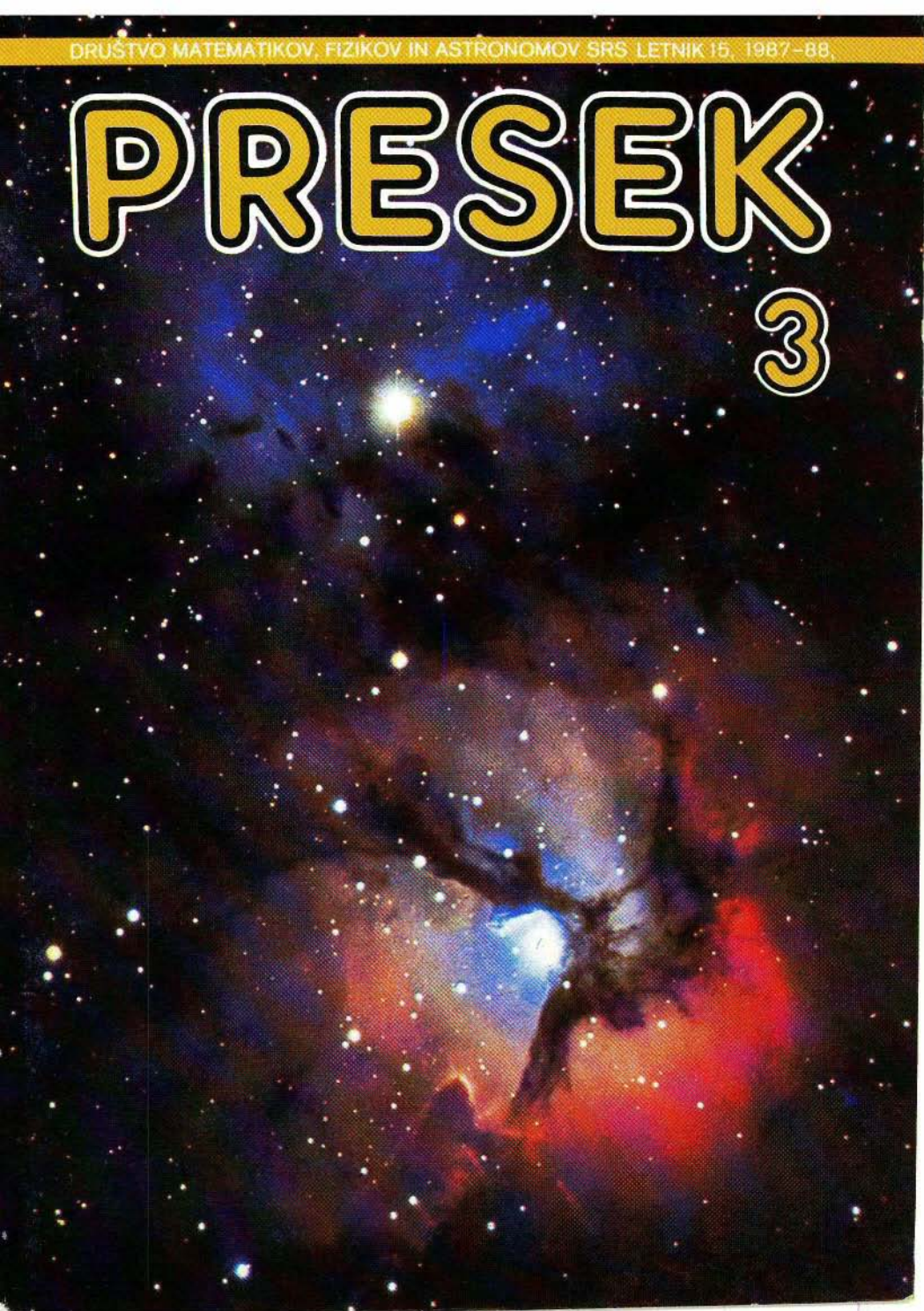
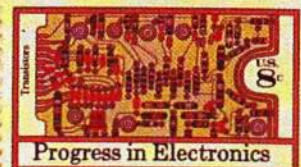
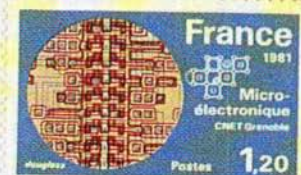
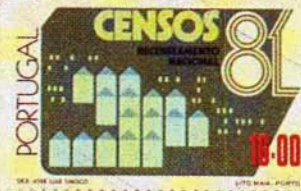
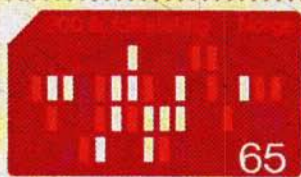
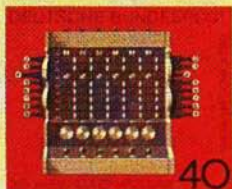


DRUŠTVO MATEMATIKOV, FIZIKOV IN ASTRONOMOV SRS LETNIK 15, 1987-88.

# PRESEK

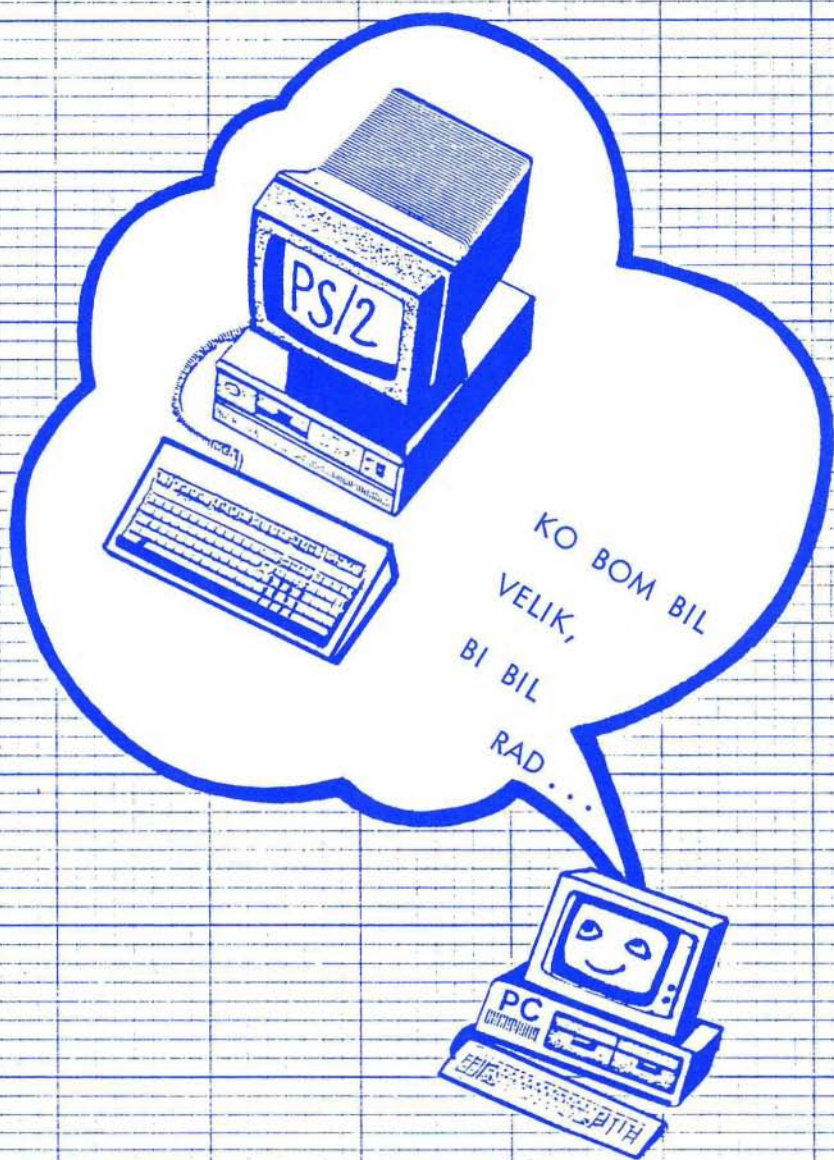
3





# **VSEBINA**

|                      |                                                                                                                                                                                                                                                                                            |                                    |
|----------------------|--------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------|------------------------------------|
| <b>MATEMATIKA</b>    | O simetralah notranjega kota trikotnika<br>(D.M.Milošević, prev. in pripr. Franc Forstnerič) . . .                                                                                                                                                                                         | 133                                |
| <b>RAZVEDRILO</b>    | Premisli in reši (Peter Petek, Marija Vencelj) . . . . .<br>Številska križanka "Potence in poštevanke"<br>(Franci Oblak) . . . . .                                                                                                                                                         | 134<br>174                         |
| <b>ASTRONOMIJA</b>   | Meglice na nočnem nebu (Tomaž Zwitter) . . . . .                                                                                                                                                                                                                                           | I, 136                             |
| <b>NOVE KNJIGE</b>   | M.Prosen, Opazujmo Sonce in Luno<br>(Bogdan Kiler) . . . . .                                                                                                                                                                                                                               | 139                                |
| <b>FIZIKA</b>        | Teža v jašku. Ali morda gravitacijska konstanta<br>pojema s časom? Ali Newtonov gravitacijski<br>zakon natančno velja? Ali je Osončje stabilno?<br>(Janez Strnad) . . . . .                                                                                                                | 140                                |
| <b>NOVICE</b>        | Temperatura telesa ob dotiku (Janez Strnad) . . . . .<br>Pisma bralcev (Dušica Boben) . . . . .<br>Ob stoletnici Erwina Schrödingerja (Janez Strnad) . . . . .<br>Računalništvo nekoliko drugače<br>(Veselko Guštin) . . . . .                                                             | 146<br>153<br>154<br>II, III, 158  |
| <b>RAČUNALNIŠTVO</b> | Juliajeva množica, 2. del (Emil Beloglavec,<br>Mitja Lakner, Andrej Vitek) . . . . .<br>Tri naloge za generator slučajnih števil<br>(Janez Žirovnik) . . . . .                                                                                                                             | IV, 161<br>188                     |
| <b>NALOGE</b>        | Nekaj nalog iz matematike za učence od 5. do<br>8. razreda — rešitev str. 182 (Pavle Zajc) . . . . .<br>Nagradna naloga (Marko Petkovšek) . . . . .<br>Pleskarska (Darjo Felda) . . . . .<br>Za slovo od leta — rešitev str. 171. Praznik<br>(Boris Lavrič) . . . . .                      | 169<br>172<br>177<br>143, 160, 181 |
| <b>REŠITEV NALOG</b> | Slikovna križanka — rešitev iz P-2<br>(Marko Bokalič) . . . . .<br>3. šolsko tekmovanje iz matematike — rešitve iz P-2<br>(Darjo Felda) . . . . .<br>13. izbirno tekmovanje iz matematike — rešitev iz P-2<br>(Darjo Felda) . . . . .<br>Na pragu tragedije — rešitev iz P/XIV-2 . . . . . | 133<br>176<br>178<br>186           |
| <b>NA OVITKU</b>     | Trojna meglica (M 20) v ozvezdju Strelca je od nas<br>oddaljena 3200 svetlobnih let . . . . .                                                                                                                                                                                              | I                                  |



**INTERTRADE**

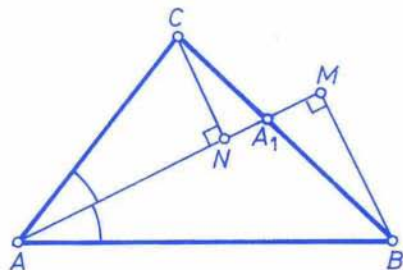
TOZD ZASTOPSTVO IBM 61000 LJUBLJANA, MOŠA PIJADEJEVA 29  
TELEFON 061 322-844, TELEX: 31181 YU IBM INT

## O SIMETRALAH NOTRANJEGA KOTA TRIKOTNIKA

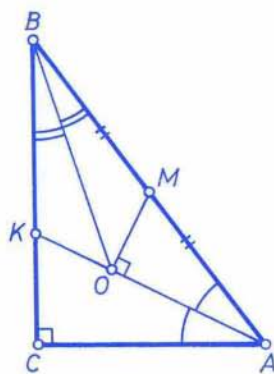
V članku bomo spoznali neko lastnost simetrale notranjega kota trikotnika in pokazali dva primera uporabe.

**IZREK.** V vsakem trikotniku razdeli simetrala notranjega kota trikotnika nasprotno stranico v razmerju ostalih dveh stranic.

**Dokaz.** Oglišča trikotnika označimo z  $A, B, C$ . Simetrala kota pri  $A$  naj seče nasprotno stranico v točki  $A_1$  (slika 1). Iz oglišč  $B$  in  $C$  načrtamo pravokotnici na premico  $AA_1$  in označimo presečišči z  $M$  oziroma  $N$ .



Slika 1



Slika 2

Ker sta pravokotna trikotnika  $ABM$  in  $ACN$  podobna, je

$$AB : AC = BM : CN \quad (1)$$

Tudi trikotnika  $BMA_1$  in  $CNA_1$  sta podobna, zato je

$$BM : CN = BA_1 : CA_1 \quad (2)$$

Iz enakosti (1) in (2) takoj sledi

$$AB : AC = BA_1 : CA_1$$

kar je bilo treba dokazati.

Ogledimo si sedaj dva primera uporabe dokazanega izreka.

**Primer 1.** V trikotniku  $ABC$  deli simetrala kota pri  $A$  nasprotno stranico  $BC$  na daljici dolžine 9 cm (pri  $B$ ) in 6 cm (pri  $C$ ). Določi dolžine stranic tega trikotnika, če veš, da je obseg 45 cm.

*Rešitev.* Po izreku je  $AB : AC = 9 : 6 = 3 : 2$ , torej  $AB = \frac{3}{2} AC$ . Ker je  $BC = 6 + 9 = 15$  in je obseg 45, velja

$$AB + AC = 30, \quad \frac{3}{2} AC + AC = 30$$

Odtod takoj sledi  $AC = \frac{2}{5} 30 = 12$  in  $AB = \frac{3}{2} 12 = 18$ . Stranice trikotnika so torej  $AB = 18$  cm,  $AC = 15$  cm in  $BC = 12$  cm.

**Primer 2.** V pravokotnem trikotniku s pravim kotom pri  $C$  označimo z  $O$  središče trikotniku včrtanega kroga in z  $M$  središče hipotenuze  $AB$ . Izračunaj razmerje katet  $AC : BC$ , če veš, da je trikotnik  $AOM$  pravokoten s pravim kotom v oglišču  $O$ .

*Rešitev.* Premica  $AO$  je simetrala kota pri  $A$ . Označimo njeno presečišče s kateto  $BC$  s  $K$  (slika 2).

Najprej bomo dokazali, da sta trikotnika  $BOK$  in  $BOM$  skladna. Dovolj je pokazati, da sta kota  $\sphericalangle KOB$  in  $\sphericalangle MOB$  enaka. Ker je njuna vsota  $90^\circ$ , zadošča videti, da je kot  $\sphericalangle BOM$  enak  $45^\circ$ . V trikotniku  $BOM$  upoštevamo, da je vsota notranjih kotov  $\sphericalangle OBM + \sphericalangle BOM$  enaka zunanjemu kotu  $\sphericalangle OMA$ , ta pa je enak  $90^\circ - \sphericalangle OAM$ . Ker je  $\sphericalangle OAM = (1/2) \sphericalangle A$  in  $\sphericalangle OBM = (1/2) \sphericalangle B$ , dobimo

$$\sphericalangle BOM = 90^\circ - (1/2) \sphericalangle A - (1/2) \sphericalangle B = 45^\circ$$

S tem je skladnost trikotnikov  $BOK$  in  $BOM$  dokazana. Zato je  $KB = BM = c/2$ , kjer je  $c$  dolžina hipotenuze.

Označimo z  $a$  in  $b$  kateti nasproti  $A$  oziroma  $B$ . Po dokazanem izreku je  $CK : KB = AC : AB = b : c$ , torej

$$(a - (c/2)) : (c/2) = b : c,$$

$$2a - c = b$$

Odtod izrazimo  $c = 2a - b$  in kvadriramo:

$$c^2 = 4a^2 - 4ab + b^2$$

Upoštevamo še Pitagorov izrek  $c^2 = a^2 + b^2$ . Če izenačimo oba izraza za  $c^2$ , ju uredimo in okrajšamo, dobimo razmerje  $a : b = 4 : 3$ . S tem je naloga rešena.

## Naloge

1. V trikotniku  $ABC$  so podane stranice  $AB = 6$ ,  $AC = 8$  in  $BC = 5$ . Simetrala kota pri  $A$  seka nasprotno stranico v točki  $A_1$ , simetrala kota pri  $C$  pa seka nasprotno stranico v  $C_1$ . Poišči razmerje ploščin trikotnikov  $ABC$  in  $AA_1C_1$ .
2. Dokaži, da v vsakem trikotniku leži simetrala kota pri nekem oglišču v ostrom kotu med višino in težiščnico v istem oglišču.
3. Konstruiraj trikotnik  $ABC$ , v katerem se simetrala kota pri  $A$ , težiščnica iz oglišča  $B$  in višina iz oglišča  $C$  sekajo v isti točki, poleg tega pa je znana vsota  $AB + BC$  in kot pri oglišču  $A$ .

Dragoljub M. Milošević  
prevedel in priredil Franc Forstnerič

## SLIKOVNA KRIŽANKA – Rešitev iz P–2

|                                                                                   |                                         |                     |                   |                             |                                |                      |                                     |                             |                        |                      |                      |                              |                              |                               |                                |                      |                      |                      |                      |                      |                      |   |
|-----------------------------------------------------------------------------------|-----------------------------------------|---------------------|-------------------|-----------------------------|--------------------------------|----------------------|-------------------------------------|-----------------------------|------------------------|----------------------|----------------------|------------------------------|------------------------------|-------------------------------|--------------------------------|----------------------|----------------------|----------------------|----------------------|----------------------|----------------------|---|
|  | ANČ POKL<br>V ZD<br>ODPRAVIL<br>ODPOVED | AVRITA<br>BRANKILER | ODKARNA<br>ODSEDA | NOSEDO<br>DELAVNIK<br>NAVSE | NOSEDO<br>POSTRELI<br>ODPRAVIL | NEON                 | STOKA<br>JONKA<br>JEDNAKOV<br>VODNI | NAJ<br>ODPRAVIL<br>ODPRAVIL | STOKA<br>REK<br>NAKREJ | JOSE<br>PRAKSE       | STANDARNO<br>PRAKSE  | LOKA<br>ODPRAVIL<br>ODPRAVIL | LOKA<br>ODPRAVIL<br>ODPRAVIL | JAVNO<br>ODPRAVIL<br>ODPRAVIL | STOLAR<br>ODPRAVIL<br>ODPRAVIL | ODPRAVIL<br>ODPRAVIL | ODPRAVIL<br>ODPRAVIL | ODPRAVIL<br>ODPRAVIL | ODPRAVIL<br>ODPRAVIL | ODPRAVIL<br>ODPRAVIL |                      |   |
| VEDA D<br>PREDELO<br>TELJEN                                                       | A                                       | S                   | T                 | R                           | O                              | N                    | O                                   | M                           | I                      | J                    | A                    | ODPRAVIL<br>ODPRAVIL         | LOKA<br>ODPRAVIL<br>ODPRAVIL | LOKA<br>ODPRAVIL<br>ODPRAVIL  | LOKA<br>ODPRAVIL<br>ODPRAVIL   | A                    | P                    | O                    | G                    | E                    | J                    |   |
| ODPRAVIL<br>ODPRAVIL                                                              | S                                       | P                   | R                 | E                           | M                              | E                    | N                                   | L                           | J                      | I                    | V                    | K                            | A                            | ODPRAVIL<br>ODPRAVIL          | LOKA<br>ODPRAVIL<br>ODPRAVIL   | N                    | E                    | G                    | A                    | T                    | I                    | V |
| ODPRAVIL<br>ODPRAVIL                                                              | T                                       | I                   | G                 | E                           | R                              | O                    | J                                   | E                           | L                      | O                    | G                    | I                            | K                            | A                             | ODPRAVIL<br>ODPRAVIL           | M                    | A                    | M                    | A                    | A                    | A                    | A |
| ODPRAVIL<br>ODPRAVIL                                                              | O                                       | R                   | A                 | E                           | A                              | E                    | K                                   | V                           | I                      | V                    | A                    | L                            | E                            | N                             | C                              | A                    | E                    | H                    | E                    | H                    | E                    | H |
| ODPRAVIL<br>ODPRAVIL                                                              | N                                       | A                   | T                 | O                           | P                              | E                    | T                                   | A                           | R                      | D                    | A                    | E                            | T                            | O                             | S                              | I                    | N                    | N                    | I                    | N                    | N                    | I |
| ODPRAVIL<br>ODPRAVIL                                                              | L                                       | E                   | P                 | T                           | O                              | N                    | V                                   | L                           | A                      | Č                    | U                    | G                            | A                            | ODPRAVIL<br>ODPRAVIL          | O                              | R                    | F                    | E                    | J                    | E                    | J                    | E |
| ODPRAVIL<br>ODPRAVIL                                                              | A                                       | V                   | T                 | O                           | A                              | V                    | Š                                   | A                           | ODPRAVIL<br>ODPRAVIL   | P                    | A                    | ODPRAVIL<br>ODPRAVIL         | ODPRAVIL<br>ODPRAVIL         | ODPRAVIL<br>ODPRAVIL          | ODPRAVIL<br>ODPRAVIL           | M                    | O                    | N                    | Z                    | A                    | A                    | A |
| ODPRAVIL<br>ODPRAVIL                                                              | I                                       | V                   | A                 | Č                           | I                              | Č                    | ODPRAVIL<br>ODPRAVIL                | ODPRAVIL<br>ODPRAVIL        | ODPRAVIL<br>ODPRAVIL   | ODPRAVIL<br>ODPRAVIL | ODPRAVIL<br>ODPRAVIL | ODPRAVIL<br>ODPRAVIL         | ODPRAVIL<br>ODPRAVIL         | ODPRAVIL<br>ODPRAVIL          | ODPRAVIL<br>ODPRAVIL           | ODPRAVIL<br>ODPRAVIL | ODPRAVIL<br>ODPRAVIL | ODPRAVIL<br>ODPRAVIL | ODPRAVIL<br>ODPRAVIL | ODPRAVIL<br>ODPRAVIL | ODPRAVIL<br>ODPRAVIL |   |
| ODPRAVIL<br>ODPRAVIL                                                              | M                                       | A                   | Š                 | K                           | A                              | R                    | A                                   | ODPRAVIL<br>ODPRAVIL        | ODPRAVIL<br>ODPRAVIL   | ODPRAVIL<br>ODPRAVIL | ODPRAVIL<br>ODPRAVIL | ODPRAVIL<br>ODPRAVIL         | ODPRAVIL<br>ODPRAVIL         | ODPRAVIL<br>ODPRAVIL          | ODPRAVIL<br>ODPRAVIL           | ODPRAVIL<br>ODPRAVIL | ODPRAVIL<br>ODPRAVIL | ODPRAVIL<br>ODPRAVIL | ODPRAVIL<br>ODPRAVIL | ODPRAVIL<br>ODPRAVIL | ODPRAVIL<br>ODPRAVIL |   |
| ODPRAVIL<br>ODPRAVIL                                                              | A                                       | K                   | V                 | A                           | R                              | I                    | J                                   | ODPRAVIL<br>ODPRAVIL        | ODPRAVIL<br>ODPRAVIL   | ODPRAVIL<br>ODPRAVIL | ODPRAVIL<br>ODPRAVIL | ODPRAVIL<br>ODPRAVIL         | ODPRAVIL<br>ODPRAVIL         | ODPRAVIL<br>ODPRAVIL          | ODPRAVIL<br>ODPRAVIL           | ODPRAVIL<br>ODPRAVIL | ODPRAVIL<br>ODPRAVIL | ODPRAVIL<br>ODPRAVIL | ODPRAVIL<br>ODPRAVIL | ODPRAVIL<br>ODPRAVIL | ODPRAVIL<br>ODPRAVIL |   |
| ODPRAVIL<br>ODPRAVIL                                                              | I                                       | R                   | A                 | N                           | A                              | ODPRAVIL<br>ODPRAVIL | ODPRAVIL<br>ODPRAVIL                | ODPRAVIL<br>ODPRAVIL        | ODPRAVIL<br>ODPRAVIL   | ODPRAVIL<br>ODPRAVIL | ODPRAVIL<br>ODPRAVIL | ODPRAVIL<br>ODPRAVIL         | ODPRAVIL<br>ODPRAVIL         | ODPRAVIL<br>ODPRAVIL          | ODPRAVIL<br>ODPRAVIL           | ODPRAVIL<br>ODPRAVIL | ODPRAVIL<br>ODPRAVIL | ODPRAVIL<br>ODPRAVIL | ODPRAVIL<br>ODPRAVIL | ODPRAVIL<br>ODPRAVIL | ODPRAVIL<br>ODPRAVIL |   |
| ODPRAVIL<br>ODPRAVIL                                                              | N                                       | O                   | R                 | M                           | A                              | N                    | I                                   | Ag J<br>ODPRAVIL            | ODPRAVIL<br>ODPRAVIL   | ODPRAVIL<br>ODPRAVIL | ODPRAVIL<br>ODPRAVIL | ODPRAVIL<br>ODPRAVIL         | ODPRAVIL<br>ODPRAVIL         | ODPRAVIL<br>ODPRAVIL          | ODPRAVIL<br>ODPRAVIL           | ODPRAVIL<br>ODPRAVIL | ODPRAVIL<br>ODPRAVIL | ODPRAVIL<br>ODPRAVIL | ODPRAVIL<br>ODPRAVIL | ODPRAVIL<br>ODPRAVIL | ODPRAVIL<br>ODPRAVIL |   |
| ODPRAVIL<br>ODPRAVIL                                                              | A                                       | N                   | A                 | G                           | R                              | A                    | M                                   | ODPRAVIL<br>ODPRAVIL        | ODPRAVIL<br>ODPRAVIL   | ODPRAVIL<br>ODPRAVIL | ODPRAVIL<br>ODPRAVIL | ODPRAVIL<br>ODPRAVIL         | ODPRAVIL<br>ODPRAVIL         | ODPRAVIL<br>ODPRAVIL          | ODPRAVIL<br>ODPRAVIL           | ODPRAVIL<br>ODPRAVIL | ODPRAVIL<br>ODPRAVIL | ODPRAVIL<br>ODPRAVIL | ODPRAVIL<br>ODPRAVIL | ODPRAVIL<br>ODPRAVIL | ODPRAVIL<br>ODPRAVIL |   |

## PREMISLI IN REŠI – kasneje prispele rešitve iz P–XIV/4

Pri izbiranju rešitev iz četrte številke smo se znašli v časovni stiski, oddati smo morali Presek v tiskarno, rešitve so pa še kar prihajale. Kar 33 jih je bilo, vse pravilne in vse so prišle do postavljenega roka. Poslali so jih Nika AMIČ iz Šmarij pri Jelšah, Polona BAJT iz Bohinjske Bistrice, Marjan BLATNIK z Iga, Igor BOHAR iz Murske Sobote, Mirjam BORŠTNIK iz Velikih Lašč, Aleš ČASAR iz Murske Sobote, Martina DENŽIČ iz Podčetrтка, Borut DRETAR iz Maribora, Andreja GOMBOC iz Murske Sobote, Andrej GREGOR iz Murske Sobote, Andreja HELBL iz Vuzenice, Branko JUŽNIČ iz Ptuja, Andreja in Janez KEPIC iz Cerkelj, Robi KODRIČ iz Podbočja, Aleš KEBER z Raven, Martin KOVIČ iz Ljubljane, Peter KUKANJA iz Nove Gorice, Alenka KUNEJ iz Krškega, Roman MAURER iz Zagorja, Joži PINTAR iz Dražgoš, Uroš PIRIH iz Ljubljane, Matjaž PRTENJAK iz Celja, Uroš RAZDEVŠEK iz Slivnice, Milan ŠERNEK iz Velike Polane, Tanja ŠPRAJCAR iz Kranja, Janez TOMELJ s Trojan, Blaž VALIČ iz Nove Gorice, Branko VESELIČ iz Vrhovcev, Renata VEŽNAVER iz Murske Sobote, Janez VOVK iz Straže pri Novem mestu, Dejan ZUPAN iz Titovega Velenja in še dva nepodpisana bralca, iz Medvod in Vidma pri Ptuju.

Seveda smo potem še dodatno izžrebali dva reševalca, Mirjam Borštnik in Joži Pintar ter jima poslali Ševarličevo Kratko zgodovino astronomije, 2. del.

Zanimivo pot reševanja je pokazal Roman Maurer, rekli bi algoritmično. Narisal je drevo vseh mogočih prelivanj, kjer pa je prečrtal vse nezanimive veje, ki se pojavijo že drugje.

*Peter Petek*

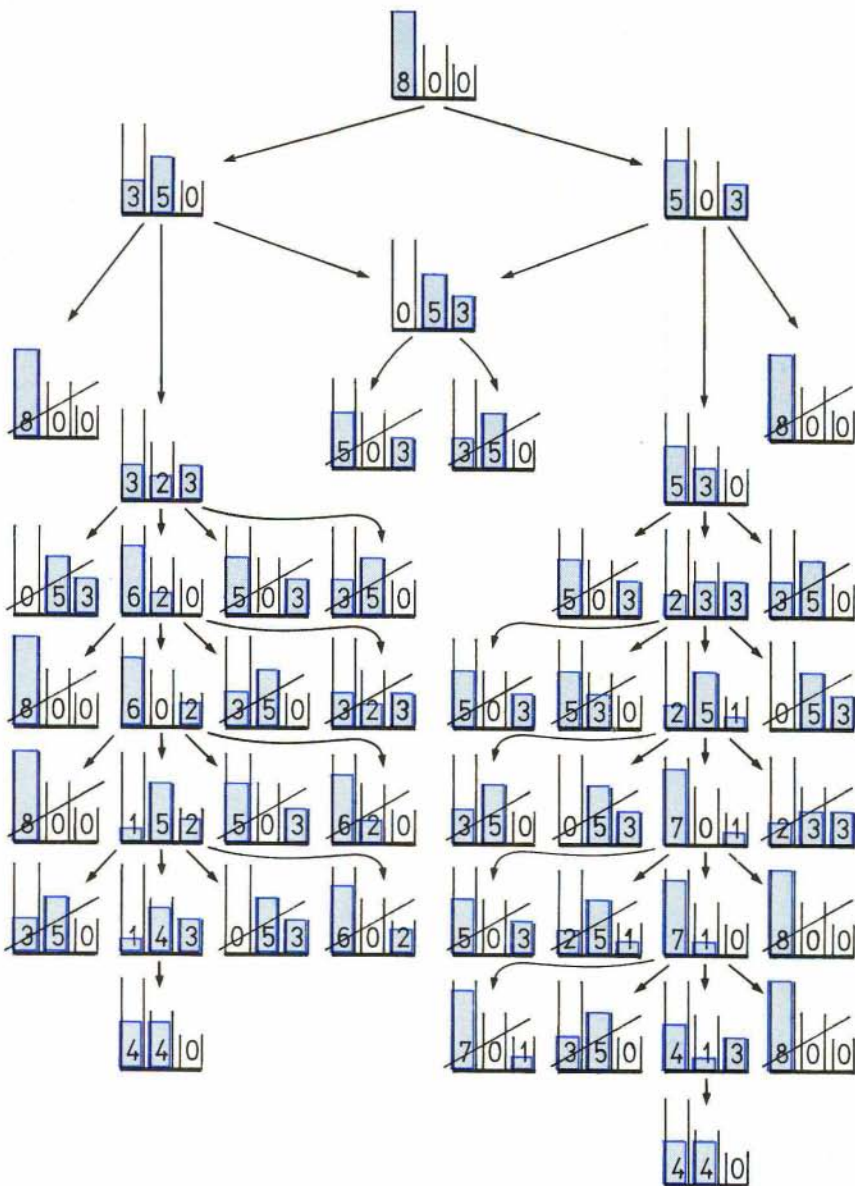
## POIŠČI VSA TRIMESTNA ŠTEVILA, KI SO ENAKA VSOTI FAKULTET SVOJIH CIFER.

Za tiste, ki še ne vedo, kaj je fakulteta danega števila, na hitro razložimo. Če je  $n$  poljubno naravno število, imenujemo  $n$  *fakulteta* (oznaka  $n!$ ) produkt vseh naravnih števil od 1 do  $n$ . Torej

$$n! = 1.2.3...(n-1).n$$

Nalogo je seveda moč rešiti tudi z računalnikom. Vendar bo rešitev zanimivejša, če jo najdete z logičnim premislekom.

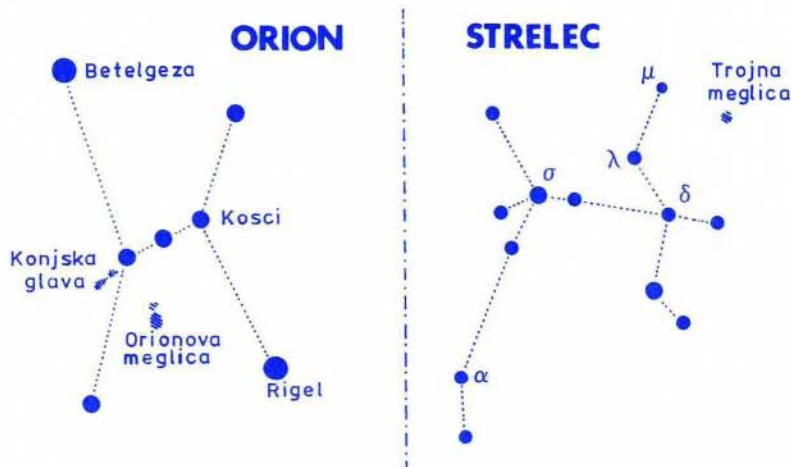
*Marija Vencelj*



## MEGLICE NA NOČNEM NEBU

Vsakdo ve, da je nočno nebo posuto z zvezdami. Šele pozornejši pogled razkrije tudi nekaj megličastih tvorb. Najsvetlejše med njimi, 103 po številu, je zbral Froncoz Charles Messier v svojem katalogu iz leta 1784. Ta katalog ni bil namenjen proučevanju meglic. Takratni astronomi so namreč raje iskali komete, ki so večinoma na pogled podobni meglicam. S pomočjo Messierjevega kataloga so se izogibali zamenjavam. Šele v začetku tega stoletja so odkrili, da so nekateri objekti iz tega kataloga, ki jih je imel Messier za meglice, v resnici zelo oddaljene skupine več milijard zvezd, to je galaksije. Mnogo njegovih vpisov pa štejemo še danes k meglicam. Najbolj znano t.i. Orionovo meglico najdemo pod Kosci (Rimščicami) v ozvezdju Oriona (slika 1 in slika 2).

Čas je že, da povemo, kaj so meglice. To so oblaki prahu ali plina v prostoru med zvezdami. Kot v zvezdah tako tudi v plinskih meglicah prevladuje vodik. Gostota meglic je nekoliko večja od povprečne gostote snovi v medzvezdnem prostoru, kjer znaša  $10 \text{ delcev/cm}^3$ . Zaradi boljše predstave si pomagajmo s primerjavo. Če bi bilo v hali Tivoli le toliko molekul zraka, kot so navadno v prostornini bučikine glave, bi bilo tako razredčeno ozračje še



Slika 1. Lege Orionove meglice, Konjske glave in Trojne meglice v ozvezdjih Oriona in Strelca.

vedno tisočkrat gostejše od plina v meglicah. Torej so meglice mnogo redkejše od najboljšega vakuumu, ki ga znamo narediti na Zemlji. Vidimo jih le zaradi njihovih ogromnih razsežnosti.

Najlaže opazimo oblake plina, ki so v bližini vročih zvezd. Te jih segrevajo in če je zvezda dovolj vroča, se v meglici iz vodikovih atomov osvobajajo elektroni. Pri postopnem vračanju v prvotno vezano stanje se energija, ki jo je elektron potreboval za pobeg, sprosti v več fotonih. V območju vidne svetlobe so najpogostejši tisti fotoni, ki nastanejo pri prehodu iz tretjega v drugo vzbujeno stanje vodika. Njihova valovna dolžina (657 nm) ustreza rdeči barvi. Zato so področja ioniziranega vodika, kot to vrsto meglic imenujemo, na fotografijah rdečkasta.



Slika 2. Orionovo meglico (M 42) opazimo tudi s prostim očesom. Oddaljena je 1500 sv. let.

Trojna meglica v ozvezdju Strelca, ki ima v Messierjevem katalogu zaporedno številko 20 (od tod oznaka M 20), je lep primer zgoraj opisanih razmer. Na posnetku na 1. strani ovitka vidimo osrednjo zvezdo obdano z rdeče žarečim vodikom. Nasprotno pa je zvezda na desni prehladna, da bi bili elektroni v njeni okolici prosti. Zato soj ni rdeče barve. Fotoni z zvezde se na meglici le sipljejo, to je, spreminjajo smer gibanja. Modri fotoni naredijo to laže od rdečih, zato v tej meglici prevladuje modra barva. Iz istega razloga je podnevi modro tudi nebo. Pojasnimo še, od kod ime Trojna meglica. Brez dvoma so temu vzrok trije oblaki rdeče žarečega ioniziranega vodika. Vendar tanke praznine med njimi niso odprtine, skozi katere gledamo v prostor za meglico. Temni pasovi so prašni oblaki med nami in meglico. Ti absorbirajo svetlobo in tako navidezno razdelijo enotno področje ioniziranega vodika na tri dele. Takih absorpcijskih meglic je na nebu veliko. Slovita je Konjska glava v ozvezdju Oriona (slika 3), ki je dobila ime po svojem izgledu.

V meglicah, o katerih smo govorili, so ugodni pogoji za nastanek zvezd. Če se začne kepa plina krčiti, se pri tem segreva in čez čas zasije na nebu mlada zvezda. Kot smo se naučili iz prispevka Energija in zvezde v 1. številki 10. letnika Preseka, zvezda potem dolgo časa mirno živi in troši svoje jedrsko



Slika 3. Meglica Konjska glava v ozvezdju Oriona je dosegljiva le fotografsko. Oddaljena je 1300 sv. let.

gorivo. Ko pa ga zmanjka, se tudi zvezdi bliža konec. Takrat nekatere zvezde bruhejo del svoje ovojnice v medzvezdni prostor. Nastane meglica. Primera sta planetna meglica v ozvezdju Lir in Rakovica v Biku.

Meglice, ki smo jih opisali, nas navdušujejo z lepimi barvami. Vendar je to prej izjema kot pravilo. Zvezda lahko segreje samo snov v svoji okolici do te mere, da začne žareti. Večina oblakov je temnih in jih ne vidimo. K sreči oddajajo radijske valove. Tako lahko z radijskimi daljnogledi zvemo marsikaj o razporeditvi snovi v vesolju. A o tem kdaj drugič.

*Tomaž Zwitter*

**Marijan Prosen, "OPAZUJEM SONCE IN LUNO", Ljubljana, Mladinska knjiga 1987, 71 strani, Zbirka Igra in delo.**

Avtor številnih poljudno-znanstvenih spisov s področja astronomije je tokrat napisal posebno zanimivo astronomsko knjigo, primerno za mladino med 10. in 18. letom. Knjiga predstavlja novost v naši mladinski poljudno-znanstveni astronomski literaturi in sicer po svojem pristopu, načinu razlage in cilju, ki ga postavlja.

Knjiga se razlikuje od raznovrstnih knjig, ki razlagajo astronomijo predvsem opisno in brez veliko pojasnil, kako je do posameznih ugotovitev prišlo. Prosen pa daje mlademu človeku možnost, da se z enostavnimi opazovanji in meritvami, ki jih izvede sam ali s skupino, dokoplje do osnovnih spoznanj o gibanju Sonca v teku dneva in v teku leta ter do spoznanj o Soncu kot zvezdi. Daje navodila za opazovanje Lune in za nekatere meritve v zvezi z Luno.

Avtor na primeren način pokaže, da opazovanja niso samo gledanje, ampak nekaj, kar vključuje predvsem meritve. Obravnava enostavno merjenje dolžin, določitev kotov in čitanje temperature ter opozarja na spremembo teh količin s časom. Spremembe prikaže z grafi in daje mlademu opazovalcu možnost, da sam ugotovi funkcijske zveze in izvede zaključke.

Knjiga predstavlja v določenem smislu prvi uvod v metode znanstveno-raziskovalnega dela za mladino z meritvami pri Soncu in Luni.

Cilj knjige podaja že avtor sam v predgovoru: ne samo gledati, temveč tudi videti, ne samo videti, temveč tudi opaziti, ne samo opaziti, temveč tudi pojasniti.

Knjiga je primerna za samostojno delo in za delo v skupini, v astronomskih in naravoslovnih krožkih ter jo priporočamo.

*Bogdan Kilar*

## TEŽA V JAŠKU

Iz gravitacijskega zakona razberemo, da pojema teža telesa obratno sorazmerno s kvadratom razdalje od središča Zemlje, ko se telo oddaljuje od površja Zemlje:

$$F = \kappa m m_z / r^2 = F_0 r_z^2 / r^2$$

Pri tem je  $F_0 = \kappa m m_z / r_z^2 = mg$  teža in  $g = \kappa m_z / r_z^2$  pospešek prostega padanja na površju Zemlje. Kako pa pojema teža telesa, ko se telo spušča pod površje Zemlje v navpični jašek? Krogelna lupina ne izvaja gravitacijske sile na telo v svoji notranjosti. Že na prvi pogled uvidimo, da se sile vseh delov krogelne lupine na drobno telo v njenem središču izravnaajo. Nekoliko teže je uvideti, da velja to tudi v drugih točkah v notranjosti lupine (slika 1). V krogelno simetričnem telesu, ki si ga lahko mislimo sestavljenega iz samih tankih lupin, zato vsi deli, ki so bolj oddaljeni od središča kot drobno telo, na drobno telo ne izvajajo gravitacije. Gravitacijo izvajajo samo deli, ki so bližje središču kot drobno telo. Te dele pa lahko glede gravitacije nadomestimo z drobnim telesom z enako maso v središču.

Na telo v notranjosti Zemlje v razdalji  $r$  od središča deluje potemtakem le krogla z radijem  $r$  in maso  $m(r)$ :

$$F = \kappa m m(r) / r^2 = \kappa m \rho \cdot 4\pi r^3 / 3r^2 = 4\pi \kappa \rho m r / 3 = \kappa m m_z r / r_z^3$$

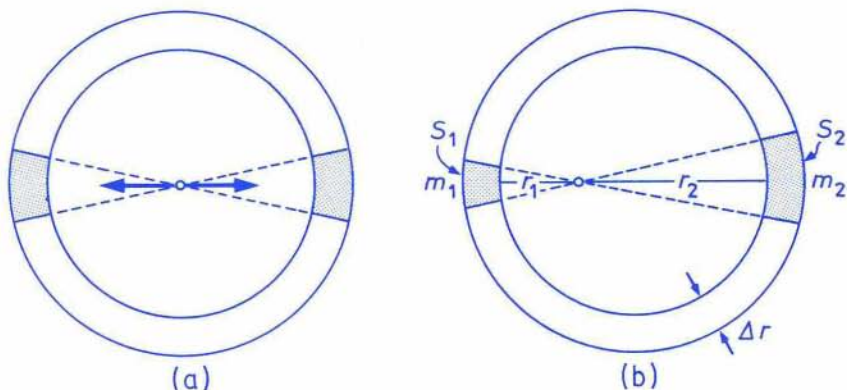
Teža telesa v notranjosti Zemlje torej narašča sorazmerno z odklikom od središča (slika 2). Zadnje tri korake lahko naredimo le, če se zadovoljimo s približkom, da je gostota po vsej zemeljski krogli konstantna:

$$\rho = m_z / V = 3m_z / 4\pi r_z^3$$

Ali ni to podobno kot pri vijačni vzmeti: vzmet deluje na telo proti ravnovesni legi s silo, ki je sorazmerna z odklikom? Telo na vijačni vzmeti sinusno niha, če ga izmaknemo iz ravnovesne lege in spustimo, z nihajnim časom  $t_0 = 2\pi \sqrt{m/k}$ . Pri tem je  $m$  masa telesa in  $k$  koeficient, ki pove, za koliko newtonov naraste sila, ko se poveča odklik za 1 meter. Po tem zgledu lahko

Vrsto krajših prispevkov v tej in v prejšnji številki je J. Strnad napisal kot del sestavka "Do Newtonovih zakonov", a zaradi omejenega prostora niso mogli iziti v 7. številki prejšnjega letnika.

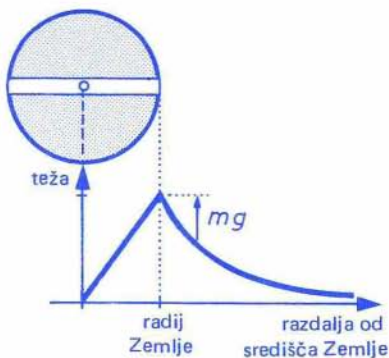
Slika 1. Sila na drobno telo z maso  $m$  v tanki krogelni lupini. Na telo v središču ne deluje nobena sila, saj se prispevki vse lupine izravnavajo; nasprotna odseka lupine namreč delujeta na telo z nasprotno enakima silama (a). To velja tudi, če telo ni v središču. Sila levega odseka je sorazmerna z  $m_1/r_1^2$ , sila desnega pa z  $m_2/r_2^2$ . Ta kvocienta sta enaka, kot sledi iz  $S_1/S_2 = r_1^2/r_2^2$  ter  $m_1 = \rho S_1 \Delta r$  in  $m_2 = \rho S_2 \Delta r$ . Drobno telo je v razdalji  $r_1$  od prvega in  $r_2$  od drugega odseka,  $\Delta r$  pa je debelina lupine.



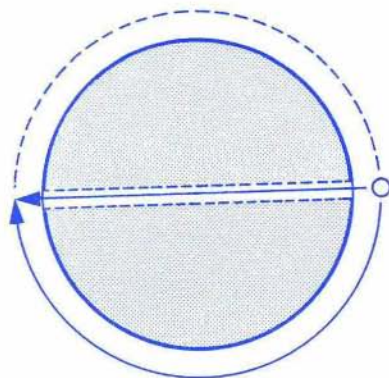
takoj zapišemo nihajni čas, s katerim niha okoli zemeljskega središča telo po navpičnem jašku:

$$t_0 = 2\pi \sqrt{r_z/g}$$

Za koeficient smo vstavili  $k = F/r = \kappa mm_z/r_z^3$  in upoštevali pospešek prostega



Slika 2. Teža v jašku in nad površjem Zemlje v odvisnosti od razdalje od središča za primer, da bi imeli vsi deli Zemlje enako gostoto.

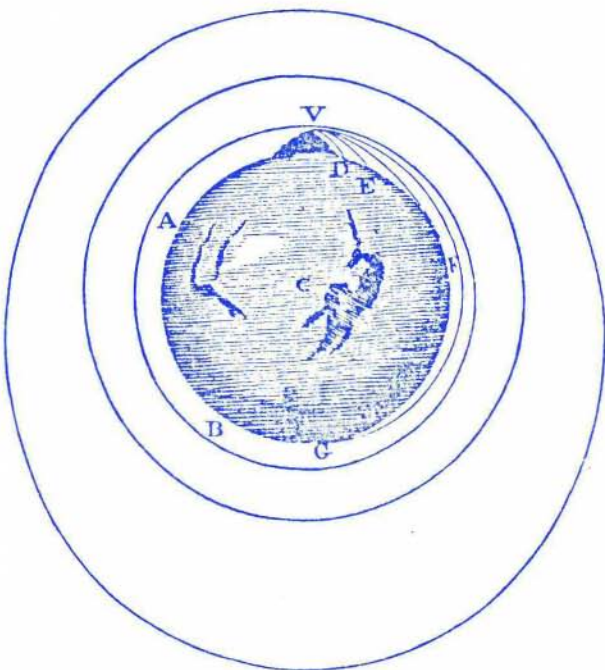


Slika 3. Umetni satelit, ki bi krožil okoli Zemlje v majhni višini, bi potreboval do nasprotne točke enak čas kot telo, ki bi padlo mimo središča Zemlje.

pada na površju Zemlje  $g = \kappa m_z / r_z^2$ . Nihajni čas ni odvisen od amplitude.

Polovico tega časa, to je  $\frac{1}{2} t_0 = \pi \sqrt{r_z / g} = 42$  minut, bi potrebovalo telo, da bi po navpičnem jašku skozi središče s površja Zemlje doseglo nasprotno točko na površju. V prav tolikšnem času bi priletel iz prve točke v drugo umetni zemeljski satelit, ki bi krožil okoli Zemlje v majhni višini (slika 3). Pri tem odmislimo zračni upor. V tem primeru je namreč gravitacijska sila ravno centripetalna sila:  $\kappa m m_z / r_z^2 = m v^2 / r_z = m (2\pi r_z / t_0)^2 / r_z$  (slika 4). Za hitrost satelita smo vstavili  $v = 2\pi r_z / t_0$ .

Slika 4. Newtonova risba poti izstrelka, ki ga z vse večjo hitrostjo izstreljujemo v vodoravni smeri. Ko se ujemata centripetalna sila  $m v^2 / r$  in teža  $m g = \kappa m m_z / r^2$ , postane izstreljek umetni satelit. Tedaj velja  $v = \sqrt{r g} = \sqrt{\kappa m_z / r}$ , če je  $r$  radij Zemlje. Umetni satelit se mora gibati vsaj v višini okoli 100 kilometrov. Toda to ne vpliva znatno na rezultat, saj se 100 kilometrov komaj pozna v 6400 km.



## ALI MORDA GRAVITACIJSKA KONSTANTA POJEMA S ČASOM?

Angleški fizik P.A.M. Dirac je leta 1937 primerjal kvociente nekaterih fizikalnih količin, ki so gola števila in niso odvisna od izbire enot. Kvocient električne in gravitacijske privlačne sile med elektronom in jedrom vodikovega atoma je

$$(\kappa_e e_0^2 / r^2) : (\kappa m_e m_p / r^2) = \kappa_e e_0^2 / \kappa m_e m_p = 2,3 \cdot 10^{39}$$

Pri tem je  $e_0 = 1,6 \cdot 10^{-19}$  As osnovni naboj,  $\kappa_e = 0,9 \cdot 10^9$  Vm/As konstanta, ki v Coulombovem zakonu ustreza gravitacijski konstanti in ki se z influenčno konstanto  $\epsilon_0 = 8,9 \cdot 10^{-12}$  As/Vm izraža takole:  $\kappa_e = 1/4\pi\epsilon_0$ ,  $m_e = 9,1 \cdot 10^{-31}$  kg masa elektrona in  $m_p$  1839—krat večja masa vodikovega jedra.

Kvocien časa razširjanja vesolja  $t_0$  in za atomski svet značilnega časa  $t_a = \hbar/m_e c^2 = 1,3 \cdot 10^{-21}$  s je

$$t_0/t_a = 18 \cdot 10^9 \cdot 3,15 \cdot 10^7 \text{ s} / 1,3 \cdot 10^{-21} \text{ s} = 4,2 \cdot 10^{38}$$

Za čas razširjanja vesolja vzamemo 18 milijard let. Za atomski svet značilni čas sestavimo iz konstante  $\hbar = 1,05 \cdot 10^{-34}$  Js (to je z  $2\pi$  deljena Planckova konstanta  $h$ ), mase elektrona  $m_e$  in hitrosti svetlobe  $c = 3 \cdot 10^8$  m/s.

Dirac je trdil, da obe zelo veliki števili nista po naključju približno enaki, ampak da se za tem skriva še neznani zakon narave. Ni treba, da bi bili obe števili natančno enaki; podrobnejša teorija bi namreč lahko prinesla še kak številski faktor, na primer  $2\pi$ , ki bi naredil kvocien enak 1.

Ker starost vesolja s časom narašča, bi se morala s časom spreminjati vsaj še ena izmed nastopajočih osnovnih "konstant", da bi kvocien ostal ves čas enak 1. Če bi bila to samo gravitacijska konstanta, bi morala pojemati obratno sorazmerno s starostjo vesolja. Iz zahteve v obliki

$$\kappa(t) = \kappa(t_0)t_0/t$$

sledi

$$[\kappa(t) - \kappa(t_0)]/\kappa(t_0)(t - t_0) = -1/t_0 = -6 \cdot 10^{-11} \text{ leto}^{-1}$$

če vstavimo na desni strani  $t = t_0 = 18$  milijard let. Gravitacijska konstanta bi se morala relativno zmanjšati za  $6 \cdot 10^{-11}$  na leto.

Po dolgoletnem zasledovanju gibanja planetov z radarjem so ugotovili, da se gravitacijska konstanta ne spreminja tako izdatno, če se sploh spreminja. Toda nekateri trdijo, da to še nič ne pomeni. Obhodni čas Lune se namreč podaljša relativno za  $22 \cdot 10^{-11}$  na leto in samo okoli  $16 \cdot 10^{-11}$  na leto je mogoče pojasniti z zaviranjem Lune zaradi plime na Zemlji. Preostalih  $6 \cdot 10^{-11}$  na leto naj bi pojasnilo zmanjšanje gravitacijske konstante.

Za sicer zanimivo, a drzno Diracovo sklepanje večina fizikov misli, da nima zadostne eksperimentalne opore. Tu in tam se sicer na prvi pogled zazdi, da je mogoče z njim pojasniti kako odprto vprašanje, a v celoti povzroči več težav, kot razreši odprtih vprašanj.

## ALI NEWTONOV GRAVITACIJSKI ZAKON NATANČNO VELJA?

Na mejo veljavnosti Newtonovega gravitacijskega zakona pomislimo najprej v zvezi z Einsteinovo splošno teorijo relativnosti. Pri zelo natančnih merjenjih v Osončju in v modelih vesolja na zgodnji razvojni stopnji in zelo gostih zvezd je treba upoštevati to podrobnejšo teorijo gravitacije. O tem pričajo izidi merjenj, ki se ujemajo z njenimi napovedmi. O veljavnosti Newtonovega gravitacijskega zakona pa razmišljajo še v drugi zvezi. Nekateri fiziki kritično preverjajo temeljne ugotovitve, čeprav pri tem ni veliko upanja, da bi dognali kaj pomembnega. Tako so si postavili tudi vprašanje, ali Newtonov gravitacijski zakon natančno velja. Drugače povedano: s kolikšno natančnostjo nas pre-pričajo merjenja, da velja?

Kaj pa, če velja gravitacijski zakon v drugačni obliki? Zadnje čase je ožive-la razprava o zakonu v obliki

$$F = (\kappa mm'/r^2)(1 + ae^{-r/b}(1 + r/b))$$

V dodatnem faktorju naj bi bil  $a = 0,007$  majhen številski koeficient in  $b = 200$  metrov. Dodatni faktor je vreden upoštevanja, dokler razdalja  $r$  med telesom ne doseže nekajkratne vrednosti  $b$ . Gravitacijska sila bi bila pri majhni razdalji malo manjša kot po Newtonovem gravitacijskem zakonu, na vesoljskih razdaljah pa dodatek ne bi bil vreden upoštevanja. Lahko bi tudi rekli, da je gravitacijska konstanta pri laboratorijskih merjenjih malo manjša kot v vesolju.

Razprava še ni končana, ker čakajo na izide merjenj.

## ALI JE OSONČJE STABILNO?

Okoli Sonca se giblje devet planetov in veliko manjših teles. Gravitacijska sila deluje med vsakim parom teles. Tako se vsili vprašanje o stabilnosti Osončja. Ali se bodo planeti gibal v nedogled, kot so se gibal od zdavnaj in kot se gibljejo dandanes? Pri tem se ne menimo za morebitno zunanjo motnjo, deni-mo za to, da bi se Soncu približala kaka zvezda, ali za to, da se bo Sonce v poznejšem obdobju razvoja napihnilo in morda zajelo tudi tir katerega izmed planetov.

Vprašanje sodi pravzaprav v matematiko. Poleg privlačne sile Sonca delu-jejo na vsak planet sile drugih planetov kot majhne motnje. Zadostuje, da poznamo Newtonov gravitacijski zakon in lego planetov in njihovo hitrost v danem trenutku. Toda razmere se ne ponavljajo natančno, zato je vprašanje zelo trd oreh.

Okoli leta 1800 so francoski mehaniki P.S. Laplace, J.L. Lagrange in

S.D. Poisson mislili, da so dokazali stabilnost Osončja. Toda v njihovih dokazih so pozneje odkrili vrzeli. Razprave o tem niso pojenjale, zato je švedski kralj razpisal nagradno nalogo. Nagrado je dobil leta 1889 francoski matematik in fizik Henri Poincaré. Ugotovil je, da stabilnost Osončja ni mogoče dokazati. Po zelo dolgem času lahko zelo majhna ponavljajoča se motnja povzroči izdatne spremembe, če so vpletena tri telesa ali več.

Toda tudi Poincaréjevi dokazi niso bili neoporečni. Leta 1962 sta jih dopolnila matematika V.I. Arnold iz Moskve in J. Moser, ki je tedaj delal v Göttingenu, a Poincaréjev sklep je ostal v veljavi.

Praznoverneži opozarjajo na to, da si v mehaniki pomembna temeljna odkritja sledijo na 101 leto, in napovedujejo za leto 1990 — bolj za šalo kot zares — tako odkritje.

|      |                                                                                                                                 |
|------|---------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------|
| 1687 | I. Newton, <i>Principia mathematica philosophiae naturalis</i>                                                                  |
| 1788 | J.L. Lagrange, <i>Mécanique analytique</i> (Analitična mehanika)                                                                |
| 1889 | H. Poincaré, <i>Sur le probleme des trois corps et les equations de la dynamique</i> (O problemu treh teles in enačbah gibanja) |
| 1990 | ? ?                                                                                                                             |

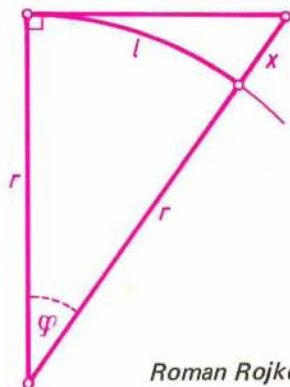
Janez Strnad

## JAMBOR — Rešitev iz P-2

Krožni lok dobimo z:  $l = \pi r \varphi / 180$ , torej:  $\varphi = 180 l / \pi r$ . Po definiciji dobimo:  $\cos \varphi = r / (r + x)$ , torej  $x = r / \cos \varphi - r$ . Vstavimo vrednosti:  $l = 120$  km in  $r = 6400$  km, pa dobimo:  $x = 1125$  m.

Napačen rezultat dobimo, če ne upoštevamo pravih kotnih enot. Računalniki običajno delajo z radiani, nekaterim lahko z BASICovim ukazom DEG naročimo, naj delajo s stopinjami. Zgornje formule merijo kot v stopinjah.

Če želimo meriti kote v radianih, zamenjamo formulo za krožni lok z:  $l = \varphi r$ , torej:  $\varphi = l/r$ , naprej pa računamo enako.



Roman Rojko

## TEMPERATURA TELES OB DOTIKU

Preden pri fiziki v 7. razredu uvedemo temperaturo, omenimo občutek, da se zdijo ob dotiku nekatera telesa toplejša kot druga. "Temperaturo snovi včasih lahko ocenimo, ker jo zaznamo s kožo." Na drugi strani vemo, da imajo telesa enako temperaturo, če se dolgo dotikajo. "Kuhinjsko posodje v omari naj bi torej imelo enako temperaturo kot omara sama. Pa potipaj omaro in nato še krožnik pa lonec. Ali v vseh primerih zaznaš enako temperaturo?" (J. Ferbar in F. Plevnik, *Fizika za 7. razred*, DZS, Ljubljana 1974, str. 77, 78). Aluminij-ski lonec se zdi hladnejši kot stekleni krožnik in ta hladnejši kot lesena omara. Ali znamo to pojasniti? Vprašanje je dokaj zahtevno. V notranjosti človeškega telesa se na račun razgradnje hrane, predvsem sladkorjev in sorodnih snovi, sprošča **toplota**, ki prehaja s prevajanjem in s tokom krvi proti površju telesa. **Temperatura** v notranjosti telesa je višja kot na površju. Najnižja je na štrlečih predelih — nosu, ušesih, konicah prstov — okoli  $36^{\circ}$  C. Nekaj višja je na primer pod pazduho, običajno  $37,6^{\circ}$  C. S površja kože prehaja toplota v okolico. Na nepokritih delih telesa je pri tem odločilno počasno gibanje okolnega zraka. Na vetru je temperatura kože nižja. Pri tem ima vlogo tudi pot, ki izhlapeva z vlažne kože.

Čutnice za temperaturo ležijo pod površjem kože v globini okoli 0,4 milimetra. Na njihovem mestu je temperatura nekoliko višja kot na površju kože. Navadno nas čutnice ne opozarjajo ne na mráz ne na vročino. Brž ko se dotaknemo telesa, pa vplivamo tudi na tok toplote v koži. To kaže, da so razmere zapletene. Do odgovora na vprašanje pridemo lahko le, če jih poenostavimo. To v fiziki pogosto naredimo in upamo, da vseeno dobimo smiselne odgovore.

Že v kratkem uvodu smo uporabljali fizikalni količini temperaturo in toploto, za podrobnejšo razlago pa bomo potrebovali še nekaj zakonov. Oglejmo si jih po vrsti.

Temperaturo naredimo bolj domačo s Feynmanovo primero. Po kopanju pridete mokri iz vode in se obrišete z brisačo. Pri tem preide voda s kože na brisačo. Denimo pa, da je brisačo zmočil naliv, ko ste bili v vodi. Če zdaj uporabite brisačo, prehaja voda z nje na kožo. Vpeljimo "mokrost" kot količino, ki pove, kako uporabna je brisača za brisanje. Če je mokrost kože večja kot mokrost brisače, prehaja voda s kože na brisačo. Če je mokrost brisače večja kot mokrost kože, pa prehaja voda z brisače na kožo. Mokrosti ustreza temperatura, vodi pa toplota.

Toplota je količina, ki meri, koliko energije si izmenjata telesi, ko si ne izmenjata dela. Če telo prejme toploto, se mu energija poveča, če jo odda, pa se mu zmanjša. Toploto merimo v enakih enotah kot energijo, v joulih, J.

V vsakdanjem življenju merimo temperaturo v stopinjah Celzija,  $^{\circ}\text{C}$ . Pri navadnem zračnem tlaku priredimo tališču ledu temperaturo  $0^{\circ}\text{C}$  in vrelišču vode temperaturo  $100^{\circ}\text{C}$ . Toda v fiziki merimo temperaturo v kelvinih, K. Po dogovoru ima *trojno stanje vode*, v katerem so v ravnovesju led, voda in vodna para, temperaturo 273,16 K. Ker ustreza temu stanju  $0,01^{\circ}\text{C}$ , ustreza  $-273,15^{\circ}\text{C}$  ravno 0 K. To je *absolutna ničla*, ki se ji lahko sicer poljubno približamo, a je ne moremo doseči. Po navedenem dogovoru je kelvin enako velik kot stopinja Celzija. Zaradi tega izrazimo temperaturno razliko v stopinjah Celzija in v kelvinih z enakim merskim številom. Če se omejimo na temperaturne razlike, lahko v sestavljenih enotah vedno uporabimo kelvin, čeprav navajamo temperaturo v stopinjah Celzija.

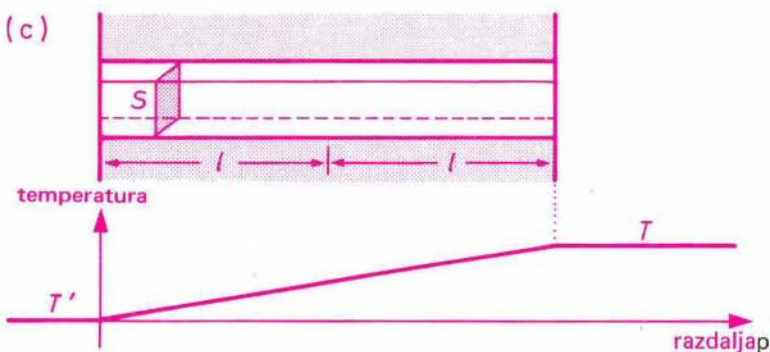
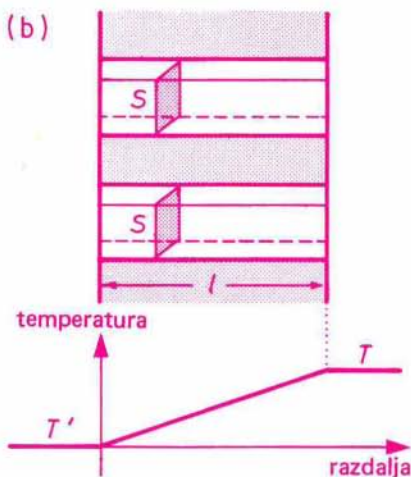
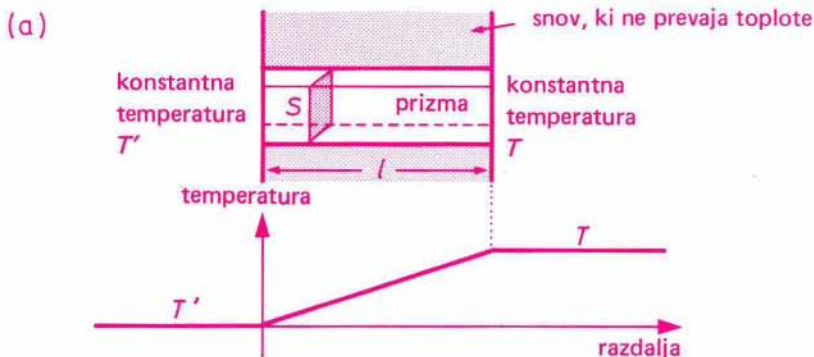
Za koliko stopinj se poviša temperatura telesa, če mu dovedemo toploto, in zniža, če od njega toploto odvedemo? Dovedena ali odvedena toplota je sorazmerna s spremembo temperature in z maso telesa:

$$Q = m c_p (T - T') \quad (1)$$

Sorazmernostni koeficient  $c_p$ , *specifična toplota*, meri lastnost snovi in pove, koliko joulov toplote je treba dovesti kilogramu snovi, da se segreje za 1 stopinjo. Enota zanjo je J/kgK. Indeks  $p$  opozarja, da se med poskusi tlak ne spreminja in bi ga v našem primeru sploh ne bilo treba posebej navajati. Če telo prejme toploto, se segreje in je končna temperatura  $T$  in začetna  $T'$ . Če telo toploto odda, se ohladi in je končna temperatura  $T'$ , a začetna  $T$ . Enačbo (1) spoznajo učenci v 7. razredu (str. 96 v navedenem učbeniku).

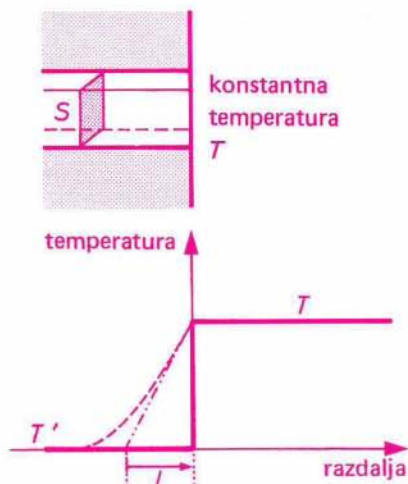
Potrebujemo pa še *zakon o prevajanju toplote*, ki ne pride na vrsto v osnovni šoli. Temperaturi teles, ki se dotikata, se izenačita. Telesu z višjo temperaturo se temperatura zniža in telesu z nižjo se zviša. Telo z višjo začetno temperaturo toploto odda, telo z nižjo pa jo prejme. Toplota teče s kraja z višjo temperaturo na kraj z nižjo. O *prevajanju toplote* govorimo, če prehaja toplota po mirujoči snovi in če ni sevanja. Zakon o toplotnem prevajanju zadeva toploto, ki se v določenem času prenese s prevajanjem s telesa z višjo temperaturo na telo z nižjo.

Pregledne okoliščine si zagotovimo z zahtevama, da se s časom nič ne spreminja in da teče toplota samo v eni smeri. Vzamemo dve veliki telesi, katerih temperaturi se s časom ne spreminjata. Mednju damo prizmo tako, da se osnovni ploskvi dotikata velikih teles (slika 1). Prizmo obdamo s snovjo, ki toploto zelo slabo prevaja, na primer s polistirenom. Počakamo, da se temperatura delov prizme ustali in se poslej s časom ne spreminja. Toplota, ki jo telo z višjo temperaturo  $T$  v času  $t$  odda in telo z nižjo temperaturo  $T'$  prejme, je



Slika 1. Prevajanje toplote v eni smeri v okoliščinah, ki se ne spreminjajo s časom. Med veliki telesi z višjo temperaturo  $T$  in nižjo temperaturo  $T'$  postavimo prizmo iz določene snovi z osnovno ploskvijo  $S$  in dolžino  $l$ . Temperatura v prizmi enakomerno narašča od  $T'$  do  $T$  (a). Pri enaki temperaturni razliki steče skozi dve enaki vzporedni prizmi v enakem času dvakrat tolikšna toplota kot skozi eno. Prizmi si lahko mislimo sestavljeni v eno z dvojnimi presekom; pretečena toplota je torej sorazmerna s presekom prizme (b). Pri enaki temperaturni razliki steče skozi dve enaki zaporedni prizmi v enakem času samo polovica toplote, ki bi stekla skozi eno. Prizmi si lahko mislimo sestavljeni v eno z dvojno dolžino; pretečena toplota je torej obratno sorazmerna z dolžino prizme (c).

Slika 2. Razmere ob stiku prizme z začetno temperaturo  $T'$  in velikega telesa z višjo temperaturo  $T$ . Temperatura v vrhnji plasti prizme je odvisna od kraja in od časa. Sklenjeno narisana črta se nanaša na začetni trenutek, črtkana krivulja pa na poznejši čas. S pikami in črtkami je narisana ravna črta, ki ustreza naši oceni.



sorazmerna s tem časom, z osnovno ploskvijo prizme  $S$  in s temperaturno razliko  $T - T'$  in obratno sorazmerna z dolžino prizme  $l$ :

$$Q = \lambda t S (T - T') / l \quad (2)$$

Sorazmernostni koeficient  $\lambda$ , toplotna prevodnost, meri lastnost snovi in pove, kolikšna toplota preide v sekundi skozi prizmo z osnovno ploskvijo  $1 \text{ m}^2$  in dolžino  $1 \text{ m}$  pri temperaturni razliki  $1$  stopinje. Toplotna prevodnost ima torej enoto  $\text{Jm/sm}^2 \text{ K} = \text{W/Km}$ , saj je  $1 \text{ joule/sekundo} = 1 \text{ watt}$ .

Enačba (1) in zakon o prevajanju toplote (2) omogočata, da poiščemo odgovor na postavljeno vprašanje. Pri tem ne gre čisto brez računanja. Pa še tako moramo marsikaj spregledati.

Mislimo si zdaj veliko telo s konstantno temperaturo  $T$ . Obenaj v začetnem trenutku  $t = 0$  pritismo osnovno ploskev  $S$  prizme z nižjo temperaturo  $T'$  (slika 2). Prizma ima gostoto  $\rho$ , specifično toploto  $c_p$  in toplotno prevodnost  $\lambda$ . Prizma prejme toploto od velikega telesa in se zaradi tega segreje. Toda v nasprotju z začetno zahtevo se zdaj okoliščine spreminjajo s časom. Ali si lahko vseeno pomagamo z zakonom (2) in enačbo (1)? Po zakonu bi oddalo veliko telo toploto  $Q = \lambda t S (T - T') / l$ , če bi bila na drugi strani plasti s konstantno debelino  $l$  temperatura  $T'$ . Po enačbi (1) pa bi se zaradi dovedene toplote  $Q = mc_p (T - T')$  povečala temperatura plasti od  $T'$  na  $T$ , če bi imela vsa plast enako temperaturo. V našem primeru ni tako in je vse pomešano: toplota, ki se prevaja skozi plast, se porabi za to, da zviša temperaturo plasti.

Ne glede na ta pomislek izenačimo toploto, ki jo veliko telo odda, s toploto, ki jo prejme plast, ko se od temperature  $T'$  segreje do temperature  $T$ . Vendar si mislimo, da se debelina plasti  $l$  s časom spreminja. Zato izrazimo maso plasti z njeno prostornino  $S l$  in gostoto takole:  $m = \rho S l$ . Tako dobimo:

$$\lambda t S (T - T') / l = \rho S l c_p (T - T')$$

Morda bo kdo predlagal, da je na desni strani bolje upoštevati povprečno temperaturo plasti  $\frac{1}{2} (T + T')$  in namesto razlike  $T - T'$  ustrezno razliko  $\frac{1}{2} (T + T') - T' = \frac{1}{2} (T - T')$ . A ker smo o tem negotovi, raje ne upoštevamo faktorja  $\frac{1}{2}$  na desni in imamo naš rezultat samo za oceno.

Iz zapisane zveze sledi ocena za debelino plasti, do katere seže v času  $t$  temperaturna sprememba:

$$l = \sqrt{\lambda / \rho c_p} \sqrt{t}$$

V spominu na faktor  $\frac{1}{2}$ , o katerem smo govorili in ki spremlja gostoto  $\rho$ , je naša ocena za debelino plasti  $l$  nekoliko premajhna. Koefficient  $\lambda / \rho c_p$  ima enoto  $\text{W/Km}(\text{kg/m}^3)(\text{J/kgK}) = \text{m}^2/\text{s}$ . Račun velja samo, če je dolžina prizme precej večja od ocenjene debeline plasti  $l$ .

Ni težko zapisati ustrezne ocene za čas, v katerem seže temperaturna sprememba do določene globine  $l$ :

$$t = l^2 / (\lambda / \rho c_p)$$

Nasprotno kot za  $l$ , a iz istega razloga, je naša ocena za čas  $t$  prevelika. Ocenimo čas, v katerem seže temperaturna sprememba do čutnic v globini 0,4 milimetra:

$$t = 16 \cdot 10^{-8} \text{ m}^2 / 1,5 \cdot 10^{-7} (\text{m}^2/\text{s}) = 1 \text{ sekunda}$$

Za kožo vzamemo kar podatek, ki velja za vodo.

Ko smo ob veliko telo s konstantno temperaturo prislonili prizmo, v kateri se je temperatura s časom spreminjala, smo eno od teles obravnavali drugače kot drugo. Popravimo to in obravnavajmo obe telesi enako. Sestavimo enaki osnovni ploskvi dveh dolgih prizem. Prva z višjo temperaturo  $T$  toploto odda in se ji zniža temperatura, druga z nižjo temperaturo  $T'$  toploto prejme in se ji zviša temperatura. Prenesena toplota je odvisna od temperature  $T_0$  na stiku prizem.  $T - T_0$  je temperaturna razlika med temperaturo v globini  $l$  prve prizme in temperaturo ob stiku,  $T_0 - T'$  pa temperaturna razlika med tempe-

raturu ob stiku in temperaturo v globini  $l'$  druge prizme. Vzamemo, da je toplota, ki jo prva prizma odda, enaka toploti, ki jo druga prejme. Zakon o prevajanju toplote (2) pove za ta primer:

$$\lambda t S (T - T_0) / l = \lambda' t S' (T_0 - T') / l'$$

V enačbo vstavimo ocenjeni debelini plasti:

$$\lambda (T - T_0) / \sqrt{\lambda / \rho c_p} = \lambda' (T_0 - T') / \sqrt{\lambda' / \rho' c_{p'}}$$

Konstante brez črtice zadevajo prvo prizmo z višjo temperaturo, konstante s črtico pa drugo z nižjo. Iz nastale enačbe  $\sqrt{\lambda \rho c_p} (T - T_0) = \sqrt{\lambda' \rho' c_{p'}} (T_0 - T')$  izračunamo temperaturo ob stiku:

$$T_0 = (\sqrt{\lambda \rho c_p} / \sqrt{\lambda' \rho' c_{p'}} T + T') / (\sqrt{\lambda \rho c_p} / \sqrt{\lambda' \rho' c_{p'}} + 1)$$

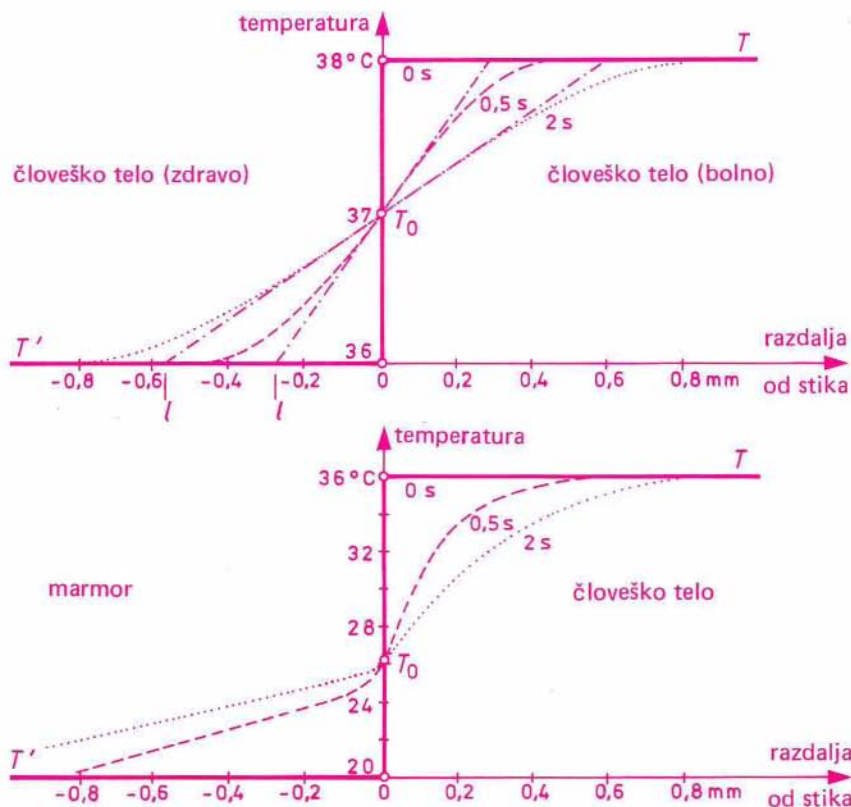
Ker smo globino, do katere seže temperaturna sprememba, samo ocenili, pričakujemo, da je tudi  $T_0$  samo ocena za temperaturo ob stiku. Vendar ni tako: ne samo, da je rezultat pravi, tudi s časom se ne spreminja. Zares pa se temperaturi  $T$  in  $T'$  spreminjata s časom in z oddaljenostjo od stika (slika 3). Zaradi tega smo smeli govoriti nekoliko megleno. Navsezadnje vzamemo za podatka začetni temperaturi; vsaka od obeh je spočetka enaka po vsej prizmi. Enačba

Preglednica podatkov za specifično toplotu  $c_p$ , toplotno prevodnost  $\lambda$ , gostoto  $\rho$ , koeficient  $\lambda / \rho c_p$  in koeficient  $\sqrt{\lambda \rho c_p} / \sqrt{\lambda' \rho' c_{p'}}$  glede na vodo ter temperaturo ob stiku s prstom, če je začetna temperatura prsta  $36^\circ \text{C}$  in telesa, ki se ga dotaknemo,  $20^\circ \text{C}$ .

| snov     | $c_p$<br>kJ/kgK | $\lambda$<br>W/Km | $\rho$<br>kg/m <sup>3</sup> | $\lambda / \rho c_p$<br>m <sup>2</sup> /s | $\sqrt{\lambda \rho c_p} / \sqrt{\lambda' \rho' c_{p'}}$ | $T_0$               |
|----------|-----------------|-------------------|-----------------------------|-------------------------------------------|----------------------------------------------------------|---------------------|
| voda     | 4,2             | 0,63              | $1 \cdot 10^3$              | $1,5 \cdot 10^{-7}$                       | 1                                                        | $28^\circ \text{C}$ |
| zrak     | 1,0             | 0,026             | 1,2                         | $2,1 \cdot 10^{-5}$                       | 0,0035                                                   | 35,9                |
| les      | 0,9             | 0,13              | $0,5 \cdot 10^3$            | $3,0 \cdot 10^{-7}$                       | 0,15                                                     | 34                  |
| steklo   | 0,8             | 0,65              | $2,6 \cdot 10^3$            | $3,0 \cdot 10^{-7}$                       | 0,72                                                     | 29                  |
| marmor   | 0,9             | 3,0               | $2,7 \cdot 10^3$            | $1,2 \cdot 10^{-6}$                       | 1,7                                                      | 26                  |
| aluminij | 0,38            | 240               | $2,7 \cdot 10^3$            | $2,3 \cdot 10^{-3}$                       | 3                                                        | 24                  |
| srebro   | 0,24            | 420               | $10,5 \cdot 10^3$           | $1,7 \cdot 10^{-4}$                       | 20                                                       | 20,7                |

za temperaturo ob stiku obeh prizem velja, dokler sta prizmi dovolj dolgi v primerjavi z  $\sqrt{\lambda/\rho c_p} \sqrt{t}$  in  $\sqrt{\lambda'/\rho' c_p'} \sqrt{t}$ . V fiziki večkrat dobimo zanesljiv rezultat po nezanesljivi poti.

Iz preglednice razberemo, da je temperatura ob stiku prsta z alumijskim lencem nižja kot ob stiku s steklenim krožnikom in ob tem nižja kot ob stiku z leseno omaro. Temperatura v globini 0,4 milimetra pod površjem prsta je



Slika 3. Razmere ob stiku zdravega človeškega telesa z nižjo temperaturo  $36^\circ\text{C}$  in bolnega človeškega telesa z višjo temperaturo  $38^\circ\text{C}$  (zgoraj) in ob stiku telesa iz marmorja s temperaturo  $20^\circ\text{C}$  in človeškega telesa s temperaturo  $36^\circ\text{C}$  (spodaj). Risbi kažeta krajevni potek temperature na začetku ( $t = 0$ , sklenjeno), po 0,5 sekunde (črtkano) in po 2 sekundah (pikčasto). Na zgornji risbi so s pikami in črtkami narisane ravne črte, ki ustrezajo ocenam z zapisanimi enačbami. Za silo je mogoče oceniti, kako se spreminja s časom temperatura 0,4 milimetra pod površjem na mestu čutnic. Risbi sta vzeti iz članka A.B. Bjalko, *Toplo tvojih ruk*, Kvant (1987) 3 (4), ki je dal zamisel za ta zapis.

sicer nekoliko višja od izračunane in je odvisna še od časa. Vendar lahko že z našim približnim sklepanjem pojasnimo začetno ugotovitev.

Upajmo, da se pri branju niste dolgočasil in da vas enačbe niso prestrašile. Spoznali ste, da bi bilo zelo zapleteno, če bi temperaturo teles poskušali določati z dotikom. Ne samo da bi jo morali dobiti z mučnim računanjem, kdaj pa kdaj bi se opekli zaradi prevelike vročine ali prevelikega mrazu. Kako to, da lahko nekateri ljudje hodijo po razžarjenem kamenju ali tlečem oglju in da lahko vzamemo v roko kapljo tekočega dušika, ne da bi si poškodovali kožo? O tem vprašanju, ki je povezano z našim razglabljanjem in zapisanimi enačbami, pa drugič.

*Janez Strnad*

## PISMA BRALCEV

Se še spominjate Preseka, v katerem smo objavili 1000 šilingov z likom avstrijskega fizika Erwina Schrödingerja? Letos mineva 100. obletnica njegovega rojstva. Ob tej priložnosti nam je pisal Štefan Močilnik iz Celovca. Med drugim nam je zaupal tudi tole: "Do Schrödingerja imam še poseben odnos in spomin nanj, saj sem za časa svojega študija na Dunajski univerzi poslušal leta 1957/58 njegovo nadvse интересно predavanje iz Splošne relativnostne teorije." Kolegu Močilniku se najlepše zahvaljujemo, poleg znamke in pisemske ovojnice pa objavljamo o fiziku Schrödingerrju na strani 154 tudi prispevek izpod peresa Janeza Strnada.

*Dušica Boben*

Teorijska znanost, ki se ne zaveda več, da so njeni odločilni in pomembni pojmi navsezadnje namenjeni temu, da jih zajame z besedo, za izobraženca razumljivo, in da postanejo sestavni del slike sveta — teorijska znanost, pravim, v kateri to pozabijo, in se v njej pogovarjajo z izrazi, v najboljšem primeru razumljivimi majhni skupini strokovnjakov, se nujno oddalji od preostale kulturne skupnosti. Na dolg rok se bo izrodila in postala toga, četudi se nadaljuje visoki klepet znotraj veselo izoliranega kroga strokovnjakov.

*E. Schrödinger*

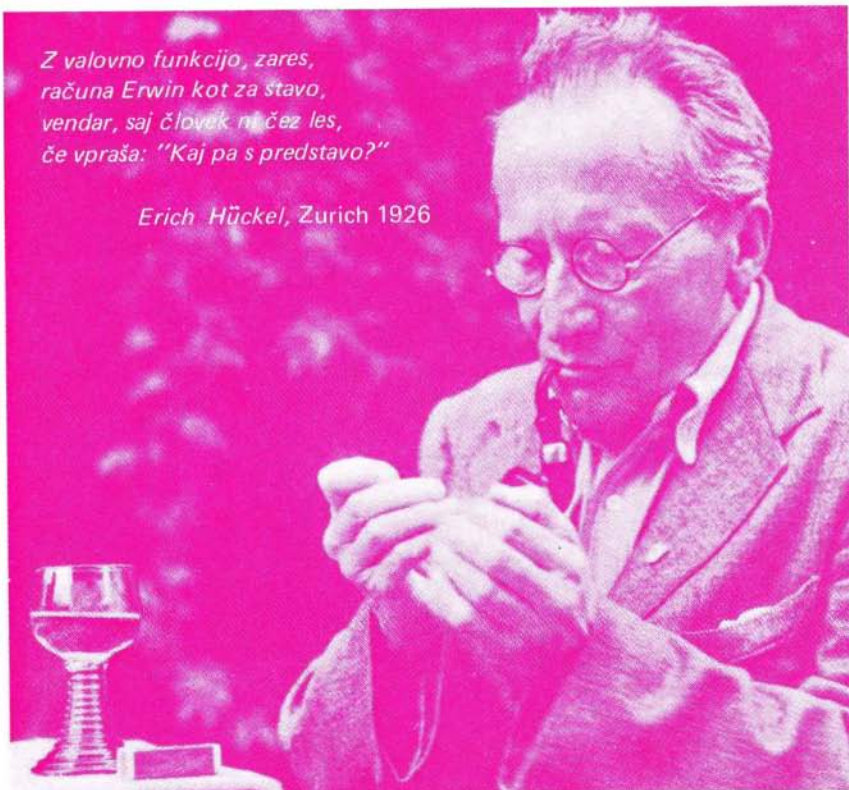
## OB STOLETNICI ERWINA SCHRÖDINGERJA

Leta 1987 so fiziki po vsem svetu počastili spomin Erwina Schrödingerja, očeta — poleg Wernerja Heisenberga — kvantne mehanike, ki je ena od najpomembnejših teorij, če ne najpomembnejša teorija sodobne fizike.

E. Schrödinger je bil rojen leta 1887 na Dunaju. Tam je obiskoval znano srednjo šolo, na kateri so gojili predvsem jezike. Schrödinger je bil vsa leta najboljši v razredu in je imel zelo rad grščino in latinščino, a se je najbolj iz-

*Z valovno funkcijo, zares,  
računa Erwin kot za stvarjo,  
vendar, saj človek ni čez les,  
če vpraša: "Kaj pa s predstavo?"*

*Erich Hückel, Zurich 1926*



Slika 1. Erwin Schrodinger (1887 do 1961) — oče kvantne mehanike

kazal v matematiki in fiziki. Študiral je fiziko na dunajski univerzi in študij leta 1910 končal z doktorskim delom o prevajanju elektrike po površju izolatorja v vlažnem zraku. Tik pred izbruhom prve svetovne vojne si je leta 1914 pridobil pravico, da je predaval na univerzi, z delom iz fizike trdnin, kakor bi rekli dandanes. Zanimal pa se je še za nauk o barvah, za povezavo med elektriko v ozračju in radioaktivnostjo in drugo. Vojno je preživel brez nezgode kot oficir na soški fronti.

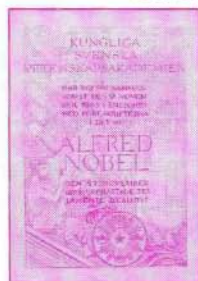
Po vojni se je začela njegova poklicna pot s kratkotrajnim poučevanjem na univerzi v Jeni in v Stuttgartu, dokler ni leta 1921 prešel na züriško politehniko. Tam je postal redni profesor na mestu, ki sta ga prej zasedla Albert Einstein in Max von Laue. Tedaj sta v Zürichu delala fizik Peter Debye in matematik Hermann Weyl. Najpomembnejše odkritje je uspelo Schrödingerju v Zürichu leta 1926. Leta 1927 je sprejel profesorsko mesto v Berlinu. V letih 1926 in 1927 je obiskal Združene države in pozneje predaval tudi v številnih nemških mestih. Po Hitlerjevem prevzemu oblasti leta 1933 je izkoristil ponudbo in odšel v Oxford. Schrödinger se ni mešal v politiko in tudi ni bil židovskega rodu. Toda nacisti so odklanjali kvantno mehaniko in so ga kot profesorja v Berlinu upokojili. V Oxfordu je zvedel, da je dobil skupaj s P.A.M. Diracom Nobelovo nagrado za leto 1933. Leta 1936 je sprejel ponudbo

ERSTTAG



PROF. DR. ERWIN SCHRÖDINGER

100. GEBURTSTAG



NOBELPREIS FÜR PHYSIK 1933



Slika 2. Posebna znamka in posebni žig avstrijske pošte ob Schrodingerjevi stoletnici.

univerze v Gradcu, kjer ga je dve leti pozneje zatekla priključitev Avstrije Nemčiji. Že drugič so ga nacisti odpustili z univerze. Zbežal je in preko Rima došel v Dublin na Irskem, kjer je prevzel mesto na pravkar ustanovljenem Inštitutu za višje študije. Tam je prestal vojno. V letu 1950/51 je bil gostujoči profesor na univerzi v Innsbrucku. Tam je spoznal prijazno gorsko vasico Alpbach. Leta 1956 je postal profesor na univerzi na Dunaju in se po upokojitvi dve leti pozneje preselil v Alpbach, kjer še dandanes prirejajo v njegov spomin znanstvene sestanke. Umrl je leta 1961, pokopan je v Alpbachu.

Schrödinger se je od nekdaj zanimal tudi za teorijsko mehaniko in v njej za probleme, pri katerih iz enačbe zaradi pogojev, ki jim mora ustrezati, sledi določena rešitev. Preprost zgled je enačba za nihanje strune, iz katere sledijo zaradi pogoja, da krajišči mirujeta, določene rešitve, ki ustrezajo določenim — lastnim — frekvencam.

Na začetku našega stoletja si je morala pomagati fizika z novimi zamislimi, ki so bile tuje prejšnjim pogledom, če je hotela pojasniti izide poskusov. Tako je moral Max Planck privzeti, da seva in absorbira trdno telo svetlobo v energijskih obrokih, *kvantih*, če je hotel pojasniti sestavo svetlobe, ki jo seva trdno telo (1900). Albert Einstein je šel korak dlje in je trdil, da je energija v svetlobi, ki so jo dotlej opisovali kot valovanje, zbrana v *svetlobnih kvantih* (1905). Niels Bohr je pojasnil to, da sevajo prosti atomi vodika svetlobo z določenimi frekvencami, z gibanjem elektrona okoli jedra po krogih z določenimi radiji (1913). Ko preide elektron z enega kroga na drugega z manjšim radijem, se izseva kvant svetlobe. Bohr je povezal radij tira s hitrostjo elektrona s stari fiziki tujo enačbo, ki je ni poskusil posebej utemeljiti. Louis de Broglie je prišel na misel, da je treba prirediti elektronu nekakšno valovanje, katerega valovna dolžina je obratno sorazmerna s hitrostjo (1923). Delo bi ostalo še bolj neopaženo, če ne bi A. Einstein zanj rekel dobre besede.

Prav preko Einsteinovega priporočila so zvedeli zanj tudi v Zürichu. P. Debye, ki je vodil teorijski kolokvij, to je tedenske sestanke teorijskih fizikov, je predložil Schrödingerju, naj poroča o de Brogliejevi zamisli. Če naj

Schrödingerjeva enačba (ena izmed oblik osnovnega zakona kvantne mehanike):

$$-(\hbar^2/2m)(\partial^2\psi/\partial x^2 + \partial^2\psi/\partial y^2 + \partial^2\psi/\partial z^2) + V(x, y, z)\psi = i\hbar\partial\psi/\partial t$$

$t$  čas,  $x, y, z$  koordinate,  $\hbar$  z  $2\pi$  deljena Planckova konstanta,  $m$  masa delca,  $\psi$  valovna funkcija, s katero izračunamo verjetnost, da naletimo elektron v majhnem delu prostornine okoli določene točke v določenem trenutku.

valovanje, ki ga priredimo krožečemu elektronu, samo sebe ne oslabi, mora sestavljati pot, to je obseg kroga, celo število valovnih dolžin. S tem je mogoče pojasniti Bohrovo enačbo. Toda Debye s Schrödingerjevim poročilom o tem ni bil zadovoljen: de Brogliejevo sklepanje je imel za naivno in je trdil, da je treba opisati valovanje z enačbo, ki velja za vsak čas po vsem prostoru, kjer je valovanje.

Na enem od poznejših sestankov je Schrödinger postregel s prav tako enačbo, ki je odtistihmal znana kot *Schrödingerjeva enačba*. Schrödinger je prišel do nje, ko je vzporedil osnovne zakone za gibanje teles z osnovnimi zakoni za valovanje. Z njo je obdelal vodikov atom in dobil energije, ki jih je Bohr izpeljal za posamične tire kot lastne energije — podobno kot lastne frekvence pri struni. Po matematični strani je pomagal Hermann Weyl. Leta 1926 je Schrödinger objavil prispevek v štirih delih z naslovom *Kvantiziranje kot problem lastnih vrednosti*. Kvantiziranje je prijem, pri katerem priredimo fizikalnemu sistemu samo določene energije, problem lastnih vrednosti pa računanje z enačbami, ki zaradi pogojev dopuščajo le določene rešitve. Ne samo to. Dognal je tudi, da sta njegova enačba in enačba Wernerja Heisenberga iz leta 1925 samo dva obraza istega osnovnega zakona, ki velja za gibanje elektronov in sorodnih delcev. Tako je bila rojena kvantna mehanika, ki so jo v naslednjih letih dokončno oblikovali P.A.M. Dirac in drugi. Kot se v fiziki pogosto primeri, E. Schrödinger ni bil zadovoljen s svojim otrokom. Preskoki, ki jih je kvantna mehanika prinesla v fiziko, mu niso ugajali, raje je imel valovanje, v katerem poteka vse brez pretresov.

Čeprav ni opustil kvantne mehanike, se je začel pozneje ukvarjati z drugimi vprašanji: s teorijo gravitacije, vesoljem, fizikalnimi vidiki žive celice. Izdal je knjižici *Kaj je življenje*, ki je imela velik vpliv na nadaljnji razvoj molekulske biologije, in filozofsko usmerjeni *Moj pogled na svet*. S tem je nadaljeval prizadevanje, da bi spoznal z znanostjo čim več ljudi. Na širok krog njegovega zanimanja kaže tudi zbirka pesmi, ki pojejo o ljubezni in o občutkih naravoslovca in filozofa.

Po značaju je bil Schrödinger ljubezniv, a se je hitro razburil. (Kot moto v pesniški zbirki je uporabil izrek: Do neba vesel, do smrti žalosten.) Bil je samosvoj, o čemer priča tudi to, da je bilo pri delu težko sodelovati z njim. Bil je skrben družinski oče, imel je eno hčer. Menda je bil neločljiv od svojega nahrbtnika, in to ne samo pri hoji po hribih, ampak tudi na znanstvenih sestankih.

Erwin Schrödinger brez dvoma sodi med maloštevilne fizike, brez pripjevka katerih sodobna fizika ne bi bila to, kar je.

Janez Strnad

## RAČUNALNIŠTVO – NEKOLIKO DRUGAČE!

Med 200 000 poštnimi znamkami, ki so izšle v svetu, je okrog 100 takih, ki tako ali drugače nosijo motive računalništva in informatike. Veliko več je znamk, ki prikazujejo razne stroje z bolj ali manj električnim ali elektronskim krmiljenjem. Težko si danes predstavljamo sodobnejši stroj ali napravo, ki je ne bi krmilil računalnik. Predvsem izstopajo naprave, ki so kakor koli povezane s telekomunikacijami. Delno zaradi tega, ker so same poštne uprave upravitelji (dela) telekomunikacijskih naprav delno pa, ker je ločitev prav na tem področju silno težka.

Osnovno vodilo pri izbiranju nam je bilo, da moramo na znamki jasno videti ali prebrati kakršen koli del, celoto ali besedilo, ki je neposredno vezano z ročnimi, mehanskimi, elektromehanskimi ali elektronskimi stroji za digitalno računanje. Danes jih poznamo kot računalnike, kamor sodijo tudi žepni računalniki ali kalkulatorji.

Tako kot napreduje tehnologija računalnikov, tako se tudi spreminjajo osnovni motivi na znamkah. Širi se tudi število področij, kjer si brez računalnika težko zamislimo delo.

Kateri so motivi, ki jih srečujemo:

- abak, računalno na kroglice, je nedvomno najstarejši pripomoček za digitalno računanje. "Iznašli" so ga že približno 2000 let pred našim štetjem in ga še danes množično uporabljajo na Kitajskem, SZ in še kje drugje, glej (1);
- novejši izumi so izpred 350 let, ko so se pojavili prvi ročni mehanski kalkulatorji (2), te so v 20. stoletju zamenjali mehanski, pozneje pa elektromehanski kalkulatorji (3). Žal izumov kot so Babbageov ali Pascalov stroj za enkratni moč občudovati na nobeni znamki;
- skok v naše stoletje naredimo z elektromehanskimi in elektronskimi digitalnimi računalniki, ki so za delo vhodno/izhodnih naprav uporabljali luknjane kartice, luknjan trak, magnetni trak ali disk. Samo iz (stilizirane) oblike kartice je včasih težko ugotoviti, ali je to kartica za vnos podatkov s pomočjo čitalca kartic ali luknjana kartica, ki neposredno krmili elektromehanski avtomat (4, 5, 6). Prav tako tudi luknjan trak lahko predstavlja trak poštnega telegrafa s 5 luknjicami ali računalniškega teleprinterja z osmimi (6, 7, 8, 9, 11). Podobna težava nastopi tudi s prikazovanjem koluta, ki lahko nosi trak za magnetofon ali računalnikov čitalec magnetnega traku ali pa celuloidni filmski trak (6, 7, 8, 11). Oblikovalcem poštnih znamk so bili posamezni detajli prav malo mar, pomembno je bilo le, da simbolizirajo napredek, sodobno tehnologijo ali računalniško obdelavo;
- računalnik si težko predstavljamo brez dvojiškega (binarnega) zapisa

števil ali prenosnih kod. Tega srečamo na (12);

— iznajdba tranzistorja (13) in s tem razvoj elektronike, predvsem mikro-elektronike (11, 15, 16), torej integriranih vezij (14), je gotovo pripomogel k skokovitemu napredku, množični uporabi in cenenosti računalnika na vseh področjih;

— značilnost računalnikov 70-tih let je nedvomno obsežna hardverska konstrukcija (17, 18, 19, 20), konzola z množico stikal (21), vnos podatkov neposredno s pisalnikov (17) ipd;

— na koncu 70-tih let se pojavljajo "prijaznejša orodja" za delo človeka s strojem, na primer katodne cevi za tekstovne ali grafične prikaze, tipkovnice, "miške" ali grafična peresa, risalniki, kar je največkrat povezano v terminal (23, 24, 25, 27);

— v novejšem času se pojavljajo posnetki celega osebnega računalnika od cenenih (26) pa do dražjih možnosti (29);

— posebej moramo omeniti še računalniško grafiko na risalniku (30), pozneje še na katodnem zaslonu z večjim ali manjšim številom točk (31, 32);

Omenimo še nekaj področij, ki so neposredno povezane z uporabo računalnikov:

— telekomunikacije — digitalne terminalne naprave (23), krmiljenje elektron-

|    |    |    |
|----|----|----|
| 10 |    | 1  |
|    | 3  | 5  |
| 2  |    | 4  |
|    | 8  | 6  |
| 9  |    | 7  |
| 18 | 11 |    |
|    |    | 16 |
| 15 | 14 |    |
| 17 | 12 | 13 |

|    |    |    |
|----|----|----|
| 19 | 22 | 21 |
| 20 |    | 27 |
|    | 25 |    |
| 24 |    | 29 |
|    | 23 |    |
| 26 |    | 31 |
|    | 30 |    |
| 28 |    |    |
| 32 | 33 | 34 |

Schema na II. in III. strani ovitka objavljenih znamk z vpisanimi zaporednimi številkami iz teksta.

skih telefonskih central (21), uslužnostne dejavnosti (33), telekomunikacijske mreže (7);

- državna administracija in upravljanje, sem prištevamo na primer ljudsko štetje (4, 5, 8);

- statistika (19);

- dokumentalistika (22, 28);

- informatika (34) in telematika (33);

- računalniške mreže, na primer COMNET (27);

- meteorologija (11, 20);

- promet in zveze, transport, trgovina, kmetijstvo in industrija (24);

- šolstvo in vzgoja (26);

- znanost in tehnologija (1).

Mislimo, da smo računalnikarje — zbiralce znamk spodbudili k pozornemu pogledu na vsebino z znamke. V svoji zbirki smo se omejili le na nežigosane poštne znamke, seveda pa so prav tako zanimivi tudi drugi materiali: pisemske ovojnice prvega dne, priložnostne izdaje in žigi, kakor tudi žigosane znamke na temo računalništva. Žal v Jugoslaviji še nismo izdali znamke, ki bi kakorkoli nosila motiv danes tako pomembnega področja, kot sta računalništvo in informatika.

Veselko Guštin

#### Literatura:

- *Briefmarken kat.*, Michel (M), 1986/87

- *Cat. de tim. post.*, Yvert et Teiller (Y), 1986/87

- M.W. Martin, *A Gallery of Computer Postal Art*, Datamation, No. 1973

- I. Bratko, V. Rajkovič, *Uvod v računalništvo*, DZS, Ljubljana, 1974

## ZA SLOVO OD LETA

V ogliščih pravilnega mnogokotnika, ki pa ni trikotnik, so naravna števila, katerih vsota je 1987. Vsote poljubnih treh števil iz zaporednih (sosednih) oglišč so med seboj enake. Kateri mnogokotnik je to?

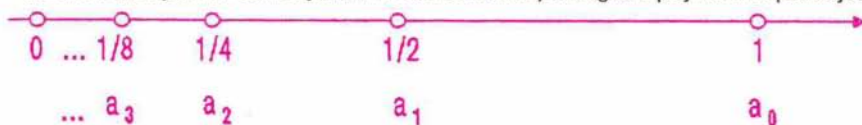
Je odgovor isti, če drugi pogoj nadomestimo z naslednjim: vsote poljubnih štirih števil iz zaporednih oglišč so med seboj enake? Bi znali posplošiti nalogo in jo rešiti?

Boris Lavrič

## JULIAJEVA MNOŽICA, 2. del

### 4. Zaporedja

Na prvi pogled poglavje o računanju iz prejšnje številke Preseka nima prav nobene zveze z barvanjem ravnine. Saj se še spomnite, najti hočemo tribarvno barvanje ravnine prav posebne sorte. No, v tem poglavju bomo poiskali zvezo med računanjem in barvanjem. Pri tem si bomo pomagali s pojmom zaporedje.



Slika 7. Zaporedje  $1, 1/2, \dots$

Nekateri ste se morda že srečali s pojmom številskega zaporedja, drugi se boste pa zdajle. To je niz števil brez konca. Primer številskega zaporedja je npr. zaporedje

$$a : 1, 1/2, 1/4, 1/8, \dots$$

kjer je vsak naslednji člen zaporedja polovica prejšnjega (slika 7). Člen zaporedja zapišemo tako, da ob imenu zaporedja napišemo majhno zaporedno številko člena, npr.:

$$a : a_0, a_1, a_2, a_3, \dots, a_n, a_{n+1}, \dots$$

V primeru zgoraj je tako  $a_0 = 1$ ,  $a_3 = 1/8$ . Za zgornje zaporedje  $a$  lahko zapišemo naslednjo zvezo med zaporednima členoma:

$$a_{n+1} = a_n / 2$$

Tu je  $n$  poljubno naravno število, za  $n = 0$  npr. dobimo  $a_1 = a_0 / 2$ , za  $n = 3$  pa  $a_4 = a_3 / 2$  itd. Če poznamo začetni člen zaporedja  $a_0$ , lahko po tej zvezi postopoma izračunamo katerikoli člen zaporedja. Zaporedje lahko torej podamo tudi tako, da navedemo njegov začetni člen (v našem primeru  $a_0 = 1$ ) ter zvezo med zaporednima členoma. Tej vrsti zveze pravimo tudi, rekurzivna zveza, takemu načinu podajanja zaporedja pa rekurzivno zaporedje. Če spremenimo začetni člen, dobimo novo zaporedje; isto se seveda zgodi tudi ob spremembi rekurzivne zveze.

Podobno zgodbo lahko povemo tudi o zaporedju točk v ravnini. Zaporedje točk je tako niz točk v ravnini brez konca. Pišemo ga podobno kot številsko, le njegovi členi so točke. Sedaj, ko znamo s točkami v ravnini računati, lahko tudi zaporedje točk podajamo rekurzivno: novi člen izračunamo iz prejšnjega. Poskusite tako npr. narisati nekaj zaporednih členov zaporedja, ki je podano z začetnim členom  $b_0 = (1, 0)$  in rekurzivno zvezo  $b_{n+1} = b_n * (1/2, R/2)$ , kjer  $R$  označuje pravi kot.

Obe zaporedji, ki smo ju do sedaj srečali, imata eno skupno lastnost: členi so po velikosti čedalje manjši, čedalje bližji so 0. Pravimo, da se obe zaporedji **stekata** proti 0. Lahko bi se zgodilo, da bi se zaporedje stekalo proti kakšni drugi vrednosti. Primer: če je  $p$  poljubno število in postavimo  $c_{n+1} = p + (c_n - p)/2$ , za  $c_0$  pa poljubno število, se zaporedje steka proti  $p$ . Dobili smo ga namreč tako, da smo posameznim členom prvega zaporedja  $a$  zgoraj prišteli  $p$  (o tem se hitro prepričate sami). Številu  $p$  pravimo v tem primeru tudi stekališče zaporedja. Seveda ni nujno, da se zaporedje sploh kam steka; primer takega zaporedja dobimo iz začetnega člana 1 in rekurzivne zveze  $d_{n+1} = d_n + 1$ , drug primer (iz ravnine) pa je zaporedje z začetnim členom  $(1, 0)$  in zvezo  $h_{n+1} = h_n * (1, R/n)$ , kjer je  $R$  spet pravi kot. Pri prvem so zaporedni členi ravno naravna števila in rastejo brez meja. Pri drugem pa se členi po velikosti ne večajo, le sukajo se po krožnici s polmerom 1 okrog izhodišča. Kot se pri tem resda manjša, vendar se nikoli ne ustali.

Če v zaporedju  $a$  zgoraj spremenimo začetni člen, ostane stekališče nespremenjeno. Ne glede na to namreč, kakšen je začetni člen zaporedja, potem ko ga zadostikrat razpolovimo, pridemo tako blizu nič, kot le hočemo. Ni pa nujno vedno tako: prav lahko se zgodi, da je stekališče še kako odvisno od začetnega člana. Za primer vzemimo kar preprosto rekurzivno zvezo:  $r_{n+1} = r_n$ . Potem so vsi členi zaporedja med seboj enaki, zato se zaporedje steka kar k svojemu začetnemu členu. Vseh stekališč je torej v tem primeru toliko, kot je začetnih členov. Malo težje je najti primer, pri katerem je stekališč manj. Vendar take rekurzivne zveze obstajajo in ena med njimi nas bo še posebej zanimala. Takala je:

$$t_{n+1} = (2 t_n + 1/t_n^2)/3$$

Če za začetni člen vzamemo število, se skoraj vedno zgodi, da se zaporedje steka k 1. Zanimiveje pa je, če za začetni člen postavimo točko iz ravnine. V tem primeru pa zaporedja izbirajo med tremi stekališči. Prvo med njimi je seveda točka  $a = (1, 0)$ , drugi dve pa sta  $b = (1, 4R/3)$  in  $c = (1, -4R/3)$ , kjer  $R$  še vedno označuje pravi kot. To, da sta  $b$  in  $c$  stekališči, je lahko videti. Vzemimo za primer zaporedje, katerega začetni člen je  $b$  in izračunajmo

naslednji člen:

$$t_1 = (2b + 1/b^2)/3$$

No, ker je

$$b^2 = (1, 4R/3)^2 = (1, 8R/3) = (1, -4R/3)$$

slednje zato, ker kot  $8R/3$  predstavlja isti kot kot  $-4R/3$ . Naprej, po pravilu za recipročno vrednost iz tretjega razdelka, je

$$1/b^2 = (1, 4R/3) = b$$

Vstavimo to v zgornji izraz za  $t_1$ , pa dobimo:

$$t_1 = (2b + b)/3 = b$$

Pri začetnem členu  $b$  je tudi naslednji člen zaporedja enak  $b$ . Zato so vsi členi zaporedja enaki in je torej  $b$  stekališče zaporedja. Podoben premislek bi nas prepričal, da je  $c$  stekališče zaporedja z začetnim členom  $c$ .

Sedaj, ko smo spoznali tri stekališča zaporedij z gornjo zvezo, se prepričajmo še, da poleg njih ni drugih. Pravzaprav dokažimo tole: če se zaporedje steče, se steče k eni od gornjih treh točk. Vzemimo torej zaporedje  $t$ , ki naj se steka k točki  $z = (r_z, fi_z)$ . Ker se  $t$  steka, so si zaporedni členi čedalje bliže. Stekališča zato rekurzivna zveza ne premakne, velja torej:

$$z = (2 * z + 1/z^2)/3$$

Od tod pa za  $z$  hitro dobimo enačbo:

$$z^3 = (1, 0)$$

ter po pravilu za potenciranje

$$r_z^3 = 1$$

$$3 * fi_z = 0$$

S prvo enačbo ni problemov, pri drugi pa moramo le vedeti, da koti  $0, 4R$  in  $-4R$  pravzaprav vsi predstavljajo isti kot. Tako za  $fi_z$  dobimo tri možne vrednosti:  $0, -4R/3$  in  $4R/3$ . Isti kot kot  $0$  seveda predstavlja tudi  $8R$  ipd., vendar pri tem ne dobimo novih rešitev.

S takimi in podobnimi lastnostmi zaporedij z gornjo rekurzivno zvezo se

je prvi ukvarjal matematik Julia. Kako smo rekli — Julia? Torej moramo biti že nekje blizu tistemu posebnemu barvanju ravnine!. Res, le še korak smo od njega. Naj bo namreč  $A$  množica vseh tistih točk ravnine, iz katerih izhajajoča zaporedja se stekajo k točki  $a$ ,  $B$  množica tistih točk, iz katerih se zaporedja stekajo k  $b$  in končno  $C$  množica tistih točk, iz katerih se zaporedja stekajo k  $c$ . Točke množice  $A$  pobarvajmo rdeče, točke množice  $B$  rumeno in točke množice  $C$  zeleno, pa smo pri barvanju.

Julia je dokazal še nekaj drugih zanimivih lastnosti tega barvanja ravnine. Naštejmo nekatere najbolj zanimive med njimi! Kakorkoli izberemo točko iz katere od gornjih treh množic, lahko najdemo primerno majhno okolico (npr. naš mikroskopski krožec) te točke, ki je vsa iste barve. Ta lastnost nam torej zagotavlja, da v ravnini lahko najdemo točke s povsem enobarvnimi sosesčinami. Z drugimi besedami ta lastnost pove, da se vsa zaporedja, ki se začenjajo dovolj blizu neke pobarvane točke, stekajo k stekališču te barve.

Po drugi strani pa unija teh treh množic še ni vsa ravnina, nekaj točk smo pustili nepobarvanih. O tem se lahko prepričamo takole. Vzemimo dve različno pobarvani točki v ravnini, na primer rdečo in zeleno, in ju povežimo z daljico. Po prvi lastnosti je nekaj daljice ob rdečem krajišču rdeče, nekaj daljice ob zelenem krajišču pa zelene. Nekje na daljici se torej barva vsaj enkrat spremeni. Točka, kjer se to zgodi, ne more biti niti rdeča niti zelena niti rumena. Če bi namreč bila ene od teh barv, bi moralo biti iste barve tudi nekaj sosednjih točk, po prvi lastnosti pač. To pa ni mogoče, saj smo rekli, da se v njej barva spremeni, da je na eni strani daljica ene, na drugi pa druge barve.

Vse točke zunaj množic  $A$ ,  $B$  in  $C$  zberimo v množico  $J$ . Julia je dokazal, da se v poljubni točki iz  $J$  srečujejo vse tri množice  $A$ ,  $B$  in  $C$ . To pomeni, da so sosesčine točk iz  $J$  tribarvne, po drugi strani pa tudi, da nobena točka nima dvobarvne sosesčine. Barvanje, ki smo ga tako našli, ima torej res lastnosti, ki smo jih od njega zahtevali v uvodu.

Povedano lahko posplošimo tudi na večje število barv. Pri  $k$  barvah je rekurzivna zveza naslednja:

$$t_{n+1} = ((k-1)x_n + 1/x_n^{k-1})/k$$

Zaporedja imajo  $k$  stekališč, ki so lepo enakomerno razporejena po krožnici s polmerom 1 okrog izhodišča. Njihove polarne koordinate so naslednje:  $(1, 4i\pi/k)$ , kjer je  $i$  lahko  $0, 1, 2, \dots, k-1$ ,  $\pi$  pa je še vedno pravi kot.

Ta rekurzivna zveza je v resnici korak tangentne metode, ki jo na računalnikih uporabljamo za numerično reševanje enačb  $f(x) = 0$ . V zgornjem primeru je ta metoda uporabljena pri  $f(x) = x^k - 1$ .

Barvanje smo skušali predstaviti z računalnikom. Program Julia kaže,

kako smo prišli do slik. Zastavili smo ga splošneje, tako da z njim lahko predstavimo barvanje tudi z več kot tremi barvami, če imamo seveda na razpolago ustrezno napravo. Zato konstanta  $n$  na začetku programa pomeni število barv. Konstanta  $eps$  pove, kako blizu stekališča moramo priti, da lahko zaključimo z računanjem členov zaporedja. Program namreč točki določi barvo tako, da računa člene zaporedja, ki se v njej začne. Ker se zaporedje gotovo steče k enemu od stekališč, če mu le pride dovolj blizu, se račun vedno zaključi po končno mnogo korakih. To ne bi bilo res le v točkah množice  $J$ , tam pa nam na računalniku priskoči na pomoč nenatančno računanje. Končno sta tu še konstanti  $xPicSz$  in  $yPicSz$ , ki povesta, kako velik je zaslon v vodoravni in navpični smeri, koliko je torej v posamezni smeri na zaslonu barvnih točk.

Edini preostali del programa, ki je odvisen od računalnika, je procedura Pobarvaj. Zato smo jo navedli kot zunanji (extern) podprogram. Sami jo lahko nadomestite s svojo. Na računalniku Spectrum bi bilo lahko telo te procedure npr. takole:

```
begin
  if b = 0 then Plot (i, j);
end; (* Pobarvaj *)
```

kjer procedura Plot počrni podano točko zaslona. Tudi konstanti  $xPicSz$  in  $yPicSz$  sta prirejeni Spectrumu. Njegov zaslon je dvobarven, zato lahko na njem predstavimo le eno od pobarvanih množic. Za vtis o barvanju pa je tudi to dovolj.

Slika 8 prikazuje tribarvno Juliajevo barvanje ravnine, slika 9 pa njegovo petbarvno posplošitev. Slika 10 (na naslovni strani) pa kaže Juliajevo barvanje, kot ga z ravnine prenesemo na kroglo s stereografsko projekcijo. Pri njej se točka iz ravnine skozi ekvator krogle preslika v presečišče plašča krogle z zveznico točke in severnega pola krogle.

*Emil Beloglavec, Mitja Lakner, Andrej Vitek*

Sliki 8 in 9 sta objavljeni na IV strani ovitka te številke Preseka, slika 10 pa je bila objavljena na I. strani ovitka prejšnje številke.

Program Julia je objavljen na naslednjih treh straneh.

```

const
  n      = 3;                                (* Stopnja množice *)
  eps    = 0.02;                             (* Zaključni polmer iteracije *)
  R      = 1.5707963;                         (* Pravi kot, izražen v radianih *)

xPicSz = 255; (* število pikslov v vodoravni smeri zaslona *)
yPicSz = 175; (* število pikslov v navpični smeri zaslona *)

type
  tocka = record x,y: real end;              (* pravokotni koordinati *)
  barva = 1..n;

var
  i,j: integer;                               (* Koordinati točke v sliki *)
  b: barva;                                   (* Barva točke v sliki *)
  z: tocka;                                   (* Začetni člen *)
  stek: array [barva] of tocka;              (* Stekalizča *)

(----- Procedure, odvisne od računalnika. -----)

procedure Pobarvaj( i,j: integer; b: barva );

  (* Procedura pobarva točko (i,j) v sliki z barvo b. *)

extern;

(----- Procedure za računanje s točkami v ravnini. -----)

procedure Plus( a, b: tocka; var c: tocka );

  (* Izračuna c = a+b *)

begin
  c.x := a.x + b.x;
  c.y := a.y + b.y;
end; (* Plus *)

procedure Krat( a, b: tocka; var c: tocka );

  (* Izračuna c = a*b *)

begin
  c.x := a.x*b.x - a.y*b.y;
  c.y := a.x*b.y + a.y*b.x;
end; (* Krat *)

```

```

procedure KratReal( a: real; b: tocka; var c: tocka );

  (* Izračuna  $c = a*b$  *)

begin
  c.x := a*b.x;
  c.y := a*b.y;
end; (* KratReal *)

procedure EnaZ( a: tocka; var c: tocka );

  (* Izračuna  $c = 1/a$ , če je  $a \neq 0$  *)

  var t: real;

begin
  t := a.x*a.x + a.y*a.y;
  c.x := a.x/t;
  c.y := -a.y/t;
end; (* EnaZ *)

procedure Potenca( a: tocka; n: integer; var c: tocka );

  (* Izračuna  $c = a^n$ , če je  $n > 0$  *)

  var
    i: integer;
    t: tocka;

begin
  c.x:=1; c.y:=0;
  for i:=1 to n do
    begin Krat( a,c, t ); c:=t end;
  end; (* Potenca *)

(*--- Procedure za določanje barve točke. ---*)

procedure DolociStekalisca;

  (* Izračuna stekališča barvanja z n barvami. *)

  var
    i: integer;

begin
  for i:=1 to n do
    begin
      stek[i].x := cos( 4*(i-1)*R/n );
      stek[i].y := sin( 4*(i-1)*R/n );
    end;
  end; (* DolociStekalisca *)

```

```

procedure NaslClen( var z: tocka );

(* Izračuna naslednji člen zaporedja: *)
(*      z := ((n-1)*z + 1/zn-1)/n  *)

var
  a,b: tocka;

begin
  Potenca( z,n-1, b );
  EnaZ( b,a );
  KratReal( 1/n,a, b );
  KratReal( (n-1)/n,z, a );
  Plus( a,b, z );
end; (* NaslClen *)

function DolociBarvo( z: tocka ): barva;

(* Določi barvo podane točke. *)

var
  b: integer; (* Barva točke *)
  konec: boolean; (* Pove, ali je točka iz blizu stekališča *)

begin
  konec:=false;
  repeat
    b:=0;
    while not konec and (b<n) do
      begin
        (* pogledj, ali je točka blizu kakega stekališča *)
        b:=b+1;
        konec:=( abs( v.x-stek[b].x )
                  +abs( v.y-stek[b].y ) ) < eps;
      end; (* while *)
      if not konec then NaslClen( v, w );
    until konec;
    DolociBarvo:=b;
  end; (* DolociBarvo *)

begin (* Julia *)
  DolociStekalisca;
  for j:=1 to yPicSz do
    for i:=1 to xPicSz do
      begin
        z.x:=(2*i - xPicSz)/xPicSz;
        z.y:=(2*j - yPicSz)/yPicSz;
        b:=DolociBarvo( z );
        Fobarvaj( i,j, b );
      end;
    end;
  end. (* Julia *)

```

## NEKAJ NALOG IZ MATEMATIKE ZA UČENCE OD 5. DO 8. RAZREDA

### 5. razred

1. Vsota in produkt štirih števil je 8. Zapiši oba izraza z ustreznimi števili.
2. Izračunaj vsoto števil:  $S = 7 + 14 + 21 + 28 + \dots + 679 + 686 + 693 + 700$
3. Zapiši števila 10, 100, 1000, 10000, ... kot produkt dveh naravnih števil, v katerem ni nobene ničle.
4. Koliko električnih drogov postavijo za 10,5 km dolg daljnovod, če je razdalja med sosednjima drogovoma 100 m in se daljnovod začne in konča z drogom?
5. V tabeli so napisana števila po nekem pravilu. Poišči pravilo in vpiši manjkajoča števila.

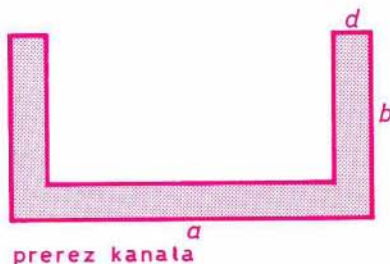
a) 

|   |   |   |   |  |    |  |
|---|---|---|---|--|----|--|
| 2 | 3 | 5 | 9 |  | 33 |  |
|---|---|---|---|--|----|--|

b) 

|   |   |   |    |  |    |  |
|---|---|---|----|--|----|--|
| 1 | 5 | 6 | 11 |  | 28 |  |
|---|---|---|----|--|----|--|

6.
  - a) V krožnico s polmerom  $r = 3$  cm včrtaj pravokotnik s stranico, ki je enaka polmeru kroga.
  - b) Pod kolikšnim kotom se sekata diagonali pravokotnika?
  - c) Kolikšen je kot med diagonalo in daljšo stranico?
7. Betonski kanal je širok  $a = 2,40$  m, visok  $b = 1,2$  m, debelina sten je  $d = 20$  cm in dolžina kanala je  $l = 100$  m.
  - a) Koliko  $\text{m}^3$  betona je vgrajeno v kanal?
  - b) Koliko  $\text{m}^3$  vode je v kanalu, če je gladina vode  $3/5$  globine kanala?
  - c) Koliko  $\text{m}^2$  je premaza v notranjosti kanala?
8. Nariši tri kroge s polmeri 2 cm, 3 cm in 4 cm tako, da se vsak dotika ostalih dveh.

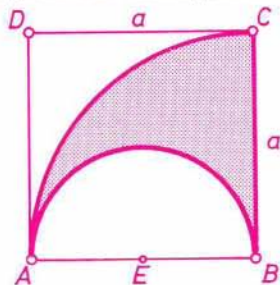


## 6. razred

- Poišči vse vrednosti spremenljivke  $x$  v izrazu  $59 + 2x$  tako, da bo vrednost izraza deljiva s 3.
- V številih
  - $34a25$ ,  $24a0$  in  $a4720$  zamenjaj črko  $a$  s takšno cifro, da bodo števila deljiva s 15,
  - $25a44$ ,  $253a8$  in  $2538a$  zamenjaj črko  $a$  s takšno cifro, da bodo števila deljiva z 8.
- Izračunaj:  $\frac{1}{2} + \frac{1}{2} \cdot (\frac{1}{2} + \frac{1}{2} \cdot (\frac{1}{2} + \frac{1}{2} \cdot (\frac{1}{2} + \frac{1}{2})))$
- Vsota obratnih vrednosti treh naravnih števil je 1. Poišči vse takšne trojice.
- V četrtno kroga s polmerom  $r = 4$  cm včrtaj kvadrat tako, da ležita sosednji stranici na polmerih, nato še izračunaj njegovo ploščino.
- Izračunaj ploščino enakokrakega trikotnika s krakoma  $a = b = 10$  cm in kotom ob osnovnici  $75^\circ$ .
- Nariši trapez  $ABCD$ , če vemo, da je  $\sphericalangle A = 90^\circ$ ,  $\sphericalangle B = 45^\circ$ ,  $BC = CD = 4$  cm. Izračunaj njegovo ploščino.
- V 500 g raztopine (voda in sol) je bilo 15% soli. Po določenem času se je zaradi izhlapevanja vode, količina raztopine zmanjšala na 300 g. Koliko % soli je bilo tedaj v raztopini?

## 7. razred

- Izračunaj vrednost izraza:  $(a - \frac{1}{a} - 1) : (a^2 + \frac{1}{a})$ , za  $a = -\frac{1}{3}$
- V enačbi  $\frac{x-2}{x+2} = k \cdot (\frac{x+2}{x-2})$  določi  $k$ , če je  $x = -\frac{10}{3}$ .
- Zvezek stane  $p$  dinarjev, svinčnik  $g$  dinarjev, radirka  $r$  dinarjev, pri čemer je  $g = \frac{1}{3}p$  in  $r = \frac{1}{4}p$ . Janez je kupil dva zvezka, štiri svinčnike in pet radirk, Breda je kupila tri zvezke, dva svinčnika in 4 radirke. Kdo je več plačal?
- Neko štirimestno število beremo enako od leve proti desni kot od desne proti levi. Poišči to število, če veš, da je enako produktu treh zaporednih praštevil.
- V kvadratu  $ABCD$  s stranico  $a$  sta načrtana dva loka: prvi s središčem v oglišču  $B$  in drugi s središčem  $E$  v razpolovišču stranice  $a$ . Obseg črtanega dela je  $10(\pi + 1)$  cm. Kolikšna je ploščina tega lika?



6. Diagonala kvadrata je  $d = a + b$ . Kolikšna sta ploščina in obseg tega kvadrata?

## 8. razred

1. Poenostavi izraz:  $\sqrt{x^2 + 4x + 4} + \sqrt{x^2 - 2x + 1} - \sqrt{x^2 - 6x + 9}$
2. Izračunaj vrednost izraza:  

$$\sqrt[3]{(2-a)^2 + (a+1)^2 + 19} \quad \text{če je } (a-1)^2 - (a-2)^2 = 7$$
3. Pokaži, da izraz

$$\frac{m+n}{m \cdot n} \cdot \left( \frac{1}{m} - \frac{1}{n} \right) - \frac{n+p}{n \cdot p} \cdot \left( \frac{1}{p} - \frac{1}{n} \right); \quad m, n, p \in \mathbb{IN}$$

lahko zapišemo v obliki razlike kvadratov dveh ulomkov. Poišči vrednost izraza za  $m = 1/3$  in  $p = 1/2$ .

4. Ob straneh pravokotnega trikotnika s hipotenuzo  $h$  in kotom  $30^\circ$  nariši enakostranične trikotnike. V kolikšnem razmerju so ploščine vseh trikotnikov?
5. V krog s polmerom  $r$  vrtaj enakokraki trikotnik, ki ima za osnovnico stranico kvadrata, ki je danemu krogu vrtan. Izračunaj ploščino trikotnika.
6. V četrtno kroga s polmerom  $r$  vrtaj enakostranični trikotnik tako, da bo eno oglišče ležalo na središču loka. Izračunaj ploščino trikotnika.

*Pavle Zajc*

## ZA SLOVO OD LETA – REŠITEV S STR. 160

Krenimo na pot po zaporednih ogliščih mnogokotnika. Brž opazimo da mora biti število  $n$ , ki je v prvem oglišču, tudi v četrtem, sedmem, ... Vsa ta oglišča zaznamujemo in naj nas pri tem nič ne moti, da smo (morda) že obhodili ves mnogokotnik. Denimo, da ima le-ta  $m$  oglišč. Če je  $m$  deljiv s tri, potem se trojica števil s prvih treh oglišč ponovi  $m/3$ -krat. Zato je vsota 1987 vseh števil v ogliščih, deljiva z vsoto prvih treh. To je mogoče le pri  $m = 3$ , kar pa je sprto z zahtevo naloge. Torej  $m$  ni deljiv s tri. Lahko se je prepričati, da smo v tem primeru zaznamovali vsa oglišča in je tedaj v vsakem oglišču število  $n$ . Vsota vseh je torej  $m \cdot n = 1987$  (praštevilo), zato imamo opraviti s 1987-kotnikom.

S podobnim sklepanjem ugotovimo, da drugi nalogi ustreza le kvadrat in 1987-kotnik.

*Boris Lavrič*

## NAGRADNA NALOGA (v počastitev Ramanujanove stoletnice)

Zapis naravnega števila  $n$  v obliki vsote pozitivnih naravnih števil imenujmo *razčlenitev števila  $n$* . Primer:  $3 + 1 + 1$  je razčlenitev števila 5. Poiščimo vse razčlenitve števila 5. Pri tem vzemimo, da zapisi, ki se razlikujejo le v vrstnem redu členov, predstavljajo isto razčlenitev. Člene v zapisu uredimo po velikosti, od največjega do najmanjšega:

$$\begin{aligned} 5 &= 5 \\ &= 4 + 1 \\ &= 3 + 2 \\ &= 3 + 1 + 1 \\ &= 2 + 2 + 1 \\ &= 2 + 1 + 1 + 1 \\ &= 1 + 1 + 1 + 1 + 1 \end{aligned}$$

Naj bo  $R(n)$  število razčlenitev števila  $n$ . Pravkar smo ugotovili, da je  $R(5) = 7$ . Podobno kot  $R(5)$  poiščimo prvih nekaj števil  $R(n)$ :

|        |   |   |   |   |   |   |    |    |    |    |    |
|--------|---|---|---|---|---|---|----|----|----|----|----|
| $n$    | 0 | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6  | 7  | 8  | 9  | 10 |
| $R(n)$ | 1 | 1 | 2 | 3 | 5 | 7 | 11 | 16 | 22 | 30 | 42 |

Vrednost  $R(0) = 1$  se zdi morda nenavadna, toda število 0 zares ima natanko eno razčlenitev, namreč prazno (brez členov).

Matematični svet slavi letos stoletnico rojstva genialnega indijskega matematika *Srinivase Ramanujana* (1887 – 1920). O njem ste lahko predlani brali v rubriki Bistroidec (V. Batagelj: Taksij št. 1729, Presek 13 (1985/86) 4, str. 226). Med drugim je Ramanujan (skupaj z angleškim matematikom G.H. Hardyjem) odkril tudi točno formulo za števila  $R(n)$ . Razumevanje formule je zahtevno, zato je ne bomo navedli, pač pa vas vabimo k računanju teh števil s pomočjo računalnika.

S tvorbo vseh razčlenitev ne pridemo daleč, tudi z računalnikom ne, saj ima npr. število  $R(100)$  devet desetiških mest,  $R(1000)$  pa že dvaintrideset. Poizkusimo nalogo rešiti tako, da jo posplošimo – včasih je namreč splošnejši problem lažji od posebnega primera. Naj bo torej  $R(k, n)$  število vseh tistih razčlenitev števila  $n$ , pri katerih največji člen ni večji od  $k$ . Kako bi računali števila  $R(k, n)$ ? Če nam to uspe, bomo lahko računali tudi števila  $R(n)$ , saj je pri  $k \geq n$  očitno  $R(k, n) = R(n)$ .

Razčlenitve, katerih največji člen ne presega števila  $k$ , lahko razdelimo na tiste, pri katerih je največji člen enak  $k$ , in tiste, pri katerih je največji člen manjši od  $k$ . Če pri prvih največji člen izpustimo, dobimo razčlenitev števila  $n - k$ , pri kateri je največji člen spet manjši ali enak  $k$ . Torej je prvih ravno  $R(k, n - k)$ . Pri drugih pa največji člen ne presega števila  $k - 1$ , torej jih je  $R(k - 1, n)$ . Dobili smo rekurzivno formulo

$$R(k, n) = R(k, n - k) + R(k - 1, n)$$

ki velja za  $n \geq k \geq 1$ . Ker vemo, da je  $R(0, n) = 0$ , če je  $n \geq 1$ , in  $R(0, 0) = 1$ , lahko začnemo računati. Na poti do cilja je še precej težav — a ker je naloga nagradna, prepuščamo nadaljevanje vam.

NALOGA: Izračunajte  $R(n)$  za karseda velik  $n$ . Pri tem hočemo točno vrednost, torej vse cifre. Poslani izdelek naj vsebuje:

1. števili  $n$  in  $R(n)$
2. kratko razlago uporabljenega postopka
3. program
4. podatke o računalniku (tip, velikost pomnilnika)
5. podatke, koliko časa je računalnik porabil za računanje števila  $R(n)$  iz 1. točke

Pri ocenjevanju pravih odgovorov bomo upoštevali:

1. velikost števila  $n$  (glede na tip in velikost računalnika)
2. kakovost uporabljenega postopka
3. ličnost programa.

Tudi če se vaš izdelek odlikuje le v eni od teh treh kategorij (npr. niste prišli daleč z  $n$ -jem, ste se pa potrudili in napisali ličen program; ali pa ste izračunali  $R(n)$  za velik  $n$ , medtem ko je program pravo sračje gnezdo), nam ga vsekakor pošljite. Najboljši triji reševalci bodo dobili knjižne nagrade. Izvirno rešitev bomo objavili.

Rok za pošiljanje izdelkov: 1.III. 1988. Na ovojnico poleg naslova pripišite: (za Ramanujan).

Pripomba o terminologiji: S tujo besedo rečemo zapisu števila v obliki vsote *particija*. Nekateri uporabljajo izraz *razbitje*, ki pa ima rahel prizvok nečesa nasilnega. Ker sestavnim delom aritmetičnega izraza, ki ima obliko vsote, rečemo *členi* (prim. izraze *enočlenik*, *dvočlenik* ipd.), se mi zdi morda še najprimernejši izraz *razčlenitev*.

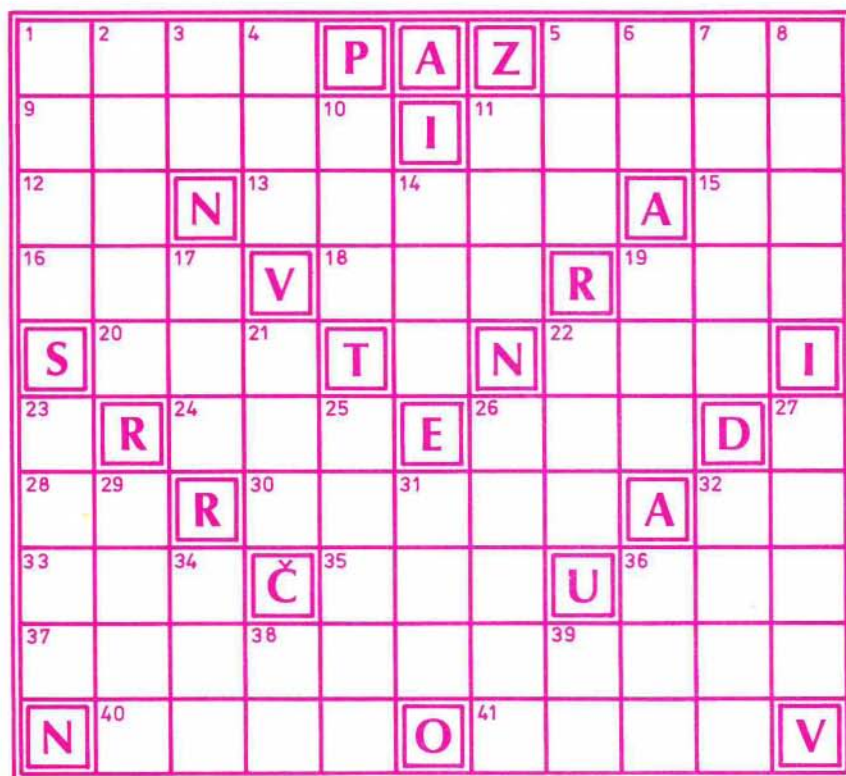
Marko Petkovšek

## ŠTEVILSKA KRIŽANKA POTENCE IN POŠTEVANKA

VODORAVNO:

1.  $2 \cdot (2^3 \cdot 7 \cdot 11 + 1)$
5.  $2 \cdot (2^4 + 1) \cdot (2^3 \cdot 3 \cdot 7 - 1)$
9.  $2 \cdot 11^2 \cdot 13^1 \cdot (2^2 + 5^5)$
11.  $(2^2 \cdot 3^3 + 1) \cdot (2^3 \cdot 5 \cdot (2^2 + 3^2) + 1)$
12.  $(1^2 + 2^2) \cdot (2^2 + 3^2)$
13.  $3^2 \cdot (2^2 \cdot 3^2 + 1) \cdot (7^2 - 2^2 \cdot 3)$
15.  $2^3 \cdot (3^2 - 2)$

16.  $2^2 \cdot 3(3^4 - 2^3)$
18.  $5 \cdot (11^2 - 2^2 \cdot 3)$
19.  $2 \cdot 3 \cdot (1 + 7 \cdot 2^4)$
20.  $3 \cdot (5^2 + 2^4)$
22.  $3 \cdot (2^2 \cdot 3^3 - 1)$
23.  $2^1 \cdot 3^1 - 0^1$
24.  $2 \cdot (1 + 2^2 \cdot 3^2) \cdot 3^2$
26.  $3 \cdot 7 \cdot (7^2 - 2^2 \cdot 3)$
27.  $2^3 - 1^3$



28.  $(3 + 7)^2 - 2 \cdot 3 \cdot 7$
30.  $3 \cdot (2^2 \cdot 3 \cdot 7 \cdot (2^3 \cdot 5 \cdot 7 + 1) - 1)$
32.  $1^3 \cdot 2^2 \cdot 3^1 \cdot 5^1$
33.  $3 \cdot (1 + 6^2) \cdot 2^2$
35.  $3^2 \cdot (7^2 - 3 \cdot 2^2)$
36.  $3 \cdot (5^2 + 2^2 \cdot 3) \cdot 5$
37.  $2^7 \cdot 3^2 \cdot 11 \cdot (2^2 \cdot 3^5 \cdot (2^4 + 1)(2^3 \cdot 13 - 1) - 1) - 1)$
40.  $5 \cdot 7 \cdot (2^6 + 3^1)$
41.  $2^3 \cdot 7 \cdot (2^2 \cdot 5^2 - 3^1)$

NAVPIČNO:

1.  $2^4 \cdot 3 \cdot (7^2 - 2^3)$
2.  $(1 + 6^2) \cdot (2 + 3^2) \cdot (4 + 7^2)$
3.  $2^5$
4.  $2^4 \cdot 3^3 - 1$
5.  $3 \cdot (1 + 2^4)(2 + 3^2)$
6.  $2^2 \cdot (2^4 + 1) - 1$
7.  $2 \cdot 3^4 \cdot (1^2 + 2^2) \cdot (2 \cdot 7^2 - 1) + 1$
8.  $2^3 \cdot (2^4 + 3)(2^2 \cdot 3 \cdot 5 - 1)$

10.  $(1 + 2^4) \cdot 5^2$
11.  $3 \cdot (2^2 + 1)^2 \cdot (2^3 - 1)$
14.  $2^3 \cdot (5 \cdot 3^2 - 2)$
17.  $2 \cdot ((2 \cdot (2^2 \cdot 3(2^2 + 3^2) + 1) - 1) - 1)$
19.  $3 \cdot (2 + 3^2) \cdot (3 + 2^4)$
21.  $2^4 \cdot (5^2 - 2) - 1$
22.  $2^2 \cdot 5 \cdot (2^4 + 3) - 1$
23.  $2 \cdot (1 + (1 + 2^2 \cdot 3^3) \cdot 2 \cdot 3 \cdot 5)$
25.  $3 \cdot (2^3 - 1)(5^2 - 2) \cdot 5^3$
26.  $5^3 \cdot (2^2 \cdot 3 \cdot (3 \cdot 2^4 - 1) - 1)$
27.  $2^2 \cdot (7^2 - 2^3) \cdot (7^2 - 2 \cdot 3)$
29.  $2^2 \cdot 3 \cdot (2 \cdot 3^3 \cdot (2^2 + 3^2) - 1)$
31.  $7^2 \cdot (1 + 2^4)$
32.  $(1 + 6^2)(2 + 3^2)(2^2)^2$
34.  $3 \cdot (1 + 2 \cdot 3 \cdot 5^2)$
36.  $7 \cdot (3^4 - 2)$
38.  $2^6$
39.  $(1^2 + 2^2)(2^2 + 3^2) - 1$

*Franci Oblak*

# **PRESEK — list za mlade matematike, fizike, astronome in računalnikarje** **15. letnik, šolsko leto 1987/88, številka 3, strani 129 — 192**

UREDNIŠKI ODBOR: Vladimir Batagelj, Dušica Boben (pisma bralcev, stavljenje teksta), Darjo Felda (tekmovanja iz matematike), Franci Forstnerič, Bojan Golli (tekmovanja iz fizike), Marjan Hribar (fizika), Damjan Kobal (razvedrilo), Jože Kotnik, Edvard Kramar, Sandi Klavžar (računalništvo), Andrejs Kmet, Boris Lavrič (matematika, odgovorni urednik), Gorazd Lešnjak, Matija Lokar, Franci Oblak, Peter Petek (premislji in reši), Pavla Ranzinger (astronomija), Tomaž Skulj, Marjan Smerke (svetovalec za fotografijo), Anton Suhadolc (glavni urednik), Ivanka Šircelj (jezikovni pregled), Miha Štalec (risbe), Ciril Velkoverh (urednik, nove knjige, novice).

Dopise pošiljajte in list naročajte na naslov: Društvo matematikov, fizikov in astronomov SRS — Podružnica Ljubljana — Komisija za tisk, Presek, Jadranska c. 19, 61111 Ljubljana, p.p. 64, tel. (061) 265—061/53, št. žiro računa 50101—678—47233. Naročnina za šolsko leto 1987/88 je za posamezna naročila 2700.— din, za skupinska naročila pa 1800.—, posamezna številka 500.— din/300.— din.

List sofinancirajo Izobraževalna, Kulturna in Raziskovalna skupnost Slovenije  
Ofset tisk Časopisno in grafično podjetje DELO, Ljubljana  
© 1987 Društvo matematikov, fizikov in astronomov SRS — 884

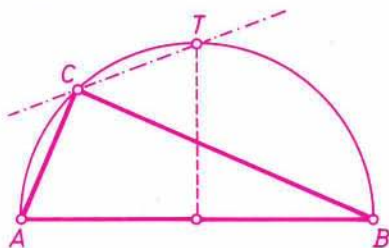
## 3. ŠOLSKO TEKMOVANJE IZ MATEMATIKE – Rešitve iz P–2

### 1. letnik

1. Imejmo dvomestno število  $\overline{ab}$  in zapišimo  $(10a + b) - (10b + a) = 9(a - b)$ . Vidimo, da je razlika deljiva z 9.
2. Ker je  $8^n + 1 = 2^{3n} + 1 = (2^n + 1)(2^{2n} - 2^n + 1)$ , je torej  $8^n + 1$  pri vsakem naravnem številu  $n$  sestavljeno.
3. Če je bila cena izdelka pred podražitvijo  $a$ , je bila po njej  $5a/4$ . Ker bo po pocenitvi spet  $a$ , bo pocenitev 20%.
4. V 5 dneh je Luka postavil  $1/3$  zidu, zato bo 6. dan postavil preostali  $2/3$  (dvakrat toliko kot prejšnje dni skupaj), zid bo torej postavljen v šestih dneh.

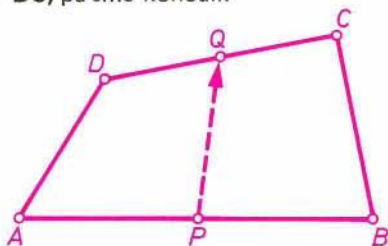
### 2. letnik

1. Oglejmo si poljuben pravokotni trikotnik  $ABC$ . Naj bo  $T$  vrh polkroga nad hipotenuzo  $AB$ . Premica skozi  $C$  in  $T$  je simetrala zunanjšega kota pri  $C$ , saj je  $\sphericalangle TCB = 45^\circ$  ( $= \sphericalangle TAB$ , nad istim lokom), kar pomeni, da se vse simetrale sekajo v  $T$ . (Pri tem smo tiho privzeli, da je kot pri oglišču  $A$  večji od  $45^\circ$ . Drugi primer gre analogno.)



2. Če upoštevamo pogoje za  $z = (x, y, z)$ , dobimo enačbe:  $x + y + z = 0$ ,  $5x - y + z = 0$  in  $x - 2y - 2z = 6$ . Rešitev sistema je  $z = (2, 4, -6)$ .

3. Najprej iz  $\vec{PQ} = -\vec{AB}/2 + \vec{AD} + \vec{BC}/2$  in  $\vec{PQ} = \vec{AB}/2 + \vec{BC} - \vec{DC}/2$  dobimo  $2\vec{PQ} = \vec{AD} + \vec{BC}$ ; upoštevamo še  $\vec{AD} = \vec{AC} + \vec{CD}$  in  $\vec{BC} = \vec{BD} + \vec{DC}$ , pa smo končali.

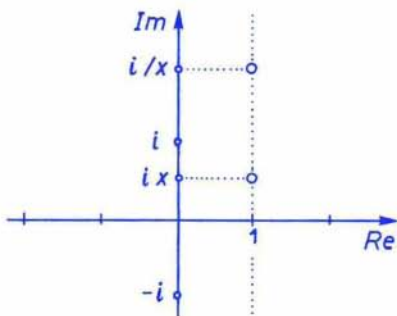


4. Glej rešitev 4. naloge za prvi letnik.

### 3. letnik

1. Če naj bosta  $x_1, x_2 = 1 \pm \sqrt{2}/m$  pozitivna, moramo izbrati  $m > \sqrt{2}$  ali  $m < -\sqrt{2}$ .

2. Veljati mora  $|1 + ix| < |1 + i/x|$  oziroma  $|x| < |1/x|$ , zato  $-1 < x < 1$ .



3. Izraz preoblikujemo v  $(1/2) \sin 30^\circ \cos 30^\circ = \sqrt{3}/8$ .

4. Trditev naloge je posledica ugotovitve  $-\pi/2 < -1 \leq \cos x \leq 1 < \pi/2$ .

### 4. letnik

1. Glej rešitev 4. naloge za 3. letnik.

2. Dejansko je treba poiskati presečišče krožnice s središčem v  $S(1, 0)$  in polmerom 2 z ordinatno osjo. Tako dobimo:  $z_1 = i\sqrt{3}$  in  $z_2 = -i\sqrt{3}$ .

3. Pogoji  $-1 < (3 - 2m)/(m + 1) \leq 1$  da po kratkem premisleku in računu  $2/3 \leq m < 4$  (ko je  $m = 3/2$ , je kvocient geometrijskega zaporedja enak 0).

4. Po Vietovem pravilu dobimo  $x_1 = 1$  in  $x_2 = a - 1$ . Vsota kvadratov bo minimalna, ko bo  $x_2 = 0$  oziroma  $a = 1$ .

*Darjo Felda*

## PLESKARSKA

(med izdelki izbirnega tekmovanja 1986)

Naloga: Ravnina je pobarvana z belo in črno barvo. Dokaži, da obstaja v ravni enakokrak pravokoten trikotnik, ki ima vsa oglišča iste barve.

Rešitev: Če ravnino pobarvamo z belo in črno barvo, postane siva, torej so res vsa oglišča iste barve — namreč siva.

*Darjo Felda*

### 13. IZBIRNO TEKMOVANJE IZ MATEMATIKE – Rešitve iz P–2

#### 1. letnik

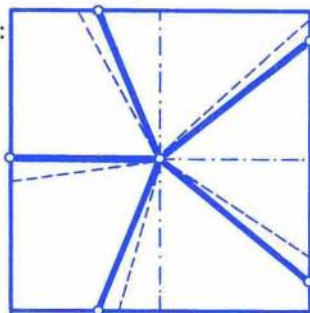
1. Razcepimo izraz  $k^{n+4} - k^n = k^n (k - 1)(k + 1)(k^2 + 1)$  in pišimo  $120 = 2^3 \cdot 3 \cdot 5$ . Da je izraz deljiv s 3, je očitno, saj so  $k - 1$ ,  $k$  in  $k + 1$  tri zaporedna naravna števila. Prav tako se hitro prepričamo, da je deljiv z  $2^3$ : če je namreč  $k$  sod, to sledi iz podatka  $n \geq 3$  in prvega faktorja v razcepu, če je pa lih, so  $k - 1$ ,  $k + 1$  in  $k^2 + 1$  sodi. Preostane nam še deljivost s 5. Po vrsti pogledjmo vse možnosti:

- če je  $k = 5p$ , je prvi faktor v razcepu deljiv s 5;
- če je  $k = 5p + 1$ , je drugi faktor deljiv s 5;
- če je  $k = 5p + 2$ , je  $k^2 + 1 = 25p^2 + 20p + 4 + 1 = 5(5p^2 + 4p + 1)$ ;
- če je  $k = 5p + 3$ , je  $k^2 + 1 = 25p^2 + 30p + 9 + 1 = 5(5p^2 + 6p + 2)$ ;
- če je  $k = 5p + 4$ , je tretji faktor v razcepu deljiv s 5.

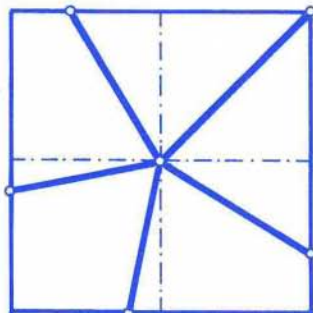
2. Iskani ulomki niso večji od 1, zato  $a_i < b_i$ . Ker morajo biti bežji od  $7/9$ , mora biti števec le za 1 manjši od imenovalca, sicer bi dobili  $(b - 2)/b = 1 - 2/b$ , kar je največ  $3/4$  (saj je  $b \leq 8$  iz pogojev v nalogi). Potem pa sklepamo:  $(b_i - 1)/b_i < (b_k - 1)/b_k$ ,  $1 - 1/b_i < 1 - 1/b_k$  in  $b_k > b_i$ . Toda  $b_i = 2, 3$  in  $4$  ne pridejo v upoštevanje (ulomki  $1/2, 2/3$  in  $3/4$  so namreč premajhni), zato je rešitev  $7/9 < 4/5 < 5/6 < 6/7 < 7/8 < 8/9$ .

3. Iz  $a + b = 1$  sledi  $a^2 + 2ab + b^2 = 1$ , velja pa tudi  $a^2 - 2ab + b^2 \geq 0$ ; upoštevajmo to dvoje, pa imamo  $2a^2 + 2b^2 \geq 1$  oziroma  $a^2 + b^2 \geq 1/2$  in  $a^4 + 2a^2b^2 + b^4 \geq 1/4$ . Slednje nam skupaj z  $a^4 - 2a^2b^2 + b^4 \geq 0$  prinese iskano neenakost  $a^4 + b^4 \geq 1/8$ .

4. Narišimo skici:



skica 1

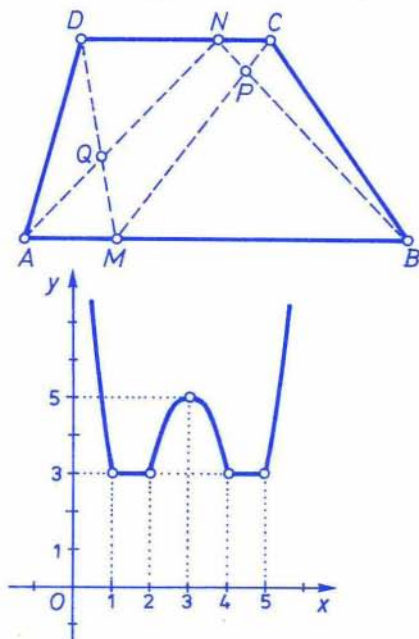


Skica 2

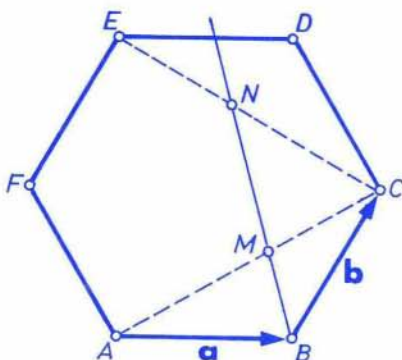
Če pristanišča pomaknemo za  $a/10$  od narisanih primerov, dobimo v bistvu enake rešitve. Na skici 1 je s polno črto označena najboljša varianta. V tem primeru je namreč  $d = a/2 + 2\sqrt{(a/2)^2 + (a/5)^2} + 2\sqrt{(a/2)^2 + (2a/5)^2}$ . Če se premaknemo za  $x \leq a/10$ :  $d_x = \sqrt{(a/2)^2 + x^2} + \sqrt{(a/2)^2 + (a/5 - x)^2} + \sqrt{(a/2)^2 + (a/5 + x)^2} + \sqrt{(a/2)^2 + (2a/5 - x)^2} + \sqrt{(a/2)^2 + (2a/5 + x)^2}$ . Pokažimo, da je  $d \leq d_x$ . Najprej je  $a/2 \leq \sqrt{(a/2)^2 + x^2}$ . Nato  $2\sqrt{(a/2)^2 + (a/5)^2} \leq \sqrt{(a/2)^2 + (a/5 - x)^2} + \sqrt{(a/2)^2 + (a/5 + x)^2}$ , saj dobimo po kvadriranju in ureditvi  $29a^2/100 - x^2 \leq \sqrt{(29a^2/100)^2 + 21a^2x^2/50 + x^4}$ , kar je očitno res. Analogno pokažemo še za tretji člen v  $d$ . (Če vzamemo  $x = a/10$ , je  $d_x$  ravno vsota razdalj s skice 2.)

## 2. letnik

1. Ploščina trapeza je  $S_{ABCD} = (a + c)v/2 = av/2 + cv/2 = S_{ABN} + S_{CDM}$ . Ker je štirikotnik  $MNPQ$  v vsoti  $S_{ABN} + S_{CDM}$  dvakrat štet, trikotnika  $DAQ$  in  $CPB$  pa nista upoštevana, je trditev dokazana.



2.  $AM = k AC = k(a + b)$ ;  $CN = k CE = k(-a + b)$ . Če naj  $B$ ,  $M$  in  $N$  ležijo na isti premici, mora veljati  $BN = t \cdot BM$  oziroma  $b + k(-a + b) = t(-a + k(a + b))$ . Ta vektorska enačba nam da sistem  $t - 2k - kt = 0$ ,  $1 + k - kt = 0$  s smiselno rešitvijo  $k = \sqrt{3}/3$ .

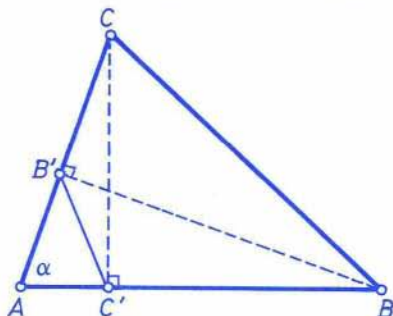


3. Pomagajmo si z grafom funkcije  $y = |x^2 - 6x + 8| + |x^2 - 6x + 5|$ . Premica  $y = a$  bo imela z grafom več kot tri skupne točke, če bomo izbrali  $3 \leq a < 5$ .

4. Najprej  $b$  ne more biti 1, saj dvomestno število ni štirimestno, pa tudi 4 ali več ne more biti, ker je že  $10^4$  petmestno število. Niti  $b = 2$  ne prinese rešitve, saj bi moralo veljati  $(11a)^2 = 1001a + 220$  oziroma  $11a^2 = 91a + 20$ , ta enačba pa nima celoštevilskih rešitev (diskriminanta ni popoln kvadrat). Oglejmo si še možnost  $b = 3$ :  $(11a)^3 = 1001a + 330$  ali lepše:  $121a^3 = 91a + 30$ , kar da edino rešitev  $a = 1$  (za večje  $a$  je leva stran enačbe večja od desne). Dešifrirana enakost je  $11^3 = 1331$ .

### 3. letnik

1. Najprej je  $AC' = AC \cos a$  in  $AB' = AB \cos a$ , nato  $2 S_{ABC} = AB AC \sin a$  in  $2 S_{AC'B'} = AB AC \sin a \cos^2 a$ , odtod pa  $S_{AC'B'}/(S_{ABC} - S_{AC'B'}) = \cos^2 a / (1 - \cos^2 a) = \cos^2 a / \sin^2 a$ .



2. Pišimo  $z = a + bi$ . Potem je  $a^2 + b^2 = 4$  in izraz  $z - 1/z$  preoblikujemo v  $a + bi - (a - bi)/4 = 3a/4 + 5bi/4$ . Iščemo torej najmanjšo vrednost izraza  $\sqrt{9a^2/16 + 25b^2/16} = \sqrt{36 + 16b^2}/4$ . Izbrati moramo  $b = 0$ , pa dobimo še  $a = \pm 2$ . Iskani števili sta dve: 2 in -2.

3. Pišimo:  $p(x) = x(x^{98} - 1 + x^{32} - 1) + 2x + (x^{66} - 1) + 2 = x(x^2 - 1)(q(x) + r(x)) + (x^2 - 1)s(x) + 2(x + 1)$ . Pri tem so polinomi  $q, r$  in  $s$  ustrezne vsote sodih potenc. Ostanek je torej  $2x + 2$ .

4. Če označimo z  $S_L$  vsoto vseh tistih koeficientov polinoma  $P(x)$ , ki so ob lihih potencah spremenljivke  $x$ , z  $S_S$  pa vsoto vseh tistih, ki so ob sodih, je  $P(1) = S_L + S_S$  in  $P(-1) = S_S - S_L$ . Zato  $2 S_L = P(1) - P(-1) = 5^{1987} + (-5)^{1987} - 1 - 1 = -2$  in  $S_L = -1$ .

### 4. letnik

1. Pišimo:  $q(x) = p(x) - 5$ . Polinom  $q(x)$  ima pri istih štirih različnih naravnih vrednostih ničle. Velja torej razcep  $q(x) = a_1(x - a)(x - b)(x - c)(x - d)$ . Iz  $q(0) = 30 = a_1(-a)(-b)(-c)(-d)$  in  $30 = 1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 5$  sledi  $a_1 = 1$ , za  $a, b, c$  in  $d$  pa izberemo po vrsti 1, 2, 3 in 5. Potem je  $p(x) = q(x) + 5 = (x - 1)(x - 2)(x - 3)(x - 5) + 5 = x^4 - 11x^3 + 41x^2 - 61x + 35$ .

2. Dokažimo z indukcijo.  $P_1 = 2$  je deljiv z 2. Predpostavimo, da je  $P_n$  deljiv z  $2^n$ , in zapišimo:  $P_{n+1} = (2n+1)(2n+2)P_n/(n+1) = 2(2n+1)P_n$ . Odtod pa vidimo, da je  $P_{n+1}$  deljiv z  $2^{n+1}$ , in dokaz je končan.

Trditev je razvidna tudi iz računa:

$$(n+1)(n+2)\dots(2n) = \frac{1.2.3\dots n.(n+1)\dots(2n)}{1.2.3\dots n} = \frac{(1.3.5\dots(2n-1))(2.4.6\dots(2n))}{1.2.3\dots n} =$$

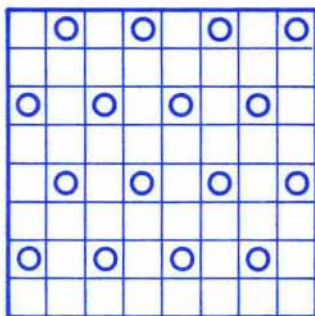
$$= 1.3.5\dots(2n-1).2^n \cdot \frac{1.2.3\dots n}{1.2.3\dots n} = 2^n \cdot 1.3.5\dots(2n-1)$$

3. Prav hitro najdemo rešitev  $x = 2$ . Funkcije  $x$ ,  $2^x$  in  $\log_2 x$  so naraščajoče, zato drugih rešitev ni.

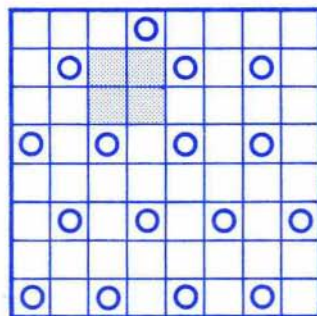
4. a) Ker tablo lahko razdelimo na 16 kvadratov s po štirimi polji (2 polji x 2 polji), ostane vsaj en kvadrat nepokrit.

b) Tablo si spet mislimo razdeljeno na 16 kvadratov 2 x 2. Figure postavimo tako, da noben kvadrat 2 x 2 (kjerkoli na šahovnici) ne ostane brez figure. Primera:

Dobra rešitev:



Slaba rešitev:



*Darjo Felda*

## PRAZNIK

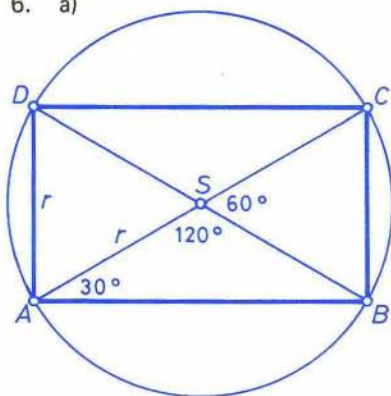
Prvo sredo po prvem torku v mesecu bomo praznovali, prvo sredo istega meseca pa ne. Prvi četrtek v naslednjem mesecu ni praznika, prvi četrtek po prvi sredi pa je. Kateri? Se bo to zgodilo pred letom dvatisoč?

*Boris Lavrič*

NEKAJ NALOG IZ MATEMATIKE ZA UČENCE  
OD 5. DO 8. RAZREDA – Rešitve s str. 169

5. razred

1.  $1 + 1 + 2 + 4 = 8$  in  $1.1.2.4 = 8$
2.  $S = 7 + 14 + 21 + \dots + 686 + 693 + 700$   
 $S = 1.7 + 2.7 + 3.7 + \dots + 98.7 + 99.7 + 100.7$   
 $S = 7 \cdot (1 + 2 + 3 + \dots + 98 + 99 + 100)$   
 $S = 7 \cdot ((1 + 100) + (2 + 99) + \dots + (50 + 51))$   
 $S = 7 \cdot 50 \cdot 101$   
 $S = 35350$
3.  $10 = 2.5$   
 $100 = 4.25$   
 $1000 = 8.125$   
 $100\,000\,000 = 10^8 = (2.5)^8 = 2^8 \cdot 5^8 = 256.390625$  že ne zadošča pogojem.
4. Za takšen daljnovod postavijo 106 drogov.
5. a) Vsako število, začneš z drugim, dobimo tako, da od dvakratnika predhodnjega števila odštejemo 1. Manjkajoči števili sta 17 in 65.  
 b) Vsako tretje število je enako vsoti predhodnih dveh števil. Zapiši sam!
6. a)

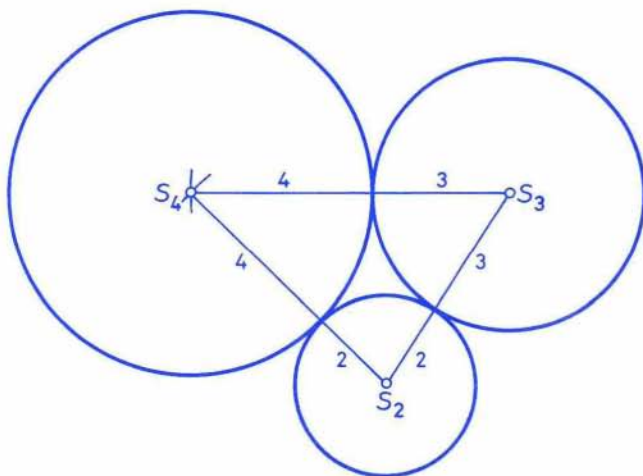


- b)  $\triangle ASD$  je enakostraničen  
 $\sphericalangle ASD = 60^\circ$   
 $\sphericalangle DSC = 120^\circ$

Diagonali se sekata pod kotom  $60^\circ$  ( $120^\circ$ ).

- c)  $\sphericalangle BCA = 90^\circ - 60^\circ = 30^\circ$
7. Poti do rešitve naloge je več.
  - a)  $V = 120.20.10000.2 + 200.20.10000$   
 $V = 88\text{ m}^3$
  - b)  $\frac{3}{5}$  od  $100\text{ cm} = 60\text{ cm}$   
 $V = 200.60.10000$   
 $V = 120\text{ m}^3$
  - c)  $P = (a + 2b - 4d) \cdot l = 400\text{ m}^2$

8. Zveznice središč krogov so stranice trikotnika  $S_2S_3S_4$  in imajo dolžino 5 cm, 6 cm in 7 cm.



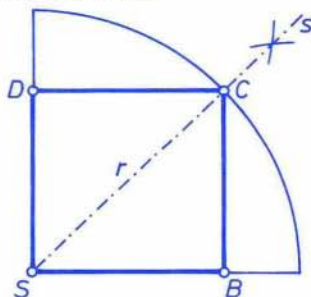
#### 6. razred

- $x \in \{2, 5, 8, 11, 14, \dots\}$
- Število je deljivo s 15, če je deljivo s 3 in 5.  
 $a = 1, 4, 7$   
 $b = 0, 3, 6, 9$   
 $c = 2, 5, 8$
  - Število je deljivo z 8, če je trimestni konec deljiv z 8.  
 $x = 1, 3, 5, 7, 9$   
 $y = 2, 6$   
 $z = 4$
- Vsota ulomkov je 1.
- Iskane trojice naravnih števil so  $(2, 3, 6)$ ,  $(2, 4, 4)$  in  $(3, 3, 3)$ .
- Diagonala kvadrata leži na simetrični pravemu kota.

$$\overline{AC} = r$$

$$p = \frac{1}{2} r^2$$

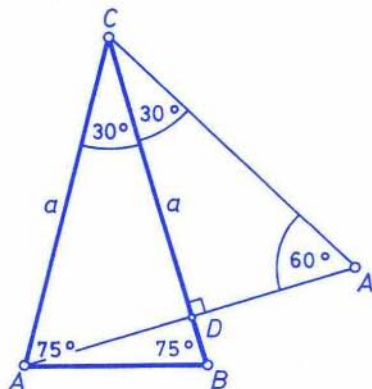
$$p = 8 \text{ cm}^2$$



$$6. \quad p = \frac{1}{2} a \cdot \frac{a}{2}; \quad v = AD = \frac{AC}{2} = \frac{a}{2}$$

$$p = a^2 / 4$$

$$p = 25 \text{ cm}^2$$

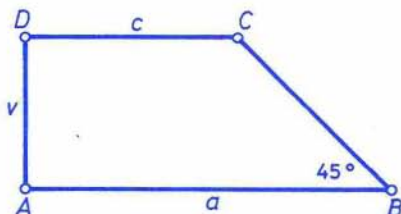


$$7. \quad \overline{BC} = \overline{CD} = 4 \text{ cm} \Rightarrow v = \overline{AD} =$$

$$= 4 / \sqrt{2} \text{ cm} = 2\sqrt{2} \text{ cm}$$

$$p = 2\sqrt{2}(4 + \sqrt{2}) \text{ cm}^2 =$$

$$= 4(1 + 2\sqrt{2}) \text{ cm}^2$$



8. Količina soli ostane pri izhlapevanju vode nespremenjena. Spreminja se njen delež v raztopini.

$$15\% \text{ od } 500 \text{ g} = 75 \text{ g (soli)}$$

$$75 \text{ g} = x\% \text{ od } 300 \text{ g}$$

$$75 = \frac{x}{100} \cdot 300$$

$$3. \quad x = 75$$

$$x = 25$$

V raztopini je 25% soli.

## 7. razred

$$1. \quad -\frac{15}{26}$$

$$2. \quad k = 16$$

$$3. \quad \text{Janez: } \frac{55}{12} p = 4 \frac{7}{12} p, \quad \text{Breda: } \frac{56}{12} p = 4 \frac{2}{3} p.$$

4. Iz besedila naloge sledi, da ima iskano število  $n$  obliko  $abba$ .

$$n = 1000a + 100b + 10b + a$$

$$n = 1001a + 110|b|$$

$$n = 11(91a + 10b)$$

Med faktorji je torej praštevilo 11. Vse možnosti so potem (5, 7, 11), (7, 11, 13) in (11, 13, 17). Iskano število je  $7 \cdot 11 \cdot 13 = 1001$ .

$$5. \quad r = a$$

$$a = \frac{\rho}{\pi + 1}$$

$$\rho = \frac{2\pi a}{2} + \frac{2\pi \frac{a}{2}}{2} + a$$

$$a = 10 \text{ cm}$$

$$\rho = \pi a + a$$

$$\rho = \frac{\pi a^2}{4} - \frac{\pi a^2}{8}$$

$$\rho = a(\pi + 1)$$

$$\rho = 25\pi - 12,5\pi$$

$$\rho = 12,5\pi \text{ cm}^2$$

6. Označimo stranico kvadrata s  $c$ .

$$d = a + b$$

$$c^2 = \frac{(a + b)^2}{2}$$

$$\rho = \frac{(a + b)^2}{2}$$

$$c = \frac{a + b}{\sqrt{2}}$$

$$\rho = 4c$$

$$c = \frac{(a + b)\sqrt{2}}{2}$$

$$4c = 2\sqrt{2}(a + b)$$

## 8. razred

1. Poenostavljen izraz ima obliko  $|x + 2| + |x - 1| - |x - 3|$

2.  $(a - 1)^2 - (a - 2)^2 = 7$ , torej  $-2a + 1 - (-4a + 4) = 7$  ali  $a = 5$ . Vrednost izraza je tedaj 4.

$$3. \quad \frac{m+n}{m \cdot n} \cdot \left(\frac{1}{m} - \frac{1}{n}\right) - \left|\frac{n+p}{n \cdot p}\right| \cdot \left(\frac{1}{p} - \frac{1}{n}\right) =$$

$$= \left(\frac{1}{n} - \frac{1}{m}\right)\left(\frac{1}{m} - \frac{1}{n}\right) - \left(\frac{1}{p} + \frac{1}{n}\right)\left(\frac{1}{p} - \frac{1}{n}\right) = \frac{1}{m^2} - \frac{1}{n^2} - \frac{1}{p^2} + \frac{1}{n^2} =$$

$$= \left(\frac{1}{m}\right)^2 - \left(\frac{1}{p}\right)^2 = 5$$

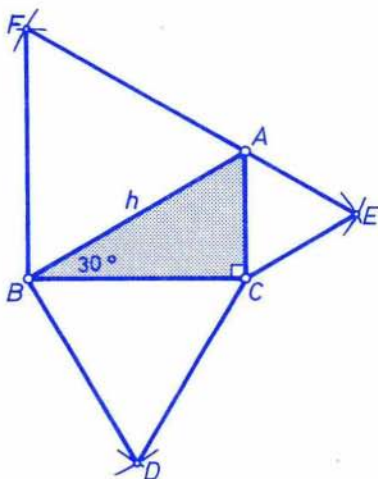
$$4. \quad p(AEC) = \frac{1}{4} \cdot \frac{h^2\sqrt{3}}{4} = \frac{h^2\sqrt{3}}{16}$$

$$p(ABC) = \frac{h^2\sqrt{3}}{8}$$

$$p(ABF) = \frac{h^2\sqrt{3}}{4}$$

$$p(BCD) = \frac{3h^2\sqrt{3}}{8}$$

$$p(AEC) : p(ABC) : p(BCD) : \\ : p(ABF) = 1 : 2 : 3 : 4$$



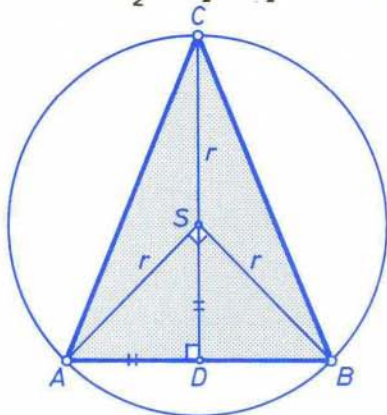
$$5. AB = r\sqrt{2}$$

$$v = DC = \frac{r\sqrt{2}}{2} + r$$

$$v = r\left(\frac{\sqrt{2}}{2} + 1\right)$$

$$p = \frac{1}{2} \cdot r\sqrt{2} \cdot \left(\frac{\sqrt{2}}{2} + 1\right) \cdot r$$

$$p = r^2 \left(\frac{\sqrt{2}}{2} + \frac{1}{2}\right) = \frac{r^2}{2}(1 + \sqrt{2})$$



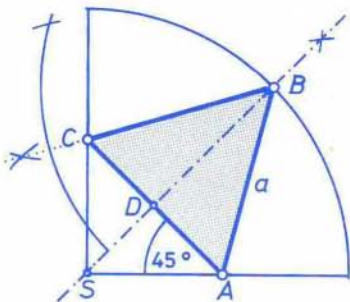
$$6. r = \overline{SD} + \overline{DB}, \quad \overline{DB} = \frac{a}{2}\sqrt{3},$$

$$\overline{SD} = \frac{a}{2}, \quad r = \frac{a}{2}(\sqrt{3} + 1)$$

$$a = \frac{2r}{\sqrt{3} + 1} = r(\sqrt{3} - 1)$$

$$p = \frac{1}{4} \cdot (r(\sqrt{3} - 1))^2 \cdot \sqrt{3} =$$

$$= \frac{r^2}{2}(2\sqrt{3} - 3)$$



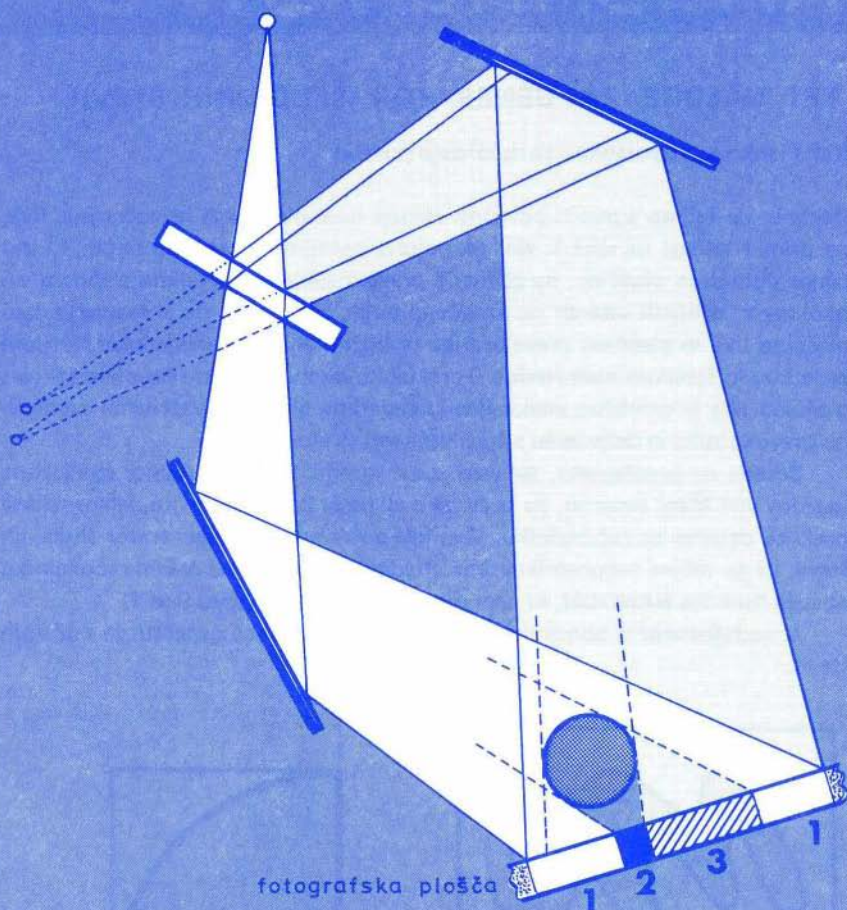
## NA PRAGU TRAGEDIJE — rešitev iz Preseka XIV–2

Vprašanje iz fizike v drugi številki lanskega Preseka ni ostalo brez odmeva. Prejeli smo namreč pravičen odgovor Luke Freliha iz Ljubljane in ga objavljamo v skoraj nespremenjeni obliki. Opravičujemo se za zakasnitev, Luki pa za nagrado pošiljamo knjigo M. Lane, *Kratka zgodovina fizike*.

*Uredništvo*

Ko laserska svetloba pade na plan–vzporedno ploščo, se zaradi razlike lomnih količnikov med steklom in zrakom približno 4% svetlobe odbije od sprednje površine stekla, 4% pa od zadnje površine stekla. Skupna slika teh dveh valovanj so temne in svetle proge, ki so značilne za interferenco dveh ravnih valovanj.

Nekaj več kot 90% svetlobe pa gre skozi plan–vzporedno ploščo. To valovanje je na skici označeno z O.



Tako imamo na fotografski plošči tri različna območja:

1. Območje, ki ga doseže svetloba po obeh poteh. Na tem območju interferenčne proge niso vidne, ker njihov učinek preglaši približno 10 krat močnejša svetloba, prepuščena skozi ploščo.
2. Področje popolne sence, na skici označeno s črno barvo. Tega območja ne doseže nobeno od obeh valovanj.
3. Področje polsence, na skici označeno z rdečo barvo. To področje doseže le odbita svetloba, zato so lepo vidne ravne interferenčne proge.

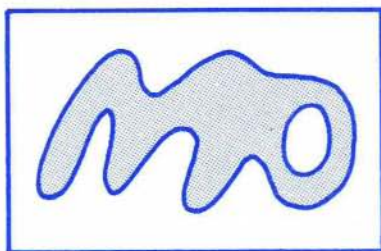
## TRI NALOGE ZA GENERATOR SLUČAJNIH ŠTEVIL

Kako lahko top uporabimo za računanje površin

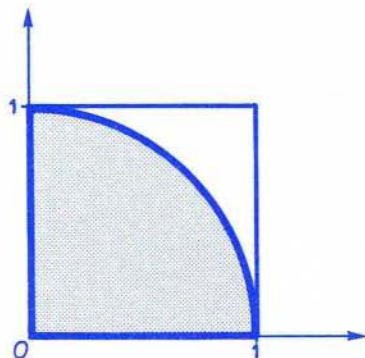
Recimo, da želimo izmeriti površino nekega kompliciranega krivočrtnega lika, na primer takega na sliki 1. Naš lik najprej pokrijmo s kakšnim likom, ki mu lahko določimo ploščino, na primer s pravokotnikom. Ustrélimo s topom velikokrat v različnih smereh na označeno polje. Sklepamo, da je razmerje med ploščino lika in ploščino pravokotnika približno enako razmerju med številom zadetkov in številom vseh strellov. Torej lahko iskano ploščino ocenimo takole: ploščina lika je približno enaka številu zadetkov lika, pomnoženemu s površino pravokotnika in deljenemu s številom vseh strellov.

Seveda ne predlagamo, da vam starši kupijo top in poskusite streljati na sosedov vrt! Manj nevarno, pa prav tako ali pa še bolj učinkovito, lahko takšne poskuse delamo na računalniku. Vse, kar potrebujemo, je generator slučajnih števil, ki ga večina računalnikov ima. Predpostavimo, da na našem računalniku obstaja funkcija RANDOM, ki nam vrne slučajno število med 0 in 1.

V nadaljevanju si bomo ogledali tri primere uporabe generatorja slučajnih števil.



Slika 1



Slika 2

### Računanje števila $\pi$

Redni bralci Preseka se bodo spomnili članka v Preseku XII/4, v katerem je opisano, kako lahko izračunamo približek števila  $\pi$  s simulacijo metanja Buffo-

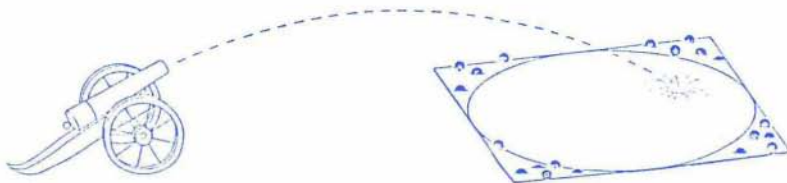
nove igle, imenovane po francoskem naravoslovcu in matematiku grofu Louisu de Buffonu. Še preprosteje izračunamo približek števila  $\pi$  z idejo streljanja s topom. Vzemimo za lik krog in mu očrtajmo kvadrat. Ker obe ploščini znamo izračunati, vemo, da je njuno razmerje enako  $(\pi r^2) : (2r)^2 = \pi/4$ . Če vzamemo samo četrtino kroga in kvadrata, kot kaže slika 2, se razmerje ploščin očitno ne spremeni. Razmerje med ploščinama lahko ocenimo tudi s streljanjem s topom, kot je opisano v začetku. Približek za  $\pi$  je torej  $4 \cdot \text{zadetek}/\text{vsi streli}$ .

Simulacijo naredimo s preprostim programom. Zaradi preprostosti programa naj imata stranica kvadrata in polmer kroga dolžino 1. Strel v kvadrat simuliramo z dvakratnim klicem generatorja slučajnih števil:

```
x := RANDOM;
y := RANDOM;
```

ki nam da točko s koordinatama v kvadratu  $[0,1) \times [0,1)$ . Ali smo zadeli notranjost kroga? Izračunati moramo samo razdaljo točke od izhodišča. Spomnimo pozabljivce, da razdaljo točke od izhodišča izračunamo preprosto z uporabo Pitagorovega izreka:  $d = \sqrt{x^2 + y^2}$ . Če je ta manjša od 1, točka leži v krogu.

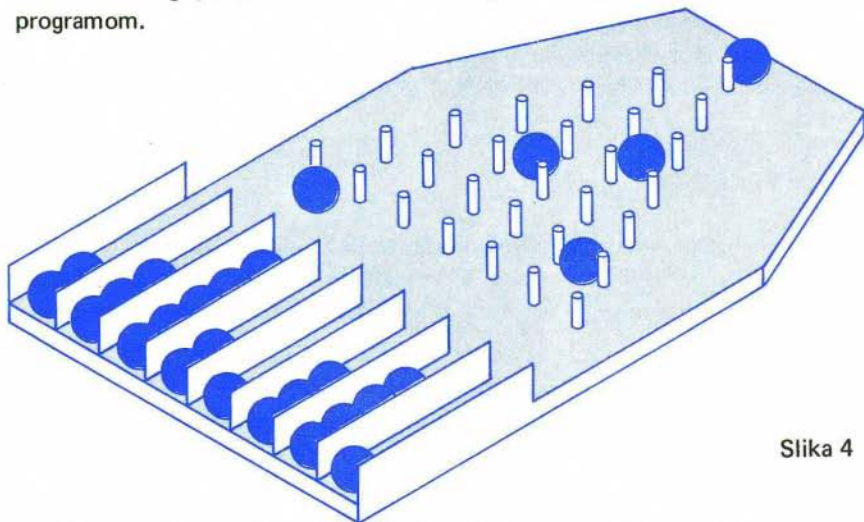
Strel večkrat ponovimo in štejemo zadetke. Pri dovolj velikem številu poskusov bi moralo biti razmerje zadetkov in strellov blizu  $\pi/4$ . Poskusite s programom simulirati na primer 1000 strellov in nam sporočite rezultate. Ob rezultatu navedite tudi računalnik in generator slučajnih števil, ki ste ju uporabili. Če se razmerje nikakor ne bo hotelo ustaliti pri  $\pi/4$ , je mogoče, da uporabljeni generator slučajnih števil ni najboljši. O testiranju slučajnih generatorjev je Presek že pisal v četrti številki letnika XII.



Slika 3

## Galtonova plošča

je dobila ime po enem prvih statistikov viktorijanske Anglije, plemiču Francisu Galtonu. Na sliki 4 vidimo nagnjeno ploščo, na kateri je trikotni gozd čepkov, na dnu plošče pa nekaj predalov. Kroglo postavimo na vrhnji čepek in jo spustimo. Odbijala se bo od čepkov zdaj levo, zdaj desno in končala v enem od predalov. Če to ponovimo z več krogami, se nam v predalih pokaže značilna porazdelitev. Poglejmo, kako bi Galtonovo ploščo simulirali z računalniškim programom.



Slika 4

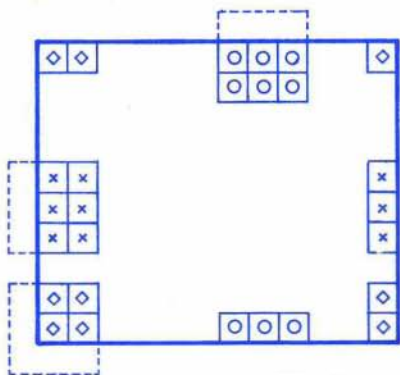
Spremembo smeri kroglice ob trku s čepkom simuliramo s klicem generatorja slučajnih števil. Če je dobljeno število manjše od 0.5, kroglica nadaljuje v levo, sicer v desno. Kateri čepek je zadela kroglica in h kateremu nadaljuje? Ni pomembno! Vemo, da se bo vsaka kroglica odbila od natanko  $n$  čepkov, kjer je  $n$  višina (in hkrati širina) gozda čepkov. Hitro vidimo tudi, da je predal, v katerem kroglica konča, kar enak številu trkov, pri katerih se je kroglica odbila v desno. To pa pomeni, da v programu ne potrebujemo nobenega polja spremenljivk, ki bi ustrezale čepkom na plošči. Potrebno je samo simulirati  $n$  trkov in seveda šteti število odbojev v desno. Nauk zgodbe: Malo analize problema pred programiranjem nam lahko prihrani veliko truda pri njem!

Opisano zanko vložimo v večjo, ki bo določala število krogel, spuščenih po plošči. Vsakič, ko se notranja zanka izvede, ne pozabimo povečati števila kroglic v pravkar zadetem predalu. Če programu dodamo nekaj grafičnih ukazov, bomo lahko na zaslonu sproti opazovali nastanek hribčka, značilnega za binomsko porazdelitev.

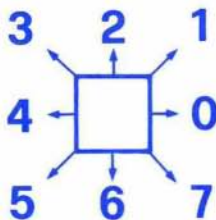
## Volilna in protivolilna igra

Naslednji primer je simulacija dveh iger, ki sta ju nedavno študirala profesorja Peter Donnelly in Dominic Welsh. Kvadratke pravokotne šahovnice na začetku poljubno pobarvamo s črno in belo barvo. Ali, če želite opravičiti ime igre, na vsak kvadrateg postavimo volilca, barva pa naj predstavlja stranko, ki jo name-rava voliti na naslednjih volitvah. Ob vsakem udarcu ure (slučajno) izberemo enega od volilcev, ki bo morda zamenjal stranko. V ta namen (spet slučajno) izberemo še enega od osmih sosedov. V igri velja pravilo, da se prvi izbrani volilec vedno pusti prepričati izbranemu sosedu. Barva izbranega volilca postane enaka sosedovi, ne glede na prejšnjo barvo.

Da bodo imeli vsi volilci osem sosedov, se dogovorimo, da šahovnico zle-pimo po robovih takole: volilec na robu naj ima tri sosedu na nasprotni strani šahovnice. Na sliki 5 so narisane sosesčine nekaterih značilnih kvadratkov ša-hovnice. Mimogrede: premislite, kakšno ploskev v prostoru dobimo, če na opisani način zares zlepimo nasprotne stranice pravokotnika. Če premislek ne gre, poskusite s papirjem in lepilnim trakom.



Slika 5



Slika 6

Ko opisani preprosti model dvostrankarskega volilnega sistema zaživi, se začno dogajati zanimive stvari. Najprej se namesto razpršenih belih in črnih polj pojavijo večja področja, pobarvana z isto barvo. Potem se enobarvna po-dročja nekaj časa premikajo po šahovnici in se borijo za prevlado. Na koncu ena barva preplavi vso šahovnico.

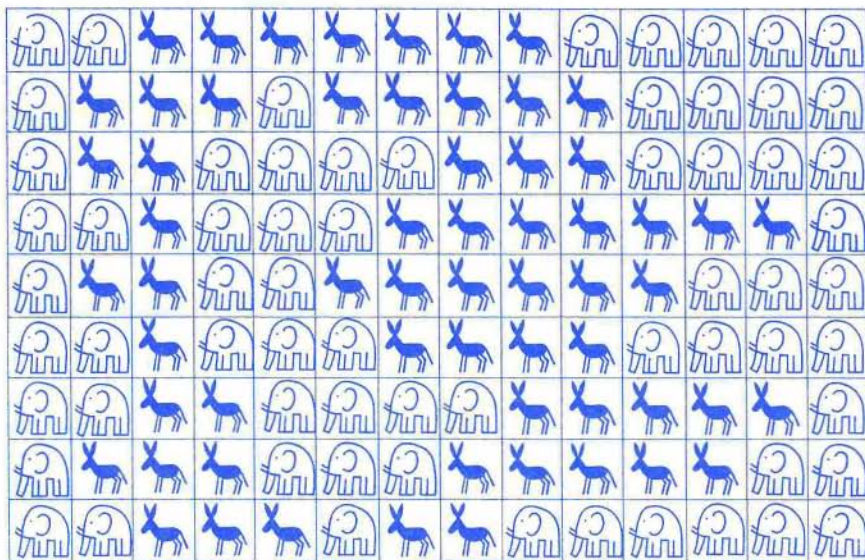
Volilno igro simuliramo s preprostim programom. V dvodimenzionalno polje, ki nam predstavlja šahovnico, vnesemo začetne barve polj. Če ne druga-če, jih določimo slučajno. Z dvema klicema generatorja slučajnih števil izbere-

mo polje, ki mu bomo v naslednjem koraku spreminjali barvo. Slučajno celo število, ki z enako verjetnostjo zavzame vrednosti  $0, 1, 2, \dots, n - 1$ , dobimo takole:

$s := \text{INT}(n * \text{RANDOM})$ ; kjer je  $\text{INT}$  funkcija celi del. Celi del realnega števila  $x$  je največje celo število, ki ni večje od števila  $x$ . (Na primer:  $\text{INT}(0.5) = 0$ ,  $\text{INT}(3.14) = 3$ ,  $\text{INT}(-4.5) = -5$ .) En korak igre sprogramiramo takole: izberemo celi slučajni števili  $i$  med  $0$  in  $n - 1$  ter  $j$  med  $0$  in  $m$ , kjer smo z  $m$  in  $n$  označili širino in dolžino šahovnice. Par števil  $(i, j)$  nam podaja koordinate nekega polja s šahovnice. Potem izberemo še eno celo slučajno število  $k$  med  $0$  in  $7$ , ki nam določi soseda, na primer tako, kot je narisano na sliki 6. Popravimo barvo polja  $(i, j)$  in en korak igre je zaključen.

Program bo zanimivejši, če bo stanje sproti risal na zaslon. Že z uporabo dveh kontrastnih znakov, na primer zvezdice in pike, dosežemo dober učinek.

Druga igra, ki je model nekoliko bolj pluralistične družbe, je protivolilna igra. V tej igri se izbrani volilec ne pusti prepričati sosedu, pač pa vedno zavzame stališče, nasprotno sosedovemu. Kako pa se model obnaša v tem primeru?



Slika 7

Janez Žerovnik



Science & Industry  
USA 20c



Съвременна уредба  
на почтуката  
на Магистрате  
угоден плану



