

DRUŠTVO MATEMATIKOV, FIZIKOV IN ASTRONOMOV SRS LETNIK 15, 1987-88,

PRESEK

1



VSEBINA

MATEMATIKA	Matrike kot posplošitev pojma števila, 1. del (Anton Suhadolc)	2
	Če mu naj verjamem, čemu naj verjamem? (Vilko Domajnko)	8
	Obrat Ptolomejevega izreka (Š. Arslanagić, D. Milošević, prevedel in priredil Tomaž Košir)	11
FIZIKA	Planet malega princa (Janez Strnad)	14
ASTRONOMIJA	Začetki merjenja v astronomiji — Aristarh in Eratosten (Janez Strnad)	22
RAČUNALNIŠTVO	Reševanje enačb z metodo zaporednih približkov (Marjan Jerman po gradivu D. Grešaka)	28
	Krivulje in Hisoft pascal (Marko Razpet)	33
	Mačka in miška (Rok Sosič)	36
NALOGE	Nekaj matematičnih nalog za osnovnošolce — rešitve str. 61 (Učitelji matematike in fizike iz Slovenskih Konjic)	40
	Naloga o Luninih menah — rešitev str. 64 (Janez Ferber, ilustriral Matjaž Schmidt)	I, 43
NOVICE	Kako nisva postala milijonarja (Boris Horvat, Miro Jozelj, foto Marjan Smerke)	IV, 44
NOVE KNJIGE	B.M.Ševarlić, Kratka zgodovina astronomije, 2.del (Bogdan Kilar)	51
	Knjižnica Sigma (Ciril Velkovrh)	III
MATEMATIKA	Kotne funkcije (Damjan Kobal)	56
RAZVEDRILO	BISTROVIDEC — Staroindijska naloga (Vladimir Batagelj)	7
	PISMA BRALCEV	
	— Astronomske revije (Ciril Velkovrh)	13
	— Kdo si zasluži največjo nagrado (Samo Dreo)	42
	KRIŽANKA — Trikotniške formule (Franci Oblak)	52
	PREMISLI IN REŠI	
	— Smrketa na jezeru (Franci Oblak)	53
	— Razdeliva si vino — rešitev iz P XIV/6 (Peter Petek)	54
	BOLJ ZA ŠALO KOT ZARES	
	— Rdeči križ in rdeči polmesec (Franci Oblak)	21
	— Odvedljivost "AH" in "OH" (Goran Milošević)	50
	— Črna ovca, natančna površnost in nora natančnost (Damjan Kobal)	53
	— Razmislimo in nasmejmo se (Izbrali Marija Krauthaker in Nadja Ivanc Milošević)	10, 27, 63
NA OVITKU	Matjaž Schmidt, Lunine mene — tempera in ameriška retuša, 1987. Kje je umetnik pogrešil?	I
	Tudi dodekaeder se vrti (glej članek na str. 44) (Foto Marjan Smerke)	IV

Za šolsko leto 1987/88 naročamo izvodov PRESEKA — lista za mlade matematike, fizike, astronome in računalnikarje po ceni za posameznike 2.700.-din in za skupinska naročila na šolah 1.800.-din.

Šola

Priimek in ime

Naslov (ulica, hišna številka, številka pošte in kraj)
.....

Naročilo bomo poravnali do konca koledarskega leta.

Datum Žig in podpis

**PRESEK — LIST ZA MLADE MATEMATIKE, FIZIKE, ASTRONOME IN
RAČUNALNIKARJE**

15. letnik, šolsko leto 1987/88, številka 1, strani 1 — 64

UREDNIŠKI ODBOR: Vladimir Batagelj, Dušica Boben (pisma bralcev, stavljenje teksta), Franci Forstnerič (matematika), Bojan Golli (tekmovanja iz fizike), Marjan Hribar (fizika), Andrej Kmet, Damjan Kobal, Jože Kotnik, Edvard Kramar, Sandi Klavžar in Matija Lokar (računalništvo), Gorazd Lešnjak (tekmovanja iz matematike), Franci Oblak, Peter Petek (premisli in reši), Pavla Ranzinger (astronomija), Tomaž Skulj, Anton Suhadolc (glavni urednik), Ivanka Šircelj (jezikovni pregled), Miha Štalec (risbe), Ciril Velkovrh (urednik, nove knjige, novice).

Dopise pošiljajte in list naročajte na naslov: Društvo matematikov, fizikov in astronomov SRS — Podružnica Ljubljana — Komisija za tisk, Presek, Jadranska c. 19, 61111 Ljubljana, p.p. 64, tel. (061) 265 — 061/53, št. žiro računa 50101—678—47233. Naročnina za šolsko leto 1987/88 je za posamezna naročila 2.700.-din, za skupinska naročila pa 1.800.-din, posamezna številka 600.— din/400.— din.

List sofinancirajo Izobraževalna, Kulturna in Raziskovalna skupnost Slovenije

Ofset tisk Časopisno in grafično podjetje DELO, Ljubljana

© 1987 Društvo matematikov, fizikov in astronomov SRS — 869

MATEMATIKA

MATRIKE KOT POSPLOŠITEV POJMA ŠTEVILA

1. del

Znaten del matematike predstavljajo matematične discipline, ki študirajo računske operacije z različnimi matematičnimi količinami. Vsi poznamo npr. naravna števila in računske operacije z njimi, pa tudi ulomke, realna števila, nekateri celo kompleksna števila. Tu si bomo ogledali bolj nenavadno, a zelo pomembno posplošitev števil – *matrike* – in računanje z njimi. Zaradi enostavnosti se bomo omejili le na primer matrike dimenzije 2×2 :

$$A = \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix} \quad a, b, c, d \text{ so števila} \quad (1)$$

Matriko določa torej četverka števil, ki pa imajo točno določena mesta. Imenujemo jih matrični elementi. Matrika A ima dve vrstici in dva stolpca. Npr. prva vrstica je $[a, b]$, drugi stolpec pa $\begin{bmatrix} b \\ d \end{bmatrix}$. Matrika je pripravna tabela, v kateri lahko podamo množico podatkov. Take tabele srečamo v življenju vsak dan, npr. pri športni stavi, pri objavi rezultatov šahovskega turnirja, pri preglednici dnevnih temperatur itd. Vendar nas v tem sestavku ta stran matrik ne bo zanimala.

Za cilj si zastavimo, kako z matrikami računati. Najprej se vprašamo, kdaj imamo dve matriki za enaki. Naravna se zdi definicija: dve matriki sta enaki, če se ujemata v vseh istoležnih elementih. Bolj na dolgo: naj bo A matrika iz enačbe (1) in

$$B = \begin{bmatrix} e & f \\ g & h \end{bmatrix}$$

Matriki A in B sta enaki, v znakih $A = B$, če je $a = e, b = f, c = g$ in $d = h$.

S seštevanjem matrik ne bo težav. Rekli bomo: matriki A in B seštejemo tako, da seštejemo istoležne matrične elemente. Vsota zgornjih matrik A in B je torej

$$A + B = \begin{bmatrix} a + e & b + f \\ c + g & d + h \end{bmatrix} \quad (2)$$

Primer: Seštejmo matriki A in B , kjer je

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 1/2 \\ 0 & -2 \end{bmatrix} \quad B = \begin{bmatrix} 3 & 1 \\ -1 & 1 \end{bmatrix}$$

Po navodilu (2) dobimo

$$A + B = \begin{bmatrix} 4 & 1\frac{1}{2} \\ -1 & -1 \end{bmatrix}$$

Prav lahko se prepričamo, da za poljubni matriki A in B velja $A + B = B + A$. Za vsoto treh matrik A , B in C pa velja $(A + B) + C = A + (B + C)$. Pri številih imamo tudi odlikovano število o z lastnostjo: če o prištejemo k poljubnemu drugemu številu, se to nič ne pozna: $a + o = a$. Ali obstaja tudi matrika s podobno lastnostjo? Gotovo je že vsak sam uganil, katera matrika je to. Označimo jo s simbolom O , vsi njeni elementi naj bodo o

$$O = \begin{bmatrix} o & o \\ o & o \end{bmatrix}$$

V navodilu (2) za seštevanje vzemimo namesto matrike B matriko O in dobimo $A + O = A$. Zato imenujemo matriko O *matrično ničlo* ali *ničelno matriko*.

Za matrike lahko definiramo tudi računsko operacijo množenje matrike s številom. Naj bo k število, A pa matrika iz enačbe (1). Matrika kA naj bo

$$kA = \begin{bmatrix} ka & kb \\ kc & kd \end{bmatrix} \quad (3)$$

Dogovorimo se še, da naj pomeni Ak isto kot kA . Za produkt matrike s številom veljajo nekateri računski zakoni, podobni zakonom za računanje s števili:

$$\begin{aligned} k(A + B) &= kA + kB & (k + h)A &= kA + hA \\ 1 \cdot A &= A & o \cdot A &= O & (kh)A &= k(hA) \end{aligned} \quad (4)$$

Veljavnost vseh petih zakonov zlahka preverimo npr. tako, da za vsakega od njih zapišemo desno in levo stran in upoštevamo definiciji seštevanja matrik in množenja matrike s številom. Za zgled dokažimo npr. prvo pravilo. Leva stran je

$$k(A+B) = k \begin{bmatrix} a+e & b+f \\ c+g & d+h \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} k(a+e) & k(b+f) \\ k(c+g) & k(d+h) \end{bmatrix} \quad (5)$$

Desna stran prvega od pravil v enačbi (4) pa je

$$kA + kB = \begin{bmatrix} ka & kb \\ kc & kd \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} ke & kf \\ kg & kh \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} ka + ke & kb + kf \\ kc + kg & kd + kh \end{bmatrix} \quad (6)$$

Če pri matricnih elementih zadnje matrice v enačbi (5) odpravimo oklepaje, dobimo prav zadnjo matrico v enačbi (6). Pravilo je dokazano.

V posebnem lahko matrico A množimo tudi s številom -1 : $(-1)A$. Naveda je, da to matrico označimo kar z $-A$. Imenujemo jo k matriki A nasprotna matrica. Ima zanimivo lastnost

$$A + (-1)A = 0$$

kar zlahka preverimo. Matrica $-A$ je uporabna tudi za definicijo razlike dveh matrik. Razliko $A - B$ definiramo takole:

$$A - B = A + (-B)$$

Zgornje navodilo, napisano na dolgo, da

$$A - B = \begin{bmatrix} a - e & b - f \\ c - g & d - h \end{bmatrix}$$

Pri realnih številih znamo vedno rešiti linearno enačbo z eno neznanko oblike $a + x = b$, kjer sta a in b dani števili. Rešitev enačbe je seveda $x = b - a$. Podobno vprašanje si lahko zastavimo za matrice. Reši enačbo $A + X = B$, kjer sta A in B dani matriki. Odgovor je na dlani: $X = B - A$.

Pri vseh računskih operacijah, ki jih poznamo za števila, ne gre prenos na matrice tako gladko. Tudi pri relacijah se zatakne. Za dani realni števili a in b vedno velja ena od treh možnosti: ali je $a < b$, ali je $a = b$, ali je $a > b$. Za matrice se ne da definirati relacija $A > B$ tako, da bi ta relacija imela iste lastnosti kot relacija $a > b$ za realni števili. Seveda bi mogli poskusiti z očitno idejo $A > B$, če je $a > e, b > f, c > g$ in $d > h$. Če vzamemo npr.

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 0 \end{bmatrix} \quad B = \begin{bmatrix} 3 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$$

potem očitno ne velja niti $A < B$ niti $A = B$ niti $A > B$. Zato zaenkrat opustimo misel na to, kako bi primerjali dve matriki.

Doslej smo spoznali, da lahko seštejemo in odštejemo poljubni matriki, pa tudi matrico znamo množiti s številom. Za te operacije veljajo "običajni" računski zakoni. Števila se dajo med seboj tudi množiti, pa se vprašajmo, ali

se da definirati tudi produkt dveh matrik. Da se, pa še na različne načine. Izkazalo se je, da je v matematiki koristna predvsem tale definicija produkta dveh matrik A in B , kjer pa moramo povedati, katera matrika je prvi in katera drugi faktor v produktu.

$$AB = \begin{bmatrix} ae + bg & af + bh \\ ce + dg & cf + dh \end{bmatrix} \quad (7)$$

Predpis za izračun produkta je dokaj zamotan. Opazimo pa tole: element matrike AB , ki je v prvi vrstici in v prvem stolpcu, tj. $ae + bg$, izračunamo tako, da elementa prve vrstice matrike A pomnožimo z istoležnima elementoma prvega stolpca matrike B in produkta seštejemo. Podobno velja za ostale elemente matrike AB . Npr. element v drugi vrstici in v prvem stolpcu matrike AB dobimo tako, da elementa druge vrstice matrike A pomnožimo z elementoma prvega stolpca matrike B in produkta seštejemo.

Primer:

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 2 & 3 \end{bmatrix} \quad B = \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ -3 & 1 \end{bmatrix} \quad AB = \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ -5 & 5 \end{bmatrix}$$

Produkt smo izračunali po navodilu (7). Izračunajmo za vajo še produkt matrik A in B v drugem vrstnem redu, torej BA .

$$BA = \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ -3 & 1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 2 & 3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 4 & 3 \\ -1 & 3 \end{bmatrix}$$

Rezultat nas preseneti: BA ni enako AB ! Tako smo spoznali, da množenje matrik ni komutativno.

Če za dani matriki A in B velja $AB = BA$, rečemo, da sta matriki A in B *zamenljivi* ali *komutativni*.

Naloga: Pomnoži matriko A iz enačbe (1) z matriko O .

Kratek račun nam pokaže, da veljata enačbi $A \cdot O = O$ in $O \cdot A = O$. Od tod spoznamo dvojce: matrika O se vede pri produktu tako kot število o pri množenju števil in matrika O komutira z vsako matriko.

Spet smo radovedni. Ali komutira matrika A samo z matriko O ? Odgovor je ne. Matrika A komutira npr. tudi sama s seboj: $A \cdot A = A \cdot A$. Pa si zadajmo nalogo: poišči vse matrike, ki komutirajo z dano matriko A , kjer je

$$A = \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 0 & 3 \end{bmatrix}$$

Če neka matrika X komutira z A , potem seveda velja $A \cdot X = X \cdot A$. Pa naj bo iskana matrika X

$$X = \begin{bmatrix} x & y \\ z & u \end{bmatrix} \quad (8)$$

Izračunamo oba produkta $A \cdot X$ in $X \cdot A$ in dobimo

$$A \cdot X = \begin{bmatrix} 2x+z & 2y+u \\ 3z & 3u \end{bmatrix} \quad X \cdot A = \begin{bmatrix} 2x & x+3y \\ 2z & z+3u \end{bmatrix}$$

Po definiciji enakosti dveh matrik sledijo iz pogoja $A \cdot X = X \cdot A$ štiri linearne enačbe

$$2x+z=2x \quad 3z=2z \quad 2y+u=x+3y \quad 3u=z+3u$$

Prva enačba pove $z=0$, prav to trdi tudi druga enačba. Tretjo prepišemo v obliki $u=x+y$, četrta pa spet zahteva $z=0$. Rešitev zgornjega sistema enačb je torej

$$z=0, u=x+y$$

Neznanki x in y sta poljubni števili. Zato ima matrična enačba $A \cdot X = X \cdot A$ neskončno mnogo rešitev, danih s formulo

$$X = \begin{bmatrix} x & y \\ 0 & x+y \end{bmatrix}, \quad x, y \text{ poljubni števili}$$

Zapišimo nekaj posebnih primerov matrike X . Pri $x=1$ in $y=0$ dobimo

$$I = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \quad (9)$$

pri izbiri $x=1$ in $y=1$ pa $X = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 2 \end{bmatrix}$. Za $x=0$ in $y=0$ dobimo spet $X=O$.

Naloga: Poišči vse matrike, ki komutirajo z matriko A iz enačbe (1)!

Račun poteka podobno kot zgoraj. Z nekaj več truda se da pokazati, da ta matrika A komutira natanko s tistimi matrikami X , ki se dajo zapisati v obliki $X = kA + hI$, kjer sta k in h poljubni števili.

Za produkt treh števil velja računski zakon $(ab)c = a(bc)$, tj. asociativnost množenja. Enostaven, a daljši račun pokaže, da velja tudi za poljubne tri matrike A, B in C asociativnostni zakon $(AB)C = A(BC)$. Za računanje s števili velja tudi distributivnostni zakon, tj. $a(b+c) = ab+ac$. Tudi za množenje in sešte-

vanje matrik velja podobno, zaradi nekomutativnosti množenja imamo celo dva distributivnostna zakona

$$A(B + C) = AB + AC \quad (A + B)C = AC + BC$$

Dokaz teh dveh pravil je daljši, zato ga opustimo.

Pri množenju števil ima odlično vlogo število 1, saj velja $a \cdot 1 = 1 \cdot a = a$ za vsako število a . Ali obstaja tudi taka matrika X , da bo za vsako matriko A veljalo $A \cdot X = X \cdot A = A$? Naj ima iskana matrika X obliko (8). Izračunajmo $A \cdot X$.

$$A \cdot X = \begin{bmatrix} ax + bz & ay + bu \\ cx + dz & cy + du \end{bmatrix}$$

Če naj bo $A \cdot X = A$, morajo veljati naslednje štiri enačbe

$$ax + bz = a \quad ay + bu = b \quad cx + dz = c \quad cy + du = d$$

za poljubno matriko A , tj. za poljubna števila a, b, c in d . Pa vzemimo npr. $a = 1, b = 0, c = 0$ in $d = 1$. Prva enačba zahteva $x = 1$, druga $y = 0$, tretja $z = 0$ in četrta $u = 1$. Dobili smo $X = I$, kjer je I matrika iz enačbe (9). S kratkim računom preverimo, da je za vsako matriko A izpolnjena enačba $A \cdot I = I \cdot A = A$. Matrika I ima torej podobno vlogo pri množenju matrik kot število 1 pri množenju števil. Zato imenujemo matriko I *enotsko matriko* ali tudi *matrično enoto*.

Anton Suhadolc

BISTROVIDEC

STAROINDIJSKA NALOGA

Neko število smo najprej pomnožili s 3. Zmnožek smo povečali za $3/4$ njegove vrednosti. Dobljeno število smo delili s 7, nato smo $2/3$ tako dobljenega števila pomnožili sami s seboj in od tega odšteli 52 ter zatem korenili. Na koncu smo še prišteli 8 in delili z 10.

Povej mi začetno število, če smo na koncu dobili število 2.

Vladimir Batagelj

ČE MU NAJ VERJAMEM, ČEMU NAJ VERJAMEM?

“Ojoj! Kako čudno je danes vse! Včeraj je pa vse še potekalo kot po navadi. Sem se čez noč tako spremenila? No, pomislimo malo: sem bila še ista, ko sem davi vstala? Skoraj se mi zdi, da se spominjam, da sem se že počutila malo drugače! Če pa nisem ista, se moram najprej vprašati: kdo pa sem potem? Saj, saj, to je največja uganka!” In tedaj je zapovrstjo pomislila na vse otroke svoje starosti, kar jih je poznala, da bi ugotovila, ali se je morda spremenila v katerega izmed njih.

“Ada že nisem,” si je rekla, “Ada ima tako dolge kodre, jaz pa imam čisto gladke lase! In Mabel tudi ne morem biti, ker jaz veliko vem, ona ve pa tako malo! Razen tega je ona ona, jaz sem pa jaz, in — šmentana stvar, kako vse to človeku zmede glavo! Bom zdaj preizkusila, ali še vem vse, kar sem zmeraj vedela. No, pogledjmo: štirikrat pet je dvanajst, in štirikrat šest je trinajst, in štirikrat sedem je ... Ojoj! Če bom tako počasna, nikoli ne pridem do dvajset..”

No, večina nas ve — Alica je bilo ime dekletu, ki se je v Čudežni deželi ukvarjalo s takšnim premišljevanjem. Njena zgodba je polna nadvse zanimivo postavljenih ugank. In kar je še bolj zanimivo od te zanimivosti — rešitve so ali pa niso, a oboje se enako zanimivo bere. Zares zanimivo!

No in zdaj vemo to vsi!

Knjigo vsekakor priporočam v pozorno branje slehernemu “mlademu” matematiku.

Sicer se pa zdaj raje spravimo na Aličino pošteevanko. Preberimo jo še enkrat:

$$4 * 5 = 12$$

$$4 * 6 = 13$$

$$4 * 7 = \dots$$

.....

Zvezdica tukaj pomeni znak za Aličino množenje. In ker se to ne—koliko razlikuje od našega običajnega množenja, mora biti tudi znak zanj drugačen od pike! Pa pika.

Kar mimogrede vam natrosim kup vprašanj: Kako je Alica prišla do tega svojega množenja? Kakšno pravilo je zanj uporabila? Ali je potem za naslednji produkt (glej tri pikice) res pričakovati število štirinajst? In zakaj Alica meni, da na tak počasen način nikdar ne bo prišla do števila dvajset?

Prvo vprašanje nam pomaga razrešiti “Aličina logika”, ki pravi:

Matematika ima svoje zakone samo zato, da jih njeni učenci kršijo, kajti

če jih ne bi kršili, jih tudi rabili ne bi! Tako in pika.

Torej je Alica pač prelomila stare matematične zakone množenja v množici $\mathbb{N}$ in si postavila svoje. Nove. Takole je definirala:

$$a * b = a + b + 3$$

Poglej, potem je pa res

$$4 * 5 = 4 + 5 + 3 = 12$$

$$4 * 6 = 4 + 6 + 3 = 13$$

In odgovor na drugo vprašanje je sedaj seveda smešne teže.

Toda pazi — Alica je pač na tem mestu morala poseči vmes s svojo pripombo. Kar naravnost je povprašala, ali so teže lahko smešne ali pa tega ne smeš tako reči. Zapisati, seveda.

Dokler se to ne razreši, se pa tudi odgovor ne pove! Če se sploh kdaj kaj samo od sebe zgodi.

Odgovor na moje tretje vprašanje pa dobimo, če bolj na drobno prisluhnemo Carrollu Lewisu. V njegovih časih so se rosní šolarji učili poštevanke kar iz tablic. Nič na prste, kajti prstov je le deset, tablice pa so bile napisane za množenje števil vse tja do dvanajst.

Torej: štiri krat pet, štiri krat šest, ... do štiri krat dvanajst.

Tako. Povedal sem. Ali je pretežko, ali je preveč zavito? No, pa potežkaj papir v roki, povej, ali se da tej reči z na—ravno mislijo ustreči?

Tako, zdaj pa vemo že skoraj vse. Tistega sicer res še ne: ali za Aličino množenje velja zakon o zamenjavi in ali za Aličino množenje velja zakon o združevanju?

In "Aličina logika" pravi o tem:

Nikdar ne smeš reči, da so te reči smešne!

Zatorej gremo raje dalje, tja za torej — kjer si Alica izmisli novo definicijo množenja:

$a * b$ je število črk v stavku: " a " krat " b ".

Torej: štiri krat pet ima dvanajst črk,

štiri krat šest ima trinajst črk,

štiri krat sedem ima ... črk.

Poglej, poglej! Saj se tako definirano množenje vendar ujema s prvima dvema primeroma iz Aličine prave zgodbe! Menda tudi s tretjim, ampak to ta trenutek sploh ni tako zelo in od sile važno. Že Alica sama ga je zamolčala.

Zanimivo je, da se Aličina bojazen v tem primeru prav srhljivo uresničuje.

S tako definiranim množenjem se namreč zares ne pride ne vem kako hitro do dvajset. Poglejmo:

$$4 * 8 = 13$$

$$4 * 9 = 14$$

$$4 * 10 = 14$$

$$4 * 11 = 15$$

$$4 * 12 = 17$$

$$4 * 13 = 17$$

$$4 * 14 = 19$$

$$4 * 15 = 17$$

$$4 * 16 = 18$$

$$4 * 17 = 19$$

$$4 * 18 = 18$$

$$4 * 19 = 19$$

$$4 * 20 = 16$$

$$4 * 21 = 21$$

Hja, ali se potem pride do dvajset ne vem kako?

Ali dvajset res ni nikdar mogoče dobiti?

Ali ga je potem mogoče dobiti zmeraj razen nikdar?

No, če vam pride še kakšno vprašanje na misel, ga lahko mirne duše pri-
taknete h gornjim. In še bolje bo, če boste tam, na misli, srečali tudi kak odgo-
vor na gornja vprašanja.

Predvsem pa poskusite ugotoviti, ali je v tako definirani Aličini poštevanke
štirikratnik kakšnega naravnega števila enak številu dvajset.

In — poskušajte poiskati še kakšno definicijo za Aličino poštevanke!
Ujemati se mora seve da z njenima dvema izjavama

$$4 * 5 = 12$$

$$4 * 6 = 13$$

Povem vam, da jih "Aličina logika" vsebuje še precej.

In nikar se pri tem ne ogibajte živahni domišljiji. In — saj brez tega ne
gre — ne pozabite nam poslati svojih razmislekov!

Vilko Domajnko

RAZMISLIMO IN NASMEJMO SE !

Ob 12 uri ponoči pada dež. Ali lahko pričakujemo, da bo čez 72 ur sončno?

Dolžina žice med dvema telefonskima drogovima meri 40 m, najnižja točka
žice pa je 10 m nad zemljo. Koliko meri razdalja med njima, če sta visoka
30 m?

Kapetan ladje ima brata, njegov brat pa nima brata. Kdo je kapetan ladje?

Izbrali: *Marija Krauthaker*

Nadja Ivanc Milošević

OBRAT PTOLEMEJEVEGA* IZREKA

V geometriji je znan *Ptolemejev izrek*:

V vsakem tetivnem četverokotniku ABCD je produkt dolžin obeh diagonal enak vsoti produktov dolžin nasproti ležečih stranic

$$AC \cdot BD = AB \cdot CD + BC \cdot DA$$

V matematični literaturi najdemo več dokazov tega izreka. V tem članku pa bomo podali dva dokaza obrata Ptolemejevega izreka:

Če v konveksnem četverokotniku ABCD velja

$$AC \cdot BD = AB \cdot CD + BC \cdot DA$$

je ta četverokotnik tetivni.

Dokaz 1. Podan je konveksni četverokotnik $ABCD$. Označimo stranice $AB = a$, $BC = b$, $CD = c$ in $DA = d$, diagonali $AC = e$, $BD = f$ ter kote $\sphericalangle DAB = \alpha$, $\sphericalangle BCD = \gamma$ in $\sphericalangle (AC, BD) = \psi$ (slika 1). Ploščina četverokotnika $ABCD$ je enaka vsoti ploščin trikotnikov ABD in BCD : $P = 1/2 ad \sin \alpha + 1/2 bc \sin \gamma$, ali

$$4P = 2ad \sin \alpha + 2bc \sin \gamma \quad (1)$$

Ker je diagonala f skupna stranica trikotnikoma ABD in BCD , z uporabo kosinusovega izreka dobimo $b^2 + c^2 - 2bc \cos \gamma = a^2 + d^2 - 2ad \cos \alpha$ ali

$$b^2 + c^2 - a^2 - d^2 = 2bc \cos \gamma - 2ad \cos \alpha \quad (2)$$

Iz enakosti (1) in (2) sledi:

$$(4P)^2 + (b^2 - c^2 - a^2 - d^2)^2 = (2ad \sin \alpha - 2bc \sin \gamma)^2 + (2bc \cos \gamma - 2ad \cos \alpha)^2$$

Od tod z nekaj računanja pridemo do enakosti:

$$16P^2 = 4(ad + bc)^2 - (b^2 + c^2 - a^2 - d^2)^2 - 16abcd \cos^2 \frac{\alpha + \gamma}{2} \quad (3)$$

Skalarni produkt vektorjev $\vec{AC}$ in $\vec{BD}$ nam bo pomagal najti še drugo enačbo za kvadrat ploščine P :

$$\vec{AC} \cdot \vec{BD} = \vec{AC} \cdot (\vec{AD} - \vec{AB}) = \vec{AC} \cdot \vec{AD} - \vec{AC} \cdot \vec{AB}$$

Upoštevajmo pomen skalarnega produkta in uporabimo kosinusov izrek za trikotnika ACD in ABC :

$$\begin{aligned} \text{ali} \quad ef \cos \psi &= 1/2 (e^2 + d^2 - c^2) - 1/2 (e^2 + a^2 - b^2) \\ 2ef \cos \psi &= b^2 + d^2 - a^2 - c^2 \end{aligned} \quad (4)$$

* Klavdij Ptolemej (2. stol.), grški matematik, astronom in geograf

Ker je ploščina četverokotnika $ABCD$ enaka $P = 1/2 ef \cdot \sin \psi$, lahko zapišemo:

$$16P^2 = 4e^2 f^2 \sin^2 \psi = 4e^2 f^2 (1 - \cos^2 \psi) \quad (5)$$

Iz (4) in (5) sledi:

$$16P^2 = 4e^2 f^2 - (b^2 + d^2 - a^2 - c^2)^2 \quad (6)$$

Če izenačimo (3) in (6), dobimo

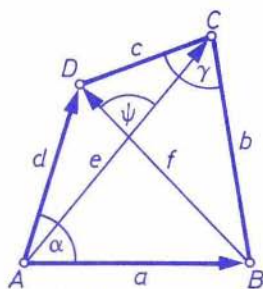
$$4abcd \cos^2 \frac{\alpha + \gamma}{2} = (ac + bd)^2 - e^2 f^2 \quad (7)$$

Upoštevajmo v (7) pogoj izreka $ef = ac + bd$

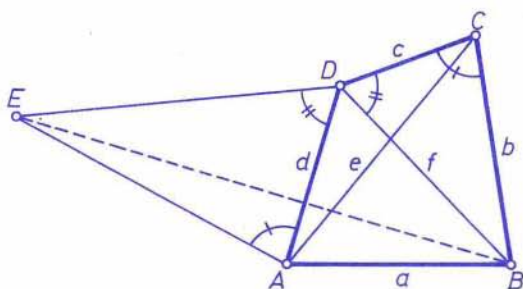
$$4abcd \cos^2 \frac{\alpha + \gamma}{2} = 0$$

Torej mora biti $\alpha + \gamma = 180^\circ$.

Ker je četverokotnik, v katerem je vsota nasprotnih kotov 180° , tetivni četverokotnik, je izrek dokazan.



Slika 1



Slika 2

Dokaz 2. Izberimo točko E , da bo veljalo: $\angle EAD = \gamma$ in $\angle EDB = \angle CDB$ (slika 2). Označimo še $\angle EDB = \angle CDA = \delta$. Ker sta si trikotnika AED in DBC podobna, velja

$$\frac{AD}{CD} = \frac{EA}{BC} = \frac{ED}{DB} \text{ ali } ED = \frac{d}{c} \cdot f \text{ in } EA = \frac{d}{c} \cdot b$$

Uporabimo kosinusov izrek za trikotnike AEB , EDB in ACD :

$$EB^2 = \frac{d^2}{c^2} \cdot b^2 + a^2 - \frac{2abd}{c} \cos(\alpha + \gamma) \quad (8)$$

$$EB^2 = \frac{d^2}{c^2} \cdot f^2 + f^2 - \frac{2d}{c} f^2 \cos \delta \quad (9)$$

$$e^2 = c^2 + d^2 - 2cd \cos \delta \quad (10)$$

Če upoštevamo gornje tri enakosti (8), (9) in (10), lahko zapišemo:

$$e^2 f^2 = a^2 c^2 + b^2 d^2 - 2abcd \cos(\alpha + \gamma) \quad (11)$$

Ker smo predpostavili zvezo $ef = ac + bd$, iz enakosti (11) sledi $\cos(\alpha + \gamma) = -1$ oziroma $\alpha + \gamma = 180^\circ$.

Četverkotnik $ABCD$ je tetivni.

Povejmo še to, da dokaz obrata Ptolemejevega izreka s pomočjo inverzije najdemo v knjigah:

1. P.S. Modenov, *Zadaci po geometrii*, Nauka, Moskva 1979, str. 254;
2. I.J. Bakel'man, *Inversija*, Nauka, Moskva 1966, str. 52.

Pripomba: S pomočjo enakosti (7) oziroma enakosti (11) zlahka dokažemo tudi Ptolemejev izrek.

Šefket Arslanagić, Dragoljub Milošević
prevedel in priredil *Tomaž Košir*

PISMA BRALCEV

Edi Hribšek iz Trbovelj je poslal na naš naslov pismo z vprašanjem, kje bi se lahko naročil na kakšno astronomsko revijo. Njemu in drugim naročnikom, ki se zanimajo za astronomijo, sporočamo, da Presek — list za mlade matematike, fizike in astronome ter računalnikarje prejema v zameno naslednje astronomske revije iz Jugoslavije:

1. Bolid — Astronomski glasnik. — Zvezdarnica, 41001 Zagreb, Opatička 22, pp 943
2. Čovek i vsemir. — Zvezdarnica, 41001 Zagreb, Opatička 22, pp 943
3. Galaksija. — Beograd
4. Astronom. — Astronomsko društvo Javornik
5. Vasiona — Beograd, Narodna observatorija (Kalemegdan), Gornji Grad 6, 11000 Beograd

V okviru Presekove knjižnice pa izhaja tudi brošura NAŠE NEBO IN ZEMLJA z mnogimi tabelaričnimi podatki astronomskih efemerid in drugih podatkov o umetnih zemeljskih satelitih in potresih pri nas in v svetu.

Ciril Velkovrh

PLANET MALEGA PRINCA

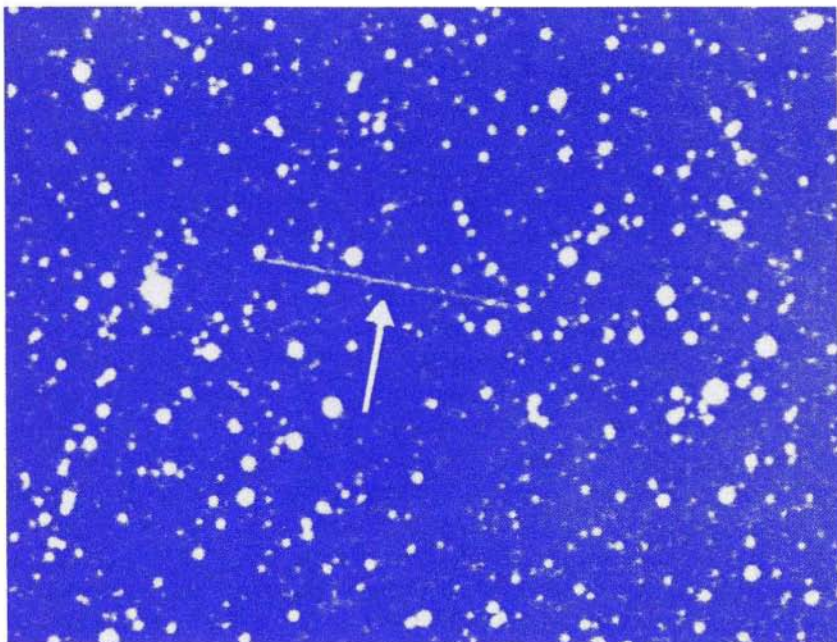
Francoski pisatelj in letalec Antoine de Saint-Exupéry (1900–1944) je napisal *Malega princa*, pristrčno knjižico za otroke in odrasle. Pustimo mu do besede, naj pove, kaj se mu je primerilo, ko je moral z letalom zaradi okvare v motorju prisilno pristati v Sahari: "In tako sem prvi večer zaspal v pesku, tisoč milj daleč od človeških bivališč ... Lahko si mislite, kako sem bil presenečen, ko me je zbudil droben glasek ... Skočil sem pokonci, kot da bi me oplazila strela. Pomel sem si oči. Ostrmel sem. Zagledal sem drobcenega, navadnega dečka, ki je resno zrl vame ... Tako sem zvedel drugo zelo važno stvar: njegov domači planet je bil komaj kaj večji od hiše ... Imam tehtne razloge za domnevo, da prihaja Mali princ z asteroida B 612. Ta asteroid je enkrat samkrat, leta 1909, zasledil s teleskopom neki turški zvezdogled" (slika 1)*

Lepoto *Malega princa* in spoznanje, da "dobro vidimo samo s srcem", vsakdo, mlad ali star, sprejema po svoje. Zato ne nameravamo razčlenjevati umetniškega užitka, ki ga imamo ob branju. Pač pa ob *Malem princu* razmišljajmo o gravitaciji. Bolj za šalo kot zares se vprašajmo, ali bi bilo mogoče pre-

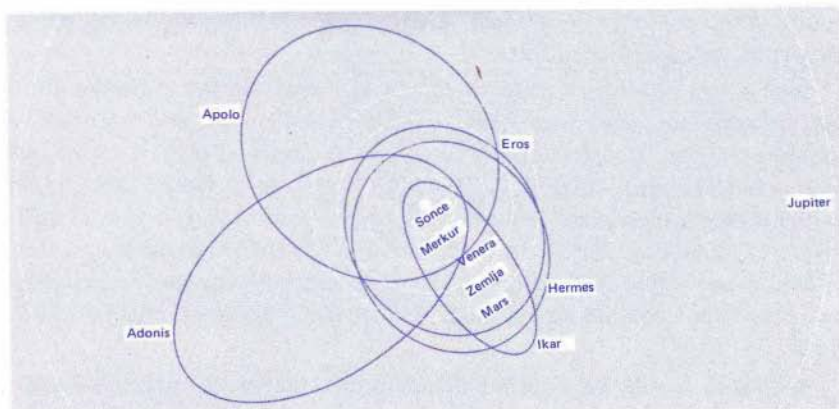
* Antoine de Saint-Exupéry, *Mali princ*, prevedel Ivan Minatti, Mladinska knjiga, Biseri, Ljubljana, 1982.

Slika 1. Mali princ na svojem planetu (risba iz *Malega princa*). Knjižico je ilustriral pisatelj sam.





Slika 2. Sled na fotografski plošči na ozadju zvezd stalnic, po kateri so odkrili asteroid Ikar.



Slika 3. Poti planetov in asteroidov. Poti nekaterih asteroidov ne poznajo natančno.

bivati na zelo majhnem planetu. S tem nikakor nočemo obrzdati domišljije in upamo, da nam pisatelj, ki ga je že zgodaj "začel zanimati svet znanosti, zlasti fizike", v Newtonovem letu tega ne bi zameril.

Med planetoma Marsom in Jupitrom je nenavadno velika razlika v razdalji od Sonca. Zato leta 1801 niso bili posebno presenečeni, ko so med njima odkrili Ceres. Potem so leta 1802 odkrili še Palado, leta 1804 Junono in leta 1807 Vesto. Kmalu je postalo jasno, da so ti planeti zelo majhni, zato jim za razliko od devetih "navadnih" planetov pravimo *asteroidi* ali *mali planeti*. Dandanes jih poznamo več kot tri tisoč. Domnevajo, da jih utegne biti do sto tisoč takih, ki jih je mogoče zaznati po sledi na fotografski plošči (slika 2).

Večina se jih giblje okoli Sonca v 2,2— do 3,2—krat večji razdalji kot Zemlja, blizu ravnine, po kateri se giblje Zemlja. Med njimi pa so tudi posebneži. Betulija ima najbolj nagnjeno ravnino gibanja proti ravnini gibanja Zemlje, za 52° . Ikar se najbolj približa Soncu in ima eliptično pot, ki se najbolj razlikuje od kroga; velika polos meri 1,08 in mala 0,6 razdalje Zemlje od Sonca (slika 3). Hiron je najbolj oddaljen, velika polos meri 13,7 razdalje Zemlje od Sonca. Trije asteroidi so se približali Zemlji bolj kot na 5 milijonov kilometrov, Apolon leta 1932, Adonis leta 1936 in Hermes leta 1937. Predvidevajo, da zadene tak asteroid Zemljo v povprečju vsakih nekaj deset milijonov let. Nekateri podatki kažejo, da je zadel Zemljo asteroid z radijem okoli 5 kilometrov pred 65 milijoni let.

Samo asteroid Vesto je mogoče ob posebnih priložnostih videti s prostim očesom. Večino drugih je celo z daljnogledom težko opazovati. Njihovi radiji so zelo majhni: 1 Ceres 502 km, 2 Palada 304 km, 3 Junona 123 km, 4 Vesta 269 km, ... 1566 Ikar 500 m, ... Apolon 500 m, Adonis 150 m, Hermes 250 m. Zato ni lahko določiti njihove poti. Asteroidi, pri katerih je to uspelo, dobijo poleg imena še zaporedno številko.

Ime določi odkritelj. Spočetka so izbirali imena iz grške in rimske mitologije. Pozneje, ko je teh zmanjkalo, so prišla na vrsto druga, denimo imena iz Wagnerjevih oper. Novejša imena so različnega izvora. Tisoči je dobil ime Piazzia po Giuseppeju Piazziju, ki je odkril prvega, to je Ceres, tisočprvi pa Gaussia po Karlu Friedrichu Gaussu, ki je izdelal nov računski prijem za določanje poti asteroidov. Dandanes dobijo običajni asteroidi navadno ženska imena, tisti, ki se po čem odlikujejo, pa moška. Geographos — geograf se na primer močno približa Zemlji. Asteroid 2062 Aten se giblje po skoraj enaki poti kot Zemlja.

Nekdaj so mislili, da so asteroidi preostanek planeta, ki se je gibal okoli Sonca med Marsom in Jupitrom. Toda skupno maso asteroidov cenijo samo na tritisočino zemeljske mase. Ker pa se nekateri gibljejo v skupinah, se zdi, da so

nastali iz nekoliko večjih teles, morda ob trkih.

Izhajajmo iz Newtonovega gravitacijskega zakona, po katerem delujeta telesi drugo na drugo s silo, ki je sorazmerna z maso enega in drugega telesa in obratno sorazmerna s kvadratom razdalje. Zakon velja v tej obliki za drobni telesi ali za krogelno simetrični telesi, če upoštevamo razdaljo med njunima središčema. Nas zanima sila krogelno simetričnega planeta na drobno telo na njegovem površju, to je *teža* drobnega telesa. Za razdaljo tedaj vzamemo kar radij planeta R . Masa planeta je sorazmerna s povprečno gostoto in s prostornino in prostornina s tretjo potenco radija. To bi lahko uganili že po tem, da merimo radij v metrih m , prostornino pa v kubnih metrih m^3 . Teža telesa na površju planeta je tedaj sorazmerna s tretjo potenco radija, R^3 , in obratno sorazmerna s kvadratom, R^2 , se pravi, da je sorazmerna z radijem: $R^3/R^2 = R$.

Posebno skupino sestavljajo *trojanski asteroidi*. Okoli Sonca se gibljejo tako, da prehitevajo in zaostajajo za točko 60° pred Jupitrom ali za točko 60° za njim. V teh *Lagrangeovih točkah* privlačna sila Sonca izravna privlačno silo Jupitra. Prvi trojanski asteroid, ki so ga odkrili, je dobil ime Ahil. Pozneje so se dogovorili, da naj dobijo asteroidi, ki se gibljejo okoli prve Lagrangeove točke, imena po grških junakih, asteroidi, ki se gibljejo okoli druge Lagrangeove točke, pa imena po trojanskih junakih. Preden so sprejeli dogovor, pa se je v grško skupino vrinil Trojanec 624 Hektor in v trojansko skupino Grk 617 Patrokel.

Zaradi lažjega računanja vzemimo, da ima Planet Malega princa radij 64 metrov ali stotisočino zemeljskega radija 6400 kilometrov. To je več, kot bi sklepali po pripovedovanju Malega princa, a manj kot meri radij Adonisa, za katerega najdemo najmanjši podatek, 150 m. Če je Planet Malega princa enako gost kot Zemlja, je teža na njem stotisočkrat manjša kot na Zemlji. Telo z maso 1 kilograma na njem nima teže okoli 10 newtonov kot na Zemlji, ampak samo desetstisočino newtona. Mali princ z maso 30 kilogramov ima na svojem planetu težo samo 0,003 newtona. Tolikšno težo ima na Zemlji masa 0,3 grama, kar lahko stehamo le z lekarniško tehtnico.

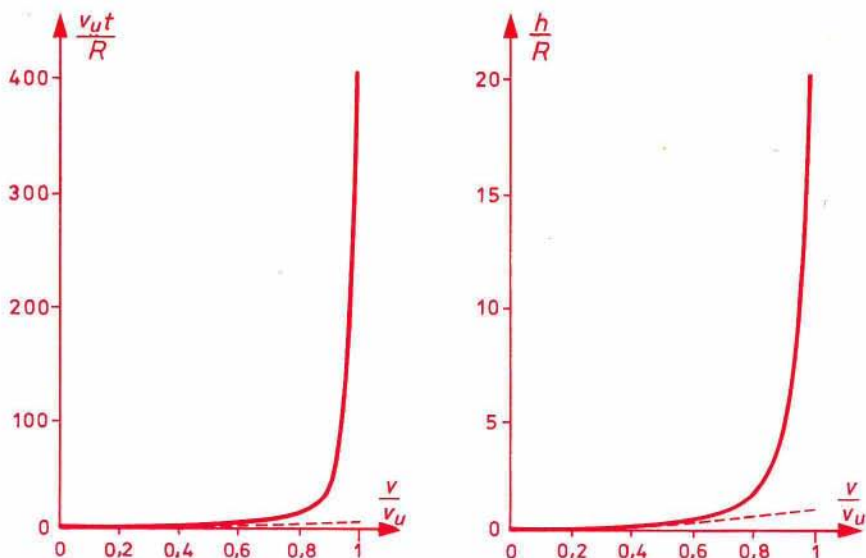
Ne oziramo se na to, da je težišče Malega princa za okoli 0,5 metra bolj oddaljeno od središča njegovega planeta kot površje. Zaradi tega je njegova teža še $(64\text{ m}/64,5\text{ m})^2 = 0,98$ —krat, to je za 2 odstotka, manjša.

Računali smo, da je Planet Malega princa enako gost kot Zemlja. Če bi vzeli zanj povprečno gostoto asteroidov 3500 kg/m^3 namesto gostote Zemlje 5500 kg/m^3 , bi bila teža še $3500/5500 = 0,64$ —krat manjša.

V enakem razmerju kot teža je zmanjšan tudi *pospešek prostega pada*: 10 m/s^2 na Zemlji, a samo 10^{-4} m/s^2 ali $0,1 \text{ mm/s}^2$ na Planetu Malega princa. Medtem ko pade v prvi sekundi na Zemlji telo za 5 metrov, pade na Planetu Malega princa za borih 5 stotink milimetra. To bi morali opazovati z mikroskopom.

Ubežna hitrost je najmanjša hitrost, ki jo moramo dati izstrelku v smeri navpično navzgor, da zapusti planet. Pri tem se ne oziramo na morebitno vrtenje planeta. Enako kot teža je tudi ubežna hitrost sorazmerna z radijem planeta, če vzamemo, da se gostota ne spreminja. Na Zemlji meri ubežna hitrost dobrih 11 km/s , tako da meri na Planetu Malega princa samo $0,11 \text{ m/s}$ ali 11 cm/s .

Podatek o majhni ubežnosti pove, da na majhnem planetu ni atmosfere. Molekule plina se namreč neurejeno gibljejo s hitrostjo, ki je v povprečju veliko večja, na primer 440 m/s za molekulo kisika pri temperaturi 300 kelvinov ali okoli 20°C , od ubežne hitrosti. Ta hitrost pa je precej manjša od ubežne hitrosti na Zemlji. (Izračunamo lahko še to, da bi se ubežna hitrost $0,11 \text{ m/s}$ ujemala s povprečno hitrostjo neurejenega gibanja molekul pri temperaturi $0,0002 \text{ K}$.)



Slika 4. Trajanje t (levo) in višina h (desno) navpičnega meta v odvisnosti od razmerja med začetno hitrostjo v izstrelka in ubežno hitrostjo v_u . Črtkano sta narisana približka, pri katerih ne upoštevamo, da se teža spreminja z višino.

Nekaj enačb za tiste, ki bi hoteli računati

$$m_p = \rho V = \rho \cdot 4 \pi R^3 / 3 \quad \text{masa planeta z radijem } R \text{ in gostoto } \rho$$

$$F = \kappa m m_p / R^2 = \kappa m \rho \cdot 4 \pi R^3 / 3 R^2 = 4 \pi \kappa \rho m R / 3$$

teža telesa z maso m na površju planeta,
 κ gravitacijska konstanta

$$g = F / m = \kappa m_p / R^2 = 4 \pi \kappa \rho R / 3 \quad \text{pospešek prostega pada na površju planeta}$$

$$v_u = (2 \kappa m_p / R)^{1/2} = (2 g R)^{1/2} = (2 \kappa \rho \cdot 4 \pi R^3 / 3 R)^{1/2} = (8 \pi \kappa \rho / 3)^{1/2} R$$

ubežna ali druga vesoljska hitrost *

$$v_s = (\kappa m_p / R)^{1/2} = (g R)^{1/2} = (4 \pi \kappa \rho / 3)^{1/2} R$$

hitrost umetnega satelita na majhni višini,
 prva vesoljska hitrost

$$\bar{v} = (8 R T / \pi M)^{1/2}$$

povprečna hitrost molekul pri neurejenem
 gibanju v plinu, $R = 8300 \text{ J/K}$ plinska
 konstanta, T absolutna temperatura, M ki-
 lomolska masa

$$\kappa m m_p / R^2 = \kappa (m + \Delta m) m_p / (R + \Delta R)^2 \quad \text{ravnovesje na tehtnici, če je eno}$$

izmed teles za ΔR niže od drugega; temu
 telesu se navidez poveča masa za Δm
 $= 2 m \Delta R / R$

$$F = \int_R^{R+l} \kappa m_p dm / R^2 = \int_R^{R+l} \kappa m_p \rho S dR / R^2 = \kappa m m_p / R(R+l)$$

teža navpičnega droga, ρ gostota, S presek
 in m masa droga

$$R^2 + Rl = (R + l/2 + \Delta l)^2$$

$$\Delta l = (R^2 + Rl)^{1/2} - R - l/2 \quad \text{razdalja težišča od središča mase}$$

$$v_u t / R = 2((h + R) / R)^{3/2} \{ \arccos((R / (h + R))^{1/2} + ((R / (h + R))^{1/2} (h / (h + R))^{1/2}) \}$$

$$\text{približek } v_u t / R = 4 v / v_u \text{ ali } t = 2 v / g \quad h \text{ višina, } t \text{ čas trajanja navpičnega meta}$$

$$h / R = (v / v_u)^2 / (1 - (v / v_u)^2) \quad v \text{ začetna hitrost (slika 4)}$$

$$\text{približek } h / R = v^2 / v_u^2 \text{ ali } h = v^2 / 2g$$

* Če telo na planetu ne bi bilo drobno, bi bila ubežna hitrost

$v_u = (2 \kappa m_p / R(1 + m/m_p))^{1/2}$. Masa Planeta Malega princa, 6 milijard kilogramov, pa je tolikšna, da lahko v primeri z njo maso Malega princa, 30 kilogramov, zanemarimo.

Enako kot ubežna hitrost je z radijem planeta sorazmerna tudi hitrost satelita, ki kroži okoli planeta v majhni višini. Pri Zemlji je to $11 \text{ km s}^{-1} / \sqrt{2} = 8 \text{ km/s}$, na Planetu Malega princa pa samo 8 cm/s . Mali princ bi se lahko igral z umetnimi sateliti. Za obhod njegovega planeta bi potrebovali 1 uro in 24 minut. Na to ni pomislil najbrž zato, ker tedaj na Zemlji še niso poznali mode umetnih satelitov.

Mali princ mora na svojem planetu previdno uporabljati enakoročno tehtnico. Paziti mora na to, da sta obe telesi na isti višini. Če je eno telo samo za 10 cm nižje kot drugo, pokaže tehtnica za 3 grame večjo maso.

Tudi se za Malega princa težišče ne ujema vedno s središčem mas. Navpičen metrski drog ima središče mas na polovici, težišče, to je točko, v kateri si lahko mislimo, da prijema teža, pa 1,9 milimetra nižje. Pri drogu v vodoravni legi se obe točki pokrivata.

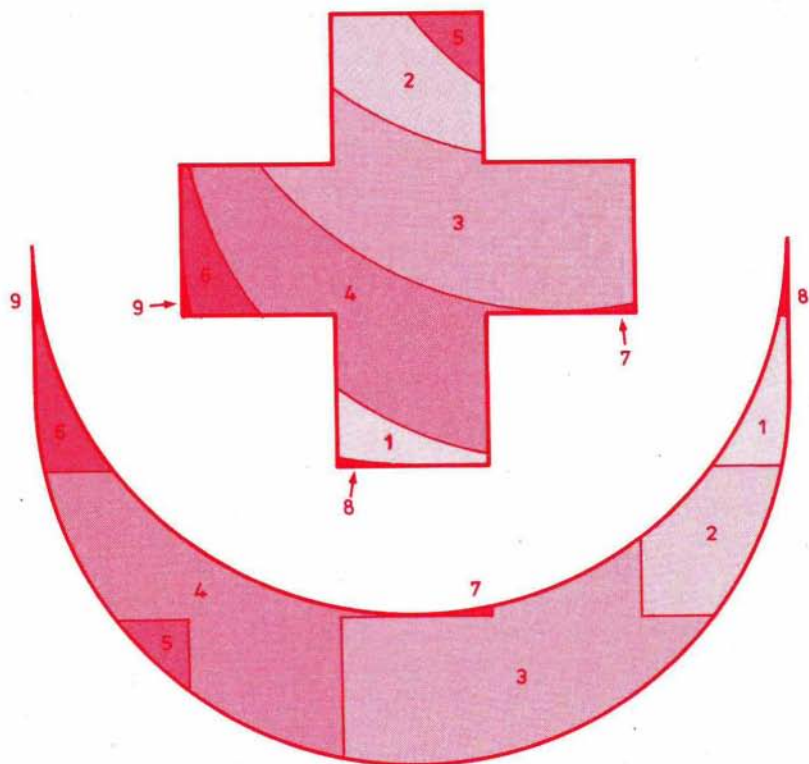
Po tem ko smo omenili že več zanimivosti, nas zaskrbi, ali Mali princ sploh lahko hodi po svojem planetu. Pri hoji človek dviga in spušča težišče za nekaj milimetrov. Če naredi pri počasni hoji korak na sekundo, doseže hitrost težišča več milimetrov na sekundo. Hitrost težišča v navpični smeri mora biti mnogo manjša od ubežne hitrosti. (Na Zemlji zaradi mnogo večje ubežne hitrosti tega pogoja zares ni težko izpolniti.) Že pri desetini ubežne hitrosti, to je pri hitrosti $1,1 \text{ cm/s}$, se dvigne težišče Malega princa za dobrih 60 centimetrov in se spusti nazaj. Takšen korak ali bolje poskok traja skoraj 4 minute. Vsekakor se mora Mali princ na svojem planetu premikati zelo počasi, da ne bi njegovo težišče dobilo prevelike hitrosti v smeri navpično navzgor. (slika 4) Če bi se odrinil s hitrostjo 11 cm/s ali več v smeri navpično navzgor, bi se moral za večno posloviti od svojega planeta (če si ne bi zgradil strehe, če ne bi bil privezan ali če ne bi imel pištole kot nadomestila za raketni motor).

Če se odrine s hitrostjo med 8 cm/s in 11 cm/s v poljubni smeri, se giblje po eliptični pot, ki postaja pri vse večji hitrosti vse bolj podolgovata. V tem primeru se Mali princ vrne v točko, s katere se je odrinil, in ne zapusti planeta za vselej.

Ljudje že imamo nekaj izkušenj v podobnih razmerah. Pomislimo na vesoljce, ki so pristali na Luni, kjer je teža okoli šestkrat manjša kot na Zemlji. Mali princ podobno kot vesoljci, ki letijo okoli Zemlje na umetnih satelitih, ne občuti skoraj nobene teže. Telo se temu prilagodi, na primer tako, da kosti, ki niso obremenjene, izgubljajo kalcij, in zaide v težave pri povratku na Zemljo. Zato morajo vesoljci na umetnih satelitih delati posebne vaje. Za Malega princa bi bil prihod z njegovega planeta, kjer je vse peresno lahko, na Zemljo zelo tvegan, če ne bi bil pravičljiva oseba. Toda šlo nam je samo za nekaj zanimivosti iz mehanike, zato se ne spuščajmo še v vprašanja vesoljske medicine.

RAZVEDORILLO

RDEČI KRIŽ IN RDEČI POLMESEC



Kakor čudno se sliši, pa je vendar mogoče razrezati rdeči polmesec na devet delov, iz katerih lahko sestavimo rdeči križ. Pri sestavljanju križa moramo nekatere dele obrniti (pazimo na ravni črti na obeh koncih polmeseca in na to, da sta obe polkrožnici skladni).

Priredil *Franci Oblak*

ZAČETKI MERJENJA V ASTRONOMIJI

– ARISTARH IN ERATOSTEN

Kolikšna je oddaljenost Lune? Okoli 384 tisoč kilometrov. Kako so jo določili? Z laserjem so posvetili skozi velik daljnogled na mačje oko, ki so ga na Luni postavili vesoljci. Po času potovanja bliska tja in nazaj so izračunali razdaljo na dobrih deset centimetrov natančno. Kolikšna je oddaljenost Sonca? Okoli 150 milijonov kilometrov. Kako so jo določili? Zemlja je 1,38-krat bolj oddaljena od Sonca (slika 5) kot Venera. Oddaljenost Venere so izmeril tako, da so usmerili nanjo radarske valove in zaznali šibke odbite valove. Po času potovanja sunka radarskih valov so določili oddaljenost Venere od Zemlje, z njo oddaljenost Venere od Sonca in naposled še oddaljenost Sonca od Zemlje na del kilometra natančno. Do teh podatkov so prišli v zadnjem času, potem, ko se je močno razvila merilna tehnika. Kako pa so določili oddaljenosti nekdaj? Vprašanje iz zgodovine astronomije je pomembno tudi za razumevanje razvoja astronomije in fizike.

Prav ponavljajoči se pojavi na nebu so napeljali ljudi, da so začeli podrobneje opazovati naravo in napovedovati pojave. Niso se več zadovoljili z mislijo, da naravo ureja volja bogov. Pomembno vlogo je imel tudi razvoj matematike, saj brez nje ni mogoče zanesljivo napovedovati pojavov. Le številske napovedi je namreč mogoče primerjati z opazovanji in merjenji in ugotoviti, katera napoved se bolje prilega merjenjem in katera slabše. Tako je mogoče izločiti slabše napovedi, ki izhajajo iz slabših teorij, in obdržati boljše. Izbiranje te vrste je značilno za naravoslovje.

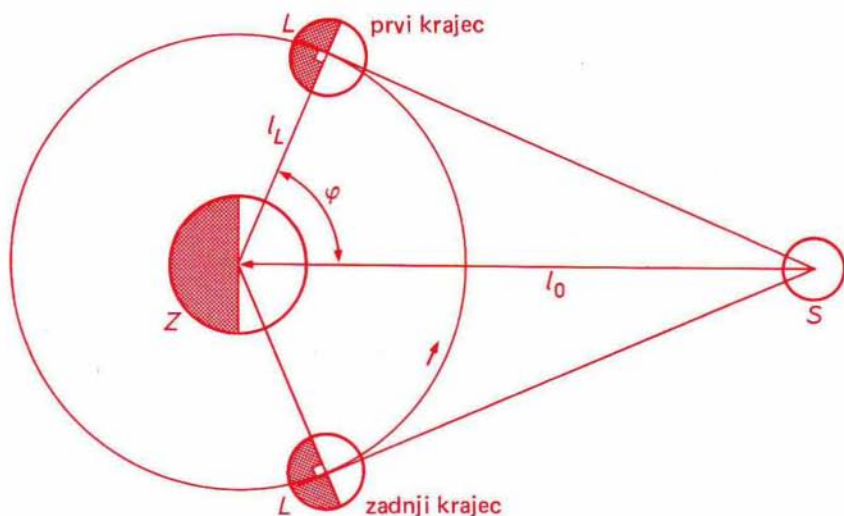
Ni težko razumeti, da se je začelo naravoslovje z astronomijo in da so bila prva merjenja astronomska. Ljudje so nekdaj živeli v tesnem stiku z naravo in so vsako jasno noč lahko opazovali zvezdnato nebo. S pojavi na nebu so si pomagali pri merjenju časa in koledarju in — pri napovedovanju usode. Pri tem so vsaj na začetku shajali brez posebnih merilnih naprav. Dandanes, ko se nam zdi natančno merjenje nepogrešljiva sestavina fizike, radi pozabimo na njegove začetke v astronomiji in geometriji.

Prehod od kvalitativnega gledanja, pri katerem opišemo pojave le z besedami, do kvantitativnega gledanja, ko vztrajamo pri merjenju in podrobnem opisu s števili, zagotovo ni bil ne kratek ne lahek. V prehodnem obdobju, ko se niso več zadovoljili z besednim opisovanjem, a še niso obvladali merjenja, so poskusili količine ocenjevati. Čeprav so bili dobljeni rezultati nenatančni, so velikopo-

menili kot prvi korak. Pogosto so tudi približni izidi omogočili globlji vpogled.

Kot zgled za ta prehod omenimo delo enega od najznamenitejših starogrških astronomov *Aristarha s Samosa* (od leta 310 do okoli 230 pred našim štetjem). Aristarh, ki je deloval v Aleksandriji, je določil oddaljenosti Lune in Sonca ter radija Lune in Sonca v razmerju do radija Zemlje. S tem je naredil velik korak naprej in se je dokopal do nove slike Osončja.

Sledimo Aristarhu in določimo najprej razmerje med oddaljenostjo Sonca l_0 in oddaljenostjo Lune l_L . Pri tem vzemimo, da Luna enakomerno kroži okoli Zemlje, kar ni čisto res. Luna potrebuje za en obhod okoli Zemlje 27 dni (natančneje 27,3 dneva), če ugotavljamo njeno lego glede na zvezde. Ob prvem in zadnjem krajcu, ko deli osvetljeni del Lune od neosvetljenega ravna črta, sta zveznici Sonca in Lune ter Zemlje in Lune pravokotni druga na drugo. Zaradi končne oddaljenosti Sonca od Zemlje pa Luna ob prvem in zadnjem krajcu ne leži na nasprotnih straneh Zemlje (slika 1). Med prvim in zadnjim krajcem poteče zato malo daljši čas kot med zadnjim in prvim. Aristarh je ocenil razliko na 1 dan tako, da bi med prvim in zadnjim krajcem poteklo 14 dni, med zadnjim in prvim pa 13. Če ustreza obhodu Lune, to je 27 dnev, polni kot 360° ,



Slika 1. Čas med prvim in zadnjim krajcem je za δt večji od časa med zadnjim in prvim krajcem Lune. Kot med zveznico Zemlje in Lune ter zveznico Zemlje in Sonca meri $\varphi = (1/2) \cdot 180^\circ (1 - \delta t/t_0)$, če je t_0 obhodni čas Lune. Aristarh je dobil za razmerje $l_0/l_L = 1/\cos \varphi$ 18 do 20. V resnici je razmerje tako veliko in kot φ tako blizu 90° , da ju ni mogoče izmeriti na opisani način. Ta risba in druge risbe niso narisane v pravem merilu.

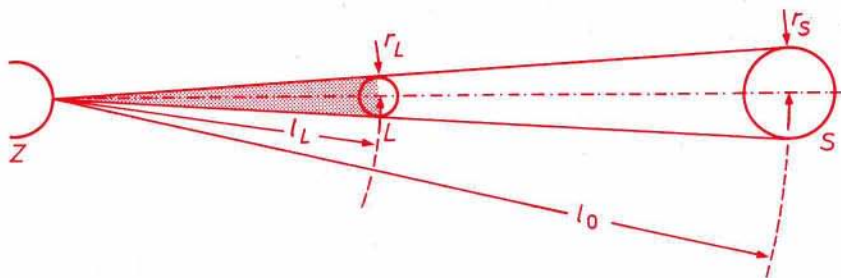
ustreza času med zadnjim in prvim krajcem, to je 13 dnev, kot $360^\circ \cdot 13/27 = 173^\circ$. Pravokotni trikotnik s polovico tega kota, to je 87° , ima hipotenuzo 19-krat daljšo od katete. Vse podatke smo zaokrožili, zato je rezultat samo približen. Aristarh se je tega zavedal in je za razmerje l_0/l_L navedel 18 do 20.

Aristarhov rezultat lahko izrazimo še drugače. O prvem ali zadnjem kraju tvori zveznica Zemlja–Luna z zveznico Zemlja–Sonce kot 87° . V resnici meri ta kot $89,85^\circ$, torej samo $0,15^\circ$ manj od pravega kota, in ga je celo s sodobnimi napravami izredno težko naravnost izmeriti. Čas med zadnjim in prvim krajcem je le za 0,046 dneva ali za dobro uro krajši od časa med prvim in zadnjim krajcem. Aristarh ni mogel natančno določiti trenutka, ko je bila meja med osvetljenim in neosvetljenim delom Lune ravna črta. Zato ne preseneča mnogo premajhno razmerje l_0/l_L , ki ga je navedel.

V drugem koraku upoštevajmo, da se zdita Sonce in Luna enako velika. Njun premer vidimo pod približno enakim kotom. Iz tega izhaja spoznanje, da sta radija Sonca r_0 in Lune r_L v enakem razmerju kot njuni oddaljenosti. Potemtakem je po Aristarhovo radij Sonca dvajsetkrat večji od radija Lune: $r_0/r_L = 20$ (slika 2).

Po tej poti lahko določimo razmerje $r_0/L_0 = r_L/l_L$, če izmerimo kot, pod katerim vidimo radij Sonca ali Lune. Aristarh je ocenil ta kot na 1° . Temu kotu ustreza v ločni meri $2\pi \cdot 1^\circ / 360^\circ = 0,017$, tako da je $r_0/l_0 = r_L/l_L = 0,017$. Ni težko ugotoviti, da vidimo premer Lune ali Sonca pod kotom okoli $0,5^\circ$ in radij Lune ali Sonca pod kotom $0,25^\circ$. Aristarh je kot kar štirikrat precenil. To kaže tudi na njegov odnos do merjenja. Zares pa je Arhimed poročal, da je menda Aristarh pozneje popravil podatek na $0,25^\circ$.

V tretjem koraku določimo razmerje med radijem Zemlje in radijem Lune. Pri popolnem Luninem mrku je Aristarh meril čas potovanja Lune čez Zemlji-



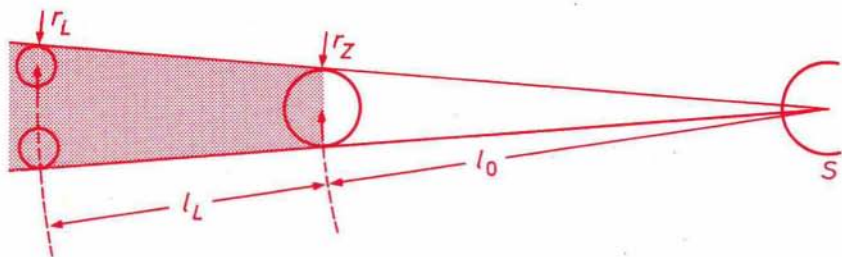
Slika 2. Premer Sonca in premer Lune vidimo z Zemlje pod približno enakim kotom. Aristarh je navedel štirikrat prevelik kot 1° in je dobil $r_0/l_0 = r_L/l_L = 2\pi \cdot 1^\circ / 360^\circ = 0,017$.

no senco in čas, ki ga je prebila Luna v Zemljini senci. Po tem je ugotovil, da je Zemljina senca 8/3-krat tolikšna kot Luna. Iz tega izhaja, da je radij Zemlje približno 8/3-krat večji od radija Lune: $r_Z/r_L = 8/3$ (slika 3). Tako je Aristarh lahko narisal "zemljevid" Osončja z Zemljo, Soncem in Luno. Le merila ni mogel navesti, saj ni poznal nobene oddaljenosti ali radija.

	Aristarhova vrednost	današnja vrednost
r_L/r_Z	$3/8 = 0,38$	0,272
$l_L/r_Z = (l_L/r_L)(r_L/r_Z)$	$0,38/0,017 = 22$	60,3
$l_0/r_Z = (l_0/l_L)(l_L/r_Z)$	$20,22 = 440$	23480
$r_0/r_Z = (r_0/l_0)(l_0/r_Z)$	$0,017,440 = 7$	109

Aristarh je več kot 15-krat podcenil velikost Sonca in več kot 50-krat njegovo oddaljenost. Kljub temu sta ga najbrž prav njegova rezultata za velikost in oddaljenost Sonca napeljala na misel, da kroži Zemlja okrog precej večjega Sonca in ne Sonce okrog Zemlje, kakor so mislili dotlej. Aristarh je bil prvi od znanih astronomov, ki je poskušal utemeljiti *heliocentrično sliko* z mirujočim Soncem in gibajočo se Zemljo. Slika se je zdela za tiste čase tako nenavadna, da je niso resno upoštevali več kot osemnajst stoletij, dokler je ni povzel Nikolaj Kopernik. Aristarh se najbrž ne bi dokopal do nje, če si ne bi prizadeval dobiti približnih številskih podatkov. (V knjigah najdemo različne vrednosti za Aristarhove rezultate. Navsezadnje je tudi to povezano z njegovim odnosom do številskih rezultatov.)

Aristarhovo delo je dopolnil *Eratosten* (od leta 276 do 194 pred našim štetjem), ki je prav tako delal v Aleksandriji. Določil je radij Zemlje in s tem uvedel merilo v Aristarhov "zemljevid". Opišimo na kratko Eratostenovo skle-



Slika 3. Pri popolnem Luninem mrku je po času, ki ga Luna prebije v Zemljini senci, Aristarh sklepal, da je Zemljina senca na kraju Lune približno 8/3-krat tolikšna kot Luna. Iz zveze $(2r_Z/l_0)(l_0 + l_L) = 2r_L$ 8/3 sledi približno $r_Z = 8 r_L/3$.

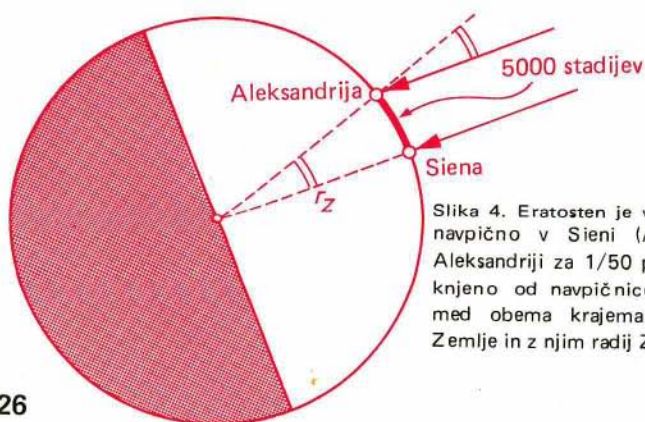
panje. Kot upravnik aleksandrijske knjižnice je zasledil podatek, da v Sieni, današnjem Asuanu v Egiptu, na najdaljši dan leta Sonce opoldne posveti v globok vodnjak. Ugotovil je, da v Aleksandriji na ta dan sončni žarki tvorijo z navpičnico kot, ki meri $1/50$ polnega kota. Ker leži Siena približno na istem poldnevniku kot Aleksandrija, je bilo treba le še poznati njeno oddaljenost od Siene. Potniki, ki so prehodili to pot, so navedli zanjo dolžino 5000 stadijev. To so ugotovili po času potovanja, ker so vedeli, kolikšno razdaljo so prehodili na uro.

Ker je Sonce zelo daleč od Zemlje, smemo vzeti, da so njegovi žarki v Sieni in Aleksandriji vzporedni. Tako meri središčni kot med Sieno in Aleksandrijo prav tako $1/50$ polnega kota. Ker ustreza temu kotu razdalja 5000 stadijev, ustreza obsegu poldnevnik 50.5000 = 250 000 stadijev (slika 4).

Eratostenov sodobnik Arhimed je določil število π , to je razmerje med obsegom in premerom kroga. Tako je bilo mogoče po Eratostenovem rezultatu izračunati radij Zemlje: $250\,000 \text{ stadijev} / 2\pi = 40\,000 \text{ stadijev}$ in izraziti Aristarhove podatke s stadiji.

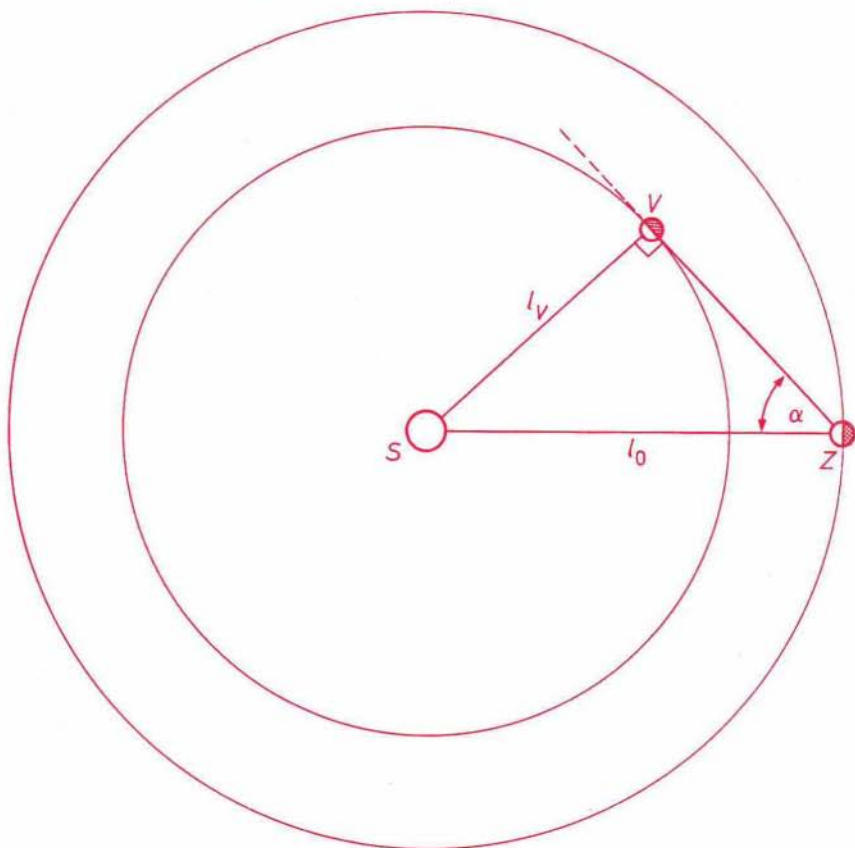
Del poldnevnik so pozneje večkrat premerili. Skrbno so to storili potem, ko so se dogovorili, da naj meri poldnevnik 40 000 000 metrov, in s tem vpeljali meter. Radij Zemlje meri torej $40\,000 \text{ km} / 2\pi = 6370 \text{ km}$. Žal ne moremo povedati, kako natančen je bil Eratostenov rezultat, ker je bilo v rabi več vrst stadijev. Če je Eratosten uporabil običajni olimpijski stadij, je bil rezultat za kakih 20% prevelik. Če pa je imel v mislih krajši stadij, je zadel pravi rezultat na 1%. Toda to bi bilo treba pripisati srečnemu naključju, ker Aleksandrija in Siena pač ne ležita na istem poldnevniku.

Dosežki Aristarha in tudi Eratostena zbuja spoštovanje še dandanes, ko



Slika 4. Eratosten je vedel, da sije Sonce navpično v Sieni (Asuanu), ko sije v Aleksandriji za $1/50$ polnega kota odmaknjeno od navpičnice. Z znano razdaljo med obema krajema je določil obseg Zemlje in z njim radij Zemlje.

Slika 5. V uvodu omenjenega razmerja oddaljenosti Zemlje od Sonca l_0 in Venere od Sonca l_V ni težko določiti. Venera, ki je bliže Soncu kot Zemlja, se oddalji od smeri Sonca največ za kot $\alpha = 46,3^\circ$, tako da je $l_0/l_V = 1/\sin \alpha = 1,38$.



smo se navzeli kvantitativnega gledanja. Začetnikom takega gledanja v astronomiji rade volje spregledamo to, da so navedli nekatere dokaj nenatančne rezultate.

Janez Strnad

RAZMISLIMO IN NASMEJMO SE !

Dva brata sta rojena istega leta, meseca in dne ter imata iste starše, vendar nista dvojčka. Kako je to mogoče?

REŠEVANJE ENAČB

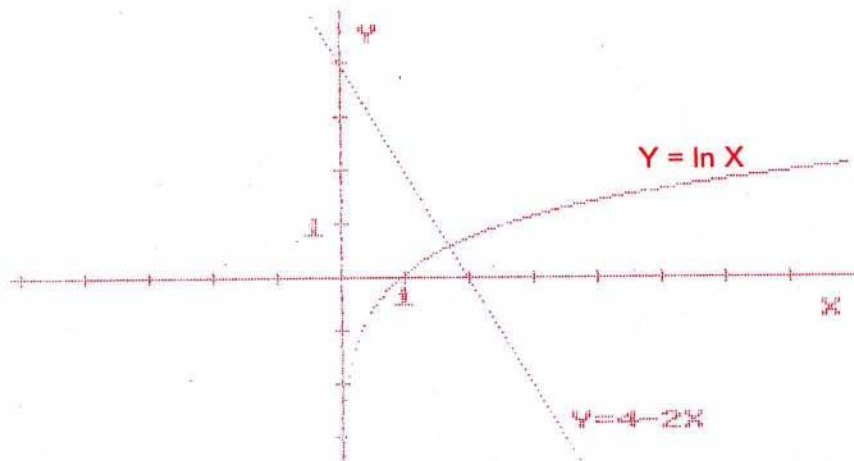
Z METODO ZAPOREDNIH Približkov

Nekaterih enačb (npr. $2x - 4 + \ln x = 0$) ne moremo rešiti po običajni poti. Pomagamo si z iteracijskimi metodami. To so metode, ki s ponavljajočim se procesom dajejo vedno boljše približke korenov enačb.

Pri reševanju nam bo koristil kalkulator ali računalnik.

Pa si pogledjmo, kako poteka iteracijska metoda. Za zgled vzemimo kar zgoraj omenjeno enačbo $2x - 4 + \ln x = 0$. Malce jo preoblikujmo in že imamo $\ln x = 4 - 2x$.

Pa naj bo $f(x) = \ln x$ in $g(x) = 4 - 2x$. Narišimo grafa teh dveh funkcij; sekata se v točki, katere abscisa je rešitev naše enačbe.



Približno rešitev lahko preberemo iz grafa ($x = 2$), vendar nas tako dobljena rešitev s svojo natančnostjo ponavadi ne zadovolji.

Zato uberemo drugo pot:

1. Enačbo $2x - 4 + \ln x = 0$ zapišimo v obliki $x = h(x)$, npr. $x = 2 - (\ln x)/2$.
2. Iz grafa preberemo približno rešitev ($x = 2$). To je naš prvi približek. Recimo mu x_0 .
3. Izračunajmo vrednost $h(x_0)$:
 $h(x_0) = h(2) = 2 - (\ln 2)/2 = 1,65342641$
To je naš novi približek. Recimo mu x_1 .

4. Vzemimo novi približek in ravnajmo z njim kot s prvotnim:

$$x_0 = 2$$

$$x_1 = 1,65342641$$

$$x_2 = 1,74857513$$

$$x_3 = 1,72059938$$

.....

$$x_{15} = 1,72685041$$

$$x_{16} = 1,72685041$$

Približki so čedalje natančnejši. Ko bodo natančni že na osem decimalnih mest, si z navadnim kalkulatorjem ne bomo mogli več pomagati. Trdil bo, da je $x_n = x_{n+1}$. Pa nič zato, tudi mi bomo čisto zadovoljni s takim približkom.

Ko je torej x_n na želeno število decimalk enak x_{n+1} , lahko postopek končamo.

(Pri fiziki bi bili zadovoljni že z x_3 .)

Postavi pa se nam vprašanje, ali je ta metoda vedno uspešna.

Žal ni. Uspešna je le v primeru, ko je graf funkcije $h(x)$ manj strm kot premica $y = x + n$ ($y = -x + n$).

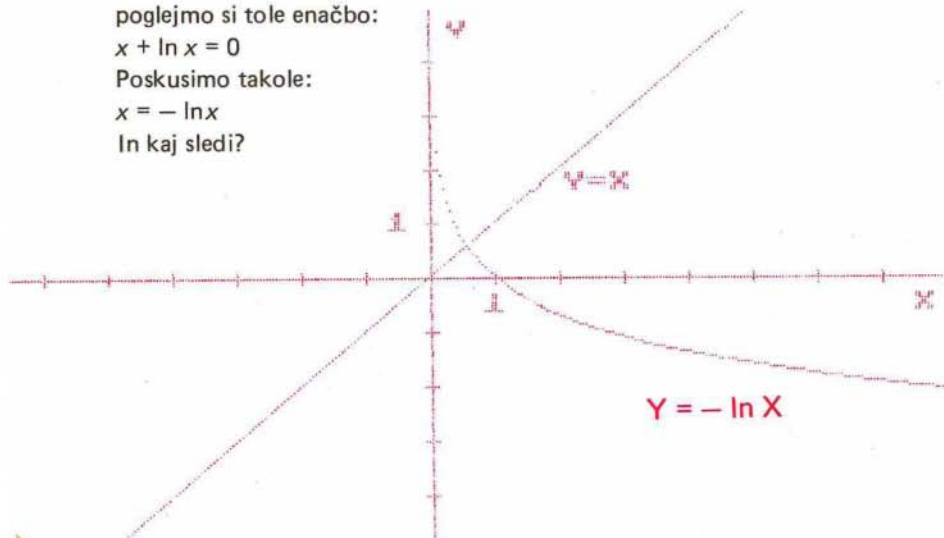
Zato nas iteracijska metoda ne privede vedno k želenemu cilju. Kar pogledjmo si tole enačbo:

$$x + \ln x = 0$$

Poskusimo takole:

$$x = -\ln x$$

In kaj sledi?



$$x_0 = 0,5$$

$$x_1 = 0,69314718$$

$$x_2 = 0,36651292$$

$$x_3 = 1,00372151$$

$$x_4 = -0,0037146$$

$$x_5 \text{ nedefiniran}$$

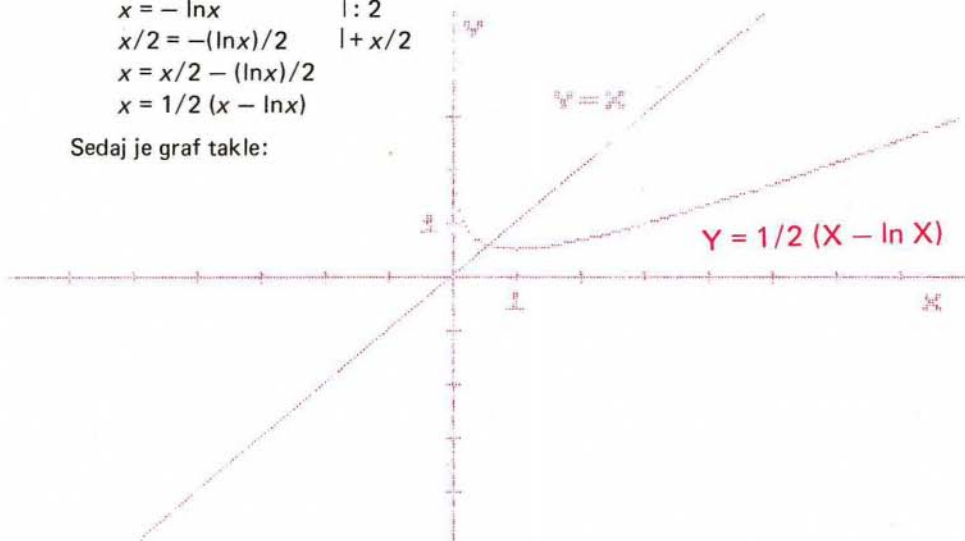
Z nadaljevanjem postopka dobivamo vedno slabše približke.

Vendar je za vsako bolezen zdravilo.

Preoblikujmo enačbo $x = -\ln x$ takole:

$$\begin{aligned} x &= -\ln x && | : 2 \\ x/2 &= -(\ln x)/2 && | + x/2 \\ x &= x/2 - (\ln x)/2 \\ x &= 1/2 (x - \ln x) \end{aligned}$$

Sedaj je graf takle:



Površno povedano: krivuljo smo pri njenem padanju umirili tako da je zdaj položnejša kot premica $y = x$.

Pa poskusimo sedaj z metodo iteracije:

$$\begin{aligned} x_0 &= 0,5 \\ x_1 &= 0,596573590 \\ x_2 &= 0,556563133 \\ x_3 &= 0,571268901 \\ x_4 &= 0,565582076 \\ x_5 &= 0,567740966 \\ &\dots\dots\dots \\ x_{19} &= 0,567143291 \\ x_{20} &= 0,567143290 \\ x_{21} &= 0,567143290 \end{aligned}$$

Ko malce razočarani od prej poskusimo z iteracijsko metodo,

se nam obraz zjasni pri
 $x_{20} = 0,567143290$.

Kljub temu, da nas kalkulator reši računanja, pa je vseeno mučno priti tja do 15. ali 20. približka. Tu nam priskoči na pomoč računalnik. Zaradi specifičnosti ukaza DEF FN v različnih dialektih basica, sem program priredil za dva računalnika, za C64 in ZX Spectrum.

SPECTRUM

```
5 REM ITERACIJA
10 PRINT "Zapisite enacbo v obliki  $x = h(x)!$ "
20 INPUT "x ="; a$
30 PRINT "x ="; a$
40 DEF FN h(x) = VAL a$
50 PRINT
60 PRINT "Izberite zacetno vrednost!"
70 INPUT "x0 ="; x0: PRINT "x0 ="; x0
80 PRINT
90 PRINT "Približki so:"
100 LET x1 = FN h(x0)
110 PRINT x1
120 STOP
130 LET x0 = x1 : GO TO 100
```

Opomba: Računalnik vas vpraša po funkciji in začetni vrednosti. Nato vam izpisuje približke po vsakem pritisku na tipko CONTINUE.

COMMODORE

```
10 PRINT "VPISITE ENACBO V OBLIKI  $X = H(X)!$ "
20 PRINT
30 PRINT "70 DEF FN Y(X)="
40 PRINT "GO TO 70"
50 FOR A = 1 TO 4: PRINT CHR$(145);: NEXT A
60 END
70 DEF FN Y(X)=1/2*(X - LOG(X))
80 INPUT "VPISITE ZAČETNO VREDNOST!"; X0
90 X1 = FN Y(X0)
100 PRINT X1
110 GET A$: IF A$ = " " THEN 110
120 IF A$ = "S" THEN END
130 X0 = X1 : GO TO 90
```

READY.

Opomba: Računalnik vas postavi v vrstico 70. S kazalcem (kurzorjem) se zapeljite do konca definicije funkcije in jo vpišite. Pritisnite dvakrat RETURN. Računalnik vas vpraša po začetni vrednosti. Nove približke vam izpisuje, vse dokler ne pritisnete S.

In še opozorilo:

Pri iteracijski metodi moramo poznati prvi približek x_0 . Najlažje ga dobimo grafično. Če pa se grafa funkcij sekata predaleč od izhodišča in ju zato 'ne spravimo' na papir, funkcijo enostavno delimo z od 0 različnim realnim številom.

Primer:

$$x^2 - 2x + 2 = 0 \Rightarrow f(x) = 2x, g(x) = x^2 + 2$$

$$x^2/2 - x + 1 = 0 \Rightarrow f(x) = x, g(x) = x^2/2 + 1$$

Za konec rešimo še enačbo $4x = 3^x$.

1. rešitev:

$$4x = 3^x \Rightarrow x = 3^x/4$$

Prvi približek: $x_0 = 0,5$

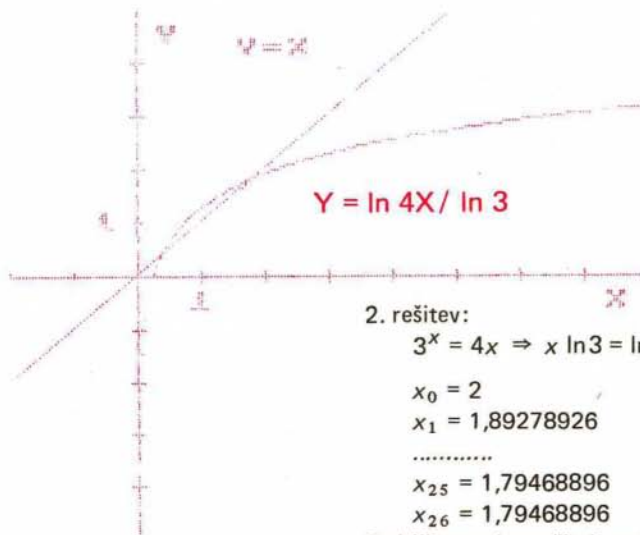
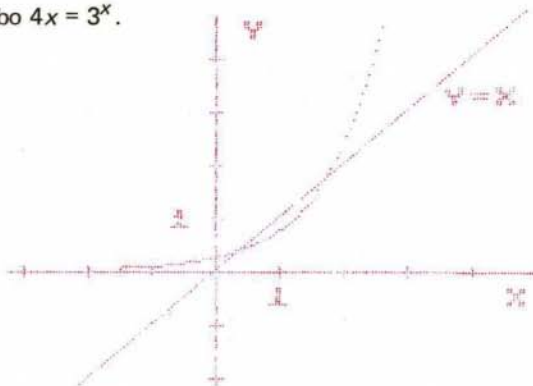
Nadaljujmo:

$$x_1 = 0,433012702$$

.....

$$x_{23} = 0,379194103$$

$$x_{24} = 0,379194103$$



2. rešitev:

$$3^x = 4x \Rightarrow x \ln 3 = \ln 4x \Rightarrow x = \frac{\ln 4x}{\ln 3}$$

$$x_0 = 2$$

$$x_1 = 1,89278926$$

.....

$$x_{25} = 1,79468896$$

$$x_{26} = 1,79468896$$

Dobili smo dve rešitvi, vsako po drugi poti.

Naloge

1. Določi oba pozitivna korena enačbe $2^x = 8x - x^3$.
2. Množica P naj bo potenčna množica množice M . Moč množice P je za 27 večja od moči množice M . Določi moč množice M .
3. Približno reši enačbe:
 - a) $x^2 = 2 + \ln x$
 - b) $\log_3 x = (x - 2)^2$
 - c) $x \cdot \ln x = 1$
 - d) $2^x = x + 2$
4. Kje se sečeta krivulji $y = 3^x$ in $y = x - 5$?

Marjan Jerman

Po gradivu D. Grešaka

Pripomba uredništva: če je bralcu gornji članek vzbudil zanimanje za numerično reševanje matematičnih problemov, potem mu priporočamo knjigo Zvonimir Bohte: Numerično reševanje enačb, ki je izšla v zbirki Sigma. Za razumevanje knjige bo seveda potrebno nekoliko več matematičnega znanja, kot ga zahteva pričujoči članek.

Sandi Klavžar

KRIVULJE IN HISOFT PASCAL

Spoznali smo že način, kako lahko s smotno uporabo preprostih rekurzivnih formul z računalnikom hitro rišemo krivulje, ki se izražajo s kotnimi funkcijama $\sin$ in $\cos$. Ponovimo glavne rezultate, ki so zapisani v Preseku (letnik 14, 1986/87, št. 4 in 6). Če je

$$y_k = A \sin(\omega x_k + \phi), \quad k = 0, 1, 2, \dots \quad (1)$$

kjer je $x_k = k \delta$ za izbrani korak $\delta > 0$, števila A , ω in ϕ pa so konstante, potem velja rekurzivna formula

$$y_{k+1} = c y_k - y_{k-1}, \quad k = 1, 2, 3, \dots \quad (2)$$

kjer je $c = 2 \cos(\delta \omega)$. Če vzamemo $y_0 = A \sin \phi$ in $y_1 = A \sin(\delta \omega + \phi)$, potem lahko postopoma po formuli (2) dovolj natančno za risanje krivulj na računalniku izračunamo tudi števila $y_2, y_3, y_4, \dots$. V posebnem primeru dobimo za $\phi = 0$ začetna člena $y_0 = 0$ in $y_1 = A \sin(\delta \omega)$, za $\phi = \pi/2$ pa $y_0 = A$ in $y_1 = A \cos(\delta \omega)$. Točke s koordinatami x_k in y_k nam v prvem primeru ponazarjajo potek sinusne, v drugem primeru pa potek kosinusne krivulje.

Tokrat si bomo ogledali krivuljo, ki je podana v parametrični obliki z relacijama

$$x = a(t - \sin(kt))$$

$$(3) \quad y = a(1 - \cos t)$$

```

10 PROGRAM KRIVULJA;
20 (* PROGRAM RISE KRIVLUJE *)
30 (* X = A * (T - SIN(K*T))      *)
40 (* Y = A * (1 - COS(T))      *)
50 CONST PI = 3.141593;
60 VAR MAX, I, A, M, X, Y : INTEGER;
70   X0, X1, X2, Y0, Y1, Y2, C1, C2, F, K : REAL;
80   CH : CHAR;
90 PROCEDURE PLOT (U, V : INTEGER); (* NARISE TOCKO *)
100 BEGIN
110   INLINE (253, 33, 58, 92, 221, 70, 2, 221, 78, 4, 205, 229, 34);
120 END;
130 BEGIN
140   REPEAT
150     PAGE; WRITELN ('A=');
160     REPEAT READ(A); UNTIL A > 0;
170     WRITELN ('M=');
180     REPEAT READ(M); UNTIL M > 0;
190     F := PI/M; C1 := 2*COS(F); MAX := ROUND(300/A/F);
200     WRITELN ('K='); READ(K);
210     C2 := 2*COS(K*F);
220     X0 := 0.0; X1 := SIN(K*F); Y0 := 1.0; Y1 := COS(F);
230     PAGE; WRITELN('A=', A, ' M=', M, ' K=', K:6:3);
240     FOR I := 0 TO 255 DO
250       BEGIN PLOT(I,24); PLOT(I,175); END;
260     FOR I := 24 TO 175 DO
270       BEGIN PLOT(0,I); PLOT(255,I); END;
280     FOR I := 0 TO MAX DO
290       BEGIN
300         X := ROUND(A*(I*F-X0));
310         Y := 32 + ROUND(A*(1 - Y0));
320         IF (X>=0) AND (X<=255) AND (Y<=175)
330           THEN PLOT(X, Y);
340         X2 := C2*X1 - X0; Y2 := C1*Y1 - Y0;
350         X0 := X1; X1 := X2; Y0 := Y1; Y1 := Y2;
360       END ;
370       REPEAT CH := INCH UNTIL CH <> CHR(0);
380     PAGE;
390     UNTIL K = 0;
400   WRITELN ('KONEC');
410 END.

```

kjer je t parameter, ki teče po poljubno izbranem intervalu na številski premici, število a je pozitivno, število k pa poljubno realno. Zanima nas, kakšno krivuljo zariše v koordinatnem sistemu xy točka s koordinatama x in y , ko parameter t teče od 0 do neke končne pozitivne vrednosti. Za $k = 0$ dobimo iz (3)

$$\begin{aligned}x &= at \\ y &= a(1 - \cos t)\end{aligned}$$

oziroma $y = a(1 - \cos(x/a))$, kar pa nam ne prinese nič posebnega, dobimo namreč staro znanko – sinusoido, če pač gledamo le obliko krivulje. Za $k = 1$ dobimo že bolj zanimivo krivuljo, ki je podana z relacijama

$$\begin{aligned}x &= a(t - \sin t) \\ y &= a(1 - \cos t)\end{aligned}$$

Imenuje se *cikloida*. Tako krivuljo opiše izbrana točka na krožnici, ki se brez drsenja kotali po neki premici.

Sedaj bi bil že čas, da napišemo računalniški program, ki nam bo risal krivulje, ki so podane s (3), in to za različni konstanti a in k . Napišimo ga v programskem jeziku PASCAL. Uporabili bomo verzijo HP4TM (HISOFT PASCAL), ki jo je v četrti številki Preseka (1985/86) predstavil Bojan Mohar. (glej program na str. 34)

Na začetku moramo vnesti števila A , M in K , pri čemer morata biti A in M pozitivni in celi. Število A predstavlja polovično višino krivulje, število M pa gostoto točk. Število K ustreza številu k v relacijah (3). Opozoriti je treba na to, da število M ni preveliko, ker je tedaj korak δ (v programu je to spremenljivka F) lahko zelo majhen in pri velikem številu točk pride do znatnih napak pri računanju koordinat točk. Smiselno je vzeti:

$$\begin{aligned}10 &\leq A \leq 60 \\ 30 &\leq M \leq 300 \\ -10 &\leq K \leq 10\end{aligned}$$

Ko program nariše krivuljo, moramo pritisniti na poljubno tipko, da lahko vnesemo nove podatke. Če vstavimo za K število 0, se program konča.

Rekurzivno formulo (2) smo v programu uporabili dvakrat (vrstica 330). Sami pa lahko spremenite program tako, da vam bo risal še kake druge krivulje. Če na primer v vrsticah 300 in 310 pišemo

$$X := \text{ROUND}(A * X0) + 120; Y := \text{ROUND}(A * (1 - Y0)) + 32$$

potem dobimo krivulje, ki se v fiziki imenujejo *Lissajousove* (izg. lisažujeve) *figure*.

Marko Razpet

MAČKA IN MIŠKA

Mačka in miška je igra za tekmovanje računalniških programov. Potrebujemo računalnik z računalniško grafiko (več kot 100 točk v vsaki smeri) in nekaj zagretilih programerjev. V osnovni verziji igre imamo eno samo mačko in eno samo miško, oziroma programa, ki ju predstavljata. Obe imata določen začetni položaj in pravilo, po katerem se lahko premikata. Mačka mora čimprej ujeti miško, ta pa mora čimdalj bežati pred mačko.

Tekmovanje poteka v pravokotniku, čigar velikost je običajno določena z grafiko računalnika. Hitrost mačke ali miške vodimo ločeno v x smeri in v y smeri. Tekmovalec lahko v vsaki potezi spremeni hitrost za -1 , 0 ali 1 neodvisno v vsaki smeri. Pravilo za premikanje vam je verjetno znano, saj je enako pravilu za vožnjo avtomobilov v namizni avtomobilski dirki (glej Presek 3, 1980/81).

Na začetku igre sta tekmovalca v diagonalnih kotih pravokotnika. Izmenično imata vsak po eno potezo. Igre je konec, ko mačka pride na točko miške. Seveda je prepovedano gibanje zunaj igralnega pravokotnika.

Priloženi program je model glavnega programa, ki ga morate prirediti za svoj računalnik. Program vodi tekmovanje: dodeljuje, preverja in riše poteze. Velikost igralnega polja je določena s konstantami *minx*, *miny*, *maxx* in *maxy*. Program uporablja podprogram *initscreen* za inicializacijo grafičnega zaslona in podprogram *line*(x_1, y_1, x_2, y_2), ki potegne črto med točkama (x_1, y_1) in (x_2, y_2). Verjetno ju ne bo težko prirediti. Bistvena sta podprograma *cat* in *mouse*, ki predstavljata oba tekmovalca. Njuni parametri so lastni položaj, lastna hitrost, nasprotnikov položaj in nasprotnikova hitrost ter pospešek, v katerem vrnejo svojo potezo. Glavni program lahko tudi izboljšate in rišete pot vsakega tekmovalca z drugačno barvo, sproti izpisujete poteze ipd.

Za začetek napišite podprogram za mačko, ki naj ujame preprosto miško (podprogram *mouse*) v priloženem programu. Kasneje lahko tekmujete s prijatelji, kdo bo napisal najboljši podprogram za mačko in kdo najboljši podprogram za miško.

Ko mačke in miške postanejo bolj zapletene, potrebujejo tudi nekaj svojega spomina, v katerem si shranjujejo določene podatke, ki se morajo ohranjati skozi celotno igro. V tem primeru dodajte še en parameter za tabelo. Pazite, da bo imel vsak tekmovalec svojo tabelo. Na začetku igre postavite vrednosti v tabeli na 0.

V zahtevni različici igre vsak podprogram vodi hkrati mačko in miško. Tako nastopata po dve mački in dve miški. Pravila premikanja so enaka kot v osnovni verziji. Na začetku sta miški v sredini, mački pa v nasprotnih kotih.

PROGRAM catandmouse;

CONST

```
minx = 0;      (* najmanjša x koordinata na ekranu *)
maxx = 255;    (* največja x koordinata na ekranu *)
miny = 0;      (* najmanjša y koordinata na ekranu *)
maxy = 191;    (* največja y koordinata na ekranu *)
```

TYPE

```
vector = RECORD
    x, y : integer;
END;
```

VAR

```
count:      integer;      (* stevec potez *)
catpos,      (* mackin položaj *)
catvel,      (* mackina hitrost *)
mousepos,    (* miskin položaj *)
mousevel:    vector;      (* miskina hitrost *)
catmove :    boolean;     (* macka na potezi *)
```

PROCEDURE initscreen ; EXTERNAL ;

PROCEDURE line (x1, y1, x2, y2 : integer) ; EXTERNAL ;

PROCEDURE init (VAR count:integer ;

```
VAR    catpol, catvel, mousepol, mousevel: vector ;
VAR    catmove: boolean) ;
```

BEGIN

```
count := 0;
catpol.x := minx + 10;   catpol.y := miny + 10;
catvel.x := 0;           catvel.y := 0;
mousepol.x := maxx - 10; mousepol.y := maxy - 10;
mousevel.x := 0;         mousevel.y := 0;
catmove := TRUE;
initscreen;
line(catpol.x, catpol.y, catpol.x, catpol.y);
line(mousepol.x, mousepol.y, mousepol.x, mousepol.y);
```

END;

```

PROCEDURE cat(catpos, catvel, mousepos, mousevel: vector;
  VAR accel: vector);
BEGIN
  (*
    tu manjka podprogram, ki določi mackin pospešek
    v spremenljivko accel
  *)
END;

PROCEDURE mouse(mousepos, mousevel, catpos, catvel: vector;
  VAR accel: vector);
(*
  primer preproste miske, ki se giblje z največjim
  pospeškom ali pojemkom
*)
BEGIN
  IF mousepos.x < (minx+maxx) DIV 2 THEN accel.x := 1
  ELSE accel.x := -1;
  IF mousepos.y < (miny+maxy) DIV 2 THEN accel.y := 1
  ELSE accel.y := -1;
END;

PROCEDURE playcat (VAR catpol, catvel: vector;
  mousepol, mousevel: vector);
VAR
  oldpos,          (* stari položaj *)
  accel : vector;  (* mackin pospešek *)
BEGIN
  oldpos := catpos;
  accel.x := 0; accel.y := 0;
  cat (catpos, catvel, mousepos, mousevel, accel);
  catvel.x := catvel.x + accel.x;
  catvel.y := catvel.y + accel.y;
  catpos.x := catpos.x + catvel.x;
  catpos.y := catpos.y + catvel.y;
  IF (accel.x < -1) OR (accel.x > 1) OR
    (accel.y < -1) OR (accel.y > 1) OR
    (catpos.x < minx) OR (catpos.x > maxx) OR
    (catpos.y < miny) OR (catpos.y > maxy) THEN
    writeln ('macka goljufal')
  ELSE
    line (oldpos.x, oldpos.y, catpos.x, catpos.y);
  END;
END;

```

```

PROCEDURE playmouse (VAR mousepos,mousevel: vector;
                    catpol, catvel: vector);

VAR
    oldpos,                (* stari položaj *)
    accel: vector;          (* miskin pospešek *)
BEGIN
    oldpos := mousepos;
    accel.x := 0; accel.y := 0;
    mouse(mousepos,mousevel,catpos,catvel,accel);
    mousevel.x := mousevel.x + accel.x;
    mousevel.y := mousevel.y + accel.y;
    mousepos.x := mousepos.x + mousevel.x;
    mousepos.y := mousepos.y + mousevel.y;
    IF (accel.x < -1) OR (accel.x > 1) OR
       (accel.y < -1) OR (accel.y > 1) OR
       (mousepos.x < minx) OR (mousepos.x > maxx) OR
       (mousepos.y < miny) OR (mousepos.y > maxy) THEN
        writeln ('miska goljufa!')
    ELSE
        line(oldpos.x,oldpos.y,mousepos.x,mousepos.y);
END;

BEGIN
    init(count,catpos,catvel,mousepos,mousevel,catmove);
    WHILE catpos <> mousepos DO BEGIN
        count := count + 1;
        IF catmove THEN playcat (catpos,catvel,mousepos,mousevel)
        ELSE playmouse (mousepos,mousevel,catpos,catvel);
        catmove := NOT catmove;
    END;
    writeln ('macka je ujela misko v ',count, '. potezi');
END.

```

V vsaki potezi lahko podprogram premakne svojo miško ali mačko, ne pa obeh hkrati. Zmaga podprogram, katerega mačka najprej ujame nasprotno miško. Ta igra je bolj primerna za tekmovanje, saj določi skupno najboljši podprogram, je pa precej bolj zapletena, saj se moramo odločati še med tem, ali bomo premaknili svojo mačko ali miško.

Rok Sosič

NEKAJ MATEMATIČNIH NALOG ZA OSNOVNOŠOLCE

5. razred

- Poišči takšno naravno število n , ki nam pri deljenju s 6 da ostanek 4 in količnik 15.
- Določi elemente množic A in B , če je $A \cup B = \{a, b, c, d, e\}$, $A \setminus B = \{a, b\}$ in $B \setminus A = \{c, e\}$.
- Čimbolj spretno izračunaj vsoto vseh naravnih števil od vključno 200 do vključno 300.
- Prijatelja sta se skupaj odpravila na ribolov. Prvi je ujel pet rib, drugi pa samo tri. Ko sta jih spekla, se jima je pridružil znanec in ju prosil, da bi obedoval z njima. Ribe so si razdelili na tri enake obroke. Po obedu je znanec ribičema plačal 800 dinarjev. Kako bosta pravično razdelila ta denar, če so bile vse ribe enako velike?

6. razred

- Načrtaj trikotnik ABC , za katerega velja: $a = 5$ cm, $v_c = 3,4$ cm in $\alpha = 30^\circ$.
- Določi naravni števili x in y tako, da bo izpolnjena enačba

$$\frac{x}{6} - \frac{2}{y} = \frac{1}{30}$$
- Janez je prebral $7/10$ knjige. To je bilo 64 strani več, kot mu je ostalo do konca. Koliko strani je v tej knjigi?

7. razred

- Izračunaj:
 - $(2 - 0,25:0,8):(0,1 + 0,16:0,5)$
 - $(0,72 - 0,12:0,1):(0,02 + 1/5)$

Tudi to pomlad so prizadevni učitelji iz *Sovenskih Konjic* zbrali in nam poslali šopek nalog, za katere upamo, da vam ne bodo povzročile veliko težav ob reševanju. Morda pa bo temu zgledu sledil še kdo izmed osnovnošolskih učiteljev in učiteljic matematike?

Gorazd Lešnjak

2. Za $x = -1/2$ ima izraz $4x - (m - 2)/3$ vrednost -1 . Kakšna je njegova vrednost pri $x = -0,25$?
3. Določite tiste vrednosti x , za katere je vrednost izraza $(x - 1)/(x^2 + 1)$
 - a. pozitivna;
 - b. negativna;
 - c. izraz nima pomena.
4. Kateri večkotnik ima dvakrat toliko diagonal kot oglišč? Izračunaj vsoto njegovih notranjih kotov.
5. Ali je mogoče 55 telefonov povezati z direktnimi linijami tako, da bo vsak izmed njih imel direktno zvezo s točno enajstimi telefoni?
6. Trije avtomobili so istočasno odpeljali po cesti iz mesta *Abra* proti mestu *Kadabra*. V dveh urah je prvo vozilo prevozilo 62,5% celotne poti, drugo 7/9 in tretje 0,8 poti. Kako dolga je cesta med tema mestoma, če je tedaj imelo vozilo, ki je bilo najbližje cilju, pred seboj še 36 km poti?
7. Ko lonce napolnimo z vodo, imata oba skupaj maso 2000 g. Če odlijemo 20% vode, se celotna masa zmanjša na 88% prvotne mase. Določi masi lonca in vode.
8. Izračunaj vrednost izraza $0,001a^3b^2 - 500a^2b^3$. Pri tem je a največje dvo-mestno negativno število, b pa je najmanjše celo število med $-5,1$ in $-2,4$.
9. Premici p in q se sekata pod kotom 60° . V manjšem kotu med njima načrtaj takšni krožnici k in k' , da se bosta dotikali ena druge in obe obeh premic.

8. razred

1. Poenostavi izraz $1 - x + x^2 - x^3 + x^4/(1 + x)$
2. Poišči rešitve enačb
 - a. $0,24 \cdot (1,2 + (0,5x - 1,8)/1,5) = 0,08$
 - b. $(2m + 3)^2 - (2m + 1)^2 = 176$
3. Predstavi ulomek $9/91$ kot razliko ulomkov z imenovalcema 7 oziroma 13.
4. Aleš je opravil najprej $4/9$ dela, nato še $3/5$ ostanka. Bojan je delo dokončal in za to dobil 1000 dinarjev. Kakšno je plačilo za celotno delo?
5. Na sestanku je o predlogu glasovalo 180 udeležencev. Zanj jih je bilo 18 več kakor proti njemu. Koliko jih je glasovalo proti predlogu?
6. Znano je, da je cena diamanta sorazmerna s kvadratom njegove teže. Pri brušenju diamanta je odpadel košček in s tem se je njegova cena zmanjšala za 36%. Koliko odstotkov skupne teže je tehtal odlomljeni košček?
7. Obseg trikotnika s stranicami a , b in c je 34 cm. Vemo, da je $a : b = 3/8$ in $b : c = 4 : 3$. Koliko merijo stranice?

8. Deset metrov visoka smreka se je prelomila tako, da se vrh dotika zemlje 5 m od vznožja, spodnji konec odlomljenega dela pa se še dotika mesta preloma. V kateri višini se je smreka prelomila?
9. V trikotniku MNP je kot MPN pravi, nožišče Q višine iz P pa je od M oddaljeno 4 cm in 9 cm od N . Koliko meri višina PQ ?
10. Rob pravilne štiristrane prizme a meri 3 cm, višina h pa 12 cm. Za kakšno kocko velja, da sta površini obeh teles v enakem razmerju kot njuni prostornini?

Še dve nalogi za vsakogar:

1. Ali lahko med spodnje številke postaviš znake $+$, $-$, $.$, $:$ tako da bo račun dal vrednost 2?

9 8 7 6 5 4 3 2 1

2. Vstavi ustrezna števila namesto zvezdic:

* * * . * 2 *

* 8 *

* * * *

* * *

* * 9 * * 7

Če ne gre, najdete rešitve na strani 61 .

*Učitelji matematike in fizike
iz Slovenskih Konjic*

Pisma bralcev

V zadnji številki lanskega šolskega leta smo objavili le eno od dveh nalog, ki nam jih je poslal Samo Dreó iz Poljčan, dijak STŠ Maršala Tita iz Celja. Naloga je spraševala, kje je zakopan zaklad. Gusarji kralja Richarda so ga z vašo pomočjo že našli. Tudi domov so že pripluli. Tokrat uganite, kateremu od njih je kralj dal največjo nagrado za prizadevnost pri iskanju zaklada.

Dušica Boben

NALOGE O LUNINIH MENAH

Nariši medsebojno lego Sonca, Zemlje in Lune za prizor iz tele pesmice:

"Sonček čez hribček gre,
Lunca pa za gore,
zvezdice svetle
se potope."

Katero meno je videl pesnik?

Iztegni eno roko v smeri Sončka iz prizora, drugo pa v smeri Lunce. Kolikšen je kot med njima?

Kolikšen je kot med rokama, iztegnjenima v smeri Sonca in Lune ob ščipu, kolikšen je ob krajcih in kolikšen ob mlaju?

Nariši medsebojne lege Sonca, Zemlje in Lune za vse štiri Lunine mene.

Janez Ferbar

Kdo si zasluži največjo nagrado?

Po mnogih avanturah so se z zakladom vrnili domov. Kralj Richard jih je poklical na dvor ter jim rekel: "Gusarji moji, vsi ste se lepo izkazali, ampak povejte, kdo od vas je bil najbolj prizadeven."

Na to vprašanje mu je odgovorila Rdeča hobotnica: "Vaše veličanstvo, vsi smo se zelo trudili, a najbolj so se Enozobi vrag, Nori morski pes, Krilata pošast in kapitan."

"Praviš, da so se ti moške najbolj trudili. Prav, pa jih bom nagradil. Toda prej mi morate povedati, kateri od vas štirih si zasluži največjo nagrado."

Odgovorili so mu takole:

Enozobi vrag: "Prav gotovo si jaz zaslužim največjo nagrado."

Nori morski pes: "Nikar mu ne verjemite, laže tako hitro, kakor pes teče. Kapitan si zasluži največjo nagrado."

Krilata pošast: "Nori morski pes laže."

Kapitan: "Krilata pošast si zasluži največjo nagrado."

Kralj začne premišljevati, a v tem trenutku priteče v dvor Okrutni Bill, ter reče: "Vaše visočanstvo, eden je lagal, dva sta govorila resnico, za enega se pa ne ve."

"Kako pa ti to veš, ko te ni bilo v dvoru?!"

"Slišal sem jih na ladji, takrat, ko so se dogovarjali."

Kralj je potem z lahkoto rešil uganko. Ali jo znate tudi vi?

KAKO NISVA POSTALA MILIJONARJA

Na Rubikovo kocko smo vsi že skoraj pozabili. Pred nekaj leti pa je bilo drugače. Takrat smo vsi iskali nove in nove postopke in matematične obrazce, s katerimi bi kocko čim hitreje sestavili. Danes jo verjetno le še malokdo zna sestaviti. Kot vsaka igračka, ki se je naveličamo, je obležala na dnu kake omare.

Ob kocki se je pojavila prava poplava sestavljanek, ki razen spretnih rok zahtevajo predvsem obilo logičnega sklepanja, prostorske predstave in vizualnega pomnjenja. Posamezniki in nekateri proizvajalci takšnih igrac so čez noč obogateli. Ob Rubikovi kocki dimenzije $3 \times 3 \times 3$ so se pojavili še: kocka $4 \times 4 \times 4$, domino kvader $2 \times 3 \times 3$, tetraeder, okrogla 'kocka', kača, barvaste kroglice, izdelani so bili celo načrti za kocko $5 \times 5 \times 5$. Zdi se pa, da počasi zamira zanimanje za tak tip igrač.

Vendar Erno Rubik, genialni madžarski izumitelj, ni miroval. Po nekaj letih zatišja je prišla na trg njegova nova igračka, ki jo je poimenoval "MAGIC". To je osem ploščic, ki so povezane med seboj tako, da sestavljajo 2×4 ploščo. Na eni strani plošče so narisani na črni podlagi trije mavrični obroči (ko je igrača nesestavljena), na drugi strani pa so narisani kosi mavričnih obročev. Bistvo izuma nove igračke je izredno domišljena povezava posameznih ploščic med seboj. Povezane so z najlonskimi vrvicami, ki po miniaturnih žlebovih segajo čez celotno površino ploščic, tako da ploščice lahko prevračamo, vrtimo in iz igračke naredimo najrazličnejše prostorske like (obroče, stole, stolpe ipd). Pri tem ploščice nikoli ne razpadejo, kakorkoli so obrnjene, vedno jih vrvice držijo skupaj. Naloga sestavljanke pa je v tem, da z najrazličnejšimi transformacijami premešamo ploščice med seboj tako, da kosi mavričnih obročkov, ki so narisani na zadnji strani igrače, tvorijo tri med seboj sklenjene mavrične obroče. Takrat ploščice niso več zložene v ploščo 4×2 , ampak v 3×3 z eno manjkajočo vogelno ploščico.

Ob novi Rubikovi igrački sva se spomnila zgodbe, ki bo mogoče zanimiva tudi za bralce Preseka. Pozimi pred šestimi leti, ko so se še vsi ukvarjali z Rubikovo kocko, sva začela razmišljati, ali bi bilo mogoče napraviti podobno sestavljancko iz kakšnega drugega telesa. Naju ni zanimala teorija in spretnost v sestavljanju kocke, temveč čisto tehnično vprašanje, kako je kocka sestavljena. Na podoben način, kot je Rubik razstavil kocko na posamezne elemente in jih smiselno povezal, sva razmišljala, bi bilo mogoče razstaviti na med seboj povezane kose tudi kakšno drugo geometrijsko telo (in s patentom zaslužiti

kakšen dinar).

Kot je znano, obstaja v tridimenzionalnem svetu le pet pravih geometrijskih teles, ki jih je prvi opisal že Arhimed in jih tudi imenujemo Arhimedova telesa. To so:

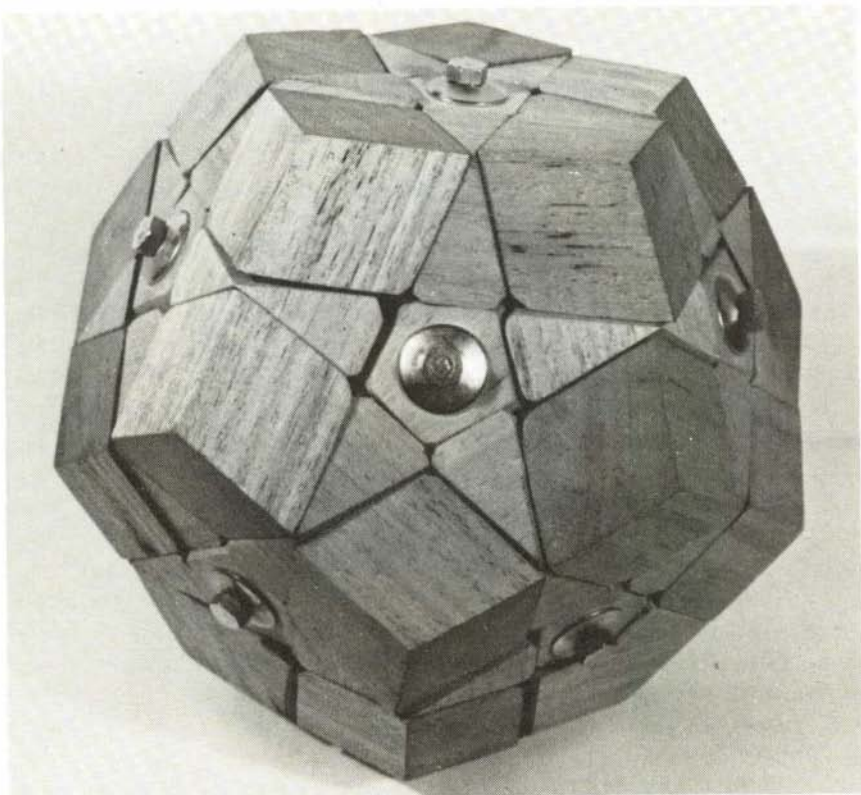
tetraeder, ki ga omejujejo štirje enakostranični trikotniki,

oktaeder, ki ga omejuje osem enakostraničnih trikotnikov,

heksaeder ali kocka, ki jo omejuje šest kvadratov,

dodekaeder, ki ga omejuje dvanajst pravih petkotnikov, ter

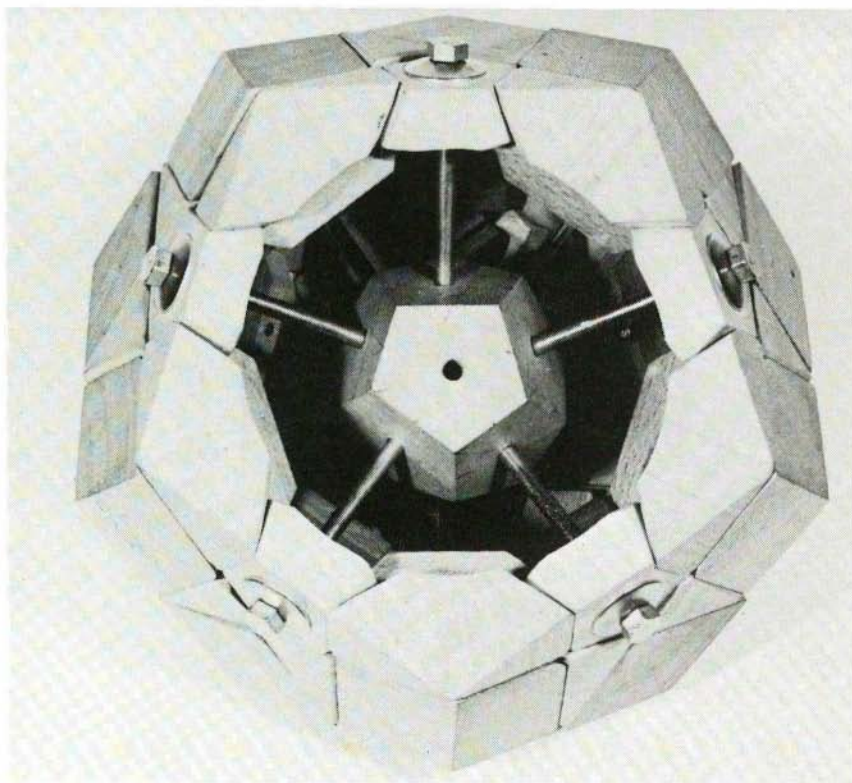
ikozaeder, ki je omejen z dvajsetimi enakostraničnimi trikotniki. Kocko je obdelal že Rubik in tudi tetraeder sva že videla v neki reviji. Za oktaeder nisva imela prave predstave, kako bi ga bilo treba "razrezati", da bi se posamezne plasti lahko vrtele, ikozaeder pa je že "preokrogel", da bi se dalo posamezne plasti enostavno vrteti (verjetno pa bi bilo zanimivo telo, zgrajeno na ikozaedru, s posameznimi "izrastki", ki bi olajšali sestavljanje takšne igrčke). Tako



Prototip magičnega dodekaedra BOMIDO.

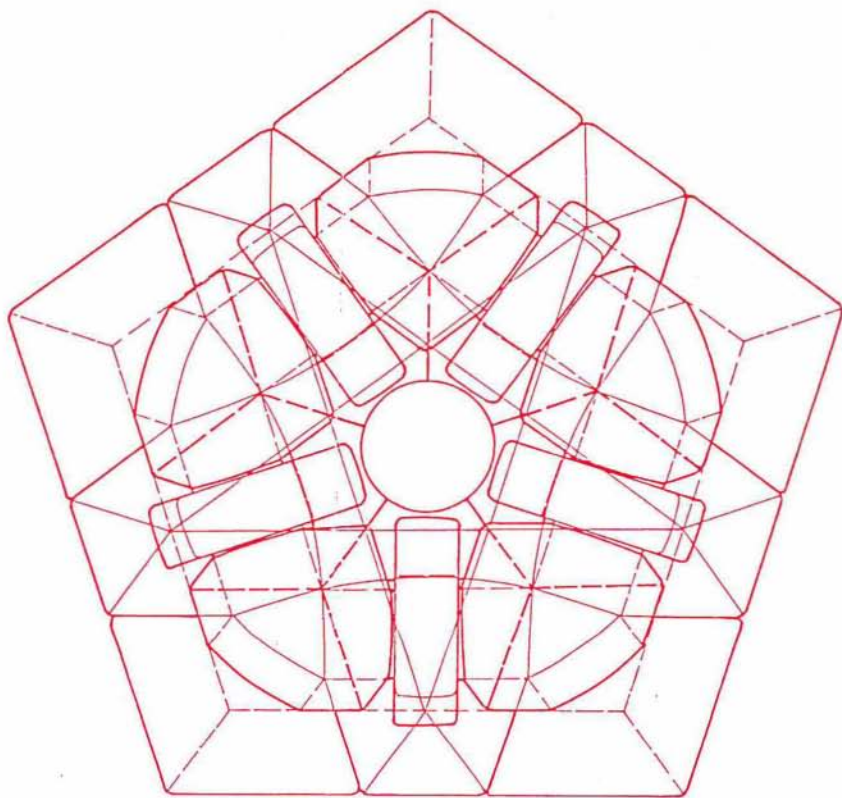
nama je ostal samo dodekaeder, ki je po najinem mnenju tudi najlepše pravilno geometrijsko telo. Lotila sva se matematičnih preračunavanj in risanja načrtov. To niti ni bilo težko, saj je za to delo zadostovalo že znanje srednješolske trigonometrije, midva pa sva takrat že bila študenta matematike. Izkazalo se je, da je notranji mehanizem v bistvu enak kot pri Rubikovi kocki, le prilagojen drugačnim geometrijskim lastnostim. Največja težava za predstavo je v tem, da nikjer ni pravega kota. Za potrditev teorije, da mehanizem tako razdeljenega telesa resnično deluje, je Miro v očetovi mizarški delavnici z očetovo pomočjo izdelal prototip. Ta je, nekoliko trdo sicer, popolnoma brezhibno deloval.

Prototip sva odnesla k fotografu, ki ga je z vseh strani, znotraj in zunaj, poslikal. Načrte in slike sva odnesla v patentno pisarno in vložila prijavo "Prostorske logične igrافة BOMIDO" (Boris Miro Dodekaeder) kot model. (Prav med pisanjem članka za Presek sva dobila od Patentnega urada obvestilo, da je bila potrjena zaštita modela.) Po prijavi modela na patentnem uradu sva spo-



mladi leta 1982 začela iskati proizvajalce najine igrčke, saj sva, po Rubikovem vzoru, tudi midva želela postati milijonarja. Toda tu se je zataknilo. Nobena tovarna kovinsko—plastične usmeritve, noben domžalski plastičar ni bil dovolj navdušen nad najino idejo, da bi bil pripravljen vložiti denar v razvoj orodja za dodekaeder. Ker telo nima nobenega pravega kota, se je vsem zataknilo že pri izdelavi načrta za oradje. Po nekaj mesecih sva obupala nad nerazumevajočo domovino in se odločila za agresivni prodor na svetovno tržišče.

Med prvomajskimi prazniki sva z vsemi slikami in dokumenti odpotovala v London. Že prej sva se bila pismeno oziroma telefonično dogovorila za sestanek z Davidom Singmastrom, matematikom, ki je bil takrat glavni popularizator in teoretik Rubikove kocke, in z Jamesom Dalgetyjem, ki je bil kot direktor firme Pentagle novopečeni bogataš po zaslugi Rubikove kocke in podobnih igrč. Na domu pri Singmastru sva bila že ob devetih dopoldne. Vedel



je sicer, da je mogoča konstrukcija magičnega dodekaedra po vzoru Rubikove magične kocke, vendar prototipa še ni videl. Navdušeno si je ogledoval fotografije najinega ročno izdelanega modela, posebej še, ko je slišal, da model deluje. Obisk pri Singmastru je bil zelo zanimiv. Še kakšni dve uri sva ostala pri njem in v tem času nama je pokazal cel muzej najrazličnejših sestavljanek z vsega sveta. Samo o Rubikovi kocki je imel cele police knjig in priročnikov, prav tako z vsega sveta. Kasneje sva mu poslala knjižico, ki je izšla pri beograjski založbi Galaksije. Nekaj igrac, nalepk, plakatov in priponk nama je podaril, še več pa sva jih kupila v improvizirani trgovini v njegovi hiši. Najbolj sva se navduševala (kot konjičarska mizarja) nad sestavljanjami (puzzles) iz plemenitega lesa. Na primer zmešnjava različnih ali celo enakih teles, ki sestavljajo kocko ali kakšno drugo pravilno telo. Obstajajo cele matematične teorije, kako je mogoče pravilno telo razrezati na simetrična telesa in takšne sestavljanke sploh niso enostavne.

Singmaster naju je prijazno odpeljal do središča Londona, kjer sva imela za opoldne dogovorjen sestanek v McDonnaldovi restavraciji z Jamesom Dalgetyjem. Dalgety ni bil dosti starejši od naju, imel je pravo lepotico za ženo in bleščeče nov športni avto Saab 900 turbo (!) Že sva se tudi sama videla v takšnem avtomobilu, ko sva še pred pričetkom kosila doživela hladen tuš. Dalgety je sicer rekel, da sva pametna in pridna, tudi on je bil navdušen nad lesenim modelom, vendar je iz torbe privlekel na dan nekaj plastičnih modelov – prototipov dodekaedra, ki jih je prejšnji dan dobil v tovarni. Bili so na las podobni tistim, ki sva si jih zamislila midva, kar pomeni, da so matematični in geometrijski zakoni povsod enaki. Povedal nama je, da sva kakšen mesec prepozna z najinim patentom, takrat ga je namreč on odkupil od nekega Madžara. Dva meseca kasneje je stekla že redna proizvodnja magičnega dodekaedra. V tolažbo sva po pošti dobila prve primerke.

Pred kratkim so prijatelji v Londonu v več velikih trgovinah z igračami iskali magični dodekaeder. Povsod so še imeli Rubikovo kocko v najrazličnejših izpeljankah, toda dodekaedra ni bilo mogoče nikjer dobiti. Prodajalci so povedali, da je imel zelo malo uspeha, verjetno se je ljudem zdel prekompliciran (v zmešnjavi dvanajstih barv se je res težko znajti), in da že dolgo ni več v prodaji. Sicer pa sestavljanje samo ni bilo nič težje kot pri kocki, le da je bilo nekoliko več dela. Dodekaeder je bil na neki način kopija kocke in ponovitev ne more biti nikoli tako uspešna kot originalna zamisel. To so neizprosni zakoni potrošniške mentalitete in svobodnega tržišča. Le kdor jih zna dobro oceniti in v pravem trenutku ponuditi nov proizvod, se lahko nadeja uspeha.

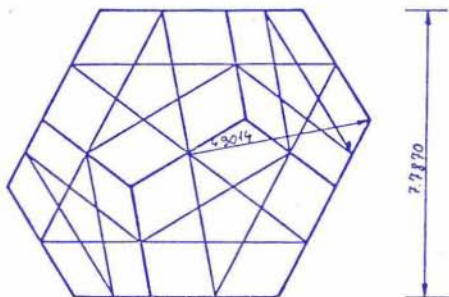
Tako nisva postala milijonarja, celotno zgodbo pa sva ohranila v prijetnem spominu. Kdor ne poskusi, tudi uspeti ne more.

Kot nekdanja študenta matematike sva sklenila, da v spomin na to zgodbo podariva najin prototip matematični knjižnici, da bo stal v vitrinah knjižnice v tretjem nadstropju na Jadranski 19 v Ljubljani.

Pisani magični dodekaeder (glej IV stran ovitka) lahko naročite pri Penta-
gle, Paradox Engineering Ltd., Over Wallop, Hampshire, SO20 8HT, Velika
Britanija z nakazilom 8£.

Hkrati pa razpisujeva nagradni natečaj na temo magičnega dodekaedra, ka-
terega prototip si lahko ogledati na slikah. Odgovoriti morate na naslednja
vprašanja:

1. Koliko je sredinskih, vogalnih in koliko robnih delov magičnega dodeka-
edra? Odgovor utemeljite z izpeljavo enačb za števila robov in vogalov
poljubnega poliedra (to je naloga za ogrevanje).
2. Koliko barvnih nalepk, to je, koliko petkotnikov potrebuje za sredinske
elemente, koliko rombov za vogalne elemente in koliko trikotnikov za
robne elemente? Odgovor utemeljite.
3. Kolikšna sta volumna robnega in vogalnega elementa in kolikšen je volu-
men vsega dodekaedra (v odvisnosti od dolžine roba dodekaedra)?



5. Kolikšen je polmer včrtane in očrtane krogle dodekaedra in kolikšen pol-
mer krogle, ki se dotika robov?

Priložiti morate tudi vse računske izpeljave. O nagrajencih bo razen pravilnosti
odgovorov odločala tudi elegantno izpeljana rešitev. Še majhen nasvet: v pravi-
lnem petkotniku se skriva zlati rez, s pomočjo katerega lahko izračunamo
kotne funkcije posameznih kotov, ki jih bomo potrebovali pri izračunih.

Najboljše odgovore bomo objavili, za nagrade pa razpisujemo en pravi
magični dodekaeder in pet knjižnih nagrad iz Presekove knjižnice. Rok za
oddajo odgovorov je 1.11.1987. Pošljite jih na uredništvo Preseka.

Boris Horvat in Miro Lozej

ODVEDLJIVOST "AH" IN "OH"

Kraguljčki cingljajo, bele sani z vprego se prebijajo skozi zimsko pokrajino. Ležim na saneh, ves obdan s prijetno toplo kožuhovino in opazujem pokrajino.

Okrog in okrog so beli hribi poraščeni s čudovitimi smrekami in obsijani s soncem. Idilo le tu in tam zmoti kočijaž s surovo kletvico.

Mož, star kakih šestdeset let, poraščen, zanemarjen, od njega veje kiselkast vonj po potu. Vse življenje je kočijaž, vse življenje je presedel na kočijah in saneh, poslušal pogovore potnikov: modre, pa tudi nič kaj pametne. Le tu in tam se ozre po meni, in na obrazu se mu vidi, da želi povedati nekaj pametnega.

Sonce sije vedno močnejše, vedno bolj in bolj se žarki odbijajo od zasneženih poljan. Svetloba postane slepeča, neprijetna — celo boleča ...

Skozi polspuščene rolete vdirajo v sobo prodorni žarki zimskega sonca.

Sanje, sanje. Saj je bilo prelepo, da bi trajalo. Spet sem vržen v kruto resničnost. Ura je že enajst. Počasi in s težavo se odvlečem v kopalnico. Edino, kar vidim pred seboj, je tuš, mrzel tuš, ki bi še mrtvega prebudil.

Po tem udarcu, ki bi se prav lahko tragično končal, se zavem svojega položaja.

Kot strela z jasnega me prešine. 'Fant, učiti se bo treba!' Počasi, s polževo hitrostjo se pomikam nazaj v sobo. Na mizi v kotu leži zaprašena knjiga. 'Matematika 4' piše na njej. Odprem jo in v mislih na včerajšnji žur listam po njej. 'Funkcija f je odvedljiva v točki x_0 natanko tedaj, ko se da prirastek funkcije razčleniti v linearni del (premosorazmeren h) in v del, ki gre hitreje proti 0 kot prirastek neodvisne spremenljivke h .

$$f(x_0 + h) - f(x_0) = Ah + O(h)$$

Res! Če je f odvedljiva v x_0 velja:

$$f(x_0 + h) - f(x_0) = f'(x_0)h + O(h)$$

to pa je toliko, kot če je

$$A = f'(x_0)$$

Delimo prvo enačbo s h :

$$f(x_0, h) = A + h^{-1} O(h)$$

Ko gre h proti 0 konvergira desna stran proti A z njo se steka tja tudi leva. Funkcija je res odvedljiva v x_0 . Njen odvod v x_0 pa je enak koeficientu A .

Dvignem glavo in se zagledam proti postelji. Počasi, a vztrajno konvergiram proti njej, končno pa se leva in desna stran telesa znajdeti v postelji.

O, blaženi raj

Kočijaž grdo pljune in se končno opogumi. Obrne se k meni, me premeri in začne:

'Fant moj. Vsa modrost tega sveta je skrita v MATEMATIKI ...' Zavijem se globlje v kožuho in utonem v globok, globok SPANEC ...

Goran Milošević

NOVE KNJIGE

B.M. Ševarlić, KRATKA ZGODOVINA ASTRONOMIJE, 2. del, Ljubljana: Društvo matematikov, fizikov in astronomov SRS, 1986, 180 strani, prevedla Pavla Ranzinger. — (Knjižnica Sigma ; 42)

V zbirki Sigma Društva matematikov, fizikov in astronomov SRS je v prevodu Pavle Ranzinger izšla knjiga B.M. Ševarlića Istorija astronomske nauke, od Njutnova doba do naših dana, Beograd 1986.

Zanimiva in zelo koristna knjiga, ki smo jo dobili sedaj tudi v slovenskem prevodu, podaja okritja, raziskave in dejavnosti na področju astronomije od Newtona do današnjih dni. Bralcu omogoča dovolj izčrpen pregled nad dogajanjem na področju "kraljice" znanosti v zadnjih stoletjih. Vendar branje knjige zahteva določeno astronomsko in fizikalno predznanje.

Knjiga ima na 180 straneh snov razporejeno v 5 poglavjih: Razvoj astronomije, Razvoj teoretične astronomije in nebesne mehanike, Začetek in razvoj zvezdne astronomije, Začetek in razvoj astrofizike ter Začetek in razvoj kozmogonije in kozmologije. Vsako poglavje predstavlja dovolj zaključeno celoto, jezik je tekoč, prevod dovolj korekten. Prevajalka in strokovni recenzent Andrej Čadež sta z dovoljenjem avtorja nekatere odstavke izpustila, nekatere pa sta predstavila v nekoliko spremenjeni obliki, odpravljene so tudi pomanjkljivosti, ki jih vsebuje original. Zelo koristno je stvarno kazalo, ki ga original ne vsebuje, prav tako so dobrodošle slike astronomov in instrumentov, ki jih v originalu ni našti. Bralca bo knjiga vsekakor vzpodbudila, da bo marsikatero pojasnilo šel iskat v ustrezno literaturo.

Knjigo, ki je izšla v bolj okusni obliki kot original, zelo priporočam vsem, ki se zanimajo za dogajanja v astronomiji v zadnjih stoletjih. Tako jim bodo dosti bolj razumljive poti, po katerih se razvija astronomija danes.

Bogdan Kilar

KRIŽANKA – TRIKOTNIŠKE FORMULE

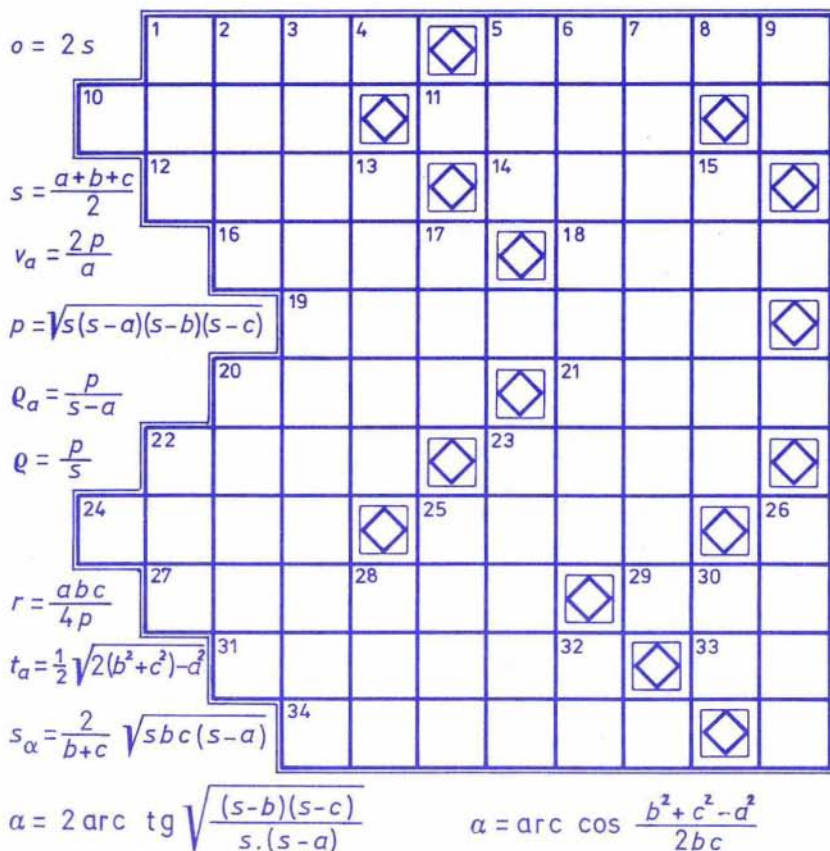
VODORAVNO: V trikotniku poznamo dolžine stranic $a = 4290$, $b = 4620$, $c = 4950$. Rezultate zaokroži na štiri mesta. Za kote uporabi dve mesti za stopinje, dve za minute in dve za sekunde.

- | | |
|---|---|
| 1. polobseg s | 5. obseg o (na 5 mest) |
| 10. višina na stranico a : v_a | 11. težiščnica na stranico a : t_a |
| 12. višina na c | 14. težiščnica na b |
| 16. težiščnica na c | 18. višina na b |
| 19. ploščina p (na 7 mest) | |
| 20. polmer stranici a pričrtane krožnice ρ_a | |
| 21. dolžina simetrale notranjega kota s_a | |
| 22. polmer stranici b pričrtane krožnice ρ_b | |
| 23. simetrala kota β : s_β | |
| 24. polmer stranici c pričrtane krožnice ρ_c | |
| 25. simetrala kota γ : s_γ | 26. $2^3 - 1^3$ |
| 27. kot α v stopinjah, minutah in sekundah | 29. kateta pravokotnega trikotnika z eno kateto 1457 in hipotenuzo 1585 |
| 31. velikost kota β | 34. velikost kota γ |
| 33. enaki cifri | |

NAVPIČNO:

- | | |
|--|---|
| 1. $5^4 - 2$ | 2. $3 \cdot (2 \cdot 3^2 \cdot 179 - 1)$ |
| 3. $2^9 \cdot 23 \cdot (3^{13} + 2 \cdot 3^{12} + 2 \cdot 3^{11} + 2 \cdot 3^9 + 2 \cdot 3^7 + 3^4 + 1)$ | |
| 5. $2^2 \cdot 31$ | |
| 6. $2 \cdot 3 \cdot 5 \cdot (7^7 + 3 \cdot 7^6 + 5 \cdot 7^5 + 3 \cdot 7^4 + 3 \cdot 7^2 + 7 + 1)$ | |
| 7. $2 \cdot 311 \cdot 11 \cdot (2 \cdot (3^{10} - 5^2) - 5 \cdot 13^2)$ | 9. cifri v dvojiškem sestavu |
| 13. $2^8 \cdot 5 \cdot (48 - 1)$ | 15. $47 \cdot (2^{10} + 2^7 + 5 \cdot 2^3 + 1)$ |
| 17. $5 \cdot 13^2$ | 20. $5 \cdot 7 \cdot (60 - 1) \cdot 19$ |
| 22. $5 \cdot (7 \cdot 10 + 3)$ | 23. $2 \cdot (2^5 \cdot 3 \cdot 197 - 1)$ |
| 25. $2^2 \cdot 3^2 \cdot 97$ | 26. diagonala pravokotnika s stranica-
ma 2720 in 6969 |
| 28. $3^6 - 2$ | 32. $2 \cdot (2^4 + 1)$ |
| 30. število, ki je enako vsoti svojih pravih deliteljev (kot npr. $6 = 1 + 2 + 3$) | |

Franci Oblak



ČRNA OVCA, NATANČNA POVRŠNOST IN NORA NATANČNOST

"Glej, glej! Na Angleškem so pa ovce črne," navdušeno ugotovi astronom, ko zagleda črno ovco.

"Kako ste astronomi površni," se skuša izkazati fizik: "Kot znanstvenik lahko trdiš le, da so na Angleškem nekatere ovce tudi črne."

"Neumnost," zavzdihne matematik: "Z gotovostjo lahko trdimo le, da je na Angleškem vsaj ena ovca, ki je črna vsaj na eni strani ..."

Damjan Kobal

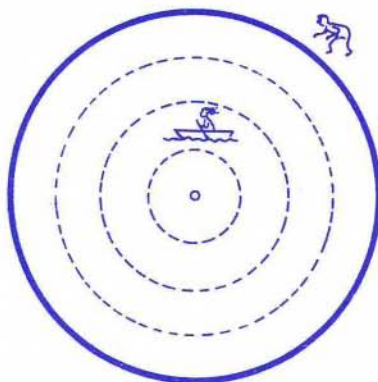
PREMISLI IN REŠI

V novi nalogi boste pomagali Smrketi na begu pred Gargamelom.

SMRKETA NA JEZERU

Smrketa vesla po okroglem jezeru polmera 100 metrov, medtem ko nanjo preži na obali hudobni čarovnik Gargamel. Je sicer neplavalec, teče pa hitreje, kot Smrketa vesla: Gargamel teka s hitrostjo 7 m/s, Smrketa vesla le s hitrostjo 2 m/s. Če ji uspe doseči obalo, ne da bi naletela na čarovnika, je rešena, kajti teče hitreje od njega. Pomagajte Smrketi, povejte ji – in Preseku – kako naj vesla, da bo dosegla obalo, ne da bi srečala Gargamela.

Nasvete pošljite Preseku (za PIR), 61111 Ljubljana, Jadranska 19, p.p. 64, do 30. septembra 1987.



Franci Oblak

Rešitev iz P XIV/4 – Razdeliva si vino

Tokrat smo imeli težave pri štetju pravih rešitev. Ali jih je bilo 45 ali pa 70, nepravilnih je bilo šest. Pravilne so nam poslali:

Gregor BEGUŠ s Kojškega, Marko BOHANEK iz Križevcev pri Ljutomeru, Drago BOKAL iz Polhovega Gradca, Peter BORŠTNAR iz Medvod, Vilijana BRUNEC iz Slovenske Bistrice, Silvan BUCIK iz Tolmina, Peter ČADEŽ iz Radovljice, Lea ČERNILEC iz Naklega, Jelena ĐUKANOVIĆ iz Zgornje Kungote, Marko GOMBAČ iz Postojne, Igor GREŠOVNIK iz Dravograda,

Boštjan HAUPTMAN iz Šmartnega pri Litiji, Janez HOČEVAR iz Trebnjega, Matjaž HORVAT iz Murske Sobote, Sonja JERIČ iz Cerkelj (5 krat), Sarie Ana JUŽNIČ iz Ljubljane, Matej KARAHODŽIČ iz Črnuč, Doroteja KOBAL iz Renč, Robert KOLMANIČ iz Ljubljane, Marija KOSEC iz Cerkelj, Andreja KUKOVIČIČ iz Brestanice, Bojan KLEINDIENST iz Maribora, Jana LAČEN iz Ljutomera, Franja LIPOVŠEK iz Sevnice, Robert MEOLIC iz Bakovcev, Tanja METELKO iz Kopra, Ksenija MIŠIGOJ iz Dobrovega, Milan ORNIK iz Voličine, Izak PODGORNIK iz Ljubljane, Nataša POSEL iz Miklavža, Igor PUSTIŠEK iz Škofje Loke, Damijan SVETINA iz Kranja, Branko ŠČAVNIČAR iz Ljutomera, Mitja ŠTERMAN iz Ajdovščine, Jože ŠRAJ iz Borovnice, Bogdan TERTINEK iz Pekar, Majda TURNER iz Pragerskega, Miha VERGELJ iz Lesc, Robert VREČA iz Maribora, Primož VIZLAR iz Ljubljane, Andrej ZALAR iz Šentjurja pri Celju, neznani bralec iz Podbočja, 21 učencev 6.c razreda osnovne šole Miklavž na Dravskem polju, Joži PINTAR iz Dražgoš, Saša MOHORIČ iz Škofje Loke, Tinka SELIČ iz Šentjurja pri Celju.

Učenci iz Miklavža so nam poslali rešitve — povsem enake — vsak na svoji dopisnici. To je bil kar odvečen napor in delo za pošto. Podobno nam je Sonja iz Cerkelj poslala pet pisem z enako vsebino.

Nagrado, knjigo *Kratka zgodovina astronomije* B.M. Ševarliča, ki je pravkar izšla v zbirki Sigma, smo s pomočjo žreba poslali Damijanu Svetini, Mariji Kosec, Sarie Ani Južnič in 6.c razredu v Miklavž.

Večina reševalcev je šla po isti poti, nekateri so nam poslali več rešitev. Prepisali smo shematično rešitev Andreje Kukovičič.

	8—litrška steklenica	5—litrška steklenica	3—litrška steklenica
začetek prelivanja	8	0	0
1.	3	5	0
2.	3	2	3
3.	6	2	0
4.	6	0	2
5.	1	5	2
6.	1	4	3
7.	4	4	0

Peter Petek

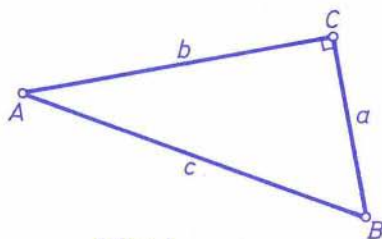
KOTNE FUNKCIJE

Ali bi znali ugotoviti, kako visok je tovarniški dimnik, ki ga vidite vsak dan? Ali kako visoka je stolpnica, ali svetilka javne razsvetljave, ali drevo, ali.. In še mnogo podobnih vprašanj si lahko zastavimo. Odgovor nanje pa utegne biti zanimiv in preprost.

Poskusimo skupaj spoznati *kotne funkcije* in, nenazadnje, odgovoriti na postavljena vprašanja.

Začnimo skupna razmišljanja s ponovitvijo pojmov, ki jih srečamo ob pravokotnem trikotniku.

Pravokotni trikotnik je trikotnik, ki ima en pravi kot (90°). Najdaljšo stranico v pravokotnem trikotniku, ki vselej leži nasproti pravemu kotu, imenujemo *hipotenuza*. Drugi dve sta *kateti*. Na sliki 1 smo kateti označili z a , b , hipotenuzo pa s c . Poznamo tudi Pitagorov izrek: $a^2 + b^2 = c^2$. (Kvadrat hipotenuze je enak vsoti kvadratov obeh katet.)



Slika 1

Spomnimo se, da sta si dva pravokotna trikotnika podobna, če imata en ostri kot enak. Ker sta pravokotna, imata enaka dva kota, to pa že pomeni, da sta si podobna.

Sedaj pa narišimo vsak svoj pravokotni trikotnik, ki bo imel en kot enak $\delta = 30^\circ$. Seveda je takih trikotnikov veliko, izberite si svojega (tistega, ki vam je najbolj všeč). Važno je le, da je pravokoten in da eden izmed ostrih kotov meri 30° . Kot smo označili z δ prav zato, da ostane izbira, v katero oglišče ga postavite, vaša. Sedaj pa pazljivo!

Izračunajte količnik med dolžino nasproti kota $\delta = 30^\circ$ ležeče katete in dolžino hipotenuze. Torej:

$$\frac{\text{dolžina katete nasproti } \delta}{\text{dolžina hipotenuze}}$$

Če ste lepo risali in prav računali, sta dobili $\frac{1}{2}$. Najbrž ni težko uganiti, kako smo lahko uganili vaš količnik, čeprav vemo o vašem pravokotnem trikotniku.

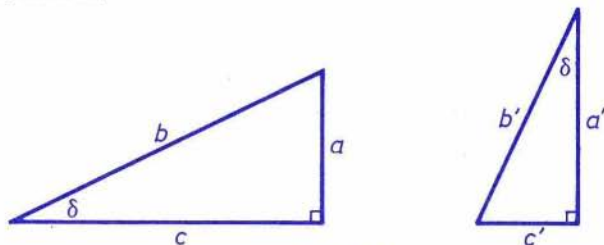
le to, da eden od kotov meri 30^0 . Izračunajte še naslednje količnike:

$$\frac{\text{dolžina katete, priležne kotu } \delta}{\text{dolžina hipotenuze}}$$

$$\frac{\text{dolžina katete nasproti } \delta}{\text{dolžina katete, priležne kotu } \delta}$$

$$\frac{\text{dolžina katete, priležne kotu } \delta}{\text{dolžina katete nasproti } \delta}$$

Dobili smo po vrsti: 0.9, 0.6, 1.7 (približno seveda!). Če bi bili bolj natančni: 0.866..., 0.577..., 1.732... Razvozljajmo to skrivnost, ki sploh ni več skrivnost. Vsi pravokotni trikotniki, ki imajo en ostri kot enak 30^0 , so si podobni, to že vemo. Torej je vaš pravokotni trikotnik podoben našemu. V podobnih trikotnikih so razmerja pripadajočih stranic enaka, torej smo morali vsi dobiti isti rezultat. (Glej sliko 2.)



Slika 2

Vse razmišljanje lahko ponovimo za kakšen drug kot (npr. $\delta = 60^0$, $\delta = 45^0$, $\delta = 32^0$, ...). Spet bi vsi dobili iste količnike, toda pri vsakem kotu drugačne. Ker so ti količniki odvisni le od velikosti kota, jih bomo označili:

$$\sin \delta = \frac{\text{dolžina katete nasproti } \delta}{\text{dolžina hipotenuze}} \quad (\text{beri: sinus})$$

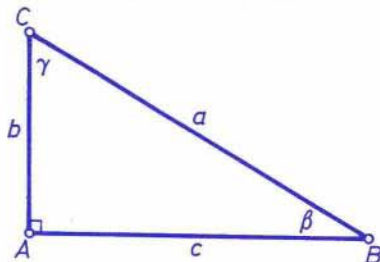
$$\cos \delta = \frac{\text{dolžina katete, priležne kotu } \delta}{\text{dolžina hipotenuze}} \quad (\text{beri: kosinus})$$

$$\operatorname{tg} \delta = \frac{\text{dolžina katete nasproti } \delta}{\text{dolžina katete, priležne } \delta} \quad (\text{beri: tangens})$$

$$\operatorname{ctg} \delta = \frac{\text{dolžina katete, priležne } \delta}{\text{dolžina katete nasproti } \delta} \quad (\text{beri: kotangens})$$

V prejšnjem primeru smo imeli $\delta = 30^\circ$ in smo ugotovili, da je $\sin(30^\circ) = 0.5$, $\cos(30^\circ) = 0.87$, $\operatorname{tg}(30^\circ) = 0.58$, $\operatorname{ctg}(30^\circ) = 1.73$. Podobno bi dobili $\sin\delta$, $\cos\delta$, ..., za kak drug kot δ . Če spremenimo δ , se spremenijo tudi $\sin\delta$, $\cos\delta$... Opravka imamo torej s štirimi funkcijami. To so funkcije kotov in zato *kotne funkcije*.

Da bi si povedano dobro zapomnili, narišimo še enkrat pravokotni trikotnik (slika 3). Kateto nasproti kota β smo označili z b , kateto, ki je priležna kotu β , s c in hipotenuzo z a .



Slika 3

Sedaj lahko napišemo krajše:

$$\sin\beta = \frac{b}{a} \quad \cos\beta = \frac{c}{a} \quad \operatorname{tg}\beta = \frac{b}{c} \quad \operatorname{ctg}\beta = \frac{c}{b}$$

Ker je hipotenuza najdaljša stranica pravokotnega trikotnika, sta funkciji $\sin\delta$ in $\cos\delta$ manjši od 1 za vsak kot δ .

Da bi preverili, če smo povedano dobro razumeli, poskusimo sedaj sami ob sliki 3 napisati s pomočjo stranic, kaj je $\sin\gamma$, $\cos\gamma$, $\operatorname{tg}\gamma$, $\operatorname{ctg}\gamma$. (V pomoč: kateta nasproti kota γ je c .)

Preverimo: $\sin\gamma = \frac{c}{a}$, $\cos\gamma = \frac{b}{a}$, $\operatorname{tg}\gamma = \frac{c}{b}$, $\operatorname{ctg}\gamma = \frac{b}{c}$.

Kotne funkcije imajo mnogo lepih lastnosti:

a) $\sin^2\beta + \cos^2\beta = 1$

(($\sin\beta$)² bomo krajše zapisali kar $\sin^2\beta$)

S pogledom na sliki 3 in po Pitagorovem izreku velja:

$$\sin^2\beta + \cos^2\beta = \frac{b^2}{a^2} + \frac{c^2}{a^2} = \frac{(b^2 + c^2)}{a^2} = \frac{a^2}{a^2} = 1$$

Gotovo boste znali sami preveriti sledeče lastnosti:

b) $\operatorname{tg}\beta = \frac{\sin\beta}{\cos\beta}$ $\operatorname{ctg}\beta = \frac{\cos\beta}{\sin\beta}$ $\operatorname{tg}\beta = \frac{1}{\operatorname{ctg}\beta} = \operatorname{ctg}^{-1}\beta$

Pozorni bralec je ob sliki 3 opazil enakost:

$$\sin\beta = \frac{b}{a} = \cos\gamma$$

Vemo pa, da je $\beta = 90^\circ - \gamma$. To pomeni, da velja lastnost

c) $\sin(90^\circ - \gamma) = \cos\gamma$ za kakršenkoli γ .

Podobno, se pripričajte sami, velja:

$$\cos(90^\circ - \gamma) = \sin\gamma$$

$$\operatorname{tg}(90^\circ - \gamma) = \operatorname{ctg}\gamma$$

$$\operatorname{ctg}(90^\circ - \gamma) = \operatorname{tg}\gamma$$

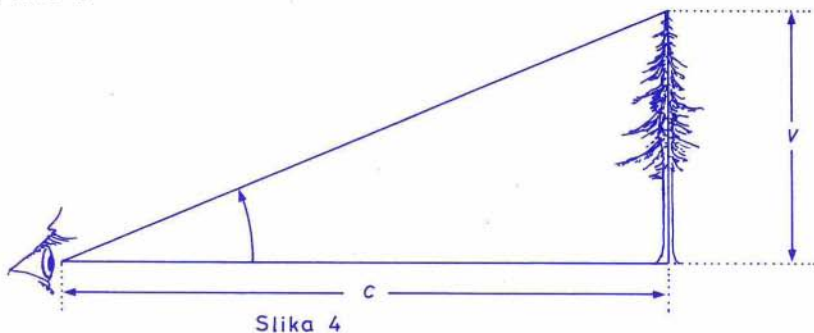
Ne pozabimo, da smo razmišljanje začeli z "zahtevo", da je kot δ med 0° in 90° . Kako bi sicer sploh narisali pravokotni trikotnik? Torej vemo zaenkrat le, kaj so *kotne funkcije* za kote med 0° in 90° (za ostre kote).

Kako bomo v nadaljnjem "dobili" vrednost kotne funkcije za neki določeni kot? Lahko čim natančneje narišemo pravokotni trikotnik z danim kotom, izmerimo dolžine stranic in izračunamo kotni funkciji pripadajoč količnik.

Veliko hitreje bo, če vrednost kotne funkcije odčitamo v tabelah ("logaritemske tablice"). Še enostavneje bo uporabiti računalnik. Našega dogovora, kaj pomeni $\sin\delta$, $\cos\delta$, ... pa nikar ne pozabimo, sicer bomo tudi z najboljšim računalnikom podobni butalcem, ki imajo telefonski imenik brez imen, le številke, pa so vsi srečni, ker imajo najtanjši telefonski imenik, čeprav je popolnoma neuporaben.

Kaj pa vprašanja iz začetka tega kramljanja? Ali smo se sploh naučili kaj uporabnega? Nikar ne odgovarjajmo na vprašanja s še težjimi vprašanji! Raje poskusimo!

Če se postavimo na pravo mesto, bodo "podnožje drevesa", "vrh drevesa" in "naše oči" tvorili pravokotni trikotnik. Še prej izmerimo razdaljo od drevesa do mesta, od koder ga opazujemo. (Torej poznamo dolžino ene katete pravokotnega trikotnika.) Kot, pod katerim vidimo drevo, lahko izmerimo. Glej sliko 4.

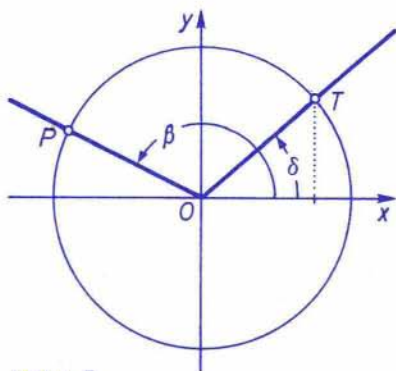


Ali je to dovolj, da določimo višino drevesa (dolžino druge katete)? Vemo, da je $\tan\delta = \frac{v}{c}$, torej $v = c \cdot \tan\delta$. Poznamo c , poznamo δ in znamo izračunati $\tan\delta$, to pa zadostuje za izračun višine drevesa (v).

Kaj če nimamo pri roki kotomerja? Bi znali tedaj določiti višino drevesa, dimnika ...? Poskusite, opišite vaše razmišljanje in nam ga pošljite.

Poglejmo si še eno, zelo nazorno predstavitev kotnih funkcij.

Narišimo koordinatni sistem in krog s središčem v izhodišču ter radijem 1. (slika 5). Narišimo poltrak iz izhodišča, ki oklepa z x osjo kot δ . Presečišče krožnice in poltraka označimo s T . Vztrajni bralec bo kot rezultat lastnega razmišljanja dobil, da so koordinate točke T $(\cos\delta, \sin\delta)$. Ob tej sliki bo gotovo jasen dogovor: $\sin 0^\circ = 0$, $\cos 0^\circ = 1$ in $\sin 90^\circ = 1$, $\cos 90^\circ = 0$. Kar samo se nam ob tej sliki ponuja tudi, kaj naj bo $\sin\delta$ in $\cos\delta$ za kot δ , ki je večji od 90° , ali za negativni kot. Za kakršenkoli kot δ narišemo poltrak, ki z x osjo oklepa kot $|\delta|$ v pozitivni smeri, če je δ pozitiven, in v negativni smeri, če je δ negativen. Najbrž že vemo, da je pozitivna smer obratna smeri urnega kazalca, negativna smer pa je smer vrtenja urnega kazalca. Tedaj je število $\cos\delta$ enako x koordinati, $\sin\delta$ pa y koordinati presečišča poltraka in krožnice. Sedaj torej vemo, kaj je $\sin\delta$ in $\cos\delta$ za kakršenkoli kot δ . Dogovorimo se še: $\operatorname{tg}\delta = \frac{\sin\delta}{\cos\delta}$ in $\operatorname{ctg}\delta = \frac{1}{\operatorname{tg}\delta}$ tudi za δ , ki ni med 0° in 90° .



Slika 5

Večino tega ste ali še boste srečali pri rednem pouku, zato končajmo z nekaj vprašanji za najbolj radovedne.

Ali veljajo lastnosti a), b), c) za vse kote?

Zakaj velja $\sin\delta = \sin(180^\circ - \delta)$?

Zakaj velja $\cos\delta = -\cos(180^\circ - \delta)$?

Zakaj velja $\sin\delta = -\cos(90^\circ + \delta)$?

Zakaj velja $\sin\delta = -\sin(360^\circ - \delta)$?

Zakaj velja $\sin(-\delta) = -\sin\delta$?

Zakaj velja $\cos(-\delta) = \cos\delta$?

Koliko je $\operatorname{tg} 60^\circ$, $\operatorname{tg} 70^\circ$, $\operatorname{tg} 80^\circ$, $\operatorname{tg} 85^\circ$, ..., $\operatorname{tg} 90^\circ$?

Bi znali skicirati grafe kotnih funkcij?

Kako je s kotnimi funkcijami kota, merjenega v radianih?

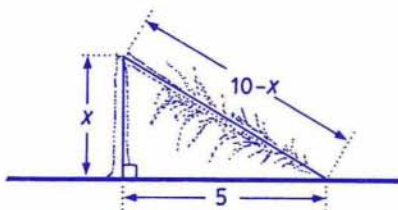
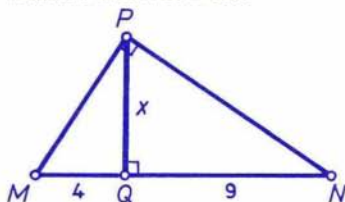
Koliko je $\sin \frac{\pi}{6}$ -rd? ($1^\circ = \pi/180^\circ$ -rd)

Gotovo to niso vsa vprašanja, ki si jih lahko zastavite. Odgovore lahko poskušate poiskati sami ali počakajte, da jih poiščete skupaj pri pouku (mogoče pri krožku).

Marsikaj boste še slišali o kotnih funkcijah. Naj omenim le *kosinusov izrek*, ki ga lahko uporabimo v poljubnem trikotniku. Če so a, b, c stranice poljubnega trikotnika, δ pa kot nasproti stranice a , velja $a^2 = b^2 + c^2 - 2bc \cos\delta$.

7. Iz danih razmerij sledi $a = 3b/8$ in $c = 3b/4$. Obseg tedaj izrazimo z b : $a + b + c = 17b/8 = 34$ cm in dobimo najprej $b = 16$ cm, potem pa še $a = 6$ cm, $c = 12$ cm.

8. Iz skice preberemo enačbo $x^2 + 5^2 = (10 - x)^2$ z rešitvijo $x = 3,75$. Smreka se je torej prelomila v višini 375 cm.



9. Trikotnik MQP in QNP sta podobna, zato velja $4 : x = x : 9$. Višina PQ meri $x = 6$ cm.

10. Površina dane prizme je 162 cm^2 , njena prostornina pa 108 cm^3 . Za iskano dolžino a roba kocke, ki zadošča zahtevam naloge, velja $6a^2 : 162 = a^3 : 108$. Rob iskane kocke meri 4 cm.

Nalogi za vsakogar:

1. Na primer $(9 - 8 + 7 - 6 + 5 - 4 - 3 + 2)$. $1 = 2$, možne pa so še druge rešitve.

2. $9 \ 8 \ 7 \ . \ 1 \ 2 \ 1$

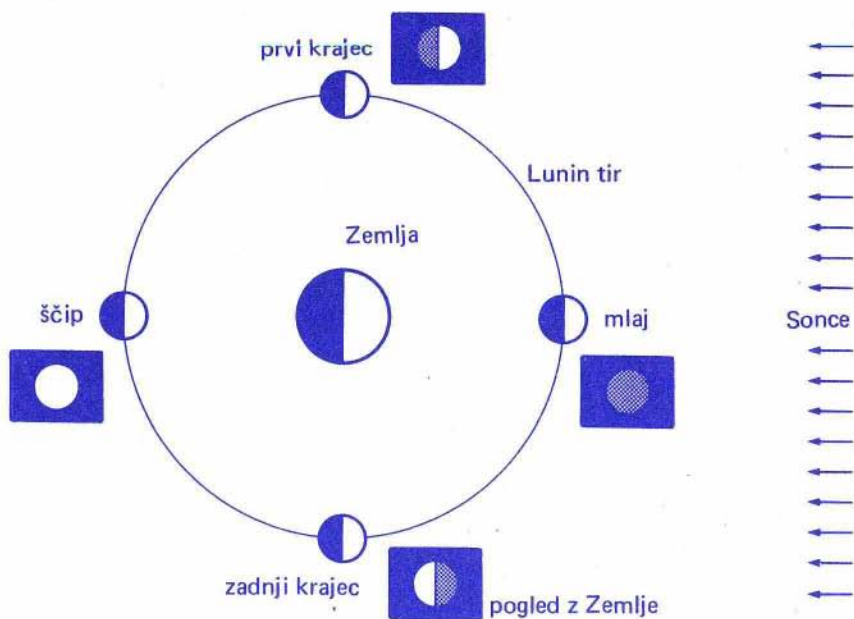
$$\begin{array}{r}
 9 \ 8 \ 7 \\
 1 \ 9 \ 7 \ 4 \\
 9 \ 8 \ 7 \\
 \hline
 1 \ 1 \ 9 \ 4 \ 2 \ 7
 \end{array}$$

*Učitelji matematike in fizike
iz Slovenskih Konjic*

RAZMISLIMO IN NASMEJMO SE !

Ali naš zakon dovoljuje, da se nekdo oženi s sestro svoje vdove?

Izbrali: *Marija Krauthaker
Nadja Ivanc Milošević*



Pesnik je bržkone prečul noč. Vsekakor opisuje hkratni vzhod Sonca in zaton Lune. Sonce in Luna sta tedaj na nasprotnih straneh Zemlje. Če z eno roko pokažemo v smeri Sonca, z drugo pa v smeri Lune, je med rokama iztegnjeni kot. Sonce Luno osvetli mimo Zemlje. Opazovalec vidi polno luno – ščip. Roki, ki kažeta proti Soncu in Luni ob krajcih, oklepata pravi kot, ob mlaju pa je kot med rokama nič, saj sta Sonce in Luna na isti strani Zemlje. (glej sliko na naslovni strani: Kje je umetnik pogrešil?)

Janez Ferbar

RAZMISLIMO IN NASMEJMO SE !

Z avtom se vozite po mestu, v katerem zaradi napake na transformatorju ni elektrike. Na vašo nesrečo tudi luči na avtu ne delujejo. Naenkrat naglo zavrete in se ustavite tik pred nekim črncem. Kako veste, da je črncem, čeprav v mestu ni elektrike in luči na avtu ne delujejo?

NOVE KNJIGE

KNJIŽNICA SIGMA

cene: 67%

100%

1. Vidav I. Rešeni in nerešeni problemi matematike	1500.—	2250.—
8. Bohte Z.: Numerično reševanje enačb	1500.—	2250.—
11. Vidav I.: Števila in matematične teorije	1500.—	2250.—
13. Jamnik R.: Teorija iger	1500.—	2250.—
15. Prijatelj N.: Matematične strukture — 2. del	3400.—	4260.—
19. Lebedinec F., Vadnal A.: Funkcije — 2. del	1500.—	2250.—
20. Uršič S.: Štirimestni logaritmi in druge tabele	1000.—	1500.—
22. Vadnal A.: Rešeni problemi linearnega programiranja	2000.—	3000.—
23. Prijatelj N.: Matematične strukture — 3. del	3900.—	4900.—
24. Batagelj V., Pisanski T.: Rešene naloge iz matematike z republiških tekmovanj — 1. del (1950—1966)	2000.—	3000.—
25. Batagelj V., Pisanski T.: Rešene naloge iz matematike z republiških tekmovanj — 2. del (1967—1975)	2000.—	3000.—
27. Struik D.J.: Kratka zgodovina matematike	2000.—	3000.—
28. Strnad J.: Posebna teorija relativnosti	2000.—	3000.—
31. Rakovec J.: Osnovni pojmi topologije	900.—	1100.—
32. Weinberg S.: Prve tri minute	2000.—	3000.—
33. Prijatelj N.: Osnove matematične logike — 1. del	2000.—	3000.—
34. Laue M. von: Kratka zgodovina fizike	2000.—	3000.—
35. Milanković M.: Kratka zgodovina astronomije - 1. del	2000.—	3000.—
36. Devide V.: Matematika skozi kulture in epohe	2000.—	3000.—
37. Golli B., Žitnik J.: Rešene naloge iz fizike z republiških tekmovanj — 2. del	2000.—	3000.—
38. Grasselli J.: Diofantske enačbe	2000.—	3000.—
39. Rakovec J.: Matematične strukture — primeri in rešene naloge	2000.—	3000.—
40. Polya G.: Kako rešujemo matematične probleme	2000.—	3000.—
41. Mohar B., Zakrajšek E.: Programski jezik pascal	2000.—	3000.—
42. Ševarlić B.M.: Kratka zgodovina astronomije, 2.del, Od Newtona do današnjih dni	2000.—	3000.—

