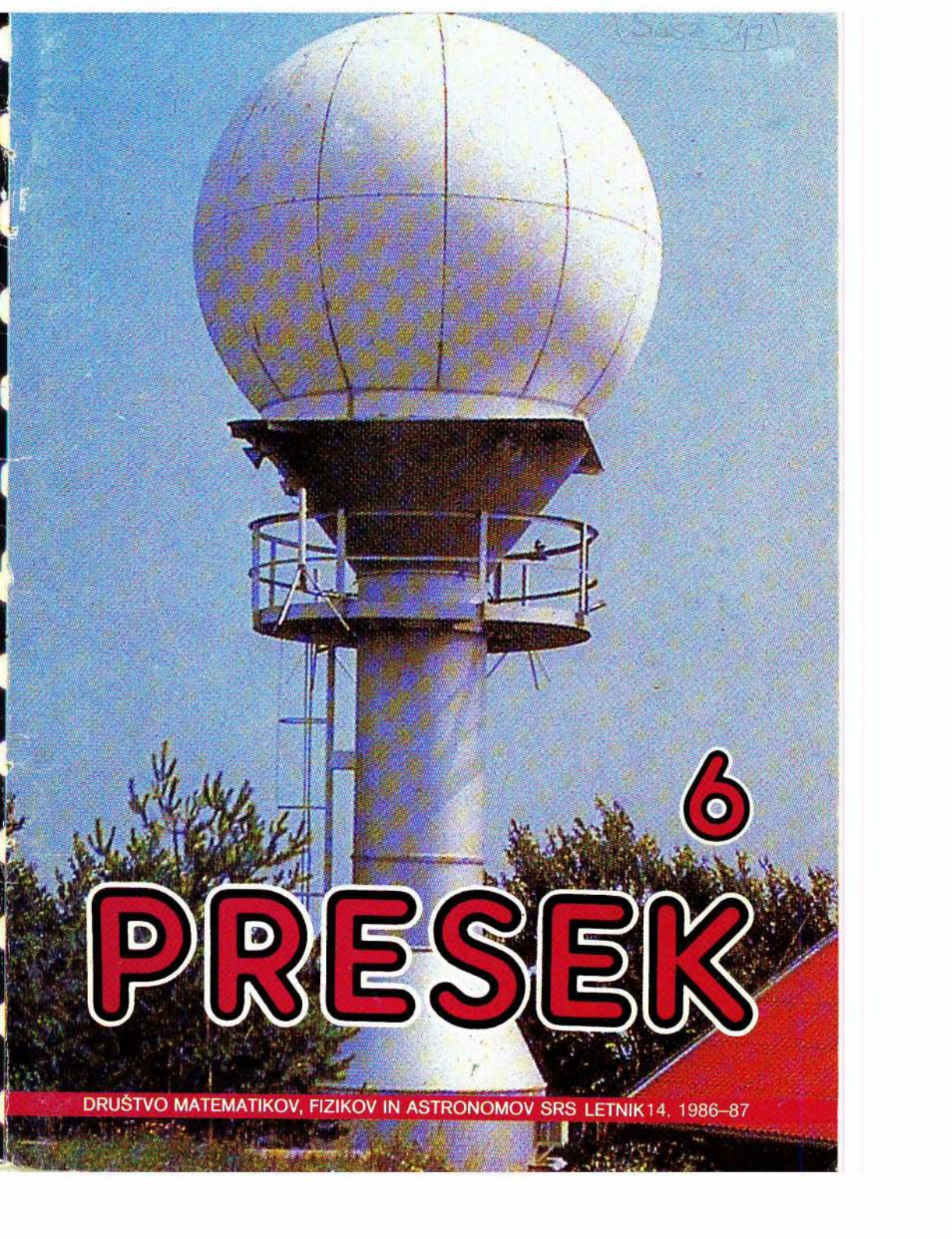




6 PRESEK

DRUŠTVO MATEMATIKOV, FIZIKOV IN ASTRONOMOV SRS LETNIK 14, 1986–87



A. Dürer, *Melanholija*, bakrorez 1514

MATEMATIKA

MAGIČNI KVADRATI

Uvod

Magični kvadrat sestavljajo v kvadratno matriko urejena naravna števila. V njem so vsote števil v vrsticah, v stolpcih in v obeh diagonalah med seboj enake. Lahko tudi zahtevamo, da ima magični kvadrat še kake dodatne lastnosti, npr. da njegovi elementi sestavljajo kako predpisano množico naravnih števil.

Magični kvadrat razsežnosti 4×4 z vsotami 34 na množici $\{1, 2, 3, \dots, 16\}$:

16	3	2	13
5	10	11	8
9	6	7	12
4	15	14	1

srečamo pri renesančnem umetniku in učenjaku Albrechtu Dürerju (1471–1528); ta ga je l. 1514 ovekovečil na bakrorezu "Melanholija".

Iz približno istega razdobja poznamo "kitajski" magični kvadrat razsežnosti 6×6 z vsotami 111 na množici $\{1, 2, 3, \dots, 36\}$:

27	29	2	4	13	36
9	11	20	22	31	18
32	25	7	3	21	23
14	16	34	30	12	5
28	6	15	17	26	19
1	24	33	35	8	10

Za to priložnost je sestavil pisec "šahovski" magični kvadrat razsežnosti 8×8 z vsotami 64:

15	5	4	12	5	11	6	6
6	9	11	9	8	7	10	4
10	6	6	9	9	6	9	9
3	12	11	2	10	8	7	11
5	8	10	8	3	15	8	7
8	8	12	7	1	8	15	5
9	4	8	6	22	4	5	6
8	12	2	11	6	5	4	16

A Dürer ni bil samo velik umetnik, ampak se je uspešno ukvarjal tudi z naravoslovjem, še posebno pa z geometrijo. Objavil je dela o perspektivi in o geometrijskih konstrukcijah z ravnilom in šestilom.

Človeške organe je proučeval z opisno geometrično metodo tako, da jih je projiciral na vse tri projekcijske ravnine.

Ne vem, kako je A. Dürer sestavil upodobljeni magični kvadrat. Morda je bil tedaj že znan kot "Jupitrova mizica"? Morda se je pretolkel do njega z ugibanjem? Morda je uporabil metodo, ki jo je opisal Borut Zalar v 5. številki letošnjega "Preseka"?

Z matematičnega vidika gre pri sestavljanju magičnega kvadrata za reševanje sistema več linearnih enačb s še večjim številom neznank; ob tem pa morajo biti neznanke naravna števila in morajo zadoščati še kakim dodatnim zahtevam.

Za začetek se lotimo magičnih kvadratov dimenzije 3×3 .

Poskusimo sestaviti magični kvadrat razsežnosti 3×3 , ki ima v prvi vrstici števila

$$37 \quad 19 \quad 34$$

Z ugibanjem je križ; lahko, da se nam sploh ne posreči. Pomagajmo si torej z algebro.

Pri sestavljanju magičnega kvadrata razsežnosti 3×3 z vsotami s

$$\begin{array}{ccc} X_1 & X_2 & X_3 \\ Y_1 & Y_2 & Y_3 \\ Z_1 & Z_2 & Z_3 \end{array}$$

je treba v naravnih številih rešiti sistem 8 enačb z 9 neznankami. Sistem enačb in reševanje sta podana v tabelarični obliki. (stran 323)

Iz sistema enačb I eliminiramo neznanke Z_1, Z_2 in Z_3 :

$$Z_1 = s - X_1 - Y_1$$

$$Z_2 = s - X_2 - Y_2$$

$$Z_3 = s - X_3 - Y_3$$

in dobimo sistem enačb II. Iz tega eliminiramo

$$Y_3 = X_1 - X_3 + Y_2$$

in dobimo sistem III. Iz tega eliminiramo

	X_1	X_2	X_3	Y_1	Y_2	Y_3	Z_1	Z_2	Z_3	desna stran enačbe
	1	1	1	1	.	.	.	.	.	s
	2	.	.	.	1	1	1	.	.	s
	3	.	.	.	.	.	.	1	1	s
	4	1	.	.	1	.	.	1	.	s
I	5	.	1	.	.	1	.	.	1	s
	6	.	.	1	.	.	1	.	.	s
	7	1	.	.	.	1	.	.	.	s
	8	.	.	1	.	1	.	1	.	s
	1	1	1	1	.	.	.	.	.	s
	2	.	.	.	1	1	1	.	.	s
	3	1	1	1	1	1	1	.	.	$2s$
II	7	1	.	-1	.	1	-1	.	.	0
	8	-1	.	1	-1	1	.	.	.	0
	1	1	1	1	.	.	.	.	.	s
III	2	1	.	-1	1	2	.	.	.	s
	3	2	1	.	1	2	.	.	.	$2s$
	8	-1	.	1	-1	1	.	.	.	0
	1	1	1	1	.	.	.	.	.	s
IV	2	3	.	-3	3	.	.	.	.	s
	3	4	1	-2	3	.	.	.	.	$2s$
	1	1	1	1	.	.	.	.	.	s
V	2	1	1	1	.	.	.	.	.	s

$$Y_2 = X_1 - X_3 + Y_1$$

in dobimo sistem IV. Iz tega eliminiramo

$$Y_1 = \frac{1}{3} \left(\frac{2}{5} - 4X_1 - X_2 + 2X_3 \right)$$

in dobimo sistem dveh enakih enačb V.

Po primernem izboru vrednosti X_1 , X_2 , X_3 dobimo retrogradno iz eliminacijskih enačb:

$$Y_1 = \frac{1}{3} (-2X_1 + X_2 + 4X_3)$$

$$Y_2 = \frac{1}{3} (X_1 + X_2 + X_3)$$

$$Y_3 = \frac{1}{3} (4X_1 + X_2 - 2X_3)$$

$$Z_1 = \frac{1}{3} (2X_1 + 2X_2 - X_3)$$

$$Z_2 = \frac{1}{3} (2X_1 - X_2 + 2X_3)$$

$$Z_3 = \frac{1}{3} (-X_1 + 2X_2 + 2X_3)$$

Ob zahtevi, da morajo biti neznanke naravna števila, dobimo od tod naslednje navodilo za sestavljanje magičnih kvadratov razsežnosti 3×3 .

Izhajajoč od naravnih števil X_1 , X_2 in X_3 z vsoto $s = X_1 + X_2 + X_3$ lahko sestavimo magični kvadrat, če števila zadoščajo naslednjim pogojem:

1. Vsota s je deljiva s 3.
2. Vsako število je manjše od vsote drugih dveh števil.
3. Veljata neenačbi:

$$2X_1 < X_2 + 4X_3$$

$$2X_3 < 4X_1 + X_2$$

Pri izpolnjenih pogojih je magični kvadrat otročje lahko sestaviti. Izračunati je treba samo $Y_2 = s/3$; vse druge manjkajoče elemente določamo nato v kvadratu samem.

Sestavljanje magičnega kvadrata je še bolj preprosto, če zahtevamo, da naj vsebuje kvadrat 9 zaporednih naravnih števil

$$\{n, n+1, \dots, n+8\}$$

Za sestavljanje kvadrata zadostuje, če predpišemo en sam, ponavadi najmanjši element.

Bralcu prepuščamo, da izvede za sestavljanje takih magičnih kvadratov naslednje navodilo:

1. Izberemo poljubno naravno število n .
2. V polje v središču kvadrata vpišemo $n+4$.
3. V polja na glavni diagonali vpišemo od zgoraj navzdol naraščajoče aritmetično zaporedje z diferenco 1.
4. V polja na stranski diagonali vpišemo od zgoraj navzdol naraščajoče aritmetično zaporedje z diferenco 3.

5. Manjkajoče elemente v drugih poljih izračunamo ob upoštevanju, da so vse vsote enake $3(n + 4)$.

Tako dobimo magični kvadrat:

$n + 3$	$n + 8$	$n + 1$
$n + 2$	$n + 4$	$n + 6$
$n + 7$	n	$n + 5$

Pri tem je n poljubno naravno število.

Alojzij Vadnal

PROFESOR DR. ALOJZIJ VADNAL – UMRL



Profesor dr. Alojzij Vadnal je sprva učil matematiko na srednjih šolah, pozneje pa dolga leta na Ekonomski fakulteti v Ljubljani. Veliko je prispeval k razvoju linearnega programiranja in operacijskega raziskovanja v Sloveniji in s tem omogočil znanstveno podlago reševanja nekaterih problemov gospodarstva. Za te svoje prispevke je dobil leta 1969 Kraigherjevo nagrado. Bil je

častni doktor Univerze E.K. v Ljubljani. Pri Društvu matematikov, fizikov in astronomov SRS je bil deset let predsednik. V knjižni zbirki Sigma je izdal šest del. Veliko je sodeloval pri popularizaciji matematike med srednješolsko mladino z različnimi predavanji. Odkar pa izhaja Presek se je ves čas živo zanimal za njegove probleme in tudi aktivno sodeloval s prispevki. Objavil je naslednje prispevke:

- Začetni pojmi nomografije 2, 16–19, 67–69, 99–101, 133–135
- Linearno programiranje 4, 8–13
- Prvi koraki Sonje Kowalevske v matematiko 8, 197–199
- Skakalnica v Planici 8, 146–150
- Magični kvadrati 14, 321–325.

Rad je pripovedoval o svojih načrtih, tudi o novih člankih za Presek. Žal se objave zadnjega prispevka ne bo mogel več veseliti.

Ciril Velkovrh

VREMENSKI RADAR

Radar je naprava, s katero je mogoče opazovati predmete tudi v temi ali v megli, celo skozi oblake, in to na večje razdalje. Prvič so ga operativno uporabljali v večjem obsegu med drugo svetovno vojno v bitki za Anglijo. Sicer so tudi na drugi vojskujoči se strani že imeli radarje, vendar so bili z razvojem Angleži pred vsemi, saj so že leta 1938 vzpostavili mrežo radarjev, resda takrat še majhnih moči in dosegov. Toda že leta 1940 so zgradili prvi moderni radar z močjo 20 kW, ki je deloval na valovni dolžini 10 cm. Tega leta so npr. Nemci uporabljali radarje s še dosti daljšo valovno dolžino: elektromagnetno valovanje, ki ga je oddajal in sprejemal takrat nemški radar, je imelo valovno dolžino 50 cm.

V tem prispevku bomo opisali uporabo radarja, ki je v marsičem prav nasprotna prvotni: z *vremenskim radarjem* ne želimo "gledati" skozi oblake, temveč prav oblake same. Da pa bomo mogli razumeti, zakaj eni radarji "vidijo" skozi oblake, drugi pa ne, moramo povedati, kako radar sploh deluje. To je naprava, ki oddaja elektromagnetne valove v kratkih sunkih, potem pa te valove spet sprejema, če se seveda odbijejo od kakega objekta nazaj proti radarju. Iz primerjave med oddano in nazaj sprejeto močjo elektromagnetnega valovanja sklepamo na velikost in odbojnost tistega objekta, iz časa, ki preteče od oddaje do sprejema, pa na njegovo oddaljenost. Tak je osnovni način dela radarja.

Vremenski radarji delajo z elektromagnetnim valovanjem valovne dolžine λ nekaj centimetrov in navadno dosegajo oblake, oddaljene nekaj sto kilometrov. Oddajajo moč P_o okrog 200 kW, *antensko ojačenje* G_o za oddajanje in G_A za sprejemanje pa je pri moderno zasnovanih radarjih tako, da je v izbrani smeri, kamor je obrnjena antena, nekaj tisočkratno v primerjavi z anteno, ki bi oddajala enakomerno na vse strani ali sprejemala iz vseh strani. Po odboju ali sipanju valovanja na kakem objektu (oblaku) je nazaj sprejeta moč P_A . Radarska enačba pove, kakšno je razmerje med sprejeto in oddano močjo po odboju ali sipanju na objektu, ki ima navidezni, efektivni sipalni presek σ_e in je oddaljen za r :

$$P_A/P_o = G_o G_A \sigma_e \lambda^2 / [(4\pi)^3 r^4]$$

Odvisnost od $1/r^4$ ima dva vzroka: $1/r^2$ je posledica tega, da gostota moči sla-

bi s kvadratom razdalje, še en faktor $1/r^2$ pa je posledica tega, da stožčast radarski curek na večji oddaljenosti preiskuje vedno večje preseke (glej sliko 1).

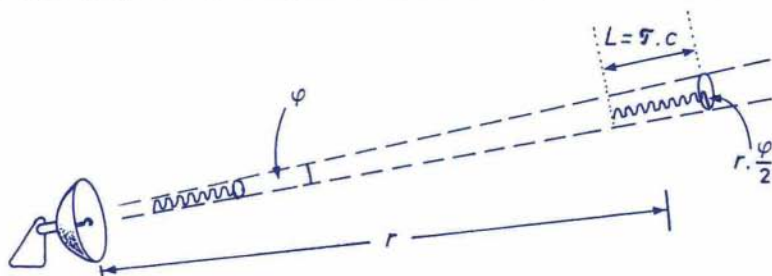
Oceno za velikost razmerja P_A/P_0 dobimo, če izberemo radar z valovno dolžino $\lambda = 5$ cm, z antenskim ojačenjem $G_0 = G_A = 5000$ in oddaljenost objekta $r = 200$ km. Tedaj imamo:

$$P_A/P_0 = 2 \times 10^{-20} \text{ m}^{-2} \sigma_e$$

Ker tudi edina meteorološka količina v tem izrazu, σ_e , ni zelo velika, mora biti radar sposoben zaznavati tudi zelo majhne moči P_A .

V oblakih seveda ni velikih trdnih predmetov, ki bi kot celota tvorili primerno odbojno površino z efektivnim sipalnim presekom σ_e . V njih so drobne *kapljice* različnih velikosti — ali *ledeni kristalčki*, prav tako različnih velikosti in oblik, ali pa mešanica obojega. Včasih celo *sodra* ali *toča*. *Oblačni delci*, to je tisti, ki so tako drobni, da bolj ali manj lebdiijo v oblakih, in *padajoči delci* ne odbijajo elektromagnetnega valovanja vsi enako. Tekoče vodne kapljice imajo drugačne lastnosti glede odboja in sipanja, kot če bi bile prav tako velike kroglice v obliki ledu. Važna je tudi velikost, saj o načinu sipanja odloča tudi to, kolikšen je delec v primerjavi z valovno dolžino vpadlega valovanja.

Elektromagnetnega valovanja skoraj ne motijo delci, ki so precej manjši od valovne dolžine. V oblakih je največ oblačnih delcev: vodnih kapljic ali kristalčkov s premerom nekaj mikrometrov ali nekaj deset mikrometrov. Pada-

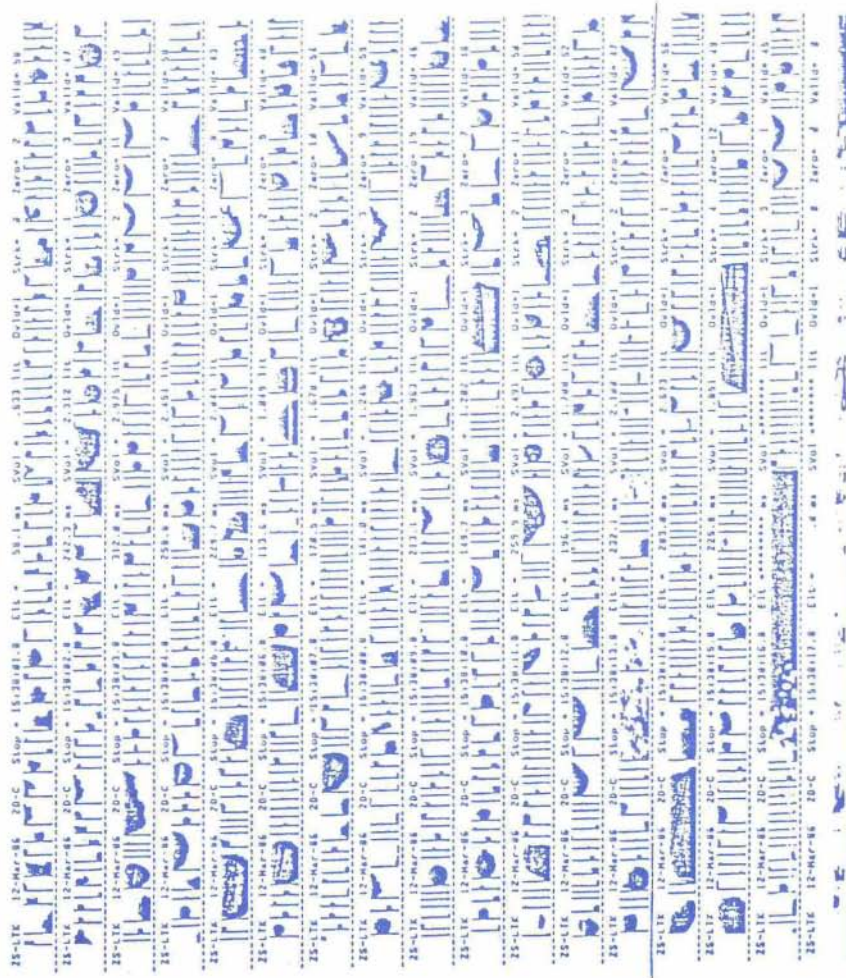


Slika 1. Dolžina radarskega sunka je enaka poti, ki jo naredi valovanje v času trajanja sunka: $L = \tau c$ (c je hitrost svetlobe). Ker traja sunek ponavadi okrog $3 \mu\text{s}$ in je hitrost valovanja 300 tisoč kolometrov na sekundo, je L okrog 1 km. Osnovni volumen ali "bin", ki ga z enim sunkom preiskuje radar, je tem večji, čim dlje od radarja je ta bin, kajti osnovna ploskev narašča s kvadratom oddaljenosti r , tako da velja $V = L \cdot (r \cdot \phi/2)^2$. V resnici en bin preiščejo z več zaporednimi odboji, tako da je podatek iz enega bina v resnici povprečje več podatkov.

joči delci merijo od nekaj desetink milimetra do nekaj milimetrov: večje kapljice dežja se namreč ob padanju razletijo na manjše. Radarjem pri valovni dolžini nekaj deset centimetrov oblaki s svojimi lebdečimi oblačnimi in padajočimi delci ne predstavljajo ovire. Za opazovanje oblakov samih pa moramo izbrati radarje z majhno valovno dolžino. Radarsko valovanje z valovno dolžino en milimeter bi motilo tudi najdrobnejše kapljice, zato so izbrali kot najprimernejše valovanje z valovno dolžino nekaj centimetrov. Radarji, ki delajo pri tej valovni dolžini, "vidijo" debelejšje kapljice, še posebno dobro pa velika zrna toče. Skozi meglo in oblake, v katerih so samo drobne kapljice, pa še vedno zadovoljivo "vidijo". Imeti morajo tudi dokaj ozek *radarski snop*, da z njim preiskujemo posamezne dele oblakov: tako majhne dele oblakov, da zanje smemo privzeti, da so v njih oblačni in padajoči delci vsaj približno enakomerno porazdeljeni in vsaj približno enakih lastnosti.

Curek, ki ga odda radar, zavzema stožec, ki ima pri vrhu le okoli 2° . Premer tega snopa na oddaljenosti 100 km je manj kot 2 km. Radarski sunek traja okrog $3 \mu s$, v tem času pa valovanje, ki se razširja s svetlobno hitrostjo prepotuje 1 km. To pomeni, da od enega sunka dobimo iz oddaljenosti 100 km skupen odboj od vsega, kar je v prostoru s prostornino manj kot $1 km^3$. Oblaki so seveda dosti večji, zato tedaj, kadar dobimo kakšen odboj, precej upravičeno predpostavimo, da so po vsem omenjenem prostoru, imenovanem tudi *bin*, enakomerno razporejeni oblačni in padajoči delci. Na robovih oblaka, ko je en del bina v oblaku, drugi pa ne, je zaradi te predpostavke napaka pač nekaj večja.

Oblačni delci nastajajo ali s kondenzacijo vodne pare v drobne kapljice ali pa s "sublimacijo" v drobne ledene kristalčke. Sprva se okrog *higroskopnih jeder*, to je takih, ki se rada omočijo in vpijajo vodo, ustvarijo le gruče nakaj deset ali nekaj sto molekul vode. V prenasičenem zraku rastejo naprej z nadaljnjim izločanjem vodne pare, ko so delci že malo večji, pa rastejo kristalčki na račun kapljic, če v oblaku obstajajo tako eni kot drugi. Tista količina vodne pare v okolici, ki je za kapljice ravno pravšnja, da te ne bi ne rastle niti izhlapevale, je namreč za ledene delce že precej prenasičena: ledeni delci se debelijo in pobirajo vodno paro; ker je zmanjkuje, pa kapljice izhlapevajo, da jo nadomestijo. Tako imamo stalen tok pare od kapljic proti kristalčkom in ta način je ponavadi v oblakih, v katerih je temperatura nižja od $0^\circ C$, najučinkovitejši način rasti oblačnih delcev. Šele večji delci, ki zaradi svoje večje teže sorazmerno hitro padajo, rastejo tudi tako, da med padanjem zadevajo ob druge, bolj ali manj lebdeče delce. Ob trkih se sicer ne zlije ali sprime vsa masa drobnejših delcev, vseeno pa je večji delec pridobi precej. Na ta način predvsem rastejo zrna sodre in toče.



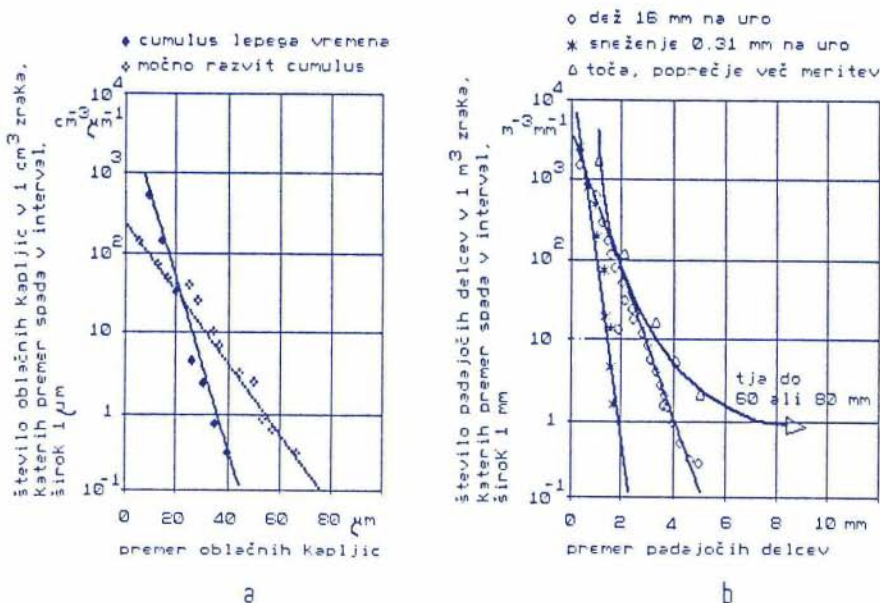
Slika 2. Takole sliko velikosti delcev v oblaku dobimo po računalniški obdelavi podatkov, ki jih zbere na posebnem letalu nameščena naprava, ki jemlje vzorce v oblaku. Vidimo, da so v oblakih delci najrazličnejših velikosti: drobnih je več, večjih pa manj.

Ob vsej tej množici različno velikih delcev v oblakih (slika 2) imamo torej *zvezni spekter* (glej Presek 13, str. 322–333) kapljic oziroma kristalčkov po velikosti. Na sliki 3 vidimo nekaj primerov takih spektrov, posebej za oblačne delce, ki so manjši od 100 μm , posebej pa za padajoče delce, ki tvorijo padavine, če pridejo do tal. Ob množico takih delcev trči radarski snop in se na njih siplje v razne smeri in z različno učinkovitostjo. Efektivni sipalni presek nazaj proti radarju je potemtakem vsota prispevkov sipanj s posameznih delcev, ki se nahajajo v enem binu, v volumnu, ki ga naenkrat kot celoto preiskuje radarski sunek.

Za posamezni delec je efektivni sipalni presek odvisen od velikosti tega delca, in sicer je sorazmeren s šesto potenco premera delca. Za posamezne delce, ki niso veliki v primerjavi z valovno dolžino elektromagnetnega valovanja, je *Rayleigh* izračunal za sipalni presek izraz:

$$\sigma_R = \pi^5 K^2 D^6 / \lambda^4$$

Pri tem je K odvisen do optičnih lastnosti delca, ki so za led drugačna kot za



Slika 3. Če razvrstimo delce v oblakih po velikosti, dobimo spekter, kar nam pove, kolikšno je število delcev v posameznem razredu velikosti. Slika a kaže spekter oblačnih delcev s premerom pod 100 μm , b pa padajočih delcev, ki so večji. Največje dežne kapljice so velike nekaj mm, saj se še večje predvsem zaradi zračnega upora kaj hitro razletijo.

vodo v tekočem stanju. Skupno sipanje je posledica vseh posameznih sipanj.

Radarski odboj je torej odvisen od tega,

1. kako velik je volumen, ki ga naenkrat preiskuje en radarski sunek,
2. kolikšno je število oblačnih in padajočih delcev v tem volumnu,
3. kako so ti delci porazdeljeni po velikosti (kakšen je spekter delcev),
4. v kakšnem agregatnem stanju so ti delci (kakšne so optične lastnosti K za delce),
5. kakšna je valovna dolžina elektromagnetnega valovanja, s katero dela radar,
6. in še od nekaterih pomembnih stvari.

Pri običajnih radarjih imamo za vse te vplive na volje le en sam podatek o razmerju med sprejeto in oddano močjo. Zato je razumljivo, da v radarsko meteorologijo vpletamo še spoznanja o dogajanjih v oblakih. Iz slike 4a vidimo, da imajo vodne kroglice izbrane velikosti enak sipalni presek kot ledene kroglice neke druge velikosti. Tudi majhno število velikih kapljic lahko enako siplje kot veliko število majhnih kapljic in tako naprej. Zato uporabljamo še podatke o poteku temperature, vlažnosti in vetra z višino, ki jih izmerimo z *radiosondami* na dvigajočih se balonih. Učinkovito si pomagamo tudi z računalniškimi modeli, saj z njimi z numeričnimi simulacijami do neke mere ugotavljamo, kakšen "bi moral biti" oblak, ki je nastal v določenih okoliščinah v ozračju. Za podrobnejše spoznavanje *fizike oblakov* v svetu uporabljajo tudi posebej opremljena letala, ki v oblakih samih jemljejo vzorce delcev in merijo tudi druge meteorološke količine. Na tleh so ponekod mreže *dežemerov*, tudi takih, ki zapisujejo časovni potek jakosti padavin. *Točemer*i so naprave, na katerih osta-

Preglednica tehničnih karakteristik meteorološkega radarja WR 100-2/77 na Lisci nad Sevnico

Proizvajalec: Enterprise Electronics Corp., Alabama, USA

valovna dolžina	5,3 cm (t.im. C pas)
širina radarskega snopa	1,1 stopinje
čas trajanja sunka	3 μ s
pogostost sunkov	255 s ⁻¹
največja moč	250 kW
občutljivost	103 dBm
doseg	450 km
čas, potreben za pregled celotnega ozračja v dosegu radarja	okrog 5 minut

V radar sam je vgrajen predprocesor, ki digitalizira radarske podatke.

Pri radarju sta še dva računalnika Iskra Delta D-340/10 s programsko opremo za opazovanje in arhiviranje podatkov o oblakih ter za operativno vodenje obrambe proti toči.

nejo tako ali drugače ohranjene sledi o tem, koliko in kako velika zrna toče so padla nanje. Vse te informacije povezujemo pri proučevanju fizike oblakov s podatki, ki jih daje radar, pa tudi s splošnim vremenskim dogajanjem, ki je vzrok za nastanek posameznih vrst oblakov.

Tudi sama radarska tehnika izboljšuje informacije. *Dopplerjev radar* poleg oddaljenosti in odbojnosti oblaka meri tudi valovno dolžino odbitega elektromagnetnega valovanja in iz tega določa komponente hitrosti delcev, na katerih je prišlo do sipanja. Mreža vsaj treh Dopplerjevih radarjev daje tridimenzionalno sliko gibanja oblačnih in padajočih delcev.

Kapljice pri padanju niso okrogle, temveč odspodaj zaradi zračnega upora vbočene. Če jih torej gledamo z radarjem, ki dela z valovanjem, ki je omejeno le na vertikalno ravnino, dobimo drugačen odboj, kot če jih gledamo z radarjem, katerega valovanje je omejeno na horizontalno ravnino. Ker rečemo, da je valovanje, ki valovi le v eni ravnini, polarizirano, se imenuje radar, ki lahko meri na oba opisana načina, *radar z dvojno polarizacijo*. Z njim lahko delno ločimo vodne kapljice od ledenih delcev, ki pri padanju niso deformirani,



Slika 4. Sipalni presek kroglic ledu je odvisen od velikosti in od valovne dolžine elektromagnetnega valovanja.

- Pri radarju, ki dela z valovno dolžino 10 cm, je efektivni sipalni presek za 2,5 cm velike kroglice ledu enak sipalnemu preseku za 1,7 cm velike kroglice vode.
- Če pa imamo možnost uporabiti tudi radar z valovno dolžino 3,3 cm, bi dobili za 2,5 cm velike kroglice ledu efektivni sipalni presek 4 cm², za 1,7 cm velike kroglice vode pa le 0,1 cm². Tako razločimo z vodo oblita zrna toče od povsem suhih zrn toče.

ali pa določamo hitrost padanja kapljic: pri večji hitrosti so bolj deformirane.

Precej zapleteni so tudi radarji, pri katerih je mogoče izbirati valovno dolžino oddanega valovanja. Takí *radarji z več valovnimi dolžinami* dokaj dobro ločujejo odboj na ledu od odboja na vodi. Tako lahko ločimo ledene kristalčke od kapljic ali pa točo od snežink (glej sliko 4).

Brez računalnikov ob vsej zapletenosti merjenj pri modernih radarjih v meteorologiji ne gre. Radarske podatke je pogosto treba proučevati tudi za nazaj, da si pojasnimo kak pojav. Ker radar zbere v kratkem času ogromno podatkov iz velikega števila binov v prostoru, je treba te podatke urejeno arhivirati, da vemo, kateremu delu prostora in kateremu času pripadajo. Radarji se uporabljajo tudi pri obrambi proti toči. Tudi tam je potreben računalnik, ki je povezan z radarjem. Ta glede na podatke radarja po vnaprej postavljenih postopkih avtomatično vodi izstreljevanje raket. Računalnik izračuna, koliko raket je treba iz posameznih izstrelišč izstreliti v dele oblaka. Operaterju obrambe ostane le še, da po UKV zvezah o tem obvesti strelce in potem v računalnik vstavi sporočilo o izstrelitvi. S snovmi, ki jih rakete razpršijo v izbranem delu oblaka, skušajo vplivati na rast ledenih zrn in tako točo vsaj omiliti.

Jože Rakovec

NALOGE k članku na str. 305

1. V skladu S1 imamo števila, ki smo jih vstavljali v naraščajočem vrstnem redu. Prestavi jih v sklad S2 tako, da bodo tam razvrščena, kot da bi jih vstavljali v padajočem vrstnem redu. Pri tem smeš uporabljati le osnovne operacije nad skladom.

2. Druga naloga je podobna prvi, le da hočemo števila iz sklada S1 predstaviti v sklad S2 tako, da bodo v S2 razvrščena enako kot v S1. Pri tem lahko uporabiš pomožni sklad S3 in osnovne operacije nad skladom.

3. V skladu S1 imamo števila v poljubnem vrstnem redu. S pomočjo pomožnega sklada S3 in osnovnih operacij nad skladom jih razvrsti v sklad S2 tako, da bodo v skladu S2 urejena padajoče.

Pošljite nam rešitve. Najboljše bomo objavili.

Matija Lokar

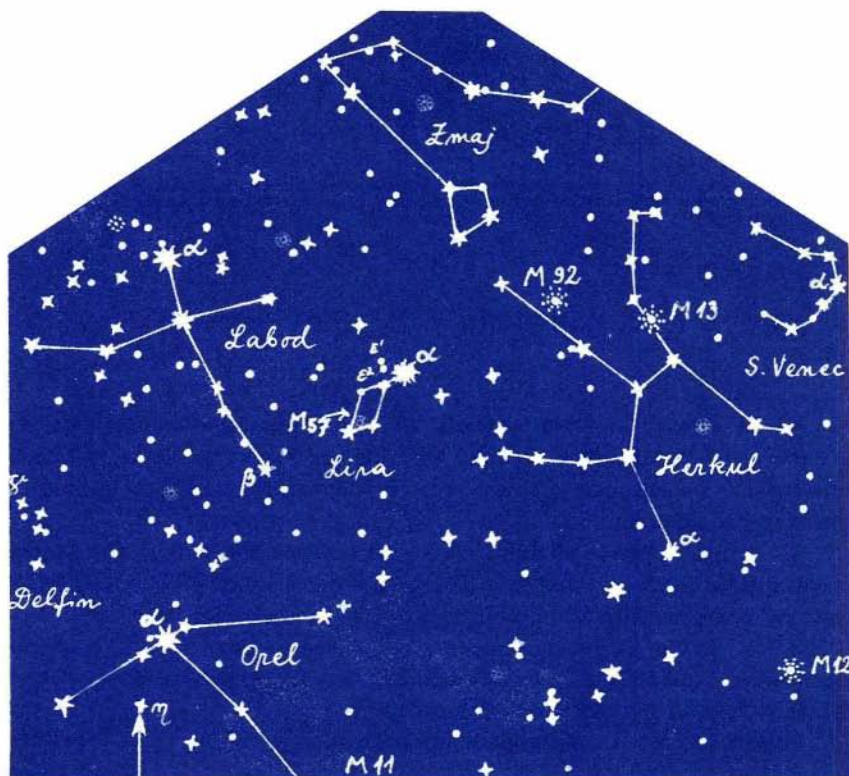
ASTRONOMIJA

ZVEZDA, KI PULZIRA

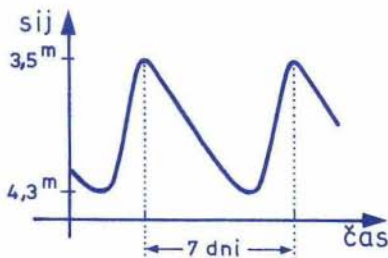
V prvi številki letošnjega PRESEKA si lahko prebral sestavek o zanimivi zvezdi Algol, ki tako spreminja sij, kakor da bi mrkala. Si opazoval to zvezdo, kot smo ti predlagali in svetovali? Si zaznal spremembo njenega sija?

Če tedaj nisi imel možnosti, boš pa morda v poletnih počitnicah našel čas za podobno opazovanje. V jasnih poletnih nočeh, ko ni hladno, je prav zanimivo, še bolj pa romantično, opazovati zvezde.

Tokrat ti predlagamo, da opazuješ zvezdo *Eta* (η) v ozvezdju *Orla* in

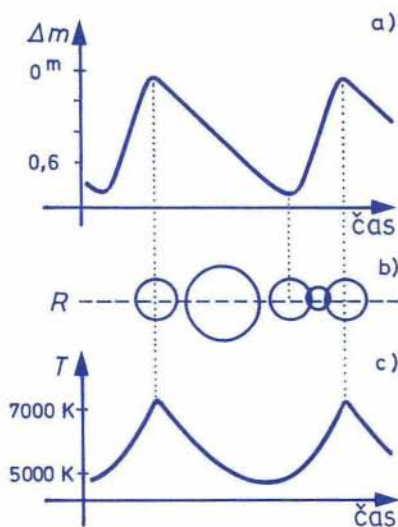


Slika 2. Graf kaže, kako niha sij kefeide η Orla. S pozornim in vztrajnim opazovanjem spremembo sija te zvezde zagotovo ugotoviš s prostim očesom, z daljnogledom pa še bolje.



poskušaš ugotoviti spremembo njenega sija. To zvezdo brez težav izslediš s prostim očesom (slika 1). Opazuješ jo lahko tudi z daljnogledom, ki pa ga moraš postaviti na trdno stojalo. *Eta Orla* je znana *spremenljivka*, to je zvezda, ki spreminja sij (svetlobo). K spremenljivkam spada tudi Algol, vendar ima *Eta Orla* povsem drugačne lastnosti kot Algol. *Eta Orla* je namreč *kefeida*.

Kefeide so orjaške zvezde, več desetkrat večje od našega Sonca. Se krčijo



Slika 3. Spreminjanje sija (a), polmera (b) in površinske temperature (c) kefeide — shema. Poznamo kefeide, katerih sij niha s periodo enega do več deset dni. Kefeide spadajo k orjaškim zvezdam. *Eta Orla* ima na primer okoli 50—krat večji polmer od polmera našega Sonca, sama zvezda pa pulzira z amplitudo okoli 5 polmerov Sonca.

Slika 1. Značilna ozvezdja poletnega neba. Vrisali smo lego nekaj vesoljskih objektov, ki jih lahko opazuješ z daljnogledom.

M12, M13, M92 — kroglaste zvezdne kopice;

ϵ_1 in ϵ_2 Lire — dvojna zvezda z razmikom med zvezdama 3,5' (loči prosto oko);

γ Delfina — dvojna zvezda (10'');

β Laboda — dvojna zvezda (35'');

η Orla — spremenljivka, kefeida s periodo spreminjanja sija 7,2 dni.

in širijo, to je, spreminjajo svojo velikost, točneje polmer. Drugače rečemo, da take zvezde *pulzirajo (utripajo)*. Pri pulziranju se jim spreminja površinska temperatura. Od temperature pa je tudi odvisna oddana svetlobna moč zvezde. Pulziranje je periodični pojav. Oddana svetlobna moč kefeide torej enakomerno niha in zato tudi svetloba, ki z zvezde pade v naše oko. Ko pozorno opazujemo tako zvezdo, kot je na primer η Orla, lahko ugotovimo, da se ji sij periodično spreminja — niha. Perioda nihanja sija Eta Orla je okoli en teden (slika 2). Poskusi se na lastne oči prepričati, da η Orla res spreminja sij. V jasni noči zlezi v spalno vrečo, leži v travo ali pa na udobno klop in čez kake pol ure, ko se oko že dobro privadi teme in je vse bolj občutljivo, začni z opazovanjem. Pomembno je le, da ugotoviš spremembo sija glede na okoliške zvezde, ki sija ne spreminjajo. Opazuj Eta Orla več zaporednih večerov (noči), vsak večer pa vsaj nekaj ur. Najbolje jo opazuješ okoli časa njenega največjega sija, ki pa ga poskusi ugotoviti kar sam. Če boš to zvezdo vztrajno in pozorno opazoval, boš zagotovo zasledil spremembo sija. Pa dosti sreče, še več pa užitka in sprostitve pri opazovanju v tišini nočne narave!

Marijan Prosen

OBVESTILO TEKMOVALCEM ZA VEGOVA PRIZNANJA

Ker nas v pismih večkrat sprašujete, kje in na kakšen način se vam osvojena Vegova priznanja upoštevajo pri nadaljnjem šolanju, vam moramo povedati tole:

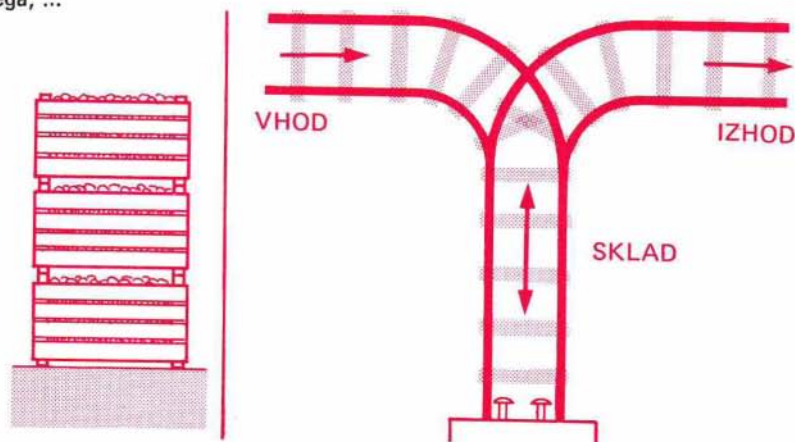
Na srebrnih in zlatih Vegovih priznanjih je zapisano priporočilo srednjim šolam in delovnim organizacijam ter družbenopolitičnim skupnostim, naj vaš uspeh upoštevajo pri podeljevanju štipendij oziroma preizkusih znanja pred vpisom v srednje šole. To priporočilo pa institucij ne obvezuje, naj tako tudi ravnajo.

V preteklem šolskem letu, ko smo sprejemali novi Pravilnik o tekmovanju za Vegova priznanja, je Strokovni svet SR Slovenije za vzgojo in izobraževanje izoblikoval mnenje, da se lahko med kriteriji za vpis v 1. letnik srednjega izobraževanja upošteva zlato Vegovo priznanje, ki ga učenec osvoji v 8. razredu. Odločitev o tem, ali se bo to priznanje upoštevalo ali ne, pa sprejme PIS (Posebna izobraževalna skupnost) vsake usmeritve. Tako so bili v lanskem letu učenci, ki so se vpisali recimo na naravoslovno matematične šole, oproščeni sprejemnega izpita iz matematike, lahko pa bi (če bi PIS tako določil) na sprejemnem izpitu dobili le določeno število dodatnih točk. Podobno prednost so imeli nagrajeni tekmovalci fiziki, če so se uvrstili med nagrajence republiškega tekmovanja.

Aleksander Potočnik

PODATKOVNA STRUKTURA SKLAD

S pojmom sklad se v vsakdanjem življenju dokaj pogosto srečamo. Tako se v jeseni v kletih pojavijo zaboječki s krompirjem in jabolki, zloženi drug na drugem v sklad, železničarji imenujejo sklad razporeditev tirov, ki jim omogoča prestavljanje vagonov, v kuhinjski omarici so krožniki zloženi eden vrh drugega, ...



Tudi v računalništvu se pogosto srečamo s pojmom sklada. Pravimo, da je sklad ena osnovnih **podatkovnih struktur**. In kaj sploh je podatkovna struktura? Najkrajše jo lahko označimo kot skupino podatkov, nad katerimi lahko izvajamo določeno operacije. Definicija sicer ni povsem natančna, tudi pomanjkljiva je, a bo za našo rabo povsem zadostna.

Če hočemo torej predstaviti sklad, moramo ugotoviti, katere so operacije, ki so za sklad najbolj značilne. Odpravimo se zato v skladišče, kjer je gotovo veliko skladov zabojev. Postavimo se tja v kot, da ne bomo v napoto, in opazujemo. Pripeljal je tovornjak, naložen s štedilniki. Viličarji ga razkladajo. Prvi zaboj gre na tla, drugega položijo nanj, na tega spet tretjega, ... Mimo pride skladiščnik in nekaj razburjeno vpije. Nekaj je narobe. Aha! Štedilnik, ki so ga naložili kot drugega, ne spada sem, ker je druge vrste. Kaj pa sedaj? Karven se ga ne da potegniti, saj so nad njim naloženi še trije štedilniki. Zato viličar odstrani zgornji štedilnik, ki je bil naložen zadnji, nato naslednjega, še enega in šele sedaj pride na vrsto napačni zaboj. En viličar ga odpelje, drugi pa na

loži preostale tri zaboje v sklad. Vidimo, da zaboje jemljejo iz sklada ravno v obratnem vrstnem redu, kot so jih nanj nalagali. In to je tudi glavna značilnost sklada: element, ki prej pride v sklad, ga zapusti kasneje. Zato v tuji literaturi sklad imenujejo tudi LIFO seznam. LIFO je kratica za **Last In First Out**. Sklad je torej seznam, kjer element, ki gre zadnji "noter", pride prvi "ven". Pa še eno značilnost sklada smo lahko opazili v skladišču. Vse, kar se s skladom dogaja, se dogaja na enem koncu. Na istem koncu nalagamo elemente, z istega konca elemente jemljemo. Zato ta konec zasluži posebno ime. Imenujemo ga **vrh** sklada.

Katere bodo torej operacije, ki jih bomo izvajali nad skladom? Najprej si moramo prostor za sklad pripraviti. Ustrezno operacijo bomo imenovali kar **PRIPRAVI**. V sklad vstavljamo in iz njega jemljemo elemente. To bosta izvajali operaciji **VSTAVI** in **ODSTRANI**. Seveda lahko iz sklada jemljemo elemente le toliko časa, dokler ta ni prazen. S pogojem **PRAZEN** bomo kontrolirali, če je v skladu še kaj elementov. Pogosto nas zanima tudi to, kateri element je na vrhu sklada. To operacijo bomo imenovali **VRH**.

Operacije smo tako določili. Še vedno pa nismo nič rekli o tem, zakaj sklad uporabljamo v računalniku in kako ga v računalniku sploh predstavimo. Odložimo to še za trenutek in pogledjmo, kako bi formalno opisali podatkovno strukturo sklad.

V prvem delu predstavitve strukture, označenem s **declare**, naštejemo operacije, ki jih lahko nad to podatkovno strukturo izvajamo, v drugem delu, označenem s **where**, pa bomo našteali pravila, ki jih morajo te operacije upoštevati. Kakorkoli potem predstavimo sklad v računalniku in na kakršenkoli način te operacije sestavimo kot procedure, mora ta predstavitev zadoščati naštetim pravilom. Omenimo le operacijo "**Prazen**", katere rezultat je logična vrednost, ki jo bomo označili z Boolean. Oznako za ta tip si bomo sposodili iz programskega jezika pascal. Izraz tipa Boolean lahko zavzame dve vrednosti, pravilno (true) ali napačno (false).

Sklad je tako definiran in ga lahko uporabimo. Vrste uporabe sklada so v računalništvu številne. Tako brez sklada ne moremo speljati rekurzije, uporabljamo ga pri izračunu izrazov, služi nam za označevanje vrstnega reda obdelovanja podatkov, kjer moramo določene korake opraviti šele kasneje, ko so izpolnjeni drugi pogoji. Pogledjmo si primer. Denimo, da izvajamo nalogo A. Med izvajanjem pa pridemo do točke, ko moramo najprej opraviti nalogo B, da bi z nalogo A lahko nadaljevali. Zato se lotimo naloge B. Še prej pa si moramo zapomniti, kje moramo nadaljevati, ko bomo končali z nalogo B. Zato v sklad shranimo potrebne podatke iz naloge A. Pri opravljanju naloge B pa moramo spet najprej izvesti nalogo C. Spet shranimo ustrezno informacijo v sklad

structure sklad

(* struktura "sklad" nad poljubno zalogo vrednosti tipa "podatek"*)

begin

declare

(*pripravi prazen sklad *)

pripravi: $\emptyset \Rightarrow$ sklad;

(*vstavi podatek v sklad in vrne nov sklad *)

vstavi: (podatek, sklad) $\Rightarrow$ sklad,

(* vrne podatek, ki je na vrhu sklada *)

vrh : sklad $\Rightarrow$ podatek;

(* izbriše vrhnji element sklada in vrne novi sklad *)

odstrani: sklad $\Rightarrow$ sklad;

(* ali je sklad prazen *)

prazen: sklad $\Rightarrow$ Boolean;

where

prazen (pripravi) := true;

prazen (vstavi (p,s)) := false;

odstrani (pripravi) := napaka;

odstrani (vstavi (p,s)) := s;

vrh (pripravi) := napaka;

vrh (vstavi (p,s)) := p;

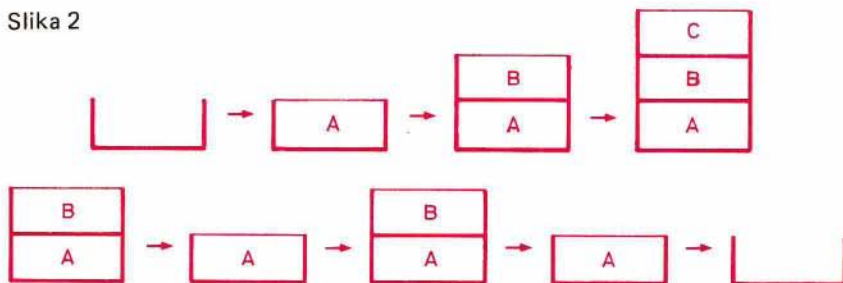
end.

in pričnemo izvajati nalogo C. Po nekaj korakih ta spet zahteva, da najprej opravimo nalogo D. V sklad shranimo podatke o C in se lotimo naloge D. To uspešno končamo. Kaj pa sedaj? Edina naloga, ki jo lahko izvajamo, je naloga C, saj A zahteva, da je končana naloga B, le—ta pa, da je končana naloga C. Nalogo C vzamemo z vrha sklada in izvedemo do konca. Nadaljujemo z izvajanjem naslednje naloge na vrhu sklada. To je naloga B. Vendar po nekaj korakih le—ta spet zahteva, da dokončamo še nalogo E. Zato B ponovno uvrstimo v sklad in izvedemo nalogo E. Ko to končamo, se ponovno lotimo vrhnje naloge v skladu, B, in ko je opravljena, iz sklada vzamemo še zadnjo nalogo A in jo dokončamo. Spreminjanje sklada je prikazano na sliki 2.

Vidimo, da v vsakem trenutku med obdelavo sklad avtomatično vzdržuje vrstni red, potreben za uspešno izvajanje naloge. Na ta način računalnik tudi nadzoruje izvajanje programa, če je A glavni program, B, C, D in E pa ustrezni podprogrami.

Ostane nam le še, da sklad predstavimo v računalniku. Načinov predstavitve je več, odvisno tudi od uporabe določenega programskega jezika. Uporabili

Slika 2



bomo kar BASIC in predstavitev s pomočjo tabele.

Za podatkovno strukturo "sklad" je povsem dovolj, da poznamo njen vrh, kajti tja vstavljamo in od tam brišemo podatke, ter da poznamo razvrstitev elementov. Če uporabimo **linearno predstavitev** ali predstavitev s tabelo, je vrstni red določen kar z indeksom elementa v tabeli. Element, ki je na vrhu sklada, ima najvišji indeks, njegov predhodnik indeks za eno manjši, ... V definiciji sklada nikjer nismo omejili števila elementov, ki so naenkrat lahko v skladu. Ker pa si moramo za tabelo rezervirati prostor, bomo z VELIKOST označili maksimalno število elementov, ki jih istočasno lahko vodimo v skladu. Kot smo rekli, bomo sklad predstavili s tabelo, ki ji bomo rekli SKLAD. Potrebujemo še spremenljivko, ki označuje vrh sklada. To naj bo kar VRH.

Če smo v sklad zaporedoma vstavili števila 3, 1, 6 in 8 in imamo v skladu prostor za 9 elementov, bo sklad v tem trenutku predstavljen takole:

VELIKOST = 9

VRH = 4

SKLAD(1) = 3

SKLAD(2) = 1

SKLAD(3) = 6

SKLAD(4) = 8

SKLAD(5) = ...

SKLAD(6) = ...

SKLAD(7) = ...

SKLAD(8) = ...

SKLAD(9) = ...

Sestavimo sedaj podprogram, s pomočjo katerih izvajamo potrebne operacije.

```

10 REM
20 REM pripravi sklad velikosti VELIKOST z vrhom VRH
30 REM
40 VELIKOST = ...
50 DIM SKLAD(VELIKOST)
60 VRH = 0
70 RETURN

```



```

100 REM
110 REM če je sklad prazen, dobi spremenljivka PRAZEN
120 REM vrednost 1, drugače 0
130 REM
140 PRAZEN = 0
150 IF VRH = 0 THEN PRAZEN = 1
160 RETURN

200 REM
210 REM vstavi podatek ELEMENT v sklad
220 REM
230 IF VRH < VELIKOST THEN GOTO 260
240 REM sklad je poln - primerno ukrepamo
250 ...
260 REM sklad ni poln
270 VRH = VRH + 1
280 SKLAD(VRH) = ELEMENT
290 RETURN

300 REM
310 REM briše podatek iz sklada in ga shrani v ELEMENT
320 REM
330 IF VRH = 0 THEN ... : REM napaka, primerno ukrepamo
340 ELEMENT = SKLAD(VRH)
350 VRH = VRH - 1
360 RETURN

```

Zadnji podprogram vsebuje v sebi dve operaciji: ODSTRANI, ki iz sklada naredi nov sklad, in VRH, ki vrne vrhnji element v skladu. S ... smo označili mesta, kjer vpišemo ukaze, ki ustrezajo uporabi sklada v programu. Tako lahko prekinemo izvajanje programa in sporočimo napako, lahko pokličemo ustrezni podprogram, ... Odvisno pač od situacije, v kateri uporabljamo sklad. V nekaterih primerih bo to znak, da je v programu napaka, drugič spet le znamenje, da program potrebuje večji sklad.

V začetku smo omenili, da je sklad le ena od osnovnih podatkovnih struktur. Druge, ki jih prav tako pogosto uporabljamo v računalništvu, so še: drevo, vrsta, kopica, graf, gozd in še mnoge druge. V naslednjih številkah PRESEKA si bomo ogledali še nekatere. Do takrat pa nekaj nalog, ki so objavljene na strani 333.

Matija Lokar

ŠE O UPORABI REKURZIVNIH FORMUL

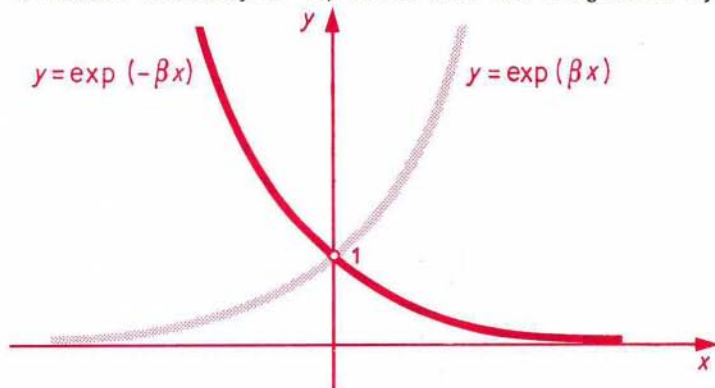
Nadaljujmo naša razmišljanja o uporabi rekurzivnih formul, ki smo jih začeli v četrti številki Preseka.

Najprej nekaj pojasnil v zvezi z eksponentno funkcijo. Naj bo a izbrano pozitivno število, različno od 1. Za vsako naravno število n definiramo $a^n = a \cdot a \dots a$, kjer je v produktu n enakih faktorjev a . Posebej je $a^1 = a$. Za dve naravni števili m in n velja $a^{m+n} = a^m a^n$. Nato definiramo a^n za poljubno celo število n . Če je n negativno celo število, postavimo $a^n = 1/a^{-n}$. Za $n = 0$ postavimo $a^0 = 1$. Identiteta $a^{m+n} = a^m a^n$ velja potem tudi za dve poljubni celi števili m in n . V naslednjem koraku definiramo a^r za racionalna števila r . Če je r ulomek p/q , postavimo $a^{p/q} = \sqrt[q]{a^p}$. Nazadnje definiramo a^x , kjer je x realno število. To gre približno tako: izberemo poljubno zaporedje racionalnih števil $r_1, r_2, \dots$, ki se z rastočim indeksom približujejo številu x . Opazujemo zaporedje $a^{r_1}, a^{r_2}, a^{r_3}, \dots$. To zaporedje z rastočim indeksom stremi k nekemu točno določenemu realnemu številu, ki ga označimo z a^x . Preslikava, ki vsakemu realnemu številu x priredi vrednost a^x , je eksponentna funkcija. Število a je njena osnova. Najpomembnejša lastnost eksponentne funkcije je:

$$(1) \quad a^{x+y} = a^x a^y$$

za poljubni realni števili x in y , razen tega pa velja še: $a^0 = 1$, za $a > 1$ je funkcija $x \mapsto a^x$ naraščajoča, za $0 < a < 1$ pa padajoča, zavzame pa lahko samo pozitivne vrednosti.

Zaporedje števil $a_1, a_2, a_3, \dots$, kjer je splošni člen dan z izrazom $a_n = (1 + 1/n)^n$, stremi proti neki vrednosti, ki jo v matematiki označujemo s črko e . Približna vrednost je $e = 2,718\,281\,828\,459$. Poleg števila π je to eno



od najpomembnejših števil v matematiki. In ravno število e izberemo za osnovo eksponentne funkcije, ki jo bomo potrebovali. Dostikrat namesto e^x pišemo raje $\exp x$. Adicijski izrek (1) je potem

$$(2) \quad \exp(x + y) = \exp x \exp y$$

BASIC tudi pozna to funkcijo, to je funkcijo EXP.

Za pozitivno realno število β si oglejmo funkciji $x \mapsto \exp(\beta x)$ in $x \mapsto \exp(-\beta x)$. Prva je naraščajoča, in to tem bolj, čim večji je β , druga pa je padajoča. Čim večji je β , tem hitreje pada. Prvi ustreza zakon naravne rasti, drugi pa zakon radioaktivnega razpada.

Po tej pripravi si oglejmo krivuljo $y = A \exp(-\beta x) \sin(\omega x + \varphi)$. To je *krivulja dušenega nihanja*. Kasneje nekaj besed o njenem imenu. Število $\beta > 0$ bomo imenovali koeficient dušenja. Na računalniku bomo narisali to krivuljo podobno kot na začetku sinusoido. Najprej pa moramo priti do primerne rekurzivne formule. Abscisam $x_0 = 0$, $x_1 = \delta$, $x_2 = 2\delta$, ... priredimo ustrezne ordinate $y_0, y_1, y_2, \dots$:

$$y_k = A \exp(-\beta x_k) \sin(\omega x_k + \varphi), \quad k = 0, 1, 2, \dots$$

Vpeljemo pomožno zaporedje $z_0, z_1, z_2, \dots$, kjer je $z_k = A \sin(\omega x_k + \varphi)$. Potem lahko zapišemo krajše

$$y_k = z_k \exp(-\beta x_k), \quad k = 0, 1, 2, \dots$$

Iz četrte številke Preseka že vemo, da velja

$$z_{k+1} = 2 z_k \cos(\delta \omega) - z_{k-1}, \quad k = 1, 2, 3, \dots$$

Odtod hitro dobimo zvezo

$$(3) \quad y_{k+1} = 2 y_k \exp(-\beta \delta) \cos(\delta \omega) - y_{k-1} \exp(-2\beta \delta)$$

Označimo

$$c = 2 \exp(-\beta \delta) \cos(\delta \omega), \quad d = \exp(-2\beta \delta)$$

Rekurzivno formulo (3) še enkrat prepisemo:

$$(4) \quad y_{k+1} = c y_k - d y_{k-1}, \quad k = 1, 2, 3, \dots$$

Če poznamo y_0 in y_1 , potem lahko postopoma izračunamo y_2, y_3 itd. Pri danih parametrih $A, \omega, \varphi, \beta$ in izbranem koraku δ imamo $y_0 = A \sin \varphi$ in $y_1 = A \exp(-\beta \delta) \sin(\delta \omega + \varphi)$.

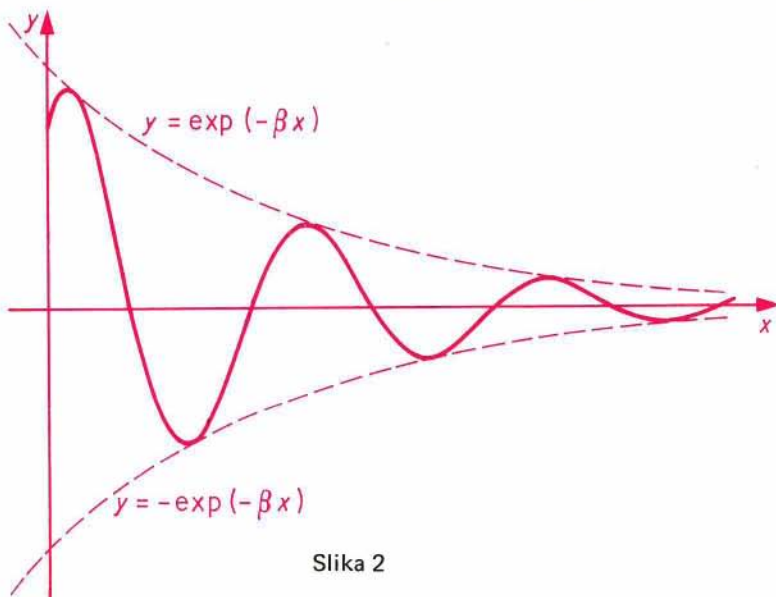
Sedaj napišemo nov program, v katerem bomo lahko sami spreminjali vse omenjene parametre.

```

10 LET m=50: LET a=70
20 LET fi=PI/2: LET b=.09
45 LET f=PI/m
50 LET b1=EXP(-b*f)
60 LET d=b1*b1
90 PLOT 0,75: DRAW 255,0
100 LET y0=a*SIN fi
105 LET y1=a*b1*SIN( f+fi)
110 LET c=2*b1*COS f
120 FOR x=0 TO 255
130     PLOT x, y0+75
140     LET y2=c*y1-d*y0
150     LET y0=y1: LET y1=y2
160 NEXT x

```

Krivuljo dušenega nihanja dobimo prav tako hitro kot sinusoido. V vrstici 10 lahko spremenimo amplitudo a , gostoto točk m . V vrstici 20 pa pomeni fi začetno fazo φ , medtem ko koeficient dušenja β predstavlja spremenljivka b .



Slika 2

Če abscisa x pomeni čas, potem sinusoida $y = A \sin(\omega x + \varphi)$ opisuje časovno odvisnost odklona idealnega nihala od njegove mirovne lege. Zaradi trenja in upora zraka pa nihanje počasi zamre. Odkloni od mirovne lege pojemajo. Izkaže se, da ravno eksponentno z nekim koeficientom dušenja β , enačba $y = A \exp(-\beta x) \sin(\omega x + \varphi)$ pa opisuje tako nihanje. Videti je, kot da bi nekdo nihanje dušil, zato govorimo o dušenem nihanju. Ustrezno tudi krivuljo imenujemo krivulja dušenega nihanja.

Računalnik seveda ne računa natančno. Eno je število π in drugo konstanta PI, ki jo poznamo iz BASIC-a. Le nekaj decimalk števila π se skriva v PI. Poleg tega se vrednosti funkcij SIN, COS, EXP itd. razlikujejo od pravih vrednosti funkcij sin, cos, exp itd. Po množenju dveh števil, ki imata recimo 8 decimalk, produkt za računalnik ni znan na 16 decimalk, ampak zopet le na 8. Zaradi tega opisani programi med izvajanjem prinesejo v zanke FOR-NEXT napake. Med izvajanjem zank pa se zopet delajo računske operacije na nekaj decimalk. Lahko se zgodi, da napaka pri računanju števil y_k ostane v zmernih mejah, lahko pa tudi ne. Bralec naj poskusi, recimo, izračunati $\text{SIN}(k\delta)$ z BASIC-ovo funkcijo in po metodi rekurzivne formule hkrati. Spreminja naj δ in spusti število k precej visoko. Pride do kar znatnih odstopanj. Za načrtovanje sinusoid in podobnih reči pa je natančnost več kot dobra tudi po metodi, ki smo jo opisali v tem članku. Torej nekako vemo, zakaj nam je kontrola identitete $\sin^2 a + \cos^2 a = 1$ dala malo slabši rezultat. Lahko se zgodi, da se napake v zanki med seboj kompenzirajo. V programu iz četrte številke Preseka, kjer rišemo elipso, poskusimo, kaj se zgodi, če zgornjo mejo za spremenljivko t precej povečamo, tako da točka velikokrat obkroži elipso. Kakega siljenja v spiralo ni opaziti. Poskusite z elipso še na ta način, da vrednosti SIN in COS računate s tročleno rekurzivno formulo. Ali opazite kakšno zavijanje z elipse?

Bodi dovolj. Vsi ti zgledi nas poučijo, da se pri reševanju kakšnega prav posebnega problema včasih izplača ubrati kakšno posebno pot. V tem primeru so bile to kotne funkcije. Če ne drugega, je to primer, kako lahko čas izvajanja občutno skrajšamo.

Marko Razpet

"SKLAD"

(Glej prvi članek iz računanštva na strani 305)

Boštjan je zelo redno zamujal službo. Ne samo nekaj minut, tudi pogosto do ene ure. Sodelavci so negodovali tako dolgo, da se je direktor le odločil in prijazno opozoril Boštjana: "Tovariš Boštjan, vi pa vse prepogosto zamujate na delovno mesto. Vedno pridete zadnji v službo. To vsekakor ni pravilno v odnosu do vaših sodelavcev. Morali se boste spremeniti." "Že, že, tovariš direktor. Ko prihajam zadnji v službo, me vsi vidite. Ko pa odhajam domov vedno prvi, pa nihče."

Priredil Ciril Velkovrh

VSOTA PRVIH n NARAVNIH ŠTEVIL

V matematiki je pogosto potrebno izračunati vsoto prvih n naravnih števil

$$S(n) = 1 + 2 + 3 + \dots + (n - 1) + n \quad (1)$$

V članku bomo prikazali eno od metod za izračun omenjene vsote, nato pa bomo dobljeno formulo uporabili v primerih.

Na premici p izberemo $n + 1$ različnih točk, ki jih označimo po vrsti z $A_1, A_2, \dots, A_n, A_{n+1}$ (slika 1). Točko A_1 lahko spojimo s poljubno od preostalih n točk tako, da je A_1 levo krajišče dobljene daljice. Točko A_2 lahko na isti način spojimo z $n - 1$ točkami $A_3, \dots, A_{n+1}$. Tako nadaljujemo vse do točke A_n , ki jo lahko spojimo le z eno točko A_{n+1} . Torej je število vseh daljic, ki vežejo po dve izbrani točki, ravno enako

$$n + (n - 1) + \dots + 2 + 1 = S(n)$$



Slika 1

Sedaj razmislimo še drugače. Vsako od izbranih $n + 1$ točk lahko spojimo z vsako od preostalih n točk, torej imamo $n \cdot (n + 1)$ možnosti, le da smo pri tem vsako daljico šteli po dvakrat, saj je $\overline{A_i A_j} = \overline{A_j A_i}$ za vsak par števil $i \neq j$. Odtod zaključimo, da je število vseh daljic ravno $n \cdot (n + 1) / 2$. Iz primerjave obeh načinov štetja daljic sledi

$$S(n) = n \cdot (n + 1) / 2 \quad (2)$$

To je iskana formula za vsoto (1).

Sedaj bomo pogledali nekaj primerov uporabe dobljene formule (2).

Primer 1. Določi število n , če veš, da je vsota $1 + 2 + 3 + \dots + n$ trimestno število, katerega cifre so enake.

Rešitev. Po pogoju naloge je $1 + 2 + \dots + n = x \cdot 111$, kjer je x neka cifra med 1 in 9. Iz formule (2) dobimo

$$n \cdot (n + 1) = 2 \cdot x \cdot 111 = 2 \cdot x \cdot 3 \cdot 37 = 6x \cdot 37$$

Ker je 37 praštevilo in je $n \cdot (n+1)$ produkt dveh zaporednih naravnih števil, dobimo dve možnosti: $6x = 36$ ali pa $6x = 38$. Druga možnost odpade, ker 38 ni deljivo s 6. Torej je $x = 6$, $n = 36$ in $S(n) = 666$.

Primer 2. Poišči vsoto prvih n lihih naravnih števil, to je $1+3+5+ \dots + (2n-1)$.

Rešitev. Zgornjo vsoto lahko zapišemo kot razliko med vsoto $1+2+3+ \dots + 2n = S(2n)$ in $2+4+6+ \dots + 2n = 2 \cdot (1+2+ \dots + n) = 2 \cdot S(n)$. Torej

$$1+3+5+ \dots + (2n-1) = S(2n) - 2 \cdot S(n) = 2n \cdot (2n+1) / 2 - n(n+1) = 2n^2 + n - (n^2 + n) = n^2$$

Naloge.

1. Poskusi dokazati formulo (2) še na kak drug način.
2. Izračunaj
 - a) $101 + 102 + \dots + 500$
 - b) $111 + 113 + 115 + \dots + 1109 + 1111$
3. Dokaži, da se vsota $1 + 2 + \dots + n$ ne more končati s katero od cifer 2, 4, 7 ali 9 za nobeno naravno število n .
4. Poišči a in n , tako da je $1 + 2 + \dots + n = \overline{a00a}$.
5. Na eni od dveh vzporednih premic je dano m različnih točk, na drugi n različnih točk. Koliko trikotnikov določajo te točke?

Dragoljub M. Milošević
(prevedel Franc Forstnerič)

RAZPIS ZA 5. POLETNO ŠOLO RAČUNALNIŠTVA

Letos bo že petič v začetku julija v Ljubljani Poletna šola računalništva. Pričela se bo v soboto 4. in končala naslednjo nedeljo 12. julija. Sodelovali bodo lahko osnovnošolci, srednješolci in tokrat prvič tudi študentje. Kakor dve prejšnji, bo tudi letos šola mednarodna, saj se je bodo udeležili študentje in predavatelji iz tujine. Zato bodo v angleščini predavanja za skupine, ki so označene s posebnim znakom (A). Poleg rednih predavanj bomo letos pripravili še posebno skupno predavanje.

Zadnji datum za oddajo spodaj priložene prijavnice je petek 6. junija. Prijave pošljite na naslov:

Gibanje "Znanost mladini"

Sekcija za računalništvo

(za Poletno šolo)

Lepi pot 6, 61000 Ljubljana

Dokončno obvestilo o izbiri in urnik šole boste prejeli na dom do ponedeljka 15. junija.

Za letošnjo šolo smo pripravili naslednje teme:

1. Vladimir Batagelj: **Prijazni programi**

Povzetek: Skupina se bo seznanila z osnovnimi prijemi pri pisanju do uporabnika prijaznih programov. Izdelali bomo ustrezna ozadja (skupine programov).

Željeno predznanje: dobro poznavanje vsaj enega programskega jezika (pascal, basic, logo).

2. Mojmir Baumgartner: **Baze podatkov (A)**

Povzetek: Predavatelj bo predstavil način organiziranja podatkov v podatkovnih bazah. Posebej se bo ukvarjal z relacijskimi podatkovnimi bazami, relacijsko algebro in relacijskim računom.

Željeno predznanje: logika.

3. Ivan Čibej: **Industrijska robotika (A)**

Povzetek: Ta skupina je namenjena študentom in morda učencem višjih razredov srednjih šol. Predavanja bo pripravilo več predavateljev. Osnovne teme predavanj bodo zaobsegle: "Uvajanje robotov v industrijsko prakso", "Uvod v geometrijski, kinetični in dinamični model", "Sestavni deli industrijskega manipulatorja (prenosi, motorji, notranji senzorji, krmilnik)", "Računalniško vodenje v robotiki in povezave v robotsko celico", "Robotski programski jezik DARL" in "Senzorno vodenje v robotiki".

Željeno predznanje: dobro znanje matematike.

4. Sašo Divjak: **Računalniški jezik c (A)**

Povzetek: Sestoji iz predavanj o programskem jeziku c. Med posameznimi temami bodo praktične vaje s prevajalnikom za c na mikroročunalniku Partner.

Željeno predznanje: nobenih posebnih zahtev.

5. Tomi Dolenc: **Računalniška grafika**

Povzetek: Predavatelj bo predstavil nekatere osnovne značilnosti strojne grafične opreme. Sledil bo opis grafičnega jedra (GKS), njegovega ustroja, delovanja in uporabe. V praktičnem delu bodo študenti izdelali program, ki bo slonel na uporabi grafičnega jedra.

Željeno predznanje: poznavanje pascala.

6. Roman Dorn: **Zbirni jezik za Intel 8088**

Povzetek: Študentje se bodo seznanili z zgradbo procesorja Intel 8088, zbirnikom za omenjeni procesor, principi pogojnega zbiranja in makroji. V nadaljevanju bo predstavljen program DEBUG in opisana povezava z operacijskim sistemom MS-DOS. Udeleženci bodo pri vajah naredili nekaj programov in jih preizkusili – postopno izvajali. Spoznali bodo tudi nekaj funkcij operacijskega sistema DOS.

Željeno predznanje: Znanje uporabe katerega izmed urejevalnikov in DOS operacijskega sistema.

7. Tom Erjavec: **Notranja zgradba operacijskega sistema PC DOS**

Povzetek: Študentom bo predstavljena strojna oprema računalnika PC in kako je nad njo nadgrajen operacijski sistem PC DOS. Razložena bo razlika med logičnimi in fizičnimi napravami. Predstavljen bo BIOS in način, kako krmilni programi preko BIOS-a dosežajo fizične naprave. Ogledali si bomo ureditev diskovnega sistema, pomnilnega prostora. Glavni poudarek bo na prekinitvenih klicih. Pregledali bomo BIOS-ove prekinitve, nato pa še DOS-ove.

Željeno predznanje: Splošno poznavanje mikroračunalnikov, okvirno poznavanje PC DOS, poznavanje programirnega jezika pascal.

8. Igor Ozimek: **Krmilnik koračnega motorja z mikroprocesorjem 8051**

Povzetek: Predavatelj bo predavanja zasnoval na naslednjih poglavjih. "Spoznavanje integriranega mikroračunalnika Intel 8051", kjer bo podal pregled obstoječih (predvsem 8-bitnih) integriranih mikroračunalnikov (krmilnikov) in primerjava s standardnimi mikroprocesorji tipa Z80. Drugo poglavje ima naslov "Razvojna okolja" in opisuje križni razvoj programske opreme za samostojne mikroračunalniške sisteme, ter posebej spoznavanje enostavnega razvojnega okolja za mikroračunalnik 8051. Drugi del predavanj ima naslov "Osnove koračnih elektromotorjev", kjer bo predavatelj podal primerjavo z drugimi motorji in načine njihovega krmiljenja. V praktičnem delu bo opravljen razvoj in preizkus programske opreme za krmilnik koračnega motorja, izdelan z mikroračunalnikom 8051.

Željeno predznanje: Splošno poznavanje mikroprocesorjev.

9. Branka Fras: **Lepo programiranje v pascalu**

Povzetek: Predavanja so namenjena osnovnošolcem. Spoznali bodo jezik pascal in pravila lepega programiranja.

Željeno predznanje: basic ali logo.

Andrej Brodnik

Prijavnica za 5. poletno šolo računalništva:

Ime in priimek:

Domači naslov:

Šola in razred:

Želim sodelovati v skupini:

Če ne bo možno, pa v skupini:

Bivanje in prehrana bosta brezplačna, vendar zaradi enostavnejše organizacije želimo, da izpolnite še spodnji obrazec:

Prijava za bivanje:

Ime in priimek:

Domači naslov:

Želim, da mi preskrbite:

- | | | |
|------------|----|----|
| — spanje: | DA | NE |
| — zajtrk: | DA | NE |
| — kosilo: | DA | NE |
| — večerjo: | DA | NE |

30. REPUBLIŠKO TEKMOVANJE IZ MATEMATIKE

Letos so se mladi matematiki s srednjih šol iz vse Slovenije zbrali na tekmovanju v Mariboru. Organizacijo tekmovanja je prevzela Srednja naravoslovna šola M. ZIDANŠEK, pokroviteljstvo pa SO Maribor – Tabor in Skupščina mesta Maribor. Prostorsko izvedbo tekmovanja nam je omogočila Visoka ekonomska-komercialna šola. Tam so se zbrali tekmovalci v soboto, 5. aprila, zjutraj. Po skromni zakuski so v veliki predavalnici vse udeležence pozdravili: predsednica SO Maribor–Tabor Erna Ritlop, predsednik Mestne izobraževalne skupnosti Boris Sovič, dekan dr. Leo Gusel in ravnatelj SNŠ M. Zidanšek prof. Ivan Lorenčič. Še posebno pa smo bili veseli, da se je vabilu odzval tudi predsednik DMFA SRS dr. Janez Strnad ter v pozdravnem nagovoru povedal tekmovalcem nekaj vzpodbudnih besed pred začetkom tekmovanja.

Vseh tekmovalcev je bilo 138, in sicer 29 prvošolcev, 39 drugošolcev, 28 učencev iz tretjih razredov in 42 učencev četrtil razredov.

Za reševanje nalog, ki jih je izbrala republiška tekmovalna komisija, so tekmovalci imeli dve uri in pol časa.

Naloge za 1. letnik:

1. Ded in babica sta z vnukom praznovala rojstni dan v slaščičarni. Ko jih je natak ar vprašal po njihovih starostih, je ded odgovoril: "Pred devetimi leti sem bil star toliko, kolikor babica in vnuk skupaj. Danes sva z babico skupaj stara cel večkratnik vnukove starosti, vsota vseh naših starosti pa ima le tri celoštevilске delitelje. Čez devet let bo vsota naših starosti popoln kvadrat." Koliko so danes stari?
2. Če za naravna števila a, b, c, d velja, da $ab - cd$ deli po vrsti a, b, c in d , potem je $|ab - cd| = 1$.
Dokaži.
3. V enakokrakem trikotniku ABC s kotom 100° pri oglišču C seka simetrala kota pri A nasprotno stranico v točki D . Pokaži, da je $AD + DC = AB$.
4. Iz šahovske plošče velikosti 8×8 izrežemo poljubni različno obarvani polji. Pokaži, da lahko ostanek plošče pokrijemo z dominami (domina je plošča velikosti 2×1).

Naloge za 2. letnik:

1. Če sta a in b od nič različni celi števili in $|a| \neq |b|$, potem $\frac{a^2 - b^2}{ab}$ ni celo število.

Dokaži.

2. Dana je krožnica s polmerom r . Nariši kvadrat tako, da bo ena njegova stranica tetiva, njej vzporedna stranica pa tangenta.

3. V poljubnem trikotniku ABC s kotom 45° pri oglišču C označimo z M središče stranice AB , z N in P pa nožišči višin na AC oziroma BC . Pokaži, da so M, N, P oglišča nekega kvadrata.

4. Legenda pravi, da se je nekoč na dvoru za okroglo mizo posedlo 13 vite-zov, kralj Artur in na njegovi desni dvorni svetovalec. Vsak od prisotnih je za-prisegel, da bo govoril le resnico ali da bo vedno lagal.

Dvorni norec pride k mizi in vsakega vpraša, ali je njegov levi sosed lažni-vec. Vsi odgovorijo pritrdilno, le kraljevi svetovalec pove, da kralj nikoli ne laže. Ko norec vpraša, ali je več resnicoljubov ali lažnivcev, kralj pove, da je več tistih, ki ne lažejo, svetovalec pa doda, da je resnicoljubov za 3 več.

Ali je kralj Artur govoril resnico?

Naloge za 3. letnik:

1. Dokaži, da tri kompleksna števila z_1 , z_2 in z_3 ne ležijo na isti strani realne osi, če velja $z_1 z_2 z_3 = z_1 + z_2 + z_3$.

2. Če so α, β in γ poljubni koti iz intervala $[0, \pi]$, je

$$\sin \frac{\alpha + \beta}{2} + \sin \frac{\alpha + \gamma}{2} + \sin \frac{\beta + \gamma}{2} \geq \sin \alpha + \sin \beta + \sin \gamma$$

Dokaži.

3. Naj bo $p(x)$ poljuben polinom. Če je $Q(x) = p(x) - x$ in $S(x) = p(p(x)) - x$, je $S(x)$ deljiv s $Q(x)$. Dokaži.

4. Nekdo je v puščavi zarisal kvadratno parabolo in v temenu navpično za-bodel palico. Mravlji sta se srečali ob vznožju palice; prva se je napotila v smeri tangente na parabolo, druga pa naravnost proti neki točki na paraboli. Ko je prišla do te točke, je pogledala nazaj in presenečeno povedala prvi, da je zorni kot, pod katerim vidi palico, komplementaren kotu med sledema, ki sta jo za-risali v pesku. Prva mravlja je razmišljala: "Če izberem svojo sled za pozitivni poltrak abscisne osi, začetek najine poti za izhodišče in višino palice za enoto, potem mi ni težko s kotom φ izraziti vodilnega koeficienta kvadratne funkcije, katere graf je parabola, in pa koordinati končne točke poti moje kolegice."

Ali boš tudi ti kos problemu?

Naloge za 4. letnik:

1. Če sta a in b taki racionalni števili, da je vsota $\sqrt[3]{a} + \sqrt[3]{b}$ racionalna, potem sta tudi $\sqrt[3]{a}$ in $\sqrt[3]{b}$ racionalni.

Dokaži.

2. Dana je funkcija $f(x)$, za katero velja:

a) $f(0) = 1$

b) $f(n) = f(0) + f(1) + \dots + f(n-1)$ za vsako naravno število n .

Izračunaj $\sum_{k=0}^n (f(k))^2$

3. Štiri krogel so postavljene tako, da se vsaka dotika drugih treh. Ena izmed krogel ima polmer $R_1 = R$, dve polmer R_2 ($R_2 > R_1$) in ena R_3 ($R_3 > R_2$), pri čemer so R_1, R_2 in R_3 zaporedni členi aritmetičnega zaporedja. Zveznice središč krogel so robovi piramide. Izrazi prostornino piramide z R , če veš, da sta dve izmed mejnih ploskev piramide pravokotna trikotnika.

4. V ravnini raste drevo D_n iz drevesa D_{n-1} , pri čemer je dolžina novih vej vsakič q -krat krajša in so nove veje (daljica) pravokotne na krajišča drevesa (glej sliko). Drevo D_1 je daljica dolžine 1 (ena).

- a) Kolikšna je dolžina drevesa D_n ?

- b) Kolikšen je lahko največ k ($k = 1/q$), da se veje za noben n ne bodo prepletale (rasle druga čez drugo)?



Po tekmovanju so tekmovalci odšli na kosilo v restavracijo Center, nato pa so jim učenci SNŠ M. Zidanšek razkazali nekatere Kulturno-zgodovinske znamenitosti Maribora. Člani tekmovalne komisije in nekateri profesorji spremljevalci so med tem pregledali rešitve, določili nagrajence in sestavili ekipo za zvezno tekmovanje v POSTOJNI.

Svečan zaključek tekmovanja se je začel ob 17. uri, ko je komisija razglasila rezultate. Najboljši učenci so poleg nagrad in pohval, ki jih poklanja DMFA SRS, dobili še spominske ali praktične nagrade, ki jih je prispeval organizator ob pomoči združenega dela. Pri tej pomoči se je posebej izkazala

SLADKOGORSKA, ki je poleg finančnih sredstev prispevala tudi spominsko darilce za vsakega tekmovalca. Tako upamo, da bodo ta dan ohranili v prijetnem spominu vsi udeleženci tekmovanja, tudi tisti, ki se niso vračali z nagradami. Ob odhodu so vsi tekmovalci dobili še BILTEN, ki ga je pripravil organizator.

Priznanja so osvojili:

1. letnik:

2. nagrada: Tatjana OZBIČ (STNŠ Postojna)
3. nagrada: Polona PETEK (SNŠ Maribor)
pohvale: Zoran SLANIČ (SNŠ Maribor), Andrej VILFAN (SNŠ Ljubljana), Marjan JERMAN (SŠNMEU Trbovlje)

2. letnik:

1. nagrada: Tomaž VOLK (SNŠ Ljubljana)
2. nagrada: Tomaž SLIVNIK (SNŠ Ljubljana), Edi VOVK (ŠC Iskra Kranj), Matej KOLAR (STŠ Celje), Borut JAMNIK (SPNMŠ Koper)
3. nagrada: Andrej FAJFAR (SNŠ Ljubljana)
pohvale: Martina KRAMAR (NSC Nova Gorica), Dušan PETROVIČ (CSŠ Titovo Velenje), Tomaž PROSEN (SŠPRNMU Kranj), Bor PLESTENJAK (SNŠ Ljubljana), Simon ABOLNAR (TŠC Nova Gorica), Renato BERTALANIČ (SŠCTPU Murska Sobota), Andreja GOMBOC (SŠCTPU Murska Sobota), Blaž LORGER (SNŠ Maribor), Jerica MAVER (NSC Nova Gorica), Alenka MEHLE (SMSM Piran), Jelena MIČOVIČ (SŠNMEU Trbovlje), Karmen SKENDER (SŠTUD Kočevje), Božo SKOK (SPNMŠ Koper), Andrej VRANIČ (SŠTNPU Ravne), Alexis ZRIMEC (SNŠ Ljubljana)

3. letnik:

2. nagrada: Jure BAJC (SNŠ Ljubljana)
3. nagrada: Peter ANASTASOV (SNŠ Ljubljana), Mateja ŠAJNA (NSC Nova Gorica)
pohvale: Matej LIPOGLAVŠEK (SNŠ Ljubljana), Gorazd POBERAJ (SNŠ Ljubljana), Marjeta ZALETEL (SŠPRNMU Kranj), Peter ZIDAR (SNŠ Ljubljana), Rado KLEMENČIČ (SŠPRNMU Kranj), Alenka MERTELJ (CSUI Jesenice), Srečko MILANIČ (NSC Nova Gorica)

4. letnik:

1. nagrada: Jože FABČIČ (STNŠ Postojna)
2. nagrada: Matjaž ŽELJKO (SŠR Ljubljana)

3. nagrada: Matevž KRANJEC (SŠN Ljubljana), Peter PEHANI (SNŠ Ljubljana), Pavle POPOVIČ (SNŠ Ljubljana)
- pohvale: Primož GABRIJELČIČ (SŠN Ljubljana), Jani KOVAČ (STŠ Celje), Davor GORNIK (SNŠ Maribor), Tomaž KLOBUČAR (SNŠ Ljubljana), Damjana KOKOL (SŠPRNMU Kranj), David NEDELJKOVIČ (STŠ Celja), Roman NOVAK (SŠPTNU Novo mesto), Marko TOPIČ (SNŠ Ljubljana), Peter MALOVRH (ŠC Iskra Kranj), Grega CIGLER (SNŠ Ljubljana), Borut ŽLIČAR (SNŠ IK Ljubljana), Anton MRAK (ŠC Iskra Kranj).

Majda Šaus

PISMA BRALCEV

Na naše vabilo k sodelovanju se je odzval dijak prvega letnika STŠ Maršala Tita iz Celja, Samo Dreo. Poslal nam je nalogi "Kje je zakopan zaklad" in "Kdo si zasluži največjo nagrado". Ni nam napisal, ali je nalogi sestavil sam ali njegova prijateljica iz Krškega ali pa ju je morda našel v kakšni knjigi. Ne glede na to pa upamo, da bosta zanimivi za vse bralce Preseka, ki imajo radi logiko.

Samo, hvala, tudi za vzpodbudne besede in tvojo zvestobo Preseku.

Dušica Boben

Kje je zakopan zaklad ?

Kralj Richard je poslal svoje gusarje na potovanje z ladjo. Namen je bil samo en. Poiskati zaklad in ga čimprej prinesiti kralju Richardu.

Gusarji so začeli iskati zaklad. Prepluli so pol sveta, doživljali razne avanture in nabirali zlato. Tako so nekega sončnega dneva prispeli na nek otok. Da je na tem otoku zaklad so vsi vedeli, toda kje je, tega nihče vedel. V zadregi so vprašali štiri može, ki so se imenovali: Vampir, Grof Drakula, Zmešani sluga in Grozni bradač. Odgovorili so takole:

Vampir: "Zaklad je v votlini na hribu. Nikdar ne verjemite grofu Drakuli in Zmešanemu slugi."

Grof Drakula: "Zaklad je zakopan ob drevesu."

Zmešani sluga: "To je res."

Grozni bradač: "Vampir je lagal."

Kapitan ladje je bil v zadregi, vendar je na srečo ta pogovor slišal enooki gusar in rekel: "Kapitan, eden je lagal, dva sta govorila resnico, za enega se pa ne ve." Ker je bil kapitan bister mož, je to uganko z lahkoto rešil.

Drugo nalogo bomo objavili v prvi jesenski številki.

SREDNJEŠOLSKO REPUBLIŠKO TEKMOVANJE IZ FIZIKE

Lansko republiško tekmovanje iz fizike je bilo 17. maja na Srednji šoli pedagoške računalniške naravoslovno—matematične usmeritve v Kranju. Udeležilo se ga je 163 tekmovalcev iz 22 srednjih šol Slovenije. Na predvečer tekmovanja, 16. maja, so se udeleženci na kvizu pomerili v poznavanju Kranja in njegove zgodovine, fizikalnih zakonitosti ter v poznavanju pokrovitelja tekmovanja, Iskre—Kibernetike, ki je najuspešnejšim tekmovalcem pripravila lepe praktične nagrade.

Ob otvoritvi tekmovanja je tekmovalce in njihove spremljevalce pozdravil ravnatelj SŠPRNMU mag. Valentin Pivk. Za reševanje nalog so imeli udeleženci na voljo dve uri in pol. V skupini A (mekanika) je tekmovalo 56 učencev, v skupini B (energija) 40, v skupini C (elektromagnetika) 54 in v skupini D (optika) 13 učencev. Po kosilu so si lahko ogledali razstavo učil za pouk fizike, ki jo je postavil pokrovitelj tekmovanja.

Ob zaključku je tekmovalna komisija v sestavi D. Zupanc, I. Kukman in B. Casar razglasila rezultate in podelila priznanja naslednjim tekmovalcem:

skupina A

1. nagrada: Tomaž PROSEN (SŠPRNMU Kranj), Tomaž VOLK, Andrej LAMOVEC, Andrej VILFAN (SNŠ Ljubljana)
2. nagrada: Matej KOLAR (STŠ Celje)
3. nagrada: Krištof OŠTIR—SEDEJ, Robert JERAJ (SŠPRNMU Kranj), Andrej KREJAN, Gašper MRAMOR (SNŠ Ljubljana)
- pohvale: Vojko KOS, Tadej ORAŽEM (SNŠ Ljubljana), Katka SMOLEJ (CSUI Jesenice)

skupina B

1. nagrada: Gorazd POBERAJ (SNŠ Ljubljana)
2. nagrada: Jure BAJC, Uroš POMPE (SNŠ Ljubljana)
3. nagrada: Jure JAVORŠEK, Matjaž LESKOVAR (SNŠ Ljubljana), Maja BRAČIČ (SŠPRNMU Kranj)
- pohvale: Matija STRLIČ, Jure MENCINGER (SNŠ Ljubljana), Samo KRIŽAJ (SPNMŠ Koper), Matej PODBREGAR (STŠ Celje), Duško KOVAČ (SCTPU Murska Sobota)

skupina C

1. nagrada: Janez JAKLIČ (SNŠE Kamnik)
2. nagrada: Pavle POPOVIČ (SNŠ Ljubljana), Leon MAVRIČ (SŠPRNMU Kranj)
3. nagrada: Jože FABČIČ (STNŠ Postojna), Peter SOKOLOV (SNŠ Ljubljana)

pohvale: Aljoša FELDIN, Miroslav RAJŠEK (SŠPRNMU Kranj), Dušan BABIČ (SNŠ Ljubljana), Damjana KOKOL, Mičo MRKAIČ (SŠPRNMU Kranj), Gašper MUŠIČ (SENŠ Kamnik)

skupina D

1. nagrada: Peter PEHANI (SNŠ Ljubljana)
2. nagrada: Alenka MERTELJ (CSUI Jesenice), Grega CIGLER (SNŠ Ljubljana)

pohvala: Rado KLEMENČIČ (SŠPRNMU Kranj)

Pokrovitelj tekmovanja Iskra–Kibernetika je namenil najboljšemu tekmovalcu štipendijo brez obveznosti zaposlitve. Tekmovalna komisija je predlagala za štipendijo Petra Pehanija iz Srednje naravoslovne šole v Ljubljani. Komisija je določila tudi ekipo za zvezno tekmovanje v Dečanih: Tomaža Proseno, Tomaža Volka, Andreja Lamovca, Gorazda Poberaja, Uroša Pompeta, Janeza Jakliča, Pavla Popovića, Leona Mavriča, Petra Pehanija, Alenko Mertelj in Grega Ciglerja.

Skupina A – Mehanika

1. Na 1m visoki vodoravni mizi je 1m od njenega roba lesena kocka z maso 1 kg. Vanjo se v vodoravni smeri zarije krogla iz puške s hitrostjo 750 m/s. Masa krogle je 10 g. Izračunaj, kako daleč od vznožja mize pade kocka, če je koeficient trenja med mizo in kocko 0,3.

2. Lahko kroglico po 10 m prostega pada prestreže težka plošča, ki se giblje navzgor s hitrostjo 2 m/s. Na kolikšno višino od mesta prožnega trka odskoči kroglica?

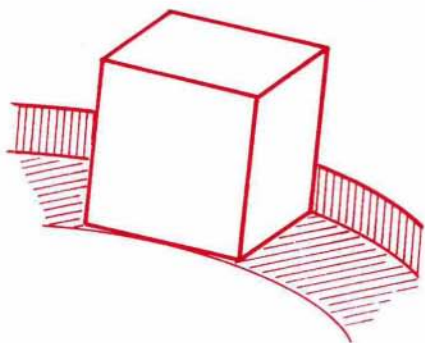
3. Mali princ živi s svojim backom na pravilničnem planetu z radijem 100 m in z maso 50 t. Dan na tem planetu traja eno uro. Nekega jutra se je Mali princ zbudil in ugotovil, da mu je bacek pobegnil. Stekel je za njim.

a) Čez koliko časa je Mali princ ujel backa, če je tekel s hitrostjo 6 m/s glede na planet, bacek pa s pol manjšo hitrostjo? Bacek in Mali princ sta se lovila okoli ekvatorja v smeri vrtenja planeta, na začetku pa sta bila na nasprotnih straneh planeta.

b) Koliko bi trajal dan na tem planetu, če bi se vedno tako lovila?

c) Za kolikšen kot se je zavrtel planet do trenutka, ko je Mali princ ujel backa? Bacek in Mali princ imata vsak po 30 kg.

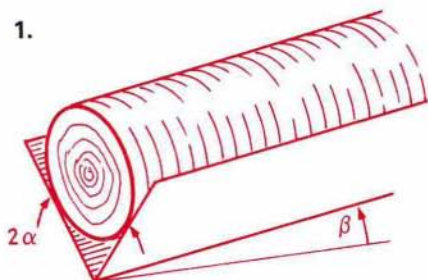
4.



Z vrha vijáčnega žleba spustimo kocko z robom a . Žleb ima rob, ki ima višino $a/3$ in drži kocko, da ne odleti s tira pri majhni hitrosti. Žleb je navit na valj z radijem 1 m in se spusti za 5 cm po vsakem obhodu. Za kolikšno višino se spusti kocka, preden se prevali čez rob? Ali je višina odvisna od nagiba in zakaj? Upoštevaj, da je rob kocke a majhen v primerjavi z radijem vijáčnega žleba. Trenje zanemarimo.

Skupina B – Energija

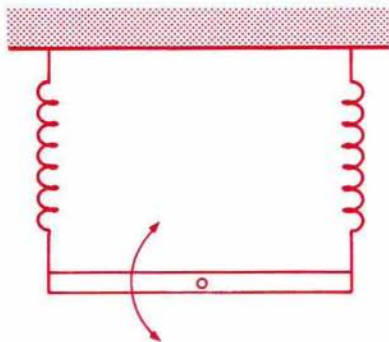
1.



Deblo z maso 70 kg vlečemo po žlebu. Kot pri vrhu, 2α , je 60° , žleb je glede na vodoravno ravnino nagnjen za kot $\beta = 40^\circ$. Koeficient trenja med žlebom in deblom je 0,5. Kolikšno delo moramo opraviti, da premaknemo deblo za 1 m po žlebu navzgor? Pri kolikšnem kotu β je to delo največje? Simetrala kota 2α je navpična.

3. Aluminijast pokrovček za nalivno pero obtežimo z žico iz iste kovine in spustimo v visok valj, napolnjen z vodo. Zaradi zajetega zraka se pokrovček ne potopi, ampak lebdi približno na sredini valja. S kolikšnim pospeškom in v kateri smeri se začne gibati pokrovček, če temperatura vode in zraka v pokrovčku naglo naraste od začetnih 20°C na 40°C ? Gostota aluminija je $2,7\text{ kg/m}^3$, vode pa 1 kg/dm^3 . Kako se pospešek spreminja, ko se pokrovček giblje? Maso ujetega zraka v pokrovčku lahko zanemarimo.

2.



Na palico z dolžino l , ki je vrtljivo pritrjena v središču, sta pripeti dve vzmeti (slika). S kolikšnim nihajnim časom zaniha palica, če njeno krajišče izmaknemo iz ravnovesne lege in spustimo? Masa palice je 1 kg, koeficienta vzmeti pa sta po 10 N/m.

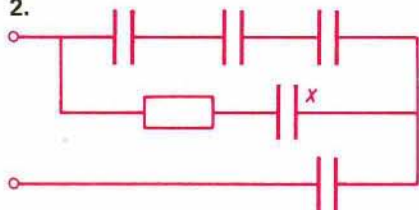
4. Na ravni cesti stojita avtomobila v razdalji 160 m. Hkrati začneta voziti drug od drugega s pospeškom po 2 m/s^2 . Na enem od avtomobilov je sirena, ki oddaja zvok s frekvenco 3000 s^{-1} . Kolikšno frekvenco ima zvok, ki ga sliši voznik drugega avtomobila po 10 sekundah vožnje? Hitrost zvoka v zraku je 340 m/s .

Skupina C – Elektromagnetika

1. V ogliščih namišljene kocke s stranico a so nameščeni enaki naboji po 1 As .
a) Kolikšen naboj moramo postaviti v središče kocke, da bi bili vsi naboji v ravnovesju?

b) Ali je takšno ravnovesje stabilno ali labilno? Pojasni!

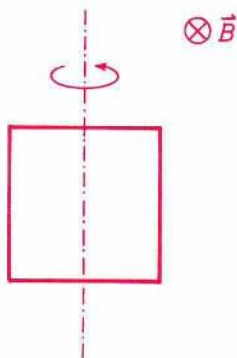
2.



Vezje na skici s kondenzatorji po 50 nF in z upornikom za 10Ω priključimo za dalj časa na baterijo z napetostjo 10 V , nato baterijo odstranimo. Na kondenzatorju X pride do kratkega stika. Kolikšna je tedaj napetost na sponkah?

3. V dolgi tuljavi ($N = 10000$, $l = 0,5 \text{ m}$) z osjo v smeri vzhod–zahod, je magnetnica, ki ima magnetni moment 1 Am^2 ter vztrajnostni moment 1 gcm^2 . Kondenzator s kapaciteto $0,5 \text{ F}$ nabijemo na napetost 200 V , nato pa ga priključimo na tuljavo. S kolikšno kotno hitrostjo se začne vrteti magnetnica? Upoštevaj, da je čas praznjenja kondenzatorja veliko krajši od časa, v katerem se magnetnica znatno zasuče. Nihanje $L - C$ kroga je močno dušeno.

4.



Iz bakrene žice s premerom 1 mm napravimo kvadratno zanko s stranico $a = 3 \text{ cm}$. Zanka se vrti v homogenem magnetnem polju z gostoto $0,01 \text{ T}$ okrog osi, ki je pravokotna na magnetno polje in na geometrijsko os (slika). Frekvenca vrtenja zanke je 30 s^{-1} , specifični upor bakra pa je $0,0175 \cdot 10^{-6} \Omega \text{ m}$.

a) Kolikšna je amplituda toka po zanki? Kolikšen je efektivni tok?

b) Ali je treba v računu upoštevati induktivnost zanke, ki je $5 \cdot 10^{-6} \text{ Vs/A}$?

Skupina D – Optika

1.



Steklen stožec ima osnovno ploskev s premerom 10 cm, kot med osnovno ploskvijo in tvornico plašča pa je 45° . Na stožec vpada snop svetlobe vzporedno z geometrijsko osjo stožca tako, da os snopa sovпада z osjo stožca. Premer snopa svetlobe je 5 cm. Opazujemo osnovno ploskev stožca.

a) Kakšno sliko dobimo tam, če je lomni kvocient stekla 1,5, lomni kvocient snovi, iz katere prihaja snop, pa 1?

b) Kako pa je v primeru, če sta lomna kvocienta zamenjana?

2. Potapljač stisne pod vodo dve 1 cm debeli stekleni plošči tako, da ostane med njima še tanka plast vode. Če posveti pravokotno na plošči z belo svetlobo, opazi ojačen odboj rdeče svetlobe. Ocení, kolikšna je debelina vodne plasti med ploščama. Lomni kvocient vode je 1,33, stekla pa 1,5.

3. Svetili, ki sočasno sevata, sinusno nihata drugo proti drugemu. Največja razdalja je a_0 , najmanjša pa $a_0/2$, kjer je $a_0 = 500$ nm. Kako bi se morala spreminjati frekvenca svetlobe, da bi bila izbrana ojačitev ves čas pri istem kotu?

4. Okrog Zemlje kroži bakrena krogla s polmerom 10 cm, prevlečena s snovjo, ki ima odbojnost 0,4. Kroglo osvetljuje Sončev svetlobni tok z gostoto $1,3 \text{ kW/m}^2$. Satelit zaide v Zemljino senco. V kolikšnem času se temperatura kroglice zmanjša na 0°C , če je imela pred tem ravnovesno temperaturo? Specifična toplota bakra je 380 J/kg K , gostota 8900 kg/m^3 . Stefanova konstanta je $5,67 \cdot 10^{-8} \text{ W/m}^2 \text{ K}^4$.

Iztok Kukman

ZANIMIVE TROJKE ŠTEVIL

Med naravnimi števili najdemo pogosto zanimive pare, trojke, ..., ki so v posebnih medsebojnih odnosih. Tako je npr.: 3×5 za 1 manj od 4^2 , podobno je $4 \times 6 = 5^2 - 1$. Ali velja ta lastnost v splošnem?

Dušan Modic

ZVEZNO TEKMOVANJE MLADIH FIZIKOV

22. zvezno tekmovanje mladih fizikov je bilo 30.5., 31.5. in 1.6.1986 v Dečanih na Kosovu. Udeležilo se ga je 118 učencev srednjih in osnovnih šol iz vse Jugoslavije. Našo ekipo je zastopalo dvanajst srednješolcev in dva osnovnošolca. Tudi letos so bile pred tekmovanjem organizirane skupne priprave, ki so jih vodili študentje fizike na VTOZD FIZIKA v Ljubljani.

V četrtek smo odpotovali z vlakom proti Kosovemu polju, nato pa nadaljevali vožnjo z avtobusom do Peči ter dalje do Dečanov, kjer so nas organizatorji namestili v bližnjem Rekreačijskem centru. Kljub utrujenosti po skoraj 24-uri vožnji smo si ogledali bližnji samostan S. Dečanskega. Po tekmovanju, ki je bilo v soboto od 9. do 13. ure, smo se odpeljali v Peč na ogled pečke patriarhije.

V nedeljo je bila razglasitev rezultatov, niso pa bile podeljene nagrade in priznanja, temveč so obljubili, da jih bodo poslali naknadno. Žal to ni bil edini spodrslija organizatorjev. Naj velja opravičilo, da je bilo zvezno tekmovanje mladih fizikov pač prvič izvedeno v tej pokrajini. Naša ekipa se je zelo dobro odrezala in dosegla 9 nagrad od skupaj 13 prvih, 8 drugih ter 27 tretjih nagrad.

Uvrstitev naših tekmovalcev:

skupina O (osnovna šola)

1. nagrada: Rok PESTOTNIK, OŠ T. Seliškar
3. nagrada: Jure DOBNIKAR, OŠ Sl. Bistrica

skupina A (mehanika in toplota)

3. nagrada: Uroš POMPE, SNŠ Ljubljana, Jure BAJC, SNŠ Ljubljana

skupina B (elektrika in magnetizem)

1. nagrada: Pavle POPOVIČ, SNŠ Ljubljana
3. nagrada: Janez JAKLIČ, SENŠ Kamnik, Leon MAVRIČ, SNŠ Ljubljana

skupina C (optika in atomika)

1. nagrada: Grega CIGLER, SNŠ Ljubljana
3. nagrada: Alenka MERTELJ, CSUI Jesenice

Po končanem tekmovanju je zvezna tekmovalna komisija glede na dosežene rezultate izbrala pet najboljših za olimpiado v Veliki Britaniji, in to Ivana RISTIĆA, Petra MAKSIMOVIĆA (oba iz Srbije), Donka DONJERKOVIĆA (iz Hrvatske), Pavla POPOVIĆA ter Grega CIGLERJA (iz Slovenije).

Naloge

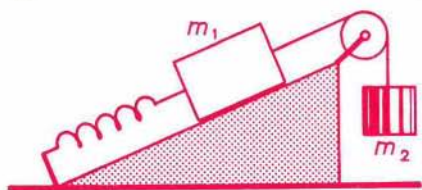
Skupina A

1. Nihajni čas je pri nekem fizikalnem pojavu odvisen od tlaka, gostote in energije na naslednji način:

$$T = p^a \rho^b W^c$$

Določi eksponente a , b in c tako, da se bodo enote ujemale.

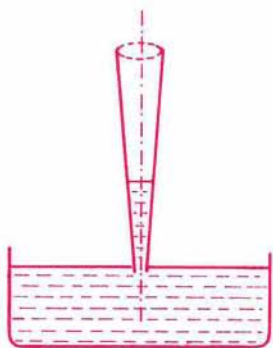
2.



Na vrhu klanca je pritrjen valj z maso 1 kg, ki je vrtljiv okrog vodoravne osi. Prek valja je napeljana tanka neraztegljiva vrv, na katero sta pritrjeni telesi z maso $m_1 = 5$ kg in $m_2 = 10$ kg. Koeficient trenja med telesom z maso m_1 in klancom je 0,01. Telo z maso m_1 je pritrjeno na vzmet s koeficientom $k = 10$ N/m. Vzmet je s svojim drugim koncem pritrjena ob dnu klanca. Določi hitrost, s katero bo telo z maso m_2 udarilo ob tla, če je bilo v začetku na višini $h = 2$ m. Naklon klanca je 40° , trenje pri vrtenju valja zanemari.

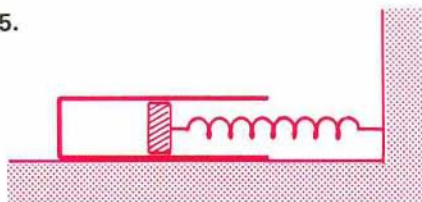
3. S temena večje kroglice z radijem R se zakotali homogena kroglica z radijem r . Njena začetna hitrost je nič, koeficient trenja med kroglo in kroglico je 0,25. Do nekega kota α se kroglica kotali brez drsenja. Določi ta kot.

4.



Kapilara ima obliko presekanega stožca, ki ima pri dnu radij r_0 . Zelo malo je potopljena v tekočino, ki idealno omoči njene stene. Kot pri vrhu osnega preseka stožca je 2α . Določi, na katero višino se dvigne tekočina v kapilari. Analiziraj dobljeno rešitev. Koeficient površinske napetosti je γ , gostota tekočine ρ .

5.



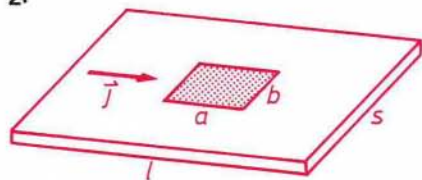
V valju z dolžino $2L$ je bat s površino S in z zanemarljivo maso. Valj leži na vodoravni podlagi, koeficient

trenja med njim in podlago je μ . V zaprtem delu valja je idealni plin s temperaturo T_0 in tlakom p_0 . Med nepremično steno in batom je pritrjena vzmet s koeficientom k . Kolikšna bi morala biti temperatura plina v valju, da bi se njegova prostornina podvojila? Trenje med batom in valjem zanemarimo, masa valja je m , zunanji tlak p_0 .

Skupina B

1. Dve enaki, naelektreni homogeni kroglici, ki visita na enako dolgih nitkah, sta potopljeni v petrolej. Določi gostoto kroglic, če je kot med vrvicama v petroleju in zraku enak. Gostota petroleja je 800 kg/m^3 , dielektričnost petroleja je 2.

2.



Upornik ima obliko pravokotne plošče s pravokotno režo, katere robovi (a in b) so vzporedni z robovi plošče (slika). Dokaži, da je razmerje upora (R) z uporom plošče brez reže (R_0) odvisno samo od a/l in b/s , kjer sta l in s robova plošče. Kateri upor je večji?

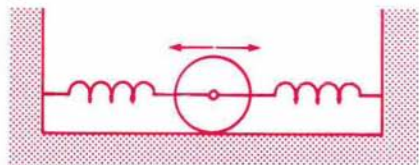
3. Določi kapaciteto ploščatega kondenzatorja s ploščama s ploščino S v razdalji L , če vtaknemo vanj vzporedno s ploščama

- ploščico dielektrika z dielektričnostjo ϵ in z debelino d ($d < L$);
- dve plošči z debelinama d_1 in d_2 ($d_1 + d_2 < L$) in z dielektričnostma ϵ_1 in ϵ_2 ;
- kovinsko ploščo z debelino d_1 in dielektrično ploščo z debelino d_2 ter dielektričnostjo ϵ_2 .

Kako pa je v primeru večjega števila plošč iz dielektrika in iz kovine?

4. Kovinska palica z maso m in z dolžino L visi na dveh enako dolgih prevodnih vzmetih s koeficientom $k/2$, ki sta pripeta na koncih palice. Palica je v homogenem magnetnem polju, pravokotnem na palico in na vzmeti. Vzmeti sta povezani s kondenzatorjem s kapaciteto C . Induktivnost, upor ter kapaciteto palice in vzmeti zanemarimo. Palico potegnemo navzdol tako, da je vzporedna s prejšnjo lego in jo spustimo. Določi frekvenco nihanja palice.

5.



Homogena krogla z maso m na vodoravni podlagi je z dvema vzmetema pritrjena na steni. Konstanti vzmeti sta k_1 in k_2 . Kroglo malo izmaknemo iz ravnovesja, da se začne kotaliti sem—tja brez trenja. Določi frekvenco nihanja krogle. Kolikšna bi bila ta frekvenca, če bi namesto krogle imeli valj?

Skupina C

1. Konkavno in konvexsko zrcalo sta obrnjeni drugo proti drugemu in imata skupno optično os. Krivinska radija za oba sta R , razdalja med temenoma pa je $2R$. V kolikšni razdalji od konkavnega zrcala moramo postaviti točkast izvir svetlobe S , da se bo curek svetlobe po odboju na konkavnem ter nato na konvexnem zrcalu vrnil v svetilo?

2. Debela steklena plošča z lomnim kvocientom n_3 je prevlečena s tanko plastjo snovi z lomnim kvocientom n_2 . Pravokotno na zgornjo površino vpada vzporeden enobarven snop svetlobe z valovno dolžino λ . Odbiti snop svetlobe je zaradi interference maksimalno oslavljen. Določi, pri kolikšni debelini plasti (d) je to mogoče. Lomni kvocient okolice je n_1 , pri čemer je $n_3 > n_2 > n_1$.

3. Žarek γ z energijo $0,2 \text{ MeV}$ pade na kovinsko ploščico in izbije iz nje elektron, ki nato prileti v magnetni spektrograf z gostoto magnetnega polja $B = 10^{-2} \text{ T}$. Določi radij krožnice elektrona v spektrografu. Izstopno delo ploščice je $4,5 \text{ eV}$.

4. Dva protona sta v razdalji $2a$, okrog njiju pa kroži elektron v osnovnem stanju in v ravnini, ki je pravokotna na zveznico protonov in jo razpolavlja. Določi razdaljo a pri pogoju, da elektron kroži na orbiti $r = 2a$.

5. Vodikov atom v osnovnem stanju trči z drugim vodikovim atomom, ki je tudi v osnovnem stanju in miruje. Kolikšna mora biti najmanj hitrost atoma, da je trk neprožen? Masa vodikovega atoma je $1,67 \cdot 10^{-27} \text{ kg}$, ionizacijska energija pa $13,6 \text{ eV}$.

Skupina O

1. Mimo opazovalca, ki stoji na peronu, pelje vlak. Dolžina lokomotive in vagonov je po 12 m . Masa vlaka je 1000 ton . Opazovalec izmeri, da je lokomotiva vozila mimo njega 1 s , prvi vagon pa $1,5 \text{ s}$. Iz teh podatkov izračunaj:

- a) razdaljo od opazovalca, v kateri se ustavi prednji del lokomotive,
 - b) silo, ki ustavlja vlak,
 - c) delo te sile na tej razdalji.
2. Kamen z maso 10 kg pade z višine 30 m na tla. Koliko toplote se sprostí ob udarcu na tla, če se 10% celotne energije kamna porabi za premagovanje upora zraka na celi poti? Če bi se vsa toplota, sproščena pri udarcu ob tla, uporabila za segrevanje vode, bi se izbrana množina vode segrela za 5°C . Določi to množino vode.
3. Kos kovine z maso 800 g tehta v bencinu 7,2 N, potopljen v neko drugo tekočino pa 7,5 N. Gostota bencina je $0,7\text{ kg/m}^3$. Določi gostoto kovine in druge tekočine.
4. Elektron izstopi brez začetne hitrosti iz negativne plošče kondenzatorja in se začne gibati proti pozitivni plošči. Plošči sta 5 mm narazen, med njima pa je napetost 30 V. Kolikšna sila deluje na elektron? Kolikšna sta pospešek elektro-na in hitrost, s katero se zaleti v pozitivno ploščo? Masa elektrona je $9.1 \cdot 10^{-31}\text{ kg}$, naboj pa $1,6 \cdot 10^{-19}\text{ As}$.
5. Na kolikšno razdaljo še lahko prenesemo električno delo s transformator-ske postaje pri napetosti 5 kV s pomočjo bakrenega prevodnika s presekom 10 mm^2 tako, da je moč na porabniku z uporom $1,6\text{ k}\Omega$ enaka 10 kW? Izračunaj izgubo moči v odstotkih. Specifični upor bakra je $1,75 \cdot 10^{-8}\text{ }\Omega\text{m}$.

Iztok Kukman

POJASNILO

V letošnji tretji številki Preseka sem pod naslovom Mladim Vegovcem za ogrevanje objavil naloge, ki sem jih izbral izmed nalog, ki so jih učenci v preteklem šolskem letu reševali na regionalnih in republiških tekmovanjih. Nekaj nalog pa je izbranih izmed predlogov nalog, ki so jih člani republiške tekmovalne komisije predlagali za občinska in republiška tekmovanja za Vegova priznanja, pa niso bili sprejeti, a so se mi zdeli zanimivi. Nekatere naloge so bile tudi že objavljene, kot npr. v biltnu XX. republiškega takmičenja mladih matematičara osnovnih škola SR Srbije, ki je bilo v lanskem letu v Kraljevu.

Ob tej priliki se opravičujem vsem prizadetim, ker tega pojasnila nisem zapisal ob nalogah.

Aleksander Potočnik

RAZSTAVA DRUŠTVENIH PUBLIKACIJ

Pri društvu matematikov, fizikov in astronomov SR Slovenije izhajata poleg društvenega glasila Obzornik za matematiko in fiziko ter univerznih učbenikov tudi Presek — list za mlade matematike, fizike in astronome in računalnikarje ter knjige v zbirki Sigma. Presek je namenjen predvsem popularizaciji teh strok med učenci v osnovni šoli in na prehodu v srednjo šolo. Knjige Sigma pa so namenjene predvsem dijakom v srednjih šolah. V imenu društva to literaturo posredujejo mladini na šolah učitelji strokovnih predmetov. Da bi jo še bolj približali mladim bralcem, so dijaki 1.h. razreda naravoslovno—matematične šole v Ptuj pripravi v času od 30.12. 1986 do 23.1.1987 razstavo knjig in revij, ki jih je trenutno možno kupiti pri Društvu matematikov, fizikov in astronomov SRS. Razstava je vzbudila veliko zanimanje med 2500 učenci našega srednješolskega centra. Podobne akcije priporočamo tudi drugim srednjim šolam v Sloveniji.

Vlasta Kokoč—Voljč



PRVO REPUBLIŠKO TEKMOVANJE IZ LOGIKE

Po skoraj enoletnih pripravah je 27. septembra *Komisija za logiko pri Zvezi organizacij za tehnično kulturo* izvedla prvo republiško tekmovanje iz logike. Tekmovanje je bilo namenjeno učencem sedmih in osmih razredov osnovnih šol ter učencem prvega razreda srednjega izobraževanja. Tako je Komisija tudi tekmovalce razvrstila: v skupini sedmega razreda je bilo 41, v skupini osmega razreda 61 in v skupini prvega letnika 21 učencev.

Kot pri vsakem prvem poskusu je bilo tudi tu nekaj težav, saj sestavljalci niso imeli dovolj izkušenj za izbiro primernih nalog. Druga težava je bila povezana s prijavljanjem, saj so se tekmovalci prijavljali v preteklem šolskem letu. Tako se je zgodilo, da je kakšen tekmovalec zašel v nižjo skupino.

Za reševanje treh nalog so tekmovalci imeli 90 minut časa.

Oglejmo si naloge:

Naloge za 7. razred

1. Trije igralci golfa — Tomaž, Dore in Hinko — gredo po poti. Tomaž vedno govori resnico, Dore in Hinko pa se včasih tudi zlažeta.



TOMAŽ JE V KREDINI.



JAZ SEM DORE,



V KREDINI JE HINKO.

Kje je kdo?

2. Štirje športniki — Klemen, Peter, Pavel in Tone — so po treningu sedli za kvadratno mizo vsak ob eni strani. Eden je nogometaš, drugi telovadec, tretji drsalec in eden plavalec.

Plavalec je sedel levo od Petra.

Telovadec je sedel nasproti Klemena.

Pavel in Tone sta sedela eden poleg drugega.

Eden od fantov z imenom na "P" je sedel levo od drsalca.

Kdo je nogometaš?

(Pri reševanju naj bo Petrov sedež označen takole:



3. V Kopru, Kranju in na Ptuju živijo Kranjc, Kovačič in Pipan. Eden je kovač, drugi pečar in tretji pleskar. Kranjc ne živi v Kranju, čeprav vsi njegovi sorodniki živijo v Kranju. Pri dveh moških se prva črka poklica in mesta, v katerem živi, ujema s prvo črko priimka. Kranjc je pleskarjev svak. Kje kdo živi in kateri poklic opravlja?

Naloge za 8. razred

1. Tokrat smo na otoku vitezov in oprod. Vitezi vedno govorijo resnico, oprode pa nikoli.

a) Recimo, da srečamo otočane Miha, Tineta in Ceneta. Prva dva sta dala izjavo:

Miha: Vsi trije smo oprode.

Tine: Natanko eden od nas je vitez.

Kaj so naši otočani?

b) Kaj pa, če bi Miha in Tine rekla takole:

Miha: Vsi trije smo oprode.

Tine: Natanko eden od nas je oproda.

Kaj je Cene?

2. Na mizi imamo vse štiri ase navadnega kompleta kart. Obrnjeni so z licem navzdol. Aleška, Breda, Fani in Hana so takole ugibale, kaj je katera karta:



Aleška:	pik	srce	križ	kara
Breda:	srce	srce	kara	kara
Fani:	kara	srce	kara	pik
Hana:	križ	kara	pik	srce

Vsak as je bil vsaj enkrat pravilno imenovan. Dekleta so imela enaka števila pravih ugibanj.

Kako si sledijo asi na mizi?

3. Štirje glasbeniki Ana, Cirila, Boris in Davor so po koncertu sedli za kvadratno mizo vsak ob eni strani. Eden od glasbenikov je violinist, drugi

pianist, tretji flavtist in eden bobnar.

Oseba, ki je sedela nasproti Borisa, je pianist.

Oseba, ki je sedela nasproti Davorja, ni flavtist.

Levo od Ane sedi violinist.

Levo od Cirile ne sedi bobnar.

Flavtist in bobnar sta poročena (eden z drugim).

Kdo je bobnar?

(Pri reševanju vzemi Borisov sedež takole:



Naloge za 1. letnik

1. Na zabavi je bilo pet parov. Pri nekem plesu noben fant ni plesal s svojim dekletom.

Dragovo dekle je plesalo s fantom, katerega dekle je plesalo z Markom. Drago je plesal s Klemenovim dekletom. Primož je plesal z dekletom, katere fant je plesal z Janezovim dekletom.

Kdo je plesal s Primoževim dekletom?

2. Pet deklet si je za novoletna darila dalo štiri knjige tako, da je vsaka tudi dobila štiri knjige. Toda nobeni dve dekleti nista svojih knjig dali na enak način. Tako je na primer ena dala dvema drugima vsaki po dve knjigi.

Breda je vse dala Aleški. Cvetka je dala tri Evi.

Kdo je dal knjige Danici?

3. Miloš in Primož se preizkušata v naslednji igri. Nekdo jima na čelo napiše vsakemu po eno do dveh zaporednih naravnih števil. Vidita seveda število, ki je napisano na čelu drugega, svojega števila pa ne. Pravila določajo, da morata izmenično izjavljati:

“Ne vem, katero je moje število” oziroma na koncu: “Vem, katero je moje število”.

Zmaga tisti, ki prvi ugotovi svoje število.

Predpostavljamo, da se Miloš in Primož ne motita v sklepanju in da sta poštena. Recimo, da je Miloš prvi na potezi.

a) Kdo bo zmagal, če ima Miloš napisano 3, Primož pa 2.

b) Kdo bo zmagal, če ima Miloš napisano 2, Primož pa 3.

c) Dodatno (neobvezno) vprašanje: Ali lahko poveš, kdo zmaga v splošnem primeru?

Komisije, ki so pregledovale rešitve, so vodili: Vladimir BATAGELJ, Peter LEGIŠA in Andreja PRIJATELJ. Pomagali so jim asistenti matematike, študenti elektrotehnike, matematike in računalništva. Učenci so pokazali dobro znanje in veliko jih je rešilo vse naloge pravilno. Komisije so zato gledale predvsem na tekmovalčevo pojasnilo, kako je prišel do odgovorov.

Najbolje so se odrezali:

V sedmem razredu: Vojko REBOLJ, Marko NOVINC, Gregor ŠEGA, Polona MALENŠEK, Mohor BERGANT, Blaž BABIČ, Veronika BRATINA, Eva POLJANEC, Barbara ŠIVC in Urška ŽORŽ;

v osmem razredu: Igor PANIČ, Saša MOHORIČ, Jure ČADEŽ, Jernej BAN, Hana KLASINC, Sašo ŠTEFANČIČ, Aleš ČASAR, Maruša VATOVEC, Sašo REBOLJ in Rok KODRE;

v prvem letniku: Mitja KOLŠEK, Andrej BAUER, Janko PETROVC, Gregor DOLINAR, Rudi DOLGAN, Milan HUDNIK, Matjaž POTRČ, Tomaž MENCINGER, Primož MAVRIČ in Peter MATELIČ.

Za drugo republiško tekmovanje bomo morda uvedli predtekmovanje po območjih in še skupino za drugi letnik srednjih šol. V tej skupini bomo zastavili tudi kakšen šahovski problem. Število nalog pa bomo ob enaki težavnosti povečali na štiri.

Ob generalnem pokrovitelju *Metalki* iz Ljubljane so tekmovanje podprle denarno ali z darili še številne druge organizacije.

Izidor Hafner

KRIŽANKE – VABILO

Naročnike Preseka, člane Društva matematikov, fizikov in astronomov SR Slovenije ter druge vabimo k sodelovanju. Iščemo občasne ali stalne sodelavce lista za mlade matematike, fizike in astronome za sestavljanje najrazličnejših križank: slikovnih, številskih, itd. Velikost križank je lahko dvostranska ($25 \times 16 \text{ cm}^2$), enostranska ($11 \times 16 \text{ cm}^2$), ali manjša. Sestavljalcu morajo upoštevati le zahtevo po strokovni vsebini, ki naj se nanaša na aktualne dogodke doma in v svetu, vsebino lista itd. Objavljene prispevke bomo honorirali, neobjavljene pa vrnili avtorju s pripisom mnenja strokovnega urednika. Le korajžno na delo!

Ciril Velkovrh

PREMISLI IN REŠI

VSOTA DVEH POTENC – REŠITEV IZ P-3

Dobili smo 2⁶ rešitev, vse pravilne, poslali so jih Matija AGREŽ iz Podnarta, Martina BAJT iz Cerknice, Tomaž BAJT iz Cerknice, Vladimir BENSA iz Nove Gorice, Vid BOBNAR iz Škofje Loke, Grega BREČKO iz Trzina, Silvan BUCIK iz Tolmina, Tomaž BURKELJC iz Trbovelj, Andreja CVERLE iz Slivnice, Aleš ČASAR iz Murske Sobote, Martina DENŽIČ iz Podčetrтка, Sašo DOLENC iz Ljubljane, Rudi DOLGAN iz Ljubljane, Jernej DOLŽAN z Golnika, Aljoša FUX iz Brežic, Marko GOMBAČ iz Postojne, Andreja GOMBOC iz Murske Sobote, Tina GORNIK iz Kranja, Jože GÖNCZ iz Lendave, Mojca GROSAR iz Trbovelj, Jana HANČIČ iz Ljubljane, Boštjan HAUPTMAN iz Šmartnega pri Litiji, Jana JELENC iz Spodnje Idrije, Bogdan JUG iz Tolmina, Branko JURICH s Ptuja, Milan KAMBIČ z Jesenic, Darja KASTELIC iz Mirne peči, Franc KERNČ iz Mirne peči, Polona KOLENC iz Mirne peči, Mito KOT iz Migojnice, Jože KOVAČ iz Idrije, Matjaž KUMAR iz Mirne peči, Vera LEBAN iz Tolmina, Vanja LJUBETIČ iz Tolmina, Robert MEOLIC iz Bakovec, Vojka MELINC iz Tolmina, Tanja METELKO iz Kopra, Jelena MILOŠEVIČ iz Ljubljane, Roman MODIC iz Ljubljane, Adrian MUSTAR iz Krškega, Erik OTT iz Raven, Milena PISKAR iz Motnika, Tom PLACER iz Kopra, Špela PRIMC iz Ljubljane, Sandi ROZMAN iz Postojne, Andreja RUPNIK iz Poljčan, Tomaž RUS iz Ljubljane, Barbara SEVER iz Šempetra, Tomaž SIMČIČ iz Stične, Vladka ŠETINA iz Mengša, Milan ŠERNEK iz Velike Polane, Bogdan TERTINEK iz Bistrice, Gorazd TRUŠNOVEC iz Idrije, Milan TURK iz Stopič, Lidija TUŠEK iz Desternika, Lojze VESEL iz Smlednika, Primož VIZLAR iz Ljubljane, Rudi VOLF iz Tržiča, Janez VOLK iz Straže, Robert VREČA iz Maribora, Aleš VAVPETIČ iz Domžal, Andrej ZALAR iz Šentjurja, Emil ŽAGAR iz Velikih Lašč in Simona ŽLOF iz Šentjurja.

Izžrebali smo Vojko Melinc, Lojzeta Vesela, Špelo Primc, Polono Kolenc in Branka Juriča; poslali smo jim knjigo R. Jamnik: *Teorija iger* iz zbirke Sigma.

Za pregledovanje rešitev sem prosil teto Amalijo, ki je takole povzela vaše odgovore.

Seveda takoj opazimo, ker pač A in B nastopata simetrično v enačbi, da je mogoče vlogi neznank zamenjati. Torej se lahko omejimo na primer, ko je $A \leq B$.

Kako pa naprej? Lojze iz Smlednika predlaga, da zapišemo vse možne vsote pozitivnih celih števil, ki dajo rezultat 100 in ugotovimo, če sta seštevanca zahtevani potenci.

Janez iz Straže in Andreja iz Murske Sobote sta pa pregledala vse pare (A, B) števil med 1 in 100. Računsko delo sta kajpak naložila računalniku.

Pri izbranem A je izraz $A^B + B^A$ odvisen še od B in je tem večji, čim večji je B . Zato lahko z izbranim A pričakujemo kvečjemu eno rešitev. Pa poizkusimo.

$A = 1$: očitna rešitev $B = 99$

$A = 2$: za B vstavimo zapovrstjo 2, 3, 4, 5 in končno 6, ki nam da rešitev tudi v tem primeru

$A = 3$: če vstavimo $B = 3$, dobimo 54, premalo, pri $B = 4$ pa že 145, kar je preveč

$A = 4$: tu pa je vsak B že prevelik in da vsoto potenc večjo od sto, kar se seveda zgodi tudi pri večjem A .

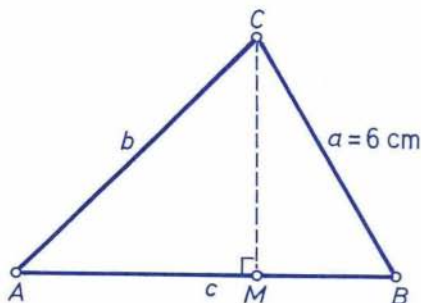
Približno po taki poti so šli Silvan iz Tolmina, Vid iz Škofje Loke, Robert iz Bakovec in Tanja iz Kopra.

Rešitve so torej štiri $(1, 99)$, $(99, 1)$, $(2, 6)$, $(6, 2)$. Zanimivo je, na koliko različnih načinov se da reševati takole preprosto nalogo — včasih kar z uganjkanjem.

VIŠINSKI TRIKOTNIK

Na sliki je trikotnik s koti 45° , 60° , 75° . Višina na stranico c ga deli na polovico kvadrata in polovico enakostraničnega trikotnika. Narišimo še drugi dve višini, nožišča višin označimo z M , N , P in zvežemo med sabo, da dobimo višinski trikotnik. Določi kote in stranice višinskega trikotnika, če je najkrajša stranica prvotnega trikotnika $a = 6$ cm.

Rešitve pošljite do 10. junija 1987 na naslov PRESEK (za PIR), 61111 Ljubljana, Jadranska 19, pp 64.



Peter Petek

Vodoravno:

1. Diagonala kvadra s stranicami $a = 18, b = 6, c = 9$.
3. Vrednost izraza $(x^2 + 1)^2$, kjer je $a = 4$ in $8x = 100 - (91 - (25 - (5 - a) a) a) a$
6. Vrednost izraza $P + 2800$, kjer je P površina enakostranične prizme z rombo kot osnovno ploskvijo. Njegovi diagonalni se razlikujeta za 6, ena diagonala pa je $\frac{3}{4}$ druge.
8. Prostornina kvadra s površino 288 in dvema robovoma 12 in 6.
9. Vrednost izraza P/π , kjer je P ploščina kroga opisanega okrog pravokotnega trikotnika s katetama 30 in 40.
11. Štirimestno število, ki ima desetiški zapis z zaporednimi lihimi števili.
13. Vrednost izraza

$$\frac{\frac{8}{3} : (\frac{1}{4} + 2\frac{1}{2} \cdot 3 - 3\frac{1}{2})}{(3\frac{1}{2} - 2\frac{3}{5}) \cdot -\frac{1}{147}}$$

pomnožena s 350.

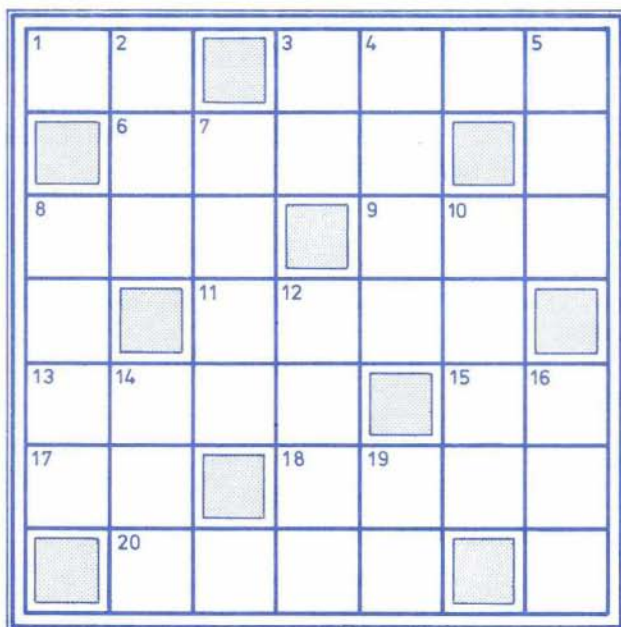
15. Dolžina daljice AC , kjer točko C dobimo takole: na daljici AB z dolžino 21 določimo točko M , da bo $\overline{AM} = 5$, skozi točko M postavimo pravokotnico na AB in na njej točko C izberemo tako, da bo $\overline{BC} = 20$.
17. Vrednost izraza $10P$, kjer je P ploščina trapeza z elementi $a = 6, c = 3, v = \frac{6}{5}$.
18. Štiri zaporedna naravna števila.
20. Vrednost izraza $6x(x^2 + 1)$, kjer je x polmer kroga s ploščino $P = 81\pi$.

NALOGE

ZANIMIVE TROJKE ŠTEVIL — Rešitev naloge s str. 327

Poljubna tri zaporedna naravna števila imajo to lastnost, velja namreč:
 $n(n+2) = (n+1)^2 - 1$ oziroma $n(n+2) = (n+1-1)(n+1+1)$.

Dušan Modic



Navpično:

2. Vrednost izraza $P + 4$, kjer je P ploščina kvadrata z diagonalo $12\sqrt{2}$.
3. Število, katerega tretjina in sedmina dasta skupaj 30.
4. Vrednost izraza $100(x - 1) + x + 1808$, kjer je x število, ki zmanjšano za svojo petino da 44.
5. Vrednost izraza P/π , kjer je P površina telesa, ki nastane z rotacijo lika sestavljenega iz pravokotnika ($a = 18, b = 9$) in polkroga nad daljšo stranico okrog svoje simetrijske osi.
7. Vrednost izraza $(3 : 16) \cdot 10000$.
8. Ploščina trapeza z osnovnicama 74 in 52 ter višino 45.
10. Za 2 zmanjšan kvadrat dvomestnega števila, katerega vsota cifer je 10.
12. Vrednost izraza $(x^2 - 10)(x + 1)$, kjer je x rešitev enačbe

$$\frac{1}{2} \left(x - \frac{1}{3} \right) - \frac{2}{3} \left(x - \frac{2}{3} \right) + \frac{5}{9} = -2$$

14. Kvadrat dvomestnega števila z vsoto cifer 3.
16. Vrednost izraza $360 - 3 \cdot (72 : 6 - 5 \cdot 2 - 1)$.
19. Vrednost izraza $40 - (20 - (7 + (6 + 3))) + 8 : 4$

Stavra V. Radojković

REŠITVE NALOG

30. REPUBLIŠKO TEKMOVANJE SREDNJEŠOLCEV IZ MATEMATIKE — rešitve nalog s str. 318

Prvi razred

1. Dedovo starost označimo z x , babičino z y , vnukovo pa z z . Pred devetimi leti je veljalo

$$x - 9 = (y - 9)(z - 9)$$

Od tod sledi

$$x - y = z - 9$$

Danes velja

$$x + y = m \cdot z$$

kjer je m naravno število. Od tod dobimo

$$x + y + z = (m + 1)z$$

Ker ima vsota vseh starosti le tri celoštevilске delitelje, pri čemer je eden vedno 1, drugi pa število samo, je nujno $m + 1 = z$ in je z praštevilo. Zato je

$$x + y + z = z^2$$

Čez devet let bo vsota starosti popoln kvadrat, torej

$$(x + 9) + (y + 9) + (z + 9) = z^2 + 27 = n^2$$

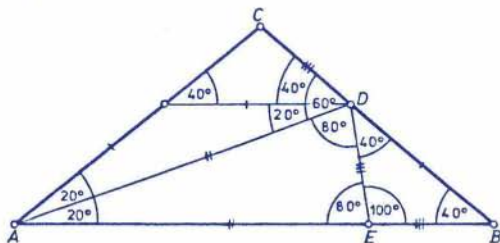
kjer je n neko naravno število. Sledi

$$n^2 - z^2 = (n + z)(n - z) = 1 \cdot 27 = 3 \cdot 9$$

iz česar izračunamo, da je $z = 13$, ali pa $z = 3$. Vnuk je star vsaj 9 let, zato je rešitev samo $z = 13$. Iz $x - y = 4$ in $x + y = 156$ dobimo še x in y . Ded je star 80 let, babica 76 let, vnuk pa ima 13 let.

2. Označimo $ab - cd$ z D . Potem velja $a = h \cdot D$, $b = k \cdot D$, $c = l \cdot D$ in $d = m \cdot D$ kjer so h , k , l in m cela števila. Od tod sledi $ab - cd = D^2(hk - lm)$ oziroma $1 = D(hk - lm)$, torej $D|1$, kar pomeni, da je $|D| = 1$.

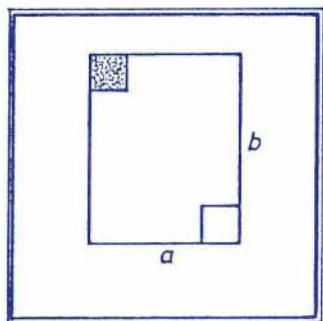
3. Točko E na stranici AB določimo tako, da bo $AD = AE$. Očitno je trikotnik $\triangle BDE$ enakokrak s koti 40° , 40° , 100° . Sedaj pa določimo na stranici AC točko F tako, da bo $FD \parallel AB$. Potem so tudi koti v trikotniku $\triangle FDC$ enaki 40° , 40° , 100° . Od tod sledi $\sphericalangle ADF = 20^\circ = \sphericalangle FAD$, se pravi, da je trikotnik $\triangle ADF$ enakokrak in $AF = FD$. Zaradi $FD \parallel AB$ pa je tudi $AF = BD$.



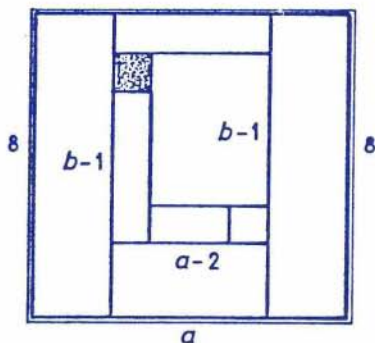
Torej je $FD = BD$ in sta trikotnika $\triangle BDE$ in $\triangle FDC$ skladna. Sledi $DC = EB$. Sedaj je očitno

$$AB = AE + EB = AD + DC$$

4. Očitno sta (glej sliko 1) a in b nasprotni parnosti. Privzeti smemo, da je a sod. Potem razrežemo šahovsko ploščo kot kaže slika 2. Ker imajo vsi pravokotniki vsaj po eno sodo stranico, se jih očitno da pokriti z dominami (1×2). Dokaz je končan.



Slika 1



Slika 2

Drugi razred

1. Dokazujemo s protislovjem. Če bi namreč veljalo

$$(a^2 - b^2)/(ab) = k, \text{ kjer je } k \in \mathbb{Z},$$

bi lahko enakost zapisali tudi takole:

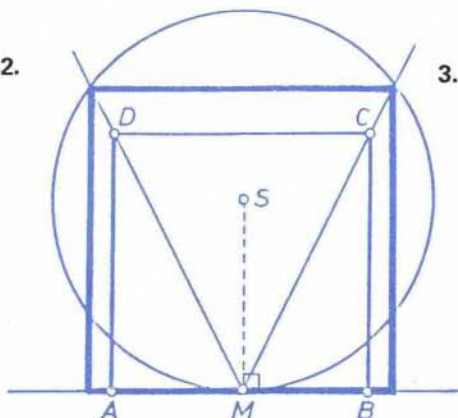
$$a^2 - k \cdot a \cdot b - b^2 = 0$$

Če gledamo to enakost kot enačbo za a , mora biti diskriminanta

$$D = k^2 b^2 + 4b^2 = b^2(k^2 + 4)$$

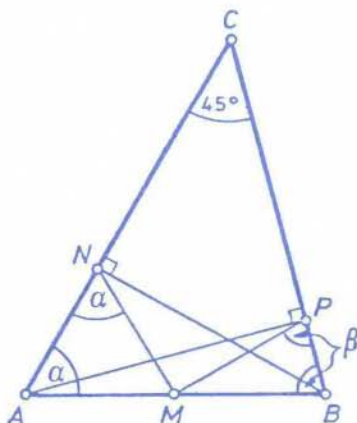
celo število. Ker število $k^2 + 4$ ni popoln kvadrat za nobeno celo število k razen za $k = 0$ (kar je nemogoče zaradi $|a| \neq |b|$), smo dobili protislovje.

2.



Najprej konstruirajmo poljuben kvadrat $ABCD$, ki se dotika krožnice v točki M z razpoloviščem stranice AB (glej sliko), nato pa ga smo še ustrezno povečamo oziroma pomanjšamo z ravninskim raztegom iz točke M . Iskana oglišča torej ležijo zaporedoma na premicah MA , MC , MD in MB .

3.



Ker je trikotnik $\triangle ABN$ polovica pravokotnika, je dolžina daljice NM enaka dolžini polovice diagonale in je zato $NM = \frac{1}{2} AB$. Analogno dobimo tudi $PM = \frac{1}{2} AB$. Pokazati moramo le še, da je $\sphericalangle NMP = 90^\circ$:

$$\begin{aligned}\sphericalangle NMP &= \pi - \sphericalangle AMN - \sphericalangle PMB = \\ &= \pi - (\pi - 2\alpha) - (\pi - 2\beta) = \\ &= 2(\alpha + \beta) - \pi = \pi/2 = 90^\circ\end{aligned}$$

4. Če predpostavimo, da je svetovalec lažnivec, potem laže tudi kralj Artur. Prvi vitez na njegovi levi potemtakem govori resnico, drugi laže, tretji zopet govori resnico, ..., trinajsti govori resnico in je za svetovalca po resnici povedal, da je lažnivec. Vidimo, da je lažnivcev 8, resnicoljubov pa 7, torej se je kralj Artur zlagal, ko je rekel, da je resnicoljubov več. To je tudi v skladu z njegovo prisego. Isto velja tudi za svetovalca. Do sedaj smo dokazali šele, da je kralj Artur lahko lažnivec. Pokažimo še, da ne more biti resnicoljub. V primeru, da svetovalec govori resnico, je resnicoljub tudi kralj Artur. Prvi vitez na njegovi levi je potem lažnivec, drugi resnicoljub, ..., trinajsti laže in se je res zlagal, da svetovalec laže. Lažnivcev je le 7, resnicoljubov pa 8, torej kralj Artur ni prelomil svoje prisege. Prelomil pa jo je svetovalec, ki se je zlagal, da je resnicoljubov za 3 več. Kralj Artur torej laže.

Tretji razred

1. Predpostavimo, da velja

$$\pi > \arg(z_1) \geq \arg(z_2) \geq \arg(z_3) > 0$$

Iz dane enakosti s pomočjo

$$\arg(z_1) + \arg(z_2) + \arg(z_3) \equiv \arg(z_1 z_2 z_3) \pmod{2\pi}$$

sledi

$$\arg(z_1) + \arg(z_2) + \arg(z_3) = \arg(z_1 + z_2 + z_3) + 2k\pi$$

kjer je k enak 0 ali 1.

Če je $k = 0$, upoštevamo $\arg(z_1 + z_2 + z_3) \leq \arg(z_1)$ (glej sliko), sledi

$$\arg(z_2) + \arg(z_3) \leq 0$$

kar je seveda protislovje.

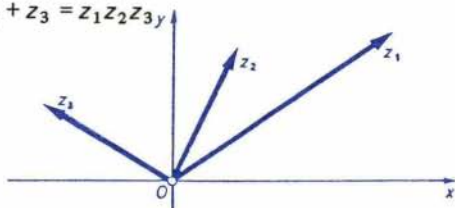
V primeru, ko je $k = 1$, pa upoštevamo $\arg(z_1 + z_2 + z_3) \geq \arg(z_3)$ (glej sliko) in dobimo

$$\arg(z_1) + \arg(z_2) \geq 2\pi$$

kar je zopet protislovje.

Primeri, ko so vsi argumenti danih kompleksnih števil negativni in večji od $-\pi$, nam ni treba obravnavati posebej, saj za kompleksna števila z_1, z_2 in z_3 velja

$$\overline{z_1} + \overline{z_2} + \overline{z_3} = \overline{z_1 z_2 z_3}$$



2. Zadošča, da dokažemo:

$$\frac{1}{2} (\sin x + \sin y) \leq \sin((x + y)/2)$$

za kota x in y z intervala $[0, \pi]$. Če namreč vstavimo v to neenakost namesto x in y prvič α, β , drugič β, γ in tretjič γ, α in vse neenakosti seštejemo, dobimo neenakost, ki jo je treba dokazati. Levo stran faktoriziramo, vse člene prenesemo na desno stran in izpostavimo $\sin((x + y)/2)$, ki je očitno nenegativno število za x in y z intervala $[0, \pi]$. Dobimo

$$\sin((x + y)/2) (1 - \cos((x - y)/2)) \geq 0$$

kar očitno drži. Enačaj velja, ko je $x = y$ oziroma je $\alpha = \beta = \gamma$.

3. Naj bo a k -kratna ničla polinoma $q(x)$. Obstaja tak polinom $r(x)$, da je $q(x) = (x - a)^k r(x)$. Sledi, da je $p(x) = (x - a)^k r(x) + x$ in

$$\begin{aligned} s(x) &= p((x - a)^k r(x) + x) - x = \\ &= ((x - a)^k r(x) + x - a)^k r((x - a)^k r(x) + x) + (x - a)^k r(x) + x - x = \\ &= (x - a)^k [(x - a)^{k-1} r(x) + 1]^k r((x - a)^k r(x) + x) + r(x) \end{aligned}$$

To nam pove, da je tudi k -kratna ničla polinoma $s(x)$. To velja za poljubno ničlo polinoma $q(x)$, zato je dokaz končan.

4. Enačba narisane parabole je očitno oblike $y = ax^2$ (glej sliko). Naj bo (x, y) točka, v katero je prispela druga mravljja. Potem je očitno

$$x : (ax^2) = 1 : (x^2 + a^2x^4)^{1/2}$$

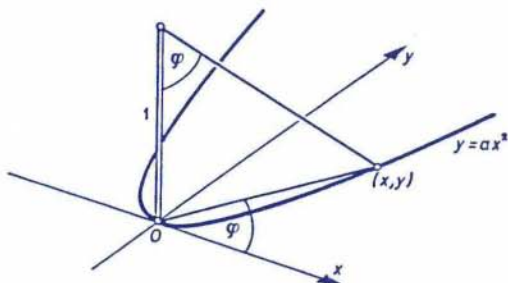
sledi

$$x = \frac{1}{a} (a^2 - 1)^{1/2} \quad \text{in} \quad y = \frac{1}{a} (a^2 - 1)$$

Iz zveze $\operatorname{tg} \varphi = \frac{y}{x} = (a^2 - 1)^{1/2}$ izrazimo $a = (1 + \operatorname{tg}^2 \varphi)^{1/2}$, nato pa še

$$x = \operatorname{tg} \varphi / (1 + \operatorname{tg}^2 \varphi)^{1/2} \quad \text{in}$$

$$y = \operatorname{tg}^2 \varphi / (1 + \operatorname{tg}^2 \varphi)^{1/2}.$$



Četrti razred

1. Če sta števili a in b enaki, ni kaj dokazovati. Če sta različni, izraz $A = a^{1/3} + b^{1/3}$ kubiramo in dobimo

$$a + 3A(ab)^{1/3} + b \in \mathbf{Q}$$

oziroma, če še enkrat upoštevamo, da je A racionalno število

$$(ab)^{1/3} \in \mathbf{Q} \quad (1)$$

Sedaj pa A še kvadrirajmo

$$a^{2/3} + 2(ab)^{1/3} + b^{2/3} \in \mathbf{Q}$$

Ob upoštevanju (1) izvemo $a^{2/3} + b^{2/3} \in \mathbf{Q}$. Dobljeni izraz pomnožimo z (1), kar nam da

$$a \cdot b^{1/3} + b \cdot a^{1/3} \in \mathbf{Q} \quad (2)$$

Odštejemo še $b \cdot A$ in dobimo $(a - b) \cdot b^{1/3} \in \mathbf{Q}$. Torej je res $b^{1/3} \in \mathbf{Q}$ in potem tudi $a^{1/3} \in \mathbf{Q}$.

2. V enakosti $f(n) = f(0) + f(1) + \dots + f(n-1)$ zamenjamo prvih $n - 1$ členov z $f(n - 1)$ in dobimo

$$f(n) = 2 \cdot f(n - 1)$$

oziroma

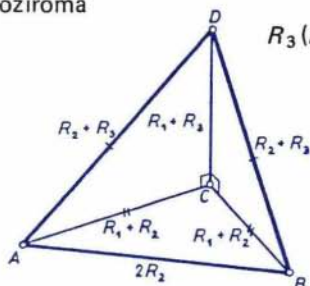
$$f(n) = 2^{n-1}$$

Iskano število je torej $1 + 1 + 2^2 + 2^4 + \dots + 2^{2n-2} = (2^{2n} + 2)/3$.

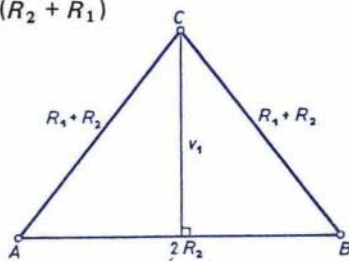
3. Središča krogel označimo z A, B, C in D (glej sliko). Enakokraka trikotnika $\triangle ABC$ in $\triangle ADB$ očitno ne moreta biti istočasno pravokotna. Zato morata biti pravokotna trikotnika $\triangle ACD$ in $\triangle BCD$ ter velja

$$(R_2 + R_3)^2 = (R_1 + R_3)^2 + (R_1 + R_2)^2$$

oziroma



$$R_3(R_2 - R_1) = R_1(R_2 + R_1)$$



Če upoštevamo, da so R_1, R_2 in R_3 zaporedni členi aritmetičnega zaporedja, velja $R_3 = R_2 + (R_2 - R_1) = 2R_2 - R_1$, odkoder dobimo $2R_2(R_2 - R_1) = 0$ oziroma $R_2 = 2R_1 = 2R$, torej je $R_3 = 3R$.

Izrazimo še v_1 (glej sliko) in V :

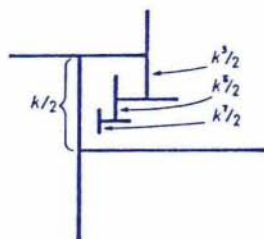
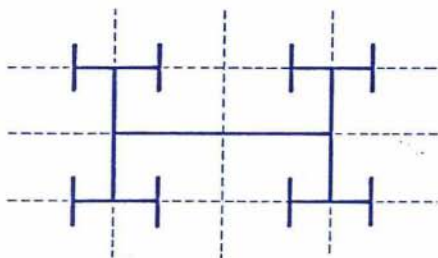
$$v_1 = (9R^2 - 4R^2)^{1/2} = R \sqrt{5}$$

$$V = 8R^3 \sqrt{5}/3$$

4. a) Dolžina drevesa D_n je

$$1 + 2k + 4k^2 + \dots + (2k)^{n-1} = ((2k)^n - 1)/(2k - 1)$$

b) Če na vsakem koraku narišemo še simetralo vsake nove veje (glej sliko: simetrale so narisane s prekinjeno črto), je očitno dovolj, da "prepričamo" pre-



pletanje v enem samem pravokotniku.

Torej mora veljati (glej sliko) $k/2 \geq k^3/2 + k^5/2 + k^7/2 + \dots$ oziroma

$$1 \geq k^2/(1 - k^2)$$

in končno $k \leq 1/\sqrt{2}$.

Aleksandar Jurišić

REŠITVE NALOG IZ

PRVEGA REPUBLIŠKEGA TEKMOVANJA IZ LOGIKE

7. razred

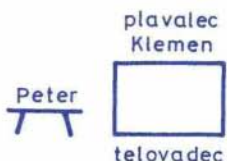
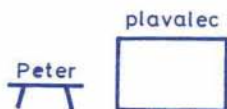
1. Izjave, ki so jih dali igralci, nasprotujejo ena drugi. Resnična je samo ena, to je Tomaževa izjava. Prvi z leve gotovo ni Tomaž, ker trdi, da je Tomaž v sredini. Ker je hkrati ta izjava napačna, Tomaž ni v sredini.

Tomaž je torej na desni. Njegova izjava je resnična. **Torej je Hinko v sredini. Levo je Dore.**

2. Iz podatkov sklepamo: Peter ni plavalec. Klemen ni telovadec. Narišimo pravokotno mizo in določimo sedež za Petra:

Pavel in Tone sedita eden poleg drugega, zato eden od njiju sedi nasproti Petru. Klemen torej sedi poleg Petra. **Klemen mora sedeti levo od Petra in je plavalec.** Če bi sedel desno, bi bil nasproti plavalca. Spodaj je telovadec.

Peter ne sedi levo od drsalca (ker sedi levo od telovadca). Peter ni drsalec,



Pavel levo od njega (sedi pa Klemen).
Peter je torej nogometaš.

3. Ker ni dveh poklicev na "K", Pipan živi na **Ptjuju**, je pa pečar ali pleskar. Ker **Kranjc** ne živi v Kranju, pa tudi na Ptjuju ne, živi v **Kopru**. Kovačič potem živi v Kranju. Kranjc ni pleskar, je pa pleskarjev svak, ker pa vsi njegovi sorodniki živijo v Kranju, pleskar živi v Kranju. **Kovačič je torej pleskar.** Pipan, ker ni pleskar, mora biti **pečar**. **Kranjc je kovač.**

8. razred

1. a) Če bi bil Mihov stavek resničen, bi bil Miha vitez, pravi pa, da so vsi trije oprode, torej tudi sam. **Miha je torej oproda.** Vsi trije pa niso oprode. Recimo, da je Tine tudi oproda. Potem je Cene vitez, ker vsi trije niso oprode.

Tedaj je Tinetov stavek resničen in mora biti Tine vitez. To je protislovje. **Tine je torej vitez**, in to edini. **Cene je oproda.**

b) Miha je oproda, toda vsi trije niso. Če je oproda en sam, to je Miha,

sta Tine in Cene viteza. Če sta oprodi dva, potem je Tine tudi oproda, ker je njegova izjava napačna. **Cene je torej vitez** v vsakem primeru.

2. Največ pravih odgovorov bi imeli, če bi bila druga karta srce, tretja ali četrta pa kara. Tedaj bi imeli $3 + 2 + 1 + 1 = 7$ pravih odgovorov. Toda, ker so imela dekleta enako število pravih odgovorov, to število ne more biti 2, ker bi to dalo 8 pravih ugibanj. Torej je bil vsak as uganjen natanko enkrat.

Druga karta z leve je kara (srce odpade).

Četrta karta z leve je pik (kara je že bila, srce odpade, ker je Hana že enkrat zadela).

Tretja karta z leve je križ (kara in Hanin odgovor odpadeta).

Prva karta je srce (Brede še nismo upoštevali oziroma srce je še ostalo).

3. Boris ni pianist, Ana ni violinist. Skiciramo sliko in vstavimo podatke:

Ano lahko postavimo na spodnji sedež ali na desni sedež na sliki (zgornji ne pride v poštev.)

Recimo, da je Ana spodaj, to je desno od Borisa. Boris je levo od nje in zato je violinist.

Ana je bobnar ali flvtist. Zato je poročena, in to z Davorjem (Boris je violinist). Cirila je pianist. Ana je levo od Cirile in ni bobnar. Torej je flvtist in nasproti Davorja. To je protislovje. Ana torej sedi nasproti Borisa in je pianist. Levo od nje je violinist.

Boris je flvtist ali bobnar. Torej je poročen. Toda ne z Ano, ker je pianistka. Poročen je s Cirilo. Davor je zato violinist (spodaj). Nasproti Davorja ni flvtist, zato je to bobnar in to Cirila.

Cirila je torej bobnar.



1. letnik

1. Narišimo razpredelnico in prečrtajmo diagonalne elemente

	D.d.	M.d.	K.d.	P.d.	J.d.
Drago	X	X	✓	X	X
Marko		X	X		✓
Klemen			X		
Primož		✓	X	X	X
Janez			X		X

Sklepamo: Dragovo dekle ni plesalo z Markom. Vnesimo še, da je Drago plesal s Klemenovim dekletom. Prečrtajmo ustrezni stolpec in vrstico. Primož ni plesal z Janezovim dekletom. Primož je plesal z Dragovim ali Markovim dekletom. Recimo, da je plesal z Dragovim dekletom. Potem je Drago plesal z Janezovim dekletom. To ni res, saj Drago pleše s Klemenovim dekletom.

Primož torej pleše z Markovim dekletom. Marko zato pleše z Janezovim dekletom.

Iz pogojev naloge sledi še:

Dragovo dekle pleše z Janezom. Primožovo dekle pleše s Klemenom.

2. Različni načini za grupiranje štirih knjig so:

```

4
3  1
2  2
2  1  1
1  1  1  1

```

Narišimo razpredelnico

dobila dala	A	B	C	D	E
Aleška	0	1	1	1	1
B	4	0	0	0	0
C	0	0	0	1	3
D	0	2	2	0	0
E	0	1	1	2	0

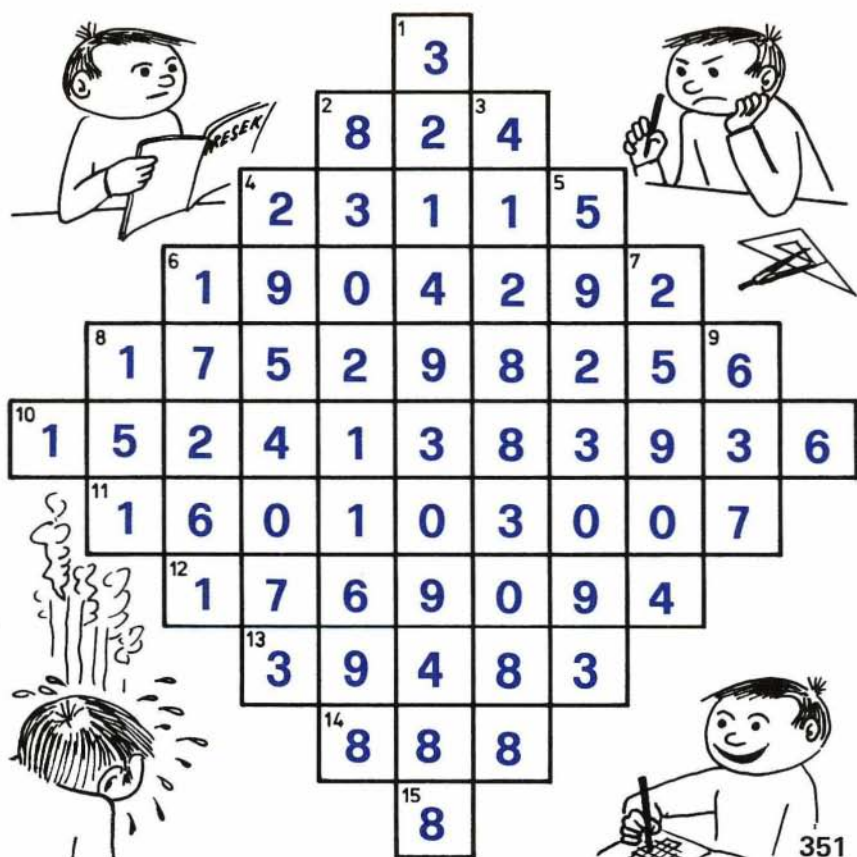
Le Aleška je lahko dala vsaki po eno knjigo, ker druge (razen Brede) Aleški ne morejo dati ničesar. Eva je tako odpravljena. Danica lahko da le dvema, ker treh knjig ne more dati, da dve Bredi in dve Cvetki. Danica lahko dobi dve knjigi le od Eve. Eno dobi od Cvetke (in eno od Aleške).

3. a) Miloš vidi Primožovo 2. Ve, da ima na čelu 1 ali 3, ne ve pa, katero. Na potezi je Primož. Vidi Miloševo 3, ve, da ima 2 ali 4, ne ve pa, katero. Na potezi je Miloš. Ve, da ima 1 ali 3. Toda katero? Če bi imel 1, potem bi Primož vedel, da ima 2. Toda Primož ni vedel. **Zato Miloš ve, da ima 3.**

b) Miloš vidi Primožovo 3. Ve, da ima 2 ali 4, ne ve pa, katero. Primož vidi Miloševo 2, ve, da ima 1 ali 3. Toda če bi imel 1, bi Miloš vedel, da ima 2. Toda Miloš ne ve. **Primož sklepa, da ima 3.**

Izidor Hafner

ŠTEVILSKA KRIŽANKA – Rešitev iz P XIV/4



Vodoravno:

1. 21
3. 6724
6. 4132
8. 288
9. 625
11. 7531
13. 3150
15. 13
17. 54
18. 2345
20. 4428

Navpično:

2. 148
3. 63
4. 7263
5. 405
7. 1875
8. 2835
10. 2114
12. 5022
14. 144
16. 357
19. 38

Stavra V. Radojkovič

PRESEK – LIST ZA MLADE MATEMATIKE, FIZIKE IN ASTRONOME

14. letnik, šolsko leto 1986/87, številka 6, strani 289-352

UREDNIŠKI ODBOR: Vladimir Batagelj (bistrovidec), Dušica Boben (pisma bralcev, stavljenje teksta), Pavla Ranzinger (astronomija), Martin Čopič, Franci Forstnerič (matematika), Bojan Golli (tekmovalna – naloge iz fizike), Pavel Gregorc, Andrej Kmet, Damjan Kobal, Jože Kotnik, Edvard Kramar (odgovorni urednik), Sandi Klavžar in Matija Lokar (računalništvo), Gorazd Lešnjak (tekmovalna – naloge iz matematike), Peter Petek (naloge bralcev, premisli in reši), Tomaž Skulj, Ivanka Šircelj (jezikovni pregled), Miha Štalec (risbe), Marjan Hribar (fizika), Ciril Velkovich (urednik, nove knjige, novice).

Dopise pošiljajte in list naročajte na naslov: Društvo matematikov, fizikov in astronomov SRS – Podružnica Ljubljana – Komisija za tisk, Presek, Jadranska c. 19, 61111 Ljubljana, p.p. 64, tel. (061) 265 – 061 / 53, št. žiro računa 50101–678–47233. Naročnina za šolsko leto 1986/87 je za posamezna naročila 1000.– din, za skupinska naročila pa 800.–, posamez na številka 250.– din/200.– din.

List sofinancirajo Izobraževalna, Kulturna in Raziskovalna skupnost Slovenije

Ofset tisk Časopisno in grafično podjetje DELO, Ljubljana

© 1987 Društvo matematikov, fizikov in astronomov SRS – 359

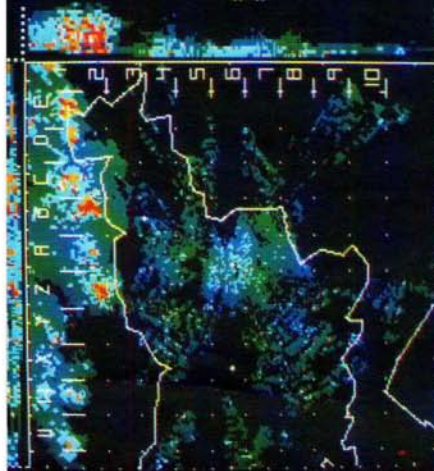
VSEBINA

MATEMATIKA	Magični kvadrati (Alojzij Vadnal)	289
NOVICE	Prof. dr. Alojzij Vadnal, častni član DMFA SRS, umrl (Ciril Velkovrh)	293
FIZIKA	Vremenski radar (Jože Rakovec, foto Rafael Adrinek) I,IV,	294
NALOGE	iz računalništva k članku na str. 305 (Matija Lokar)	301
ASTRONOMIJA	Zvezda, ki pulzira (Marijan Prosen)	302
NOVICE	Obvestilo tekmovalcem za Vegova priznanja (Aleksander Potočnik)	304
RAČUNALNIŠTVO	Podatkovna struktura sklad (Matija Lokar)	305
	Še o uporabi rekurzivnih formul (Marko Razpet)	310
MATEMATIKA	Vsota prvih n naravnih števil (Dragoljub M. Milošević, prev. Franci Forstnerič)	314
NOVICE	Razpis za 5. poletno šolo računalništva	315
TEKMOVANJA	30. republiško tekmovanje iz matematike — rešitve str. 342 (Majda Šavs, Aleksandar Jurišić)	318
PISMA BRALCEV	(Dušica Boben)	322
TEKMOVANJA	Srednješolsko republiško tekmovanje iz fizike (Iztok Kukman)	323
NALOGE	Zanimive trojke števil — rešitve str. 340 (Dušan Modic) . .	327
TEKMOVANJA	Zvezno tekmovanje mladih fizikov (Iztok Kukman)	328
NOVICE	Pojasnilo (Aleksander Potočnik)	332
	Razstava društvenih publikacij (Vlasta Kokol - Voljč) . . .	333
TEKMOVANJA	Prvo republiško tekmovanje iz logike — rešitve str. 348 (Izidor Hafner)	334
RAZVEDRILO	Križanke — vabilo (Ciril Velkovrh)	337
	PREMISLI IN REŠI — Vsota dveh potenc — rešitev iz P3. Višinski trikotnik (Peter Petek)	338
	Matematična križanka — rešitev str. 352 (Stavra V. Radojković)	340
	Številska križanka — rešitev iz P-XIV/4 (Franci Oblak) . . .	351
NA OVITKU	Bela kupola prekriva anteno meteorološkega radarja nad Sevnico. Ob njenem vznožju je generator moči (napajalnik) radarja, v montažni stavbi ob antenskem stolpu pa so običajne kontrolne radarske naprave z zaslonom, poleg tega pa še dva računalnika I A. Dürer, Melanolija (glej članek na str. 289) II Zaporedje radarskih slik, kot so bile zabeležene 1. julija 1985 med 11.25 in 12.58. Vidimo, da so se tega dne pojavile nad Slovenijo tudi nevihtni oblaki, saj rdeča barva označuje že zelo močne radarske odboje. Ob straneh slike so predstavljene tudi vsote odbojev po smereh zahod—vzhod ter jug—sever. (Računalniška obdelava in foto: Rafael Adrinek) IV	

27-Jul-85
16:40:27



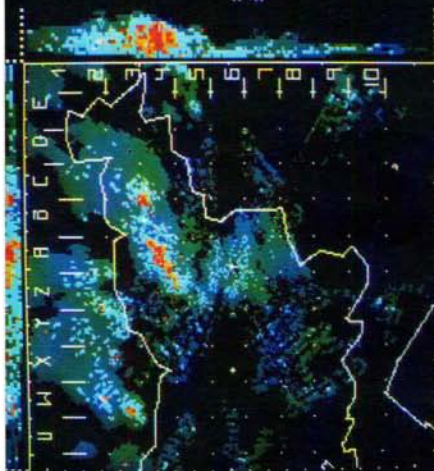
status 126
SUM STC CLT
merilo 1
dB/Sum
42.0
38.0
34.0
30.0
24.0
16.0



27-Jul-85
17:58:27



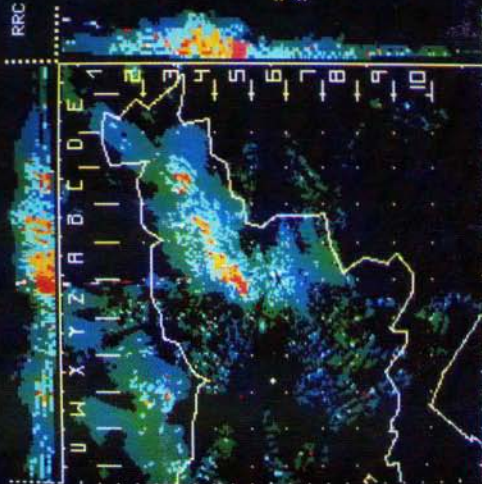
status 126
SUM STC CLT
merilo 1
dB/Sum
42.0
38.0
34.0
30.0
24.0
16.0



RRC Lissa
27-Jul-85
18:28:27



status 126
SUM STC CLT
merilo 1
dB/Sum
42.0
38.0
34.0
30.0
24.0
16.0



RRC Lissa
27-Jul-85
19:22:11



status 126
SUM STC CLT
merilo 1
dB/Sum
42.0
38.0
34.0
30.0
24.0
16.0

