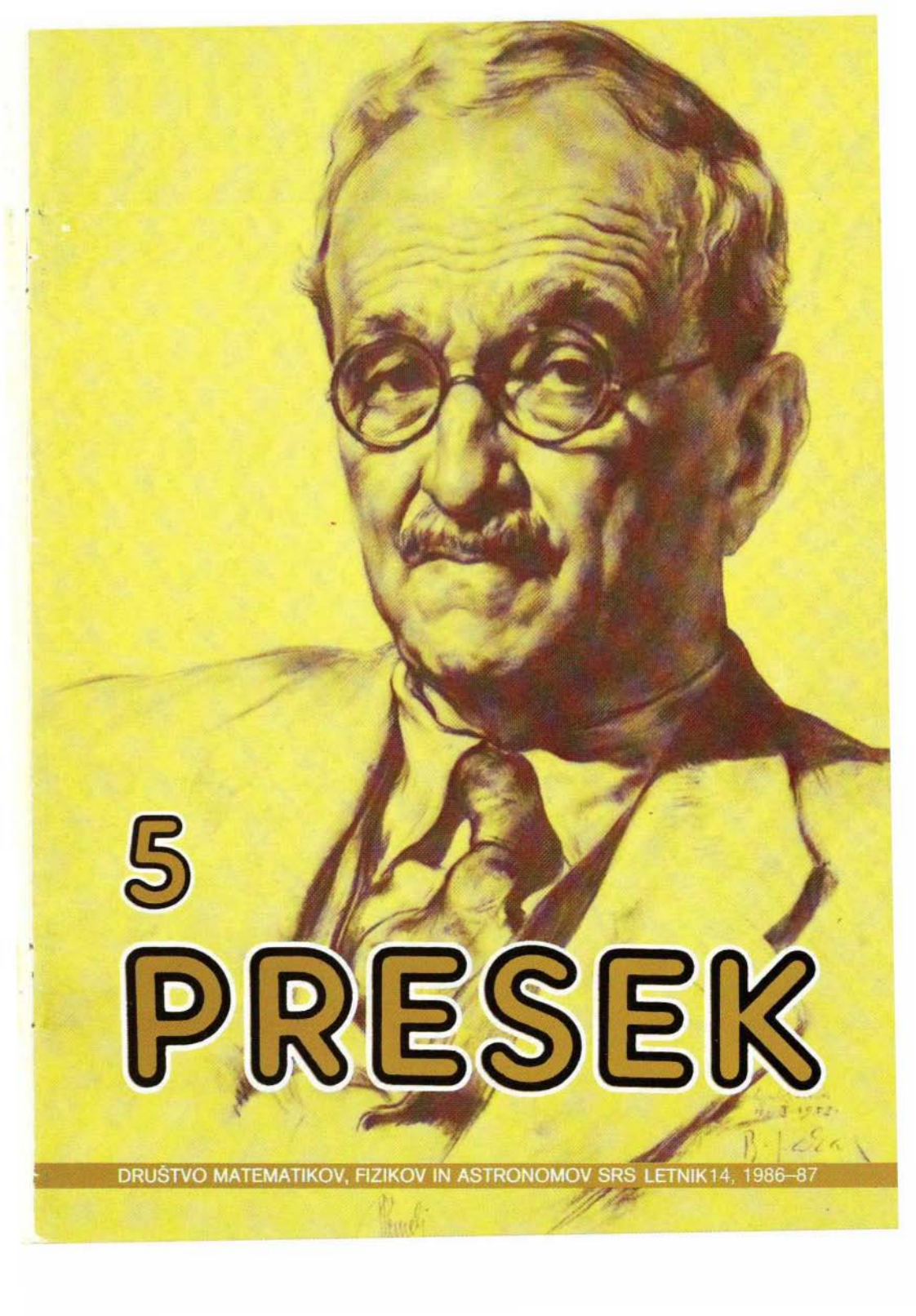


A detailed oil painting of an elderly man with a mustache and round glasses, wearing a suit and tie. The background is a solid yellow color. The man is looking slightly to the left of the viewer.

5 PRESEK

DRUŠTVO MATEMATIKOV, FIZIKOV IN ASTRONOMOV SRS LETNIK 14, 1986–87

$$u \frac{du}{dy} = \frac{a}{y} (1+u^2)$$

$$\frac{dx}{dy} = \frac{1}{u}$$

Prva i druga jednačina se odloži i spremljivata in da

$$\log(1+u^2) = 2a(\log y - \log K)$$

ali $1+u^2 = \left(\frac{y}{K}\right)^{2a}$

kedaj pa dobimo iz druge enačbe

$$x = \int \frac{dy}{\sqrt{\left(\frac{y}{K}\right)^{2a} - 1}}$$

Integralna konstanta je tu k u aditivna. Pri poljubnem a da integral ni ~~izrazljiv z~~ elementarnimi funkcijami. Posebno zanimivi pa so primeri, kjer ima a vrednosti $\pm 1, \pm \frac{1}{2}$

Pri $a = \pm 1$ je krivinski radij absolutno enak dolžini normale, je pa pri -1 isto smeren, pri +1 pa nasprotno smeren.

$a = -1$ $x = \int \frac{y dy}{\sqrt{K^2 - y^2}} = \sqrt{K^2 - y^2} + C$
 $(x-C)^2 + y^2 = K^2$ krog

$a = +1$ $x = \int \frac{K dy}{\sqrt{y^2 - K^2}} = K \log\left(\frac{y}{K} + \sqrt{\frac{y^2}{K^2} - 1}\right) + C$ ali
 $\frac{y}{K} + \sqrt{\frac{y^2}{K^2} - 1} = e^{\frac{x-C}{K}}$

od tod pa $y = \frac{K}{2} \left(e^{\frac{x-C}{K}} + e^{-\frac{x-C}{K}} \right)$ verižnica.

$a = -\frac{1}{2}$ $x = \int \sqrt{\frac{y}{K-y}} \cdot dy$, če se tu vpelje $y = \frac{K}{2}(1 - \cos u)$
 potem torej $x = \frac{K}{2}(u - \sin u) + x_0$ cikloida

$a = +\frac{1}{2}$ $x = \int \sqrt{\frac{K}{y-K}} dy = 2\sqrt{K} \cdot \sqrt{y-K} + C$

ali $(x-C)^2 = 4K(y-K)$ parabola

$a = +\frac{3}{2}$ $x = \int \frac{dy}{\sqrt{\left(\frac{y}{K}\right)^3 - 1}}$, $y = K \wp\left(\frac{x-x_0}{2K}\right)$, $\wp'^2 = 4\wp^3 - 4\wp$

$a = +2$ $x = \int \frac{dy}{\sqrt{\left(\frac{y}{K}\right)^4 - 1}}$, $y = K \frac{\wp\left(\frac{x-x_0}{2K}\right)}{2\wp\left(\frac{x-x_0}{K}\right)}$, $\wp'^2 = 4\wp^3 + \wp$

Ivan Vidav

Josip Plemelj

Ob dvajsetletnici smrti

Društvo matematikov, fizikov in astronomov SRS
Ljubljana 1987

Vsebina

Posvetilo	3
Predgovor	4
I. Življenjska pot	5
II. Znanstveno delo	19
Bibliografija	29
Na ovitku:	
Božidar Jakac, Josip Plemelj — risba, 1952	I
J. Erbežnik, Rojstna hiša Josipa Plemlja na Bledu — olje 1913	II
Plemljev rokopis	IV

Letos bo meseca maja minilo dvajset let od smrti največjega slovenskega matematika Josipa Plemlja. Zame pomeni to leto še eno obletnico: Pred petdesetimi leti sem se vpisal na ljubljansko univerzo. Imel sem srečo, da sem že v prvem letniku poslušal predavanja pri profesorju Plemlju. Profesor je namreč predaval študentom prvega letnika le vsako drugo leto. V drugem letniku pa sem kot pomožni asistent dobil priložnost priti s profesorjem v osebni stik. Mnogo sva se tedaj pogovarjala o matematiki in sem se veliko od njega naučil. Že med študijem me je opozoril na neki nerešeni problem v teoriji diferencialnih enačb. Rešitev tega problema je bila tema moje disertacije. Poznanstvo s profesorjem Plemljem je trajalo trideset let, do njegove smrti. Vso to dobo mi je bil učitelj in prijatelj. Ne samo strokovno, tudi drugače mi je nešteto krat pomagal, med študijem in pozneje, še zlasti med vojno. Njegova zasluga je bila, da sem hitro napredoval do rednega profesorja, pač mnogo prehitro glede na svoje skromne sposobnosti. Žal nisem imel priložnosti, da bi se mu oddolžil za vse, kar je storil zame. Po njegovi smrti mi je preostalo le to, da ga ohranim trajno v najlepšem spominu. Kot velikega matematika, odličnega profesorja in dobrega človeka pa so ga ohranili v lepem spominu tudi številni drugi njegovi nekdanji učenci.

Ivan Vidav

Predgovor

Ta knjižica je predelana izdaja brošure, ki je izšla ob stoletnici rojstva Josipa Plemlja. Ker je namenjena širšemu krogu bralcev, predvsem dijakom osnovnih in srednjih šol, sem skrajšal tisti del, ki govori o Plemljevem znanstvenem delu.

Profesor Plemelj mi je veliko pripovedoval o svojem življenju in delu, o kolegih matematikih, študiju v Göttingenu itd. Žal si tedaj nisem napravil zapiskov. Ker imam slab spomin, sem marsikaj pozabil in le malo podatkov iz njegovih pripovedi sem lahko vključil v pričujočo knjižico.

Zahvaljujem se prof. J. Modru za jezikovno korekturo in uredniškemu odboru časopisa Presek, ki je knjižico sprejel v svojo zbirko.

Ljubljana, 6.10.1986

Ivan Vidav

I. Življenjska pot

Profesor Josip Plemelj je bil rojen 11. decembra 1873 v vasi Grad na Bledu. Oče Urban (1831 — 1875) je bil mizar in rezbar, hkrati pa mali kmet. Poročen je bil trikrat. Druga žena je prinesla v hišo jetiko. Od nje so se jetike našli oče, sin iz prvega zakona in seveda otroci druge žene. S tretjo ženo Marijo roj. Mrak (1845 — 1919) je imel oče tri otroke. Najstarejša je bila hčerka Ivana (1872 — 1956), drugi sin Josip in tretji Urban (1875 — 1947), ki se je rodil po očetovi smrti. Mati Marija je bila zelo odporna proti tuberkulozi in njeni otroci so odpornost podedovali. Vsi so se sicer našli jetike, vendar so bolezen premagali in učkali lepo starost. Pač pa so oče in otroci iz prvih dveh zakonov kmalu pomrli za jetiko.

Po očetovi smrti je doma zavladata revščina, saj je mati sama le s težavo preživljala družino. Dvorazredno osnovno šolo je mali Joža obiskoval na Bledu. Sprva ni bil namenjen za šolanje, čeprav si je tega zelo želel, ko je videl, da se šolajo otroci bogatega sosedu. Nazadnje se je materi le posrečilo najti možnost in poslati sina v Ljubljano, najprej eno leto v pripravljalnico na Grabnu in nato v gimnazijo (1886 — 1894). V nižji gimnaziji se je preživljal s skromnimi prispevki od doma in s podporami dobrih ljudi. V višji gimnaziji se je vzdrževal sam z inštruiranjem matematike. Poučeval je v glavnem sošolce in si s tem zaslužil vedno dovolj denarja, tako da ni bil več v stiski.

Ker je zrasel brez očeta in se vzdrževal sam, je postal zelo samostojen in neodvisen in se je zato težko podredil šolski disciplini. Hranil se je pogosto v gostilnah, gimnazijci pa takrat niso smeli obiskovati gostiln. Tako si je v petem razredu "prislužil" dve uri šolskega zavora, v šestem razredu pa kar pet ur. To je imelo za posledico slabšo oceno v vedenju in, kar je bilo še hujše, ni bil več oproščen šolnine. V osmi razred pa se sploh ni mogel vpisati. Med poletnimi počitnicami je bil namreč v družbi s sošolci, ki so v mladostni razposajenosti vrgli neko klop iz Tivolija v ribnik. Pri tem jih je zasačil policaj. Plemelj je tedaj sam poravnal vso škodo. Zadeva bi bila pozabljena, če se ne bi o njej razpisal Slovenski narod. Dijaki, ki so vrgli klop v ribnik, so bili namreč razen Plemelja*¹) vsi Nemci. In Slovenski narod je pisal, kaj vse si lahko nekaznovano dovolijo

nemški dijaki. Tako je za zadevo zvedel ravnatelj gimnazije in v jeseni se Plemelj ni mogel več vpisati v šolo. Osmi razred je potem študiral kot privatist. Ker je bil vezan na dohodke od inštrukcij sošolcev, je ostal v Ljubljani. Prvi semester je delal izpite na novomeški gimnaziji, izpite za drugi semester in maturo pa je opravil na ljubljanski gimnaziji.

Velik talent za matematiko je pokazal zelo zgodaj. Vso gimnazijsko snov iz matematike je obvladal že v začetku četrtega razreda, tako da je kot četrtošolec pomagal maturantom pri nalogah. Sam je že takrat odkril vrsti za funkciji $\sin x$ in $\cos x$. Pravzaprav je našel najprej vrsto za ciklotometrično funkcijo $\arcsin x$, potem pa to vrsto obrnil in uganil zakonitost med koeficienti. Vendar korektnega dokaza tedaj ni imel.

Od četrte gimnazije naprej je bil njegov profesor V. Borštner, v četrtem razredu samo za fiziko, od petega razreda naprej pa tudi za matematiko. V četrtem razredu je imel za matematiko profesorja Westra, s katerim se ni razumel. Do spora je prišlo zaradi neke šolske naloge. Profesor Wester namreč ene izmed nalog ni pravilno rešil in je zato Plemljevo rešitev, ki je bila pravilna, ocenil kot napačno. Ker se je bal za svojo avtoriteto, napake ni hotel priznati in ni pokazal popravljenih nalog. Dijaki so morali za naslednjo šolsko nalogo kupiti nove zvezke.

Profesor Borštner pa je takoj odkril Plemljevo izredno nadarjenost za



Leta 1894 je Josip Plemelj (stoji v spodnji vrsti 7. z leve) maturiral v Ljubljani.

matematiko in ga zato zelo cenil. Niti enkrat ga ni vprašal za red, za oceno so zadostovale pismene naloge. Le če nobeden v razredu ni znal rešiti kakšne naloge, je poklical Plemelja pred tablo in mu rekel, naj on reši nalogo. V humanističnih predmetih je bil Plemelj povprečen dijak. Vendar so drugi profesorji upoštevali njegov posebni položaj in ga niso nikoli vprašali novih lekcij. Profesor za latinščino je bil izredno strog, toda pravičen mož. Svoje dijake je naučil veliko latinščine. Plemelj je še v pozni starosti zlahka prebiral slavno Gaussovo knjigo *Disquisitiones Arithmeticae*. Od živih tujih jezikov je seveda odlično obvladal nemščino, deloma francoščino, angleščino pa le pasivno.

Plemelj je imel veliko veselje za težke konstrukcijske naloge v geometriji. K njim se je tudi v poznejšem življenju vedno rad vračal. Posebno znamenita je naloga, ki jo je dal Borštner dijakom v petem razredu (glej [31]): Načrtaj trikotnik, če je dana ena stranica, višina nanjo in razlika kotov ob njej. Seveda nihče v razredu ni znal rešiti te naloge. Tudi Plemelj jo je najprej rešil trigonometrično in poiskal za dobljeno rešitev čisto geometrijsko razlago. Pozneje je našel za to nalogo, s katero se je vedno rad ukvarjal, še številne druge rešitve, zadnjo v Silvestrovi noči leta 1939.

Iz gimnazijske dobe izvira tudi njegova konstrukcija pravičnega sedmerokotnika, in sicer natančna s trisekcijo kota. Iz nje takoj razberemo staro indijsko oziroma babilonsko približno konstrukcijo. Do rešitve je prišel takole: Naj bo s stranica pravičnega sedmerokotnika, ki je včrtan krogu s polmerom $r = 1$. Če zvežemo središče kroga z vsemi oglišči, smo razrezali sedmerokotnik na sedem skladnih enakokrakih trikotnikov s krakom dolžine 1 in s kotom $2\pi/7$ ob vrhu. Torej je iskana stranica $s = 2 \sin(\pi/7)$.

Po adicijskem teoremu za kotne funkcije izračunamo

$$\sin 7\varphi = -\sin\varphi(2^6 \sin^6\varphi - 7 \cdot 2^4 \sin^4\varphi + 14 \cdot 2^2 \sin^2\varphi - 7)$$

Vstavimo $\varphi = \pi/7$ v to identiteto. Ker je $\sin 7\varphi = \sin \pi = 0$ in $2 \sin(\pi/7) = s$, je stranica s koren enačbe

$$x^6 - 7x^4 + 14x^2 - 7 = 0$$

Polinom na levi lahko razstavimo v produkt dveh polinomov tretje stopnje $x^6 - 7(x^2 - 1)^2 = [x^3 + \sqrt{7}(x^2 - 1)][x^3 - \sqrt{7}(x^2 - 1)]$. Brez težave ugotovimo, da zadošča stranica s enačbi

*) Prosefor Plemelj je povedal, da so na Bledu njegovo ime sklanjali takole: Plemeljna, pri Plemeljnovih itd. Zato je mislil, da bi se moral e pri sklanjati ohraniti, tedaj roditeljski Plemelja.

$$x^3 + \sqrt{7}(x^2 - 1) = 0 \quad (1)$$

Ugodno je uvesti $1/x = y$ kot novo spremenljivko, ker ima kubična enačba za y

$$y^3 - y - 1/\sqrt{7} = 0 \quad (1^*)$$

obliko, primerno za reševanje s Cardanovo formulo. Cardanovo formulo je Plemelj poznal že v srednji šoli. Ker so vsi koreni enačbe (1*) realni, jih dobimo v trigonometrični obliki. Naj bo α oster kot, ki ga določa enačba

$$\operatorname{tg} \alpha = 1/(3\sqrt{3}) \quad (2)$$

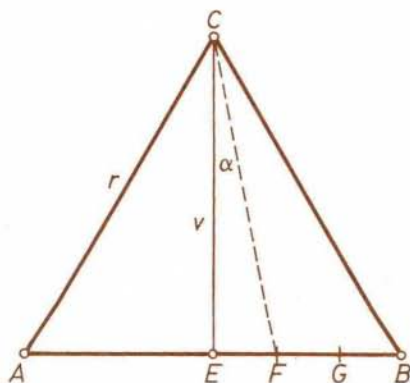
Koreni se potem izražajo takole

$$y_k = \frac{2}{\sqrt{3}} \cos \frac{1}{3}(a + k\pi), \quad k = 0, 1, 2$$

Stranico s dobimo pri $k = 0$

$$s = (\frac{1}{2}\sqrt{3})/\cos \frac{1}{3}a$$

Izraz $\frac{1}{2}r\sqrt{3}$ pomeni višino enakostraničnega trikotnika s stranico r . Kot α , ki ga določa enačba (2), dobimo takole: Narišimo pravokotni trikotnik EBC , ki je polovica enakostraničnega trikotnika ABC s stranico r (glej sliko).



Razdelimo osnovnico EB s točkama F in G na tri enake dele. Kot α je ob vrhu C pravokotnega trikotnika EFC . Razdelimo ta kot na tri enake dele. Stranica s je enaka hipotenuzi pravokotnega trikotnika, ki ima za eno kateto višino $v = EC$ in pri C kot $\frac{1}{3}\alpha$. Tako smo prevedli konstrukcijo pravih sedmerokotnika na tretinjenje kota α . V splošnem se kot ne dá razdeliti na tri enake dele samo z ravnilom in šestilom. Zato tudi pravih sedmerokotnika ne moremo narisati samo z

ravnilom in šestilom.

Kot $\frac{1}{3}\alpha$ je razmeroma majhen. Zato se stranica s le malo razlikuje od vi-

šine $v = EC$ enakostraničnega trikotnika ABC . Pri tako imenovani indijski konstrukciji vzamemo za s kar višino v .

Če namesto kota α razdelimo nasprotno kateto EF na tri enake dele, dobimo boljšo aproksimacijo, kakor je indijska. Stranica s je približno enaka hipotenuzi trikotnika, katerega ena kateta je višina enakostraničnega trikotnika ABC , druga pa osemnajstina stranice AB . Ta konstrukcija je tako natančna, da je pri polmeru $r = 1$ m razlika med pravo stranico in stranico, dobljeno po tej konstrukciji, samo 0.038 mm.

Konstrukcijo pravičnega sedmerokotnika je Plemelj našel že leta 1892, objavil pa jo je dvajset let pozneje. Leta 1911 je namreč izšla knjiga Th. Vahlen: *Konstruktionen und Approximationen*, ki vsebuje najrazličnejše konstrukcijske naloge. Navedene konstrukcije pravičnega sedmerokotnika pa v njej ni. Zato je Plemelj sodil, da ni še znana in jo je objavil.

Z višjo matematiko se je začel ukvarjati v četrtem in petem razredu gimnazije. V Ljubljani je bilo tedaj težko priti do matematične literature. V začetku petega razreda pa se mu je posrečilo dobiti v antikvariatu knjigo A. Burga: *Höhere Mathematik*. To delo je izšlo že okoli leta 1830, in sicer v treh zvezkih. V njih so bili diferencialni in integralni račun, diferencialne enačbe, variacijski račun in še marsikaj drugega. O matematični strogosti ni bilo govora. Plemelj je kmalu vse tri zvezke preštudiral. Zelo je bil razočaran, ko je v njih našel vrsti za $\sin x$ in $\cos x$, ki ju je že sam odkril.

Poleg matematike se je zanimal za naravoslovje, posebno astronomijo. Že



Josip Plemelj kot študent na Dunaju, 1896

v gimnaziji je študiral nebesno mehaniko. Rad je opazoval zvezde. Imel je zelo ostre oči, tako da je videl planet Venero tudi pri belem dnevu.

Po maturi je odšel jeseni 1894 na Dunaj, kjer se je vpisal na filozofsko fakulteto in študiral matematiko, fiziko in astronomijo. Denar za potovanje in za začetek bivanja si je sposodil od znancev na Bledu. Njegov izredni matematični talent je pri seminarju že prvi mesec odkril prof. G. von Escherich, tedanji predstojnik katedre za matematiko. Povabil ga je k sebi na razgovor. Vprašal ga je, kje je do tedaj študiral, da se je naučil toliko matematike, in kaj želi postati. Plemelj mu je odgovoril, da ima za seboj samo gimnazijo v Ljubljani in da se je iz knjig naučil, kar zna. Rad bi pa postal astronom. Escherich mu je povedal, da v astronomiji ni kruha, zato naj študira matematiko, saj se bo kot matematik lahko ukvarjal tudi z astronomijo. Misliti mora na univerzitetno kariero. Napravil mu je ustrezeni študijski program na fakulteti in program podiplomskega študija. Gmotno mu je omogočil bivanje na Dunaju s tem, da mu je priskrbel Knafljevo štipendijo, ki jo je podeljevala dunajska univerza. Tudi pozneje se je zanj stalno zanimal in mu pogosto pomagal, tako da ga je Plemelj vse življenje ohranil v hvaležnem spominu.

Na Dunaju so bili Plemeljevi profesorji poleg Eschericha, ki je predaval analizo, še Gegenbauer in Mertens za aritmetiko in algebro, Weiss za astronomi-



Josip Plemelj na Dunaju, 1918

jo, Boltzmann za fiziko in drugi. Maja 1898 je predložil disertacijo "Über lineare homogene Differentialgleichungen mit eindeutigen periodischen Koeffizienten". Glede na izkazani študij mu je ministrstvo za uk in bogočastje izjemoma dovolilo, da sme delati rigorozne že na koncu letnega semestra 1898. Rigoroz iz matematike in fizike je opravil julija, rigoroz iz filozofije in psihologije pa decembra.

Ker je vse izpite iz matematike opravil z odliko, ga je filozofska fakulteta na Dunaju določila kot prvega kandidata za univerzitetno kariero. Takoj po doktoratu je dobil mesto računarja v ustanovi Österreichisches Gradmessungsbureau. Univerza mu je potem dala štipendijo za podiplomski študij, in sicer po 1600 kron na leto. Najprej je odšel za eno leto v Berlin, kjer je poslušal predavanja pri profesorjih Fuchs in Frobeniusu, naslednje leto (1900/1) pa je bil v Göttingenu pri profesorjih F. Kleinu in D. Hilbertu. Göttingen je bil tedaj eno izmed najpomembnejših matematičnih središč in so tja prihajali študirat z vsega sveta. Dosti je bilo tudi Američanov. Precej razvito je bilo družabno življenje, ki se ga je stalno udeleževal D. Hilbert, F. Klein pa zaradi bolezni le redko. Tu se je Plemelj seznanil s številnimi mladimi matematiki. Z nekaterimi, kakor npr. z G. Fabrom, ki je bil pozneje profesor v Münchnu, je ostal v prijateljskih stikih vse življenje.

Jeseni 1901 se je vrnil na Dunaj, kjer je dobil službo v ustanovi Österreichisches Regional-Bureau für die internationale naturwissenschaftliche Bibliographie — Hofbibliothek. Kakšnih posebnih nalog v tej dvorni biblioteki ni imel in je lahko znanstveno delal. To je bila nekakšna pripravljalna služba za univerzitetnega učitelja. Tedaj so bila namreč vsa mesta na univerzah strogo sistemizirana in je bilo treba čakati na izpraznjeno mesto, ko je šel kateri od profesorjev v pokoj ali je umrl. Aprila 1902 je postal privatni docent za matematiko na dunajski univerzi. Mesto privatnega docenta ni bilo plačano in ni mogel od njega živeti. Imel je le pravico predavati. Prijavil je tale predavanja: linearne diferencialne enačbe, eliptične funkcije, funkcijska teorija, teorija potenciala in teorija števil. Leta 1906 je bil imenovan še za asistenta na Tehniški visoki šoli na Dunaju.

Leta 1907 je postal izredni profesor za matematiko na univerzi v Černovicah. Nastavitev univerzitetnih učiteljev je tedaj potekala takole: fakulteta je dala predlog, ki je moral vsebovati tri imena, kandidata na prvem, drugem in tretjem mestu. Imenovanje je bilo prepuščeno ministrstvu za uk in bogočastje, ki je po navadi izbralo prvega kandidata. Filozofska fakulteta v Černovicah je predlagala Plemelja na tretjem mestu, najbrž zato, ker je bil Slovenec, univerza v Černovicah pa naj bi širila nemško kulturo na vzhod. Toda matematiki so napravili poseben predlog in v njem navedli Plemelja kot edinega kandidata.

Ministrstvo je v tem primeru bolj upoštevalo mnenje matematikov kakor filozofske fakultete. Profesor Plemelj mi je povedal, da so bili kolegi na filozofski fakulteti v Černovicah z njim zelo korektni, sprejeli so ga za svojega in mu niso dali v ničemer čutiti, da jim je bil "vsiljen".

Odlok o imenovanju je v stari Avstriji podpisal sam cesar in tudi sprejel vsakega novega univerzitetnega profesorja v avdienco. Ob imenovanju Plemlja pa je bila ravno vladna kriza in je bil cesar z njo preveč zaposlen. Tako je bil Plemelj prikrajšan za čast, da bi bil sprejet pri cesarju.

Že naslednje leto je bil imenovan za rednega profesorja v Černovicah. V dekretu so bile tedaj navedene dolžnosti profesorja: moral je imeti najmanj pet ur predavanj na teden iz svoje stroke, voditi seminar in proseminar. Redni profesor je moral imeti vsak tretji semester še poseben *collegium publicum*. Prav tako so bili v dekretu navedeni dohodki: kot izredni profesor je Plemelj prejemal 3600 kron letne plače in 1172 kron dodatka, kot redni profesor pa 6400 kron plače in 1472 kron dodatka.

Leto dni pred imenovanjem za profesorja v Černovicah se je poročil z Julko Hočevar (1882 – 1950). Imela sta enega samega otroka, hčerko Nado (1907 – 1964), ki se je poročila z ing. K. Kavčičem (1903 – 1972), dolgoletnim ravnateljem Centralne tehnične knjižnice v Ljubljani.

Na univerzi v Černovicah je bil profesor za matematiko še H. Hahn, za matematično fiziko pa M. Radaković. Predstojnik matematičnega seminarja je bil



Klub slovenskih naravoslovcev na Dunaju, 1897/98. Na sliki z leve proti desni stojijo: Kraigher, Klasinc, Kreft, Verčon, Bevk, Rus, Stojc, Plemelj, Plečnik in Jesenko. Sedijo: Reisner, Regen, Kušar, Tičar in Hinterlechner.

Plemelj, ki je bil 1912/13 tudi dekan filozofske fakultete. Asistentov za matematiko ni bilo tedaj niti na dunajski univerzi.

Ob sarajevskem atentatu na avstrijskega prestolonaslednika Ferdinanda je bil Plemelj v Černovicah, ob začetku vojne pa na počitnicah na Bledu. Jeseni 1914 se je vrnil v Černovice, a je potem dvakrat pribežal na Dunaj in Bled, ker so Černovice večkrat zasedli Rusi in nato spet Avstrijci. Plemelj je bil hudo protiavtrijsko usmerjen. Sam je o tisti dobi zapisal [31]: "Zadnja desetletja pred prvo vojno so bila v stari monarhiji karakterizirana z neprestanimi notranjimi boji med nemškimi in drugimi narodi, pri prvem za nadvlado, pri drugih za enakopravnost. Mene je politična napetost in očitna krivičnost v stari državi tako razdvojila z državo samo, da sem, ko je Avstrija svetovno vojno cinično izzvala, z vsakim utripom svojega srca želel pogin te države." Ker svojih nazorov ni skrival, ga je med vojno avstrijska tajna policija označila s P.V. (politisch verdächtig, tj. politično sumljiv). Septembra 1917, ko je bil z družino na Bledu, so ga poklicali na policijo v Ljubljano in ga čez nekaj dni odpeljali v konfinacijo na Moravsko, kjer so ga Čehi lepo sprejeli. Slovenski politiki in dunajski matematiki so tedaj dosegli, da je bil premeščen na Dunaj, ki ga ni smel zapustiti. Redne vojske ni nikdar služil. V konfinaciji je bil kot navaden vojak zaposlen v nekem vojaškem institutu za preizkušanje topovskih izstrelkov.

Po razsulu avstroogrske monarhije se je vrnil z Dunaja na Bled. Leta 1919 je kot član univerzitetne komisije pri pokrajinski vladi v Ljubljani sodeloval pri ustanavljanju slovenske univerze. Avgusta 1919 je bil imenovan za rednega profesorja na filozofski fakulteti univerze v Ljubljani. Bil je izvoljen za prvega rektorja nove univerze. Tudi tedaj je bila stanovanjska stiska in ni mogel takoj najti stanovanja v Ljubljani. Zato se je nekaj časa vozil z vlakom z Bleda v Ljubljano na predavanja in seje. Na filozofski fakulteti oziroma na naravoslovni, ko se je po drugi vojni filozofska fakulteta razdelila na filozofski in naravoslovni del, je predaval matematiko okoli 40 let. V pokoj je šel leta 1957. Kot honorarni profesor pa je predaval še nekaj let po upokojitvi.

Njegov prihod v Ljubljano je bil velikega pomena za mlado univerzo in za razvoj matematike na Slovenskem. Vzgojil je več generacij matematikov. Vsi starejši učitelji matematike pa tudi fizike na ljubljanski univerzi smo bili njegovi učenci. Vodil je pouk matematike za prihodnje profesorje srednjih šol in tudi za inženirje na visokem nivoju. Zanj pa je pomenila Ljubljana žrtev za znanstveno kariero. Kot Slovenec je čutil dolžnost delati za svoj narod. Zato je leta 1928 odklonil vabilo univerze v Gradcu, da bi tam prevzel katedro za matematiko. Tedanji jugoslovanski prosvetni minister se mu je za to zahvalil in mu obljubil dodatne kredite. Toda kmalu nato je vlada padla in obljube so bile pozabljene.

Na filozofski fakulteti je Plemelj predaval ves čas za študente matematike triletni cikel, ki je obsegal algebro s teorijo števil, teorijo analitičnih funkcij in diferencialne enačbe z variacijskim računom. Te predmete so skupaj poslušali študentje drugega, tretjega in četrtega letnika. Za študente tehniške fakultete pa je predaval predmet Matematika I za prvi in Matematika II za drugi letnik. Ta predmeta so poslušali tudi matematiki. Skupaj je imel 16 ur na teden predavanj in vaj. Asistenta pred drugo vojno ni bilo in je vodil vaje sam. Matematična knjižnica je bila tedaj še skromna. Pri urejanju knjižnice mu je pomagal pomožni asistent, ki ga je izbral med boljšimi študenti višjih letnikov. Matematiki so morali pred vojno napraviti v štiriletnem študiju le tri diplomske izpite. Prvi izpit je bil po dveh letih in še ta je bil iz fizike. Da ne bi študentje, ki niso imeli daru za matematiko in zato ne bi mogli uspešno končati študija, izgubili treh ali celo štirih let, je Plemelj uvedel preskusni kolokvij po prvem semestru. Pri tem je študenta spoznal in ocenil njegovo sposobnost za nadaljnji študij matematike. Če je presodil, da ni dovolj sposoben, mu je svetoval, naj se prepíše na kakšno drugo smer, za katero ni potrebna specialna nadarjenost. Študentje tehnike pa so morali opraviti delna izpita iz predmetov Matematika I in II. Ker jih tedaj še ni bilo dosti, profesor ni razpisoval posebnih rokov. Tako je študentom na vprašanje, kdaj bo izpitni rok, odgovoril: "Rok je, kadar snov znate. Tedaj se prijavite in vzel vas bom na izpit."

Na predavanja se ni pripravljaj, ni imel nobenih zapiskov. Pravil je, da je premislil temo predavanja med potjo od doma v Gradišču do univerze na Trgu



Na poti k predavanjem, 1957

revolucije. Predaval je odlično. Slušatelji smo imeli vtis, kakor da pred nami ustvarja snov in prisostvujemo nastajanju novega. Tudi najtežje pojme nam je razložil tako, da so se nam zdeli lahki in enostavni. Izredno lepo je pisal na tablo formule, pa naj so sestajale iz latinskih, grških ali gotških črk. Tudi od študentov je zahteval, da pišejo razločno.

Plemelj je hodil v nemško gimnazijo in študiral na nemški univerzi. V Černovicah je predaval v nemščini in vse razprave razen dveh, ki sta izšli v Radu Jugosl. Akademije, je pred vojno napisal v tem jeziku. Predavanja na ljubljanski univerzi pa so bila v slovenščini. Izdelati je bilo treba slovensko terminologijo za višjo matematiko. Plemelj je imel zelo tenek posluš za jezik in je ustvaril solidno osnovo za razvoj slovenske matematične terminologije. Sploh se je rad ukvarjal z jezikovnimi vprašanji in je pogosto razpravljaval o njih s prof. Franom Ramovšem. Tudi študente je navajal na lep jezik, predvsem pa na jasno in logično izražanje. Jezil se je, če smo npr. namesto besede *potrebovati* rekli *rabiti*. *Rabiš* lahko reč, ki jo imaš. Če reči *nimaš*, jo kvečjemu *potrebuješ*, nam je pojasnjeval. V tej zvezi je znana tudi njegova šaljiva trditev: *Inženir*, ki matematike ne zna, je nikoli ne potrebuje. Če pa jo zna, jo pogosto rabi.

Drugo svetovno vojno je preživel v Ljubljani. Po atentatu na nekdanjega bana M. Natlačena leta 1942 so ga dali Italijani skupaj s številnimi drugimi slovenskimi kulturnimi delavci na seznam morebitnih talcev. Enkrat so ga poklicali na italijansko poveljstvo, da so mu to povedali. Drugih težav med vojno ni imel.

Plemelj je bil vzgojen v katoliški veri. Njegova mati je bila globoko verna žena. Ko se je kot otrok pripravljala na prvo obhajilo, mu je govorila: "Pazi, Joža, da boš vredno prejel prvo obhajilo. Kakršno bo namreč prvo obhajilo, tako bo vse tvoje življenje." Dan pred prvim obhajilom je šel k sosedovim gledat mlade zajčke. Ko je med njimi opazil zelo temnega, je vzkliknil: "Ta je pa črn kakor hudič." To je bila seveda huda kletev. Drugi dan je šel k prvemu obhajilu s tem grehom na vesti. Prepričan je bil, da ga je prejel po nevrednem, in to ga je kot otroka strašno težilo, saj si je po materinih besedah pokvaril življenje. Ko je pozneje prvič slišal o protiverskih nazorih, je videl v njih rešitev od velike more. Zato se jih je že v dijaških letih oklenil in postal odločen nasprotnik vere. Tak je ostal vse življenje. Kot naravoslovec je bil prepričan, da je človek del narave in da nima izjemnega položaja v svetu. Vendar njegovi nazori niso vplivali na odnos do ljudi drugačnega prepričanja, še zlasti ne do študentov. Človeka ni cenil po tem, ali je veren ali ne, temveč po njegovih kvalitetah.

Poleg matematike se je živo zanimal za politiko. Večkrat je izjavil, da bi se povsem posvetil politiki, če bi imel govorniški dar. Bil je vedno narodno zave-

den, toda dolgo je bil mnenja, da smo vsi Jugoslovani en narod in da je slovenščina le narečje. Po političnem prepričanju je bil napreden v predvojnem pomenu besede. Povedal je, da je pred prvo vojno na Dunaju in v Černovicah volil socialiste. Tam namreč ni bilo slovenskih kandidatov. Dolgo je tudi s simpatijo spremljal dogajanje v Sovjetski zvezi, predvsem se je veselil njenega gospodarskega vzpona. Nazadnje pa ga je razočarala Stalinova politika, še zlasti po zimski vojni s Finsko leta 1939/40.

Zelo je bil navezan na svoj rojstni kraj. Pri srcu mu je bil razvoj Bleda in okolice. Posebno pa ga je zadnja leta zanimala sanacija jezera. Njegova rojstna hiša ne stoji več. Skorajda na istem kraju je dal sezidati novo hišo, po nasvetu prijateljev preveliko za svoje potrebe. Začetni kapital za zidavo sta bili nagradi, ki ju je dobil pred prvo vojno. Počitnice je po navadi preživel z družino na Bledu. Veliko veselje je imel s sadnim drevjem, ki ga je nasadil okoli hiše in ga pomagal obirati še v pozni starosti. Pri tem je pogosto sam splezal na drevesa.

Rad je imel naravo in še posebej planine. Bil je vnet hribolazec in se je nešteto krat povzpел na Triglav. Tudi po drugi svetovni vojni je večkrat poskušal priti na vrh. Posrečilo pa se mu je samo enkrat, leta 1950, ko je že dopolnil 76 let. Pri drugih poskusih mu je spodletelo zaradi vremena, predvsem pa zaradi slabe kondicije, ker se je odpravil na Triglav, ne da bi prej treniral v hoji.

Od dijaških let je imel rad veselo družbo. S prijatelji je tedaj pogosto zahajal v gostilno in tudi dobre kapljice se ni branil. Vendar mu vino ni moglo do

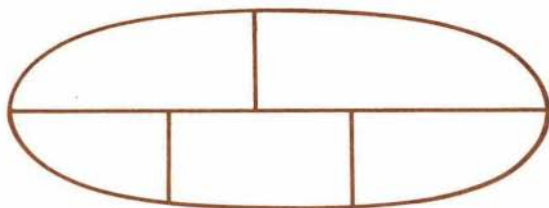


Leta 1954 se je udeležil proslave 200-letnice rojstva Jurija Vege v Zagorici. Na sliki z leve proti desni stojijo: Benkovič, Povšič, Vidav, Čermelj, E. Branc, Prijatelj, Plemelj, Ziegler in Ahlin. Čepijo: Breskvar, Gabrovšek, J. Branc.

živega. Imel je tako naravo, da ni bil nikoli pijan. Čeprav ga je več spil kakor tovariši, ki so ga pošteno čutili, je sam ostal trezen. Ni pa postal suženj alkohola. Ko se je moral pozneje zaradi bolezni držati diete, se je pijači zlahka odrekel.

Kadil ni, kar je bilo v tisti dobi izjema. Prevladovalo je namreč mnenje, da mora vsak odrasel moški kaditi. "Saj ne moreš odkloniti, če ti kdo ponudi cigareto", so govorili, "to bi bilo nevljudno." Zato se je tudi Plemelj v mladosti učil kajenja, vendar se ga ni mogel navaditi. No, zaradi tega ni imel v življenju posebnih težav. Ko ga je v predvojni Jugoslaviji sprejel kralj Aleksander v avdienco, mu je ponudil cigareto. Plemelj je cigareto vzel, povedal pa, da ne kadi in bo zato ohranil cigareto za spomin. Kajenje ga sicer ni motilo, vendar se je jezil, če so kolegi na sejah kadili, ker je imel to za brezobzirnost do nekadilcev. Užival je tak ugled, da se je večina vzdržala kajenja med njegovo navzočnostjo. Čim pa je odšel, so si vsi kadilci oddahnili in si takoj prižgali cigareto.

Privoščil si je tudi kdaj kakšno šalo. Ko je bil še na Dunaju, so ga uradnice iz urada za merjenja pred božičem prosile, naj jim pove kakšno matematično uganko, da jo bodo reševale med počitnicami. Plemelj jim je dal tole nalogo: Nariši s tremi potezami lik



Kmalu za tem je odpotoval na študij v Berlin in na nalogo popolnoma pozabil. Tam ga je nekoč obiskal znanec z Dunaja. Med pogovorom je omenil, da so mu uradnice iz urada za merjenja naročile, naj nikar ne pozabi vprašati Plemlja, kako se reši omenjena naloga. Že dolgo se z njo ubadajo in nikakor se jim ne posreči, da bi jo rešile. "Seveda je ne morejo rešiti, saj ni rešljiva," je Plemelj pojasnil znancu, "Lik se ne da narisati s tremi potezami, potrebne so najmanj štiri."

Kakor med drugimi ljudmi najdemo tudi med matematiki dobre, povprečne in slabe računarje. Gauss je rad in veliko računal, Poincaré pa je tožil, da mu računanje ne gre od rok. Plemelj je sodil med dobre računarje. Na pamet je lahko množil petštevilična števila. Rad se je ukvarjal z numeričnimi nalogami in še zlasti z računi, ki izvirajo iz teorije števil. To prav lepo vidimo

v članku [33], ki obravnava sistem enačb $X^2 + 5Y^2 = U^2$, $X^2 - 5Y^2 = V^2$. Ta sistem ima neskončno rešitev v celih številih. Toda zaporedne rešitve zelo hitro naraščajo. V članku je navedena rešitev, ki sestoji iz petnajstšteviličnih števil! Sistem je v tesni zvezi z enačbo $X^4 + 4Y^4 = 5Z^2$. Tudi ta enačba ima neskončno rešitev v celih številih. Plemelj navaja rešitev $X = 35689$, $Y = 99731$, $Z = 8914433905$ in pravi, da je enakost

$$35689^4 + 4.99731^4 = 5.8914433905^2$$

temeljito preveril. Vse račune je seveda opravil brez računalnika.

V zvezi z računanjem je treba omeniti njegovo prizadevanje, da bi v slovenščini uvedli dekadični način štetja, kakor je v drugih slovanskih jezikih. Torej bi šteli dvajsetpet, dvajsetšest itd. namesto petindvajset, šestindvajset itd. To prizadevanje je utemeljeval s tem, da je naš način štetja pogosto vir napak pri računanju.

Plemelj je jetiko premagal že v mladih letih. Pozneje si je nakopal novo bolezen, čir na dvanajstniku. Ta bolezen mu je pogosto grenila življenje. Večkrat je tudi med predavanjem dobil tako hud napad, da je moral zapustiti predavalnico. Ker je imel strogo dieto, je bil vezan na domačo prehrano, zato je zelo redko potoval. Kljub bolezni, ki pa se mu je po drugi vojni precej izboljšala, je ostal dolgo telesno in duševno čil. Morda bi bil dočakal sto let, ko ga ne bi na starost doletela dva huda udarca. Marca 1958, ko je bil že v petinosemdesetem letu, si je pri padcu na poledeneli cesti zlomil nogo v kolku. Tedaj ga je operiral znani kirurg prof. dr. B. Lavrič. Operacija je dobro uspela in je lahko kmalu hodil brez palice. Vendar je zaradi operacije in hude krvavitve v želodcu telesno in duševno precej opešal. Še hujši udarec pa je bila smrt edine hčere Nade, ki je umrla decembra 1964 za levkemijo. Od tedaj je vidno hiral. Leta 1966 ga je zadela tudi rahla možganska kap. Ker se mu je poslabšala še stara bolezen, ga je aprila 1967 zet ing. Kavčič spravil v bolnišnico P. Držaja v Ljubljani. Tu je 22. maja umrl zaradi izliva krvi v želodec. Pokopan je na ljubljanskih Žalah. Ob stoletnici rojstva so mu postavili na Bledu spomenik, ki stoji nedaleč od njegove rojstne hiše. Kot prvemu rektorju ljubljanske univerze so mu ob isti priložnosti odkrili tudi spomenik pred glavnim univerzitetnim poslopjem v Ljubljani.

Hčerka Nada je umrla brez otrok. Prav tako ni imela otrok njegova sestra Ivana por. Majer. Brat Urban je imel sina. Toda tudi njegov sin je umrl brez potomcev. Tako je ožji Plemeljev rod povsem izumrl.

Na Bledu je več družin s priimkom Plemelj. Profesor je prvotno mislil, da ni z drugimi Plemliji v nobenem sorodstvu. Po drugi svetovni vojni pa je začel sestavljati rodovnik za nekaj sto let nazaj. Ugotovil je, da so si vsi Plemliji v sorodu, vendar v zelo daljnem, tako da so na sorodstveno vez pozabili.

II. Znanstveno delo

Glavna matematična področja, na katerih je Plemelj delal, so bila diferencialne in integralske enačbe, teorija potenciala (harmoničnih funkcij) in funkcijska teorija.

Na prelomu devetnajstega v dvajseto stoletje se je začela naglo razvijati teorija integralnih enačb. Novo teorijo so uspešno uporabili na številnih področjih matematike in fizike, predvsem v teoriji diferencialnih enačb. Teorija integralnih enačb je dala tudi pobudo za nastanek funkcionalne analize in posebej teorije Hilbertovih prostorov.

Ko je Plemelj študiral v Göttingenu, je tam Šved E. Holmgren poročal o teoriji, ki jo je I. Fredholm izdelal za linearne integralne enačbe prve in druge vrste. Göttingenski matematiki so se z D. Hilbertom na čelu takoj lotili raziskovanja novega področja. Plemelj je bil med prvimi, ki so to delo pričeli, in pri tem dosegel lepe rezultate. Uspešno je uporabil integralne enačbe v teoriji potenciala. Ko je znameniti francoski matematik E. Picard, ki se je veliko ukvarjal prav s teorijo potenciala, dve njegovi razpravi obilo citiral in označil kot "deux excellents mémoires" (dve odlični razpravi), je Plemelj na mah postal znan v matematičnem svetu.

Najpomembnejše njegovo delo v teoriji potenciala pa je knjiga *Potential-theoretische Untersuchungen*, ki je dobila nagrado znanstvenega društva kneza Jablonowskega v Leipzigu leta 1911. To društvo je vsako leto razpisalo temo za delo, ki naj bi bilo nagrajeno. Za leto 1910 je bil razpis takle: Zaželeno je delo, ki bi pomenilo bistven napredek teorije potenciala glede na jasnost in strogost izvajanja ali pa glede na obseg in popolnost izsledkov. Plemljeva knjiga se odlikuje s številnimi novimi pogledi in novimi izsledki, pogosto dobljenimi z uporabo integralnih enačb. Sestoji iz štirih delov. V prvem delu so osnove potencialne teorije. Drugi del vsebuje teorijo integralnih enačb. Tretji del obravnava obe robni nalogi: za notranje in zunanje območje. Četrty del pa govori o zvezi med rešitvami robne naloge za notranje in zunanje območje.

V teoriji diferencialnih enačb se je Plemelj veliko ukvarjal s problemi, povezanimi z monodromijsko grupo. Vsaki homogeni linearni diferencialni

enačbi, v kateri so koeficienti racionalne funkcije, pripada tako imenovana monodromijska grupa, ki sestoji iz obrnljivih linearnih transformacij. V svojih prvih razpravah je Plemelj obravnaval diferencialne enačbe, pri katerih se monodromijska grupa odlikuje s posebnimi lastnostmi. Te lastnosti nam pomagajo pri reševanju diferencialne enačbe. Najpomembnejše Plemljevo delo pa je brez dvoma čudovita rešitev Riemannovega problema. Dokazati je treba obstoj homogene linearne diferencialne enačbe, če so dane njene singularne točke in monodromijska grupa. S tem problemom so se ukvarjali številni matematiki. Med njimi je D. Hilbert leta 1905 prvi prevedel problem na rešljivo integralno enačbo. Vendar je bila njegova metoda zamotana in ni dala pregleda nad celotno množico rešitev. Plemelj pa je dokazal, da obstaja tako imenovani primitivni sistem rešitev, s katerim se preprosto izraža vsaka druga rešitev. Primitivni sistem zadošča sistemu homogenih linearnih diferencialnih enačb prvega reda z racionalnimi koeficienti. S tem je bil Riemannov problem v celoti rešen.

Pri reševanju Riemannovega problema so Plemlju pomagale formule, ki jih je malo prej sam odkril in se zdaj imenujejo Plemljeve formule. Te dajejo odgovor na vprašanje, kakšnemu pogoju zadoščajo robne vrednosti holomorfne funkcije. Poljubno izbrane robne vrednosti namreč niso vselej robne vrednosti holomorfne funkcije. Velja tole: $f^+(z)$ so robne vrednosti v notranjosti območja holomorfne funkcije natanko tedaj, kadar je izpolnjena enačba

$$(2\pi i)^{-1} \int (\zeta - z)^{-1} [f^+(\zeta) - f^-(z)] d\zeta = 0 \quad (3)$$



Pri otvoritvi fizikalnega inštituta v Ljubljani 8. februarja 1953. Na sliki z leve proti desni: V. Sedlar, A. Kuhelj, F. Zwitter, F. Stele, J. Plemelj in Ž. Markovič.

$f^-(z)$ pa so robne vrednosti v zunanosti holomorfne funkcije z vrednostjo c v neskončnosti natanko tedaj, ko velja enakost

$$(2\pi i)^{-1} \int (\zeta - z)^{-1} [f^-(\zeta) - f^-(z)] d\zeta + f(z) - c = 0 \quad (4)$$

Integrala v (3) in (4) se raztezata po robu območja. Enačbi (3) in (4) sem navedel zato, ker sta vklesani na spomeniku na Bledu.

Formuli (3) in (4) je našel že ruski matematik J.V. Sohocki leta 1873. Navedel ju je v svoji disertaciji, ki pa je ostala neopažena. Zato se včasih imenujeta tudi formuli Plemlja – Sohockega.

Z reševanjem Riemannovega problema se je veliko trudil matematik L. Schlesinger. Lotil se ga je povsem drugače, namreč s kontinuitetno metodo. V razpravi [15] Plemelj v pripombi pod črto omenja Schlesingerjeve poskuse in pravi, da njegova metoda ne vodi do cilja. Zaradi te pripombe je nastala s Schlesingerjem polemika, ki je izhajala v časopisu Jahresbericht der deutschen Mathematiker-Vereinigung. Številni matematiki, med njimi tudi v Göttingenu, so bili namreč prepričani, da je Schlesingerjev dokaz v redu. Najprej je Plemelj pojasnil svojo pripombo. Pokazal je, da bi s Schlesingerjevo metodo, če bi bila pravilna, lahko dokazali obstoj rešitve tudi v primeru, ko rešitve ni. Schlesinger se je poskušal kritiki ogniti tako, da je dal problemu novo formulacijo. Plemelj mu je odgovoril, da njegova metoda kljub novi formulaciji problema ni uspešna. Schlesinger je nato umolknil, napake pa ni priznal. Kako to, da drugi matematiki niso odkrili napake? Schlesingerjev dokaz je izredno zapleten in dolg. Bravci so se težko prebili skozenj in so zato napako zlahka spregledali.

V teoriji linearnih diferencialnih enačb je Plemelj podal tudi nov dokaz za obstoj in analitičnost rešitev. Študiral je odvisnost rešitev od parametrov in dobljene izsledke uporabil pri reševanju Kleinove naloge za diferencialno enačbo Fuchsovega tipa s štirimi singularnimi točkami.

Zadnja desetletja pred prvo svetovno vojno je bil v funkcijski teoriji v ospredju problem uniformizacije algebraičnih funkcij. Algebraično funkcijo določa enačba oblike

$$F(z, w) = 0 \quad (5)$$

kjer je $F(z, w)$ polinom spremenljivk z in w . Če iz te enačbe izračunamo w , dobimo w kot algebraično funkcijo spremenljivke z . Ta funkcija ni enolična, če je polinom $F(z, w)$ druge ali višje stopnje. Saj vemo, da ima že kvadratna enačba v splošnem dve rešitvi. Problem uniformizacije terja, da poiščemo taki enolični meromorfni funkciji $z = f(t)$, $w = g(t)$, ki zadoščata enačbi (5) za vsak t . S tem problemom so se ukvarjali matematiki H. Poincaré, F. Klein, P. Koebe

in drugi. Obstoj uniformizirajočih spremenljivk različnih tipov je za vse enačbe (5) dokazal P. Koebe. Prispevek Plemlja na tem področju pa je preprost dokaz izreka o uniformizaciji z mejnim krogom (izrek je že prej dokazal Koebe).

Pri obravnavanju problema uniformizacije so uporabljali teorijo konformnega upodabljanja. Pomembno vlogo v tej teoriji je igral izrek o analitičnem raztegu. Koebe je dokazal izrek v kvalitativni obliki. Plemelj pa je v svojem predavanju na zborovanju Združenja nemških matematikov na Dunaju leta 1913 prvi opozoril na kvantitativno stran izreka o analitičnem raztegu in mu dal najostrejšo formulacijo. To je dokazal: Če je potenčna vrsta

$$f(z) = z + a_2 z^2 + a_3 z^3 + \dots \quad (6)$$

konvergentna v krogu $|z| < 1$ in zavzema tam funkcija $f(z)$ vsako vrednost največ enkrat, velja ocena $|a_2| \leq k$. Tu je k konstanta, za katero je Plemelj dokazal, da je manjša od 5; domneval pa je, da je enaka 2. Izpeljal je tudi oceno za funkcijo $f(z)$ in njen odvod $f'(z)$. Te ocene so bile odvisne od števila k . Za $k = 2$ se glase

$$|z|/(1 + |z|)^2 \leq |f(z)| \leq |z|/(1 - |z|)^2 \quad (7)$$

in

$$(1 - |z|)/(1 + |z|)^3 \leq |f'(z)| \leq (1 + |z|)/(1 - |z|)^3 \quad (8)$$



Profesor Josip Plemelj s študenti zadnjih treh letnikov leta 1953

Vse navedene ocene so ostre, ne dajo se več izboljšati.

Zanimiva je zgodovina domneve, da je $k = 2$. Postavil jo je že Koebe in se zato imenuje po njem. Kmalu po predavanju na Dunaju je Plemelj dobil od matematika L. Bieberbacha pismo, v katerem je bil dokaz domneve. Plemelj pa je odkril v dokazu napako. Nato je Bieberbach poslal Plemlju popravljen dokaz. Tudi v njem je Plemelj našel napako. V tretjem pismu je Bieberbach sporočil, da se mu je dokončno posrečilo napako odpraviti, da pa je zdaj popravljeni dokaz predolg za pismo. Zato ga je poslal kar v časopis *Mathematische Annalen*, da ga objavijo. Med vojno leta 1916 pa je Plemlju pisal G. Pick, matematik s praške univerze, da dela na analitičnem raztegu in da ga je Hahn na Dunaju opozoril na Plemljevo predavanje. Plemelj mu je takoj poslal koncept svojega predavanja. Pick je našel le desni oceni v (7) in (8), ki ju je lažje dobiti. Pri Plemlju pa je dobil še levi oceni. V naslednjem pismu je Pick sporočil, da je medtem izšel Bieberbachov članek z dokazom Koebejeve domneve. Plemelj ga je opozoril, da ne verjame v pravilnost tega dokaza, čeprav članka ni videl. Nato je Pick natančno pregledal Bieberbachov dokaz in res našel v njem napako. Pisal je Plemlju, da se nikoli v življenju še ni toliko namučil kakor tedaj, ko je zaman poskušal popraviti napako v članku. V istem pismu pa je omenil, da je medtem preprosto dokazal Koebejevo domnevo G. Faber. To je Pick uporabil v svojem članku, ki je izšel leta 1917, in tako prvi objavil izrek o analitičnem raztegu v dokončni obliki. Plemljev prispevek pa v Pickovem članku ni povsem pravilno prikazan. Ker je bil Plemelj ravno v tistem času konfiniran, ni ukrenil nič. Svoje predavanje na Dunaju in poenostavljeni Fabrov dokaz Koebejeve domneve pa je objavil šele po prvi vojni v [25].

Plemelj se je rad ukvarjal z algebro in teorijo števil, priobčil pa je le nekaj prispevkov s teh področij. Ti so: preprost dokaz Fermatove trditve, da enačba $x^5 + y^5 + z^5 = 0$ v celih številih ni rešljiva; preprost dokaz izreka, da je enačba za krožno delitev nerazcepna, če je stopnja potenca praštevila; rešitev sistema enačb $X^2 + 5Y^2 = U^2$, $X^2 - 5Y^2 = V^2$ v celih številih. V algebri je razvozlal Galoisov dokaz trditve, da se stopnja modulske enačbe ne da znižati. Galois je svoj dokaz na kratko skiciral v pismu, ki ga je napisal dan pred svojo smrtjo. Tega dokaza pa niso razumeli in je trditev pozneje dokazal C. Jordan po drugi poti. Plemelj je rekonstruiral Galoisov dokaz, ki je kratek in izredno lep.

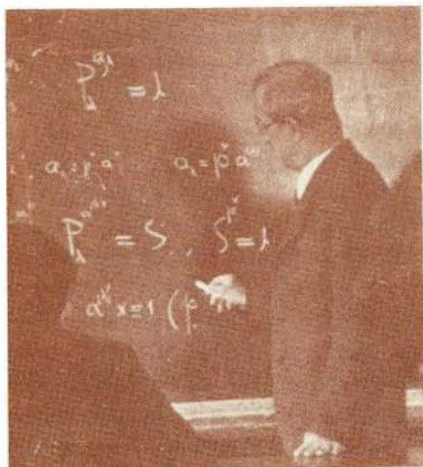
Svoje razprave je Plemelj objavljajl po večini v časopisu *Monatshefte für Mathematik und Physik*, ki ga je izdajal na Dunaju njegov prijatelj W. Wirtinger. Ta časopis si je pridobil ugled v matematičnem svetu v precejšnji meri prav zaradi Plemljevih del. V njem so izšle tudi številne izčrpne recenzije, ki jih je Plemelj napisal o raznih matematičnih knjigah.

Pred prvo svetovno vojno so nemški in francoski matematiki začeli skupno

izdajati enciklopedijo matematičnih znanosti, ki naj bi zajela vse tedanje znanje matematike in njene uporabe. Posamezni zvezki so izhajali v nemščini in francoščini. Vojna je to delo prekinila. Po vojni so ga nadaljevali samo Nemci. Skoraj vsa dotedanja Plemljeva dela so v enciklopediji obilo citirana.

Za svoja dela je Plemelj prejel številna priznanja. Poleg nagrade društva kneza Jablonowskega v višini 1500 mark mu je dunajska akademija znanosti podelila nagrado R. Liebna v znesku 2000 kron, in sicer prav tako za knjigo *Potentialtheoretische Untersuchungen*. V utemeljitvi piše, da je to na področju čiste in uporabne matematike najodličnejše delo, kar jih je v zadnjih treh letih napisal kakšen avstrijski matematik. V domovini je dobil leta 1954 Prešernovo nagrado. Dopisni član Jugoslovanske akademije znanosti in umetnosti v Zagrebu je postal leta 1923, Srpske akademije nauka pa leta 1931. Bavarska Akademija v Münchnu ga je izvolila za dopisnega člana leta 1954. Redni član Slovenske akademije znanosti in umetnosti je bil od njene ustanovitve dalje. Leta 1949 je postal častni član Zveze društev matematikov in fizikov Jugoslavije. Ob devetdesetletnici rojstva leta 1963 pa mu je univerza v Ljubljani podelila častni doktorat.

Najpomembnejša Plemljeva dela so izšla pred prvo svetovno vojno. Zadnja razprava iz te dobe nosi letnico 1912. Torej je trajala pri njem intenzivna ustvarjalnost le dobrih deset let. Živel pa je od tedaj še nad petdeset let. Po prvi svetovni vojni je objavil precej razprav, vendar o stvareh, ki jih je imel, kakor je sam povedal, dognane v glavnem že pred vojno. Kako to, da pozneje



Med predavanjem iz algebre (Foto Rado Torkar)..

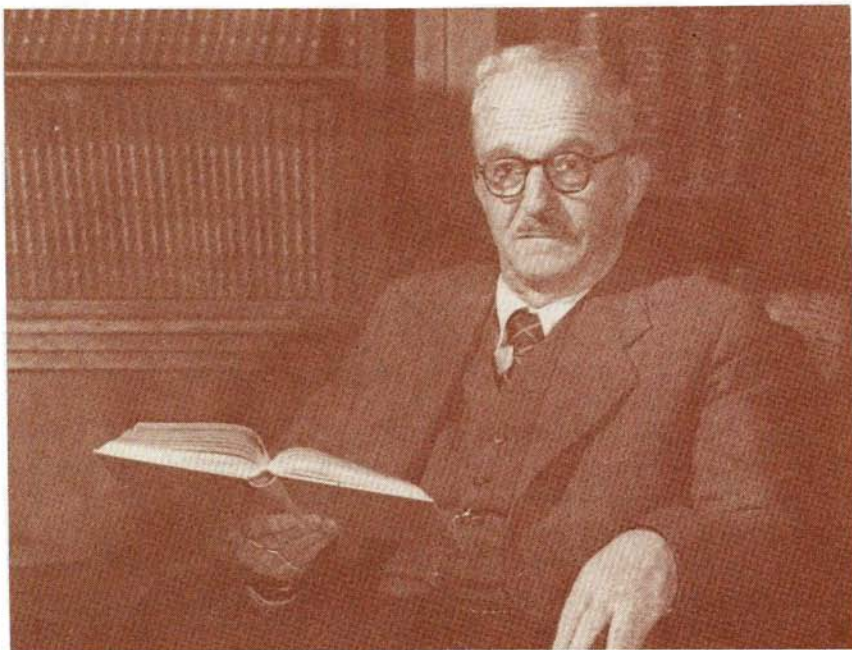
ni več dosti znanstveno delal? Sam pravi takole [31]: "Imam občutek, da me je narava usposobila za neko misijo v matematičnem svetu, usoda pa mi je po kratkih letih odtegnila pogoje, v katerih bi se mogel svoji naravi primerno udeleževati." In dalje: "Povojne težave v strokovnem stiku s svetom, moja tukajšnja strokovna osamljenost, potreba po organizacijski in upravni sposobnosti, ki je prav nič nimam, in še drugi vzroki v meni in izven mene so povzročili, da sem od tedaj (namreč po prvi vojni) skorajda le še učitelj matematike, pa prav malo ustvarjalec novega." Pogosto je pripovedoval, kako ga je prva svetovna vojna čustveno prizadela in tako odvrčala od znanstvenega dela. "Čutil sem, da je šlo tedaj za veliko pomembnejše stvari, kakor je matematika," je večkrat omenil. Torej se je pri njem v nekoliko nenavadni obliki uveljavilo staro pravilo, da "inter arma silent Musae". Vendar naštetih vzroki ne razložijo vsega. Njegova intenzivna znanstvena aktivnost se je nehala že dve leti pred prvo vojno. Zato niti vojna, niti bolezen, niti osamljenost v provincialnem mestu, kakršno je bila Ljubljana pred 60 leti, niso edini vzroki. Plemelj se je loteval samo zanimivih in zato težkih matematičnih problemov. Objavil je rezultate svojega dela šele tedaj, ko je imel vse do podrobnosti dognane in izbrušene. Pri njem je štela samo kvaliteta, prav nič pa obseg in število razprav. Njegova rešitev Riemannovega problema je dokončna, pomeni sklepni kamen na ustreznem področju teorije diferencialnih enačb. Vsaj takrat ni pomenila začetka nobene nove teorije. Šele dosti let pozneje je iz njegovih metod zrasla teorija singularnih integralnih enačb, ki jo je utemeljila sovjetska šola z Mushelišvilijem na čelu. Tudi njegova raziskovanja v teoriji potenciala so prej zaključek kakor nastajanje nove teorije. Ko so bili rešeni Riemannov problem, problemi v teoriji uniformizacije itd., je Plemlju zmanjkalo zanimivih problemov, ki bi ga z vso močjo pritegnili. Njegov talent je bil tak, da je bolj reševal probleme, kakor postavljaj nove. Sam ni osnoval nobene matematične teorije. Morda je tudi v tem eden izmed vzrokov, da je nehal znanstveno delati, ko je prišel v Ljubljano. Tedaj bi namreč še posebno potreboval živega stika z drugimi matematiki.

Da se je loteval samo težkih problemov, pove tale dogodek: Nekoč je poskušal dokazati Fermatovo domnevo, da enačba $x^p + y^p + z^p = 0$ pri nobenem praštevilu $p > 2$ ni netrivialno rešljiva s celimi števili. Prepričan je že bil, da se mu je posrečilo dokazati pravilnost domneve v težjem primeru, ko je eno od števil x, y, z deljivo s p . Ko pa je začel pisati o tem članek, je odkril v svojem sklepanju luknjo, ki je ni mogel premostiti. To ga je tako ujezilo, da je rokopis strgal in se ni hotel več ukvarjati s Fermatovim problemom. Pozneje mu je bilo žal, da je rokopis zavrgel, ker je nekaj pomembnih izsledkov le dobil.

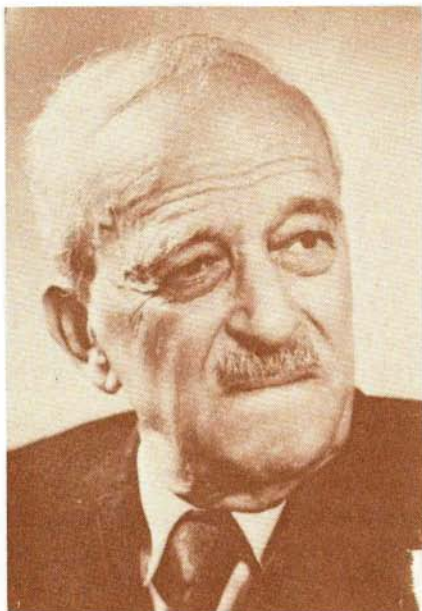
Cenil je samo klasično matematiko. V sodobno matematiko, ki je nastala

po prvi vojni (abstraktna algebra, topologija, funkcionalna analiza itd.), se nikoli ni vživel. Dolgo je skeptično gledal tudi na atomsko fiziko in kvantno teorijo. Šele atomska bomba ga je dokončno prepričala o pravilnosti atomske fizike. Tudi ni verjel, da bi se dala matematika uspešno uporabiti še kje drugje kakor v fiziki, astronomiji in tehniki. Res pa je, da sta tedaj šele nastajala verjetnostni račun in matematična statistika. Nekoč je prišel v Černovicah k njemu kolega s pravne fakultete s prošnjo, naj mu svetuje kakšno dobro knjigo o diferencialnih enačbah. Ukvarja se namreč z matematično ekonomijo in tam uporablja tudi diferencialne enačbe. "V matematični ekonomiji zadoščajo samo štiri osnovne računske operacije in še deljenje pride tam redko v poštev," mu je odgovoril Plemelj. Ko je pozneje pripovedoval to zgodbo, je hudomušno pristavil, da je postal tisti profesor kmalu po prvi svetovni vojni avstrijski finančni minister in ravno med njegovim ministrovanjem je zajela Avstrijo znana huda inflacija, ki je ohromila njeno gospodarstvo.

Pred vojno ni nikdar mislil na to, da bi napisal kakšen učbenik. V nemščini je bilo takih knjig dovolj in se mu ni zdelo potrebno, da bi še on večal množico



Josip Plemelj v matematičnem seminarju. Foto Janko Branc, 1953



Prof. dr. Josip Plemelj ob 90-letnici

ga problema in Newtonov potencial rotacijskega elipsoida z dano maso. Problem Newtonovega potenciala za rotacijski elipsoid je Plemelj rešil že pred vojno, rešitve pa ni objavil in so ga potem drugi prehiteli. Zadnji del trilogije Algebra in teorija števil je izšel leta 1962. Zadnja njegova knjiga, ki pa ne sodi več v trilogijo, je izšla leta 1964 v Ameriki pod naslovom Problems in the Sense of Riemann and Klein. V angleščino jo je prevedel J. Radok. Obsega področja, na katerih je največ delal: integralne enačbe, Riemannov problem, Kleinovi teoremi itd.

Plemelj je učakal 93 let. Od rane mladosti do pozne starosti se je ukvarjal z matematiko: študiral jo je, ustvarjal novo, predaval in pisal matematične knjige. Kaj mu je pomenila matematika, je sam takole povedal v predgovoru h knjigi Algebra in teorija števil: "Nikdar v življenju mi ni bila matematika nadležna, ne pri prenašanju na druge ne pri meni samem. Bila mi je življenjska potreba in umetniški užitek, ki ga lahko vidi vsak matematik na mojih delih." V strokovnem pogledu je bil v življenju zadovoljen. Obžaloval je le to, da v drugi polovici življenja ni imel več ugodnih možnosti za ustvarjalno delo.

Bibliografija

a) Knjige

[1] *Potentialtheoretische Untersuchungen*. Preisschriften der fürstl. Jablonowskischen Gesellschaft in Leipzig. 1911. Str. XIX + 100.

[2] *Teorija analitičnih funkcij*. Ljubljana. Slovenska akademija znanosti in umetnosti, 1953. Str. XVI + 516.

[3] *Diferencialne in integralne enačbe*. Teorija in uporaba. Ljubljana. Slovenska akademija znanosti in umetnosti, 1960. Str. XVI + 388.

[4] *Algebra in teorija števil*. Ljubljana. Slovenska akademija znanosti in umetnosti, 1962. Str. XIV + 278.

[5] *Problems in the Sense of Riemann and Klein*. Edited and translated by J.R.M. Radok. Interscience Tracts in Pure and Applied Mathematics, No. 16. New York – London – Sydney. Str. VIII + 175.

b) Razprave

[6] *Ein Satz über vertauschbare Matrizen und seine Anwendung in der Theorie linearer Differentialgleichungen*. Monatshefte für Math. und Physik, XII, 1901, 82 – 96.

[7] *Über Systeme linearer Differentialgleichungen erster Ordnung mit doppeltperiodischen Koeffizienten*. Prav tam XII, 1901, 203 – 218.

[8] *Über lineare Differentialgleichungen mit vertauschbarer Basis der Monodromiegruppe*. Prav tam XIII, 1902, 1 – 14.

[9] *Über die Anwendung der Fredholmschen Funktionalgleichung in der Potentialtheorie*. Sitzungsberichte der Kaiserlichen Akademie der Wissenschaften. Wien 1903.

[10] *Zur Theorie der Fredholmschen Funktionalgleichung*. Monatshefte für Math. und Physik XV, 1904, 93 – 128.

[11] *Über lineare Randwertaufgaben der Potentialtheorie*. I. Teil. Prav tam XV, 1904, 337 – 412.

[12] *Über lineare Randwertaufgaben der Potentialtheorie*. II. Teil. Prav tam XVIII, 1907, 181 – 211.

[13] *Über einen neuen Existenzbeweis des Riemannschen Funktionssystems mit gegebener Monodromiegruppe.* Anzeiger der Kaiserlichen Akademie der Wissenschaften 1906, 1 – 4.

[14] *Ein Ergänzungssatz zur Cauchyschen Integraldarstellung analytischer Funktionen.* Monatshefte für Math. und Physik XIX, 1908, 205 – 210.

[15] *Riemannsche Funktionenscharen mit gegebener Monodromiegruppe.* Prav tam XIX, 1908, 211 – 246.

[16] *Über Schlesinger's "Beweis" der Existenz Riemannschen Funktionenscharen mit gegebener Monodromiegruppe.* Jahresbericht der deutschen Mathematikervereinigung XVIII, 1909, 15 – 20.

[17] *Über Schlesinger's "Beweis" der Existenz Riemannschen Funktionenscharen mit gegebener Monodromiegruppe.* Prav tam XVIII, 1909, 340 – 343.

[18] *Existenzbeweis der Lösung linearer Differentialgleichungen insbesondere an einer Fuchs'schen singulären Stelle.* Monatshefte für Math. und Physik XXII, 1911, 339 – 344.

[19] *Die Unlösbarkeit von $x^5 + y^5 + z^5 = 0$ im Körper $k(\sqrt{5})$.* Monatshefte für Math. und Physik XXIII, 1912, 305 – 308.

[20] *Die Siebenteilung des Kreises.* Prav tam XXIII, 1912, 309 – 311.

[21] *Die Grenzkreisuniformisierung analytischer Gebilde.* Prav tam XXIII, 1912, 297 – 304.

[22] *Über den Verzerrungssatz von P. Koebe.* Gesellschaft deutscher Naturforscher und Ärzte. Verhandlungen, 1913.

[23] *Sur l'abaissement du degré de l'équation modulaire.* Bulletin des Sciences Mathématiques XLVII, 1923, 146 – 153.

[24] *Rešitev linearne diferencialne enačbe kot funkcija akcesoričnih parametrov.* Rad Jugosl. akademije 228, 1923, 38 – 42.

[25] *O analitičnem raztegnjenju slik.* Prav tam 1923, 228, 43 – 49.

[26] *Ein Abschätzungssatz der Potentialtheorie.* Publications mathématiques de l'Université de Belgrade II, 1933, 150 – 153.

[27] *Die Abbildung eines Ringbereiches mit analytischer Zuordnung der Randkurve auf einen mit linearer Zuordnung.* Prav tam II, 1933, 154 – 160.

[28] *Über die Transformation des elliptischen Gebildes in die Normalform von Weierstrass.* Prav tam II, 1933, 161 – 163.

[29] *Die Irreduzibilität der Kreisteilungsgleichung.* Prav tam II, 1933, 164 – 165.

[30] *Zur Theorie der linearen Differentialgleichung zweiter Ordnung mit vier Fuchs'schen singulären Stellen.* Monatshefte für Math. und Physik XLIII, 1936, 321 – 339.

- [31] *Iz mojega življenja in dela*. Prvi kongres matematičara i fizičara FNRJ Naučna saopštenja i obaveštenja 1951, 1 — 6.
- [32] *O krogih na krogli*. Obzornik za matematiko in fiziko I, 1951, 41 — 46.
- [33] *Rešitev sistema enačb $X^2 + 5Y^2 = U^2$, $X^2 - 5Y^2 = V^2$ v celih številih*. Prav tam III, 1955, 41 — 44.

3. Prosen M., ASTRONOMSKA OPAZOVANJA, 1978
4. Strnad J., ZAČETKI SODOBNE FIZIKE – Od elektrona do jedrske cepitve, 1979
5. Strnad J., RELATIVNOST ZA ZAČETNIKE, 1979
6. Landau L.D., Rumer J.B., KAJ JE TEORIJA RELATIVNOSTI, 1979
7. Križanič F., UKROČENA MATEMATIKA, 1981
8. Ranzinger P., PRESEKOVA ZVEZDNA KARTA, 1981
9. Strnad J., ZAČETKI KVANTNE FIZIKE – Od kvanta do snovnega valovanja, 1982
10. Kuščer I., ENAJSTA ŠOLA IZ FIZIKE – Čuda se kažejo ob vsakem koraku, 1982
11. Zajc P., TEKMUJMO ZA VEGOVA PRIZNANJA – Zbirka rešenih nalog iz matematike za učence petih in šestih razredov osnovnih šol, 1982
12. Zajc P., TEKMUJMO ZA VEGOVA PRIZNANJA – Zbirka rešenih nalog iz matematike za učence sedmih razredov osnovnih šol, 1983
13. Zajc P., TEKMUJMO ZA VEGOVA PRIZNANJA – Zbirka rešenih nalog iz matematike za učence osmih razredov osnovnih šol, 1983
14. Šporer Z., OH, TA MATEMATIKA, 1984
15. Curran S., Curnow R., IGRE, GRAFIKA IN ZVOKI, 1985
16. Curran S., Curnow R., PRVI KORAKI V BASICU, 1985
17. Lafferty P., UVOD V RAČUNALNIŠTVO, 1985
18. Curran S., Curnow R., UČENJE Z RAČUNALNIKOM, 1985
19. Bajc D., Pisanski T., NAJNUJNEJŠE O GRAFIH, 1985
20. Strnad J., JOŽEF STEFAN – Ob stopetdesetletnici rojstva, 1985
21. Ranzinger P. in dr., NAŠE NEBO IN ZEMLJA 1987 – Astronomske efemeride. Potresi. Umetni sateliti, 1986
22. Vidav I., JOSIP PLEMELJ – Ob dvajsetletnici smrti, 1987

PRESEK – LIST ZA MLADE MATEMATIKE, FIZIKE IN ASTRONOME

14. letnik, šolsko leto 1986/87, številka 5, strani 257 – 288

JREDNIŠKI ODBOR: Vladimir Batagelj (bistrovidec), Dušica Boben (pisma bralcev, stavljenje teksta), Pavla Ranzinger (astronomija), Martin Čopič, Franci Forstnerič (matematika), Bojan Golli (tekmovanja – naloge iz fizike), Pavel Gregorc, Andrej Kmet, Damjan Čobal, Jože Kotnik, Edvard Kramar (odgovorni urednik), Sandi Klavžar in Matija Lokar (računalništvo), Gorazd Lešnjak (tekmovanja – naloge iz matematike), Peter Petek (naloge bralcev, premisli in reši), Tomaž Skulj, Ivanka Šircelj (jezikovni pregled), Miha Štalec (risbe), Marjan Hribar (fizika), Ciril Velkovich (urednik, nove knjige, novice).

Dopise pošiljajte in list naročajte na naslov: Društvo matematikov, fizikov in astronomov SRS – Podružnica Ljubljana – Komisija za tisk, Presek, Jadranska c. 19, 61111 Ljubljana, p.p. 64, tel. (061) 265 – 061 / 53, št. žiro računa 50101–678–47233. Naročnina za šolsko leto 1986/87 je za posamezna naročila 1000.– din, za skupinska naročila pa 800.–, posamezna številka 250.– din/200.– din.

List sofinancirajo Izobraževalna, Kulturna in Raziskovalna skupnost Slovenije

Ofset tisk Časopisno in grafično podjetje DELO, Ljubljana

© 1987 Društvo matematikov, fizikov in astronomov SRS – 850

ISSN 0351–6652

PRESEKOVA KNJIŽNICA

Izdaja Društvo matematikov, fizikov in astronomov SRS

Odgovorni urednik Edvard Kramar

26.

Ivan Vidav

Josip Plemelj – Ob dvajsetletnici smrti

Jezikovni pregled Janko Moder

Stavek Dušica Boben

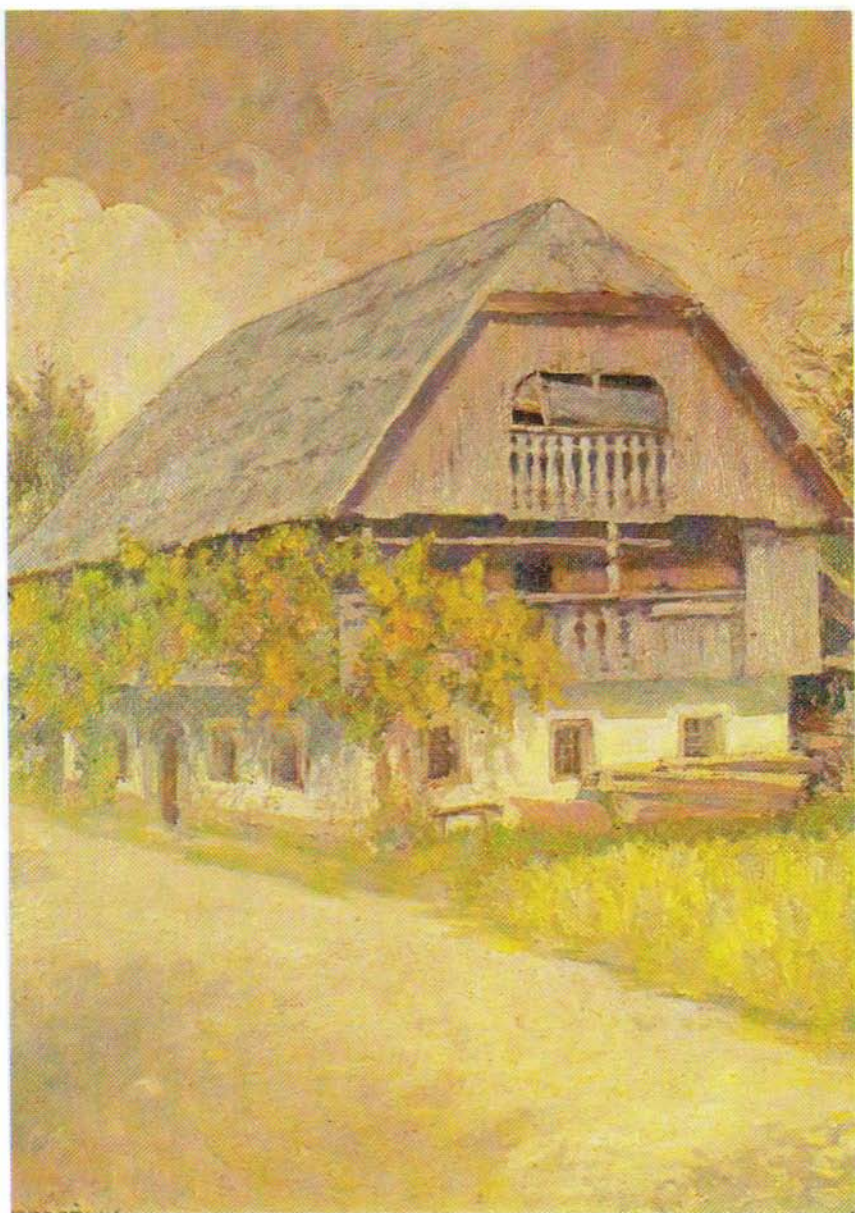
Slika Miha Štalec

Tiskarske korekture Zvonimir Bohte

Oprema Ciril Velkovich

Urednik Ciril Velkovich

© 1987 DMFA SRS – 851



J. Erbežnik, Rojstna hiša Josipa Plemlja na Bledu — olje, 1913