zaporednih stavkov, ne da bi lagal. Na zaslišanju so dali tele izjave:

Luka: Stane je ropar.
Še nikoli nisem bil v Malem mestu.
Nedolžen sem.

Stane: Peter je nedolžen.
Vse, kar je Luka izjavil, je laž.
Jaz nisem ropar.

Peter: Jaz nisem ropar.
Luka je že bil v Malem mestu.
Stane je lagal, ko je dejal, da je vse, kar je Luka izjavil, laž.

Kdo je ropar?

2. Posadko nekega vlaka sestavljajo strojevodja, zavirač, sprevodnik in varnostnik. Njihova imena so: Aleš, Janez, Peter in Tomaž.

Janez je nekaj let starejši od Aleša.

Zavirač nima sorodnikov med posadko.

Strojevodja in varnostnik sta brata dvojčka.

Janez je Petrov nečak.

Varnostnik ni sprevodnikov stric in sprevodnik ni strojevodjev stric.

Kaj je kateri?

Kako so si v sorodu?

3. Edo, Franci, Gregor in Henrik so šli nekega dne z ženami na ples. Enega od plesov je Beti plesala z Edom, Alenka s Cilkinim možem, Danica z Alenkinim možem, Franci je plesal z Gregorjevo ženo in Gregor z Edovo ženo.

Kako je ime ženam teh tovarišev in kdo je plesal s kom?

2. letnik UI

1. V poziciji na diagramu je ali črni konj ali črni lovec ali črna trdnjava v resnici bela figura. Katera figura je to?

Napotek: Kako je dal beli šah?



2. Gita, Helena in Maja so se pogovarjale o svojih starostih:

Gita: Stara sem 22 let.
Sem dve leti mlajša od Helene.
Sem leto dni starejša od Maje.

Helena: Nisem najmlajša.
Z Majo sva narazen tri leta.
Maja ima 25 let.

Maja: Sem mlajša od Gite.
Gita je stara 23 let.
Helena je tri leta starejša od Gite.

Vsaka od deklet je dala dve resnični in eno neresnično izjavo. Ali lahko ugotovimo, koliko so stara dekleta?

3. Andrej, Boris, Cene in Davor se pogovarjajo o svojih ženah:

Andrej: Danica je Janina mati.
Nikoli nisem srečal Petre.

Boris: Cenetova žena je Danica ali Petra.
Jana je najstarejša.

Cene: Petra je Andrejeva soproga.
Danica je Janina starejša sestra.

Davor: Marta je moja hči.
Danica je starejša kot moja žena.

Kdo je s kom poročen, če se z gotovostjo lahko zanesemo na tiste izjave, v katerih mož omenja ime svoje žene?

REZULTATI

1. skupina – 7. razred osnovne šole

uvrstitev	priimek in ime	osnovna šola	kraj
1.–2. mesto	PAVLIN Tina	9. korpusa	Nova Gorica
1.–2.mesto	ŽAGAR Mira	Ljubo Šercer	Ig
3.–4.mesto	VEBLE Gregor	Bratov Polančič	Maribor
3.–4.mesto	VIZJAK David	Slavko Šlander	Celje
5. mesto	KRAMPAČ Egon	Prežihov Voranc	Bistrica
6. mesto	ABRAM Dragan	Renče	Renče
7. mesto	GORIŠEK Pavle	Tone Tomšič	Ljubljana
8.–10.mesto	SOTLAR Matej	Divača	Divača
8.–10.mesto	BOLTA Barbara	Leopolda Mačka	Ljubljana
8.–10.mesto	PIŠKURIČ Mojca	Ljubo Šercer	Ig

2. skupina – 8. razred osnovne šole

uvrstitev	priimek in ime	osnovnašola	kraj
1. mesto	PIPAN Gregor	Staneta Kosca	Ljubljana
2. mesto	MILAČ Nina	Majde Vrhovnik	Ljubljana
3. mesto	MALENŠEK Polona	Karavanški kurir	Jesenice
4.–5.mesto	ŽUREJ Jurij	Dob pri Domžalah	Dob
4.–5.mesto	MATOVICH Primož	Veljko Vlahovič	Ljubljana
6.–7.mesto	VINTAR Špela	Rihard Jakopič	Ljubljana
6.–7.mesto	JANŠA Borut	Lucijan Seljak	Kranj
8.–9.mesto	KRISTANC Jana	Simon Jenko	Kranj
8.–9.mesto	PREBIL Uroš	Franjo Malgaj	Šentjur
10. mesto	KRŽIŠNIK Štefan	Peter Kavčič	Škofja Loka

3. skupina – 1. letnik usmerjenega izobraževanja

uvrstitev	priimek in ime	šola	kraj
1. mesto	BAN Jernej	OŠ Riharda Jakopiča	Ljubljana
2. mesto	DEMŠAR Urška	SŠ za elek. in narav.	Ljubljana
3. mesto	FLIS Adam	STŠMT	Celje
4. mesto	POLAK Darja	SŠPRNMU	Kranj
5. mesto	GATNIK Borut	OŠ Lucijana Bratkoviča	Bratuša
			Renče

uvrstitev	priimek in ime	šola	kraj
6. mesto	KUČAN Zdravko	SŠPRNMU	Kranj
7. mesto	ULE Aljaž	SNMŠ	Ljubljana
8. mesto	JUROŠ Tina	SŠPRNMU	Kranj
9. mesto	VATOVEC Maruša	OŠ Cvetko Golar	Škofja Loka
10. mesto	PODRŽAJ Gregor	OŠ Heroj Veljko	Vlahovič Ljubljana

4. skupina – 2. letnik srednjega izobraževanja

uvrstitev	priimek in ime	šola	kraj
1. mesto	MAURER Roman	SNŠ	Trbovlje
2. mesto	REBOLJ Saša	SŠ Rudolfa Maistra	Kamnik
3. mesto	DOBNIKAR Jure	SNŠ M. Zidanšek	Maribor
4. mesto	PETROVEC Janko	STŠ M. Tita	Celje
5. mesto	ŠKALA Marko	SŠ Edvarda Kardelja	Črnomelj
6.–7.mesto	DREO Samo	STŠ M. Tita	Celje
6.–7.mesto	SMOLEJ Katra	CUI	Jesenice
8. mesto	DOLENC Polona	SŠPRNNU	Kranj
9. mesto	DOLINAR Gregor	SŠPRNNU	Kranj
10. mesto	PRETNJAK Matjaž	STŠ M. Tita	Celje

Izidor Hafner

NALOGA

PRIJATELJI

V mestu živijo štirje prijatelji: Andraž, Blaž, Matjaž in Tomaž. Vsak ima še starejšega brata. Vsi štirje starejši bratje imajo ista štiri različna imena, prav tako tudi njihovi očetje. V nobeni od teh štirih družin pa nima sin enakega imena kot oče. Tomažev oče in Matjažev starejši brat se imenujeta tako kot tisti od prijateljev, ki ima starejšega brata Matjaža. Starejši brat tistega prijatelja, ki ima enako ime kot Blažev starejši brat, se imenuje tako kot prijatelj, čigar očetu je ime Andraž. Kateri od prijateljev ima očeta z imenom Tomaž?

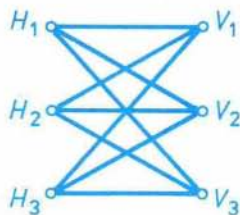
Darjo Felda

O TREH HIŠAH IN TREH VODNJAKIH

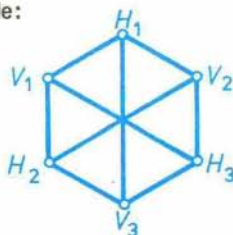
Prebivalci treh hiš so imeli na voljo tri vodnjake. Ker so bili le-ti z vodo različno oskrbovani, so se lastniki hiš odločili, da bodo od vsake hiše speljali pot k vsakemu vodnjaku. To bi radi naredili tako, da se poti ne bi križale. Ali je to mogoče?

Matematični model za predstavitev te naloge je **graf**. Preprosto povedano: graf je določen, če poznamo neko množico (njene elemente bomo imenovali kar točke) in če so nekateri pari teh točk v določenem odnosu (takemu odnosu pravimo povezava). Graf lahko ponazorimo tako, da točke kakorkoli narišemo v ravnini, povezavo pa ponazarja kar črta med točkama (ni nujno daljica). In še to: tu nas bodo zanimali le grafi, pri katerih ni usmerjenih povezav (ni važno, katera točka je začetna in katera končna). Graf bomo imenovali **povezan**, če je mogoče iz poljubne točke priti po povezavah v katerokoli drugo točko.

Našemu uvodnemu problemu ustreza naslednji graf:



Narišemo ga lahko tudi takole:



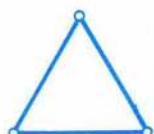
V obeh primerih vidimo, da se nekatere povezave sekajo. Zanima nas, ali je ta graf mogoče narisati tudi tako, da se povezave ne bi sekale, kar bi bila rešitev našega začetnega problema. To lahko na primer naredimo pri naslednjem grafu:



Grafom, ki jih lahko narišemo v ravnini tako, da se noben par povezav ne seka, pravimo **ravninski** ali **planarni grafi**. Oglejmo si neko lastnost teh grafov.

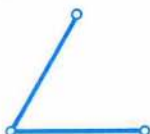
Planarni graf razdeli ravnino na p polj. Iz enega polja lahko pridemo v drugo le, če sekamo povezavo ali gremo skozi točko grafa. Naj ima planarni graf n točk in r povezav. Nekaj zgledov:

a)



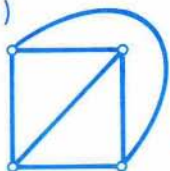
$$\begin{aligned} n &= 3 \\ r &= 3 \\ p &= 2 \end{aligned}$$

b)



$$\begin{aligned} n &= 3 \\ r &= 2 \\ p &= 1 \end{aligned}$$

c)



$$\begin{aligned} n &= 4 \\ r &= 6 \\ p &= 4 \end{aligned}$$

Eden najstarejših izrekov iz teorije grafov je Eulerjev izrek za planarne grafe. Tole pravi:

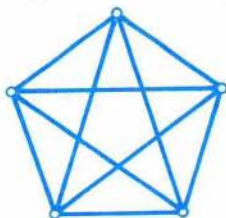
Če ima povezan planarni graf n točk, r povezav in p polj, potem je $n + p = r + 2$.

Zgornji primeri izrek potrjujejo. Dokaz pa zahteva več znanja iz teorije grafov, zato ga bomo opustili. Bralci ga lahko najdejo v knjigi D. Cvetkovića *Teorija grafov i njene primene*, nekaj predznanja pa bodo dobili v knjižici *Najnujnejše o grafih*, ki sta jo napisala D. Bajc in T. Pisanski in je izšla v Presekovi knjižnici leta 1985.

Vrnimo se k našemu uvodnemu grafu, kjer smo povezovali hišice z vodnjaki, in si ga oglejmo. Tu je $n = 6$ in $r = 9$. Iz obeh slik se da ugotoviti, da nobena trojica točk ni povezana tako, da bi oblikovala trikotnik. Če bi lahko ta graf narisali tako, da se povezave ne bi sekale, bi bilo vsako polje omejeno z najmanj štirimi povezavami, vsaka povezava pa meji na dve polji. Zato je $r \geq 4p/2$ ali $p \leq 9/2$. Eulerjev izrek pa nam za p da vrednost $p = r + 2 - n = 5$. Ker je naš graf povezan, nam protislovje pove, da graf ni planaren. Prebivalci treh hišic se ne bodo mogli izogniti križanju poti, zato bodo morali paziti na dobre medsosedske odnose.

S planarnimi grafi se v teoriji grafov večkrat srečamo. Uporaba pa sega tudi na druga področja. Srečujejo jih pri projektiranju cestnih omrežij, če izključujemo možnost nadvozov, v tehniki integriranih vezij, pri izvedbi nekaterih mehanizmov v strojništvu in še kje.

In še naloga za bralce. Na podoben način kot zgoraj je mogoče dokazati, da graf na sliki ni planaren.



Olga Arnuš

ŠTEVILO RAZKOSANJ KONČNE MNOŽICE

V neki družini so štirje otroci: *Anton, Berta, Ciril* in *Darja*. Zelo radi se seveda igrajo. Nas pa zanima odgovor na vprašanje:

Na koliko različnih načinov se lahko igrajo po skupinah (tudi en sam otrok že sestavlja skupino)?

Med zavita oklepaja naštejmo, kateri otroci se lahko igrajo skupaj. Najpreprostejša je možnost, da se sploh ne razdelijo:

$$\{ \textit{Anton, Berta, Ciril, Darja} \}$$

Kar na sedem različnih načinov se lahko igrajo v dveh skupinah:

$$\begin{array}{ll} \{ \textit{Anton} \} & \{ \textit{Berta, Ciril, Darja} \} \\ \{ \textit{Berta} \} & \{ \textit{Anton, Ciril, Darja} \} \\ \{ \textit{Ciril} \} & \{ \textit{Anton, Berta, Darja} \} \\ \{ \textit{Darja} \} & \{ \textit{Anton, Berta, Ciril} \} \\ \{ \textit{Anton, Berta} \} & \{ \textit{Ciril, Darja} \} \\ \{ \textit{Anton, Ciril} \} & \{ \textit{Berta, Darja} \} \\ \{ \textit{Anton, Darja} \} & \{ \textit{Berta, Ciril} \} \end{array}$$

Na tri skupine se lahko razdelijo na šest različnih načinov:

$$\begin{array}{lll} \{ \textit{Anton} \} & \{ \textit{Berta, Ciril} \} & \{ \textit{Darja} \} \\ \{ \textit{Anton} \} & \{ \textit{Berta, Darja} \} & \{ \textit{Ciril} \} \\ \{ \textit{Anton} \} & \{ \textit{Ciril, Darja} \} & \{ \textit{Berta} \} \\ \{ \textit{Ciril} \} & \{ \textit{Anton, Berta} \} & \{ \textit{Darja} \} \\ \{ \textit{Berta} \} & \{ \textit{Anton, Ciril} \} & \{ \textit{Darja} \} \\ \{ \textit{Berta} \} & \{ \textit{Anton, Darja} \} & \{ \textit{Ciril} \} \end{array}$$

Štiri skupine s po enim otrokom so zadnja skrajna možnost za razdelitev:

$$\{ \textit{Anton} \} \quad \{ \textit{Berta} \} \quad \{ \textit{Ciril} \} \quad \{ \textit{Darja} \}$$

Primer naših štirih otrok bomo sedaj posplošili na poljubne končne množice. V ta namen se moramo dogovoriti, kako in kaj naprej.

Rekli bomo:

Množici sta si tuji, če je njun presek prazna množica. Neprazne podmnožice $A_1, A_2, \dots, A_m$ neprazne množice A tvorijo njeno razkosanje, če velja:

- za poljubna različna indeksa i in j sta si množici A_i in A_j tuji
- unija množic $A_1, A_2, \dots, A_m$ je množica A .

Ista množica A ima v splošnem več razkosanj na dano število podmnožic. Število različnih razkosanj dane množice seveda raste s številom njenih elementov. Naš cilj je naslednji:

Na koliko različnih načinov lahko množico A , ki šteje n elementov, razkosamo na m podmnožic?

Primer 1. *Andrej, Boris in Cene* so sicer dobri prijatelji, se pa vseeno pogosto prepirajo, pri tem pa kdo od njih potegne z drugim ali pa tudi ne. Glede na to, kdo je v prepiru s kom, so te možnosti (našteti v zavitih oklepajih držijo skupaj):

1. V resnici se niso sporekli: $\{ \text{Andrej, Boris, Cene} \}$
2. Dva proti enemu: $\{ \text{Andrej, Boris} \}$ $\{ \text{Cene} \}$
 $\{ \text{Andrej, Cene} \}$ $\{ \text{Boris} \}$
 $\{ \text{Boris, Cene} \}$ $\{ \text{Andrej} \}$
3. Eden proti drugemu so na bojni nogi:
 $\{ \text{Andrej} \}$ $\{ \text{Boris} \}$ $\{ \text{Cene} \}$

Bolj abstraktno povemo to takole:

Množico s tremi elementi lahko razkosamo na pet načinov na podmnožice, in sicer: na en način na eno podmnožico, na tri načine na dve podmnožici in na en način na tri podmnožice.

Bralec sam bo z lahkoto razkosal na podmnožice množico z enim samim elementom oziroma množico z dvema elementoma.

Število vseh razkosanj množice z n elementi na m podmnožic označimo s simbolom $S(n, m)$, število vseh razkosanj iste množice sploh pa s $T(n)$. Očitno velja zveza:

$$T(n) = S(n, 1) + S(n, 2) + \dots + S(n, n) \quad (1)$$

Vsota se neha pri $S(n, n)$, ker je $S(n, m) = 0$ za $m > n$. Hitro se vidi, da je $S(n, 1) = 1$ in $S(n, n) = 1$.

Primer 2. Iz primera 1 razberemo: $S(1, 1) = 1$, $S(2, 1) = 1$, $S(2, 2) = 1$, $S(3, 1) = 1$, $S(3, 2) = 3$, $S(3, 3) = 1$, $T(1) = 1$, $T(2) = 2$, $T(3) = 5$.

Z računskega stališča bo najvažnejša povezava med števili $S(n, m)$, to je *rekurzivna formula*. Števila $S(n, m)$ se v matematični literaturi imenujejo *Stirlingova števila druge vrste*, števila $T(n)$ pa *Bellova števila*. Obstajajo tudi Stirlingova števila prve vrste, ki pa jih tu ne bomo obravnavali. Dokažimo izrek 1. Stirlingova števila $S(n, m)$ povezuje rekurzivna formula:

$$S(n+1, m) = m S(n, m) + S(n, m-1), \quad m \geq 2 \quad (2)$$

Dokaz. Naj ima množica B n elementov, množica A pa enega več, recimo a_0 . Množico A razkosamo v dveh korakih na m podmnožic. Najprej razkosamo množico B na m podmnožic, kar je mogoče narediti na $S(n, m)$ načinov po shemi

$$\left. \begin{array}{c} \overbrace{\{ \}, \{ \}, \dots, \{ \}}^m \\ \{ \}, \{ \}, \dots, \{ \} \\ \hline \{ \}, \{ \}, \dots, \{ \} \end{array} \right\} S(n, m)$$

Vsaki od teh podmnožic, ki so na shemi označene kar z zavitimi oklepaji, dodamo element a_0 . Na ta način dobimo $m S(n, m)$ razkosanj množice A na m podmnožic. S tem nismo dobili še vseh razkosanj množice A na m podmnožic. Manjkajo še tista, pri katerih je ena od nastopajočih podmnožic $\{a_0\}$. Do teh razkosanj pridemo tako, da razkosamo množico B na $m-1$ podmnožic, kar lahko naredimo na $S(n, m-1)$ načinov po shemi

$$\left. \begin{array}{c} \overbrace{\{ \}, \{ \}, \dots, \{ \}; \{ \}}^{m-1} \\ \{ \}, \{ \}, \dots, \{ \}; \{ \} \\ \hline \{ \}, \{ \}, \dots, \{ \}; \{ \} \end{array} \right\} S(n, m-1)$$

V zavite oklepaje za podpičji vstavimo element a_0 . S tem smo dobili še preostala razkosanja množice A na m podmnožic, torej $S(n+1, m) = m S(n, m) + S(n, m-1)$.

Zaradi rekurzivne formule, ki smo jo pravkar dokazali, lahko števila $S(n, m)$ razvrstimo v trikotnik, ki ga bomo imenovali Stirlingov trikotnik druge vrste. V prvem stolpcu in na hipotenuzi tega trikotnika so same enice, ostala števila pa tvorimo po shemi:

$$S(n, m-1) + S(n, m) \cdot m = S(n+1, m)$$

Začetek tega neskončnega trikotnika, kateremu dodamo še Bellova števila, je takle:

m	1	2	3	4	5	6	7	$T(n)$
n	-----							
1	1							1
2	1	1						2
3	1	3	1					5
4	1	7	6	1				15
5	1	15	25	10	1			52
6	1	31	90	65	15	1		203
7	1	63	301	350	140	21	1	877

Stirlingova števila druge vrste $S(n, m)$ in Bellova števila $T(n)$

V nadaljevanju bomo posegli še po Pascalovem trikotniku, o katerem je bilo v Preseku že precej napisanega. Če ga zapišemo v prejšnjem stilu, dobimo:

m	0	1	2	3	4	5	6
n	-----						
0	1						
1	1	1					
2	1	2	1				
3	1	3	3	1			
4	1	4	6	4	1		
5	1	5	10	10	5	1	
6	1	6	15	20	15	6	1

Pascalov trikotnik

Števila v Pascalovem trikotniku se imenujejo binomski koeficienti, ker se pojavljajo kot koeficienti v razvoju n -te potence binoma. Na križišču n -te vrstice in m -tega stolpca v Pascalovem trikotniku je binomski koeficient, ki ga označujemo s simbolom $\binom{n}{m}$ in bomo "n nad m". Osnovni lastnosti binomskih koeficientov sta lastnosti simetričnosti in Pascalova identiteta:

$$\binom{n}{m} = \binom{n}{n-m}, \quad \binom{n}{m-1} + \binom{n}{m} = \binom{n+1}{m} \quad (3)$$

Morda je bralec že opazil, da na prvi vzporednici hipotenuze v Stirlingovem trikotniku druge vrste ležijo *trikotniška števila*, o katerih je v Preseku tudi že bilo precej napisanega. Dokažimo

trditev 1. Števila na prvi vzporednici hipotenuze v Stirlingovem trikotniku druge vrste so trikotniška števila, dana s formulo

$$S(n, n-1) = \binom{n}{2} \quad (4)$$

za $n = 2, 3, 4, \dots$

Dokaz. Formulo (4) dokažemo preprosto s popolno indukcijo. Za $n = 2$ je $S(2, 1) = 1$ in

$\binom{2}{2} = 1$, torej formula drži. Sedaj je na vrsti indukcijski korak. Privzemimo, da (4) drži za neko naravno število $n > 2$. Po formuli (2) dobimo:

$$S(n+1, n) = n S(n, n) + S(n, n-1) = n + \binom{n}{2} = \binom{n}{1} + \binom{n}{2}$$

Pascalova identiteta nam da končno

$$S(n+1, n) = \binom{n+1}{2}$$

kar je trditev (4) za število $n+1$. Po principu popolne indukcije velja (4) za vsa naravna števila, večja od 2.

Naloga 1. Na podoben način dokažite, da so števila na drugi vzporednici hipotenuze v Stirlingovem trikotniku druge vrste dana s formulo

$$S(n, n-2) = \binom{n}{3} + 3 \binom{n}{4} \quad (5)$$

za $n = 3, 4, 5, \dots$.

Naloga 2. Z nastavkom

$$S(n, n-3) = a \binom{n}{4} + b \binom{n}{5} + c \binom{n}{6}$$

za $n = 4, 5, 6, \dots$ poskusite najte formulo za števila na tretji vzporednici hipotenuze v Stirlingovem trikotniku druge vrste.

Na vprašanje, kako se izražajo števila $S(n, m)$ v zaključeni obliki, odgovorimo brez dokaza:

$$m!S(n, m) = m^n - \binom{m}{1} (m-1)^n + \binom{m}{2} (m-2)^n + \dots + (-1)^{m-1} \binom{m}{m-1} \quad (6)$$

Zanimivo je morda v zvezi s tem še tole: število $m!S(n, m)$ je število vseh surjektivnih funkcij iz množice z n elementi na množico z m elementi.

Bellova števila $T(n)$ se izražajo še bolj komplicirano, z neskončno vrsto in s številom e ($e = 2,71828\dots$):

$$eT(n) = 1^n/1! + 2^n/2! + 3^n/3! + \dots \quad (7)$$

Pač pa lahko iz že znanih števil $T(1), T(2), T(3), \dots, T(n)$ izračunamo naslednje število $T(n+1)$ po formuli:

$$T(n+1) = 1 + \binom{n}{1} T(1) + \binom{n}{2} T(2) + \dots + \binom{n}{n} T(n) \quad (8)$$

Aitken je na podlagi te formule in Pascalove identitete ugotovil, da Bellova števila $T(n)$ lahko izračunamo tudi s pomočjo trikotnika števil:

1				
1	2			
2	3	5		
5	7	10	15	
15	20	27	37	52
52				

V prvem stolpcu je nekaj začetnih znanih števil $T(n)$, katerim čisto na vrhu dodamo število 1. Nadaljnja števila tvorimo zelo preprosto: število v $n + 1$ -vi vrstici in $m + 1$ -vem stolpcu je vsota števil v n -ti in $n + 1$ -vi vrstici m -tega stolpca. Kakor je lepo razvidno, so v prvem stolpcu in na hipotenuzi števila $T(n)$.

Prav za konec pa še tole: množica s tremi elementi se najverjetneje razkosa na dva dela, kar bi v vsakdanjem življenju lahko pojasnili kot "sindrom treh"; če se namreč sporečejo tri osebe, bosta najverjetneje dve držali skupaj proti tretji, kar se lepo vidi iz primera 1.

Marko Razpet

Opomba: Ste opazili sorodnost prebranega sestavka z nagradno nalogo (Marko Petkovšek) v tretji številki Preseka?

ŠESTMESTNO ŠTEVILO — rešitev s strani 196

Naj bosta a in b trimestni števili, ki ju dobimo po rezanju šestmestnega števila na dva dela. Zaenkrat pustimo ob strani, katero od njiju stoji v šestmestnem številu na prvem mestu, katero na drugem. Vendar si oznake izberimo tako, da bo b večje od obeh števil. Potem imamo

$$\begin{aligned} b &= 8a \\ b - a &= y^2 \quad (\text{popoln kvadrat}) \end{aligned}$$

Zaradi $b = 8a$ mora veljati

$$100 \leq a \leq 124 \quad \text{in} \quad 800 \leq b \leq 999$$

Če naj bosta a in b oba trimestni števili. Ker je $y^2 = 7a$, dobimo od tod oceno za y^2

$$700 \leq y^2 \leq 868$$

in za y

$$27 \leq y \leq 29$$

Razen tega mora biti y deljiv s 7 (zaradi $y^2 = 7a$), torej je edina možnost $y = 28$. To nam da $a = 112$ in $b = 896$. Za šestmestno število sta torej dve možnosti

a) 112896, ki je kvadrat števila 336

b) 896112, ki ne more biti kvadrat, ker se končuje z 2.

Nalogo torej reši le število 112896.

GEOMETRIJSKA NEENAKOST NA DVA NAČINA

Več različnih rešitev enega matematičnega problema je lahko mnogo koristnejše in bolj ustvarjalno opravilo kot pa reševanje večjega števila rutinskih nalog. Ta prispevek je bil napisan z namenom, da opraviči in potrdi to avtorjevo mnenje.

Gre za dokaz naslednje neenakosti za pravokotni trikotnik:

$$\frac{a+b+c}{2h_c} \geq 1 + \sqrt{2} \quad (1)$$

kjer sta a, b kateti, c hipotenuza in h_c višina na c .

Dokaz 1

Z upoštevanjem zvez

$$c^2 = a^2 + b^2 \quad \text{in} \quad h_c = \frac{ab}{c}$$

ter z uporabo znane neenačbe med aritmetičnim in geometrijskim povprečjem

$$\frac{x+y}{2} \geq \sqrt{xy} \quad (x, y > 0) \quad (*)$$

dobimo

$$\begin{aligned} \frac{a+b+c}{2h_c} &= \frac{c(a+b+c)}{2ab} = \frac{c(a+b)}{2ab} + \frac{c^2}{2ab} = \\ &= \frac{(a+b)\sqrt{a^2+b^2}}{2ab} + \frac{a^2+b^2}{2ab} \geq \frac{2\sqrt{ab} \cdot \sqrt{2ab}}{2ab} + \frac{2ab}{2ab} = \sqrt{2} + 1 \end{aligned}$$

To smo tudi želeli dokazati.

Ker velja v (*) znak enakosti samo, če je $x = y$, velja v (1) znak enakosti samo, če je $a = b$, torej, če je pravokotni trikotnik tudi enakokrak.

Dokaz 2

Naj označuje R polmer trikotniku očrtanega kroga. Ker je $c = 2R$ in $R \geq h_c$, je $c \geq 2h_c$ oziroma

$$\frac{c}{h_c} \geq 2 \quad (2)$$

Iz (2) sledi

$$\frac{c}{h_c} \left(\frac{c}{h_c} + 2 \right) \geq 8 \quad \text{oziroma} \quad c^2 + 2ch_c \geq 8h_c^2$$

Z upoštevanjem zveze $h_c = \frac{ab}{c}$ in Pitagorovega izreka lahko zadnjo neenakost preoblikujemo v neenakost $a^2 + b^2 + 2ab \geq 8h_c^2$ oziroma $(a+b)^2 \geq 8h_c^2$. Ko korenimo in delimo s h_c , dobimo

$$\frac{a+b}{h_c} \geq 2\sqrt{2} \quad (3)$$

Ko seštejemo neenačbi (2) in (3), dobimo

$$\frac{a+b+c}{h_c} \geq 2+2\sqrt{2} \quad \text{t.j.} \quad \frac{a+b+c}{2h_c} \geq 1+\sqrt{2}$$

kar je bilo treba dokazati.

Prirejeno po besedilu Šefketa Arslanagića

Joachim Ekrutt, ZVEZDE, Ljubljana, Cankarjeva založba, 1987 — Zbirka "Sprehodi v naravo", str. 80, cena 2800.— din.

Prikupno brošurico ZVEZDE je iz nemščine prevedla in priredila Pavla Ranzinger. V tej drobni — žepni knjižici na kratko zveš nekaj o Sončevem sistemu, zvezdah in galaksijah. V njej najdeš zvezdne karte in navodila za njihovo uporabo in še pregled nebesnih pojavov v letih 1987 do 1989. Knjižici so dodane preglednice planetov in najsvetlejših zvezd. Krasijo pa jo še barvni posnetki nekaj značilnih vesoljskih objektov.

Knjižica ZVEZDE kljub majhnemu obsegu posreduje zares mnogo informacij iz astronomije. Kar z veseljem jo primeš v roke in prebiraš. Poseben čar ji daje lep strokovni prevod in neoporečna astronomska misel.

Marijan Prosen



LAVRIČ Boris, Rešene naloge iz matematike z republiških tekmovanj, 3. del, 1976 – 1987, Društvo matematikov, fizikov in astronomov SR Slovenije, Ljubljana 1987, 477 (Knjižnica Sigma ; 43)

Vladimir Batagelj in Tomaž Pisanski sta pred mnogimi leti v dveh knjižicah s tovrstno vsebino zajela tekmovanja iz matematike za srednješolce od začetkov do leta 1975. Pričujoče delce pa vendar nima vrednosti le za zgodovino. Goto-vo ga bodo zelo veseli mladi matematiki v šolskih klopeh, saj prinaša obilo zanimivih nalog, ki večinoma niso niti lahke niti povsem šolske. Ob njih bodo lahko preizkusili svoje znanje in matematično bistrornost, najbolj zagrizeni pa bodo po zaslugi avtorja v svoje malhe trikov pospravili še kakšnega. Čeprav zahteva več znanja in truda, je vsaka samostojno pridelana rešitev vredna več kot prebrana. Mladim bralcem zato priporočamo, da uporabljajo predvsem prvi del knjižice. Rešitve so namreč napisane tako jasno in tekoče, da se bodo komu zdele kar preveč preproste. Še več, kdor ne bo poskusil sam, morda niti ne bo opazil, kje so skrite težave, pa tudi za radost ob lastni rešitvi bo prikrajšan. Drugi del naj zato služi kot rešilni pas in pouk, kako je mogoče lepo oblikovati in zapisati rešitve. To pa je že tretja vloga te knjižice.

Gorazd Lešnjak

ZNAČKE ZA TEKMOVALCE

Pri Komisiji za tisk DMFA SRS je na zalogi še dovolj značk, namenjenih udeležencem šolskih, pokrajinskih in republiških tekmovanj iz matematike, fizike, astronomije, računalništva in logike. Vsaki vrsti in stopnji tekmovanja so namenjene značke različnih barv in z različnimi simboli. Med njimi je največ portretov slavnih slovenskih matematikov in fizikov: J. Plemelj, F. Hočevar, F. Močnik, J. Vega, J. Stefan, N. Klemenčič in L. Čermelj. Poleg teh pa so še število π , model atoma in seveda Presekov znak. Organizatorjem tekmovanj priporočamo, da vsakiemu udeležencu namenijo značko, kot vzpodbudo pri udeležbi. Cena značke je 600.— din, pri skupinskem naročilu pa jih lahko dobite po 400.— din.

Ciril Velkovrh

ZBIRKA NALOG IZ MATEMATIKE ZA SREDNJE ŠOLE

Z novimi učnimi načrti in učbeniki za matematiko v srednjem izobraževanju se je pokazala potreba po novi zbirki nalog. Zbirka, ki jo izdaja Državna založba Slovenije, je zasnovana tematsko, to je po poglavjih učnega načrta, v desetih snopičih. Za naravoslovno—matematično usmeritev značilna vsebina bo zbrana v posebnem snopiču. Doslej je izšlo pet snopičev, za katere navajamo letnik, v katerem se najbolj pogosto uporabljajo, in kratko vsebino.

1. letnik

A. Blaznik, J. Dolenshek, A. Tomec, I. Žerovnik, REALNA ŠTEVILA. LINEARNA FUNKCIJA. Uvod; Kartezijski produkt. Relacije. Preslikave; Naravna števila. Cela števila; Racionalna števila; Linearna funkcija, enačba in neenačba

2. letnik

D. Grešak, M. Kožar, A. Tiegl, ELEMENTARNE FUNKCIJE. KOMPLEKSNA ŠTEVILA. Potence s celimi eksponenti; Koreni. Potence z racionalnimi eksponenti; Potenčna funkcija; Kvadratna funkcija; Kvadratna enačba; Kvadratna neenačba; Eksponentna funkcija; Logaritem; Kompleksna števila

3. letnik

O. Arnuš, V. Batagelj, A. Blaznik, B. Roblek, M. Strnad, POLINOMI. RACIONALNE FUNKCIJE. KRIVULJE DRUGEGA REDA. Polinomi; Racionalne funkcije, enačbe in neenačbe; Krivulje drugega reda

4. letnik

I. Hafner, LOGIKA. Izjave; Enakovredne izjave; Sklepanje; Zgradba izjav in predikati; Še o sklepanju; Odlomki iz zgodovine matematične logike; Nekaj logičnih nalog

F. Avsec, A. Cokan, I. Pucelj, KOMBINATORIKA. VERJETNOSTNI RAČUN IN STATISTIKA. Kombinatorika : Množice in preslikave; Osnovni kombinatorični prijem; Permutacije in variacije; Kombinacije; Binomski izrek; Načelo vključitev in izključitev. Verjetnostni račun in statistika: Osnovni statistični pojmi; Grupiranje, urejanje, prikazovanje podatkov; Srednje vrednosti in mere variabilnosti; Osnove verjetnostnega računa; Slučajne spremenljivke; Normalna porazdelitev; Zakon velikih števil

V zbirki pripravljamo še naslednje snopiče:

- GEOMETRIJA. VEKTORJI (1. letnik)
- MERJENJE V GEOMETRIJI (2. letnik)
- KOTNE FUNKCIJE. TRIGONOMETRIJA (3. letnik)
- DIFERENCIALNI IN INTEGRALNI RAČUN (4. letnik)
- POGlavJA ZA NARAVOSLOVNO—MATEMATIČNO USMERITEV

RESITIVNA LOG

PRIJATELJI — rešitev s str. 254

Označimo z O očeta, z B starejše brate in s P prijatelje, ki imajo začetnice imen A, B, M in T .

Ker Tomažev oče ni Tomaž in Matjažev brat ne Matjaž, je možno dvoje:

a) oba sta Andraža

b) oba sta Blaža.

a) Najprej ugotovimo, da je Andraž tisti, ki ima starejšega brata Matjaža, pa zapišemo razpredelnico:

$O:$			A
$B:$	M		A
$P:$	A	B	M T

Odtod sklepamo, da je Blažev starejši brat Tomaž, Tomažev pa Blaž. Zato bi dobili:

$O:$		A	A
$B:$	M	T	A B
$P:$	A	B	M T

kar pa ni mogoče, saj bi imela dva očeta enako ime.

b) Tokrat je Matjaž Blažev starejši brat:

$O:$			B
$B:$		M	B
$P:$	A	B	M T

Zato je Andražev starejši brat Tomaž in Tomažev Andraž. Tako pridemo do:

$O:$		A	B
$B:$	T	M	B A
$P:$	A	B	M T

in odtod takoj do:

$O:$	M	A	T	B
$B:$	T	M	B	A
$P:$	A	B	M	T

Matjaž ima torej očeta Tomaža. (Seveda smo pri vsem upoštevali, da imata brata v isti družini različni imeni.)

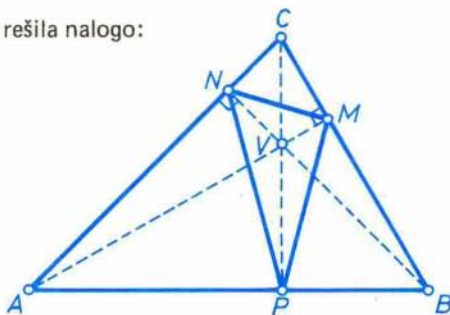
Darjo Felda

VIŠINSKI TRIKOTNIK – rešitev iz 6. številke XIV letnika

Tokrat smo dobili le sedem rešitev, najbrž je bilo preveč računanja, pa še konec šolskega leta. Stranice in kote so izračunali Silvana BUCIK iz Tolmina, Aleš ČASAR iz Murske Sobote, Sašo GANTAR iz Vrhnike, Milan KAMBIČ z Jesenic, Andrej KUKOVIČIČ iz Brestanice, Roman MODIC iz Ljubljane in Mojca STANTIČ iz Komna.

Izžrebali smo Aleša, Andrejo in Silvana in jim poslali TEORIMO IGER Rajka Jamnika.

Teta Amalija je takole rešila nalogo:



Podobna sta si trikotnika ANV in AMC , saj imata skupen ostri kot 15° in oba sta pravokotna. Zato velja

$$\frac{AN}{AV} = \frac{AM}{AC}$$

Iz podobnosti trikotnikov APV in AMB pa sledi $\frac{AP}{AV} = \frac{AM}{AB}$. Z upoštevanjem obeh enakosti dobimo $\frac{AN}{AP} = \frac{AB}{AC}$, to pa pove, da sta si trikotnika ANP in ABC podobna, saj imata razen zgornjega razmerja še skupen kot pri A . Torej sta kota APN in BPM oba enaka $\gamma = 75^\circ$ in za kot MPN ostane ravno 30° . Podobno ugotovimo, da je $\sphericalangle FNM = 60^\circ$ in $\sphericalangle PMN = 90^\circ$.

Zdaj moramo le še ugotoviti stranice trikotnika MNP . V prvotnem trikotniku ABC poznamo $BC = 6$ cm in ker je CP kot višina enakostraničnega trikotnika enaka $3\sqrt{3}$ cm, meri toliko tudi AP , saj je trikotnik APC enakokrak. Podobnost pove $\frac{NP}{AP} = \frac{BC}{AC}$, AC je hipotenuza in zato enaka $3\sqrt{6}$. Izračunamo $NP = 3\sqrt{2}$ in ker je trikotnik MNP polovica enakostraničnega, takoj sledi $MN = \frac{3}{2}\sqrt{2}$, $MP = \frac{3}{2}\sqrt{6}$.

Peter Petek

SMRKETA NA JEZERU – rešitev iz P–XV/1

Tokrat ste nam poslali 15 odgovorov, od teh žal dva pomanjkljiva. Dobre nasvete Smrketi so prispevali Klemen BAJEC s Črnega vrha, Peter BORŠTNAR iz Medvod, Silvan BUCIK iz Tolmina, Anton DROVENIK iz Podplata, Urša FEGUŠ iz Ljubljane, Marko GOMBAČ iz Postojne, Saša JEZERNIK iz Maribora, Andrej KLASINC s Ptuja, Robert KODRIČ iz Podbočja, Peter MOVRIN iz Ljubljane, Sandi ROZMAN iz Postojne, Branko ŠČAVNIČAR iz Ljutomera in Andrej ZALAR iz Šentjurja pri Celju.

Izžrebali smo Borštinarja, Drovenika in Kodriča ter vsakemu poslali knjigo R. Smullyana, *Poznate naslov te knjige*, ki je pravkar izšla pri Državni založbi.

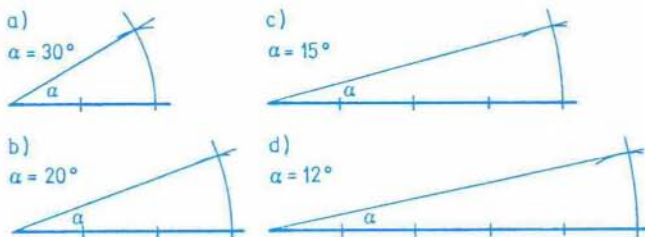
Objavljamo rešitev Saša JEZERNIKA.

Smrketina hitrost je 3,5–krat manjša od Gargamelove. Smrketa zavesla na krožnico 25 m od središča. Njena pot po krogu je 4–krat manjša od Gargamelove, torej se lahko čez nekaj časa postavi tako, da bo središče kroga med njo in Gargamelom. Takrat pa zavesla proti obali. Gargamel mora opraviti pot 100 m, Smrketa pa 75 m. Ker je $314 : 75 = 4,18$ je Smrketina pot 4,18–krat krajša in bo izstopila, preden jo bo Gargamel dohitel.

PISMA BRALCEV (Blaž Jezernik)

Hodim v šesti razred. Izmisli sem si način, kako narisati kot 30° , 20° , 15° , 12° , 10° , 6° , 5° itd. Če je lok enak polmeru, razdelimo kot 360° na šest enakih kotov. Če vzamemo isti lok, pa dvakrat večji polmer, razdelimo kot 360° na 12 enakih delov .. Poglejte način, napišite oceno!

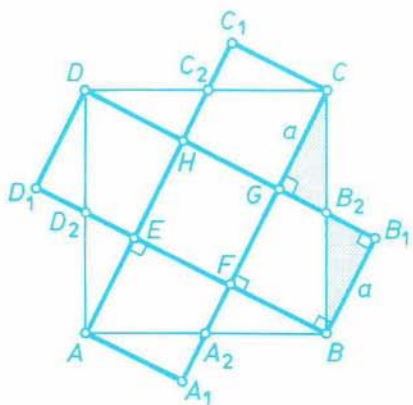
P.S. Kako to, da vsak kot, narisani s tem načinom, naredi razliko 1° ? Je tega kriv moj kotomer na geotrikotniku?



Nič ni narobe s tvojim geotrikotnikom, v resnici si dobil po svojem načinu kote $28,96^{\circ}$, $19,19^{\circ}$, $14,36^{\circ}$, $11,48^{\circ}$, $9,56^{\circ}$ namesto 30° , 20° , 15° , 12° , 10° kar je res približno eno stopinjo premalo. Zakaj? Točne vrednosti narisanih kotov se da izračunati s kalkulatorjem s kotnimi funkcijami, zakaj pa dobiš premalo, ti lahko pojasni slika. Kot AOB naj bi bil enak 30° , vendar če ga podvojimo, dobimo kot AOC ta pa je manjši od kota 60° , saj je tetiva AC manjša od polmera kroga, ker je manjša od $AB + BC$.

OD ENE NALOGE K DRUGI

rešitev s str. 213



Iz danega kvadrata dobimo zahtevani "križ" takole: Razpolovimo stranico prvotnega kvadrata. Dobimo točke A_2, B_2, C_2, D_2 . Načrtamo poltrake AC_2, BD_2, CA_2 in DB_2 in nato pravokotnice: Iz A na poltrak A_2C , iz B na poltrak B_2D itd. Dobimo točke A_1, B_1, C_1 in D_1 . Očitno sta trikotnika BB_1B_2 in CGB_2 skladna, kar lahko tudi hitro dokažemo. Izrežemo trikotnik CGB_2 in druge na enak način dobljene trikotnike, dodamo jih k trapezu BB_2GF in drugim. Dobimo križ — naloga je rešena.

Miha Štalec

PRESEK — list za mlade matematike, fizike, astronome in računalnikarje 15. letnik, šolsko letao 1987/88, številka 4, strani 193 — 256

UREDNIŠKI ODBOR: Vladimir Batagelj, Dušica Boben (pisma bralcev, stavljenje teksta), Darjo Felda (tekmovanja iz matematike), Franci Forstnerič, Bojan Golli (tekmovanja iz fizike), Marjan Hribar (fizika), Damjan Kobal (razvedrilo), Jože Kotnik, Edvard Kramar, Sandi Klavžar (računalništvo), Andrej Kmet, Boris Lavrič (matematika, odgovorni urednik), Gorazd Lešnjak, Matija Lokar, Franci Oblak, Peter Petek (premisli in reši), Pavla Ranzinger (astronomija), Tomaž Skulj, Marjan Smerke (svetovalec za fotografijo), Niko Prijatelj (glavni urednik), Ivanka Šircelj (jezikovni pregled), Miha Štalec (risbe), Ciril Velkovich (urednik, nove knjige, novice).

Dopise pošiljajte in list naročajte na naslov: Društvo matematikov, fizikov in astronomov SRS — Podružnica Ljubljana — Komisija za tisk, Presek, Jadranska c. 19, 61111 Ljubljana, p.p. 64, tel. (061) 265-061/53, št. žiro računa 50101-678-47233. Naročnina za šolsko leto 1987/88 je za posamezna naročila 2700.— din, za skupinska naročila pa 1800.—, posamezna številka 500.— din/300.— din.

List sofinancirajo Izobraževalna, Kulturna in Raziskovalna skupnost Slovenije

Ofset tisk Časopisno in grafično podjetje DELO, Ljubljana

© 1988 Društvo matematikov, fizikov in astronomov SRS — 902

ISSN 0351-6652

