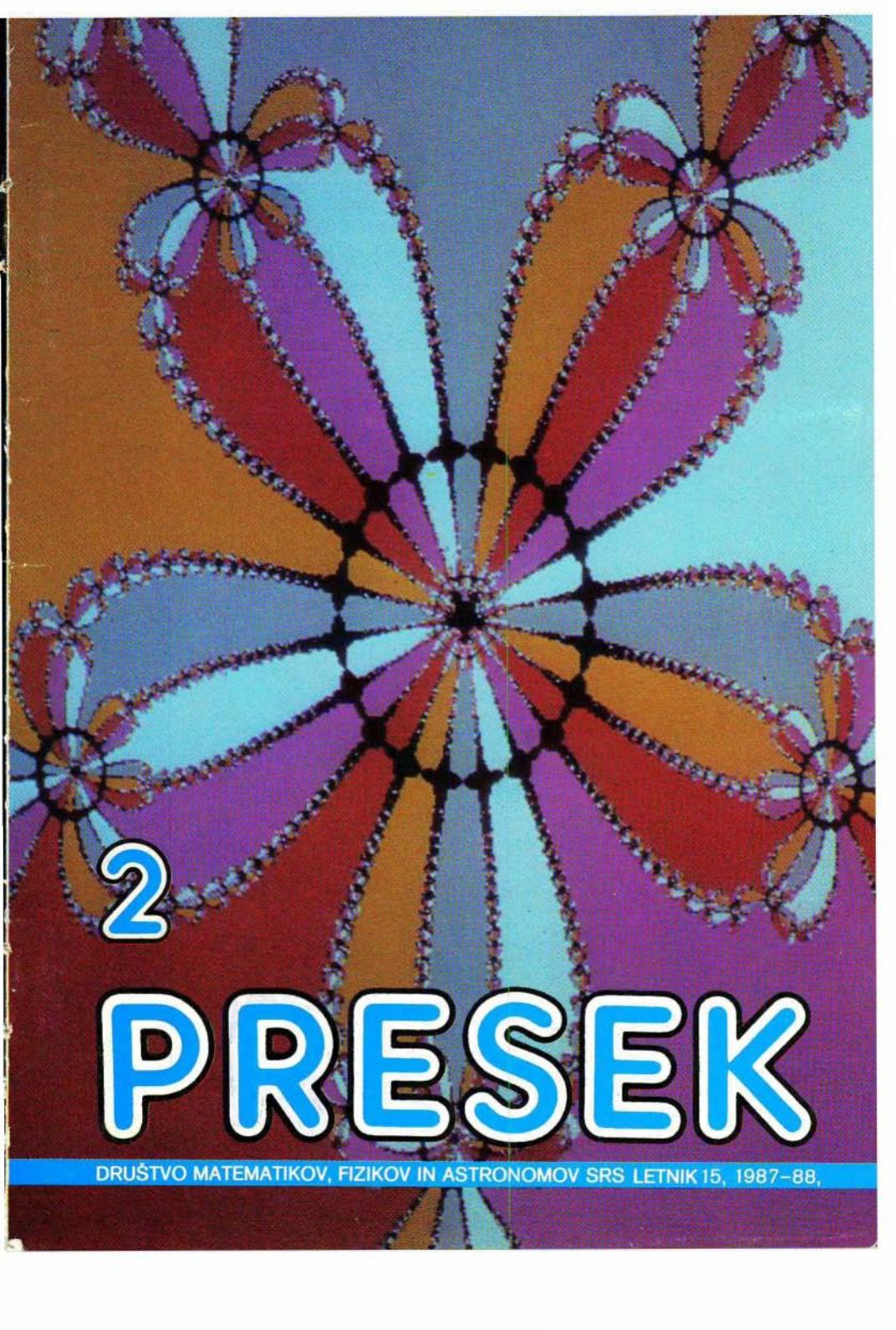




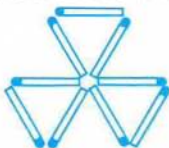
2

PRESEK

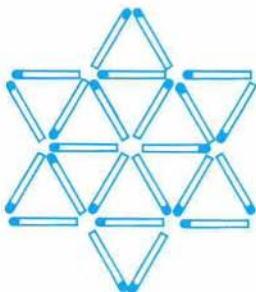
DRUŠTVO MATEMATIKOV, FIZIKOV IN ASTRONOMOV SRS LETNIK 15, 1987-88,

KRATKOČASNE VŽIGALICE — rešitve so na III. str. ovitka

54. Prestavi 3 vžigalice, da dobiš simetričen vzorec iz treh rombov!



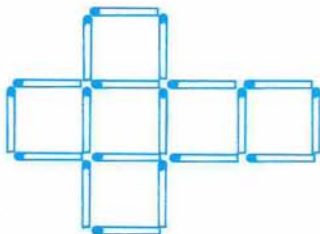
55. Prestavi 6 vžigalic, da dobiš vzorec iz 12 enakih paralelogramov!



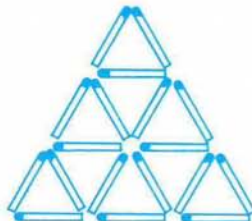
56. Prestavi 6 vžigalic, da dobiš 7 rombov!



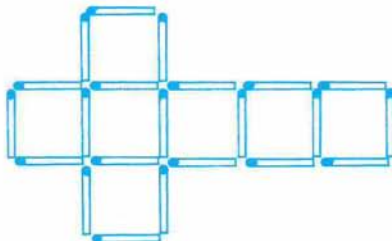
57. Prestavi 7 vžigalic, da dobiš 4 kvadrate!



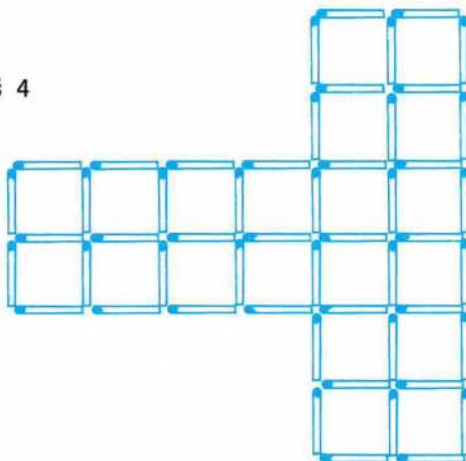
58. a) Odstrani 5 vžigalic, da dobiš pet enakih trikotnikov!
b) Prestavi 6 vžigalic, da dobiš šest enakih rombov v simetričnem vzorcu!



59. Odstrani 7 vžigalic, da dobiš 4 enake kvadrate



60. Odstrani 20 vžigalic, da dobiš 4 enake kvadrate!



VSEBINA

PREDGOVOR	(Boris Lavrič, Ciril Velkovrh)	66
RAČUNALNIŠTVO	Juliajeva množica, 1. del (Emil Beloglavec, Mitja Lakner, Andrej Vitek)	67
	Kdaj bomo (smo) pustovali (Marko Razpet)	74
	Jambor (Roman Rojko)	76
TEKMOVANJA	Občinsko tekmovanje iz matematike — rešitev str. 122 (Pavle Zajc)	77
	23. republiško tekmovanje osnovnošolcev iz matematike — rešitev str. 125 (Aleksander Potočnik)	80
	3. šolsko in 13. izbirno tekmovanje iz matematike (Darjo Felda)	84
	2. republiško tekmovanje iz znanja računalništva za osnovnošolce (Ivan Gerlič)	87
NOVICE	Srečanje mladih raziskovalcev (Zvonka Kos Pavla Ranzinger)	94
RAZVEDRILO	Slikovna križanka (Marko Bokalič)	96
	Križanka Trikotniške formule — rešitev iz P-1 (Franci Oblak)	111
MATEMATIKA	Kompleksna števila (Franc Forstnerič)	98
	Matrike kot posplošitev pojma števila, 2. del (Anton Suhadolc)	104
ASTRONOMIJA	Izmeri kotno hitrost vrtenja Zemlje (Marijan Prosen)	114
FIZIKA	Teorija in poskus. Newton in gravitacijska konstanta. Merjenje gravitacijske konstante (Janez Strnad)	116
NOVE KNJIGE	Naše nebo in Zemlja 1988	73
	Priročniki za osnovn srednjo šolo	79
NALOGE	V pravokotnem trikotniku (D. Milošević)	83
	Dane so štiri točke — rešitev str. 128 (Franc Lebedinec)	103
	Pisali so nam (prir. Damjan Kobal)	112
	Nevidnost ga ne reši — rešitev str. 127 (prev. Peter Petek)	113
NA OVITKU	Glej drugi del članka O Juliajevi množici v P-3	I
RAZVEDRILO	Kratkočasne vžigalice — rešitev str. III (Roman Rojko)	II
	PISMA BRALCEV. Znamke z motivi iz astronavitike	IV

Po poletnem oddihu ste spet segli po Preseku. Poslali smo vam že dve številki. Namen lista, ki že petnajsto leto opogumlja mladi rod na poti spoznavanja matematike, fizike, astronomije in računalništva, seveda ostaja isti kot v preteklosti. Pa vendar ga bomo še popestrili in ozaljšali. K sodelovanju ste seveda vabljeni tudi vi, dragi bralci. Zakaj bi pustili navdih (uganko, problem, zanimivost, ...) obležati doma? Naj ga ugleda kopica vedoželjnih radovednežev in se radosti ob njem.

Morebitnim novim naročnikom povejmo, da bo Presek razen zanimivih prispevkov iz že omenjenih področij vseboval tudi naloge, poročila s tekmovanj, novice, zanimivosti, ... Razveselili se bomo tudi vaših mnenj, predlogov in se o njih pogovorili v rubriki Pisma bralcev.

Tudi letos smo poslali na vsako šolo v Sloveniji toliko prvih in tudi že drugih številčk Preseka, kot ste jih imeli naročenih v lanskem šolskem letu. Učitelje matematike in fizike lepo prosimo, da čimprej zberejo čimveč naročnikov in sporočijo njihovo število, tako da bomo lahko tretjo številko poslali na vsako šolo v pravem številu. Tudi letos smo morali ceno Preseka močno povečati, saj se vsi stroški kljub družbeni subvenciji vsak dan večajo. Letos je letna naročnina za posameznike 2.700.— din, za skupinska naročila na šolah pa le 1.800.— din. 33% popust za skupinska naročila smo uvedli prav zaradi previsokih maloprodajnih cen slovenski knjigi in tudi periodiki. Nazadnje pa prosimo učitelje, da vsaj do konca koledarskega leta zberejo ustrezno naročnino in nam jo nakažejo še letos, tako da bo lahko Presek redno izhajal tudi v drugi polovici šolskega leta.

Ciril Velkovrh, Boris Lavrič

PRESEK — list za mlade matematike, fizike, astronome in računalnikarje **15. letnik, šolsko leto 1987/88, številka 2, strani 65 — 128**

UREDNIŠKI ODBOR: Vladimir Batagelj, Dušica Boben (pisma bralcev, stavek), Darjo Felda, Franci Forstnerič (matematika), Bojan Golli, Marjan Hribar (fizika), Sandi Klavžar (računalništvo), Andrej Kmet, Damjan Kobal (razvedrilo), Jože Kotnik, Edvard Kramar, Boris Lavrič (odgovorni urednik), Gorazd Lešnjak (naloge—tekmovanja iz matematike), Matija Lokar, Franci Oblak, Peter Petek (premisli in reši), Pavla Ranzinger (astronomija), Tomaž Skulj, Marjan Smerke (svetovalec za fotografijo), Anton Suhadolc (glavni urednik), Ivanka Šircelj (jezikovni pregled), Miha Štalec (slike), Ciril Velkovrh (urednik, nove knjige, novice).

Dopise pošiljajte in list naročajte na naslov: Društvo matematikov, fizikov in astronomov SRS — Podružnica Ljubljana — Komisija za tisk, Presek, Jadranska c. 19, 61111 Ljubljana, p.p. 64, tel. (061) 265—061/53, št. žiro računa 50101—678—47233. Naročnina za šolsko leto 1987/88 je za posamezna naročila 2700.— din, za skupinska naročila pa 1800.—, posamezna številka 500.— din/300.— din.

List sofinancirajo Izobraževalna, Kulturna in Raziskovalna skupnost Slovenije
Ofset tisk Časopisno in grafično podjetje DELO, Ljubljana
© 1987 Društvo matematikov, fizikov in astronomov SRS — 874

ISSN 0351—6652

JULIAJEVA MNOŽICA 1. del

1. Uvod: barvanje ravnine

Že velikokrat ste se srečali s pobarvanim delom ravnine. Primer zanj je na primer kar tale Presekova stran, ki jo berete: sestavlja jo belo ozadje (papir), na katerem je narisana cela vrsta barvnih lis (črke, črte itd.). Tale stran je dvobarvna, na drugih, denimo na naslovni strani, pa lahko vidimo tudi več barv. V tem članku nas bo zanimalo večbarvno barvanje ravnine. Pa ne običajno, ampak prav posebno barvanje. Zato si najprej oglejmo preprosto pobarvano ravnino na sliki 1.

Predvsem bodimo pozorni na okolico posameznih točk. Mimogrede: okolica točke je nam matematikom na primer kakršenkoli krožec, ki točko vsebuje. Včasih bomo potrebovali majhno okolico. Takrat si lahko mislite tako majhen krožec, da ga tudi z najboljšim mikroskopom ne vidite več. Točka ima sosesčino določene barve, če so v katerikoli njeni okolici poleg drugih tudi točke te barve. Pa se vrnimo k sliki! Večina točk na sliki ima enobarvne sosesčine, take barve seveda, kot je točka sama. Drugače je le v točkah na poltrakih, ki razmejujejo po dve barvi. Vse njihove točke imajo zato dvobarvno sosesčino. Le v eni točki, v izhodišču poltrakov, pa se srečajo vse tri barve.

Vprašajmo se, ali obstaja tako barvanje ravnine s tremi barvami, pri katerem imajo točke bodisi eno- ali pa tribarvno sosesčino, pri katerih torej ni dvobarvnih sosesčin. Trenutek, kako smo rekli: eno- ali tribarvne sosesčine, pa nobene dvobarvne? Nikjer nobene daljčice, še črtice ne, kjer bi se srečali le dve barvi? Pa saj to je nemogoče, porečete, to bi vendar pomenilo, da so vse točke take, kot tista na sredi slike 1 (ali pa imajo enobarvno sosesčino seveda). To pa vendar ne gre. Če se že kje srečujejo barve, mora biti tam meja, meja pa mora biti vendar očitna. Meja lahko razmejuje le dve barvi!

No, pa ni čisto tako. Kar brž pokažimo barvanje ravnine, pri katerem nastopajo le tribarvne sosesčine. Kot veste, položaj točke v ravnini povemo s parom števil, ki jima pravimo koordinati te točke. (Več o koordinatah malo kasneje.) Točke ravnine razvrstimo v naslednje tri množice. Prva med njimi, množica A , naj vsebuje vse tiste točke, pri katerih sta obe koordinati ulomka. Druga, množica B , naj vsebuje tiste točke, pri katerih je ulomek (racionalno število) le ena od obeh koordinat, preostala pa ni ulomek (je iracionalno število). V tretji, množici C , pa združimo vse druge točke, tiste torej, pri katerih no-

beni koordinata ni ulomek. Množico A pobarvajmo z rdečo, množico B z rumeno, množico C pa z zeleno barvo in si oglejmo, kaj dobimo.

(Kot verjetno veste, vsa števila niso ulomki. Takim številom pravimo tudi **iracionalna** števila. Na primer: kvadratni koren iz 2 je že iracionalno število. To z drugimi besedami pomeni, da kvadrat nobenega ulomka ni enak 2. Znete dokazati? Kar malo bistournosti je treba za to, seveda če tega niste slišali v šoli.)

Ulomki, kot nadalje veste, so si blizu skupaj, tako blizu, kolikor le hočemo: če si namreč izmislimo dva ulomka, ki sta si še tako blizu, lahko med njima najdemo vsaj še enega (bi znali kakšnega najti?). Če torej izberemo v ravnini poljubno točko in majhno okolico (tisti mikroskopski krožec) okrog nje, bodo v njej gotovo rdeče točke. Toda (to mi spet verjemite na besedo!) točke obeh preostalih množic B in C niso nič manj skupaj, kvečjemu še bliže so si. Tista mala okolica torej vsebuje tudi rumene in zelene točke. Če je tako z majhnimi okolici, je gotovo enako tudi z velikimi. Zaključimo lahko torej, da pri takem barvanju, kot smo ga vpeljali, nastopajo izključno tribarvne okolice. To po drugi strani pomeni, da barv med seboj sploh ne moremo ločiti, stapljajo se v eno samo nerazločno mešanico. Tako barvanje nam zato ni všeč.

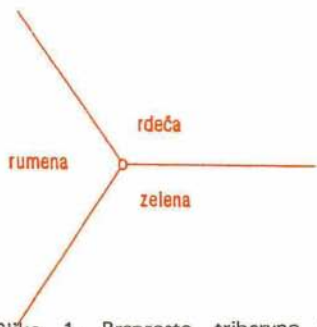
Iskali bomo naprej in našli barvanje, ki bo povsem ustrezalo našim zahtevam: poleg tribarvnih bomo pri njem našli tudi enobarvne sosesčine, dvo- barvnih pa ne bo. Prvi je tako barvanje ravnine našel francoski matematik Julia konec prejšnjega stoletja. Po njem se imenuje tudi množica iz naslova.

Ideja, ki nas bo pri tem vodila, bo naslednja: v ravnini bomo izbrali tri točke, vsako svoje barve. Nato bomo za točko ravnine z računskim kriterijem povedali, h kateri od teh treh točk teži, in ji tako določili barvo. Skoraj vse točke ravnine bodo po tem kriteriju sodile k eni od izbranih točk, v drugih pa se bodo srečevale točke vseh treh barv.

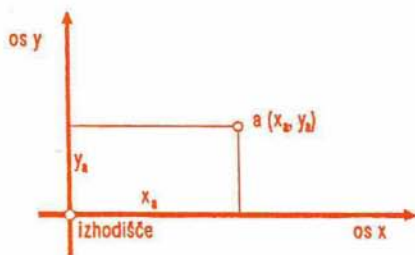
2. Koordinate točk

Nadaljevanje bo zato morda nenavadno: ogledali si bomo namreč, kako s točkami v ravnini računamo. Na prvi pogled to nima nobene zveze z našo nalogo. Kasneje se bo seveda izkazalo, da bo le koristno znati iz dveh točk izračunati tretjo. Zato le pogum: preberite, pozabite ter se kasneje spet spomnite...

Kot smo že rekli, položaj točke a v ravnini povemo s parom števil, s koordinatama x_a in y_a , ki ju običajno zapišemo takole v oklepaju: (x_a, y_a) . Pravimo jima tudi **pravokotni** koordinati, saj povesta razdalji točke do dveh pravokotnih premic: osi koordinatnega sistema. Pravokotni koordinatni sistem prikazuje slika 2. Drobni a zraven koordinate pomeni le, da ta koordinata spada k točki a .

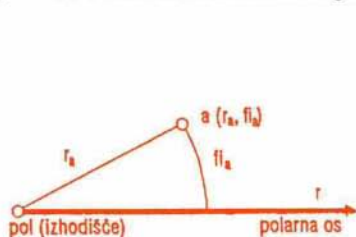


Slika 1. Preprosto tribarvno barvanje ravnine

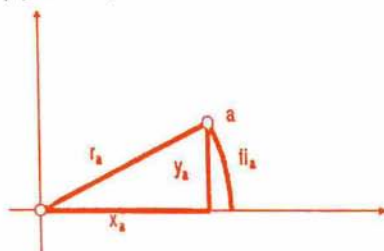


Slika 2. Pravokotne koordinate

Vendar pravokotne koordinate niso edini možni način opisa položaja točke. Položaj točke a lahko povemo tudi tako, da navedemo, kako daleč od neke izbrane točke (pola) leži naša točka in v kateri smeri. Smer pri tem pove-
mo s kotom med zveznico obeh točk in vnaprej izbrano premico (osjo sistema). Ta način opisa položaja prikazuje slika 3. Ker izhodišču v tem sistemu koordinat pravimo tudi pol, te koordinate imenujemo **polarne**. Koordinati sta spet dve: prva je oddaljenost točke od pola, ki jo označimo z r_a , druga pa je kot, ki ga oklepa zveznica pola in točke s poltrakom od pola v desno. Kot označimo s fi_a ; skupaj pa koordinati zapišemo takole: (r_a, fi_a) .
(Povsod v članku smo namesto grške črke φ pisali fi .)



Slika 3. Polarne koordinate



Slika 4. Zveza med pravokotnimi in polarnimi koordinatami

Povejmo še zvezo med obema vrstama koordinat. Kaže jo slika 4. Iz polarnih koordinat točke a hitro pridemo do pravokotnih takole:

$$x_a = r_a * \cos fi_a$$

$$y_a = r_a * \sin fi_a$$

Tu sta $\cos$ in $\sin$ kotni funkciji, ki ju nekateri že poznate iz šole, drugi morda s kalkulatorjev, od tu naprej pa ju bomo srečali le še enkrat. Nazaj iz pravokotnih koordinat v polarne je pretvorba težja. Hitro vidimo, da je po Pitagorovem izreku

$$r_a^2 = x_a^2 + y_a^2$$

kot fi_a pa določa malo manj znana funkcija dveh argumentov:

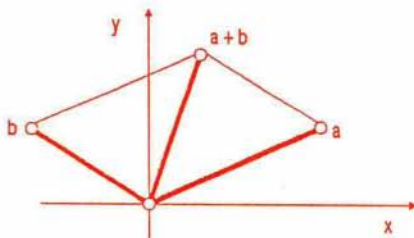
$$fi_a = \arg(x_a, y_a)$$

Te funkcije ne bomo podrobneje opisovali, je pa v tesnem sorodstvu s funkcijo $\arctg$.

3. Računanje s točkami

Lotimo se zdaj računanja s točkami v ravnini. Najprej dobro premislimo, kaj je računanje pri številih. Zavemo se, da je to pravzaprav postopek ali pravilo, po katerem iz dveh števil določimo tretje. Iz dveh sestevancev tako izračunamo njuno vsoto (iz 215 in 739 dobimo 954; postopka, kako to storimo, pa smo se naučili v prvih razredih osnovne šole), iz dveh množencev njun zmnožek, iz deljenca in delitelja pa njun količnik. Pri tem ima pravilo za računanje običajno določene lastnosti. Tako na primer izid seštevanja ni odvisen od vrstnega reda seštevancev (vseeno je, ali k 215 prištejemo 739 ali pa k 739 prištejemo 215, izid je vedno 954). Tej lastnosti seštevanja s tujko pravimo komutativnost. Lastnosti različnih računskih operacij so seveda različne. Tako za razliko od seštevanja pri deljenju deljenca in delitelja ne moremo zamenjati med seboj: deljenje torej ni komutativno.

Podobno bomo računali tudi s točkami. Računska operacija bo paru točk dodelila novo točko. Pri tem bomo poskrbeli, da bodo operacije s točkami v sorodu z operacijami s števili, da bodo njihova posplošitev. Pri tem si bomo pomagali s predstavo, ki smo jo o računanju dobili s pomočjo številske premi-



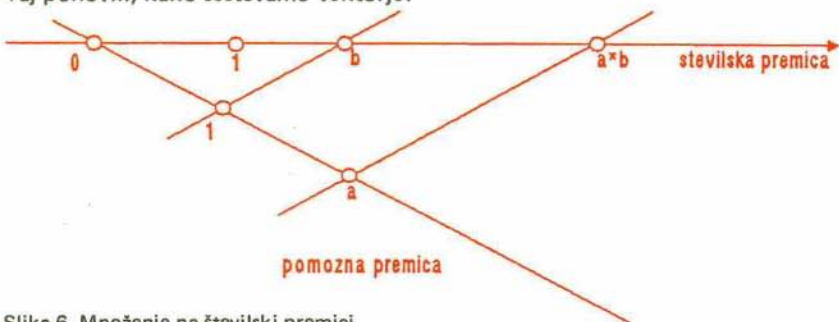
Slika 5. Seštevanje točk v ravnini

ce. V ta namen si mislimo, da se števska premica ujema z osjo x pravokotnega koordinatnega sistema ter s polarno osjo r pri polarnih koordinatah.

Računanja s točkami se začnimo učiti pri **seštevanju**. Spomnimo se, kako smo seštevali s pomočjo števske premice. Število smo predstavili kot točko na števski premici in ga z daljico povezali z izhodiščem. Dve števili smo nato sešeli tako, da smo daljici prvega števila na koncu pritaknili daljico drugega. Daljica, ki je vodila od začetka prve do konca druge, je predstavljala vsoto. Podobno ravnamo tudi pri točkah. Točki, ki ju želimo sešeti, z daljicama zvežemo z izhodiščem koordinatnega sistema. Daljici nato seštejemo tako, da eno vzporedno prestavimo na konec druge. Vsota je spet daljica, ki veže začetek prve s koncem premaknjene druge. Tako smo prišli do paralelogramskega pravila na sliki 5. Sami se prepričajte, da je seštevanje res neodvisno od vrstnega reda seštevancev ter da se pri seštevanju točk, ki leže na števski premici, ujema s seštevanjem števil. Brez večjega truda se lahko sami prepričate tudi, da velja naslednja zveza med pravokotnimi koordinatami seštevancev in vsote: $a = (x_a, y_a)$, $b = (x_b, y_b)$ in

$$(x_a, y_a) + (x_b, y_b) = (x_a + x_b, y_a + y_b)$$

Zveza med polarnimi koordinatami seštevancev in vsote je precej bolj zamotana in je zato ne navajamo. Tisti, ki ste se že seznanili z vektorji, ste lahko zgoraj ponovili, kako seštevamo vektorje.



Slika 6. Množenje na števski premici

Sedaj pa k **množenju**! Najprej se spomnimo, kako zmnožimo števili a in b s pomočjo števske premice. Skozi izhodišče števske premice potegnemo pomožno premico (slika 6). Na pomožno premico nanese število 1 in prvega od množiteljev, število a . Nato zvežemo enico na pomožni premici in drugi množitelj b na števski premici ter potegnemo vzporednico tej zveznici skozi prvi množitelj. Kjer tako dobljena vzporednica seka števisko premico, je iskani

zmnožek $a * b$. O tem nas prepriča podobnost trikotnikov in sorazmerje $1 : a = b : a * b$. (Povsod v članku $*$ označuje množenje.)

Kako pa je v ravnini? Na hitro bi sedaj lahko po analogiji s seštevanjem napačno zaključili, da bomo točke množili po koordinatah: koordinato x zmnožka bi torej dobili kot zmnožek koordinat x obeh množiteljev in podobno tudi y . No, pa ni tako. Pravilo za množenje se preprosteje izraža v polarnih koordinatah kot pa v pravokotnih. Postavimo $a = (r_a, fi_a)$, $b = (r_b, fi_b)$, pa je pravilo takole:

$$(r_a, fi_a) * (r_b, fi_b) = (r_a * r_b, fi_a + fi_b)$$

Tisti, ki že obvladate kotne funkcije, lahko sami preverite, da to v pravokotnih koordinatah pomeni naslednje:

$$(x_a, y_a) * (x_b, y_b) = (x_a * x_b - y_a * y_b, x_a * y_b + y_a * x_b)$$

Polarni zapis, ki je tako lep in preprost, nas hitro pripelje do cele vrste prijetnih lastnosti množenja. Najprej je lahko videti, da se množenje števil ujema z množenjem točk. Polarno os, s tem pa tudi številsko premico, smo namreč postavili tako, da števili p in q predstavljata točki s polarnima koordinatama $(p, 0)$ ter $(q, 0)$. Po zgornjem pravilu je

$$(p, 0) * (q, 0) = (p * q, 0 + 0)$$

kar smo hoteli videti. Sami se lahko prepričate, da se točka pri množenju s točko $(1, 0)$ ne spremeni, da torej ta točka pri množenju točk igra isto vlogo kot (njej ustrezajoče) število 1.

Poglejmo še, ali lahko točke med seboj tudi **delimo**. Kot vemo, je

$$a/b = a * 1/b$$

Število a torej delimo s številom b tako, da ga pomnožimo z recipročno vrednostjo b -ja. Tudi pri točkah bomo tako storili, le recipročno vrednost moramo najprej najti. To pa ni težko. Ker pri številih za recipročno vrednost velja $a * (1/a) = 1$, mora po analogiji pri točkah v ravnini za točko $a = (r_a, fi_a)$ in njeno recipročno točko $b = (r_b, fi_b)$ veljati:

$$a * b = (r_a, fi_a) * (r_b, fi_b) = (1, 0)$$

Toda

$$a * b = (r_a, f_i a) * (r_b, f_i b) = (r_a * r_b, f_i a + f_i b) = (1, 0)$$

in od tod

$$r_a * r_b = 1$$

$$f_i a + f_i b = 0$$

Obe enačbi hitro rešimo:

$$r_b = 1/r_a,$$

$$f_i b = -f_i a$$

Točki $(r_a, f_i a)$ je torej recipročna točka $(1/r_a, -f_i a)$. Zato lahko deljenje točk opravimo takole:

$$(r_a, f_i a) / (r_b, f_i b) = (r_a, f_i a) * (1/r_b, -f_i b) = (r_a/r_b, f_i a - f_i b)$$

Za konec poglavja o računanju s točkami vam zastavljamo malo težjo nalogo: poskusite najti pravilo za potenciranje točke. Ugotovite torej, kako bi izračunali $(r, f_i)^n$, kjer je n neko naravno število, npr. 2 ali 3. Če vam je uspelo (pravilo je zelo preprosto), poskusite točko še koreniti.

Tako, pa smo končali tole poglavje o računanju s točkami. Tisti, ki že poznate kompleksna števila, boste z nekaj truda v gornjih pravilih odkrili pravila za računanje z njimi, sicer pa poglejte na 98 stran.

V naslednji številki pa si bomo ogledali, kako lahko naše znanje uporabimo za rešitev zastavljene naloge.

Emil Beloglavec, Mitja Lakner, Andrej Vitek

NOVE KNJIGE

DRUŠTVO MATEMATIKOV, FIZIKOV IN ASTRONOMOV SRS
61111 Ljubljana, Jadranska c. 19, pp 64

Naročam(o) izvodov brušure

NAŠE NEBO IN ZEMLJA 1988, ki bo izšla 15. 12. 1987 v Presekovi knjižnici. Cena Brošure: za posamezna naročila 2700.— din, za skupinska naročila na šolah in člane društva pa 1800.— din.

Točen naslov: Priimek in ime
ulica in številka
poštna številka in kraj **73**

KDAJ BOMO (SMO) PUSTOVALI

Gotovo veste, da je pust vsako leto na torek, natančen datum pa preberemo šele v koledarju. Če bi zbrali koledarje zadnjih nekaj let, bi lahko sestavili naslednjo preglednico:

leto	pust
1980	19. februarja
1981	3. marca
1982	23. februarja
1983	15. februarja
1984	6. marca
1985	19. februarja
1986	11. februarja

Na prvi pogled so navedeni datumi razporejeni brez pravega reda. Toda to ne drži. Treba se je spomniti, da je praznovanje pusta ljudski običaj, ki ima namen odganjati zimo in zle demone. Tukaj ne bomo ugotavljali, kako in zakaj, toda dejstvo je, da je pustni torek vedno 47 dni pred velikonočno nedeljo, ki je *prva nedelja po prvi spomladanski polni luni*. V knjigi *Lehrbuch der Astronomie* (avtorja sta Elis in Bengt Strömgren, leto izdaje 1933, Berlin) najdemo *Gaussov algoritem* za izračun datuma te znamenite nedelje za dano leto.

Omenjeni Gaussov algoritem spoznajmo kar v programu, ki je napisan v Hisoftovem pascalu (glej Presek 1985/86, št. 4). Po uspešnem startu je treba vnesti prvo letnico in število let, za katera bi radi izračunali datum pusta po gregorijanskem koledarju, ki se v naših krajih uporablja že od konca šestnajstega stoletja naprej. Po desetih izpisih se izvajanje programa ustavi in je treba pritisniti neko tipko, da lahko nadaljujemo.

10 PROGRAM PUST;

```
20 VAR S, TT, T, STL, K, P, Q, M, N, A, B, C, D, E, G1, GG, PR, PUST:
    INTEGER;
30 CH: CHAR;
40 BEGIN
50 PAGE;
60 { TT prva letnica, za katero bi radi datum pusta }
70 { po gregorijanskem koledarju, TT > 1582 }
80 REPEAT
```

```

90      WRITELN (' prvo leto:');
100     READ (TT);
110     UNTIL TT > 1582;
120     { STL pomeni, za koliko let od leta TT bi radi }
130     { imeli datume pusta }
140     WRITELN (' za koliko let: ');
150     READ (STL);
160     PAGE;
170     { glavna zanka, T so letnice od TT dalje }
180     FOR S := 0 TO STL-1 DO
190         BEGIN
200             T := TT + S; K := T DIV 100;
210             P := (8 * K + 13) DIV 25; Q := K DIV 4;
220             M := (15 - P + K - Q) MOD 30;
230             N := (4 + K - Q) MOD 7; A := T MOD 19;
240             B := T MOD 4; C := T MOD 7;
250             D := (19 * A + M) MOD 30;
260             E := (2 * B + 4 * C + 6 * D + N) MOD 7;
270             GG := ORD (22 + D + E > 31);
280             G1 := D + E - 31 * GG;
290             { G1 je dan velikonočne nedelje, ki je }
300             { lahko marca ali aprila, so pa nekatere }
310             { izjeme }
320             IF ((E = 6) AND (D = 29)) OR ((E = 6) AND (D = 28)
330             AND (A > 10)) THEN G1 := G1 - 7;
340             { pust je 47 dni prej, upoštevati je treba }
350             { prestopna leta, PR = 1 za prestopno, sicer 0 }
360             PR := ORD ((B = 0) AND ((4 * A = K) OR (100 * K <> T)));
370             PUST := 34 + PR + G1 + 31 * ORD ((GG = 1));
380             { pust je lahko februarja ali marca }
390             IF PUST <= 59 + PR THEN
400                 BEGIN
410                     PUST := PUST - 31;
420                     WRITELN ('LETO ',T,':',PUST ',PUST,
                        '.FEBRUARJA');
430                 END
440             ELSE
450                 BEGIN
460                     PUST := PUST - 59 - PR;

```

```

470             WRITELN ('LETO ',T,': PUST ',PUST, '.MARCA');
480         END;
490     WRITELN;
500     { po izpisu 10 datumov se program ustavi }
510     IF S MOD 10 = 9 THEN
520         REPEAT CH := INCH
530         UNTIL CH <> CHR (0);
540     { program gre naprej, ko pritisnemo neko tipko }
550 END;
560 END.

```

Marko Razpet

Na str. 75, Borut Pečar, Ptujski kurent (karikatura), 1987

JAMBOR

Pred leti sem v neki mornarski družbi slišal tole nalogo:

Razdalja med Koprom in Benetkami je 120 km. V Benetkah je zasidrana jadrnica s prižgano lučjo na vrhu jambora. Kako visok mora biti ta jabor, da lahko iz Kopra vidimo luč na njem? (Zanemarimo seveda vse atmosferske motnje in opazujemo z daljnogledom.)

Večina poslušalcev (jaz tudi) je začela ugibati s približkom med 10 in 50 m. Presenečeni smo odkrili, da je tudi 100 m premalo. Ko sem zvedel, da je pravilna vrednost več kot 1000 m, sem se odločil, da bom nalogo sam in v miru natančno obdelal.

Podobne probleme je reševal Drago Bajc v članku "Kako daleč je do obzorja?" (Presek 1, leto VI), jaz pa sem se tega lotil s kotnimi funkcijami.

Za povprečni polmer našega planeta sem vzel 6400 km. Uporabil sem obrazec za dolžino krožnega loka ter definicijo kotne funkcije kosinus in dobil sem vrednost 1125 m. Torej je Zemlja res bolj okrogla, kot sem pričakoval.

Potem sem nalogo preizkusil še na mikroračunalniku in dobil napačen izid 7035 km.

Naloga: Prehodi pot do rešitve problema in pojasni, zakaj sem z računalnikom dobil napačen izid.

Roman Rojko

OBČINSKO TEKMOVANJE IZ MATEMATIKE

Več tisoč na šolskih tekmovanjih najuspešnejših šestosolcev, sedmošolcev in osmošolcev se je v soboto, 18. aprila 1987, pomerilo na občinskih tekmovanjih. Naloge je pripravila republiška tekmovalna komisija pod vodstvom *Jožeta Malešiča*. O zahtevnosti nalog in sposobnostih tekmovalcev nam najvažnejše pove naslednja preglednica dosežkov sodelujočih učencev z območja večje občine. Navedeni odstotki pomenijo delež dobljenih točk glede na vse možne.

	1. naloga	2. naloga	3. naloga	4. naloga	5. naloga
6.raz.	54%	71%	20%	59%	60%
7.raz.	47%	37%	50%	50%	59%
8.raz.	82%	14%	51%	32%	33%

Kot vedno je bilo tudi tokrat obilo pripomb na zastavljene naloge. Enim so bile prelahke, drugim pretežke, tretjim neprimerne in podobno. Svoje mnenje si ob njih ustvarite sami, rešitve nalog, če bi kakšna med njimi le bila pretrd oreh, pa boste našli na str. 122.

Pavle Zajc

NALOGE

6. razred

1. Za katere vrednosti spremenljivke x ima ulomek:

a) $\frac{x}{8}$ vrednost $\frac{125}{1000}$

b) $\frac{8}{5 \cdot x}$ vrednost $\frac{1}{5}$

c) $\frac{100}{x}$ vrednost 800

d) $\frac{x-7}{4 \cdot x}$ vrednost 0

2. Mojca porabi tretjino svoje žepnine, ki znaša 1200 din, v slaščičarni, za ostali del pa si kupi knjige. Ker so v slaščičarni povišali cene za polovico, knjige pa so se podražile za 30%, so starši zvišali Mojčino žepnino za 500 din. Ali ima Mojca sedaj dovolj denarja?

3. V zapisu $34a5b$ petmestnega števila zamenjaj črki a in b s takimi ciframa, da bo to petmestno število deljivo s 36. Rešitev utemelji. Poišči vse možnosti!

4. Nariši trikotnik s podatki $v_b = 3$ cm, $v_c = 4$ cm in $\sphericalangle A = 75^\circ$. Potek načrtovanja opiši.

5. V enakostraničnem trikotniku ABC nariši višino skozi oglišče C . Eno krajišče te višine je točka C , drugo pa označi z D . Oglejmo si pravokotni trikotnik ACD . Simetrala kota $\sphericalangle CAD$ seka daljico CD v točki E , simetrala kota $\sphericalangle DCA$ pa daljico AD v točki F . Simetrali se sekata v točki S . Izračunaj notranje kote štirikotnika $DESF$. (Skica!)

7. razred

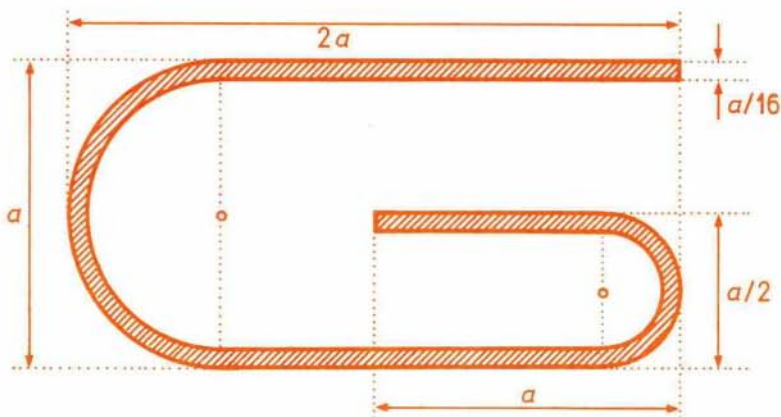
1. Za katere vrednosti spremenljivke x velja:

a) $\frac{1}{x} < 1$ b) $\frac{-5}{3-x} > 0$ c) $|x| = x$

2. Dokaži, da je število $3^{16} + 3^{14}$ deljivo z 10.

3. Vrednost spremenljivke y je za 25% večja od vrednosti spremenljivke x . Za koliko odstotkov je vrednost spremenljivke x manjša od vrednosti spremenljivke y ?

4. Izrazi z a ploščino črtanega lika na sliki.



5. Skozi oglišče B paralelograma $ABCD$ načrtamo premico p , ki je vzporedna z diagonalo AC paralelograma. Premica p seka podaljšek stranice AD v točki E , podaljšek stranice CD pa v točki F . Izračunaj obseg trikotnika DEF , če je obseg paralelograma $ABCD$ enak 64 m in če je diagonala AC dolga 25 m.

8. razred

1. Srednja cifra trimestne številke je ničla. Če to ničlo izpustimo, dobimo šestkrat manjše dvomestno število. Poišči vsa taka trimestna števila.
2. Prvi kolesar je odpeljal iz kraja A v kraj B . Istočasno je iz kraja B odpeljal proti kraju A drugi kolesar. Po srečanju je prvi kolesar vozil do cilja še 27 minut, drugi pa 12 minut. Koliko časa je porabil za pot prvi in koliko drugi kolesar, če sta vozila z različnima stalnima hitrostma?
3. Dokaži, da velja enakost

$$\frac{1}{n(n+1)} = \frac{1}{n} - \frac{1}{n+1}$$

in potem izračunaj vsoto $\frac{1}{1 \cdot 2} + \frac{1}{2 \cdot 3} + \frac{1}{3 \cdot 4} + \dots + \frac{1}{97 \cdot 98} + \frac{1}{98 \cdot 99} + \frac{1}{99 \cdot 100}$

4. Dan je pravokotnik $ABCD$ ($\overline{AB} = 8$ cm in $\overline{BC} = 5$ cm) in točka M na stranici CD , tako da je $\overline{CM} : \overline{MD} = 3 : 2$. S črko E označi presečišče premic (A, M) in (B, C) , s črko F pa presečišče simetrale kota $\sphericalangle A$ in premice (B, C) . Izračunaj ploščino trikotnika AFE .
5. Dan je pravokotnik $ABCD$ s stranicama $AB = 40$ cm in $AD = 30$ cm. S črko p označimo pravokotnico na ravnino pravokotnika skozi točko D . Naj bo T taka točka na premici p , za katero velja $\overline{DT} = 10$ cm. Kolikšna je razdalja točke T od diagonale AC ?

Ivan Štalec in drugi,

ZBIRKA VAJ IZ ARITMETIKE, ALGEBRE IN ANALIZE ZA 1., 2., 3. in 4. razred srednjih šol

Na željo mnogih učencev in učiteljev ter na priporočilo Zavoda SRS za šolstvo, smo ponatisnili stare zbirke vaj iz matematike za srednje šole. Naloge bodo prišle prav tudi boljšim dijakom, ki se pripravljajo na tekmovanja, kakor tudi drugim dijakom na nenaravoslovnih šolah za utrjevanje snovi. Priročnike lahko naročite pri Komisiji za tisk DMFA SRS, 61111 Ljubljana, Jadranska c. 19, pp 64. Maloprodajne cene so za vse knjige enake: za skupinska naročila 3.000.— din, za posameznike in ustanove pa 4.500.— din.

Ciril Velkovrh

23. REPUBLIŠKO TEKMOVANJE OSNOVNOŠOLCEV IZ MATEMATIKE

Letošnje republiško tekmovanje za zlato Vegovo priznanje je potekalo v soboto, 16. maja 1987, v *Ljubljani, Celju, Kopru, Mariboru, Novi Gorici in Novem mestu*. Tekmovalo je 126 sedmošolcev in 182 osmošolcev.

Trinajstčlanska komisija pod predsedstvom *Jožeta Malešiča* je pripravila naloge, pregledala rešitve, določila kriterij za podelitev zlatih Vegovih priznanj in izbrala ekipo za zvezno tekmovanje. To je bilo letos v *Somboru*. Vsi tekmovalci so prejeli Presekove značke.

Zlato Vegovo priznanje so si prislužili sedmošolci, ki so dosegli vsaj 14 od 25 možnih točk, in osmošolci, ki so dosegli vsaj 13 od 25 možnih točk. To so:

7. razred

I. nagrada: ni bila podeljena;

II. nagrada: DOLENC Sašo, Majde Vrhovnik, Ljubljana, LUŽEVIČ Peter, Franca Kranjca, Celje;

III. nagrada: HLEDE Saša, Milojka Štrukelj, Nova Gorica, JANŠA Borut, Lucija Seljak, Kranj, ŠEGA Gregor, Danile Kumar, Ljubljana.

Priznanja so osvojili še: DEMŠAR Damjan, Tone Čufar, Jesenice, BELEC Elvis, Vojka Šmuc, Izola, CEDILNIK Tomaž, Ledina, Ljubljana, JURANJI Tatjana, Ledina, Ljubljana, KOREN Urška, IX. korpus NOVJ, Nova Gorica, SEŠEK Tomaž, Alojz Kebe, Ljubljana, STROJNIK Andrej, Milan Šuštaršič, Ljubljana, VUK Martin, Milojka Štrukelj, Nova Gorica, KOTNIK Matjaž, Bojana Iliča, Maribor, MIKELJ Robi, dr. Janez Mencinger, Boh. Bistrica, PUŠNIK Grega, Prežihov Voranc, Jesenice, SADIKOV Aleksander, Vide Pregarc, Ljubljana, SLAPAR Marko, Kokrški odred, Križe, STARE Jernej, Prežihov Voranc, Ljubljana, ŠTRUKELJ Sašo, Prežihov Voranc, Ljubljana, HOČEVAR Irena, Jančka Mevžlja, Mokronog, JESENIČNIK Tomaž, Franjo Vrunč, Slovenj Gradec, KUKRIKA Marko, Veljko Vlahovič, Ljubljana, ŠTEKAR Polona, IX. korpus NOVJ, Nova Gorica, DERGANČ Jure, Prežihov Voranc, Ljubljana, ĐURICA Vladimir, Franc Osojnik, Ptuj, PETELINKAR Boštjan, Maksa Pečarja, Črnuče, PETERNELJ Mateja, Spomenik NOB, Cerklje, POVH Janez, Dušana Jereba, Slov. Konjice, ROZMAN Aleš, Karavanških kurirjev NOB, Jesenice, ŠKRL Helena, Edvard Kardelj, Dutovlje, GRŽANČIČ Neven, Dušan Bordon, Koper, MOHORČIČ Robi, Katja Rupena, Novo mesto, ZORKO Jure, Bratov Ribarjev, Brežice, ČOTAR Uroš, Lucijana Bratkoviča—Bratuša, Renče, KRISTANČ Jana, Simon Jenko, Kranj, KURENT Matjaž, Vide Pregarc

Ljubljana, PIŠKURIČ Mojca, Ljubo Šercer, Ig, ŠVIGELJ Aleš, Oskar Kovačič, Ljubljana, TOMŠIČ Miha, Brezovica, TUŠAK Metoda, Davorin Jenko, Cerklje, ISKRA Andrej, dr. Janez Mencinger, Boh .Bistrica, MLADKOVIČ Tanja, Bratov Ribarjev, Brežice, POLANŠEK Gregor, Heroja Bračiča, Tržič, SAVKOVIČ Roman, Dušan Bordon, Koper, ŠKOF Ivan, Edvarda Kardelja, Ljubljana, ŠUC Edi, Edvard Kardelj, Dutovlje, VILFAN Mojca, Maksa Pečarja, Črnuče.

8. razred

I. nagrada: KOBAL Matjaž, Zvonka Runka, Ljubljana, PETRUŠIČ Marko, Prežihov Voranc, Ljubljana, TERTINEK Bogdan, Rado Robič, Limbuš;

II. nagrada: TOMIČ Nina, Franc Leskošek—Luka, Ljubljana;

III. nagrada: BLAŽIČ Sašo, Mirana Jarca, Črnomelj, DEMŠAR Urška, Valentin Vodnik, Ljubljana, GUČEK Marjan, Anton Aškerc, Rimske Toplice.

Priznanja so osvojili še: HOČEVAR Grega, Prežihov Voranc, Ljubljana, KOCIČ Dušanka, Bratov Juhart, Šempeter v Savinjski dolini, KOCJANČIČ Boštjan, Ledina, Ljubljana, OGRIZEK Maja, Peter Kavčič, Škofja Loka, OTRIN Pošona, Ledina, Ljubljana, PANIČ Igor, Riharda Jakopiča, Ljubljana, SLATINEK Marjan, Pohorskega bataljona, Oplotnica, BAN Jernej, Riharda Jakopiča, Ljubljana, DOLŽAN David, Heroja Bračiča, Tržič, HALILOVIČ Mirko, Milan Šuštaršič, Ljubljana, KONČAR Blaž, Dušan Kveder—Tomaž, Litija, MACEDONI Gregor, Katja Rupena, Novo mesto, PETERLE Polona, Katja Rupena, Novo mesto, STOKANOVIČ Jasna, Katja Rupena, Novo mesto, KARLIN Klemen, Peter Kavčič, Škofja Loka, KODRE Rok, Gustav Šilih, Titovo Velenje, TROHA Tamara, Ivan Cankar, Vrhnika, KAMPUŠ Janko, Šmarje pri Jelšah, SVET Mateja, Edvarda Kardelja, Ljubljana, URŠIČ Sandi, Milojka Štrukelj, Nova Gorica, VELKAVRH Jure, Vlado Miklavc, Ljubljana, CEROVŠEK Tomo, Jurij Dalmatin, Krško, POROPAT Rok, Zvonka Runka, Ljubljana, TIČ Gašper, Dušan Bordon, Koper, COBALTI Roberto, Dante Alighieri, Izola, PENCA Vanja, Jančka Mevžlja, Mokronog, POGAČAR Bojan, Maksa Pečarja, Črnuče, REBOLJ Vojko, Frana Albrehta, Kamnik, SLAK Gorazd, Zvonka Runka, Ljubljana, VEBERIČ Darko, Dane Šumenjak—Miran, Murska Sobota, ZUPAN Janez, Simon Jenko, Kranj, BOŽIČEK Miha, Šmarje pri Jelšah, FRANČEŠKIN Matej, Milojka Štrukelj, Nova Gorica, HORVAT Borut, Bojana Illica, Maribor, KORITNIK Blaž, dr. Vita Kraigherja, Ljubljana, MANDELJ Marko, Vide Pregarc, Ljubljana, SLIVNIK Liza, prof. dr. Josipa Plemlja, Bled, ŠTRANCAR Janez, Milojka Štrukelj, Nova Gorica, ŽAGAR Tomaž, Zvonka Runka, Ljubljana, CERGONJA Mojca, Dragomirja Benčiča—Brkina, Hrpelje, COBALTI Alessandro, Dante Alighieri, Izola, DOLŽAN Mojca, Gorenjskega

odreda, Žirovnica, JUG Bogdan, France Bevk, Tolmin, JURIČ Branko, Tone Žnidaršič, Ptuj, KMETEC Branko, Martin Konšak, Maribor, TURIN Miha, Ormož.

NALOGE

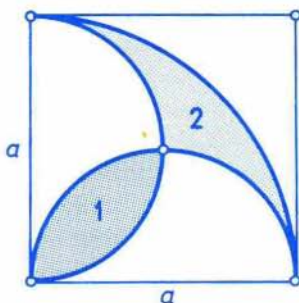
7. razred

1. Ko se nemarni Janezek pri domači nalogi zmoti, iztrga list iz zvezka. Tako se mu je pripetilo, da je iz prvega zvezka iztrgal vsak tretji, iz drugega enakega zvezka pa vsak četrti, obakrat tudi zadnji list. Nabralo se mu je 21 iztrganih listov. Koliko listov je bilo prvotno v vsakem od obeh zvezkov in za koliko % je zmanjšal skupno število listov?

2. Trgovini so najprej dovolili 20% povečanje cene izdelka, nato pa naročili zmanjšanje za 20%. Poslovodja je k prvotni ceni vestno prišteval podražitev, od nove pa odštel pocenitev in presenečeno ugotovil, da se je cena glede na prvotno znižala za 20 dinarjev. Kolikšno "izgubo" bi poslovodja dobil pri podražitvi za 10% in pocenitvi za 10%?

3. Načrtaj "spiralo", ki jo sestavlja 5 polkrožnic. Njihova središča so na isti premici, polmer vsake naslednje pa je enak trem četrtinam polmera predhodne. Izračunaj še dolžino spirale, če je polmer prve polkrožnice enak r .

4. Tri polkrožnice, ki leže v kvadratu, omejujejo dva lika. Na sliki je vsak lik drugače osenčen. Izračunaj ploščini obeh likov in ju primerjaj.



5. Pri orientacijskem pohodu gre tekmovalec najprej 4 km daleč proti vzhodu. Tam se zasučje za 120° v levo in prehodi 3 km, nato se spet zasučje za 120° na levo in prehodi še 2 km. Potem se zasučje za 60° na desno in gre naravnost 2 km do cilja. Kolikšna je najkrajša razdalja od starta do cilja? (Slika ni dovolj, odgovor moraš utemeljiti.)

8. razred

1. Zveza med spremenljivkama x in y je podana z enačbo:

$$\frac{7y - 3x}{2} = 2 - \frac{5}{6}x$$

Poišči vse tiste cele vrednosti spremenljivke x , za katere velja $1 < y < 2$.

2. Poišči tisti vrednosti spremenljivk x in y , pri katerih ima ulomek

$$\frac{8 - (7 + 2x)^2}{11 + (3x - y + 1)^2}$$

največjo vrednost.

3. Izračunaj, koliko kilogramov zlata je skupaj v dveh kosih zlatarske zlitine, če ima naslednje podatke:

- skupna masa obeh kosov je s kg;
- v prvem kosu je $a\%$ zlata, v drugem pa $b\%$;
- v prvem kosu je r kg zlata več kot v drugem.

4. V polkrogu s premeroma $\overline{AB} = 8$ cm sta nad polmeroma SA in SB narisana polkroga s premeroma SA in SB . Izračunaj ploščino kroga, ki se velike polkrožnice dotika od znotraj, obeh manjših polkrožnic pa od zunaj.

5. Oglišče kocke je od njene telesne diagonale oddaljeno 7 cm. Izračunaj površino kocke.

Aleksander Potočnik

NALOGA

V pravokotnem trikotniku označimo z α in β ostra kota, c naj bo hipotenuza in h_c višina na c . Dokaži:

1) $c \geq 2h_c$

2) $\frac{1}{\sin \alpha} + \frac{1}{\sin \beta} \geq 2\sqrt{2}$

D. Milošević

3. ŠOLSKO IN 13. IZBIRNO TEKMOVANJE IZ MATEMATIKE

Takoj po polletnih počitnicah smo na 70 šol, kjer izvajajo nenaravoslovne programe, poslali obvestila o šolskem tekmovanju. Na 37 šolah so se odločili, da se bodo njihovi učenci že 28. februarja pomerili v reševanju naslednjih matematičnih nalog.

1. letnik

1. Od poljubnega dvomestnega števila odštejemo število, ki ima cifre v obratnem vrstnem redu. Pokaži, da je dobljena razlika deljiva z 9.
2. Miha je za nekatere majhne n ugotovil, da je $8^n + 1$ sestavljeno število. Pokaži, da to velja za vsako naravno število n .
3. V trgovini so neupravičeno dvignili cene za 25%, zato jih bodo morali vrniti na prejšnjo raven. Kolikšna bo pocenitev?
4. Luka se je odločil, da bo okrog hiše postavil zid. Po prvem dnevu položi vsak dan dvakrat toliko opek kot vse prejšnje dni skupaj. Po petih dneh doseže tretjino višine. V koliko dneh bo zid postavljen?

2. letnik

1. Dani so trije različni pravokotni trikotniki ABC , ABD in ABE (s skupno hipotenuzo AB in enako orientacijo). Pokaži, da se simetrale zunanjih kotov k pravim kotom pri C , D in E sekajo v isti točki.
2. Dani so vektorji $\mathbf{a} = (1, 1, 1)$, $\mathbf{b} = (5, -1, 1)$ in $\mathbf{c} = (1, -2, -2)$. Poišči vektor $\mathbf{z}$, ki je pravokoten na $\mathbf{a}$ in na $\mathbf{b}$, njegova projekcija na vektor $\mathbf{c}$ pa je dolga 2 enoti.
3. V poljubnem konveksnem štirikotniku $ABCD$ naj bo P središče AB , Q pa središče CD . Pokaži, da je $\mathbf{AC} + \mathbf{BD} = 2 \mathbf{PQ}$.
4. Luka se je odločil, da bo okrog hiše postavil zid. Po prvem dnevu položi vsak dan dvakrat toliko opek kot vse prejšnje dni skupaj. Po petih dneh doseže tretjino višine. V koliko dneh bo zid postavljen?

3. letnik

1. Za katere realne m sta rešitvi enačbe $m^2 x^2 - 2 m^2 x + m^2 - 2 = 0$ pozitivni števili?
2. Kolikšen naj bo x , da bo kompleksno število $z_1 = 1 + ix$ bližje izhodišču kot $z_2 = 1 + (i/x)$? (x je realen.)
3. Izračunaj vrednost izraza $\cos^3 15^\circ \sin 15^\circ - \sin^3 15^\circ \cos 15^\circ$.
4. Pokaži, da je $\cos(\cos x)$ vedno pozitivno število.

4. letnik

1. Pokaži, da je $\cos(\cos x)$ vedno pozitivno število.
2. Poišči čisto imaginarno število, iz katerega vidimo daljico, ki povezuje števili $z_1 = -1$ in $z_2 = 3$, pod pravim kotom.
3. Naj bosta $a_1 = m + 1$ in $a_2 = 3 - 2m$ prva dva člena neskončnega geometrijskega zaporedja. Za katere m je zaporedje konvergentno?
4. Kolikšen naj bo a v kvadratni enačbi $x^2 - ax + a - 1 = 0$, da bo vsota kvadratov njenih rešitev minimalna?

Kar približno 1600 tekmovalcev se je spopadlo s temi nalogami. Že čez štirinajst dni je nekatere izmed teh in učence iz naravoslovnih usmeritev čakala nova preizkušnja – izbirno tekmovanje.

1. letnik

1. Pokaži, da je izraz $k^{n+4} - k^n$ pri vsakem $n > 2$ deljiv s 120. (n in k sta naravni števili.)
2. Poišči ulomke $a_1/b_1, a_2/b_2, a_3/b_3$ in a_4/b_4 , katerih niti števcu niti imenovalcu niso ne manjši od 2 ne večji od 8, da bo veljalo: $7/9 < a_1/b_1 < a_2/b_2 < a_3/b_3 < a_4/b_4 < 8/9$.
3. Če je $a + b = 1$, je $a^4 + b^4 \geq 1/8$. Dokaži!
4. Sredi otoka kvadratne oblike leži mesto. Prebivalci bi radi zgradili pet pristanišč tako, da bi bila dolžina obale med sosednjima dvema enaka. Mesto nameravajo povezati s pristanišči z ravnimi kanali. Kje naj postavijo pristanišča, da bo izkopavanja najmanj?

2. letnik

1. Dan je trapez $ABCD$. V notranjosti osnovnice AB izberemo poljubno točko M , v notranjosti osnovnice CD pa poljubno točko N . Naj bo P presečišče daljic CM in BN , Q pa presečišče AN in DM . Pokaži, da je ploščina štirikotnika $MNPQ$ enaka vsoti ploščin trikotnikov DAQ in CPB .
2. V pravilnem šestkotniku $ABCDEF$ izberemo na diagonali AC točko M , na diagonali CE pa točko N , da velja $AM/AC = CN/CE = k$. Določi k tako, da bodo točke B, M in N ležale na isti premici.
3. Pri katerih a ima enačba $|x^2 - 6x + 8| + |x^2 - 6x + 5| = a$ več kot tri rešitve?
4. Dešifriraj enakost $\overline{aa}^b = \overline{abba}$. (Pri tem pomeni na primer $\overline{xyz}$ trimestno število, x so stotice, y desetice in z enice.)

3. letnik

1. V ostrokotnem trikotniku ABC označimo z B' nožišče višine na stranico AC , s C' nožišče višine na AB in z α kot pri oglišču A . Pokaži, da razdeli daljica $B'C'$ trikotnik ABC v razmerju $\cos^2 \alpha : \sin^2 \alpha$.
2. Poišči najmanjšo vrednost izraza $|z - 1/z|$, kjer je z kompleksno število in $|z| = 2$.
3. Izračunaj ostanek pri deljenju polinoma $p(x) = x^{99} + x^{66} + x^{33} + 1$ s polinomom $q(x) = x^2 - 1$.
4. Dan je polinom $P(x) = (x^2 + 2x + 2)^{1987} + (x^2 - 3x - 3)^{1987}$. Poišči vsoto vseh tistih koeficientov polinoma, ki so ob lihih potencah spremenljivke x .

4. letnik

1. Polinom četrte stopnje s celimi koeficienti zavzame pri štirih različnih naravnih vrednostih neodvisne spremenljivke vrednost 5.
 - a) Poišči ta polinom, če veš, da seka njegov graf ordinatno os pri 35.
 - b) Ali obstaja tak polinom, ki bi odsekal na ordinatni osi odsek 1987?
2. Pokaži, da je $P_n = (n+1)(n+2) \dots 2n$ deljiv z 2^n pri vsakem naravnem številu n .
3. Dokaži, da ima enačba $x + 2^x + \log_2 x = 7$ natanko eno rešitev in jo določi.
4. Imejmo šahovnico velikosti 8×8 (64 polj).
 - a) Na tablo postavimo 15 figur. Pokaži, da obstaja kvadrat 2×2 , na katerem ni nobene figure.
 - b) Poišči tako razvrstitev 16 figur, da je na vsakem kvadratu 2×2 ena figura.

Po tem, ko je približno 1300 učencev oddalo izdelke, so komisije po šolah predlagale 205 učencev za nastop na republiškem tekmovanju. Komisija za popularizacijo je med njimi izbrala 148 tekmovalcev iz 31 šol, od tega 33 iz nenaravoslovnih usmeritev.

Fakulteti za elektrotehniko, Zavodu za šolstvo SR Slovenije, gibanju Znanost mladini in VTO Matematika in mehanika Fakultete za naravoslovje in tehnologijo se zahvalujemo za pomoč, učiteljem na srednjih šolah pa za sodelovanje pri tekmovanju. Učencem želimo, da bi bili na prihodnjih tekmovanjih še uspešnejši.

Darjo Felda

2. REPUBLIŠKO TEKMOVANJE IZ ZNANJA RAČUNALNIŠTVA ZA OSNOVNOŠOLCE

V prostorih Srednje šole za računalništvo v Ljubljani je v soboto, 25.4.1987, potekalo 2. republiško tekmovanje iz znanja računalništva za osnovnošolce. Tekmovanja se je udeležilo 46 učencev iz vse Slovenije. Tekmovali so v treh skupinah in sicer:

- najmlajši tekmovalci (1. — 4. razred OŠ) so letos prvič tekmovali v reševanju nalog v jeziku LOGO,
- srednja (5. — 6. razred OŠ) in starejša (7. — 8. razred OŠ) skupina tekmovalcev je tekmovala iz znanja računalniške tehnike, obvladanja programskega jezika (BASIC ali PASCAL) in algoritmov, prikazali pa so tudi praktično znanje programiranja na izbranih računalnikih. Praktično delo tekmovalcev najstarejše skupine je potekalo na računalnikih PARTNER, SOKOL, IBM in DIALOG.

Tekmovali so učenci, ki so že predtem dokazali svoje znanje s področja računalništva na šolskih (200 šol in okoli 2000 učencev) in regijskih tekmovanjih v Mariboru, Novem mestu, Kranju, Ljubljani, Kopru in Celju (okoli 250 učencev).

Organizator tekmovanja je bila ZOTK Slovenije s pomočjo Zavoda SRS za šolstvo, Fakultete za elektrotehniko Ljubljana, Pedagoške fakultete iz Maribora ter Srednje šole za računalništvo v Ljubljani, ki si želi čim večje število mladih računalnikarjev v svojih klopih.

Generalni pokrovitelj tekmovanja je bila ISKRA-DELTA, tekmovanje pa so podprli: Mladinska knjiga Ljubljana, Moj mikro, Elektrotehna, KONIM in Slovenijales.

Na tekmovanju so bili doseženi naslednji rezultati (navajamo prvih pet najboljših iz vsake skupine):

1. skupina (1. — 4. razred):

Uroš RAJKOVIČ, OŠ Karel Destovnik Kajuh, Ljubljana, Gorazd GERLIČ, OŠ Angel Besednjak, Maribor, Grega VERČ, OŠ Edvard Kardelja, Trzin, Grega ZOUBEK, OŠ 7. maja, Dobrova, Matjaž KOVAČIČ, OŠ Borci za severno mejo, Maribor;

2. skupina (5. — 6. razred):

Primož PIRIH, OŠ Veljko Vlahovič, Ljubljana, Mitja SEMEJA, OŠ Duplica v ustanavljanju, Mitja VODOPIVEC, OŠ Solkan, Nova Gorica, Grega ŠEGA, OŠ Danile Kumar, Ljubljana, Darja PAVLIN, OŠ 15. divizije, Grm na Dolenjskem;

3. skupina (7. – 8. razred):

Savin GORUP, OŠ Riharda Jakopiča, Ljubljana, Vlado DŽURICA, OŠ Franc Osojnik, Ptuj, Aljoša VALENTINČIČ, OŠ Solkan, Nova Gorica, Grega BREČKO, OŠ Edvarda Kardelja, Trzin, Aleš DAROVEC, OŠ Milke Šobar na Dolenjskem.

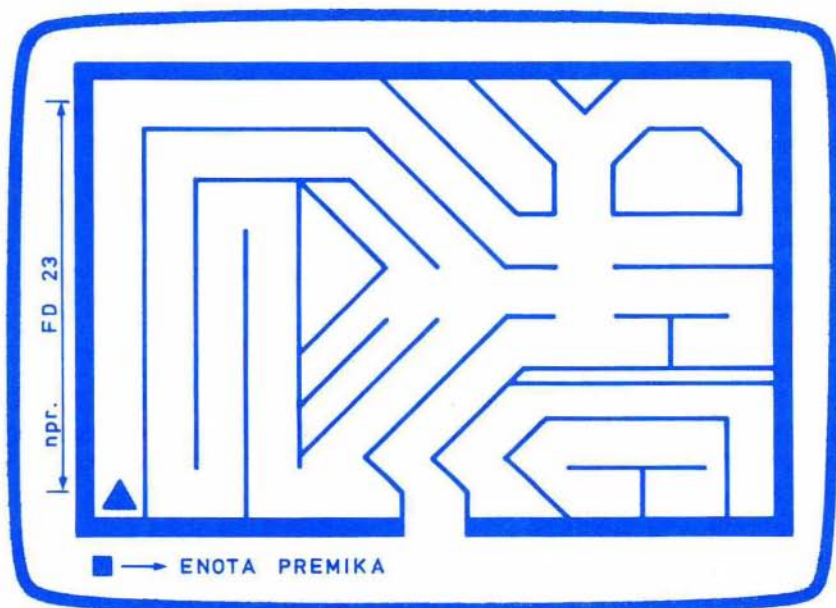
Vsi udeleženci so dobili priznanja, prvih pet iz vsake skupine pa še lepe nagrade. Posebej velja poudariti naslednje nagrade:

1. Sekcija za računalništvo pri ZOTKS nagraduje prvih pet uvrščenih iz 2. in 3. skupine z udeležbo na poletni šoli računalništva.
2. Republiški komisiji se predlaga, da podeli štipendije za nadarjene učence naslednjih učencem: Savin Gorup, Vladimir Džurica, Grega Brečko, Aleš Darovec, Oliver Peserl in Blaž Zupan.

Oglejmo si naloge in preizkusimo svoje znanje!

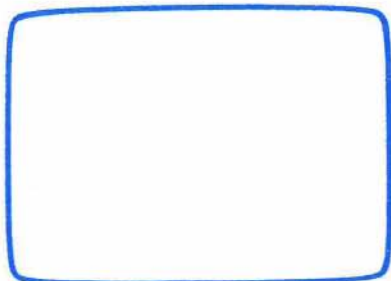
Naloge za programski jezik LOGO

2. Zapiši zaporedje ukazov, s katerimi boš "želvico" spravil iz narisane labirinta.

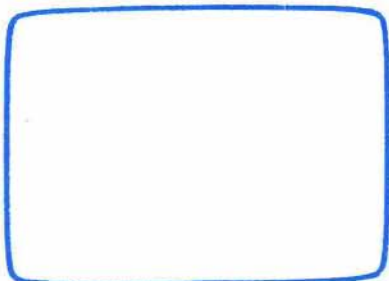


1. Programski jezik LOGO se je razvijal več let ob sodelovanju mnogih strokovnjakov, toda glavni vodja in tudi oče tega programskega jezika je (obkroži črko pred pravilnim odgovorom):

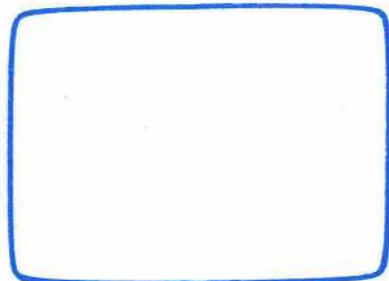
- a) Blaise Pascal
- b) Charles Babbage
- c) Franc Logo
- d) Seymour Papert



REPEAT 36[FORWARD 10 RIGHT 10]



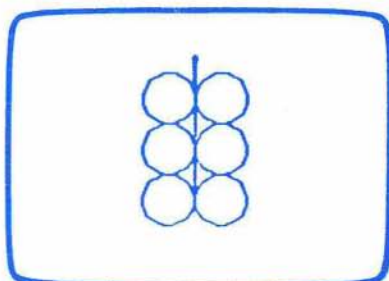
REPEAT 18[FD 10 LT 20]



REPEAT 36[FD10 RT 10]
REPEAT 18[FD 10 LT 20]

3. Dobro si oglej vse tri spodaj narisane programe. Tvoja naloga je, da v pripravljene okvirje vrišeš risbo, ki jo ti programi izrišejo na ekranu.

4. Marko, mlad računalnikar kot ti, je želel narisati okrasek iz krogov, ki ga kaže spodnja slika. Toda naredil je nekaj napak. Dobro preglej podprograma in program ter popravi napake.



TO KROG
REPEAT 18[FD 5 RT 20]
END

TO KROG1
REPEAT 18[FD 5 RT 2]
END

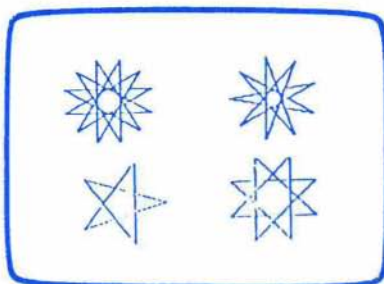
TO OKRASEK
REPEAT 6[KROG KROG1 FD 15]
END

5. Dobro si oglej napisan program, nato pa v risbi obkroži zvezdo, ki jo program nariše.

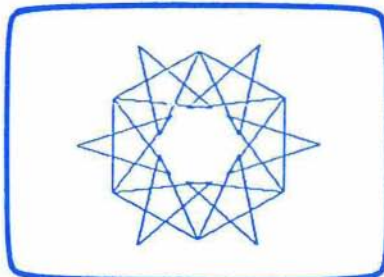
TO ZVEZDA

REPEAT 12[FD 60 RT 150]

END



6. Sedaj pa nekoliko težja naloga. Če dobro pogledaš desno sliko, vidiš, da je ta lepi okrasek sestavljen iz šestih peterokrakih zvezd. Bi znal napisati program, ki ta program izriše? To je tvoja naloga!

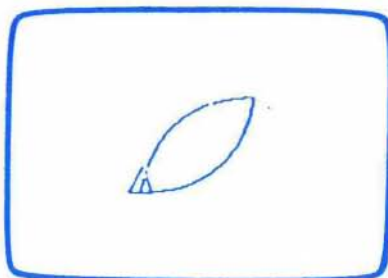
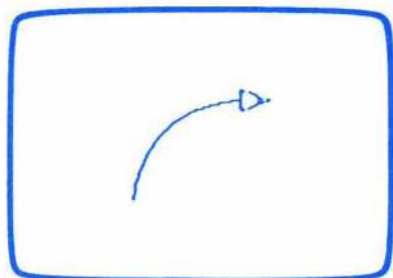


7. Zopet te čaka nekoliko težja naloga. V prvem okvirju imaš narisano krivo črto, ki jo imenujemo LOK, nad njo pa program, ki jo izriše. Tvoja naloga je, da s pomočjo tega podprograma napišeš programe, ki bodo narisali ostale risbe v okvirjih, in sicer: list cveta, cvet s štirimi listi in cvet z večimi listi.

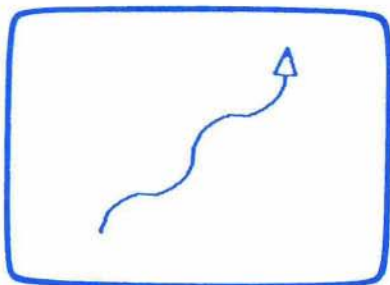
TO LOK

REPEAT 5[FD 8 RT 20]

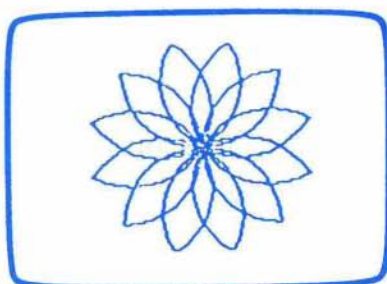
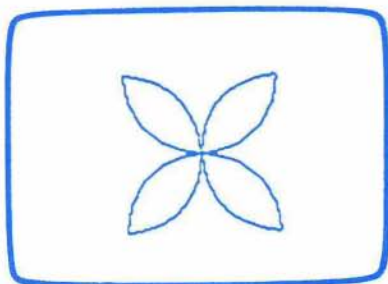
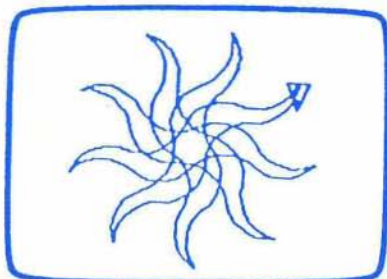
END



8. Marko je želel narisati kačo. Pomagaj mu na osnovi spodnje slike in izkušenj, ki si jih dobil pri nalogi 7.



9. Za konec pa zopet nekoliko težja naloga, in sicer: napiši program, ki bo izrisal SONCE, kot ga vidiš narisane na desni sliki. Še nasvet: v veliko pomoč ti bo program, ki ga moraš napisati za rešitev 8. naloge.



Naloge za 5. – 6. razred

- Števila (a, b, c, d, e, f, g) predstavljajo ustrezen znak, ki ga opisuje dvodimenzionalno polje širine 5 in višine 7. Tako imamo npr.: za znak "1" vrednosti (4, 12, 4, 4, 4, 4, 0) in za znak "2" vrednosti (14, 10, 2, 4, 8, 14, 0).
 - a. Napiši znak, ki je podan s števili (12, 6, 3, 31, 3, 6, 12).
 - b. Napiši števila, ki predstavljajo znak "?"
- Hišni računalnik JULIJA ima CPE s tremi 16-bitnimi registri in 16-bitnim programskim števcem. Dodatno ima pomnilnik RAM velikosti 16k zlogov in ROM 8k zlogov. Za zapis posamezne črke potrebujemo osem bitov. Izračunaj, kolikšen tekst lahko programsko vpišemo v ta računalnik (število znakov).
- Opiši (z zgledi) razliko med analogno in digitalno predstavitvijo informacije.
- Na računalnik lahko priključimo različne vhodno–izhodne enote. Naštej enote, ki bi jih uporabil pri projektiranju, da bi bil vnos podatkov najpreprostejši, rezultat pa najpreglednejši.
- Sestavi program, s katerim boš prikazal odboj kroglice na robovih ekrana. Kroglica (naj bo črka o) naj prične z gibanjem v sredini ekrana (npr.: vrstica 11 in stolpec 15), v smeri navzgor levo (kot 45 stopinj). Od sten se odbija toliko časa, dokler ne doseže levega zgornjega kota ekrana.
- Podano je zaporedje naravnih števil od 1 do 1000. Med števili ni ločil. Napiši program, ki izpiše N -to cifro in število, ki mu pripada. N naj prebere s tipkovnice.
Primer: zaporedje je 1234567891011121314151617... Za $N = 12$ je cifra 1 in število 11.

Naloge za 7. – 8. razred

- V računalništvu pogosto srečujemo tri številske sestave, in sicer z osnovo 10, 2 in 16. Pretvori naslednja števila v druga dva sestava:
 - a. $(876)_{10} = (\quad)_2 = (\quad)_{16}$
 - b. $(\quad)_{10} = (\quad)_2 = (3AB)_{16}$
 - c. $(\quad)_{10} = (1011001)_2 = (\quad)_{16}$
 - d. $(12,75)_{10} = (\quad)_2 = (\quad)_{16}$
 - e. $(\quad)_{10} = (\quad)_2 = (2A,C)_{16}$

2. S tabelami imamo podane logične funkcije dveh spremenljivk, ki so za delovanje računalnika nujno potrebne.

A	B	$f(A, B)$	A	B	$f(A, B)$	A	B	$f(A, B)$
0	0	1	0	0	1	0	0	1
0	1	1	0	1	0	1	0	0
1	0	1	1	0	0	0	1	1
1	1	0	1	1	1	1	1	0

- a. Nariši shematske simbole za vse tri funkcije.
- b. Realiziraj posamezne funkcije z ustreznimi ukazi v programskem jeziku. Predpostavi, da sta A in B celoštevilčni spremenljivki (integer).

3. Računalnik SOKOL, ki ima dva gibka diska 360KB in uro 6MHz, izvaja določen program 1 minuto in 26 sekund. V kolikem času bo isti program izvedel računalnik GEPARD, ki ima 1.2 MB velik gibki disk in uro s korakom 0.1 mikrosekunde. Oba imata isti procesor Intel 80286.

4. Imaš uvožen računalnik, ki ga želiš uporabiti za pisanje besedil v slovenskem jeziku. Računalnik ne pozna nekaterih slovenskih črk. Kaj moraš narediti, da bo računalnik prikazoval vse slovenske črke na zaslonu in na tiskalniku ter da bodo vse črke na tipkovnici razporejene tako, kot pri pisalnem stroju. Napiši, za kateri računalnik velja tvoj odgovor.

5. Napiši program za vodenje redovalnice. Predpostavi, da imamo 20 učencev in 11 predmetov, ki se ocenjujejo z ocenami 1 do 5. Program naj izpiše povprečne ocene po predmetih za posamezno konferenco, oziroma na osnovi vnesenih zaključnih ocen izpiše tudi seznam odličnih, prav dobrih, dobrih in zadostnih. Za nezadostne naj izpiše tudi predmete, kjer so bili negativno ocenjeni.

6. Napiši program, ki prebere koordinate 5 točk v prostoru. Izpiše naj tiste tri točke (koordinate točk), ki tvorijo trikotnik z največjo površino.

Ivan Gerlič

$\alpha\beta\gamma\delta\epsilon\zeta\eta\theta\iota\kappa\lambda\mu\nu\xi\omicron\pi\rho\sigma\tau\upsilon\phi\chi\psi\omega$

SREČANJE MLADIH RAZISKOVALCEV

29. maja 1987 je potekalo 21. srečanje mladih raziskovalcev in inovatorjev Slovenije, ki ga organizira ZOTK – gibanje Znanost mladini. V primerjavi z lanskim letom je letos za področje fizike prijavljenih več nalog – 11 iz srednjih šol in ena iz osnovne šole. Poglejmo teme:

avtor	naslov	mentor
J. Bajc, G. Poberaj, SNŠ Ljubljana	Računalniška obdelava abs. spektra in določanje elementov v vzorcih	C. Dominko
P. Jovanovski, V. Kraševac, SNŠ Ljubljana	Merjenje fluksa mionov v odvisnosti od vpadnega kota	D. Zaratnik M. Verbec
M. Smrtnik, SNŠ Ljubljana	Sestavljeno nihanje vzmetnega in matematičnega nihala	F. Žigon
B. Kuzma, B. Zorko SNŠ Ljubljana	Holografija	A. Kodre, S. Matjan
M. Gantar, SNŠ Ljubljana	Simulacija preslikav	J. Zupan
A. Močnik, SENŠRM Kamnik	Model fazotrona	C. Jaklič
M. Rak, B. Leskošek SENŠRM Kamnik	Proučevanje lastnosti osnovnih delcev s fotografsko metodo	C. Jaklič
B. Petrič, M. Humar, SENŠRM Kamnik	Računalniški prikaz sledi svetlob. žarkov pri prehodu skozi lečo	C. Jaklič
M. Lesar, M. Petek, B. Topolovec, E. Knuplež D. Jamšek, SNŠ Maribor	Merjenje majhnih pomikov	I. Dregarič L. Horvat
J. Kalan, J. Lončar, A. Mohorič, SŠPRNMU Kranj	Analiza spektra	D. Zupanc

D. Drofenik, T. Korošec, Računalnik in nelinearni sistemi D. Gosak
SŠERU Maribor

G. Velepec, A. Šest, Refleksni lok M. Berce
N. Božič, R. Brce,
M. Lavtižar, P. Ropret,
M. Perat, OŠ Tone Čufar,
Jesenice

Problemi, ki so si jih izbrali mladi raziskovalci, so zanimivi. Posegajo na področja, ki jih v srednješolskem programu fizike ni ali pa se le delno obdelajo. Zanimivo je, da je bila velika večina nalog (kar 7) opravljena s pomočjo računalnika. Ta je ponekod uporabljen za vodenje poskusa in zajemanje ter obdelavo podatkov, drugod za simuliranje določenega fizikalnega pojava.

Mentorji nekaterih učencev so raziskovalci na inštitutih in ustanovah. Učenci so se tako поблиže spoznali z njihovo dejavnostjo.

Upamo, da jim je fizika sedaj postala še zanimivejša in da se bodo po končani srednji šoli radi odločali za nadaljevanje študija na področju, ki jih veseli.

Zvonka Kos

Iz astronomije so predstavili dve nalogi:

Nalogo **ODDALJENOST LUNE** sta izdelala **Aleš Zajc** in **Matjaž Črnivec**, dijaka Srednje naravoslovne šole iz Ljubljane pod vodstvom Arama Karalića, študenta fakultete za elektrotehniko. Merila sta lego Lune in iz dobljenih koordinat in časa opazovanj izračunala njeno oddaljenost. Pri tem sta uporabila dve metodi: prvo, vektorsko, za določevanje razdalj Zemljinih umetnih satelitov sta povzela po literaturi, drugo pa sta si zamislila sama. Rezultati obeh metod so se ujeli v mejah natančnosti meritev.

Nalogo **DOLOČITEV EKSTINKCIJSKEGA KOEFICIENTA OZRAČJA** je pripravil **Rok Mencej**, dijak Srednje ekonomske šole Boris Kidrič, Ljubljana, pod vodstvom Bojana Dintinjane, dipl. ing. fizike. S pomočjo fotoupora je meril gostoto svetlobnega toka s Sonca in določil potek oslavitve v Zemljinem ozračju (tj. ekstinkcije) v odvisnosti od višine nad obzorjem. Razvil je metodo za spremljanje dnevne ekstinkcije, s katero je mogoče razmeroma hitro in zanesljivo prognozirati pogoje za fotometrična nočna opazovanja še pred nastopom noči. To je posebno pomembno pri računalniško vodeni fotometriji.

Pavla Ranzinger

[illegible]

ROGRŠ. stanilče Beocij				JAVNO ZBIRANJE MNENJ	ITALIJAN, MATEMATIK (NARAVNA ŠTEVILA)	OGULIN	VRSTA ŽARKOV PRI SEVANJU	GRŠKA ČRKA	ŠP.LIRIČNI PESNIK, modernist	SESTAVIL MARKO BOKALIČ
	ROKODEL. POKLIC	TURŠKI VELIKAŠ	SLIKA NA FILMU PODTALNO delovanje							ATLANT. RIBA, NAVADNI LUPAČ
						MATI MADŽAR. ŠAHIST				
								ERNEST Hemingway Šp. enklava v Maroku		
		ZNAČAJ, NRAVI Zaviralna sila					TIROLSKA REKA NAJMANJŠI SESALEC			
					EVRIDIKIN MOŽ					
	PANČEVO			POLJSKA DENARNA ENOTA	MESTO PRI MILANU ŽEN. IME					
ŠČINA v VAH	KAPLJICA PRI JOKU					RIMSKA 6 JEZERO JUŽNO OD Leningrada			MORSKI ZALIV S STRMIMI POBOČJI	STARO- PERZIJSKI JEZIK
	LOV Z GONJAČI							FRAN ZWITTER FR.PISAT. (BORIS)		
			GOZDNA ZVER	DEL KLOBUKA DAN V RIM. koledarju						
							NAELEKT. DELEC NAŠICE			
					NEM.FIZIK (fotoefekt) (PHILIP)					
		SELEN			INDIJSKI PISATELJ					RISBA MIHA ŠTALEC

KOMPLEKSNA ŠTEVILA

V Preseku včasih objavimo članke, v katerih avtorji uporabljajo kompleksna števila. Ker mnogi naši mlajši bralci teh števil ne poznajo, jih bomo skušali na preprost način vpeljati v pričujočem članku.

Pri vsakdanjem računanju imamo opraviti z naslednjimi množicami števil:

$\mathbb{N} = \{ 1, 2, 3, 4, \dots \}$	... naravna števila ;
$\mathbb{Z} = \{ 0, \pm 1, \pm 2, \pm 3, \dots \}$	... cela števila;
$\mathbb{Q} = \{ \frac{p}{q} : p, q \in \mathbb{Z}, q \neq 0 \}$	... racionalna števila (ulomki);
$\mathbb{R}$	... realna števila

Vsaka od teh množic vsebuje vse prejšnje. Motivacija za uvedbo vedno večjih množic števil so računske operacije, ki jih želimo s števili izvajati. Pojasnimo to na nekaj primerih. Če naravna števila seštevamo ali množimo, je rezultat spet naravno število. Pri odštevanju, to je seštevanju nasprotni operaciji, nastopijo težave, saj je lahko razlika negativna. V množici celih števil $\mathbb{Z}$ pa odštevamo brez težav; razlika poljubnih celih števil je celo število. Če želimo še dleiti s poljubnim od 0 različnim številom, se moramo preseliti v množico ulomkov $\mathbb{Q}$. Ta je za operaciji seštevanje in množenje *obseg* (glej [1], str. 69). Do težav v množici $\mathbb{Q}$ pride, ko želimo koreniti. Znano je na primer, da $\sqrt{2}$ ni racionalno število. Torej preprosta kvadratna enačba $x^2 - 2 = 0$ nima rešitve v množici $\mathbb{Q}$. Zato obseg $\mathbb{Q}$ razširimo do večjega obsega vseh realnih števil $\mathbb{R}$, to je decimalnih števil s končnim ali neskončnim številom decimalk. V obsegu $\mathbb{R}$ lahko poljubno nenegativno število tudi korenimo. Ne moremo pa koreniti negativnih števil, saj je $x^2 \geq 0$ za vsak realen x . Torej je kvadratna enačba

$$x^2 + 1 = 0 \quad (1)$$

v množici $\mathbb{R}$ nerešljiva.

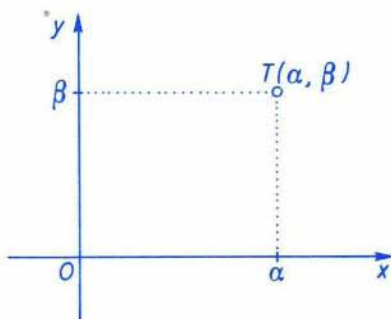
Kompleksna števila uvedemo z željo, da bi bila v novi množici rešljiva vsa kvadratna enačba, pa tudi vsaka enačba višje stopnje. Najprej ustvarimo neko novo, imaginarno število i , ki naj reši enačbo (1). Torej zahtevamo $i^2 = -1$. Seveda i ni realno število. Pravzaprav je povsem vseeno, kaj je i , važno je le povedati, kako z njim računamo. Da bomo i povezali z množico $\mathbb{R}$ v smiselno celoto, moramo razširiti operaciji seštevanje in množenje na novo število. Pomnožimo i z $\beta \in \mathbb{R}$ in dobimo imaginarno število βi . Če temu prištejemo

$a \in \mathbb{R}$, dobimo *kompleksno število*

$$a = a + \beta \cdot i \quad (2)$$

Vsako kompleksno število je torej določeno s parom realnih števil (a, β) ; a je *realna komponenta*, β pa *imaginarna komponenta* števila a . Dve kompleksni števili sta enaki, če imata enaki realni in enaki imaginarni komponenti. Vsako realno število a imamo istočasno za kompleksno število $a + 0i$ z imaginarno komponento 0. Števila $\beta i = 0 + \beta i$ z realno komponento 0 imenujemo *imaginarna*. Vrstni red zapisa ni pomemben: $a + \beta i = \beta i + a$. Primeri kompleksnih števil: $1 + 2i$, -3 , $3i + 24$, ...

Predložimo si kompleksna števila geometrično. Kot dobro vemo, si lahko ponazorimo realna števila s točkami na premici. Kompleksna števila so določena s pari realnih števil, zato jih ponazorimo s točkami v ravnini. Po izboru pravokotnega koordinatnega sistema (x, y) v ravnini je vsaka točka T določena s parom realnih števil (a, β) . Število a je prva koordinata in meri oddaljenost točke od y osi, β pa meri oddaljenost od x osi (slika 1).



Točki $T(a, \beta)$ priredimo kompleksno število $a = a + \beta i$. Tako dobljeno ravnino imenujemo kompleksna ravnina.

Ogledimo si sedaj, kako lahko algebrske operacije razširimo na množico kompleksnih števil $\mathbb{C}$. Vsoto kompleksnih števil poiščemo tako, da seštejemo ustrezne komponente:

$$(a + \beta i) + (\gamma + \delta i) = (a + \gamma) + (\beta + \delta) i \quad (3)$$

Pravilo je enako kot pri seštevanju vektorjev v ravnini. Primer:

$$(2 + 3i) + (-1 + 5i) = (2 - 1) + (3 + 5)i = 1 + 8i$$

Podobno *odštevamo*:

$$(a + \beta i) - (\gamma + \delta i) = (a - \gamma) + (\beta - \delta) i \quad (4)$$

Pri množenju kompleksnih števil ravnamo tako, da vsak člen v prvem faktorju pomnožimo z vsakim členom v drugem faktorju, rezultate seštejemo in upoštevamo zvezo $i^2 = -1$:

$$(a + \beta i)(\gamma + \delta i) = a\gamma + a\delta i + \beta\gamma i + \beta\delta i^2 = (a\gamma - \beta\delta) + (a\delta + \beta\gamma) i \quad (5)$$

Primer: $(2 + 5i)(-3 + 4i) = (2 \cdot (-3) - 4 \cdot 5) + (2 \cdot 4 + 5 \cdot (-3))i = -26 - 7i$

Kvadrat vsakega imaginarnega števila je manjši ali enak nič, saj je $(ai)^2 = a^2 i^2 = -a^2 \leq 0$ za $a \in \mathbb{R}$. Bralec lahko sam preizkusi, da veljajo za seštevanje, odštevanje in množenje kompleksnih števil vsa običajna računska pravila.

Vsakemu kompleksnemu številu $a = \alpha + \beta i$ priredimo konjugirano kompleksno število $\bar{a} = \alpha - \beta i$. Torej: realno komponento obdržimo, imaginarni pa spremenimo predznak. Geometrijsko ustreza konjugiranje zrcaljenju preko abscisne osi v kompleksni ravnini. Realna števila se pri tem ohranjajo. Očitno je $(\bar{\bar{a}}) = a$. Primer: $\bar{2} = 2$, $\bar{3i} = -3i$, $\bar{5 - 4i} = 5 + 4i$.

Izračunajmo za $a = \alpha + \beta i$ produkt $a\bar{a}$ po pravilu (5):

$$a\bar{a} = (\alpha + \beta i)(\alpha - \beta i) = (\alpha^2 + \beta^2) + (\alpha\beta - \beta\alpha)i = \alpha^2 + \beta^2 \quad (6)$$

To je ravno kvadrat oddaljenosti točke, ki pripada številu a , od izhodišča O v kompleksni ravnini. To oddaljenost imenujemo *absolutna vrednost števila* a in jo označimo kot običajno z $|a|$. Torej je

$$|a|^2 = a\bar{a} = \alpha^2 + \beta^2 \quad (7)$$

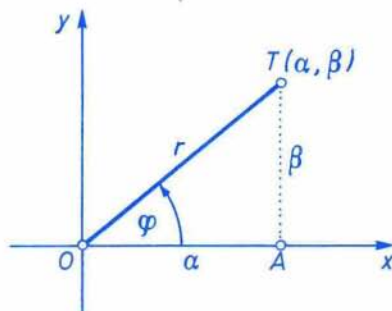
Če je $a \neq 0$, je $|a| > 0$, zato lahko enačbo (6) pomnožimo z $1/|a|^2 = 1/(\alpha^2 + \beta^2)$. Tako dobimo $a(\bar{a}/|a|^2) = 1$. To pomeni, da je število $a^{-1} = \bar{a}/|a|^2 = (\alpha - \beta i)/(\alpha^2 + \beta^2)$ inverzno številu a . Sedaj lahko definiramo *kvocient* dveh poljubnih kompleksnih števil a, b ($b \neq 0$) kot

$$a/b = a b^{-1} = a\bar{b}/|b|^2 \quad (8)$$

Lahko bi preverili, da je množica kompleksnih števil s tako definiranimi operacijami obseg. V nasprotju z obsegom realnih števil obseg kompleksnih števil ni urejen, to je, kompleksnih števil ne moremo na smiseln način urediti po velikosti.

Ogledimo si še tako imenovani *polarni zapis* kompleksnega števila. (Glej tudi

[2], str. 68–77.) Lego točke $T(\alpha, \beta)$ v ravnini natanko določata naslednja dva podatka: oddaljenost r točke T od izhodišča O in kot φ , ki ga daljica od O do T oklepa s pozitivnim poltrakom realne osi (slika 2).



Označimo z A projekcijo točke T na x os. V pravokotnem trikotniku OAT dobimo s pomočjo kotnih funkcij $\sin$ in $\cos$ naslednji zvezi (glej Presek XV (1987/88), št. 1):

$$\alpha = r \cos \varphi, \quad \beta = r \sin \varphi \quad (9)$$

Vemo tudi, da je

$$r = |\alpha + \beta i| = \sqrt{\alpha^2 + \beta^2}$$

Odtod sledi:

$$a = \alpha + \beta i = r \cos \varphi + i r \sin \varphi = r (\cos \varphi + i \sin \varphi) = |a| (\cos \varphi + i \sin \varphi)$$

To je polarni zapis števila $a = \alpha + \beta i$, ki pripada točki $T(\alpha, \beta)$. Prvi faktor $|a| \geq 0$ meri velikost števila, drugi faktor $\cos \varphi + i \sin \varphi$ pa je kompleksno število z absolutno vrednostjo 1, saj je $\cos^2 \varphi + \sin^2 \varphi = 1$. Torej leži pripadajoča točka na enotni krožnici s središčem v O . Kot φ , ki je večji od -180° in ne presega $+180^\circ$, imenujemo *argument* števila a . Če merimo kot v radianih, je $-\pi < \varphi \leq \pi$. Pri $\varphi = 0$ ali $\varphi = \pi$ je $\sin \varphi = 0$ in dobimo realna števila. Pri $\varphi = \pm \pi/2$ pa je $\cos \varphi = 0$ in dobimo imaginarna števila. Če je $a = 0$, argument ni določen.

Za primer poiščimo polarni zapis števila $a = -1 + \sqrt{3}i$:

$$|a| = \sqrt{1 + 3} = \sqrt{4} = 2$$

$$\sin \varphi = \beta / |a| = \sqrt{3}/2$$

$$\cos \varphi = \alpha / |a| = -1/2$$

Odtod dobimo $\varphi = 2\pi/3 (= 120^\circ)$ in

$$-1 + \sqrt{3}i = 2(\cos \frac{2\pi}{3} + i \sin \frac{2\pi}{3})$$

Izračunajmo sedaj produkt kompleksnih števil $a = |a|(\cos \varphi + i \sin \varphi)$ in $b = |b|(\cos \psi + i \sin \psi)$. Po pravilu (5) dobimo:

$$ab = |a||b|((\cos \varphi \cos \psi - \sin \varphi \sin \psi) + i(\cos \varphi \sin \psi + \sin \varphi \cos \psi))$$

Po adicijskem izreku za $\cos$ in $\sin$ (glej [2], str. 18–19) je izraz v oklepaju enak $\cos(\varphi + \psi)$ oziroma $\sin(\varphi + \psi)$. Torej

$$ab = |a||b|(\cos(\varphi + \psi) + i \sin(\varphi + \psi))$$

Kompleksna števila torej množimo tako, da velikosti (absolutne vrednosti) pomnožimo, argumenta pa seštejemo. Podobno bi dobili pravilo za deljenje:

$$a/b = (|a|/|b|)(\cos(\varphi - \psi) + i \sin(\varphi - \psi))$$

Zdaj lahko uganemo pravilo za računanje *kvadratnega korena* kompleksnega števila: absolutno vrednost korenimo kot običajno, argument pa razpolovimo. Torej:

$$\sqrt{a} = \sqrt{|a|} \cdot (\cos \varphi/2 + i \sin \varphi/2)$$

Izračunajmo na primer koren števila i . Ta ima absolutno vrednost 1 in argument $\pi/2$. Torej je

$$\sqrt{i} = \sqrt{1} \cdot (\cos \pi/4 + i \sin \pi/4) = \sqrt{2}/2 + i \sqrt{2}/2$$

Seveda ima vsako število razen 0 dva kvadratna korena, ki se med seboj razlikujeta le za faktor -1 .

Zdaj že lahko rešimo kvadratno enačbo

$$ax^2 + bx + c = 0$$

kjer so a , b in c kompleksna števila in $a \neq 0$. Rešitvi izračunamo po formuli

$$x_1 = (-b + \sqrt{b^2 - 4ac})/2a, \quad x_2 = (-b - \sqrt{b^2 - 4ac})/2a \quad (10)$$

Če računamo z realnimi števili, nastopi problem v primeru, ko je diskriminanta $b^2 - 4ac = D$ negativno število, saj tedaj ne moremo izračunati realnega korena števila D . V množici kompleksnih števil pa lahko koren vselej izračunamo, kot smo videli zgoraj, torej sta formuli (10) smiselni. V posebnem primeru, ko so a, b, c realna števila in je $D < 0$, je $-D > 0$, zato je $\sqrt{D} = \sqrt{(-1)(-D)} = \sqrt{-1} \cdot \sqrt{-D}$. Ker je $i^2 = -1$, je $\sqrt{-1} = i$, pozitivno število $-D$ pa lahko korenimo kot običajno. Zato sta v tem primeru rešitvi kvadratne enačbe

$$x_1 = (-b + i\sqrt{4ac - b^2})/2a, \quad x_2 = (-b - i\sqrt{4ac - b^2})/2a$$

Ti dve števili sta med seboj konjugirani: $\bar{x}_2 = x_1$.

Brez dokaza povejmo, da ima v obsegu kompleksnih števil vsaka algebraična enačba

$$x^n + a_1 x^{n-1} + a_2 x^{n-2} + \dots + a_{n-1} x + a_n = 0$$

natanko n korenov, če upoštevamo večkratnosti. To je *osnovni izrek algebre* ([3], str. 316). Pravimo tudi, da je obseg kompleksnih števil *algebraično zaprt*. To je njegova glavna prednost v primerjavi z obsegom realnih števil. Znano pa je, da pri enačbah stopnje $n \geq 5$ korenov v splošnem ne moremo poiskati z nobeno algebraično formulo, kot smo to naredili pri kvadratni enačbi (10).

LITERATURA

- [1] P. Legiša, I. Štalc in E. Zakrajšek, *Matematika 1*. Državna založba Slovenije, Ljubljana 1981
- [2] P. Legiša, *Matematika. Kotne funkcije. Trigonometrija*. Državna založba Slovenije, Ljubljana 1985
- [3] I. Vidav, *Algebra*, 3. izdaja, DMFA SRS, Ljubljana, 1987.

Franc Forstnerič

NALOGA

Dane so štiri nekolinearne točke A, B, C, D v ravnini. Konstruiraj kvadrat, katerega nosilke stranic potekajo vsaka skozi eno od danih točk.

Franc Lebedinec

Doslej smo spoznali, da ima matrično množenje podobne lastnosti kot množenje števil, le komutativnost nasploh ne velja. Oglejmo si nekaj pojavov, ki jih pri številih ne srečamo. Izračunajmo npr. produkt matrik A in B , kjer je

$$A = \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 4 & 2 \end{bmatrix} \quad B = \begin{bmatrix} 1 & -3 \\ -2 & 6 \end{bmatrix}$$

Dobimo $A \cdot B = O$. Imamo torej dve matriki A in B , obe sta različni od matrike O , njun produkt pa je enak O . Pri številih se kaj takega ne more primeriti. Če sta a in b od 0 različni števili, potem je tudi ab različen od 0. Matriki A in B iz zgornjega primera imenujemo *delitelja nič*. Točneje, A je levi, B pa desni delitelj nič.

Zastavimo si nalogo: poišči vse matrike X z lastnostjo $A \cdot X = O$, kjer je A matrika iz zgornjega primera. Rešiti je torej treba matrično enačbo $A \cdot X = O$, ali na dolgo:

$$A \cdot X = \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 4 & 2 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} x & y \\ z & u \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2x+z & 2y+u \\ 4x+2z & 4y+2u \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} = O$$

Spet dobimo sistem štirih linearnih enačb:

$$2x + z = 0 \quad 4x + 2z = 0 \quad 2y + u = 0 \quad 4y + 2u = 0$$

Druga in četrta enačba sta le mnogokratniki prve oziroma tretje enačbe, zato je rešitev tega sistema kar $z = -2x$ in $u = -2y$, kjer sta x in y poljubni števili. Spet smo dobili neskončno mnogo rešitev, matrik X , ki so desni delitelji nič za dano matriko A :

$$X = \begin{bmatrix} x & y \\ -2x & -2y \end{bmatrix} \quad x, y \text{ poljubna}$$

V zgornjem primeru smo imeli $A \cdot B = O$. Zanimivo je, da $B \cdot A$ ni enako O

* 1. del tega članka je izšel v P XV/1, str. 2 – 7

$$B \cdot A = \begin{bmatrix} 1 & -3 \\ -2 & 6 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 4 & 2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -10 & -5 \\ 20 & 10 \end{bmatrix}$$

Ta rezultat nas pouči, da matrika A , ki je levi delitelj nič za matriko B , ni nujno tudi desni delitelj nič za isto matriko B .

Naravno se nam zdi vprašanje, ali je vsaka matrika desni ali levi delitelj nič. Odgovor je ne. Matrika A je, kot pokaže nekaj daljši račun, desni delitelj nič natanko tedaj, ko je izpolnjen pogoj $ad - bc = 0$, kjer so a, b, c, d matrični elementi matrike A .

Končno se še vprašajmo, ali je kaka matrika A sama sebi delitelj nič, ali velja torej $A \neq 0, A \cdot A = 0$? Rešiti je torej treba matrično enačbo $A^2 = 0$. Tako matriko imenujemo *nilpotentna matrika*. Pri številih ima seveda enačba $a^2 = 0$ samo nezanimivo rešitev $a = 0$. Pri matrikah ni tako. Izračunajmo najprej A^2 :

$$A^2 = \begin{bmatrix} a^2 + bc & ab + bd \\ ac + cd & bc + d^2 \end{bmatrix} \quad (10)$$

Iz enačbe $A^2 = 0$ sledijo štiri kvadratne enačbe:

$$\begin{aligned} a^2 + bc &= 0 \\ d^2 + bc &= 0 \\ (a + d)b &= 0 \\ (a + d)c &= 0 \end{aligned}$$

Pri reševanju kvadratnih enačb moramo biti previdni, da se nam kaka rešitev ne izmuzne. Sistematično bomo upoštevali vse možnosti.

1. Naj bo $a + d \neq 0$. Potem sledi iz tretje enačbe, da mora biti $b = 0$, iz četrte pa $c = 0$. Prva enačba postane tako $a^2 = 0$, torej $a = 0$, druga pa je $d^2 = 0$ ali $d = 0$. Sedaj pa predpostavka $a + d \neq 0$ ni več izpolnjena. Ta možnost nam ne da nobene rešitve.

2. Naj bo torej $a + d = 0$. Zadnji dve enačbi sta sedaj izpolnjeni pri poljubnih vrednostih neznank c in d . Iz $d = -a$ in iz druge enačbe sledi $a^2 + bc = 0$, kar je prva enačba. Ostala nam je tako le še prva enačba $a^2 + bc = 0$. Če vzamemo $b = c = 0$, dobimo $a = 0$, zaradi $a + d = 0$ pa tudi $d = 0$, kar nam da rešitev $A = 0$.

Pa si izberimo $c \neq 0$. Tedaj smemo prvo enačbo deliti s c in dobimo

$b = -a^2/c$. Iz pogoja $a + d = 0$ sledi seveda $d = -a$, števili c in a pa sta poljubni, le c ne sme biti 0. Dobili smo neskončno mnogo rešitev enačbe $A^2 = 0$:

$$A = \begin{bmatrix} a & -a^2/c \\ c & -a \end{bmatrix} \quad a \text{ in } c \text{ poljubna, } c \neq 0$$

Če pa vzamemo $c = 0$, sledi iz prve enačbe $a = 0$, zaradi pogoja $a + d = 0$ mora biti tudi $d = 0$, b pa je poljuben. Dobili smo še rešitve:

$$A = \begin{bmatrix} 0 & b \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \quad b \text{ poljuben}$$

Če vzamemo sedaj $b = 1$, v prejšnji rešitvi pa $a = 0$, $c = 1$, dobimo posebno enostavni rešitvi enačbe $A^2 = 0$:

$$\begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \quad \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}$$

Pri številih rešujemo tudi druge kvadratne enačbe. Npr. enačba $a^2 = a$ ima rešitvi $a = 0$ in $a = 1$. Vprašajmo se, kako je z rešitvami ustrezne matrične enačbe $A^2 = A$. Matrikam s tako lastnostjo pravimo *idempotentne matrike*. Po analogiji s številsko enačbo $a^2 = a$ sklepamo, da ima ustrezna matrična enačba gotovo rešitvi $A = 0$ in $A = I$, kar je očitno res. Izračunajmo še druge rešitve enačbe $A^2 = A$. Iz enačbe (10) in pogoja $A^2 = A$ sledijo spet štiri kvadratne enačbe:

$$\begin{aligned} a^2 + bc &= a \\ c(a + d) &= c \\ b(a + d) &= b \\ bc + d^2 &= d \end{aligned}$$

Razlikovati je treba več možnosti.

1. Naj bo $a + d = 0$. Tedaj sledi iz druge enačbe $c = 0$, iz tretje pa $b = 0$. Iz prve dobimo $a^2 = a$. Iz $a + d = 0$ sledi $d = -a$. To vstavimo v četrto enačbo in dobimo $a^2 = -a$. Iz enačb $a^2 = a$ in $a^2 = -a$ sledi $2a = 0$, torej $a = 0$, zato tudi $d = 0$. Dobili smo že znano rešitev $A = 0$.

2. Naj bo sedaj $a + d \neq 0$, $b = 0$ in $c = 0$. Prva enačba pove sedaj $a^2 = a$,

druga in tretja postaneta $0 = 0$, četrta pa $d^2 = d$. Tako dobimo možnosti $a = 0$ ali $a = 1$ in $d = 0$ ali $d = 1$. To nam da štiri rešitve:

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \quad \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \quad \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \quad \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$$

Prvi dve rešitvi smo že uganili, drugi dve sta novi.

3. Naj bo spet $a + d \neq 0$ in $b \neq 0$. Sedaj lahko tretjo enačbo krajšamo z b in dobimo $a + d = 1$. Druga enačba postane $c = c$, ki je izpolnjena seveda za vsak c . Iz $a + d = 1$ izrazimo $d = 1 - a$ in to vstavimo v četrto enačbo. Dobimo $bc + (1 - a)^2 = 1 - a$ ali, po ureditvi, $bc + a^2 = a$, kar je prav prva enačba. Ker smo predpostavili $b \neq 0$, lahko iz prve enačbe izrazimo $c : c = (a - a^2)/b$, a in b sta še poljubna, le b ne sme biti enak 0. Tako smo dobili neskončno mnogo novih rešitev enačbe $A^2 = A$:

$$A = \begin{bmatrix} a & b \\ (a - a^2)/b & 1 - a \end{bmatrix}$$

4. Zadnja možnost je $a + d \neq 0$, $b = 0$, $c \neq 0$. Sedaj spet sledi iz druge enačbe $a + d = 1$, tretja postane $0 = 0$, prva pa $a^2 = a$. V četrti enačbi upoštevamo $d = 1 - a$ in dobimo $a^2 = a$. Rešitve so tako $a = 0, d = 1$ ali $a = 1, d = 0$, c pa je poljuben. Dobili smo še neskončno mnogo novih rešitev enačbe $A^2 = A$:

$$\begin{bmatrix} 0 & 0 \\ c & 1 \end{bmatrix} \quad \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ c & 0 \end{bmatrix} \quad c \text{ poljuben}$$

Med drugim smo spoznali tudi: v številih ima kvadratna enačba $a^2 = a$ dve rešitvi, ustreza matrična enačba pa ima neskončno mnogo različnih rešitev.

Med realnimi števili kvadratna enačba $a^2 = -1$ seveda nima rešitve. Lahko pa se seveda vprašamo, ali ima ustrezna matrična enačba

$$A^2 = -I$$

rešitve, matrike, ki imajo realne matrične elemente. Odgovor je spet da. Zgornja matrična enačba prevede do sistema štirih kvadratnih enačb:

$$a^2 + bc = -1 \quad (a + d)b = 0 \quad (a + d)c = 0 \quad d^2 + bc = -1$$

Podobno, kot smo reševali sisteme kvadratnih enačb doslej, lahko rešimo tudi ta sistem. Naj bralec poskusi sam! Dobi se rešitev:

$$A = \begin{bmatrix} a & b \\ (-1 - a^2)/b & -a \end{bmatrix} \quad a, b \text{ poljubna, } b \neq 0$$

Posebno preprosto rešitev dobimo v primeru $a = 0, b = 1$. Dobljeno matriko označimo z J :

$$J = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{bmatrix}, \quad J^2 = -I$$

Tisti, ki že poznate kompleksna števila, opazite, da ima matrika J prav tako lastnost kot imaginarno število i : $i^2 = -1$.

Doslej smo spoznali, da lahko z matrikami pogosto računamo podobno kot s števili. Spoznali pa smo tudi pojave, ki jih pri številih ne srečamo. Pri številih lahko govorimo tudi o deljenju. Če je $b \neq 0$, lahko poljubno število a delimo z b . Dobimo a/b . Pravzaprav je deljenje odveč, saj lahko zapišemo: $\frac{a}{b} = a \cdot \frac{1}{b}$. Zadošča, da za vsako število $b \neq 0$ poznamo njemu recipročno število $\frac{1}{b}$. Deljenje je potem množenje z recipročno vrednostjo. Za $b \neq 0$ je x recipročno število, če velja $b \cdot x = 1$. V tej obliki pa lahko posplošimo pojem recipročnega števila na matrike. Dana naj bo matrika A . Rekli bomo, da je matrika X *inverzna* k A , če je izpolnjena enačba:

$$A \cdot X = I \tag{11}$$

Če taka matrika X obstaja, jo bomo označili z A^{-1} , matriko A pa bomo imenovali *obrnljivo*.

Naravno je seveda vprašanje, ali ima vsaka od O različna matrika inverzno matriko. Pokažimo, da to ni res. Naj bo

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$$

Poglejmo, če ima za ta A enačba (11) rešitev. Izračunajmo

$$A \cdot X = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} x & y \\ z & u \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} z & u \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$$

Kakorkoli izberemo števila x, y, z in u , nikoli ne bomo dobili na desni strani zgornje enačbe matriko I . To pomeni, da matrika A nima inverzne matrike, čeprav je različna od matrike O .

Za mnoge matrike hitro vidimo, da imajo inverzno matriko. Matrika I je npr. sama sebi inverzna, saj velja $I \cdot I = I$. Tudi matrika J ima inverzno matriko. Zaradi enačbe $J^2 = -I$ je $-J$ inverzna k J .

Naloga: Poišči vse matrike, ki so same sebi inverzne.

Poskusimo ugotoviti, katere matrike imajo inverz. Za dano matriko A mora torej veljati enačba (11), ali na dolgo:

$$\begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} x & y \\ z & u \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$$

Primerjava levih in desnih strani v tej enačbi nam da sistem štirih linearnih enačb:

$$\begin{aligned} ax + bz &= 1 & ay + bu &= 0 \\ cx + dz &= 0 & cy + du &= 1 \end{aligned} \quad (12)$$

To sta pravzaprav dva ločena sistema dveh enačb za dve neznanki. Rešimo prvi sistem (pri začasnem privzetku, da je $d \neq 0$ in $b \neq 0$). Prvo enačbo pomnožimo z d , drugo z $-b$ in seštejemo dobljeni enačbi:

$$(ad - bc)x = d$$

Od tu lahko x izračunamo, če je le $ad - bc \neq 0$. Privzemimo, da je tudi ta pogoj izpolnjen. Tako dobimo $x = d/(ad - bc)$. Podoben račun nam da $z = -c/(ad - bc)$. Drugi sistem rešimo po podobni poti in dobimo $y = -b/(ad - bc)$, $u = a/(ad - bc)$. Za X smo dobili torej matriko

$$X = \frac{1}{ad - bc} \begin{bmatrix} d & -b \\ -c & a \end{bmatrix} \quad (13)$$

Preskus pokaže, da je res $AX = I$. Izračunajmo še $X \cdot A$:

$$X \cdot A = \frac{1}{ad-bc} \begin{bmatrix} ad-bc & 0 \\ 0 & ad-bc \end{bmatrix} = I$$

Opazimo še, da je s formulo (12) vedno določena neka matrika, če je le izraz $ad - bc \neq 0$. Tako smo dokazali izrek:

Če je za matriko A izraz $ad - bc$ različen od 0, potem obstaja k matriki A inverzna matrika. Dana je s formulo (13).

Izraz $ad - bc$ imenujemo *determinanta* matrike A . Ostane seveda vprašanje, kako je z inverzom v primeru, ko je determinanta enaka 0.

Oglejmo si primer, ko sta b in d različna od 0, $ad - bc = 0$. Prvo enačbo v (12) $ax + bz = 1$, pomnožimo na obeh straneh z d . Dobimo $adx + bdz = d$. Ker je $ad - bc = 0$, je $ad = bc$. To upoštevajmo v zadnji enačbi in dobimo $bcx + bdz = d$. Po delitvi z b pa dobimo

$$cx + dz = d/b$$

Druga enačba v sistemu (12) pa je $cx + dz = 0$. Ker sta d in b različna od 0, sta dobljeni enačbi protislovni in sistem nima rešitve, matrika A , za katero je $ad - bc = 0$, pa nima inverzne matrike.

Zgoraj smo obravnavali primer $ad - bc = 0$, b in d različna od 0. Za vse ostale možnosti: $b = 0, d = 0$ in $b = 0, d \neq 0$ in $b \neq 0, d = 0$ bi prišli do istega rezultata, kot se bralec lahko sam prepriča. Tako smo dokazali izrek:

Matrika A ima inverzno matriko natanko tedaj, ko je njena determinanta $ad - bc$ različna od 0.

Podobnih problemov, kot smo jih obravnavali doslej, je še mnogo. Podobno, kot smo študirali matrike dimenzije 2×2 , bi lahko študirali tudi matrike 3×3 :

$$A = \begin{bmatrix} a & b & c \\ d & e & f \\ g & h & i \end{bmatrix}$$

ali celo matrike, ki imajo še več vrstic in stolpcev. Če bi za zgornjo matriko A želeli rešiti npr. enačbo $A^2 = -I$, bi naleteli na sistem devetih kvadratnih enačb z devetimi neznankami. Take sisteme je izredno težko reševati po poti, ki smo jo ubrali pri matrikah 2×2 . Očitno so naše direktne metode neprimerne za

študij matrik dimenzije 3×3 ali celo večjih matrik. Na dlani je misel študirati matrike na način, ki je neodvisen od njihove velikosti. Matematiki so tako pot našli že pred več kot sto leti. Študij matrik obsega panoga matematike, ki se imenuje linearna algebra. Študenti matematike in večina študentov tehničnih smeri spozna linearno algebro v prvem letniku študija na univerzi.

Anton Suhadolc

ŠTEVILSKA KRIŽANKA TRIKOTNIŠKA ŠTEVILA — Rešitev iz P–1 (Franci Oblak)

$o = 2s$	1	6	2	9	3	3	4	0	◇	5	1	6	3	7	8	8	6	9	0
	10	4	2	6	5	◇	11	4	2	8	0	◇	1						
$s = \frac{a+b+c}{2}$	12	3	6	9	6	◇	13	4	0	1	5	◇							
$v_a = \frac{2p}{a}$		16	3	7	0	8	◇	17	3	9	6	0							
$p = \sqrt{s(s-a)(s-b)(s-c)}$			19	9	1	4	7	6	0	0	◇								
$\varrho_a = \frac{p}{s-a}$			20	3	4	6	5	◇	21	4	2	7	5						
$\varrho = \frac{p}{s}$			22	3	9	6	0	◇	23	3	9	9	1	◇					
	24	4	6	2	0	◇	25	3	7	0	2	◇	26	7					
$r = \frac{abc}{4p}$		27	5	3	0	7	4	8	◇	29	6	2	4						
$t_a = \frac{1}{2} \sqrt{2(b^2+c^2)-a^2}$			31	5	9	2	9	2	3	◇	33	8	8						
$s_\alpha = \frac{2}{b+c} \sqrt{sbc(s-a)}$			34	6	7	2	2	4	9	◇	1								

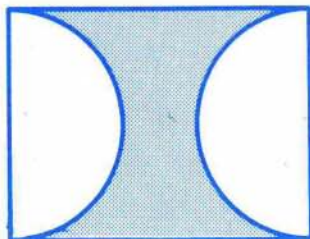
$$\alpha = 2 \arctan \sqrt{\frac{(s-b)(s-c)}{s(s-a)}}$$

$$\alpha = \arccos \frac{b^2 + c^2 - a^2}{2bc} \quad 111$$

PISALI SO NAM

učitelji aktiva za MA—FI občine Slovenske Konjice in nam poslali naloge, ki so jih reševali učenci v njihovi občini na šolskih tekmovanjih. V "matematično razvedrilo" in izziv vam ponujamo nekatere.

- (5. razred) Od 35 učencev je 20 učencev članov matematičnega krožka, 11 učencev članov športnega krožka, 10 učencev pa ni v nobenem krožku. Koliko učencev je hkrati v obeh krožkih?
- (5. razred) Ploščina pravokotnika meri 168 cm^2 , njegova širina pa 12 cm. Koliko večjo ploščino ima kvadrat, katerega obseg je enak obsegu tega pravokotnika?
- (5. razred) Brat in sestra sta imela pred 8 leti skupaj 8 let. Čez koliko let bosta imela skupaj 40 let?
- (6. razred) Kolesar krene po klancu. V prvi sekundi prevozi 1,3 m, nato pa v vsaki sekundi za 2,98 m daljšo pot kot v prejšnji sekundi. Kolikšno pot prevozi v 7 sekundah?
- (6. razred) V prvem razredu neke osnovne šole je 60 učencev, kar je $\frac{3}{4}$ od $\frac{1}{4}$ vseh učencev te šole. Koliko učencev je na tej šoli?
- (6. razred) V šolo je vpisanih 180 fantov in 192 deklet. Iz njih so oblikovani oddelki z enakim številom učencev tako, da je število fantov v vsakem oddelku enako. Učenci so razdeljeni v oddelke z največ 50 učenci. Koliko fantov in koliko deklet je v vsakem oddelku? Koliko je oddelkov na šoli?
- (7. razred) Obseg pravokotnega zemljišča meri 42 m. Višina je za $\frac{1}{4}$ krajša od osnovnice. Za koliko se zmanjša ploščina zemljišča, če zemljišče zmanjšaš za polkroga nad višino?
- (7. razred) Tabelo izpolni s števili tako, da bo vsota vseh sosednjih števil vodoravno in navpično 15.



	6			
		2		
7				
			3	

9. (8. razred) Vlak odpelje iz postaje s 15-minutno zamudo. Zato poveča hitrost za 20% od predvidene hitrosti, dokler ne nadoknadi zamude. V kolikšnem času od odhoda iz postaje je vlak nadoknadil zakasnitev?
10. (8. razred) Telesna diagonalna kocke je enaka telesni diagonalni kvadra in meri $5\sqrt{3}$ cm. Izračunaj
- površino kocke
 - razsežnosti kvadra, če je dolžina kvadra enaka osnovnemu robu kocke, širina pa petkrat manjša od dolžine.

Rezultati: 1. 6 ; 2. 1 cm^2 ;
 3. čez 8 let; 4. 71.68 m;
 5. 320 ; 6. 15 fantov, 16 deklet, 12 oddelkov ;
 7. $63,585\text{ m}^2$; 9. $1\text{ h }15\text{ min}$;
 10. a) 150 cm^2 , b) $a = 5\text{ cm}$,
 $b = 1\text{ cm}$, $c = 7\text{ cm}$; 8. glej sliko

3	6	6	3	6
5	8	2	5	8
7	1	7	7	1
3	6	6	3	6

Učiteljem iz Slovenskih Konjic, še posebej tov. Jani Novak–Vehovar, se v imenu naših bralcev pristrčno zahvaljujemo, k sodelovanju pa vabimo tudi vse ostale.

prir. Damjan Kobal

NALOGA

NEVIDNOST GA NE REŠI

Črni kralj je na šahovnici, le neviden je. Beli je na potezi in lahko matira črnega kralja v eni potezi. Katera je ta poteza?

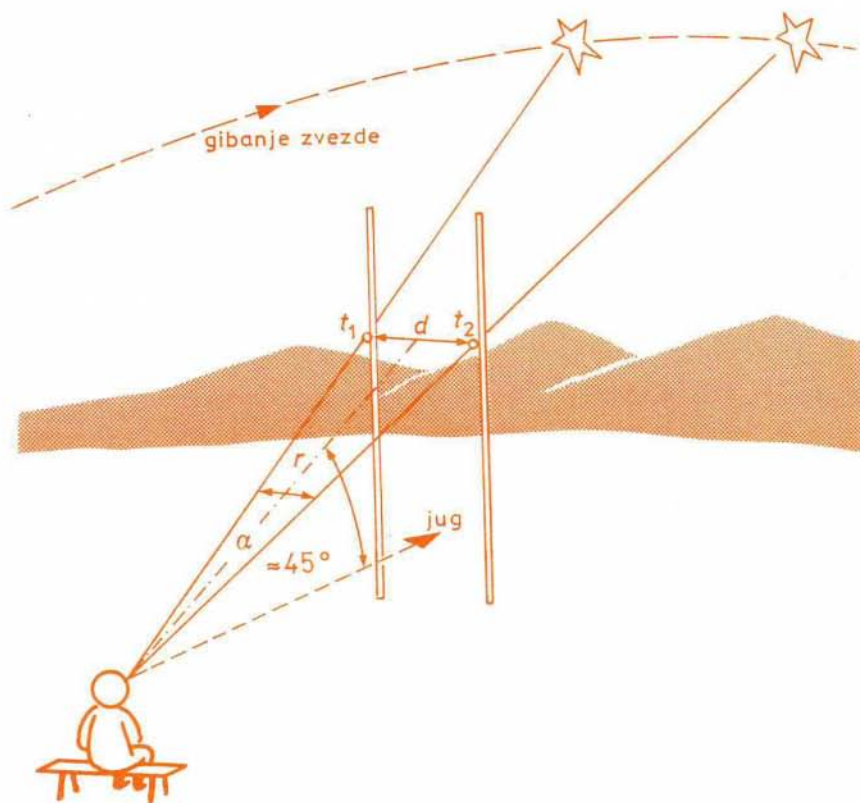
po R. Smullyanu
 prev. Peter Petek

Črni (2 figuri – kralj neviden)



Beli (6 figur)

IZMERI KOTNO HITROST VRTENJA ZEMLJE



Slika 1. K merjenju kotne hitrosti vrtenja Zemlje. *Opomba:* Palici morate biti dovolj visoki, da brez težav opazujemo prečkanje zvezde čez del neba, ki ga zajameta palici. Če opazujemo prečkanje zvezde, ki ima dosti večjo (manjšo) višino od 45° , upoštevamo, da je $\omega = \alpha / (t_2 - t_1 \cdot \cos \delta)$, kjer je δ deklinacija zvezde. Podrobnosti glej v knjižici *Astronomska opazovanja*, Presek, 1977/78, št. 5, str. 239.

* Najprikladnejše zvezde za opazovanje so: Spika v ozvezdju Device (spomladi), Atair v Orlu (poleti in jeseni), Rimščice v ozvezdju Orion (pozimi).

To, da se Zemlja vrti od zahoda proti vzhodu in da se v enem dnevu enkrat zavrti, že veš. Kotna hitrost vrtenja Zemlje, to je kot, za katerega se Zemlja zasučje v časovni enoti, je pomemben astronomski podatek, ki ga je dobro poznati tudi v navadnem življenju. Morda niti ne veš, da tudi ta podatek poznaš. Prav res. V 24 urah se Zemlja zasučje za 360° , v eni uri se zavrti za $360^{\circ}/24 = 15^{\circ}$, v eni minuti za $15'$, v eni sekundi za $15''$. Torej je *kotna hitrost vrtenja Zemlje* $\omega = 15^{\circ}/h$ (15° na uro) = $15'/min$ (15 kotnih minut na minuto) = $15''/s$ (15 kotnih sekund na sekundo).

Tu ti bomo pokazali, kako kotno hitrost Zemljinega vrtenja izmeriš iz navideznega gibanja zvezd. Opazovanje izvedeš s prostim očesom. Najbolje je, da opazujeta dva. Eden meri, drugi zapisuje meritve. Nato vlogi zamenjata.

Vzameš dve okoli 1,5 m dolgi ravni palici (droga, deski), ki ju zapičiš navpično v tla v južni smeri od svojega opazovališča, kot kaže slika. Izmeriš razdaljo d med obema vzporednima palicama. Jasnega večera udobno sedeš na klop ali pa v travo tako, da v južni smeri brez težav opazuješ prečkanje zvezd čez del neba, ki ga omejujeta palici (slika 1). Izbereš svetlo zvezdo * na južni strani neba okoli 45° nad obzorjem tako, da bo zanesljivo prečkala del neba med palicama. Izmeriš še razdaljo r od sredine med obema palicama do očesa. Tako izračunaš kot α , ki ga s tvojega opazovališča oklepata palici in ga bo prečkala zvezda. Ta kot izračunaš iz enačbe $\alpha/360^{\circ} = d/2\pi r$, kjer izmerjena d in r poznaš.

Ves čas opazuješ z istega opazovališča. Opazuješ z enim očesom (zakaj?) in se ne premikaš. Zabeležiš čas t_1 , ko zvezda zaide za prvo (levo) palico. Nato se zvezda spet pojavi. Navidezno se giblje proti drugi (desni) palici. Potrpeljivo čakaš in zabeležiš še čas t_2 , ko zvezda zaide za drugo palico.

Zvezda se navidezno giblje od vzhoda proti zahodu (od leve proti desni), ker se Zemlja vrti z enako kotno hitrostjo kot nebesna krogla, le v nasprotnem smislu. V času $t = t_2 - t_1$ se zvezda navidezno premakne za kot α , za enak kot, a v nasprotnem smislu, pa se v istem času zavrti Zemlja. V eni sekundi se torej Zemlja zasučje za kot α/t , ki je ravno merjena kotna hitrost Zemlje, torej $\omega = \alpha/t$. Naredi več meritev z različnimi zvezdami in izračunaj povprečno vrednost za ω . Bodi čim bolj natančen!

Izmeriš: $d = \dots\dots\dots$ cm Izračunaš: $\alpha = d \cdot 360^{\circ} / 2\pi r = \dots\dots\dots^{\circ}$
 $r = \dots\dots\dots$ cm

$t_1 = \dots\dots\dots$ s $t = t_2 - t_1 = \dots\dots\dots$ s $\Rightarrow \dots\dots$ h
 $t_2 = \dots\dots\dots$ s

Sledi: $\omega = \alpha/t = \dots\dots\dots^{\circ}/h$

TEORIJA IN POSKUS

Današnji fiziki si enako kot G. Galilei in I. Newton prizadevajo, da bi spoznali tajnosti narave. Med tedanjim in sedanjim raziskovanjem pa ne gre spregledati vsaj dveh pomembnejših razlik. G. Galilei je sam postavil teorijo prostega padanja in delal poskuse in meril s kotalečimi se kroglicami. V tistih časih in tudi še pozneje so isti fiziki postavljali teorije, načrtovali poskuse in jih delali, gradili merilne naprave in merili.

Nekako na začetku našega stoletja pa so naloge postale tako obsežne, da so si fiziki razdelili delo. Vse bolj so nekateri samo postavljali teorije in računali, drugi pa samo načrtovali poskuse, gradili naprave in merili. Prvi so *teoretiki*, drugi *eksperimentalci*. Delitev je šla še dalje, tako da se marsikateri izmed današnjih raziskovalcev razume samo na majhen del teorijske ali eksperimentalne fizike.

Druga sprememba je segla še globlje. Nekdaj so raziskovali le moške, ki so bili pripravljeni skromno živeti ali so imeli kako premoženje. Saj so že obstajale univerze in akademije in marsikateri vladar ali mesto ali država so podpirali raziskovanje, toda plačila in podpore ponavadi niso bile izdatne. G. Galilei in I. Newton sta bila prej izjemi: sploh nista živela slabo. Galilei je znal zahtevati ustrezno plačilo, ker je moral skrbeti za družinske člane, I. Newton pa je postal nadzornik kraljeve kovnice in je zapustil nečakinji veliko premoženje. Kljub temu je bila znanost za današnje pojme tedaj zelo omejena. V našem stoletju, posebno po drugi svetovni vojni, pa je "znanost postala velika". Organizirano raziskovanje na univerzah, akademijah in inštitutih, tudi na številnih inštitutih industrijskih ustanov, podjetij, in urejen način zbiranja denarja preko raziskovalnih in drugih skupnosti dajeta znanosti mnogo širši okvir in veljavo, a jo tudi zavezujeta.

Naravoslovje hodi po dveh nogah, teoriji in poskusu ... Zdaj postavi naprej eno, zdaj drugo nogo. Nenehen napredek je mogoč samo z uporabo obeh – s teorijskim razmišljanjem in potem s preskušanjem ali odkrivanjem novih zvez pri poskusih in potem s tem, da pristavimo teorijsko nogo in jo porinemo naprej in tako dalje izmenoma ...

R.A. Millikan, *Nobelovo predavanje* 1924

V idealni predstavi se eksperimentalci suče okoli naprav, ki jih je zgradil, in meri. Poleg tega mora preskrbeti denar, material in instrumente, nadzorovati včasih številne tehnike in laborante in obdelovati rezultate merenj. Vse to pogosto traja leta in leta in edini namen tega dela je natančnejša vrednost kakega parametra ali konstante... Teoretiki pa v idealni predstavi sedi za pisalno mizo v čisti in svetli sobi s pogledom na vrt ali ribnik ali v najslabšem primeru leži doma na kavču in razmišlja "o naravi stvari" ali računa. Od časa do časa prekine to z zanimivimi diskusijami o raznih znanstvenih in splošnih problemih ... V resnici seveda razmere niso tako preproste. V 19. stoletju, da ne govorimo o prejšnjih stoletjih, še ni bilo jasne delitve fizikov na eksperimentalce in teoretike. Glede na sposobnosti in želje so seveda nekateri več eksperimentirali, drugi več računali, večina pa je delala oboje. Čedalje bolj zapletena eksperimentalna tehnika, hitra rast števila fizikov, tekmovanje med njimi, večanje znanstvene uspešnosti in kopičenje informacij je povzročilo "delitev dela" in ločitev eksperimentalcev in teoretikov.

V.L. Ginzburg, *Sodobni problemi fizike in astrofizike*, DZS, Ljubljana 1978, str. 76

NEWTON IN GRAVITACIJSKA KONSTANTA

Pravzaprav je presenetljivo, koliko si je I. Newton pomagal z gravitacijskim zakonom, ne da bi ga poznal do podrobnosti. Ni namreč določil *gravitacijske konstante*. Privlačna sila med drobnima telesoma je sorazmerna z maso enega in drugega telesa in obratno sorazmerna s kvadratom njune razdalje. Da pa bi lahko izračunali silo med telesoma, bi morali poznati še sorazmernostni koeficient, gravitacijsko konstanto κ :

$$F = \kappa m m' / r^2$$

Iz astronomskih opazovanj gravitacijske konstante ni mogoče določiti, saj ne poznamo privlačne sile, obeh mas in razdalje. Na Zemlji bi jo lahko določili, če bi imeli podatek o masi Zemlje: privlačno silo, to je težo telesa, njegovo maso in radij Zemlje poznamo. Pri krogelno simetričnem telesu za točko zunaj telesa glede gravitacije lahko veliko telo nadomestimo z drobnim telesom z enako maso v njegovem središču. Iz prejšnje trditve izhaja na drugi strani, da bi lahko "stehtali Zemljo", se pravi določili njeno maso, če bi poznali gravitacijsko konstanto.

I. Newton je to skoraj naredil. V predlogu X, izreku X v 3. knjigi je ugotovil: " Ker je navadna snov na zemeljskem površju dvakrat težja kot voda in

malo niže v rudnikih tri— do štirikrat težja ali celo petkrat težja, je verjetno količina vse snovi na Zemlji pet— ali šestkrat težja, kot če bi bila vsa Zemlja iz vode.'

Vzemimo, da je Zemlja v povprečju 5,5—krat gostejša od vode. Z znanim radijem 6400 kilometrov izračunamo njeno maso:

$$m_z = \rho V = \rho \cdot 4\pi r_z^3 / 3 = 5500 \text{ kgm}^{-3} \cdot 4\pi (6,4 \cdot 10^6 \text{ m})^3 / 3 = 6 \cdot 10^{24} \text{ kg}$$

Zemlja privlači telo z maso 1 kg s težo 9,8 N, tako da je gravitacijska konstanta

$$\kappa = Fr^2 / mm_z = 9,8 \text{ N} (6,4 \cdot 10^6 \text{ m})^2 / 1 \text{ kg} \cdot 6 \cdot 10^{24} \text{ kg} = 6,7 \cdot 10^{-11} \text{ Nm}^2 / \text{kg}^2$$

Če upoštevamo, da je $1 \text{ N} = 1 \text{ kgms}^{-2}$, lahko enoto zapišemo drugače: $\text{m}^3 / \text{kg s}^2$.

Vendar Newton ni naredil tega koraka. Najbrž le ni zaupal svojemu ugibanju o gostoti Zemlje. Zato ni mogel uporabljati naravnost gravitacijskega zakona, ampak se je moral zadovoljiti z računanjem razmerja, na primer razmerja gravitacijskih sil danih teles v odvisnosti od razmerja njunih razdalj: $F_2 / F_1 = (r_1 / r_2)^2$.

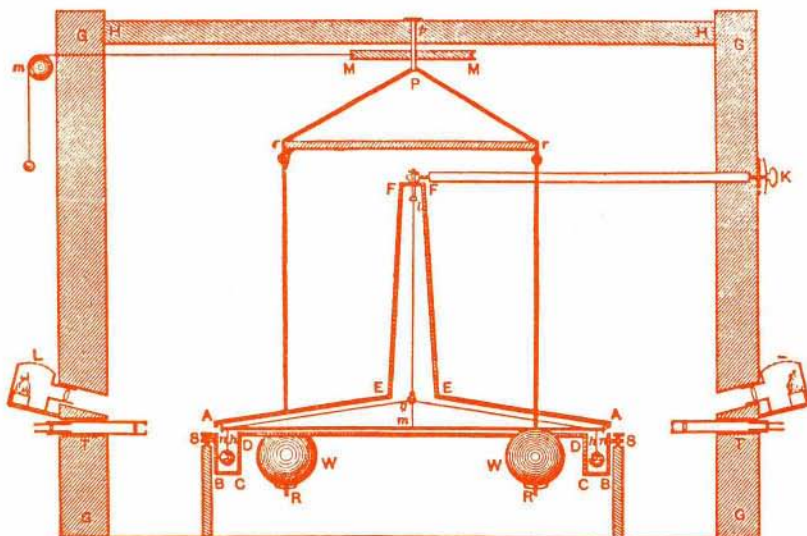
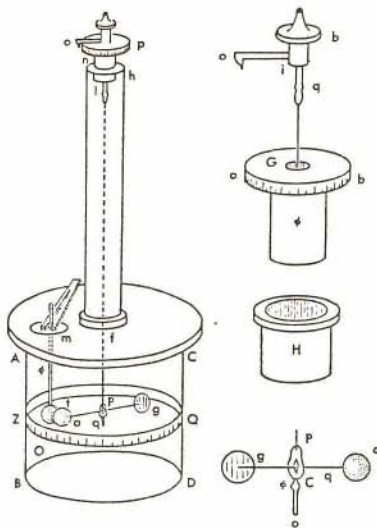
MERJENJE GRAVITACIJSKE KONSTANTE

Še za Newtonovega življenja so se fiziki spraševali, kako bi določili gravitacijsko konstanto. Treba je izmeriti zelo majhno privlačno silo med telesoma na zemeljskem površju. Za začetek so poskusili s silo med drobnim telesom in goru. Telo so obesili na vrvico in merili odklon vrvice od navpičnice. Francoz Pierre Bouguer je delal poskuse na ekspediciji leta 1738 ob Chimborazu v današnjem Ekvadorju. Anglež Maskelyne je meril v škotskih gorah. Vendar se zamisel ni obnesla.

Privlačna sila med laboratorijskima telesoma je še manjša. Bilo jo je mogoče izmeriti šele potem, ko je francoski vojaški inženir Charles Augustin de Coulomb izumil *torzijsko tehtnico* (slika 1). Prečka na navpični kovinski ali kremenovi nitki se malo zasučje, če deluje pravokotno na prečko v njenem krajišču šibka sila. Zasuk je mogoče natančno izmeriti, če pritrdimo na prečko zrcalce, usmerimo nanj ozek svetlobni curek in opazujemo premik svetle pege na oddaljeni steni. S tako tehtnico se je Coulomb v letih od 1785 do 1789 prepričal, da je sila med naelektrenima telesoma obratno sorazmerna s kvadratom razdalje. Sila je privlačna, če imata naboja nasproten znak, in odbojna, če imata enak znak.

S torzijsko tehtnico (slika 2) je Anglež Henry Cavendish leta 1798 prvič izmeril gravitacijsko konstanto. Na krajišče lahke prečke je pritrdil drobni telesi in izmeril silo med njima in večjima svinčenima krogla, ki ju je

Slika 1. Torzijska tehtnica, s katero je C.A. Coulomb leta 1785 preveril zakon za silo med naelektrenima telesoma. Zakon ima podobno obliko kot Newtonov gravitacijski zakon: sila je sorazmerna z nabojem enega in z nabojem drugega telesa in obratno sorazmerna s kvadratom razdalje. Toda za razliko od gravitacije, ki je vedno privlačna, je električna sila privlačna, če imata naboja nasproten znak, in odbojna, če imata enakega. Prečka s telesom je obešena na tanki kovinski nitki in zasuk prečke je sorazmeren s silo.



Slika 2. Torzijska tehtnica, s katero je Henry Cavendish leta 1798 izmeril gravitacijo med laboratorijskima telesoma in določil gravitacijsko konstanto $\kappa = 6,7 \cdot 10^{-11} \text{ m}^3/\text{kg s}^2$. Nasproti velikima svinčenima kroglama W z maso po 158 kilogramov sta drobni krogli B na prečki, ki visi na tanki kovinski nitki. Zaradi sile med kroglama W in B se prečka zasukče. Zasuk prečke je Cavendish izmeril na skalah A, ki sta ju osvetljevali svetilki L, skozi daljnogleda T.

postavil nasproti. Podoben poskus naredimo danes brez težav pri predavanju iz fizike v prvem letniku na univerzi. Natančna merjenja pa so veliko bolj zahtevna. Gravitacijska konstanta sodi med najmanj natančno določene splošne konstante. Leta 1982 sta G.G. Luther in W.R. Towler dobila zanjo $6,6726 \cdot 10^{-11} \text{ m}^3/\text{kg s}^2$.

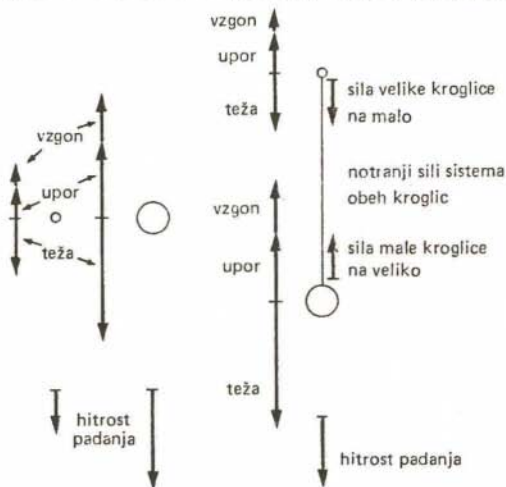
Razmišljanje prihrani marsikateri poskus, a ne vseh

Galilejev predhodnik na univerzi v Pisi Battista Benedetti je (leta 1585) zasledil nasprotje: Vzemimo, da težje telo pada hitreje od lažjega. Zvežimo obe telesi. Sestavljeno telo pada hitreje, ker je težje od težjega telesa. Toda težje telo sili lažje k hitrejšemu gibanju, lažje pa težje k počasnejšemu, tako da se giblje sestavljeno telo hitreje kot lažje, a počasneje kot težje. Oboje ne more veljati, zato padajo vsa telesa enako.

Verjetno je Galilei izhajal iz tega spoznanja, ki velja, če ni treba upoštevati zračnega upora.

Aristotel pa je bil prepričan, da vakuum, to je prostor, v katerem ne bi bilo zračnega upora, sploh ne obstaja, ker se ga "narava boji". Zato je vsaj podzavestno upošteval upor zraka ali druge tekočine.

V tej zvezi je poučno obdelati gibanje drobnih kovinskih ali steklenih kroglic v vodi ali gibanje zelo drobnih vodnih kapljic v zraku. Za ta primer velja Aristotelova napoved: kroglica pada s konstantno hitrostjo, ki je tem večja, čim težja je kroglica.



Slika 1. Velika kroglica pada v vodi z večjo hitrostjo kot mala kroglica. Z zelo tanko in dovolj dolgo nitko povezani kroglici pa padata s hitrostjo, ki je večja od hitrosti male kroglice, a manjša od hitrosti velike. V vseh treh primerih je po kratkem začetnem odseku vsota vseh sil enaka nič in gibanje enakomerno.

Uporabimo Newtonov zakon, ki ga bomo obdelali pozneje. Na kroglico delujejo zunanje sile: teža $mg = \rho Vg$ navpično navzdol in vzgon, to je teža izpodrinjene vode, $m'g = \rho'Vg$, in upor $6\pi r\eta v$ navpično navzgor. m in ρ sta masa in gostota kroglice, m' in ρ' masa in gostota vode. Oboje ima enako prostornino $V = 4\pi r^3/3$, če je r radij kroglice. *Stokesova enačba*, po kateri je upor $6\pi r\eta v$, velja samo, če je hitrost v dovolj majhna. Pri tem je η viskoznost, ki pove, kako se voda — na površju miruje glede na kroglico — upira gibanju.

Po Newtonovem zakonu je vsota vseh zunanjih sil enaka z maso pomnoženemu pospešku:

$$ma = (m - m')g - 6\pi r\eta v$$

Pospešek a je pozitiven v smeri navzdol. Pospešek je enak nič, ko je gibanje enakomerno. Tedaj se giblje kroglica s hitrostjo

$$v = mg(1 - \rho'/\rho)/6\pi r\eta = 2r^2(\rho - \rho')g/9\eta$$

Hitrost je tem večja, čim večja je teža kroglice.

Ta enačba je "po duhu" blizu "Aristotelovemu zakonu gibanja". Toda Aristotel je nekako spregledal upor in menda mislil, da razlika teže in vzgona "poganja" telo s konstantno hitrostjo.

Zdaj povežimo kroglico z večjim radijem r_1 in kroglico z manjšim radijem r_2 z dovolj dolgo vrvico tako, da gibanje ene preko gibanja tekočine ne zmoti gibanja druge. Na večjo kroglico deluje zdaj še sila vrvice F navpično navzgor

$$m_1 a_1 = (m_1 - m_1')g - 6\pi r_1 \eta v_1 - F$$

in na manjšo še enako velika sila vrvice navpično navdol

$$m_2 a_2 = (m_2 - m_2')g - 6\pi r_2 \eta v_2 + F$$

Pospeška a_1 in a_2 sta enaka nič, ko je gibanje enakomerno. Tedaj se gibljeta obe kroglici z enako hitrostjo $v_1 = v_2 = v_s$. Seštejemo obe enačbi in izračunamo to hitrost:

$$\begin{aligned} v_s &= (m_1 + m_2 - m_1' - m_2')g/6\pi\eta(r_1 + r_2) = \\ &= 2(\rho - \rho')(r_1^3 + r_2^3)/9\eta(r_1 + r_2) = \\ &= 2(\rho - \rho')(r_1^2 - r_1 r_2 + r_2^2)/9\eta \end{aligned}$$

Čeprav pada posamična kroglica tem hitreje, čim težja je, je hitrost v_s med hitrostma v_1 in v_2 , saj velja $r_2^2 < r_1^2 - r_1 r_2 + r_2^2 < r_1^2$, če je $r_2 < r_1$. V tem primeru Benedettijevo nasprotje odpove. Kaka trditev ima smisel le v določenih okoliščinah, ko lahko podrobno opredelimo, kaj opazujemo. Aristotelovim trditvam so manjkale predvsem te podrobne opredelitve.

Janez Strnad

RESITVE NALOG

Občinsko tekmovanje iz matematike – rešitve s str. 77

6. razred

1. a) $\frac{x}{8} = \frac{125}{1000} = \frac{1 \cdot 125}{8 \cdot 125} = \frac{1}{8}, x = 1$

b) $\frac{8}{x \cdot 2} = \frac{1}{5} = \frac{1 \cdot 8}{5 \cdot 8} = \frac{8}{5 \cdot 8}, x = 8$

c) $\frac{100}{x} = 100 \cdot \frac{1}{x} = 100 \cdot 8, \frac{1}{x} = 8, x = \frac{1}{8}$

č) $\frac{x-7}{4 \cdot x} = 0, x-7=0, x=7$

2.	žepnina	slaščičarna	knjige
pred podražitvijo	1200	400	800
po podražitvi	1700	400+200=600	800 + 30%.800 =
			= 1040

Izdatki po podražitvi: 600 + 1040 = 1640.

1700 – 1640 = 60

Mojci ostane 60 din.

3. Število $34a5b$ je deljivo s 4, če je $5b$ deljivo s 4. Zato mora biti $b \in \{2, 6\}$. $34a5b$ je deljivo z 9, če je $12 + a + b$ deljivo z 9. Tedaj je $a + b \in \{6, 15\}$.

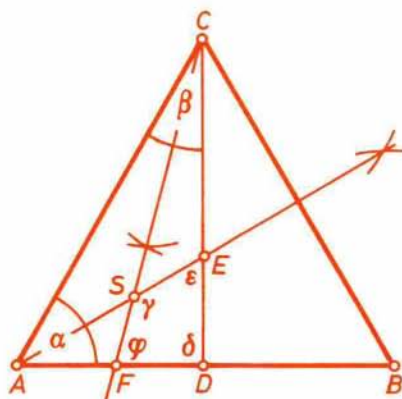
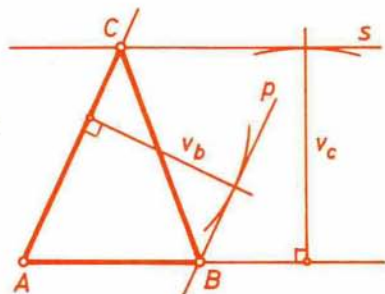
$b = 2 \quad a = 4 \quad \text{število } 34452$

$b = 6 \quad a = 0 \quad \text{število } 34056$

$b = 6 \quad a = 9 \quad \text{število } 34956$

4. Konstruiramo kot $\angle A$. Narišemo v_b in premico p , ki je vzporedna s krakom kota $\angle A$, nato še v_c in premico s , ki je vzporedna z drugim krakom kota $\angle A$, in končno označimo oglišča.

5. $\alpha = 60^\circ, \beta = 30^\circ, \delta = 90^\circ$
 $\varphi = 90^\circ - \frac{\beta}{2} = 90^\circ - 15^\circ = 75^\circ$
 $\epsilon = 90^\circ - \frac{\alpha}{2} = 90^\circ - 30^\circ = 60^\circ$
 $\gamma = 360^\circ - (\varphi + \delta + \epsilon) = 360^\circ - (75^\circ + 90^\circ + 60^\circ) = 360^\circ - 225^\circ = 135^\circ$



7. razred

1. a) $\frac{1}{x} < 1$ $x < 0 \vee x > 1$

b) $\frac{-5}{3-x} > 0$ $3-x < 0$ $x > 3$

c) $|x| = x$ $x \geq 0$

2. Prvi način: $3^{16} + 3^{14} = 3^{14} (3^2 + 1) = 3^{14} \cdot 10$

Drugi način: če pogledamo enice prvih potenc števila 3, sklepamo, da se 3^{16} konča z 1, 3^{14} pa z 9, torej se $3^{16} + 3^{14}$ konča z 0.

3. $y = x + \frac{25}{100}x$ $y = 1,25x$

$y = \frac{y}{1,25}$ $x = 0,8y$

Vrednost spremenljivke x je za 20% manjša od vrednosti spremenljivke y .

4. $p = p_1 + p_2 + p_3 + p_4 + p_5$

$$p_1 = \frac{3a}{2} \cdot \frac{a}{16} \quad p_3 = \frac{5a}{4} \cdot \frac{a}{16} \quad p_5 = \frac{3a}{4} \cdot \frac{a}{16}$$

$$p_2 = \frac{\left(\frac{a}{2}\right)^2 \pi}{2} - \frac{\left(\frac{a}{2} - \frac{a}{16}\right)^2 \pi}{2} = \frac{a^2 \pi}{8} - \frac{49a^2 \pi}{512} = \frac{15a^2 \pi}{512}$$

$$p_4 = \frac{\left(\frac{a}{4}\right)^2 \pi}{2} - \frac{\left(\frac{a}{4} - \frac{a}{16}\right)^2 \pi}{2} = \frac{a^2 \pi}{32} - \frac{9a^2 \pi}{512} = \frac{7a^2 \pi}{512}$$

$$p = \frac{3a^2}{32} + \frac{15a^2 \pi}{512} + \frac{5a^2}{64} + \frac{7a^2 \pi}{512} + \frac{3a^2}{64} = \frac{112a^2 + 22a^2 \pi}{512} =$$

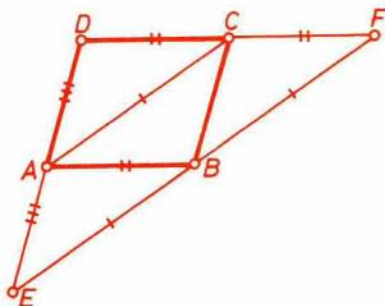
$$= \frac{a^2}{256} (56 + 11\pi)$$

5. $AC \cong EB \cong BF$

$AE \cong BC$; $CF \cong AB$

$\angle EFD = \angle ABCD + 2\angle AC$

$\angle EFD = 64 + 2 \cdot 25 = 114^\circ$



8. razred

1. $a0b$ ab

$a \in 1, \dots, 9$ $b \in 0, \dots, 9$

$a \cdot 100 + b = 6 \cdot (a \cdot 10 + b)$

$100a + b = 60a + 6b$

$40a = 5b$

$8a = b$

$a = 1$, $b = 8$, $a \geq 2$ ni mogoče. Edino število je 108.



2.

	hitrost	pot
1. kolesar	$\frac{s}{t+27}$	$\frac{s}{t+27} \cdot t$
2. kolesar	$\frac{s}{t+12}$	$\frac{s}{t+12} \cdot 12$

$$\frac{s \cdot t}{t+27} = \frac{12s}{t+12}$$

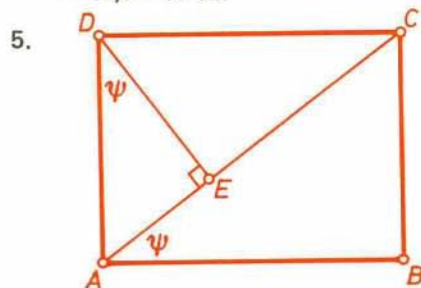
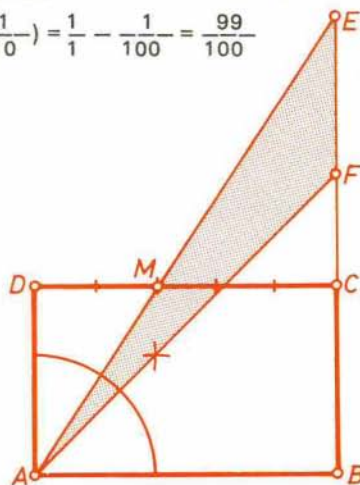
$$t = 18$$

Prvi kolesar je vozil 45 minut, drugi pa 30 minut.

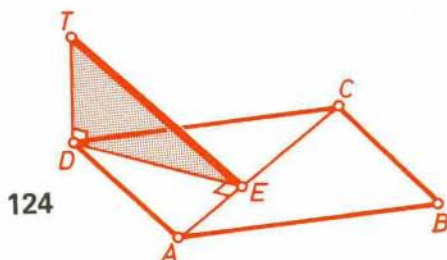
$$3. \frac{1}{n} - \frac{1}{n+1} = \frac{n+1-n}{n(n+1)} = \frac{1}{n(n+1)}$$

$$\frac{1}{1 \cdot 2} + \frac{1}{2 \cdot 3} + \dots + \frac{1}{97 \cdot 98} + \frac{1}{98 \cdot 99} + \frac{1}{99 \cdot 100} = \left(\frac{1}{1} - \frac{1}{2}\right) + \left(\frac{1}{2} - \frac{1}{3}\right) + \dots + \left(\frac{1}{97} - \frac{1}{98}\right) - \left(\frac{1}{98} - \frac{1}{99}\right) + \left(\frac{1}{99} - \frac{1}{100}\right) = \frac{1}{1} - \frac{1}{100} = \frac{99}{100}$$

$$4. \begin{aligned} x &= \overline{EB} \\ x : \overline{AB} &= \overline{AD} : \overline{DM} \\ x : 8 &= 5 : \left(\frac{2}{5} \cdot 8\right) \\ x &= 8.5 / \left(\frac{2}{5} \cdot 8\right) \\ x &= 25/2 = 12.5 \\ p &= \frac{1}{2} \overline{AB} \cdot \overline{EF} = \frac{1}{2} \cdot 8 \cdot (x - 8) = \\ &= 4.4,5 = 18 \text{ cm}^2 \end{aligned}$$



$$\begin{aligned} \triangle AED &\sim \triangle CBA \\ \overline{DE} : \overline{AD} &= \overline{AB} : \overline{AC} \\ x : 30 &= 40 : 50 \\ x &= 24 \text{ cm} \\ \overline{TE}^2 &= 576 + 100 = 676 \\ \overline{TE} &= 26 \text{ cm} \end{aligned}$$



23. REPUBLIŠKO TEKMOVANJE OSNOVNOŠOLCEV IZ MATEMATIKE — Rešitve nalog s str. 80

7. razred

1. $\frac{1}{3}x + \frac{1}{4}x = 21$

$$\frac{7}{12}x = 21, x = 36$$

$$r = \frac{21}{72}, r = 29\frac{1}{6} \%$$

V vsakem zvezku je bilo prvotno 36 listov, skupno število listov pa je Janezek zmanjšal za 29%.

2. $20\% = \frac{1}{5}$

Cena izdelka po podražitvi in pocenitvi je

$$x + \frac{1}{5}x - \frac{1}{5}\left(x + \frac{1}{5}x\right)$$

$$x + \frac{1}{5}x - \frac{1}{5}\left(x + \frac{1}{5}x\right) = x - 20$$

$$x = 500$$

$$500 + 50 = 550,$$

$$550 - 55 = 495$$

Ob 10-odstotnih spremembah bi bila končna cena 495 din in izguba 5 din.

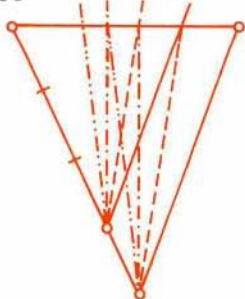
3. Polmeri polkrožnic so zaporedoma: $r, \frac{3}{4}r, \frac{9}{16}r, \frac{27}{64}r, \frac{81}{256}r,$

dolžine polkrožnic:

$$\pi r, \frac{3\pi r}{4}, \frac{9\pi r}{16}, \frac{27\pi r}{64}, \frac{81\pi r}{256}$$

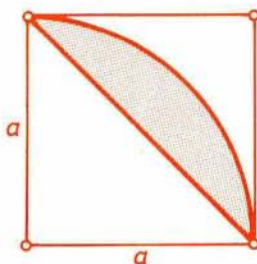
skupna dolžina "spirale" o_s :

$$\frac{781}{256} \pi r \approx 9,58 r.$$



4. Ploščina "lune", omejene z veliko polkrožnico (glej skico), meri

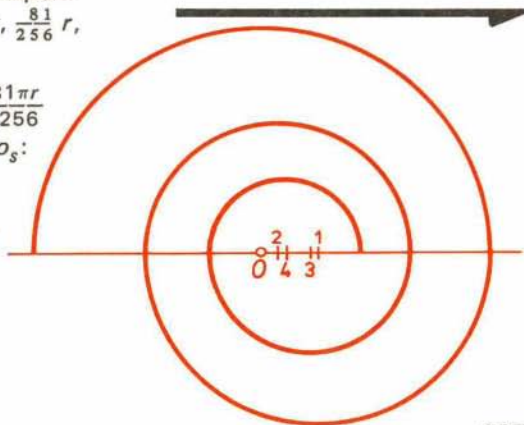
$$\frac{\pi a^2}{4} - \frac{a^2}{2} = \frac{(\pi - 2)a^2}{4}$$



Ploščina "lune", omejene z malo polkrožnico, je tedaj

$$\frac{(\pi - 2)a^2}{16}$$

ploščina prvega lika je potem

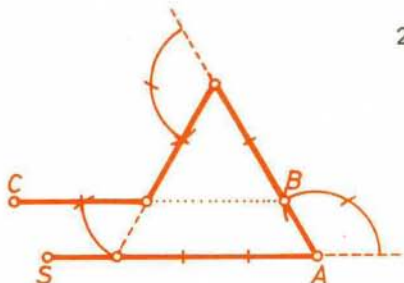


$$p_1 = 2 \cdot \frac{(\pi - 2)a^2}{16} = \frac{(\pi - 2)a^2}{8}$$

in ploščina drugega lika:

$$\begin{aligned} p_2 &= \frac{(\pi - 2)a^2}{4} - 2 \cdot \frac{(\pi - 2)a^2}{16} = \\ &= \frac{2(\pi - 2)a^2}{8} - \frac{(\pi - 2)a^2}{8} = \\ &= \frac{(\pi - 2)a^2}{8} \end{aligned}$$

Ploščini obeh likov sta enaki.



5. Razdalja od starta do cilja meri 1 km.

Utemeljitev:

- črta BC je daljica; razlog: trikotnik nad njo je enakostraničen (kraka sta dolga 2 km, kot meri 60°),
- lik $SABC$ je paralelogram; razlog: stranici SA in BC sta enako dolgi in vzporedni (izmenična kota sta skladna).

8. razred

1. Spremenljivka y je linearna funkcija spremenljivke x .

$$7y - 3x = 4 - \frac{5}{3}x,$$

$$7y = \frac{4}{3}x + 4$$

$$y = \frac{4}{21}x + \frac{4}{7}$$

$k > 0$, y narašča, če x narašča.

$$1 = \frac{4}{21}x_1 + \frac{4}{7}$$

$$2 = \frac{4}{21}x_2 + \frac{4}{7}$$

$$x_1 = \frac{9}{4}, x_2 = \frac{15}{2}$$

$$2\frac{1}{4} < x < 7\frac{1}{2}$$

Iskane vrednosti spremenljivke x so 3, 4, 5, 6 in 7.

2. Števec je največji, če je

$$7 + 2x = 0, x = -\frac{7}{2}$$

Imenovalec je najmanjši, če je

$$3x - y + 1 = 0$$

$$-\frac{21}{2} - y + 1 = 0$$

$$y = -\frac{21}{2} + 1, y = -\frac{19}{2}$$

Ulomek ima največjo vrednost $\frac{8}{11}$, kadar je $x = -\frac{7}{2}$ in

$$y = -\frac{19}{2}.$$

3. x masa prvega kosa
 $s - x$ masa drugega kosa

$$\frac{a}{100}x - \frac{b}{100}(s - x) = r$$

$$\frac{a+b}{100}x = r + \frac{bs}{100}$$

$$(a+b)x = 100r + bs$$

$$x = \frac{100r + bs}{a+b}$$

$$s - x = \frac{as - 100r}{a+b}$$

Skupna masa zlata:

$$\frac{a}{100}x + \frac{b}{100}(s-x) = \frac{2abs + 100(a-b)r}{100(a+b)}$$

V obeh kosih je skupaj

$$\frac{2abs + 100(a-b)r}{100(a+b)} \text{ kg zlata.}$$

4. $(x+r)^2 = r^2 + (R-x)^2$

$$(x+2)^2 = 2^2 + (4-x)^2$$

$$12x = 16$$

$$x = \frac{4}{3}$$

$$p = \pi x^2 = \frac{16}{9} \pi \text{ cm}^2$$

5. $\overline{AB} = a$

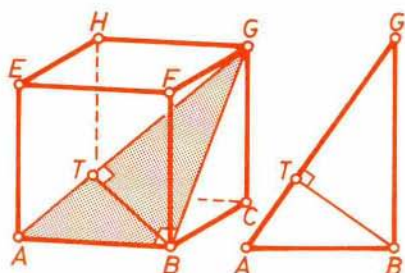
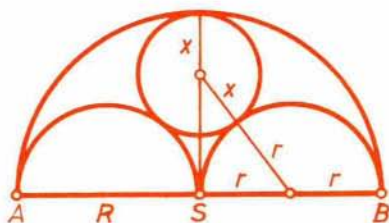
$$\overline{BG} = d = a\sqrt{2}$$

$$\overline{AG} = D = a\sqrt{3}$$

$$7 : a = a\sqrt{2} : a\sqrt{3}$$

$$a = 7 \frac{\sqrt{3}}{\sqrt{2}} \text{ cm}$$

$$P = 6a^2 = 6,49 \cdot \frac{3}{2} = 441 \text{ cm}^2$$



Aleksander Potočnik

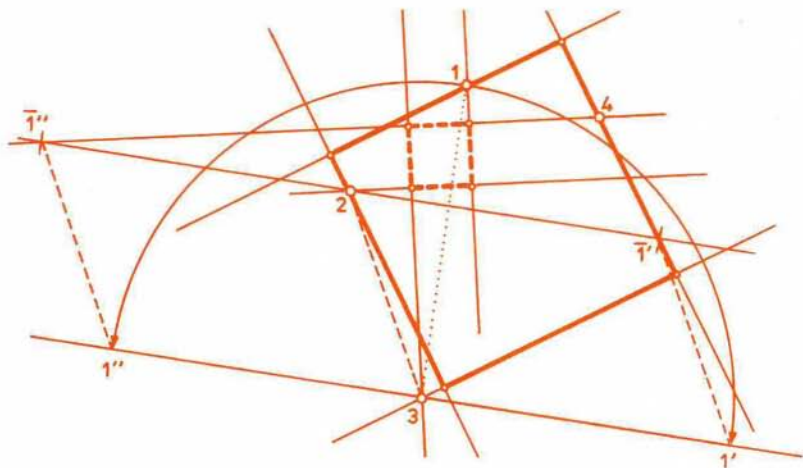
NEVIDNOST GA NE REŠI

Rešitev s strani 113

Ker je beli kralj v šahu, sta dve možnosti. Bodisi beli kralj sploh ni pod šahom, ker črni kralj stoji na polju c8, ali pa se je črni kralj ravno kar umaknil s tega polja na polje d7 in s tem dal belemu šah. V enem ali drugem primeru daje mat črnemu ista poteza: beli kmet s polja c7 vzame trdnjavo na polju b8 in postane skakač.

Peter Petek

Dane so štiri nekolinearne točke 1, 2, 3, 4. Konstruiraj kvadrat, katerega nosilke stranic potekajo vsaka skozi eno od danih točk.



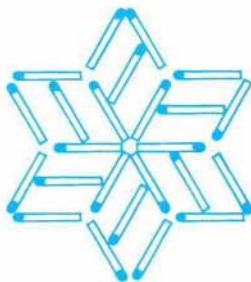
REŠITEV: Naj skozi točki 1 in 3 poteka en, skozi točki 2 in 4 pa drug par nasprotnih stranic oziroma njih nosilk. Ta dva para premic se seveda sekata pravokotno, premici v prvem paru pa sta med seboj oddaljeni za prav toliko kot premici v drugem paru. Ti dve dejstvi nam že narekujeta rešitev: pustimo en par nosilk (recimo tistega skozi 2 in 4) na svojem mestu, drug par (skozi 1 in 3) pa zavrtimo za 90° in vzporedno pomaknimo do prvega para. Tako oba para premic sovpadata. Rešitev je potem takale: Točko 1 zavrtimo okrog točke 3 za 90° na eno ($1'$) in drugo ($1''$) stran, nato pa vse tri kolinearne točke $1'$, 3, $1''$ vzporedno premaknemo tako, da točka 3 sovпада s točko 2. Točki $1'$ in $1''$ se pomakneta na mesti $1'$ in $1''$. Zveznica $1'$ (oz. $1''$) in 4 je nosilka ene, vzporednica tej skozi točko 2 pa nosilka nasprotne stranice kvadrata, katerega drugi par nasprotnih stranic leži na nosilkah skozi točki 1 in 3, ki oklepata s prejšnjima seveda pravi kot. V splošnem je skupno šest možnih rešitev, saj lahko za nosilke parov nasprotnih stranic izberemo še premice skozi točke 1, 2 in 3, 4 ter 1, 4 in 2, 3.

Franc Lebedinec

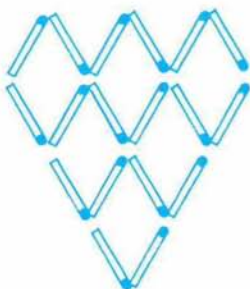
54



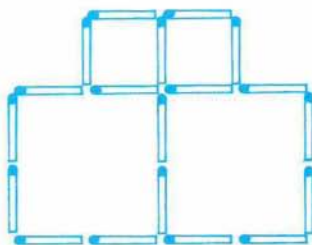
55



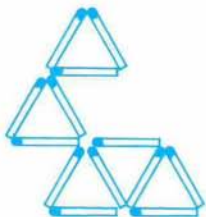
56



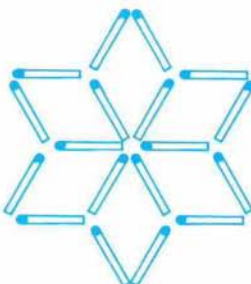
57



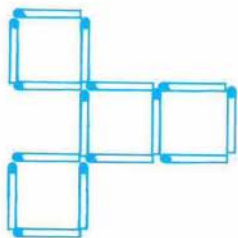
58a



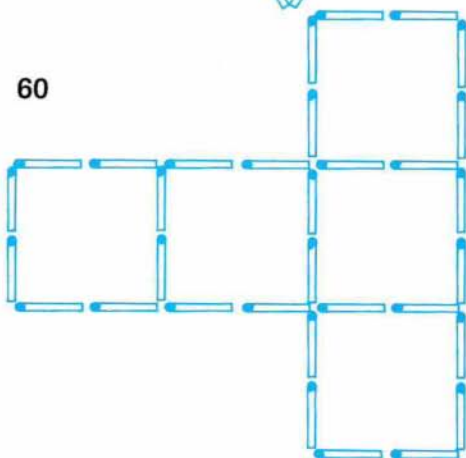
58b



59



60





Akcija objavljanja zanimivih znamk s področja astronautike se izteka. V tej številki objavljamo še zadnja prispevka Marka iz Kamnika in Petre iz Ljubljane.