

イザック
ウトン 碩
字よりて
誇らず

3

PRESEK

DRUŠTVO MATEMATIKOV, FIZIKOV IN ASTRONOMOV SRS LETNIK 14. 1986-87

KRATKOČASNE VŽIGALICE — rešitve so na III. str. ovitka

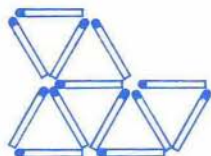
49



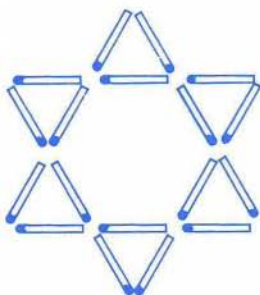
50



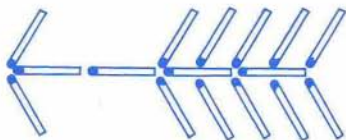
51



52



53



45. Sestavi iz štirih vžigalic vzorec, v katerem bo 16 pravih kotov!

46. Iz šestih vžigalic sestavi 3 enake kvadrate! Pri tem smeš prelomiti dve vžigalici.

47. Iz devetih vžigalic sestavi šest kvadratov!

48. Sestavi 3 enake kvadrate najprej iz 10, nato pa še iz 11 vžigalic!

49. a) Prestavi 4 vžigalice, da dobiš 3 enakostranične trikotnike!

b) Prestavi 4 vžigalice, da dobiš 4 enake rombe!

c) Prestavi 3 vžigalice, da dobiš 6 paralelogramov!

50. Odstrani 4 vžigalice, da ti ostanejo štirje enaki trikotniki.

51. Odstrani 3 vžigalice, da ti ostanejo trije trikotniki!

52. V Davidovi zvezdi je 8 trikotnikov.

a) Prestavi 2 vžigalici, da dobiš 6 trikotnikov!

b) Prestavi 6 vžigalic, da dobiš 6 rombov!

53. Iz 16 vžigalic sestavi puščico!

a) Prestavi 10 vžigalic, da dobiš 8 enakih enakostraničnih trikotnikov!

b) Prestavi 7 vžigalic, da dobiš 5 enakih paralelogramov!

VSEBINA

FIZIKA	Jabolko in Luna — Ob tristoletnici Newtonovih Principov (Janez Strnad)	130
	Utrinki (Izbral in prevedel Janez Strnad)	137, 143
TEKMOVANJA	22. republiško tekmovanje osnovnošolcev iz matematike — rešitve str. 187 (Aleksander Potočnik)	138
	16. zvezno tekmovanje osnovnošolcev iz matematike — rešitve str. 190 (Aleksander Potočnik)	142
NOVE KNJIGE	Tošič R., Zbirka rešenih zadatka iz matematike — Brojevi (Marjan Vagaja)	144
	Smullyan R., Šahovske skrivnosti Sherlocka Holmesa (Peter Petek)	144
	Štalec I. in dr., Zbirka vaj iz aritmetike, algebre in analize za 3. razred srednjih šol (Ciril Velkovrh)	182
RAČUNALNIŠTVO NALOGE	Kako računalnik nariše krožnico (Andrej Vitek)	145
	Mladim Vegovcem za ogrevanje — rešitve str. 183 (Aleksander Potočnik)	156
	Presekov koledar II (Ciril Velkovrh)	157
RAZVEDRILO	BOLJ ZA ŠALO KOT ZARES — Poiščite tatu. Nogomet. Nenavadna plošča — rešitev str. 192 (Izbrala in prevedla Dušica Boben)	155, 169
	— Kratkočasne vžigalice — rešitev str. III (R. Rojko)	II
	— Astronavtiko na znamenjih so nam poslali Andreja iz Celja, Marko in Petra iz Ljubljane	IV
	BISTROVIDEC — Biljard (Vladimir Batagelj)	158
	PREMISLI IN REŠI — Kaj izpiše naslednji program — rešitev iz P-1 — Vsota dveh potenc (P. Petek)	159
	ŠTEVILSKA KRIŽANKA (Franci Oblak)	160
RAČUNALNIŠTVO	LOGO na računalniku Spectrum — SOLI/LCSI Sinclair Logo (V. Batagelj, B. Horvat, T. Pisanski)	162
MATEMATIKA	Trikotniška števila (Jože Grasselli)	170
	Magični kvadrat $4n \times 4n$ (Borut Zalar)	175
NOVICE	Prof. dr. Ivan Kuščer — novi častni član društva (Ciril Velkovrh)	178
	Druga letna šola fizike (Nada Razpet)	179
	7. letna šola mladih matematikov, Bled 86 (A. Potočnik)	180
	27. mednarodna matematična olimpiada (Jože Fabčič)	181
REŠITVE NALOG	Številka križanka iz P/XIV-1 (Franci Oblak)	189

Slika na ovitku. Newton in padajoče jabolko. Japonski lesorez iz prejšnjega stoletja priča, da je zgodba razširjena po vsem svetu. Lesorez ima v svoji zbirki Stillman Drake in je posnet iz njegovega članka *Newton's apple and Galileo's dialogue* (Newtonovo jabolko in Galilejev Dialog) iz Scientific Americana 243 (1980) 122 (2).

JABOLKO IN LUNA

Ob tristoletnici Newtonovih *Principov*

Menda pozna Isaaca Newtona (slika 1) več ljudi po zgodbi o jabolku in Luni kot po gravitacijskem zakonu, na katerega naj bi ga navedla, in po osnovnih zakonih mehanike. Večina življenjepiscev povzema zgodbo po Voltairu, ki jo je slišal od Newtonove nečakinje.

Okoli leta 1666 je bila cambriška univerza več kot poldrugo leto zaprta zaradi kuge. Triindvajsetletni Newton se je tedaj vrnil v rodni kraj Woolsthorpe na materino kmetijo. Knjige je pustil v Cambridgu in je imel veliko časa za razmišljanje. Naključje je nanese, da je razmišljal na vrtu, ko je z jablane padlo zrelo jabolko. Newton je razglabljal o tem, zakaj pade jabolko. Vprašal se je,

Slika 1. Isaac Newton (1642–1727). Newton je živel v zelo razgibanem času. Leta 1649 so usmrtili kralja iz katoliške dinastije Stuartov, ki se je zapletel v boj s parlamentom. Do leta 1660 je bila Anglija republika. Takrat so se vrnil na prestol Stuarti. Toda leta 1688 so pregnali kralja iz te dinastije v *slavni revoluciji* in si izbrali protestantskega kralja. V tem času so s pogodbami določili meje kraljeve oblasti in ločili zakonodajno in izvršilno oblast ter tako položili temelje demokratični državi. I. Newton je vztrajno zastopal stališče univerze proti samovolji katoliškega kralja. Pozneje so ga izvolili v parlament. Redno je hodil na seje, a se na njih ni oglašal. Bil je povzdignjen v plemiški stan in je postal najprej nadzornik in nato upravnik državne kovnice denarja.



zakaj ostane Luna v nespremenjeni razdalji. Na Luno mora delovati ista sila kot na jabolko, le da je zaradi večje oddaljenosti šibkejša. Zgodba o jabolku in Luni ni zašla samo v skoraj vse Newtonove življenjepise, ampak tudi v mnoge učbenike. Zbudi zanimanje, preprosta je in lahko si jo je zapomniti, tako da pripravi učenca na gravitacijski zakon.

V zgodovini človeštva ni večjega imena, kot je Newtonovo, in ni ga človeškega dela, ki bi doseglo višino njegove knjige *Principi*. Dejstvo, da je to mojstrsko delo prvič omogočilo, da so ljudje prodrli v globino narave in da je z bleščečo lučjo osvetlilo mehanizem, ki giblje nebesna telesa, pojasnjuje, zakaj so na pisatelja te knjige gledali kot na človeka, ki je prekosil človeški rod. To nam tudi pojasnjuje, zakaj je najznamenitejši nadaljevalec njegovega dela, Laplace, lahko rekel: "Ta knjiga se bo ohranila kot spomenik veleuma, ki nam je odkril največji zakon vesolja." Prav zaradi tega je Lagrange resignirano vzdiknil: "Newton je lahko srečen, da je imel nalogo, pojasniti sestav sveta. Žal je nebo samo eno." In zato je slednjic njegov najslovitejši pevec, Voltaire, zaklical: "Večne prvine, Najvišjega znanke, ne žge ljubosumja v vas veliki Newton?"

P. Rousseau, *Zgodovina znanosti*,
DZS, Ljubljana 1955, str. 272

Anekdota pravi, da je Newton izrekel gravitacijski zakon, ko je opazoval padanje zrelega jabolka z drevesa. Resnica je nekoliko drugačna. Newton je izrekel gravitacijski zakon šele po skrbnem primerjanju padanja jabolka z gibanjem Lune.

J.Ferbar, F.Plevnik, *Fizika za 8.razred*,
DZS, Ljubljana 1975, str. 59

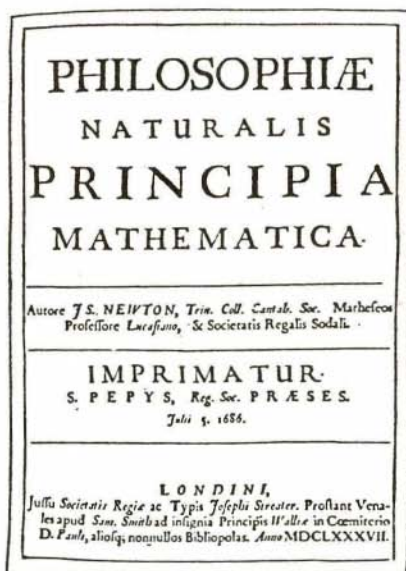
Manj znano obliko zgodbe navaja W. Stukeley v *Memoirs of Sir Isaac Newton's Life* (Spomini na življenje sira Isaaca Newtona): "Po kosilu (pri Newtonu v Londonu) je bilo toplo vreme. Prešla sva na vrt in pila čaj v senci jablan. Bila sva sama. Med drugim mi je sir Isaac pripovedoval, da mu je v čisto enakih okoliščinah padla na pamet prva misel o gravitaciji. Sprožilo jo je jabolko, ki je padlo, ko je pogreznjen v misli sedel na vrtu. Zakaj pade jabolko vedno navpično, zakaj ne postrani, ampak vedno proti središču Zemlje? Če snov tako privlači drugo snov, mora obstajati sorazmernost z njeno množino. Zaradi tega jabolko prav tako privlači Zemljo kot Zemlja jabolko. Zato mora obstajati sila, podobna tisti, ki ji pravimo teža in ki sega po vsem vesolju."

Nekateri pisci ob Newtonovem prisilnem bivanju v Woolsthorpu ne varčujejo z vznesenimi besedami. Pierre Rousseau je v *Zgodovini znanosti* zapisal: "Človeštvo bi lahko brez škode prečrtalo v svoji zgodovini dobo od Arhimedove smrti do Descartesovega rojstva s pridržkom, da bi se pri tem ohranilo New-

tonovo bivanje v Woolsthorpu. (Ni čisto jasno, kako je to mislil, saj je bil René Descartes rojen že leta 1596, medtem ko je Newton živel v Woolsthorpu s kratko prekinitvijo od 1665 do 1667.) Če bi vsako od obeh časovnih obdobij položili na skledico tehtnice, in sicer osemnajst stoletij na eno stran in dve leti na drugo, verjetno osemnajst stoletij ne bi tehtalo več. V času tega bivanja v Woolsthorpu je namreč Newton iznašel infinitezimalni račun, odkril splošno težnost ter se lotil teorije svetlobe. Čuval pa se je, da bi komu kaj pokazal; prvič zaradi tega, ker še ni izvedel dokončnih dokazov, in drugič zaradi tega, ker je kazal nagoni odpor pred javnostjo in razpravljanjem.”

Letos je minilo tristo let, odkar je Isaac Newton v knjigi *Principia mathematica philosophiae naturalis* (Matematične osnove naravoslovja ★) postavil temelje mehanike (slika 2). Prav zaradi obletnice smo se spomnili na zgodbo o jabolku in Luni. V *Principih* je Newton prvič navedel tri osnovne zakone mehanike in gravitacijski zakon. V zadnjem od treh delov *Principov* z naslovom *Sistem sveta* je precej pozornosti namenil Luni in je obdelal njeno gibanje okoli Zemlje.

Slika 2. Naslovna stran prve izdaje *Principov* iz leta 1687. Dovoljenje za tisk je knjiga dobila leto prej, a tiskanje se je zavleklo.



★ Nekdaj so naravoslovju ali fiziki rekli filozofija narave. Newton je knjigo po tedanji navadi napisal v latinščini.

Newtonovi zakoni (iz uvoda *Principov*)

1. Telo vztraja v stanju mirovanja ali enakomerne gibanja, če ga zunanja sila ne prisili k spremembi tega stanja.
2. Sprememba gibalne količine je sorazmerna z zunanjo silo in ima smer sile.
3. Če deluje prvo telo na drugo telo s silo, deluje drugo telo na prvo z enako veliko silo v nasprotni smeri.

Zakonom smo dali obliko, v kateri jih uporabljamo dandanes. Prvi zakon, *zakon o vztrajnosti*, je navedel že René Descartes, pa tudi Galileo Galilei ga je poznal. Zasnove drugega zakona je mogoče najti pri nekaterih drugih fizikih. Tretji zakon, *zakon o vzajemnem učinku*, je pravzaprav za Newtona najznačilnejši.

Gravitacijski zakon (iz tretjega dela *Principov*):

Sila, s katero deluje prvo telo na drugo telo, je sorazmerna z maso prvega telesa m_1 in z maso drugega telesa m_2 , ter obratno sorazmerna s kvadratom razdalje r :

$$F = \kappa m_1 m_2 / r^2$$

O sorazmernostnem koeficientu κ , *gravitacijski konstanti*, je I. Newton samo ugibal. Izmeril ga je šele leta 1798 Henry Cavendish. Gravitacijski zakon velja v zapisani obliki za majhni telesi. Velja tudi za krogelno simetrični telesi, ki ju nadomestimo z majhnima telesoma v središčih. To ugotovitev je Newton izpeljal šele v *Principih*. Tudi zato ni mogel gibanje Lune do kraja pojasniti s privlačno silo Zemlje že okoli leta 1666.

Luno drži na njeni poti sila, zaradi katere telesa na Zemlji padajo. Da Luna kroži okoli Zemlje v dani razdalji, mora biti težni pospešek 3600-krat manjši kot na zemeljskem površju. Ker pojema gravitacija obratno sorazmerno s kvadratom razdalje in ker je Luna 60-krat bolj oddaljena od središča Zemlje kot zemeljsko površje, je težni pospešek v razdalji Lune zares $60^2 = 3600$ -krat manjši kot na zemeljskem površju. To ujemanje je povečalo zaupanje v Newtonove zakone.

Nenavadno se zdi, da je I. Newton od leta 1666 do leta 1687 čakal z objavo te ugotovitve. Nekateri zgodovinarji so poskusili odgovoriti na vprašanje takole: I. Newton je hotel v Woolsthorpu preskusiti svojo zamisel. Ker ni imel drugih podatkov, je po spominu vzel za dolžino ene stopinje na zemeljskem poldnevniku 60 angleških milj (angleška milja meri 1,609 kilometra), za oddaljenost Lune 60-kratni zemeljski radij in za njen obhodni čas 27 dni 7 ur 43 minut (M. Milanković, *Kratka zgodovina astronomije*, 1. del, DMFA, Ljubljana 1982, str. 141 in 155). Toda račun mu je dal za težni pospešek na zemeljskem površju za sedmino manj od znane vrednosti. P. Rousseau pravi: "... in Newton je doživel veliko razočaranje: njegov preizkus ni držal. 'K vragu težnost!' je zagodrnjal. 'Opustimo vse to in se lotimo optike!' "

Zgodba ima še nadaljevanje. Leta 1682, kakih šestnajst let pozneje, je Newton na seji Kraljeve družbe ★ zvedel za novo francosko merjenje stopinje na zemeljskem poldnevniku. Z novim podatkom je odhitel domov. Toda bil je tako razburjen, da sam ni zmožgal preprostega računa. Prosil je prijatelja, da ga je naredil namesto njega. Zdaj je dobil pravo vrednost težnega pospeška na zemeljskem površju.

Vrednost za dolžino stopinje na poldnevniku so pozneje uporabili v definiciji za meter: zemeljski poldnevnik ima obseg 40 000 kilometrov. Eni stopinji ustreza tedaj $40\,000\text{ km}/360 = 111\text{ kilometrov}$. To je zares za sedmino več od podatka $60.1609\text{ km} = 97\text{ km}$, ki ga je I. Newton uporabil pri svojem prvem računu: upošteval je pač za sedmino premajhen radij Zemlje.

Celo manj kritični zgodovinarji mislijo, da je nadaljevanje dvomljivo. O francoskem merjenju so v Kraljevi družbi, katere član je bil Newton od leta 1672, razpravljali že leta 1675. Vrh tega leta 1682 Newton še ni imel tajnika in si je težko misliti, kateremu prijatelju bi, ko je pritekel s seje, pri sebi doma poveril račune.

Bolj kritični zgodovinarji fizike dvomijo tudi v začetek zgodbe. Stukeleyeva inačica je zagotovo izvitá iz trte. Iz Newtonovega pisanja je mogoče razbrati, da je tretji zakon, zakon vzajemnega učinka, odkril okoli začetka leta 1685. Tudi Voltairova inačica ne more držati v celoti, ker je gravitacijski zakon zgrajen na zakonu o vzajemnem učinku. Morda se je Newton v Woolsthorpu zares začel podrobneje zanimati za gibanje vesoljskih teles, kot se je zanimala zanj in za optiko večina tedanjih učenjakov. Marsikdo od njih je tedaj ugibal, da je sila obratno sorazmerna s kvadratom razdalje. Tako namreč pojema gostota nečesa, kar se neovirano in enakomerno iz točke širi na vse strani. Deliti je namreč treba s površino krogle, ki narašča sorazmerno s kvadratom razdalje. Toda Isaac Newton je dolgo časa razmišljal enako kot Christian Huygens okoli leta 1673 in drugi, drugače, kot razmišljamo dandanes.

Račun gibanja Lune. Nakažimo račun, o katerem smo govorili. Telo naj enakomerno kroži okoli Zemlje po krogu z radijem r s hitrostjo v . V ravnino kroženja postavimo koordinatni sistem z izhodiščem v središču kroga in s telesom v trenutni legi ob času $t = 0$ na osi y . Kratek hip pozneje, ob času t , se telo premakne v točko P (slika 3a). Izračunajmo koordinati te točke. Točka leži na krogu in po Pitagorovem izreku velja $x^2 + y^2 = r^2$. Ker je x majhen in se y malo razlikuje od r , lahko približno zapišemo $y = \sqrt{r^2 - x^2} = r \sqrt{1 - x^2/r^2} = r - x^2/2r$, tako da je $r - y = x^2/2r$. Približno namreč

★ Royal Society ne kako ustreza naši akademiji znanosti.

velja $\sqrt{1 + \delta} = 1 + \frac{1}{2}\delta$, če je δ majhen v primeri z 1. Ko obe strani enačbe kvadriramo, lahko zanemarimo člen δ^2 v primeri z 1.

Gibanje telesa opišimo kot vodoraven met. V vodoravni smeri, to je v smeri osi x , se giblje telo enakomerno s hitrostjo v , tako da je $x = vt$. V navpični smeri, to je v smeri osi y , pa pada enakomerno pospešeno s pospeškom g , tako da je $z = r - y = \frac{1}{2}gt^2$. Da sta gibanji v obeh pravokotnih smereh neodvisni, je vedel že Galileo Galilei. Vedel je tudi, da se telo pri vodoravnem metu giblje po paraboli. Precej časa smo porabili prav zato, da smo odsek kroga približno izrazili kot odsek parabole. Omenimo še to, da je po enakomernem gibanju v vodoravni smeri Galilei sklepal, da velja zakon vztrajnosti.

Že on bi lahko oboje združil in iz enačbe

$$r - y = \frac{1}{2}x^2/r = \frac{1}{2}(vt)^2/r = \frac{1}{2}gt^2$$

izračunal pospešek

$$g = v^2/r$$

Tega ni storil; težni pospešek sam ga ni posebno zanimal, saj ga ni mogel naravnost meriti.

Newton bi tej enačbi lahko dodal zvezo o pojemanju težnega pospeška z razdaljo

$$g = g_0 r_0^2 / r^2$$

v kateri je g_0 težni pospešek na površju Zemlje z radijem r_0 . Če je tako storil, pri tem ni rabil zakona o vzajemnem učinku in gravitacijskega zakona, do katerih se je dokopal šele leta 1684. Iz zapisanih enačb bi lahko izračunal težni pospešek na zemeljskem površju in ga primerjal z vrednostjo, ki jo je dobil C. Huygens z nihalom. Treba bi mu bilo samo izračunati hitrost krožečega telesa tako, da bi obseg tira $2\pi r$ delil z obhodnim časom t_0 . Tako bi dobil

$$g_0 = v^2 r / r_0^2 = (2\pi r / t_0)^2 r / r_0^2 = 4\pi^2 r^3 / r_0^2 t_0^2$$

in s tem mimogrede še *tretji Keplerjev zakon*: za vse zemeljske satelite je kvocient kuba oddaljenosti od središča in kvadrata obhodnega časa enak. Kepler je leta 1609 postavil zakon za planete, ki se gibljejo okoli Sonca.

Vzemimo najprej za radij Luninega tira $60r_0$ in dobimo $g_0 = 86400 \pi^2 r_0 / t_0^2$, torej je težni pospešek sorazmeren z radijem Zemlje. Ko vstavimo za ta radij $r_0 = 6400$ km in obhodni čas Lune $t_0 = 27$ dni, dobimo $g_0 = 10 \text{ m/s}^2$, to je težni pospešek na površju Zemlje. Če je Newton upošteval za sedmino premajhen radij Zemlje, 5500 km, je dobil za sedmino premajhen težni pospešek $8,6 \text{ m/s}^2$. S tem se najbrž zares ne bi zadovoljil.

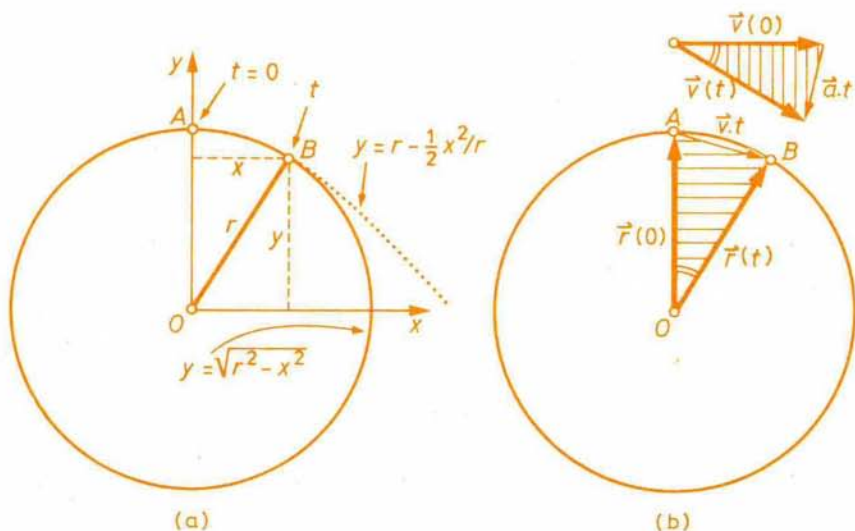
Doslej smo računali tako, kakor da še ne bi izšli *Principi*. Po izidu *Principov* je bil lahko račun mnogo krajši: Na krožeče telo mora delovati *centripetalna*, to je proti središču usmerjena, sila mv^2/r in ta sila je ravno gravitacija osrednjega telesa: $km m_z / r^2 = m g_0 r_0^2 / r^2$. V našem primeru je m masa Lune in m_z masa Zemlje.

Od kod vemo, da je centripetalna sila mv^2/r ? Ko sestavimo hitrost $\dot{v}(0)$ v trenutku $t = 0$ in s časom t pomnoženi pospešek at , dobimo novo hitrost $\dot{v}(t)$ v trenutku t . Ko sestavimo radij $\dot{r}(0)$ do telesa v začetnem trenutku in s časom pomnoženo hitrost $\dot{v} t$, dobimo radij $\dot{r}(t)$ v trenutku t . Oba trikotnika sta podobna, pa lahko zapišemo $vt/r = at/v$ (slika 3b). Poskrbeti moramo le, da je čas t tako kratek, da lahko lok AB približno izenačimo s tetivo vt .

Postaviti se moramo — po prvem Newtonovem zakonu — na stališče, da se prosto telo giblje premo enakomerno ali miruje. To izključuje možnost, da bi se vrteli in trdili, da Luna miruje. Ne, Luna enakomerno kroži, enakomerno kroženje pa je pospešeno gibanje. To je treba poudariti. Zares se pri enakomernem kroženju ne spreminja velikost hitrosti. Toda za hitrost ni značilna samo velikost, ampak tudi smer, in pri kroženju se spreminja njena smer. Kot je povezan pospešek s spreminjanjem velikosti hitrosti, je povezan tudi s spreminjanjem smeri hitrosti. Le v prvem primeru ima smer hitrosti, v drugem pa je pravokoten nanjo.

Na ta način gledanja je opozoril Newtona šele leta 1679 Robert Hooke. Tako je mogoče razbrati iz pisma, ki ga je napisal Newtonu konec tega leta. Hookovo obvestilo je menda preusmerilo tok Newtonovih misli in privedlo naposled do *Principov*. Hooke sam je bil premalo vztrajen in ni znal dovolj matematike, da bi se mu posrečilo odločilno odkritje.

Vseeno življenjepisci zgodbe o jabolku in Luni ne pripovedujejo brez osnove. Newton jo je, kot vse kaže, razširil sam, da bi se mu ne bilo treba prepirati s Hookom. Do prepirov je prišlo že šest let prej ob neki Newtonovi optični razpravi. Zato je počakal tudi z objavo poročila o optičnih poskusih, ki jih je



Slika 3. Kroženje Lune okoli Zemlje lahko sestavimo iz prostega padanja proti središču in premega enakomernega gibanja v pravokotni smeri. Lok AB približno opišemo kot odsek parabole (a). Radialni pospešek pri enakomernem kroženju dobimo, ko upoštevamo spremembo hitrosti in ustrezno spremembo lege. Narisana trikotnika sta podobna (b).

naredil pred *Principi*. Knjigo *Opticks* — za razliko od *Principov* je pisana v angleščini — je izdal leta 1704, leto dni po Hookovi smrti.

Newton je zgodbo o jabolku in Luni napisal v osnutku pisma nekemu francoskemu pisatelju leta 1717, a jo je prečrtal. Najbrž jo je prijateljem že prej pripovedoval. Vse to v ničemer ne zmanjša pomena *Principov* in Newtonovega dela. Opozarja pa na človeško stran. Newton se je večkrat zapletel v hude spore, kar tedaj ni bilo nič nenavadnega. Opozarja tudi na to, kako težavno je delo zgodovinarja fizike. V glavnem se mora opirati na pisane vire iz tistega časa, a vsem ne sme zaupati. S primerjanjem takih virov mora — pri tem mu pride prav znanje fizike — ločiti zrno od plev. Veliko prijetnih, zanimivih in na prvi pogled verjetnih zgodbic iz zgodovine fizike, ki jih najdemo tudi v učbenikih, je spornih.

Janez Strnad

UTRINKI

Pritlikavci na ramenih velikanov vidijo dlje kot velikani sami.

Diego de Estella (1524 — 1578)

Če sem videl dlje kot drugi, sem videl zato, ker sem stal na ramenih velikanov.

I. Newton

Ne vem, kakšen se lahko zdim svetu, a sam sebi se zdim kot deček, ki se igra na obali in uživa, ko od časa do časa najde bolj pisan kamenček ali rdečo školjko, pred menoj pa se razteza velik ocean resnice neraziskan.

I. Newton

Ob rojstvu je bil tako majhen, da je njegova mati dejala, da bi ga lahko dala v litrski lonec, in kazal je tako slabotne znake življenja, da sta se ženski, ki sta šli po "krepilna zdravila", čudili, ko sta ga ob svojem povratku našli živega ...

Ni bil dober učenec in kot pravi sam, je bil nepazljiv ter med zadnjimi v razredu...

J. Jeans, *Zgodovina fizike*, DZS, Ljubljana 1955, str. 208

22. REPUBLIŠKO TEKMOVANJE OSNOVNOŠOLCEV IZ MATEMATIKE

Letošnje republiško tekmovanje za zlato Vegovo priznanje je potekalo v soboto, 17. maja 1986, v *Ljubljani, Celju, Kopru, Mariboru, Novi Gorici in Novem mestu*. Tekmovalo je 136 sedmošolcev in 276 osmošolcev.

Dvanajstčlanska komisija pod predsedstvom mag. Jožeta MALEŠIČA je pripravila naloge, pregledala rešitve, določila kriterij za podelitev zlatih Vegovih priznanj in izbrala ekipo za zvezno tekmovanje. To je bilo letos v *Skopju*. Vsi tekmovalci so prejeli Presekove značke.

Vegovo priznanje so si prislužili sedmošolci, ki so dosegli vsaj 15 do 25 možnih točk, in osmošolci, ki so dosegli vsaj 12 od 25 možnih točk. To so:

7. razred

I. nagrada: Nada BAJŽELJ, Lucija Seljaka, Kranj; Jernej BAN, Riharda Jakopiča, Ljubljana in Sašo BLAŽIČ, Mirana Jarca, Črnomelj;

II. nagrada: Mojca JAZBINŠEK, Veljka Vlahoviča, Celje; Rok KODRE, Gustava Šiliha, Titovo Velenje in Vojko REBOLJ, Frana Albrehta, Kamnik;

III. nagrada: Miha STEINBUECHER, Maksa Durjave, Maribor in Aleksander VRHOVŠEK, Gorjanskega bataljona, Podbočje.

Priznanja so osvojili še: Andrej TROŠT, X. SNOUB Ljubljanske, Ljubljana; Grega HOČEVAR, Prežihov Voranc, Ljubljana; Monika OSVALD, Ivana Roba, Šempeter pri Gorici; Bogdan TERTINEK, Rada Robiča, Limbuš; Kristina UGRINOVIČ, Riharda Jakopiča, Ljubljana; Andrej LENARČIČ, Vide Pregarc, Ljubljana; Polona OTRIN, Ledina, Ljubljana; Boštjan KOCJANČIČ, Ledina, Ljubljana; Branko KMETEC, Martina Konška, Maribor; Roberto COBALTI, Dante Alighieri, Izola; Branko JURIČ, Toneta Žnidariča, Ptuj; Igor PANIČ, Riharda Jakopiča, Ljubljana; Rija ERVES, Karel Destovnik—Kajuh, Murska Sobota; Mojca BAVDAŽ, Anton Velušček—Matevž, Kanal; Tanja VEROVNIK, Franja Vrunča, Slovenj Gradec; Aleksandra BOH, Bratov Ribarjev, Brežice; Grega REPOVŠ, Edvarda Kardelja, Ljubljana; Luka HRIBAR, Komenda—Moste; Mateja TOMAC, Cirila Kosmača, Piran; Gregor MACEDONI, Katje Rupena, Novo mesto; Jasna STOKANOVIČ, Katje Rupena, Novo mesto; Mateja JAMNIK, Franja Vrunča, Slovenj Gradec; Tamara TROHA, Ivana Cankarja, Vrhnika; Tina JUROŠ, Simona Jenka, Kranj; Alessandro COBALTI, Dante Alighieri, Izola; Blaž KONČAR, Dušan Kveder—Tomaž, Litija; Janez OMA-

Bilten republiškega tekmovanja iz matematike za ZLATO VEGOVO PRIZNANJE



HEN, Karel Destovnik—Kajuh, Ljubljana; Jernej GRUDNIK, Šlandrove brigade, Ljubno ob Savinji; Jože ROTAR, Antona Tomaža—Linharta, Radovljica; Matjaž KUKOVEC, Veljka Vlahoviča, Ljubljana; Mirjana TODORVIČ, Lucijana Seljaka, Kranj; Nina ŽNIDARŠIČ, Milana Šuštaršiča, Ljubljana; Slavko KORENČ, IX. korpusa NOVJ, Nova Gorica; Tatjana RUDOLF, Pohorskega odreda, Slovenska Bistrica; Danilo BERTALANIČ, Daneta Šumenjaka, Murska Sobota; Griša PLANINC, Cirila Kosmača, Piran; Janko MEDJA, France Prešeren, Kranj; Liza SLIVNIK, prof.dr. Josipa Plemlija, Bled; Matej ČERNIGOJ, Antona Ukmarja, Koper; Milan ORNIK, Srečko Rojs—Niko, Voličina; Nataša POŽAR, Edvarda Kardelja, Lucija; Nina KOKALJ, Padlih prvoborcev, Žiri; Primož PODRŽAJ, Maksa Pečarja, Ljubljana; Sašo STOJANOVIČ, Katje Rupena, Novo mesto; Simona STORMAN, Bratov Juhart, Šempeter v Savinjski dolini in Tomislav LUŠIČ, nar. heroja Rajka, Hrastnik.

8. razred

I. nagrada: Renata NOVAK, Zvonka Runka, Ljubljana;

II. nagrada: Vilko LEBEN, Prešernove brigade, Železniki in Alenka KAVKLER, Franc Rozman—Stane, Maribor;

III. nagrada: Rok PESTOTNIK, Toneta Seliškarja, Ljubljana.

Priznanja so osvojili še: Grega BIZJAK, Šmarje pri Jelšah; Marko PINTERIČ, Prežihov Voranc, Maribor; Mateja ŽEPIČ, France Prešeren, Kranj; Primož POTOČNIK, Ketteja in Murna, Ljubljana; Samo GERKŠIČ, Zvonka Runka, Ljubljana; Tine TRETJAK, Franja Vrunča, Slovenj Gradec; Alenka STRDIN, Bojana Iliča, Maribor; Andrej BAVER, Danile Kumar, Ljubljana; Jani HADALIN, Ivana Cankarja, Vrhnika; Mitja KOLŠEK, Gustava Šiliha, Titovo Velenje; Anka JAMNIK, Simona Jenka, Kranj; Borut LESJAK, France Prešeren, Kranj; Borut PUST, Simona Jenka, Smlednik; Maruša POMPE, Riharda Jokopiča, Ljubljana; Matej GUČEK, Frana Roša, Celje; Matjaž PIHLER, Milana Šuštaršiča, Ljubljana; Helena STANIČ, Anton Velušček—Matevž, Kanal; Janko PETROVEC, Slavka Šlandra, Prebold; Lena SOTLAR, Staneta Kosca, Šmartno pod Šmarno goro; Mateja JAGODIČ, Bratov Ribarjev, Brežice; Grega DOLINAR, Petra Kavčiča, Škofja Loka; Gregor PETROVIČ, dr.Franja Žgeča, Dornava; Marko KOVAČ, Milan Mravlje, Ljubljana; Meteja SUŠIN, Bratov Ribarjev, Brežice; Matevž ČADONIČ, Mirana Jarca, Črnomelj; Miha BERKOPPEC, Franceta Bevka, Ljubljana; Boštjan RAČIČ, Toneta Seliškarja, Ljubljana; Jure DOBNIKAR, Pohorskega odreda, Slovenska Bistrica; Lea POGAČNIK, Antona Tomaža—Linharta, Radovljica; Matevž TADEL, Majde Vrhovnik, Ljubljana; Mojca PERČIČ, Lucijana Seljaka, Kranj; Renata BLATNIK, Franca Leskoškega—Luke, Ljubljana; Samo DREO, Edvarda Kardelja, Poljčane; Simon PLAZNIK, Marjana Nemca, Radeče; Toni JOŠT, Peter Šprajc—Jur, Žalec in Zoran GRILC, Prežihov Voranc, Maribor.

1. Dana so tri zaporedna cela števila a , $a+1$, $a+2$. Kvadrat vsote danih števil deli s produktom kvadratov teh števil. Izračunaj vrednost dobljenega izraza, če je $a = -3$.
2. Pravkar posekani les je vseboval 40% suhe snovi in 60% vode. Po sušenju je les vseboval le še 50% vode. Kolikšna je bila masa lesa po sušenju, če je pred sušenjem tehtal 2250 kg?
3. Najmanj koliko členov mora imeti vsota $1986 + 1986 + \dots + 1986$, da bo deljiva z 99? Odgovor utemelji.
4. Krožnico s polmerom 1 m razdelimo na štiri enake dele, nato pa vsako četrtno zvijemo v novo, manjšo krožnico. Vsaka od novih krožnic naj leži znotraj prvotne krožnice; med seboj naj se novi krogi ne prekrivajo. Koliko % ploščine prvotnega kroga ni pokrite z malimi krogi?
5. V poljubnem trikotniku $\triangle ABC$ nariši simetralo notranjega kota $\sphericalangle B$. Presečišče simetrale in stranice AC označi s črko D . Skozi točko D nariši vzporednico stranici BC in označi presečišče stranice AB in te vzporednice s črko E . Kakšen je trikotnik $\triangle BDE$? Odgovor utemelji.

8. razred

1. Enakostranični valj presekamo z ravnino, ki je pravokotna na njeno osnovno ploskev. Presek osnovne ploskve s to ravnino je tetiva, ki ima dolžino 6 cm in središčni kot 120° . Z ravnino smo valj presekali na dva kosa. Izračunaj prostornino manjšega kosa.
2. Dana je funkcija $y = (n^2 - 2)x + 4n^2 - 8$.
 - a) Določi n tako, da gre njen graf skozi točko $T(-3, 7)$.
 - b) Določi n tako, da bo njen graf vzporeden z grafom funkcije $y = 2x - 5$.
 - c) Za $n = \sqrt{3}$ izračunaj razdaljo med dano premico in koordinatnim izhodiščem.
3. Koliko je $x + 1/x$, če je $x^2 + 1/x^2 = 1/4$?
4. Dana sta veččlenika $A = x^3 + x^2 - 9x - 9$ in $B = (x - 2)^2 - (x - 4)^2$.
 - a) A in B razcepi in okrajšaj ulomek A/B .
 - b) Pokaži, da je za vsako liho vrednost spremenljivke x , $x \neq 3$, vrednost ulomka A/B sodo število.
5. Andrej stoji 4 m stran od cestne svetilke. Na koncu Andrejeve sence, ki jo daje svetilka, stoji njegov enako visoki prijatelj Branko. Brankova senca je dvakrat daljša od Andrejeve. Izračunaj dolžino Brankove in Andrejeve sence.

16. ZVEZNO TEKMOVANJE OSNOVNOŠOLCEV IZ MATEMATIKE

Zvezno tekmovanje osnovnošolcev iz matematike je bilo letos v soboto, 7. junija, v osnovni šoli *Kočo Racín v Skopju*. Kakor vsako leto ga je tudi letos organiziral *Matematiški list za učnike osnovnih škola* iz Beograda.

V petek, 6. junija, so se tekmovalci zbrali v Skopju, v soboto, 7. junija, ob 9. uri pa je bila svečana otvoritev tekmovanja. Nato so tekmovalci dve uri in pol reševali dokaj zahtevne naloge. Po kosilu so prijazni gostitelji za vse tekmovalce in njihove mentorje pripravili krožni ogled Skopja in njegovih kulturno-zgodovinskih spomenikov in muzejev, tekmovalna komisija pa je medtem pregledala izdelke.

Tekmovalo je 44 sedmošolcev in 51 osmošolcev. Med njimi so po sklepu republiške tekmovalne komisije Slovenijo zastopali naslednji učenci: sedmošolci Nada BAJŽELJ (OŠ Lusijan Seljak, Kranj), Jernej BAN (OŠ Riharda Jakopiča, Ljubljana) in Saša BLAŽIČ (OŠ Mirana Jarca, Črnomelj) ter osmošolci Renata NOVAK (OŠ Zvonka Runka, Ljubljana), Vilko LEBEN (OŠ Prešernove brigade, Železniki), Alenka KAVKLER (OŠ Franc Rozman—Stane, Maribor) in Rok PESTOTNIK (OŠ Tone Seliškar, Ljubljana).

Naši učenci so se na tekmovanju solidno odrezali, saj so pohvale osvojili Jernej BAN, Sašo BLAŽIČ in Renata NOVAK.

Tekmovalna komisija, ki so jo sestavljali po en predstavnik vsake republike in avtonomne pokrajine ter predstavnik Matematiškega lista, je izmed predlogov vseh članov komisije izbrala naslednje naloge:

7. razred

1. Tovariši Amir, Boris in Cane so igrali športno napoved in vplačali naslednje zneske: Amir 600 din, Boris 900 din, Cane 1500 din. Skupaj so zadeli 1700 din. Kako bodo pravilno razdelili dobiček?
2. Otroci so ujeli določeno število muh in pajkov, ki so imeli skupaj 176 nog. Koliko je bilo muh in koliko pajkov, če veš, da ima muha 6, pajek pa 8 nog in sta števili pajkov in muh parni in dvomestni?
3. Štirimestno število ima naslednje lastnosti:
 - a) prva in četrta cifra sta enaki;
 - b) druga in tretja cifra sta enaki;
 - c) enako je produktu treh zaporednih praštevil.

Katero število je to?

4. Dokaži, da je v pravokotnem trikotniku vsota dolžin katet enaka dvakratni vsoti dolžin polmerov očrtanega in včrtanega kroga.
5. Poišči notranje kote enakokrakega trikotnika $\triangle ABC$ ($\overline{AC} = \overline{BC}$), če se središči O_1 in O očrtane in včrtane krožnice prezrcalita preko osnovnice trikotnika drugo v drugo.

8. razred

1. Če naravnemu številu, ki se končuje s 5, odvezemo cifo enic, dobljeno število pomnožimo z njegovim naslednikom in produktu na desni pripišemo 25, dobimo kvadrat prvotnega števila. Dokaži, da trditev velja za trimesna števila.

2. Poišči vse urejene trojke (x, y, z) , kjer so x, y in z naravna števila, ki zadoščajo enačbi $xyz + xy + xz + yz + x + y + z + 1 = 1986$, tako da je x najmanjše od teh števil.

3. Na šolski tabli je bilo napisano trimestno število $\star\star 8$. Trije učenci so ugalbali njegove lastnosti:

Zoran: "Vse njegove cifre so parne in ima parno število različnih prafaktorjev."

Dušan: "Deljivo je z 9 in je kvadrat naravnega števila."

Nikola: "Manjše je od 400 in trinajstkrat večje od nekega naravnega števila."

Pokazalo se je, da je vsak od njih uganil natanko eno lastnost. Zapiši cifri na mesto zvezdic. Utemelji odgovor.

4. Dan je pravokotnik $ABCD$. V njem izberi poljubno točko T in skozi njo nariši vzporednici stranicam pravokotnika. Dokaži, da je ploščina vsaj enega od nastalih manjših pravokotnikov, ki vsebujeta točko A ali točko C , manjša ali enaka četrtini ploščine prvotnega pravokotnika.

5. V pravokotnem trikotniku $\triangle ABC$ označimo dolžine katet z a in b , hipotenuze s c in višine na hipotenuzo s h . Dokaži, da je $c + h > a + b$.

Aleksander Potočnik

Tukaj počiva Sir Isaac Newton, plemič, ki je s skoraj božanskim umom prvi z bakljo matematike ugotovil gibanje planetov, poti kometov in plimo morja ...

Napis na Newtonovem grobu

Tošić R., Zbirka rešenih zadataka iz matematike – brojevi – Materiali za dodatnu nastavu, sveska 2, Novi Sad, DMFA SAP Vojvodine, 1986, str. 70, cena 400 din.

Zbirka vsebuje 113 rešenih nalog iz elementarne teorije števil, namenjenih predvsem učencem sedmega in osmega razreda osnovne šole in učencem srednjih šol. Reševanje nalog zahteva le znanje osnovne šole in nekaj dejstev iz elementarne teorije števil, ki so navedene na začetku zbirke. Naloge lahko koristno služijo učiteljem osnovnih in srednjih šol, organizatorjem in udeležencem raznih matematičnih tekmovanj, poletnih in zimskih šol in vsem, ki uživajo v reševanju matematičnih problemov.

Izbor nalog je zelo raznolik. Del nalog je originalen. Med nalogami so v glavnem take, ki širijo bralčeve poglede na matematiko.

Marjan Vagaja

Smullyan R., ŠAHOVSKE SKRIVNOSTI SHERLOCKA HOLMESA, Ljubljana, DZS, 1986, cena 2300.-

V Preseku smo že objavili primer retrogradne šahovske analize (P-X/4, str. 183, P-XI/2, str. 118 in P-XI/4, str. 169). Ta analiza ne raziskuje najboljših možnosti za igro v *naslednjih* potezah, ampak ugotavlja, kaj se je zgodilo v *prejšnjih*. In prav s takimi vprašanji se ukvarja Sherlock Holmes v pričujoči knjigi. Ali sme beli rokirati, kje je padla črna dama, kaj je bila zadnja poteza belega, na katerem polju mora stati beli kralj itd. itd. Obenem s pomočjo šahovskih retrogradnih problemov išče zakopani zaklad na samotnem otoku in se bojuje s svojim smrtnim sovražnikom profesorjem Moriartjem.

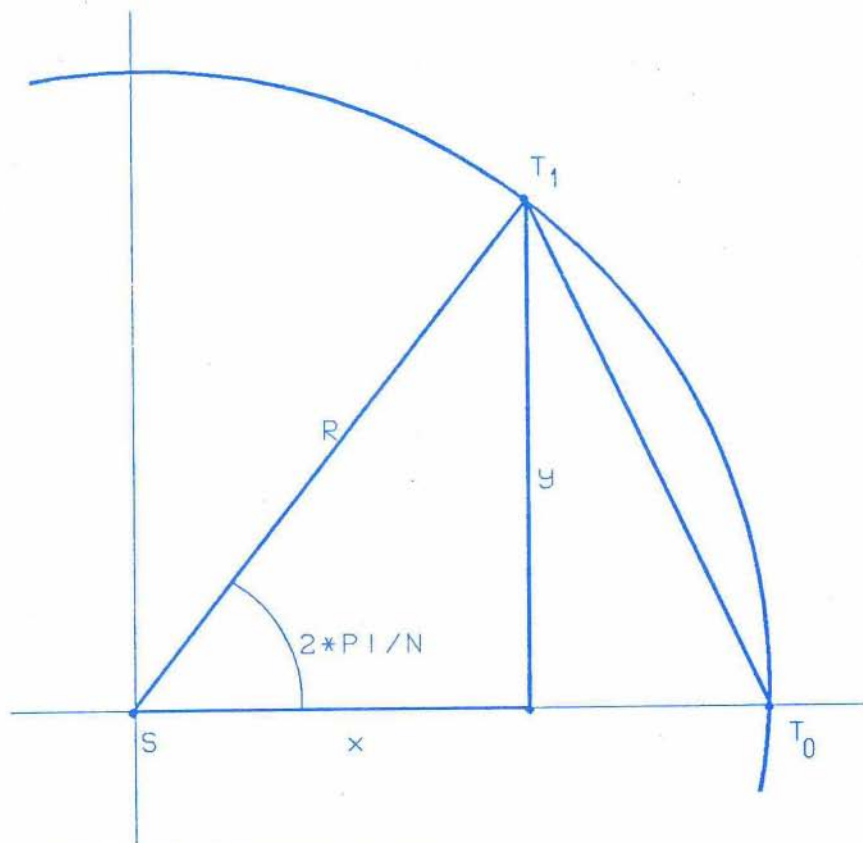


Seveda, če oklestimo vsebino holmesovske barvitosti, ostane pred nami zbirka logičnih problemov na podlagi šahovskih pravil kot aksiomov. Zato bo bržkone zanimiva tistim ljubiteljem šaha in logike, ki v prastari kraljevski igri ne vidijo le igre.

Peter Petek

KAKO RAČUNALNIK NARIŠE KROŽNICO

Zadnjič (Presek 13 (1985/86)1) smo si ogledali računalnikovo ravnilo. Spoznali smo, kako računalnik nariše daljico. Danes si oglejmo še njegovo šestilo, pogledjmo torej, kako računalnik riše krožni lok. Preden nadaljujemo, le ponovimo, kakšen je računalnikov papir: velika rešetka raznobarnih pik, oštevilčenih z dvema celima številoma — številko stolpca in vrstice, v kateri pika stoji. Zato bo tudi krožnica, ki jo bomo narisali, rahlo žagasta. Toda to nas ne bo motilo, kot nas ni motilo zadnjič.



Slika 1. Skica risanja z mnogokotnikom

Kratek izlet v trigonometrijo

(Opomba: če trigonometrije ne obvladate, lahko ta odstavek mirno preskočite.)

Sedaj, ko znamo risati daljice, nam najprej pride na misel, da bi poskusili krožnico narisati z daljicami. Po obodu kroga razporedimo enakomerno razmaknjene točke, ki jih med seboj povežemo z daljicami. Tako namesto krožnice narišemo sicer mnogokotnik, ki pa krožnico ponazarja dovolj dobro, če smo le na obod razmetali dovolj točk. Poskusimo določiti koordinate teh točk! V ta namen privzemimo, da se središče kroga ujema z izhodiščem koordinatnega sistema, njegov polmer pa označimo z R . Na obod razporedimo N točk. Točko, v kateri bomo začeli risati, postavimo na os x in jo označimo s T_0 , preostale pa naj bodo $T_1, \dots, T_{N-1}$. Tako je središčni kot med zaporednima točkama enak ravno N -temu delu polnega kota, torej (izražen v radianih) $2\pi/N$ (glej sliko 1). Središčni kot med začetnim in k -tim naslednjim ogliščem (T_k) je zato k -krat tolikšen. Koordinati x_k, y_k točke T_k sta tako $x_k = R \cdot \cos(k \cdot 2\pi/N)$ in $y_k = R \cdot \sin(k \cdot 2\pi/N)$, kjer je $k = 0, 1, 2, \dots, N-1$. Če se središče krožnice in izhodišče koordinatnega sistema ne ujemata, moramo koordinatama x_k in y_k prišteti še koordinati središča x_S in y_S , tako da ima v splošnem primeru točka T_k koordinati $(x_S + x_k, y_S + y_k)$.

Prepišimo te ugotovitve v postopek za risanje! V ta namen označimo z

R	— polmer kroga,
N	— število stranic mnogokotnika,
$xsred, ysred$	— koordinati središča krožnice,
$xzač, yzač$	— koordinati začetne točke trenutno risane stranice,
$xkon, ykon$	— koordinati končne točke te stranice,
kot	— središčni kot zadnje narisane točke,
$korak$	— središčni kot med zaporednima ogliščema.

Risanje gre potem takole:

(1) postavi se v začetno oglišče:

$$xkon := R, ykon := 0, kot := 0, korak := 2\pi/N$$

(2) izračunaj koordinati naslednje točke:

$$xzač := xkon, yzač := ykon,$$

$$kot := kot + korak,$$

$$xkon := R \cdot \cos(kot), ykon := R \cdot \sin(kot)$$

(3) prejšnjo točko poveži z njo:

Daljica (*xzac*, *yzac*, *xkon*, *ykon*)

(4) koraka (2) in (3) ponavljaj, dokler ni narisanih vseh *N* daljic.

Ustrezni podprogram prikazuje program 1. Podprogram Daljica v njem mora v resnici seveda povezati obe podani točki z ravno črto.

Program 1

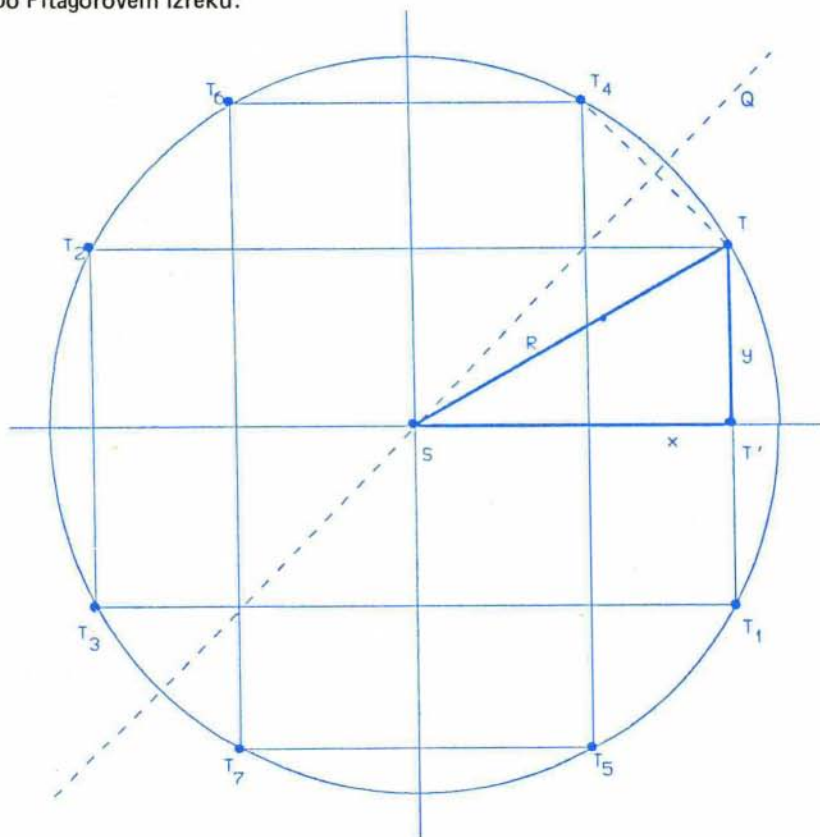
```
procedure Krog1 (xSred, ySred, R: real; N: integer);
{Program 1: Risanje kroga s kotnimi funkcijami}
const
  PI = 3.1415926;
var
  xZac, yZac: real; {Zacetna tocka}
  xKon, yKon: real; {Koncna tocka}
  kot, korak: real; {Srediscni kot trenutne tocke in korak}
  i: integer; {Stevec}
procedure Daljica (xZac, yZac, xKon, yKon: real);
begin
  {Narise daljico od tocke xZac, yZac do tocke xKon, yKon}
end {Daljica};
begin {Krog1}
  xKon := R; yKon := 0; kot := 0; korak := 2*PI/N;
  for i := 1 to N do
    begin
      xZac := xKon; yZac := yKon;
      kot := kot + korak;
      xKon := R * cos(kot); yKon := R * sin(kot);
      Daljica (xsred+xZac, ysred+yZac, xsred+xKon, ysred+yKon)
    end
  end {Krog1}.
```

Nazaj k celim številom

Prvo vrsto računalnikovega šestila smo tako spoznali. Pa nam ni nič preveč všeč: kotne funkcije nastopajo v njem, te pa takoj zahtevajo računanje z decimalnimi števili. Tako računanje pa je potrebno na enostavnih računalnikih, kot je na primer Spectrum, posebej sprogramirati, tako da je običajno

znatno počasnejše od računanja s celimi števili. Poskusimo zato poiskati kakšen postopek, kjer nam bo računanje s celimi števili povsem zadostovalo. Kot se spomnimo, nam je pri risanju daljice to uspelo.

Ker smo mojstri, nam bo uspelo tudi pri krogu. Seveda pa bo treba pred končnim programom streti še nekaj orehov. Zato si oglejmo krožnico podrobneje. Najprej si jo zato narišimo (slika 2). Njeno središče za začetek postavimo v izhodišče. Izberimo na krožnici poljubno točko T in njeni koordinati označimo z x in y . Označimo z S središče kroga, s T' pa projekcijo točke T na os x . Kot vemo, je krožnica s polmerom R ravno množica tistih točk, ki so od središča oddaljene za R . Tako je dolžina daljice ST ravno R , dolžina daljice ST' je x , dolžina daljice $T'T$ pa je y . Ker je trikotnik $ST'T$ pravokoten, velja po Pitagorovem izreku:



Slika 2. Skica naše naloge — zrcaljenja

$$x^2 + y^2 = R^2 \quad (1)$$

Ker smo točko T izbrali povsem poljubno, velja ta zveza za vse točke krožnice. Od tod pa hitro vidimo, da so na krožnici tudi zrcalne slike točke T glede na os x (T_1 na sliki 2), glede na os y (T_2) ter glede na središče (T_3). (O tem se lahko sami kaj hitro prepričate.) Pa še eno zrcaljenje upoštevajmo: zamenjajmo obe koordinati (T_4 v sliki 2). Ta zamenjava se na sliki odraža kot zrcaljenje na premico Q , ki razpolavlja kot med osema x in y . Povzemimo ta razmislek: če je na krožnici točka (x, y) , so na njej tudi točke $(-x, y)$, $(x, -y)$, $(-x, -y)$, (y, x) , $(-y, x)$, $(y, -x)$ ter $(-y, -x)$. Krožnico bomo tako lahko risali na osmih krajih hkrati: kakor hitro bomo našli koordinate ene točke na krožnici, bomo vedeli še za zgornjih sedem zrcalnih točk. (Nekaj izjem je, ko je točk nekaj manj. Jih znate poiskati sami?) Zato bo dovolj, da narišemo le osmino krožnice (denimo od osi x pa do premice Q), preostale dele pa narišemo s pomočjo zgornjih zrcaljenj.

Še nekaj si na hitro oglejmo. Če točka $T(x, y)$ ni povsem na krožnici, izraz

$$N(x, y) = x^2 + y^2 - R^2 \quad (2)$$

meri razdaljo točke T od krožnice in mu bomo rekli **odmik** točke od krožnice. Bliže ko je točka krožnici, bližji je odmik 0; $N(x, y)$ je enak nič le pri točkah krožnice. Znotraj kroga je odmik negativen, zunaj njega pa pozitiven. Zato nam bo odmik dragoceno sodilo, ki nam bo pomagalo izbirati točke.

Sedaj pa se lotimo iskanja točk na krožnici. Od zadnjč se še spomnimo, da pri izbiri točk na računalnikovem papirju nimamo povsem prostih rok: počrnimo lahko le točke s celoštevilskimi koordinatami. Privzemimo zato, da je polmer kroga celo število. Potem za eno točko na krožnici takoj vemo: točka $(R, 0)$ je to, v kateri smo začeli risati krog pri prejšnjem postopku. Njen odmik je seveda enak 0, kot se lahko sami hitro prepričate. Postavimo se torej v to točko in se iz nje ozrimo naokrog.

Ko izberemo eno od točk, lahko pot iz nje nadaljujemo le v eno od njenih osmih sosed (slika 3). (Po analogiji z zemljepisnimi kartami smo sliko označili s stranmi neba tako, da je sever S zgoraj, ostale strani pa si slede na običajen način.) Podobno kot pri daljici lahko krog teh osmih sosed takoj zožimo na dve, na tisti dve pač, za kateri vemo, da med njima vodi krožnica. Denimo, da iz izbrane začetne točke začnemo krožnico risati v protiurnem smislu. Potem vemo, da krožnica vodi navzgor in v levo. Ko tako korakamo od točke do točke, vemo, da vse do presečišča krožnice s premico Q krožnica vodi med severno in severozahodno sosedo. Pa nista obe sosedni enako dobri: ena je dlje

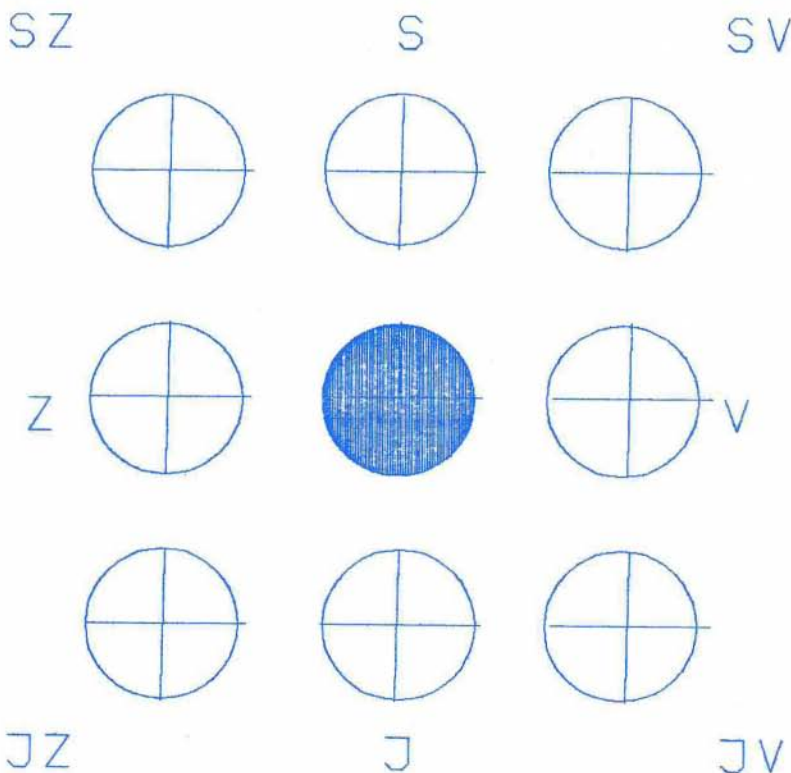
od krožnice kot druga. Boljši od obeh možnih korakov je seveda tisti, ki nas privede v točko, katere odmik je kar najmanjši.

Severni korak nas iz točke $T(x, y)$ privede v točko $T_S(x, y+1)$, severozahodni pa v točko $T_{SZ}(x-1, y+1)$. Poglejmo, za koliko se v posameznem primeru spremeni odmik.

$$N(x, y+1) - N(x, y) = x^2 + (y+1)^2 - R^2 - (x^2 + y^2 - R^2) = 2*y+1$$

$$N(x-1, y+1) - N(x, y) = (x-1)^2 + (y+1)^2 - R^2 - (x^2 + y^2 - R^2) = 2*(y-x+1)$$

Tako, pa smo pri postopku! Začetno točko poznamo, njen odmik ravno tako, vemo pa tudi, kako izbrati naslednjo točko. Zapišimo torej postopek:



Slika 3. Sosedne točke

(1) postavi se v začetno točko:

$x := R, y := 0, \text{odmik} := 0$

(2) počni točke:

$(x, y), (x, -y), (-x, y), (-x, -y),$
 $(y, x), (y, -x), (-y, x), (-y, -x)$

(3) izračunaj odmik severne in severozahodne sosed:

$\text{odmikS} := \text{odmik} + 2 * y + 1, \text{odmikSZ} := \text{odmik} + 2 * (y - x + 1)$

(4) če je $\text{ABS}(\text{odmikS})$ manjše od $\text{ABS}(\text{odmikSZ})$,

potem $y := y + 1, \text{odmik} := \text{odmikS}$

sicer $x := x - 1, y := y + 1, \text{odmik} := \text{odmikSZ}$

(5) korake (2), (3), (4) in (5) ponavlja, dokler ni x manjši od y .

Program 2

procedure Krog2 ($x\text{Sred}, y\text{Sred}, R : \text{integer}$);

{ Program 2 : Risanje kroga v celih stevilih }

var

$x, y : \text{integer};$ { Trenutna točka }

$\text{odmik},$ { Odmik trenutne točke }

$\text{odmikS}, \text{odmikSZ} : \text{integer};$ { ter njene severne in severozahodne sosed }

procedure Pika ($x, y : \text{integer}$);

begin

{ Pocrni točko x, y }

end { Pika};

begin { Krog 2 }

$x := R; y := 0; \text{odmik} := 0;$

while $x > y$ **do**

begin

Pika ($x\text{Sred} + x, y\text{Sred} + y$); Pika ($x\text{Sred} - x, y\text{Sred} + y$);

Pika ($x\text{Sred} + x, y\text{Sred} - y$); Pika ($x\text{Sred} - x, y\text{Sred} - y$);

Pika ($x\text{Sred} + y, y\text{Sred} + x$); Pika ($x\text{Sred} - y, y\text{Sred} + x$);

Pika ($x\text{Sred} + y, y\text{Sred} - x$); Pika ($x\text{Sred} - y, y\text{Sred} - x$);

$\text{odmikS} := \text{odmik} + 2 * y + 1; \text{odmikSZ} := \text{odmik} + 2 * (y - x + 1);$

if $\text{ABS}(\text{odmikS}) < \text{ABS}(\text{odmikSZ})$ **then**

begin $y := y + 1; \text{odmik} := \text{odmikS}$ **end**

else

begin $x := x - 1; y := y + 1; \text{odmik} := \text{odmikSZ}$ **end**

end

end { Krog2}.

Preden zapišemo postopku ustrezen program, opravimo še drobno izboljšavo. Pri računu odmikov v koraku (3) vidimo, da se odmika spreminjata vzporedno s spreminjanjem x in y , zato ju lahko le enostavno popravljamo in ne vedno znova računamo. Tako izboljšanemu postopku ustreza program 2. Program seveda še ni popoln: včasih počni kakšno točko preveč (če ste odgovorili na eno od gornjih vprašanj, tudi veste, kdaj). Podprogram Pika v njem počni točko s podanima koordinatama.

Krožni lok

Končno se lotimo še krožnega loka. To je del krožnice. Zaradi enostavnosti bomo vzeli, da ga podamo z njegovim središčem, polmerom ter začetno in končno točko. Tako začetna kot končna točka lahko ležita kjerkoli na krožnici, dogovorimo se le, da bomo lok risali v protiurnem smislu. Risali ga bomo po korakih od začetne točke proti končni. Podobne bližnjice, kot smo jo ubrali pri krogu, ki smo ga risali na osmih koncih hkrati, si tu torej ne moremo privoščiti.

Način risanja pa bo podoben risanju kroga. Postavili se bomo v začetno točko, izračunali njen odmik od krožnice ter korakali proti končni. Na vsakem koraku se bomo premaknili v eno od točkinih sosed in to počeli, vse dokler ne bomo prikorakali do končne točke. Kot vemo, ima vsaka točka osem sosed. Pri daljici in krogu smo to število lahko hitro zožili na dve, ki se potem med risanjem nista več spreminjali, na tisti dve, med katerima je vodila daljica oziroma krožnica. Tu se bomo morali malo bolj potruditi: primerjati bomo morali odmik treh sosed in med njimi izbrati najugodnejšo. Te tri sosede bomo izbrali na vsakem koraku posebej.

Najprej si oglejmo, kako bomo izbrali prave tri sosede. Spet nam bo pomagalo naše znanje o krogu. Postavimo njegovo središče v izhodišče in si oglejmo ponovno sliko 1. Vemo, da je v vsaki točki T na obodu kroga krožnica pravokotna na polmer ST , ki jo veže s središčem. V točki $(R, 0)$ je krožnica navpična, v točki $(0, R)$ pa vodoravna. Poskusimo sedaj določiti daljico, pravokotno na daljico ST . Daljica ST veže točko $(0, 0)$ s točko (x, y) . Njeno smer določata x in y : večji je y pri izbranem x , bolj strma je daljica, večji je x pri izbranem y , bolj položna je. Pravimo, da sta x in y parametra smeri. Parametra pravokotne smeri pa sta $-y$ in x , pravokotna daljica iste dolžine torej veže točko $(0, 0)$ s točko $(-y, x)$. (To je le ena od pravokotnih daljic te dolžine. Znete poiskati še drugo?) Iz točke T bomo torej pogledali proti točki $(x-y, y+x)$ ter pri risanju kroga upoštevali tri sosede, med katerimi bomo pogledali, in sicer eno navpično, eno vodoravno ter poševno med njima. Kako jih določimo? Vo-

doravno sosedo določa predznak $-y$, navpično predznak x , natančneje pa ju določimo tako kot pri daljici. Poševna povzroča še najmanj preglavic, zakaj, lahko že sami razberete iz slike 3. Tudi postopka podrobneje ne bomo opisovali, gre pa takole:

Program 3

```

procedure KrozniLok (xSred, ySred, R: integer;
                    xZac, yZac, xKon, yKon: integer);
{ Program 3: Risanje kroznega loka s celimi stevili }
var
    x, y: integer; { trenutna točka }
    dx, dy: integer; { vodoravni in navpicni korak }
    odmik: integer; { odmik trenutne točke }
    odmvod: integer; { odmik vodoravne sosedice }
    odmnava: integer; { odmik navpicne sosedice }
    odmpos: integer; { odmik poševne sosedice }
procedure Pika (x, y: integer);
begin
    { Pocrtni točko x, y }
end { Pika };
begin { KrozniLok }
    x := xZac - xSred; y := yZac - ySred; odmik := x*x + y*y - R*R;
    repeat Pika (xSred+x, ySred+y);
        if y > 0 then dx := -1 else dx := 1;
        if x > 0 then dy := 1 else dy := -1;
        odmvod := odmik + 2 * x * dx + 1;
        odmnava := odmik + 2 * y * dy + 1;
        odmpos := odmvod + odmnava - odmik;
        if abs (x) < abs (y) then
            if abs (odmvod) < abs (odmpos) then
                begin x := x + dx; odmik := odmvod end
            else
                begin x := x + dx; y := y + dy; odmik := odmpos end
        else
            if abs (odmnava) < abs (odmpos) then
                begin y := y + dy; odmik := odmnava end
            else
                begin x := x + dx; y := y + dy; odmik := odmpos end
    until (x+xSred = xKon) and (y+ySred = yKon)
end { KrozniLok }.

```

- (1) postavi se v začetno točko in izračunaj njen odmik
- (2) počni trenutno točko
- (3) s pomočjo predznakov $-y$ in x določi vse tri sosed
- (4) izračunaj odmike vseh treh sosed
- (5) izmed sosed izberi tisto, katere odmik je najmanjši ter se preseli vanjo
- (6) korake (2), (3), (4) in (5) ponavljaj, dokler ne prispeš v končno točko

Ustrezen program prikazuje program 3. Program se seveda zanaša, da smo končno točko točno podali. V nasprotnem primeru se program nikoli ne ustavi.

Ob koncu velja tako pristaviti še nekaj besed o risanju splošnejših krogov in lokov. Pri njih polmer ni ravno celo število, pa tudi središče nima celoštevilskih koordinat. Običajno pri tem postopamo tako, da središče postavimo v najbližjo točko s celoštevilskimi koordinatami ter polmer zaokrožimo do najbližjega celega števila. Pri risanju loka se pri tem znajdemo pred dodatnim problemom: prestaviti moramo tudi začetno in končno točko loka. Enostavno, boste rekli: tako kot pri središču zaokrožimo njene koordinate. Pa ni čisto tako! Poglejmo, zakaj. V programu 3 smo se pri risanju zanašali na to, da sta obe točki točno na krožnici. Pri prestavljanju pa se lahko zgodi, da točko malo narobe prestavimo, da torej narisana krožnica prestavljeno točko malo zgreši. Pri začetni točki to še ni hud problem, huje je to pri končni, saj se program ustavi le, če krožnica točko natančno zadene.

Pa premislimo, kako bi tudi ta problem rešili. Zato še enkrat pogledajmo, kako izbiramo točke pri risanju krožnice. Ko eno točko poznamo, za naslednjo izberemo tisto med sosedami, pri kateri je odmik $N(x, y)$ najmanjši. Kot se spomnimo, nam $N(x, y)$ meri oddaljenost narisane točke od prave krožnice. Pri risanju narišemo tiste točke, ki so krožnici najbližje. Pri prestavljanju končne točke moramo zato z uporabo odmika pogledati, ali ni morda katera od sosed nove točke bližje krožnici kot ta točka. Za končno točko moramo tako vzeti tisto, pri kateri je odmik $N(x, y)$ najmanjši. Poskusite program tako sami dopolniti!

Za konec pa še nekaj nalog. Vse so povezane z risanjem loka. Lok namreč v praksi podajamo na več različnih načinov. Prvega smo že povedali: podamo središče, polmer ter začetno in končno točko. Tu je podatkov preveč: pri obeh točkah moramo paziti, da sta od središča oddaljeni natanko za polmer. Pa sprostimo ta pogoj: podajmo lok s središčem, polmerom ter dvema točkama. Prva določa začetek loka tako, da je začetna točka loka presečišče krožnice in

poltraka od središča skozi podano točko. Druga točka na podoben način določa končno točko loka. Poskusite iz teh podatkov določiti podatke za prvotni način podajanja loka. Namesto točk si lahko pomagamo tudi s koti: smer poltraka lahko določimo kar s kotom, ki ga oklepa s poltrakom od središča v desno. Bi znali tovrstne podatke predelati v prvotne? Brez kotnih funkcij ne bo šlo!

Andrej Vitek

BOLJ ZA ŠALO KOT ZARES

Poiščite tatu

Andrej Dolgoprst, Boris Tatič in Grega Kradljivec so osumljeni vloma v zlatarno sredi mesta. Toda samo eden je vlom res zagrešil. V času zasliševanja so povedali:

Andrej: "Tega nisem naredil jaz. Boris je tudi nedolžen."

Boris: "Andrej ni vlomil v zlatarno. Grega je tat."

Grega: "Nič nimam z vlomom. To je Andrejevo delo."

Nadaljna raziskava je pokazala, da je eden od njih v svoji izjavi dvakrat lagal, drugi je dvakrat povedal resnico in tretji enkrat lagal in enkrat ne. Kdo je odnesel zlato?

Nogomet

Po odigranem nogometnem turnirju, na katerem so sodelovale ekipe "Zmaga", "Žoga" in "Stativa", so bili končni rezultati naslednji:

Zmaga	2	1	0	1	3 : 2	2
Stativa	2	1	0	1	2 : 2	2
Žoga	2	1	0	1	1 : 2	2

Vsaka ekipa je torej enkrat zmagala in enkrat izgubila, tako da je šele razlika golov odločila o vrstnem redu in zmagovalcu. S kakšnimi rezultati so se končale vse tekme na turnirju?

Prevedla in izbrala *Dušica Boben*

MLADIM VEGOVCEM ZA OGREVANJE

1. Janko in Marko sta sklenila kupiti zbirko nalog. Ker je zanjo Janku manjkalo 16 din, Marku pa 4 din, sta se odločila, da jo bosta kupila skupaj. Toda tudi tedaj jima je zmanjkalo 2 din. Koliko stane ta zbirka?
2. V nekem razredu je 35 učencev, med njimi jih je 20 članov matematičnega, 11 pa rokometnega krožka. Koliko matematikov se ukvarja tudi z rokometom, če veš, da 10 učencev ne sodeluje niti v matematičnem niti v rokometnem krožku?
3. Kateri ulomek je večji: 1984/1985 ali 1985/1986?
4. Pokaži, da je razlika kvadratov katerihkoli dveh lihih števil deljiva z 8.
5. Katero število je večje 2^{1986} ali 63^{331} ?
6. Določi vse pare števil x in y , za katere velja $x^2 - 6x + (y^2 - 1)^2 + 9 = 0$.
7. Določi vsa naravna števila n , za katera velja neenakost $1/3 < n/12 \leq 3/4$.
8. Če delimo 1000 z nekim številom, dobimo ostanek 8, če pa z istim številom delimo 900, dobimo ostanek 1. S katerim številom smo delili števili 1000 in 900?
9. Polmer rombu včrtanega kroga meri četrtno daljše rombove diagonale. Pokaži, da višine romba, ki gredo skozi krajišči krajše diagonale, delijo daljšo diagonalo na tri skladne dele.
10. Katerega leta je rojen dedek Marko, če poznamo naslednje podatke: Rojen je v tem stoletju. Če v njegovi rojstni letnici zamenjamo cifri enic in desetic, dobimo leto, ko bo dedek Marko dopolnil 81 let.
11. Določi vsa taka praštevila p , da bo tudi $p^2 + 13$ praštevilo.
12. Določi vsa naravna števila n , za katera je izraz $10^n - 1$ deljiv z 81.
13. Osnovna robova kvadra merita 3 cm in 4 cm, njegova telesna diagonala pa oklepa z osnovno ploskvijo kot 60° . Izračunaj površino in prostornino kvadra.
14. Mačka in pol poje v dveh dneh in pol tri miši in pol. Koliko miši bo pojedlo 100 mačk v 45 dneh?
15. Kvadrat je razdeljen na 9 enakih kvadratov. Ali je mogoče vanje vpisati števila 1, 2 in 3 tako, da bodo v vsaki vrsti, vsakem stolpcu in na vsaki diagonalni različne vsote?

16. Katero štirimestno število nam pomnoženo z 9 da štirimestno število, zapisano z istimi ciframi, vendar v obratnem vrstnem redu?
17. Določi vsa praštevila p , za katera je tudi $p^3 + 3^p$ praštevilo.
18. Nad daljico AB kot osnovnico sta konstruirana enakostranični trikotnik $\triangle ABD$ in enakokraki pravokotni trikotnik $\triangle ABC$. Točka E je presek pravokotnice skozi C na daljico AB , točka M pa presek pravokotnice skozi C na daljico AD . Izračunaj kot $\angle CEM$.
19. Stranice trikotnika $\triangle ABC$ merijo: $c = 14$ cm, $a = 13$ cm in $b = 15$ cm.
- Izračunaj ploščino trikotnika $\triangle ABC$.
 - Izračunaj ploščino kroga, ki se dotika stranic AC in BC , središče pa ima na stranici AB .
20. Skupina dečkov in deklic je za poklon svojemu prijatelju zbrala 170 din. Deklice so prispevale po 20 din, dečki pa po 30 din. Koliko je bilo v skupini deklic in koliko dečkov, če je imela skupina liho število članov?
21. V trapezu $ABCD$ ($AB \parallel CD$) je diagonala $\overline{BD}$ pravokotna na osnovnici. Diagonala $\overline{AC}$ razpolavlja kot $\angle C$, diagonalo $\overline{BD}$ pa seka v točki O . Izračunaj ploščino trapeza, če je $\overline{BO} = 4$ cm in $\overline{DO} = 2$ cm.

Aleksander Potočnik

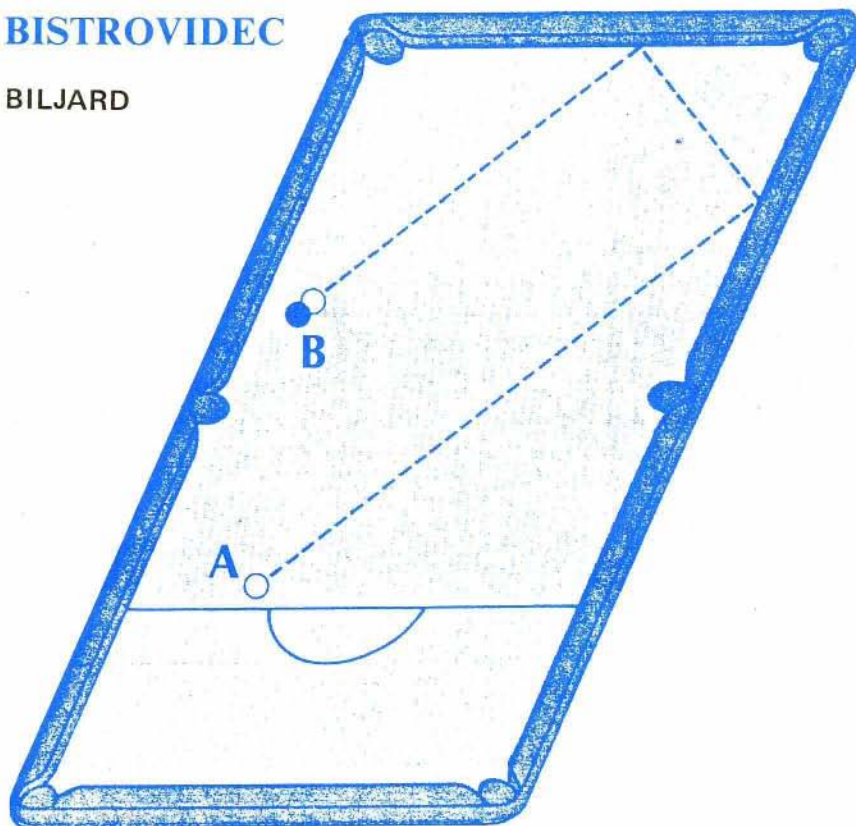
PRESEKOV KOLEDAR II

Pred nekaj leti je Presek že izdal svoj koledar. Danes objavljamo RAZPIS za vsebino (tekst in slike) za 2. PRESEKOV KOLEDAR, katerega bomo izdali v enem od prihodnjih let. Zanj potrebujemo po 12 slik in ustrezni tekst. Vsebina mora biti povezana z aktualnimi ali zgodovinskimi dogodki iz naših strok: matematika, fizika, astronomija, računalništvo. Slike morajo biti praviloma v štirih barvah (izjeme so dovoljene). Teksta pa naj bo do ene tipkane strani. Velikost slik in dolžina teksta lahko varirata. Vabimo člane društva in naročnike Preseka, da sodelujejo pri natečaju. Praviloma sprejemamo predloge za vsak mesec posebej. Koledar bo izšel, ko bomo dobili dovolj predlogov za celoten koledar. Objavljene predloge bomo honorirali, druge dobre pa nagradili s knjižnimi nagradami.

Ciril Velkovrh

BISTROVIDEC

BILJARD



Na pravokotni biljardni mizi sta krogli *A* in *B*. V katero smer je treba z udarcem z igralno palico usmeriti kroglo *A*,

- da se bo odbila od izbranega roba
- da se bo odbila od dveh izbranih vzporednih robov
- da se bo odbila od dveh izbranih pravokotnih robov
- da se bo odbila od treh izbranih robov

in zadela kroglo *B*?

Pri reševanju nalog privzemi, da je tir krogle med odboji daljica in da je pri odboji krogle od roba odbojni kot enak vpadnemu kotu.

Premisli in reši

KAJ IZPIŠE NASLEDNJI PROGRAM rešitev iz prve številke

Rešitve so nam poslali — vsi pravilne — Polona BAJT iz Bohinjske Bistrice, Vinko FRECE iz Šentjurja pri Celju, Matej KOŠIR iz Trziča, Matej MAKOVEC iz Šempetra pri Novi Gorici, Roman MAURER iz Zagorja ob Savi, Robert MEOLIC iz Murske Sobote, Dušan MRAVLJE iz Idrije, Marija MUNIH iz Šoštanja, Andreja PERHAJ iz Velikih Lašč, Barbara RODE iz Ljubljane, Tomaž SIMČIČ iz Ivančne gorice, Bogdan TERTINEK iz Limbuša, Aleš VAVPETIČ iz Domžal, Robert VREČA iz Maribora, Andrej ZALAR iz Šentjurja pri Celju, Rok ZALOŽNIK iz Ljubljane in člani računalniškega krožka iz Rogatca.

Izžrebali smo Meolica, Maurerja in Zalarja ter jim poslali knjigo B. Moharja in E. Zakrajška PROGRAMSKI JEZIK PASCAL.

Objavljamo rešitev Vinka Freceta

program	vrednosti x, y	
10 INPUT x, y	x	y
20 LET $x = x + y$	$x + y$	y
30 LET $y = x - y$	$x + y$	x
40 LET $x = x - y$	y	x
50 PRINT x, y	y	x

Torej program izpiše zamenjani vrednosti (y, x), ki sta bili podani na začetku programa.

VSOTA DVEH POTENC

Rešite s pozitivnimi celimi števili enačbo

$$B^A + A^B = 100$$

in pošljite rešitve do 10. januarja 87 na Presekov naslov, z oznako "za PIR".

Peter Petek

Dana so oglišča trikotnika ABC :

$A(17, -39), B(101, 73),$

$C(-103, -12)$

Dane so nosilke stranic trikotnika ABC :

nosilka a : $-5x + 12y - 4857 = 0$,

nosilka b : $4x + 3y - 1860 = 0$,

nosilka c : $35x - 12y - 4953 = 0$.

VODORAVNO

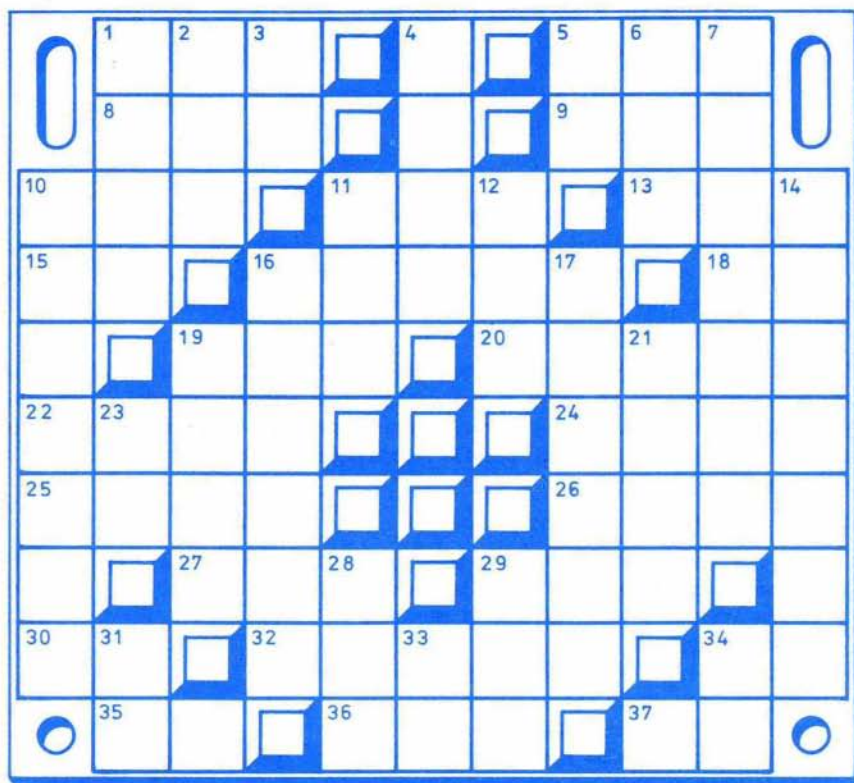
1. a
5. c
8. b
9. polobseg s
10. obseg
11. polmer stranici b pričrtane krožnice ρ_b
13. t_b težiščnica na stranico b
15. polmer včrtane krožnice
19. polmer stranici a pričrtane krožnice ρ_a
20. ploščina
22. velikost kota α (zaokrožen na minute, stopinje—minute)
24. velikost kota β (stopinje—minute)
25. velikost kota γ (stopinje—minute)
27. višina na a v_a (zaokrožena na tri mesta)
29. simetrala kota γ (zaokrožena na tri mesta)

VODORAVNO

16. kot α v stopinjah in minutah (zaokroženo)
18. polmer včrtane krožnice ρ (zaokroženo na dve mesti)
26. kot γ v stopinjah in minutah (zaokroženo)
30. polmer stranici b pričrtane krožnice ρ_b
32. kub števila 38
34. polmer stranici c pričrtane krožnice ρ_c
35. težiščnica na a t_a (zaokroženo na dve mesti)
36. polmer stranici a pričrtane krožnice ρ_a
37. višina na a v_a (zaokroženo na dve mesti)

NAVPIČNO

4. ploščina
29. težiščnica na b (zaokroženo na tri mesta)
34. simetrala kota α (zaokrožena na dve mesti)



NAVPIČNO

1. $3 \cdot (1+2^3) \cdot (1^2+2^2) \cdot (3+2^4)$
2. dvakratnik kvadrata najmanjšega dvomestnega števila
3. $1+2+3+4$ ali rešitev enačbe $1024 = 2^x$
5. praštevilo med 19 in 29
6. $2 \cdot (1+2 \cdot 3^3) \cdot (1^2+2^2)$
7. $3^3 \cdot 7 \cdot ((2^2+3^2) \cdot 2^3 - 1) \cdot (1+2 \cdot 3 \cdot 7 \cdot 11)$
10. $2^2 \cdot 3^3 (1+2 \cdot 3 (1-2 \cdot 5 \cdot 13 \cdot (2-3^4)))$
11. $3 \cdot (1+6^2) - 1$
12. $3 \cdot (3 \cdot 5 \cdot 7 - 1)$
14. $3^4 \cdot (3+2^4) \cdot (2^5 - 1) \cdot (1+3 \cdot 2^6)$

16. $3^3 \cdot 5 \cdot (5-2^4) \cdot (1-2^7)$
17. $2 \cdot (1+2 \cdot 3 \cdot 5 \cdot 7) \cdot (1+2 \cdot 3^3 \cdot 5)$
19. $(5-2^4) \cdot (1-3 \cdot 11 \cdot 2^2)$
21. $2^3 (2^5 (3+2^4) - 1)$
23. vsota najmanjših dveh praštevil, pomnožena z najmanjšim dvomestnim praštevilom
28. $1+2 \cdot (2^2+3^2) \cdot (2^4+1)$
31. rešitev enačbe: $\frac{5}{6} - \frac{x}{3} = 12 - \frac{x}{2}$
33. rešitev enačbe: $6 - \frac{x}{6} = \frac{1}{5} - \frac{x}{10}$

Franci Oblak

RAČUNALNIŠTVO

LOGO NA RAČUNALNIKU SPECTRUM - SOLI/LCSI Sinclair Logo

Uvod

Med jeziki, namenjenimi za uvod v programiranje, zasluži prav gotovo posebno pozornost jezik logo. Želja grafika in možnost krmiljenja "igrač- robotov" omogočata uvažanje v programiranje že v prvih razredih osnovne šole in celo v vrtcu. Zato je logo po krivici dobil sloves programskega jezika "za otroke". Kratek uvod v logo je pripravil Gregor Pavlič v knjigi "Z računalnikom v matematiko" (DZS).

Tolmače za logo najdemo na večini osebnih računalnikov, tudi na ZX Spectrumu in Commodore-64. Žal pa zanje ni pripravljenih slovenskih navodil. Zato smo se pri Preseku odločili, da pripravimo kratka pregleda praukazov jezika logo na obeh računalnikih. V tej številki objavljamo priročnik za logo na ZX Spectrum.

Za vsak ukaz so podani naslednji podatki:

- črka F na začetku vrstice označuje, da ukaz vrača neki objekt kličočemu ukazu (v jedru ukaza je ukaz OUTPUT); če črke F ni, se ukaz obnaša kot pravi ukaz (spreminja okolje),
- polno ime ukaza,
- število in vrsta vhodov ukaza (parametrov),
- okrajšano ime ukaza (če obstaja),
- kratek opis delovanja ukaza,
- znaki +, *, o in - na koncu vrstice primerjajo logo na obeh računalnikih
 - + ukaz je enak za oba računalnika,
 - * obstaja enakovreden ukaz na drugem računalniku pod drugim imenom,
 - o ukaz lahko na drugem računalniku enostavno sestavimo iz obstoječih ukazov,
- na drugem računalniku tega ukaza ni.

Ukazi so razdeljeni smiselno v skupine, ki se za oba računalnika v glavnem ujemajo. Posamezni ukaz lahko nastopa tudi v več skupinah.

Logo za računalnik Sinclair Spectrum so razvili pri SOLI/LCSI (Les Systems d'Ordinateur Logo Internationale / Logo Computer Systems Inc.) in predstavlja razmeroma popolno narečje jezika logo. Omogoča delo tako s kasetnikom kot tudi z mikrotračnikom ter uporabo tiskalnika.

Tolmač za logo vnesemo s kasetnika v računalnik z ukazom

```
LOAD "logo"
```

oziroma z mikrotračnika z ukazom

```
LOAD *"m";1;"logo"
```

Ko je program vnešen, se pojavi na zaslonu napis:

WELCOME TO SINCLAIR LOGO
(c) SOLI/LCSI 1984 VER 1.6

Na koncu spodnje vrstice je stalno podatek o načinu vnosa znakov:

1 - male črke C - velike črke E - način E

Na začetku smo v osnovnem (sprotnem) načinu dela in lahko začnemo ukazovati.
Pri tem sta nam v pomoč pozornika:

? - označuje osnovni (sprotni) nivo
> - označuje način TO (sestavljanje novih ukazov)

kadar pa smo v urejevalniku, je v spodnji vrstici napis:

LOGO EDITOR (c) SOLI / LCSI

Logo zapustimo z ukazom `BYE`, vanj pa se ponovno vrnemo z basiškim ukazom `RUN`; seveda medtem ne smemo pokvariti dela pomnilnika, v katerem se nahaja logo.

Osnove in posebnosti

Logo pozna naslednje vrste objektov:

- besede "a3 25 TRUE "
- sezname [] [FO 50 [2R 5B]]
- cela števila (-99999999 .. 99999999)
- realna števila
 najmanjše: 1E-39 predela v 0, 2E-39 predela narobe, 1E-38 je v redu
 največje : okrog 1.7014118346E+38

Barve določamo z njihovimi številkami, ki so enake kot v basicu:

0 - črna	4 - zelena
1 - modra	5 - sinja
2 - rdeča	6 - rumena
3 - vijoličasta	7 - bela

Kote merimo v stopinjah.

Z znakom `E` bomo v nadaljevanju označevali znak za prehod v način `E` (Caps Shift & Symbol Shift), s `Cs` pa tipko Caps Shift.

0. Urejanje ukazov

EDIT ime	ED	začni urejanje ukaza ime
Cs 5	< ← >	en znak levo
Cs 6	< ↓ >	naslednja vrstica
Cs 7	< ↑ >	prejšnja vrstica
Cs 8	< → >	en znak desno

E Cs 5	E < + >	začetek vrstice
E Cs 6	E < ↓ >	konec zaslona
E Cs 7	E < ↑ >	začetek zaslona
E Cs 8	E < - >	konec vrstice
E B	(Begin)	začetek besedila
E E	(End)	konec besedila
E Y	(Yield)	zbriši do konca vrstice in spravi
E R	(Resume)	vrini shranjeni del vrstice
E P	(Previous)	prejšnja stran
E N	(Next)	naslednja stran
E C	(Complete)	zapusti ukaz EDIT
<BREAK>		prekini urejanje
TO ime		urejanje spremenljivk
TO ime parametri		začni definiranje ukaza
END		končaj definiranje ukaza v načinu TO

1. Želva grafika

Na zaslon je postavljen koordinatni sistem (x,y) , $-128 \leq x \leq 127$, $-88 \leq y \leq 87$

BACK n	BK	nazaj n korakov	+
F BACKGROUND	BG	barva podlage	⌘
CLEAN		počisti zaslon, pusti želvo	⌘
CLEARSCREEN	CS	počisti zaslon, želva v izhodišče	⌘
DOT [x y]		pika na (x,y) , pusti želvo	o
FENCE		omeji želvo na zaslon	⌘
FORWARD n	FD	naprej n korakov	+
F HEADING		smer želve	+
HIDETURTLE	HT	skrij; ne riše želve, sled pa	+
HOME		želva v izhodišče	+
LEFT n	LT	zasuk za n stopinj v levo	+
F PENCOLOUR	PC	barva sledi	⌘
PENDOWN	PD	spusti pero; želva pušča sled	+
PENERASE	PE	želva briše (dele) sledi,	+
		čez katere gre	
PENREVERSE	PX	želva riše in briše (dele) sledi,	-
		čez katere gre	
PENUP	PU	dvigni pero; želva ne pušča sledi	+
F POSITION	POS	položaj (mesto) želve	⌘
RIGHT n	RT	obrni n stopinj v desno	+
F SCRUNCH		razmerje enot na oseh	-
SETBG n		postavi barvo podlage na n	⌘
SETBORDER n	SETBR	postavi barvo okvirja na n	-
SETHEADING n	SETH	določi smer želve (absolutno)	+
SETPC n		določi barvo črnila na n	⌘
SETPOS [x y]		premik v točko (x,y)	⌘
SETSCRUNCH [x y]	SETSCR	določi razmerje enot na oseh	⌘
SETX n		premik želve do koordinate x=n	+
SETY n		premik želve do koordinate y=n	+
F SHOWNP		ali je želva vidna	⌘
SHOWTURTLE	ST	riši želvo (je vidna)	+
F TOWARDS [x y]		smer želve proti točki (x,y)	+
WINDOW		želva lahko gre čez rob zaslona	-
		in se takrat ne vidi	

WRAP	želva lahko gre čez rob zaslona	+
	in se prikaže na nasprotni strani -	
F XCOR	zaslon je "zvit" v svitek (torus)	
F YCOR	želvina x koordinata	+
	želvina y koordinata	+

2. Operacije in funkcije

ARCCOS n	arkus kosinus	O
ARCCOTANGENT n ARCCOT	arkus kotangens	O
ARCSIN n	arkus sinus	O
ARCTANGENT n ARCTAN	arkus tangens	×
COSINE n COS	kosinus	+
COTANGENT n COT	kotangens	O
DIV a b	kvocient	×
INT n	celi del	×
PRODUCT a b	zmnožek a*b	-
(PRODUCT a1 a2 ... an)	zmnožek a1*a2*...*an	-
RANDOM n	naključno število	+
REMAINDER a b	ostanek	+
ROUND n	najbližje celo število	+
SINE n SIN	sinus	+
SQRT n	kvadratni koren	+
SUM a b	vsota a+b	-
(SUM a1 a2 ... an)	vsota a1+a2+...+an	-
TANGENT n TAN	tangens	O
AND a b	konjunkcija	×
(AND a1 a2 ... an)	konjunkcija	×
NOT a	negacija	+
OR a b	disjunkcija	×
(OR a1 a2 ... an)	disjunkcija	×
+	seštevanje	+
-	odštevanje	+
×	množenje	+
/	deljenje	+
<	manjši	+
>	večji	+
=	enak	+

3. Seznamski ukazi

ob je beseda ali seznam

F ASCII z	koda ASCII znaka z	+
F BUTFIRST ob BF	objekt brez prvega elementa	+
F BUTLAST ob BL	objekt brez zadnjega elementa	+
F CHAR n	znak s kodo ASCII n	+
F COUNT ob	število elementov v objektu	+
F EMPTYP ob	ali je objekt prazen	×
	(enakovredno OR ob=[] ob=")	
F EQUALP ob1 ob2	ali sta objekta enaka	×
F FIRST ob	prvi element objekta	+
F FPUT ob seznam	dodaj objekt na začetek seznama	+
F ITEM n ob	n-ti element objekta	+
F LAST ob	zadnji element objekta	+

F LIST ob1 ob2	ustvari seznam z objektoma kot elementoma	+
F (LIST ob1 ob2 ... obn)	ustvari seznam objektov	+
F LISTP ob	ali je objekt seznam	⌘
F LPUT ob seznam	dodaj objekt na konec seznama	+
F MEMBERP x ob	ali je x element objekta	⌘
F NUMBERP ob	ali je objekt število	⌘
F SENTENCE ob1 ob2 SE	ustvari seznam iz elementov obeh objektov	+
F (SE ob1 ob2 ... obn)	ustvari seznam iz elementov posameznih objektov	+
F WORD w1 w2	ustvari stik dveh besed	+
F (WORD w1 w2 ... wn)	ustvari stik danih besed	+
F WORDP ob	ali je objekt beseda	⌘
4. Definicije ukazov		
COPYDEF "ime1" "ime2	prepiši telo ukaza ime2 v ime1	O
DEFINE "ime" [[par] [v1] [v2] ... [vn]]	... [vn]] sestavi ukaz z imenom ime, s parametri par in vrsticami v1 ... vn	+
F DEFINEDP w	ali je beseda w ime ukaza	-
F PRIMITIVEP w	ali je beseda w praukaz loga	-
F TEXT "ime	seznam s seznamom parametrov in seznam vrstic ukaza ime (obratno od DEFINE)	+
5. Prireditveni stavek		
MAKE "ime ob	priredi spremenljivki ime vrednost objekta oziroma izraza	+
F NAMEP ob	ali ima objekt vrednost	⌘
F THING "ime	vrednost imena (običajno enakovredno :ime)	+
6. Krmilni stavki		
BYE	zapusti LOGO (vanj se vrnemo z RUN)	⌘
IF pog [ukazi1] [ukazi2]	če je pogoj izpolnjen, izvedi seznam ukazi1, sicer izvedi seznam ukazi2	⌘
OUTPUT ob OP	vrni objekt ob v kličiči ukaz	+
REPEAT n [ukazi]	ponovi n-krat ukaze v seznamu	+
RUN [ukazi]	izvedi ukaze v seznamu (enakovredno REPEAT 1 [ukazi])	+
STOP	vrni se v kličiči ukaz	+
TOPLEVEL	vrni se v osnovni nivo (sprotni način)	+
F TRUE	logični da	O
F FALSE	logični ne	O
7. Branje in izpis		
F KEYP	ali je pritisnjena kakšna tipka	⌘
PRINT ob PR	izpiši vredost objekta in se postavi na začetek nove vrstice	+
(PRINT ob1 ob2 ... obn)	izpiši vrednost objektov; med objekti po en presledek	+
F READCHAR RC	počaka na pritisk na tipko in vrne ustrezni znak	⌘

F	READLIST	RL	preberi celo vrstico kot seznam	⌘
	SHOW ob		izpiši objekt	⌘
	SOUND [trajanje višina]		zapisakaj	-
	STARTROBOT		želvine ukaze pošiljaj robotu	-
	STOPROBOT		ustavi pošiljanje ukazov robotu	-
	TYPE ob		izpiši objekt	⌘
	(TYPE ob1 ob2 ... obn)		izpiši objekte brez presledkov	⌘
	WAIT n		počakaj n/50 sekunde	0

8. Zaslonski ukazi

	BRIGHT n		svetlost 0/1	-
	CLEARTEXT	CT	počisti prostor za besedilo	⌘
	COPYSCREEN		prenesi zaslon na tiskalnik	-
F	CURSOR		mesto (koordinati) tečke	⌘
	FLASH		vkluči utripanje	-
	INVERSE		zamenja vlogo papirja in črnila	0
	NORMAL		prekliče FLASH in INVERSE	0
	OVER n		zamenja črnilo, čez katerega gre	-
	SETCURSOR [a b]	SETCUR	postavi tečko na koordinato (a,b)	⌘
	SETTC [a b]		določi barvo papirja in črnila	⌘
	TEXTSCREEN	TS	zaslon namenjen za izpisovanje	⌘
F	TEXTCOLOUR	TC	seznam z barvo papirja in črnila	⌘

9. Delovni prostor

namesto imena lahko v ukazih navedemo tudi seznam imen

	ERALL		zbriši vse	⌘
	ERASE "ime	ER	zbriši ukaz ime	+
	ERN "ime		zbriši spremenljivko ime	⌘
	ERNS		zbriši vsa imena spremenljivk in njihove vrednosti	⌘
	ERPS		zbriši vse definicije ukazov	⌘
	POALL		izpiši vse	⌘
	PO "ime		izpiši definicijo ukaza ime	⌘
	PONS		izpiši imena in vrednosti vseh spremenljivk	⌘
	POPS		izpiši vse ukaze	⌘
	POTS		izpiši imena vseh ukazov	⌘
	EDNS		vkluči urejanje imen	⌘

10. Datotečni ukazi in tiskanje

Imamo štiri tipe datotek s podaljški:

- LOG - ukazi in spremenljivke
- BIN - posnetek dela pomnilnika (strojna koda, ...)
- SCR - slika - vsebina zaslonskega pomnilnika
- TXT - vsebina urejevalnika

	SAVE "ime [ime1 ime2 ...]		shrani ukaze iz seznama na datoteko ime.LOG	-
	SAVEALL "ime		shrani vsebino delovnega prostora na ime.LOG	⌘
	SAVED "ime		shrani urejevalnikov prostor	⌘
	SAVESCR "ime		shrani sliko na zaslonu na ime.SCR	⌘
	SETDRIVE n		izberi mikrotračnik (1-8), 0-trak	⌘

CATALOG	seznam datotek na mikrotračniku	✖
ERASEFILE "ime tip	zbriši datoteko	+
LOAD "ime tip	vnesi datoteko	+
LOADD "ime	vnesi urejevalnikovo datoteko	✖
LOADSCR "ime	vnesi zaslonsko sliko	✖
PRINTON	vkluči izpis na tiskalnik	✖
PRINTOFF	izključi izpis na tiskalnik	✖
COPYSCREEN	prenesi zaslon na tiskalnik	-

11. Sistemski ukazi

F NODES	število prostih členov	+
RECYCLE	sprosti proste (odrabljene) člene (garbage collection)	✖
.CONTENTS	izpiši vse, kar poznaš	+
.PRIMITIVES	izpiši praukaze	-
.RESERVE n	zasedi prostor za strojno kodo	-
.RESERVED	izpiše podatke o zasedenem prostoru	-
.BLOAD "ime naslov	vnese strojno kodo z ime.BIN na naslov	✖
.BSAVE "ime [naslov dolžina]	shrani strojno kodo na ime.BIN	✖
.SETSERIAL n	postavi hitrost prenosa	-
F .SERIALIN	prebere RS232	-
.SERIALOUT n	pošlje n na vrata RS232	-
.DEPOSIT naslov n	postavi v zlog naslov vrednost n (POKE)	+
F .EXAMINE naslov	vrednost zloga naslov (PEEK)	+
.CALL naslov	poženi strojno kodo na danem naslovu	+

12. Sporočila o napakah

Not enough inputs to ...	ni dovolj vhodov (podatkov) za ukaz ...
I don't know how to ...	ne vem, kaj naj naredim z ... (Logo ne pozna ukaza)
You don't say what to do with ...	nisi povedal, kaj naj naredim z ...
... does not output to ...	... ne vrača vrednosti v ...
... is used by LOGO	... uporablja LOGO (hoteli smo definirati praukaz)
... is already defined	... je že definiran (že definirane ukaze lahko urejamo samo z EDIT, mi pa smo hoteli s TO)
... is not true or false	... vrednost ni TRUE ali FALSE (na primer izraz za geslom IF)
... is not a word	... ni beseda (določeni ukazi delujejo samo na besedah kot vhodih)
... defined	... definiran
To many inside parentheses	preveč notranjih okroglih oklepajev (verjetno manjka kakšen zaklepaj)
... open file problem	problem z odprtjem datoteke

... file not found
 Bad file name
 You're at toplevel
 STOPPED !!!
 Turtle out of field

 Not enough space to proceed

 ... doesn't like ...

 ... has no value

 ... is a primitive
 Not enough items in ...
 Overflow

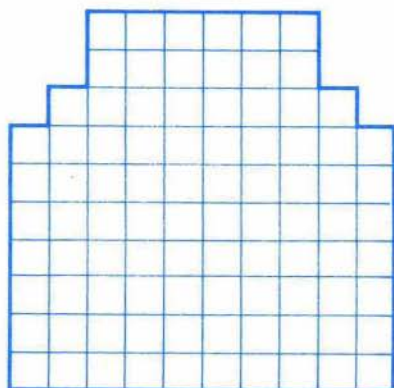
 ... can't divide by zero
 ... number too big
 ... as input
 ... in
 LOGO not fresh

ne najdem datoteke ...
 ime datoteke ne ustreza
 si v sprotnem načinu
 nasilno ustavljeno izvajanje
 želva je izven zaslona
 (želvo smo bili omejili z FENCE)
 ni dovolj prostora za nadaljevanje
 (npr. preveč rekurzivnih klicev)

 ... ne mara ...
 (napačen podatek (vhod) ukaza)
 ... nima prirejene vrednosti
 (NAMEP ... = FALSE)
 ... je praukaz
 ni dovolj elementov v ...
 prekoračitev obsega števil pri
 računanju

 ... ne moreš deliti z nič
 ... število je preveliko
 ... kot vhod (podatek)
 ... v
 LOGO ni pravkar naložen (zagnan)
 (prekasen .RESERVE)

Vladimir Batagelj, Boris Horvat, Tomaž Pisanski



NENAVADNA PLOŠČA

Ali lahko dano ploščo (z 90 polji)
 pokrijemo s 30 pravokotniki oblike



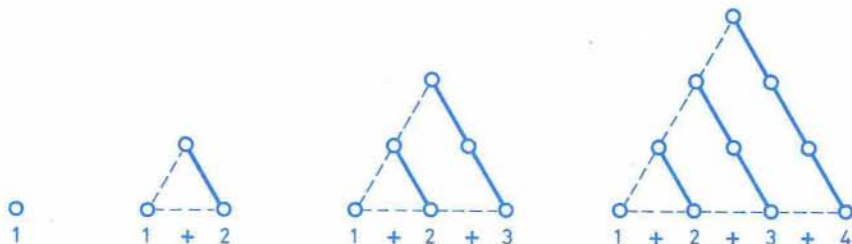
Prevedla in izbrala Dušica Boben

TRIKOTNIŠKA ŠTEVILA

Če vzamemo prvo, seštejemo prvi dve, prva tri, prva štiri, ... naravna števila, dobimo

$$\begin{aligned} t_1 &= 1 \\ t_2 &= 1 + 2 = 3 \\ t_3 &= 1 + 2 + 3 = 6 \\ t_4 &= 1 + 2 + 3 + 4 = 10 \\ &\dots\dots\dots \end{aligned}$$

Pitagora (580 – 500) je dal tem številom ime *trikotniška*. Števila 1, 3, 6, 10 povedo namreč, koliko je narisanih točk v enakostraničnih trikotnikih



s stranico 0, 1, 2, 3. Podobne slike lahko napravimo za nadaljnja trikotniška števila.

Trikotniško število t_n je vsota prvih n naravnih števil

$$t_n = 1 + 2 + 3 + \dots + n \quad (1)$$

Iz t_n najdemo naslednje trikotniško število t_{n+1} tako, da t_n za $n + 1$ povečamo

$$t_{n+1} = t_n + (n + 1) \quad (2)$$

Ker je $t_1 = 1$, lahko iz obrazca (2) pri $n = 1$ izračunamo t_2 . Ko poznamo t_2 , spet iz (2) pri $n = 2$ izračunamo t_3 . Iz znanega t_3 pri $n = 3$ najdemo t_4 . In tako naprej. Napravimo si po tem navodilu preglednico za prvih 15 trikotniških števil:

n	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15
t_n	1	3	6	10	15	21	28	36	45	55	66	78	91	105	120

Preglednica A

Preglednico bi mogli nadaljevati in bi sčasoma dosegli trikotniška števila t_n s poljubno velikim indeksom n . Precej zamudno bi bilo, če bi hoteli na ta način dobiti npr. t_{10000} . Ali se da morda t_n izračunati preprosteje? Odgovor na to vprašanje so poznali že Babilonci. Dognali so, da je

$$1 + 2 + 3 + \dots + n = \frac{n(n+1)}{2}$$

Če to ugotovitev upoštevamo v (1), dobimo za trikotniško število t_n zvezo

$$t_n = \frac{n(n+1)}{2} \quad (3)$$

Za $n = 10000$ je torej

$$t_{10000} = \frac{1}{2} \cdot 10000 \cdot 10001 = 50005000$$

Oglejmo si nekaj lastnosti trikotniških števil.

Iz preglednice A povzemamo:

$$t_1 + t_2 = 1 + 3 = 4 = 2^2$$

$$t_2 + t_3 = 3 + 6 = 9 = 3^2$$

$$t_3 + t_4 = 6 + 10 = 16 = 4^2$$

V vseh treh primerih je vsota dveh zaporednih trikotniških števil kvadrat naravnega števila. Ali dobimo zmeraj kvadrat, ko seštejemo zaporedni trikotniški števili? Izračunajmo vsoto $t_n + t_{n+1}$ z naslonitvijo na obrazec (3). Pride

$$t_n + t_{n+1} = \frac{1}{2} n(n+1) + \frac{1}{2} (n+1)(n+2) = \frac{1}{2} (n+1)(2n+2) = (n+1)^2 \quad (4)$$

Vidimo:

Vsota dveh zaporednih trikotniških števil je kvadrat naravnega števila.

To lastnost trikotniških števil so gotovo opazili že davno. Prvič je izpričana okrog leta 100 v spisih novopitagorejca Nikomaha. Ko se n spreminja po vseh naravnih številih 1, 2, 3, ..., opiše $n+1$ vsa naravna števila razen 1. Zaradi (4)

so torej vsi od 1 večji kvadrati naravnih števil vsote po dveh zaporednih trikotniških števil.

Po preglednici A je:

$$8t_1 + 1 = 8 \cdot 1 + 1 = 9 = 3^2$$

$$8t_2 + 1 = 8 \cdot 3 + 1 = 25 = 5^2$$

$$8t_3 + 1 = 8 \cdot 6 + 1 = 49 = 7^2$$

Vrednost so spet kvadrati naravnih števil. Da gre tudi tukaj za splošno lastnost trikotniških števil, se lahko hitro prepričamo. Po obrazcu (3) je

$$8t_n + 1 = 8 \cdot \frac{1}{2} n(n+1) + 1 = 4n^2 + 4n + 1 = (2n+1)^2 \quad (5)$$

Ko preteče n vsa naravna števila, opiše $2n+1$ vsa liha naravna števila razen 1. Zato iz (5) izhaja:

Za ena zvečani osemkratnik trikotniškega števila je kvadrat lihega naravnega števila. Vsak od ena večji lihi kvadrat se izraža v tej obliki.

To lastnost trikotniških števil omenja Nikomahov sodobnik Plutarh, pisec življenjepisov slavnih grških in rimskih mož.

V preglednici A sta dva kvadrata:

$$\begin{aligned} t_1 &= 1 = 1^2 \\ t_8 &= 36 = 6^2 \end{aligned} \quad (6)$$

Ali pri nadaljevanju preglednice naletimo še na kakšen kvadrat? Euler (1707 – 1783) je pokazal, da bi se to zgodilo neskončnokrat. Imeti bi morali seveda neskončno časa, da bi preglednico brez kraja nadaljevali. Kadar je trikotniško število $n(n+1)/2$ kvadrat naravnega števila m , drži enačba:

$$n^2 + n = 2m^2$$

Po Eulerjevi ugotovitvi obstaja neskončno parov naravnih števil n, m , ki to enačbo izpolnijo. Dajo se dobiti obrazci, ki zajemajo vse rešitve. Navedimo prva štiri trikotniška števila, ki so kvadrati in pridejo za kvadratom 1 in 36 iz (6). To so:

$$\begin{aligned} t_{49} &= 49.25 = (5.7)^2 \\ t_{288} &= 144.289 = (12.17)^2 \\ t_{1681} &= 1681.841 = (41.29)^2 \\ t_{9800} &= 4900.9801 = (70.99)^2 \end{aligned}$$

Omenili smo, da je med trikotniškimi števili neskončno kvadratov. Koliko pa je kubov? In bikvadratov (četrtih potenc)?

V preglednici A je kub le 1 in bikvadrat tudi samo 1. Če preglednico nadaljujemo brez kraja, nikdar več ne srečamo kuba ali bikvadrata. O tem govori trditev, ki jo je izrekel Fermat (1601 – 1665):

Nobeno trikotniško število, ki je večje od 1, ni kub ali bikvadrat naravnega števila.

Kako je Fermat svojo trditev utemeljil, ni znano. Prvič je trditev dokazana pri Eulerju. Zato drži, da enačba

$$n^2 + n = 2m^3$$

v naravnih številih nima druge rešitve kot $n = m = 1$. Isto velja za enačbo

$$n^2 + n = 2m^4$$

Razlika

$$t_{n+1} - t_n = n + 1$$

pove, da med t_n in t_{n+1} leži n naravnih števil. Zato zmeraj redkeje srečamo trikotniška števila, ko se pomikamo k vedno večjim naravnim številom. To kaže tudi spodnja preglednica B. V njej je za nekatere n navedeno, koliko je trikotniških števil do n .

n	število trikotniških števil do n
100	13
200	19
300	24
400	27
500	31
600	34
700	36
800	39
900	41
1000	44
10000	140
100000	446
1000000	1413
2000000	1999
3000000	2448

Preglednica B

Iz preglednice preberemo, da je do milijona 1413 trikotniških števil. Ko gremo od milijona do dveh milijonov, naletimo na 586 trikotniških števil. Od dveh do treh milijonov leži 449 trikotniških števil. Ko postane n dovolj velik, seveda med n in $n + 1000000$ ni nobenega trikotniškega števila več. Podobno za vsako naravno število d , med n in $n + d$ ni trikotniških števil, če je le n zadosti velik.

Videli smo, da so trikotniška števila redka. Kljub temu se z njimi naravna števila preprosto izražajo. Tudi to njihovo lastnost je zapazil Fermat, ko je zatrdil:

Vsako naravno število se da pisati kot vsota enega, dveh ali največ treh trikotniških števil.

Tudi za to trditev ne poznamo Fermatovega dokaza. Prvi znani dokaz je izpeljal Gauss (1777 – 1855).

Navedimo izrazitve za nekatera naravna števila:

$$20 = 10 + 10 = t_4 + t_4$$

$$101 = 10 + 91 = t_4 + t_{13}$$

$$103 = 1 + 36 + 66 = t_1 + t_8 + t_{11}$$

$$1000 = 10 + 990 = t_4 + t_{44}$$

$$1275 = t_{50}$$

$$10001 = 1 + 4950 + 5050 = t_1 + t_{99} + t_{100}$$

V dolgi dobi od Pitagora do današnjih dni so odkrili še veliko drugih lastnosti trikotniških števil. So pa seveda še tudi vprašanja, ki se nanašajo na trikotniška števila, a odgovora nanja še ni.

Jože Grasselli

PRESEK – LIST ZA MLADE MATEMATIKE, FIZIKE IN ASTRONOME

14. letnik, šolsko leto 1986/87, številka 3, strani 129–192

UREDNIŠKI ODBOR: Vladimir Batagelj (bistrovidec), Dušica Boben (pisma bralcev, stavljenje teksta), Andrej Čadež (astronomija), Martin Čopić, Franci Forstnerič (matematika), Bojan Golli (tekmovanja – naloge iz fizike), Pavel Gregorc, Andrej Kmet, Damjan Kobal, Jože Kotnik, Edvard Kramar (odgovorni urednik), Sandi Klavžar in Matija Lokar (računalništvo), Gorazd Lešnjak (tekmovanja – naloge iz matematike), Peter Petek (glavni urednik, naloge bralcev, premisli in reši), Tomaž Skulj, Ivanka Šircelj (jezikovni pregled), Miha Štalec (risbe), Zvonko Trontelj (fizika), Ciril Velkovich (urednik, nove knjige, novice).

Dopise pošiljajte in list naročajte na naslov: Društvo matematikov, fizikov in astronomov SRS – Podružnica Ljubljana – Komisija za tisk, Presek, Jadranska c. 19, 61111 Ljubljana, p.p. 64, tel. (061) 265–061/53, št. žiro računa 50101–678–47233. Naročnina za šolsko leto 1986/87 je za posamezna naročila 1000.– din, za skupinska naročila pa 800.–, posamezna številka 250.– din/200.– din.

List sofinancirajo Izobraževalna, Kulturna in Raziskovalna skupnost Slovenije
Ofset tisk Časopisno in grafično podjetje DELO, Ljubljana
© 1986 Društvo matematikov, fizikov in astronomov SRS – 831

ISSN 0351–6652

MAGIČNI KVADRAT $4n \times 4n$

Magični kvadrat velikosti $m \times m$ tvorijo števila od 1 do m^2 , ki so razporejena v kvadratno mrežo tako, da je vsota v vseh stolpcih, vrsticah in obeh diagonalah enaka. Najmanjši magični kvadrat je velikosti 3×3 , vsota v njem pa je 15.

magični kvadrat
 3×3

2	7	6
9	5	1
4	3	8

Ta članek želi odgovoriti na vprašanje, kako sestaviti poljuben magični kvadrat velikosti $4n \times 4n$.

Nekaj definicij:

N — vsota, ki je potrebna vsaki vrstici, stolpcu in diagonalni,

S_i — vsota v i -tem stolpcu,

V_i — vsota v i -ti vrstici,

D_1 — vsota v diagonalni, ki vsebuje zgornje levo polje,

D_2 — vsota v diagonalni, ki vsebuje zgornje desno polje,

i -ta in j -ta vrstica (stolpec) sta *diametralna* natanko tedaj, ko velja $i + j = 4n + 1$.

Sestavljanje magičnega kvadrata začnem s tem, da razporedim števila od 1 do $16n^2$ po vrsti v mrežo.

primer za $n = 1$

1	2	3	4
5	6	7	8
9	10	11	12
13	14	15	16

Oznakam, ki sem jih uvedel na začetku, bom zdaj priredil še vrednosti:

$$N = (1 + 2 + \dots + 16n^2)/4n = 2n(16n^2 + 1)$$

$$S_i = i + (4n + i) + (8n + i) + \dots + (16n^2 - 4n + i) = 4ni + 8n^2(4n - 1)$$

$$V_i = 4n(i-1) + (4n(i-1)+1) + \dots + 4ni = 16n^2i - 8n^2 + 2n$$

$$D_1 = 1 + (4n+2) + (8n+3) + \dots + 16n^2 = 4n(1+2+\dots+4n-1) + (1+2+\dots+4n) = N$$

$$D_2 = 4n + (8n-1) + \dots + (16n^2 - 4n + 1) = 4n(1+2+\dots+4n) - (1+2+\dots+4n-1) = N$$

Bralcu prepuščamo, da se pri vsaki vrstici prepriča o pravilnosti zadnje enakosti.

Naj bo $i \leq 2n$. Pri danem i naj bo $j = 4n - i + 1$, tako da sta i -ti in j -ti stolpec diametralna. Vsota vseh elementov v teh dveh stolpcih je

$$S_i + S_j = 4ni + 8n^2(4n - 1) + 4n(4n - i + 1) + 8n^2(4n - 1) = 2N$$

Kaj se zgodi, če v teh stolpcih medsebojno zamenjam $2n$ števil tako, da medsebojno zamenjam števili, ki sta v isti vrstici? Razlika med števili v dveh izbranih diametralnih stolpcih je konstantna (mišljeni sta števili v isti vrstici). Ta konstanta znaša $d = 4n - 2i + 1$, če je i manjši od obeh indeksov, ki pripadata stolpcema. Novi vsoti v i -tem in j -tem stolpcu sta

$$S_i = \text{prvotni } S_i + 2nd = 4ni + 8n^2(4n - 1) + 2n(4n - 2i + 1) = N$$

$$S_j = 2N - S_i = N$$

Tu se pojavi vprašanje, katerih $2n$ števil zamenjati. Upoštevali bomo naslednji dve pravili.

- (A) če v i -tem in j -tem stolpcu zamenjam k -ti element, potem zamenjam tudi $(4n - k + 1)$ -ti element.
- (B) začnem s prvim elementom in naprej s korakom po ena. Element na diagonalni izpustim.

Ta postopek uporabim za $i = 1, 2, \dots, 2n$.

V nobeni vrstici se vsota ne razlikuje od začetne vsote, saj nobeno število ni zamenjalo vrstice. Zaradi upoštevanja pravila (B) sta tudi diagonalni ostali nedotaknjeni. Stanje je sedaj naslednje:

$$S_1 = S_2 = \dots = S_{4n} = D_1 = D_2 = N$$

$$V_i = 16n^2i - 8n^2 + 2n; \text{ za } i = 1, 2, \dots, 4n$$

Pravilo (A) se izkaže za zelo pomembno, saj še vedno velja, da je razlika isto-

ležnih elementov v diametralnih vrsticah i in $4n + 1 - i$ konstantna in znaša $e = 4n(4n - 1) - 4n(i - 1) = 4n(4n - 2i + 1)$.

Zdaj zamenjamo še po $2n$ števil v vsakem paru diametralnih vrstic po pravilih (A) in (B), kjer seveda zamenjamo pojma vrstica in stolpec.

Diagonale se ne pokvarijo zaradi pravila (B), vsote stolpcev pa se tudi ne spremenijo in novo stanje je:

$$S_1 = S_2 = \dots = S_{4n} = V_1 = V_2 = \dots = V_{4n} = D_1 = D_2 = N$$

Magični kvadrat je sestavljen.

Naj za konec dodam primer za $n = 1$.

a)

1	2	3	4
5	6	7	8
9	10	11	12
13	14	15	16

začetno stanje

b)

1	2	3	4
8	6	7	5
12	10	11	9
13	14	15	16

1. in 4. stolpec

c)

1	3	2	4
8	6	7	5
12	10	11	9
13	15	14	16

2. in 3. stolpec

d)

1	15	14	4
8	6	7	5
12	10	11	9
13	3	2	16

1. in 4. vrstica

e)

1	15	14	4
12	6	7	9
8	10	11	5
13	3	2	16

2. in 3. vrstica

Bralca vabimo, da razmisli o drugih možnih pravilih za sestavljanje magičnih kvadratov.

Borut Zalar

NOVICE

PROFESOR DR. IVAN KUŠČER – NOVI ČASTNI ČLAN DRUŠTVA

Oktobra 1986 je izbralo Društvo matematikov, fizikov in astronomov SR Slovenije za častnega člana profesorja dr. Ivana Kuščerja. Bralci Preseka novega častnega člana prav dobro poznajo. Ena od najlepših številčk Preseka *Enajsta šola iz fizike* je prav njegova. Najprej je napisal prispevek, ki je izhajal v nadaljevanjih, kasneje pa je celota izšla v posebni številki. V enajsti šoli je prof. Kuščer opisal mnoge pojave v naravi in jih pojasnil s fizikalnega stališča. Izredno lepe so slike, ki spremljajo besedilo. To je le del od njegovih prispevkov k popularizaciji fizike med mladino. Pred desetletji je veliko delal pri Prirodoslovnem društvu, pri organizaciji krožkov in predavanj za učitelje in učence. Napisal je več učbenikov ter vrsto let predaval različne predmete na Oddelku za fiziko Fakultete za naravoslovje in tehnologijo. Kot znanstvenik ni priznan le doma, pač pa tudi po svetu. Društvu matematikov, fizikov in astronomov SRS na letošnjem občnem zboru ni bilo težko odločiti, kdo naj postane častni član.

Ciril Velkovrh

DRUGA LETNA ŠOLA FIZIKE

Letos (1986) so se mladi fiziki, učenci prvih letnikov srednjega usmerjenega izobraževanja, že drugič zbrali na letni šoli. Izbrani so bili na republiškem tekmovalstvu iz fizike, ki je bilo junija meseca v Ljubljani.

Na Bled so dopotovali: Janez Brest, Denis Djonlagić, Jaka Cimprič, Andraž Oblak, Aleš Praprotnik, Matjaž Črnivec, Teodor Lango, Matej Valič, Boštjan Šutar, Peter Holozan, Igor Zrinski, Miha Mesarič, Anton Žižek, Ivan Škrlec in Samo Koselj.

V ponedeljek, 23. junija, smo se zbrali v Plemljevem domu na Bledu, nato pa odšli na otvoritev letne šole, ki je v glavnem potekala na blejski osnovni šoli, ki tudi nosi Plemljevo ime. Otvoritvi je takoj sledilo prvo predavanje o fiziki senzorjev (čutilnikov) v izvedbi dr. Antona Moljka. Popoldne smo si ogledovali mesto, zvečer pa smo imeli razgovor o predavanju in napravili urnik za naslednji dan.

V torek nam je mag. Aleksander Kregar predaval o senzorjih in elektroni-ki v fiziki, potem smo imeli praktične vaje, ki so se nadaljevale tudi popoldne pod vodstvom mag. Tomaža Skulja.

Naslednji dan smo poslušali radijsko šolo o Halleyevem kometu (Boris Kham) in izpolnjevali anketo. Do kosila je ostalo še toliko časa, da smo se malo osvežili v jezeru. V popoldanskem času smo se s tovarišem Alešem Jerebom pogovarjali o optičnih vlaknih, po večerji smo imeli spet razgovor o fiziki, potem smo se pred zasluženim počitkom še malo sprehodili ob jezeru.

V četrtek smo se odpeljali v Ljubljano, kjer smo preživeli poldrugo uro v planetariju s tovarišem Nikolajem Štritofo, popoldne pa smo na Delavski univerzi Boris Kidrič uporabljali pod mentorstvom mag. Ivana Gerliča računalnik kot merilnik. Predavanje v planetariju je pripomoglo k temu, da nas je še ves preostali del dneva prevzemala astronomija. Nekateri še spat niso mogli v miru, tako zelo jih je obsedel Hubblov zakon.

Petkov dopoldan smo preživeli v IBM centru v Radovljici, kjer smo si ogledali računski center, film o računalniškem konstruiranju letal in poslušali predavanje o razvoju računalnikov in programskih jezikov. Popoldansko predavanje pa je žal ta dan odpadlo, zato smo pohiteli z izpolnjevanjem anket in zapisovanjem vtisov o letni šoli. Udeleženci iz najoddaljenejših krajev so lahko odpotovali domov. Soboto je tako sklenilo pričakati na Bledu samo še šest entuziastov, ki so še pozno v noč modrovali o matematiki, fiziki in

astronomiji. Lotili smo se celo naloge, kako izračunati vztrajnostni moment homogene trikotne plošče glede na pravokotnico skozi težišče. Kaj več o tem morda kdaj drugič.

Sobota je bila dan pospravljanja sob, hodnikov in kuhinje v Plemljevem domu. Sledilo je slovo.

Preživeli smo lep, deloven in prijeten teden. Razšli smo se v upanju, da se še kdaj srečamo na taki šoli ali kakem drugem seminarju iz fizike.

Ves teden, razen prvega dne, nas je spremljalo čudovito vreme in tako smo lahko na jezeru opazovali poleg rac in labodov tudi naravne pojave, kot so interferenca, odboj in Dopplerjev efekt. Ni treba posebej poudarjati, da so se pri tem razvile koristne debate, čeprav so nas preganjale tiste sitne in nadležne živalce, ki jim pravimo komarji.

Na koncu naj se v imenu vseh udeležencev zahvalim vsem, ki so nam kakorkoli pomagali pri tej letni šoli, predvsem pa še ravnatelju osnovne šole dr. Josipa Plemlja na Bledu, prijaznim tajnicam v pisarni, tovarišici Alenki Plestenjakovi za pomoč pri organizaciji praktičnih vaj in ne nazadnje tudi kuharicam, ki so skrbele za telesno hrano udeležencev. Še posebej gre zahvala tudi tovarišu Jožetu Kotniku, ki je skrbel še za naše posebne želje.

Nada Razpet

7. LETNA ŠOLA MLADIH MATEMATIKOV, BLED 86

Na Bledu je od 16. do 21. junija 1986 potekala že sedma letna šola mladih matematikov. Udeležili so se je najboljši osmošolci, ki so osvojili zlato Vegovo priznanje na republiškem tekmovanju iz matematike, skupno sedemnajst učencev iz vse Slovenije.

Poslušali so predavanja o vsotah potenc naravnih števil, Evklidovem algoritmu, verižnih ulomkih, zlatem rezu in Pitagori. Za popestritev smo v program vključili tudi predavanje o Halleyevem kometu.

Prosti čas so izkoristili za ogled Bleda in okolice. Ogledali so si grad, se popeljali na otok, zanimiv pa je bil tudi izlet v sotesko *Vintgar*.

Ob zaključku letne šole so udeleženci dejali, da je bilo bivanje v Plemljevi hiši tako prijetno, da bi si želeli še kakšnega takega srečanja. Tudi s programom so bili zadovoljni.

Aleksander Potočnik

27. MEDNARODNA MATEMATIČNA OLIMPIADA

Letošnja olimpiada je bila v *Varšavi* od 7. do 15. julija. Sodelovale so ekipe 37 držav vseh celin s skupno 210 tekmovalci. V naši ekipi smo bili: iz 2. razreda Zoran ČRNJA iz Reke, iz 3. razreda Olivera MILENKOVIĆ iz Beograda in Nikola RUŠKUC iz Novega Sada in iz 4. razreda Predrag ANTIĆ iz Svetozareva, Jože FABČIČ iz Vipave in Domagoj KOVAČEVIĆ iz Slavonkse Požege. Vodja ekipe je bil Uroš MILUTINOVIĆ, član komisije pa Darko ŽUBRINIĆ.

Kot pred večino tekmovalj smo imeli priprave tudi pred olimpiado. Na dom smo dobili naloge, ki smo jih sami reševali. Zadnji teden pred tekmovanjem smo imeli skupne priprave v okolici Zagreba. Bili smo na planini Medvednici in se tako izognili vročini in mestnemu hrupu. Profesori in študentje matematike so nam predavali o zanimivostih v geometriji, teoriji števil, o neenakostih, rekurzivnih enačbah in o metodi trajektorij. Reševali smo tudi naloge s prejšnjih tekmovalj.

6. julija smo se odpravili v Varšavo. Potovali smo z vlakom, zato je potovanje trajalo več kot en dan. Organizatorji so nas že na postaji ločili od vodje ekipe. S tem so zagotovili, da mi, tekmovalci, ne bi mogli izvedeti besedil nalog pred tekmovanjem. Tekmovali smo 9. in 10. julija. Obakrat smo imeli na voljo po štiri ure in pol za tri naloge. V prostem času smo si ogledali kraljevi dvorec in stari del Varšave. Odšli smo tudi v Železovo Volo, rojstni kraj skladatelja Fryderyka Chopina. Veliko smo se družili z drugimi tekmovalci, največ z Italijani.

Vsak tekmovalec je dobil naloge napisane v svojem jeziku in jih je tako tudi reševal. Na ta način so bile vsem sodelujočim zagotovljene enake možnosti. Naše rešitve so najprej pregledali spremljevalci, ki so potem uskladili svoje ocene s koordinatorji. Predzadnji dan programa olimpiade je bila razglasitev rezultatov. Trije tekmovalci so dosegli vse možne točke. Joseph Kaene iz ZDA je dobil posebno nagrado za rešitev tretje naloge. Ekipno sta bili najboljši SZ in ZDA s po 203 točkami od 252 možnih, tesno pa jima je sledila ekipa ZRN. Jugoslavija je s 84 točkami zasedla 20. mesto. Domagoj KOVAČEVIĆ in JOŽE FABČIČ sta dobila tretji nagradi.

Na olimpiadi so bile naslednje naloge:

1. Naj bo d naravno število, različno od 2, 5 in 13. Dokaži, da obstajata v množici $\{2, 5, 13, d\}$ takšni različni števili a in b , da $ab - 1$ ni kvadrat celega števila. (Zahodna Nemčija)
2. V ravnini so dane točke P_0, A_1, A_2 in A_3 . Naj velja $A_n = A_{n-3}$. Točko P_n dobimo z rotacijo točke P_{n-1} okoli A_n za 120° v smeri urnega kazalca. Dokaži, da je trikotnik $A_1A_2A_3$ enakostraničen, če velja $P_0 = P_{1986}$. (Kitajska)

3. V vsako oglišče petkotnika postavimo celo število. Vemo, da je vsota vseh števil pozitivna. Če so v treh zaporednih ogliščih števila x , y in z in je srednje negativno ($y < 0$), jih po vrsti zamenjamo s števili $x + y$, $-y$ in $z + y$. Ali se zaporedje teh zamenjav vedno konča, to je, ali negativna števila vedno izginejo, ne glede na začetni izbor števil in način izbiranja trojk? Odgovor utemelji. (Vzhodna Nemčija)

4. Točki A in B sta sosednji oglišči pravilnega n -kotnika ($n > 4$) s središčem v točki O . Trikotnik OAB se premika po ravnini: A in B drsita po stranicah n -kotnika. O pa je nekje v notranjosti. Kakšno figuro naredi točka O , če A obide ves obseg? (Islandija)

5. Poišči vse funkcije f , ki so definirane za vsak x iz $[0, \infty)$, za katere velja:
 (i) $f(x \cdot f(y)) \cdot f(y) = f(x + y)$ za vse $x \geq 0, y \geq 0$;
 (ii) $f(2) = 0$;
 (iii) $f(x) \neq 0$ za vse $0 \leq x < 2$. (Velika Britanija)

6. V ravnini je dana končna množica točk s celoštevilskimi koordinatami. Ali jih lahko tako pobarvamo z rdečo in belo barvo, da bo izpolnjen pogoj: na vsaki premici, ki je vzporedna z eno izmed koordinatnih osi, se števili belih in rdečih točk, ki so na njej, razlikujeta največ za 1? (Vzhodna Nemčija)

Jože Fabčič

NOVE KNJIGE

Na željo mnogih učiteljev matematike, učencev ter njihovih staršev smo pred kratkim ponatisnili priročnik

F. Avsec, A. Cokan, I. Molinaro, I. Pucelj, B. Roblek, I. Štalec, M. Vagaja

ZBIRKA VAJ IZ ARITMETIKE, ALGEBRE IN ANALIZE za 3. razred srednjih šol

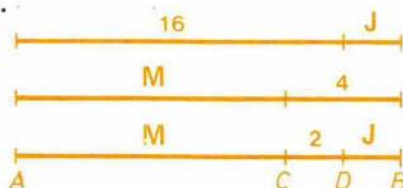
Knjigo lahko naročite pri Komisiji za tisk DMFA SRS, 61111 Ljubljana, Jadranska c. 21, pp 64, tel. št. (061) 265–061. Cena za posamezna naročila je 2.000.- din za skupinska naročila šol pa 1.600.- din.

Ciril Velkovrh

REŠITVE NALOG

MLADIM VEGOVCEM ZA OGREVANJE — rešitve nalog s str. 156

1.



Nalogo lahko rešimo s pomočjo daljic. Janku za zbirko manjka 16 din (prva daljica), Marku pa 4 din (druga daljica). Janku in Marku skupaj manjka 2 din (tretja daljica). Ker je $\overline{BC} = 4$, $\overline{CD} = 2$, zato je $\overline{BD} = 2$. Janko je imel samo 2 din. Ker je ce-

na knjige enaka $\overline{AB} = \overline{AD} + \overline{BD} = 16 + 2$, vidimo, da knjiga stane 18 din.

2. V oba krožka je vključenih skupno 25 učencev. Naj x označuje število učencev, ki obiskujejo matematični in rokometni krožek. Tedaj je samo v matematični krožek vključenih $20 - x$, v rokometni pa $11 - x$ učencev. Dobimo enačbo $20 - x + x + 11 - x = 25$ in odtod $x = 6$.

$$3. \quad \frac{1984}{1985} = 1 - \frac{1}{1985} \quad \text{in} \quad \frac{1985}{1986} = 1 - \frac{1}{1986}$$

Ker je $\frac{1}{1985} > \frac{1}{1986}$, je $1 - \frac{1}{1985} < 1 - \frac{1}{1986}$ in zato

$$\frac{1984}{1985} < \frac{1985}{1986}$$

4. Naj bosta dani lihi števili $2k + 1$ in $2m + 1$. Tedaj je $(2k+1)^2 - (2m+1)^2 = 4k^2 + 4k - 4m^2 - 4m = 4(k(k+1) - m(m+1))$. Produkta zaporednih števil sta sodi števili, torej je trditev dokazana.

5. Ker je $2^{1986} = (2^6)^{331} = 64^{331}$, je $2^{1986} > 63^{331}$.

$$6. \quad x^2 - 6x + (y^2 - 1)^2 + 9 = 0$$

$(x - 3)^2 + (y^2 - 1)^2 = 0$ in odtod $x - 3 = 0$ in $y^2 - 1 = 0$, zato velja $R = \{(3, 1), (3, -1)\}$

7. Ker je $\frac{1}{3} = \frac{4}{12}$ in $\frac{3}{4} = \frac{9}{12}$, mora biti $n \in \{5, 6, 7, 8, 9\}$.

8. Če daje 1000 pri deljenju z iskanim številom ostanek 8, potem je $1000 - 8 = 992$ deljivo s tem številom. Podobno je tudi $900 - 1 = 899$ deljivo z istim številom.

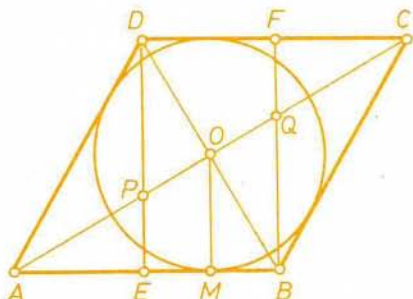
$$992 = 2.2.2.2.2.31$$

$$899 = 29.31$$

$$D(899, 992) = 31$$

Števili 900 in 1000 smo delili z 31.

9.



Naj bo O presek diagonal romba in točka M dotikališče krožnice in stranice AB . Ker je trikotnik $\triangle AOM$ pravokoten in $OM = r = \frac{1}{4} \cdot AC$, je $OM = r = \frac{1}{4} \cdot OA$ in zato je kot $\angle AOM = 60^\circ$ in kot $\angle OAM = 30^\circ$. To pomeni, da je $\angle BAD = \angle BCD = 60^\circ$, oziroma da sta trikotnika $\triangle ABD$ in $\triangle BCD$ enakostranična. Višini DE in BF romba sekata daljšo diagonalo v točkah P in Q . Ker sta DE in BF tudi višini enakostraničnih trikotnikov $\triangle ABD$ in

$\triangle BCD$, je $AP = 2 \cdot OP = 2 \cdot OQ = QC$ oziroma $AP = PQ = QC$.

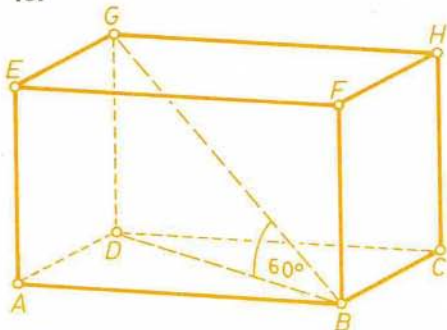
10. Če je dedek Marko rojen leta $19ab$, potem bo leta $19ba$ star 81 let. To pomeni $19ba - 19ab = 81$ in $ba - ab = 81$. Očitno mora biti cifra b večja od 8, zato je $b = 9$ in tedaj $a = 0$. Dedek Marko je rojen leta 1909.

11. Naj bo $p = 2$. Tedaj je $p^2 + 13 = 4 + 13 = 17$. Ker je 17 praštevilo, je $p = 2$ ena rešitev naloge.

Naj bo $p \geq 3$. Tedaj je p neparno število in zato p^2 tudi neparno število, vsota $p^2 + 13$ pa parno število in zato deljivo z 2, kar pomeni, da je sestavljeno. Odtod sledi, da je $p = 2$ edina rešitev naloge.

12. Ker je $10^n = 1000 \dots 000$, kjer je število ničel enako n , je $10^n - 1 = 999 \dots 999$, kjer je število devetk enako n . Število $999 \dots 999$ je deljivo z 9 in je $999 \dots 999 : 9 = 111 \dots 111$, kjer je število enic enako n . Da bi bilo število $111 \dots 111$ deljivo z 9, mora biti vsota cifr deljiva z 9, kar pomeni, da mora biti n deljiv z 9, torej $n \in \{9, 18, 27, \dots\}$.

13.



Diagonala osnovne ploskve je enaka 5 cm $= \sqrt{3^2 + 4^2}$. Ker je trikotnik $\triangle DBG$ pravokoten in kot $\angle DBG = 60^\circ$, je $BG = 10$ cm in $GD = c = 5\sqrt{3}$ cm. Površina kvadra je $P = (24 + 70\sqrt{3})$ cm², prostornina pa $V = 60\sqrt{3}$ cm³.

14. Mačka in pol v dveh dneh in pol poje tri in pol miši. To pomeni, da 3 mačke v 5 dneh pojejo $4.3,5 = 14$ miši, ena mačka pa v enem dvenu poje $14/15$ miši. Ena mačka v 45 dneh poje $45 \cdot \frac{14}{15} = 42$ miši, sto mačk pa v 45 dneh poje $100 \cdot 42 = 4200$ miši.

15. Kvadrat ima tri vrste, tri stolpce in dve diagonali. Vsota je na vsaki od njih lahko najmanj 3 in največ 9, lahko pa zavzame 7 različnih vrednosti (3, 4, 5, 6, 7, 8, 9). Teh 7 različnih vrednosti je treba razporediti na 8 mest (3 vrste, 3 stolpce in 2 diagonali), kar pomeni, da morata biti vsaj na dveh mestih enaki vsoti.

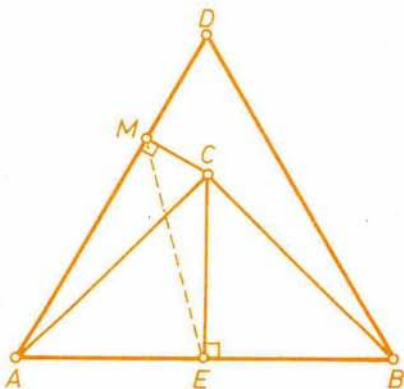
16. Označimo iskano število z $ABCD$. Tedaj je $9 \cdot ABCD = DCBA$, ali zapisano drugače: $9000A + 900B + 90C + 9D = 1000D + 100C + 10B + A \leq 9999$. Zaradi $A \geq 1$ je $9000 \leq 9000A \leq 9999$, odtod pa je očitno $A = 1$. Podobno velja $9000 \leq 1000D \leq 9999$ in tedaj $D = 9$. Ti dve vrednosti vstavimo v gornjo enačbo $9000 + 900B + 90C + 81 = 9000 + 100C + 10B + 1$. Odtod sledi $890B = 10C - 80$ oziroma $89B = C - 8$. Zaradi $C - 8 \leq 1$ je $89B$ lahko samo 0, torej $B = 0$ in tedaj $C = 8$. Iskano število je 1089.

17. Naj bo $p = 2$. Tedaj je $p^3 + 3^p = 2^3 + 3^2 = 8 + 9 = 17$, zato je $p = 2$ ena rešitev naloge.

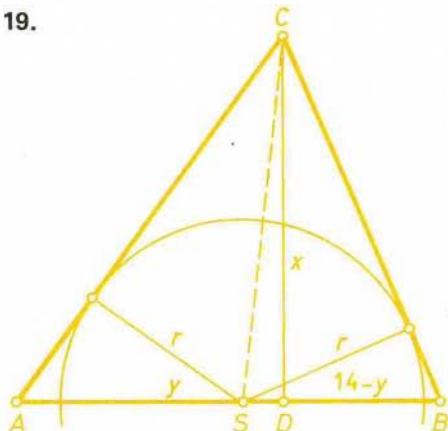
Če je $p \geq 3$, tedaj mora biti p liho število. Tedaj sta p^3 in 3^p tudi lihi števili, njuna vsota pa sodo število in zato ne more biti praštevilo. Torej je $p = 2$ edina rešitev naloge.

18. Trikotnik $\triangle ACE$ je pravokoten in mu je mogoče očrtati krog, ki ima središče v središču hipotenuze AC .

Podobno je tudi s trikotnikom $\triangle ACM$. Torej je mogoče krog očrtati štirikotniku $AECM$. Kota $\sphericalangle CEM$ in $\sphericalangle CAM$ sta skladna, ker sta obodna kota nad tetivo CM . Ker je $\sphericalangle CAM = 60^\circ - 45^\circ = 15^\circ$, je tudi $\sphericalangle CEM = 15^\circ$.



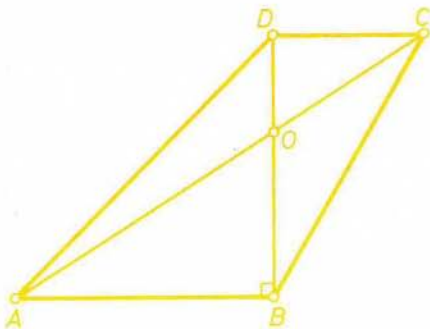
19.



Naj bo D nožišče višine iz oglišča C in označimo $CD = x$, $AD = y$ in zato $BD = 14 - y$. V trikotniku $\triangle ACD$ in $\triangle BCD$ uporabimo Pitagorov izrek in dobimo $x^2 = 15^2 - y^2 = 13^2 - (14 - y)^2$. Sledi $225 - y^2 = 169 - 196 + 28y - y^2$, $28y = 252$ in $y = 9$ cm. Sedaj je $x^2 = 225 - 81 = 144$ in $x = 12$ cm. Ploščina trikotnika je zato $p = 14 \cdot 12 : 2 = 84$ cm², $p = (15r + 13r) / 2 = 84$, $r = 6$ in $p_0 = 36\pi$ cm².

20. Število deklic označimo z x , število dečkov pa z y . Tedaj velja $20x + 30y = 170$ oziroma $2x + 3y = 17$. Ker morata biti x in y naravni števili, mora biti $x \leq 8$ in $y \leq 5$. Ker je $2x$ sodo število, mora biti $3y$ liho in zato tudi y liho število, torej $y \in \{1, 3, 5\}$. Tedaj je $x \in \{7, 4, 1\}$. Skupina je štela liho število članov, zato so bile v skupini 4 deklice in 3 dečki (možnosti $1 + 7$ in $5 + 1$ odpadeta).

21. Ker velja $AB \parallel CD$, je po Talesovem izreku $AB:CD = BO:DO = 4:2 = 2:1$.



Kota $\sphericalangle DCA$ in $\sphericalangle BAC$ sta skladna, ker imata vzporedne krake, kota $\sphericalangle DCA$ in $\sphericalangle BCA$ pa tudi, kot sledi iz zahtev naloge. Zato velja $\sphericalangle BCA = \sphericalangle BAC$ trikotnik $\triangle ABC$ je enakokrak in velja $AB = BC = 2x$, če je $CD = x$. Trikotnik $\triangle BCD$ je pravokoten, zato iz $BC = 2x$ in $CD = x$ sledi $\sphericalangle BCD = 60^\circ$ in $BD = 6 = x\sqrt{3}$. Od tod je $x = 2\sqrt{3}$ in ploščina trapeza $p = 18\sqrt{3}$ cm².

Aleksander Potočnik

22. REPUBLIŠKO TEKMOVANJE OSNOVNOŠOLCEV IZ MATEMATIKE — rešitve nalog s str. 138

7. razred

$$1. \frac{(a + (a + 1) + (a + 2))^2}{a^2 \cdot (a + 1)^2 \cdot (a + 2)^2} = \frac{(-3 + (-3 + 1) + (-3 + 2))^2}{(-3)^2 \cdot (-2)^2 \cdot (-1)^2} = 1$$

2. Množina suhe snovi v lesu se med sušenjem ne spreminja, zato: 40% od $2250 \text{ kg} = 900 \text{ kg}$. Ker je po sušenju v lesu še 50% vode, tehta tedaj dvakrat več, kot je v njem suhe snovi, torej $2.900 \text{ kg} = 1800 \text{ kg}$.

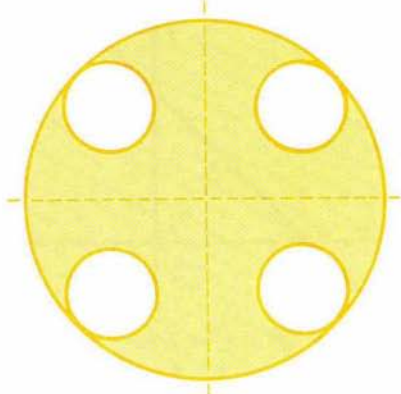
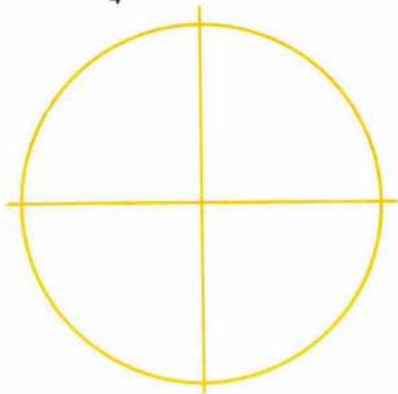
$$3. 1986 + 1986 + \dots + 1986 = x \cdot 1986$$

$$x \cdot 1986 = x \cdot 2.993 = x \cdot 2.3.331$$

Ker iščemo najmanjše tako število x , da bo vsota deljiva z 99 in število 1986 že vsebuje praštevilo 3 , je najmanjši tak x enak 33 .

$$4. \frac{2 \pi \cdot 1}{4} = 2 \pi r_1$$

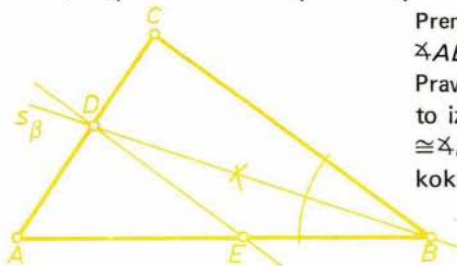
$$r_1 = \frac{1}{4}$$



Skupna ploščina malih krogov je $4\pi \left(\frac{1}{4}\right)^2 = \frac{\pi \cdot 1^2}{4} = \frac{\pi}{4} \text{ m}^2$. Ploščina nepokritega dela kroga je enaka

$$\pi - \frac{\pi}{4} = \frac{3\pi}{4} \text{ in odtod } \frac{3\pi}{4} : \pi = \frac{3}{4} = 75\%.$$

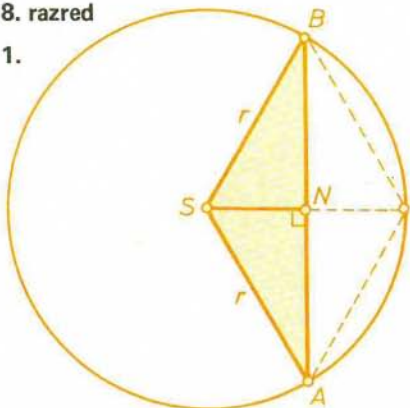
5.



Premica (B, D) je simetrala kota $\sphericalangle ABC$, zato velja $\sphericalangle EBD \cong \sphericalangle DBC$. Prav tako je $\sphericalangle DBC \cong \sphericalangle BDE$, saj sta to izmenična kота. Torej je $\sphericalangle EBD \cong \sphericalangle BDE$ in trikotnik $\triangle EBD$ je enakokrak.

8. razred

1.



Iz skice razberemo, da je $\frac{t}{2} = \frac{r\sqrt{3}}{2}$,

$r = t/\sqrt{3} = 2\sqrt{3}$ cm. Valj je enakostraničen, zato je $v = 2r = 4\sqrt{3}$ cm.

Izračunamo še

$$\rho_{\text{odseka}} = \frac{\pi r^2}{3} - \frac{r^2 \sqrt{3}}{4} =$$

$$= (4\pi - 3\sqrt{3}) \text{ cm}^2 \text{ in}$$

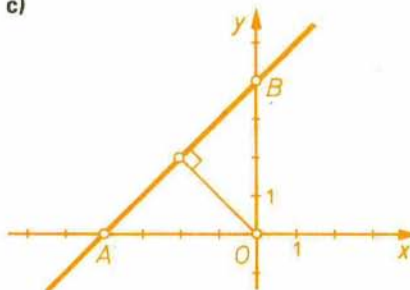
$$V = \rho_{\text{odseka}} \cdot v = (4\pi - 3\sqrt{3}) \cdot 4\sqrt{3} =$$

$$= (16\pi\sqrt{3} - 36) \text{ cm}^3$$

2.a) $7 = (n^2 - 2)(-3) + 4n^2 - 8$, $7 = n^2 - 2$, $n^2 = 9$. Rešitvi sta torej dve: 3 in -3.

b) $n^2 - 2 = 2$, $n^2 = 4$ z rešitvama -2 in 2.

c)



$$n = \sqrt{3}, y = x + 4$$

$$y(0) = 4$$

$$x + 4 = 0, x = -4, y(-4) = 0$$

Trikotnik $\triangle AOB$ je enakokrak pravokotni trikotnik, zato je razdalja premice od izhodišča enaka

$$\frac{AB}{2} = \frac{4\sqrt{2}}{2} = 2\sqrt{2}.$$

$$3. \left(x + \frac{1}{x}\right)^2 = x^2 + 2 \cdot x \cdot \frac{1}{x} + \frac{1}{x^2} = x^2 + 2 + \frac{1}{x^2} = \frac{1}{4} + 2 = \frac{9}{4}$$

$$\text{Zato je } x + \frac{1}{x} = \frac{3}{2} \text{ ali } x + \frac{1}{x} = -\frac{3}{2}.$$

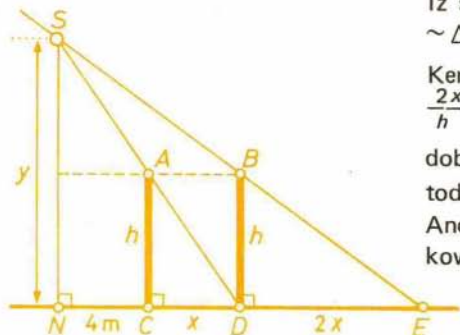
$$4.a) \frac{A}{B} = \frac{x^3 + x^2 - 9x - 9}{(x-2)^2 - (x-4)^2} = \frac{x^3 - 9x + x^2 - 9}{x^2 - 4x + 4 - (x^2 - 8x + 16)} =$$

$$= \frac{x(x^2 - 9) + (x^2 - 9)}{x^2 - 4x + 4 - x^2 + 8x - 16} = \frac{(x+1)(x-3)(x+3)}{4(x-3)} = \frac{(x+1)(x+3)}{4}$$

$$b) \frac{A}{B} = -\frac{(2k+2)(2k+4)}{4} = -\frac{2(k+1) \cdot 2(k+2)}{4} = (k+1)(k+2)$$

Od dveh zaporednih naravnih števil je eno vedno sodo, zato je tudi produkt $(k+1)(k+2)$ sodo število.

5.



Iz skice preberemo, da je $\triangle DAC \sim \triangle DSN$, velja $\frac{x}{h} = \frac{x+4}{v}$

Ker je $\triangle EBD \sim \triangle ESN$, velja

$$\frac{2x}{h} = \frac{3x+4}{y} \quad \text{. Iz zgornjih enačb}$$

dobimo $\frac{3x+4}{y} = 2 \cdot \frac{x+4}{y}$ in od

$$\text{tod } 3x + 4 = 2(x + 4), x = 4.$$

Andrejeva senca je dolga 4 m, Brankova pa 8 m.

Aleksander Potočnik

REŠITEV ŠTEVILSKA KRIŽANKE, PRESEK 1, str. 34–35

1 2	2 2	3 5		4 4	5 3	6 2	7 0
8 3	3	6		9 3	1	0	2
	10 1	4		11 0	2		12 2
13 1	1	2	14 2		15 5	16 1	2
17 5			18 1	19 1		20 4	2
21 9	22 1	23 1		24 6	25 4	0	
26 3	2	1	27 6	8	4	2	28 1
29 0	5	3		30 2	5	5	5



16. ZVEZNO TEKMOVANJE OSNOVNOŠOLCEV IZ MATEMATIKE — rešitve nalog s str. 142

7. razred

1. $A:B:C = 600:900:1500$, $A:B:C = 6:9:15$, $A:B:C = 2:3:5$

$$2x + 3x + 5x = 17000$$

$$10x = 17000 \text{ in } x = 1700$$

Amir dobi 3400 din, Boris 5100 din in Cane 8500 din.

2. Označimo število muh m , število pajkov pa p .

$$6m + 8p = 176$$

$$3m + 4p = 88$$

$$3m = 88 - 4p$$

$$3m = 4(22 - p)$$

p	$3m$	m
10	48	16
12	40	
14	32	
16	24	8
18	16	
20	8	

Otroci so ujeli 10 pajkov in 16 muh.

3. Iskano število zapišemo $abba$.

$$a.1000 + b.100 + b.10 + a = 1001a + 110b = 11(91a + 10b)$$

Odtod vidimo, da je eno od praštevil 11. Zato obstajajo tri možnosti:

a) $91a + 10b = 5.7$

b) $91a + 10b = 7.13$

$$91a + 10b = 35$$

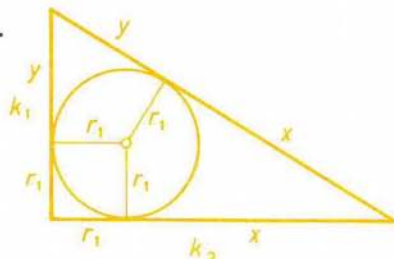
$$91a + 10b = 91$$

c) $91a + 10b = 13.17$

$$91a + 10b = 221$$

Ker velja $0 < a \leq 9$ in $0 \leq b \leq 9$, prva možnost očitno odpade, pri tretji pa je zaradi drugega člena edina možnost $a = 1$, tedaj pa dobimo $b = 13$, kar je nemogoče. Iz druge možnosti očitno sledi $a = 1$ in $b = 0$, zato je iskano število 1001.

- 4.



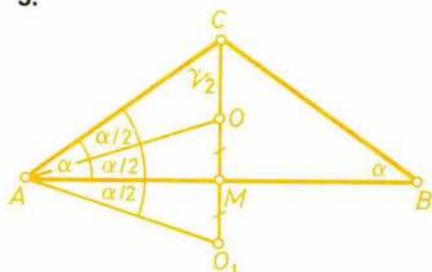
$$k_1 + k_2 = (y + r_1) + (x + r_1)$$

$$k_1 + k_2 = x + y + 2r_1$$

$$k_1 + k_2 = h + 2r_1$$

$$k_1 + k_2 = 2r + 2r_1 = 2(r + r_1)$$

5.



Središče O_1 očrtanega kroga povežemo z ogliščema A in C . Zveznica AO razpolavlja kot $\sphericalangle CAB = \alpha$, zato je $\sphericalangle CAO = \sphericalangle OAB = \alpha/2$. Zaradi simetrije je tudi $\sphericalangle BAO_1 = \alpha/2$. Trikotnik AO_1C je enakokrak z vrhom O_1 , zato je $3\alpha/2 = \gamma/2$. V pravokotnem trikotniku AMC torej velja $\alpha + 3\alpha/2 = 90^\circ$. Odtod dobimo: $\alpha = 36^\circ$, $\gamma = 108^\circ$.

8. razred

1. Trditev dokazujemo za števila oblike $ab5$. Iz pogojev naloge sledi najprej

$$\begin{aligned} (10a + b)(10a + b + 1) \cdot 100 + 25 &= \\ &= (100a^2 + 10ab + 10ab + b^2 + 10a + b) \cdot 100 + 25 = \\ &= 10000a^2 + 2000ab + 100b^2 + 1000a + 100b + 25 \text{ in potem še} \\ (100a + 10b + 5)^2 &= 10000a^2 + 100b^2 + 25 + 1000a + 100b + 2000ab \end{aligned}$$

Dobljena izraza sta res enaka.

$$\begin{aligned} 2. \quad xyz + xy + xz + yz + x + y + z + 1 &= 1986 \\ (xyz + xy) + (xz + x) + (yz + y) + (z + 1) &= 1986 \\ xy(z + 1) + x(z + 1) + y(z + 1) + (z + 1) &= 1986 \\ (z + 1)(xy + x + y + 1) &= 1986 \\ (x + 1)(y + 1)(z + 1) &= 2 \cdot 3 \cdot 331 \end{aligned}$$

Število x je najmanjše, torej je $x = 1$. Za y in z pa imamo dve možnosti:

$$a) \quad y = 2, z = 330 \text{ oziroma} \quad b) \quad y = 330, z = 2.$$

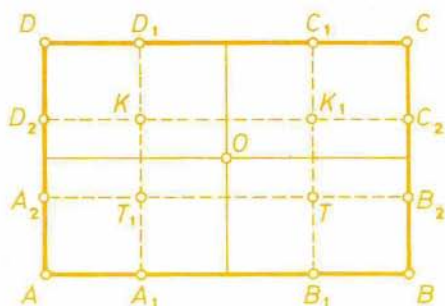
Urejeni trojki $(1, 2, 330)$ in $(1, 330, 2)$ ustrezata pogojem naloge.

3. Kvadrat naravnega števila se ne more končati z 8, zato je pravilna Dušanova prva trditev. Imamo naslednje možnosti:

$$\begin{array}{ll} 108 = 2^2 \cdot 3^3 & 558 = 2 \cdot 3^2 \cdot 31 \\ 198 = 2 \cdot 3^2 \cdot 11 & 648 = 2^3 \cdot 3^4 \\ 288 = 2^5 \cdot 3^2 & 738 = 2 \cdot 3^2 \cdot 41 \\ 378 = 2 \cdot 3^3 \cdot 7 & 828 = 2^2 \cdot 3^2 \cdot 23 \\ 468 = 2^2 \cdot 3^2 \cdot 13 & 918 = 2 \cdot 3^3 \cdot 17 \end{array}$$

Število 108 ustreza Zoranovi drugi in Nikolovi prvi trditvi, število 468 pa Zoranovi prvi in Nikolovi drugi trditvi. Števila 198, 378, 558, 738 in 918 ne ustrezajo nobeni Zoranovi trditvi, števila 288 in 648 pa ustrezata obema Zoranovima trditvama, zato našeta števila ne izpolnjujejo pogoja, da je vsak učenec uganil natanko eno lastnost. Isto velja za število 828, ki ne ustreza nobeni Nikolovi trditvi. Iskano število je 108 ali pa 468.

4.



O — središče somernosti
 T — poljubno izbrana točka
 K — središčno somerna točka
 k T

Iz skice preberemo:

$$p_{B_1BB_2T} = p_{K_1C_2CC_1} = p_{D_2KD_1D} = p_{AA_1T_1A_2} = S_1$$

$$p_{TB_2C_2K_1} = p_{A_2T_1KD_2} = S_2$$

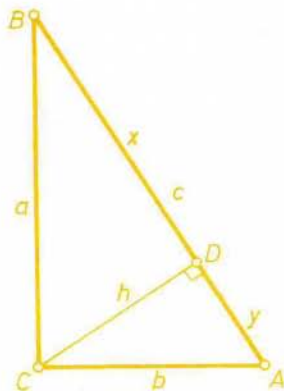
$$p_{A_1B_1TT_1} = p_{KK_1C_1D_1} = S_3$$

$$p_{T_1TK_1K} = S_4, p_{ABCD} = p$$

Predpostavimo

$p_{AB_1TA_2} = S_1 + S_3 > p/4$ in $p_{TB_2CC_1} = S_1 + S_2 > p/4$. Če ti neenačbi seštejemo, dobimo $2S_1 + S_2 + S_3 > p/2$ oziroma $4S_1 + 2S_2 + 2S_3 > p$, kar je nemogoče. Bralec naj presodi, ali je s tem trditev dokazana.

5.



Primerjajmo kvadrata obeh vrst:

$$(c+h)^2 = c^2 + 2hc + h^2$$

$$(a+b)^2 = a^2 + 2ab + b^2 =$$

$$= a^2 + b^2 + 2ab = c^2 + 2hc$$

V zadnji enakosti smo upoštevali, da je v pravokotnem trikotniku

$$ab = hc = 2p_{\Delta}, \text{ zato je}$$

$$(c+h)^2 > (a+b)^2 \quad \text{in} \quad \text{tudi} \\ c+h > a+b.$$

Aleksander Potočnik

REŠITVE P-2, str. 89 in P-3, str. 155, 169

Lev in antilopa: ne

Poiščite tatu: Andrej

Nogomet:

Žoga : Stativa = 1 : 0

Žoga : Zmaga = 0 : 2

Stativa : Zmaga = 2 : 1

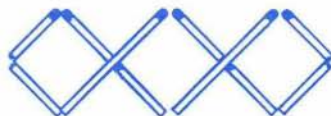
Nenavadna plošča: ne

Prevedla in izbrala Dušica Boben

45



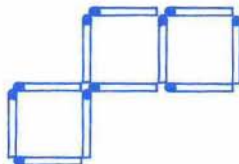
46



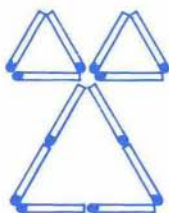
47



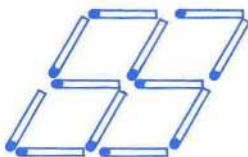
48



49a



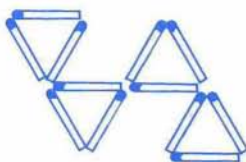
49b



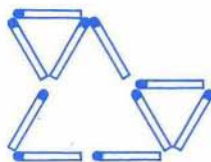
49c



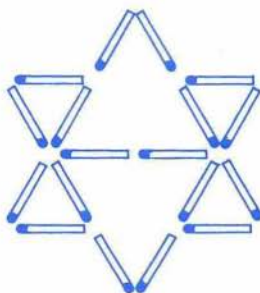
50



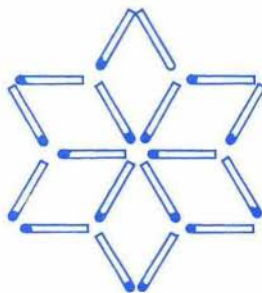
51



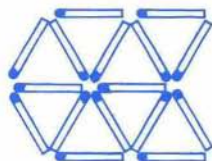
52a



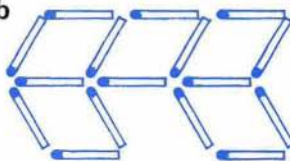
52b



53a



53b



MANAMA المنامة
DEPENDENCY OF AJMAN



APOLLO 11

AIR MAIL

AJMAN مان



APOLLO 11
Launched July 16, 1969

1 Ri

AIR MAIL

AJMAN مان



APOLLO 11

2 Ri

AIR MAIL

MANAMA المنامة
DEPENDENCY OF AJMAN



APOLLO 11
MOON LANDING

2 Ri

AIR MAIL

MANAMA المنامة
DEPENDENCY OF AJMAN



APOLLO 11
Thinking left from the moon

3 Ri

AIR MAIL

AJMAN مان

First Men on the Moon



ARMSTRONG
and COLLINS

These are small steps
for a man, one giant
step for mankind.

5 Ri

AIR MAIL



МАГЯР POSTA 2



ПОЧТА СССР 16



4



CUBA correos 1980 30



CUBA correos 1980 10

